И. М. ГЕЛЬФАНД, Д. А. РАЙКОВ, Г. Е. ШИЛОВ

КОММУТАТИВНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ КОЛЬЦА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1960

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Серия выпускается под общим руководством редакционной коллегии журнала «Успехи математических наук»

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1960

11-5-4

АННОТАЦИЯ

В предлагаемой книге излагается теория коммутативных нормированных колец с ее применениями к анализу и топологии. В конце книги в виде приложения воспроизведена статья И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка «Нормированные кольца с инволюцией и их представления», могущая служить введением в теорию некоммутативных нормированных колец с инволюцией.

Книга рассчитана на математиков (студентов старших курсов, аспирантов и научных работников), занимающихся функциональным анализом и его приложениями.

Израиль Моисеевич Гельфанд, Дмитрий Абрамович Райков, Георгий Евгеньевич Шилов

Коммутативные нормированные кольца

Редактор *С. А. Виленкина*

Техн. редактор *С. С. Гаврилов* Корректор *Т. С. Плетнева*

Сдано в набор 12/XII 1959 г. Подписано к печати 11/III 1960 г. Бумага 84×108 1/32.
Физ. печ. л. 9,875. Условн. печ. л. 16,20. Уч.-изд. л. 17,51.
Тираж 5000 экз. Т-01042. Цена книги 10 р. 75 к. Заказ 945.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга посвящена изложению одного из разделов функционального анализа — теории коммутативных нормированных колец с главнейшими ее применениями. В основе книги лежит наша статья, написанная для «Успехов математических наук» в 1940 г. по горячим следам событий начального периода развития этой теории. Обстоятельства военного времени сильно задержали опубликование статьи; она была напечатана лишь в 1946 г. и притом из-за недостатка места в сокращенном виде. В настоящей книге восстановлены (вернее, заново написаны) некоторые опущенные разделы этой статьи (относящиеся к гармоническому анализу на группах и регулярным кольцам) и изложен ряд результатов, полученных уже после опубликования статьи. Кроме того, отчасти в связи с этим, существенно переделана и бóльшая часть старого текста.

Книга состоит из трех частей. Часть I, посвященная общей теории коммутативных нормированных колец, разбита на две главы, первая из которых содержит основы теории, вторая же посвящена более специальным ее вопросам. Наиболее существенным новшеством является здесь распространение операционного исчисления на неоднолистные аналитические функции от нескольких переменных (§ 13). Часть II, посвященная применениям к гармоническому анализу, распадается на три главы. В первой из них (гл. III) рассматривается кольцо абсолютно интегрируемых функций на прямой со свертыванием в качестве умножения и находятся максимальные идеалы этого кольца (а также некоторых его аналогов). В следующей главе (гл. IV) эти результаты переносятся на произвольные коммутативные локально бикомпактные группы и кладутся в основу построения гармонического анализа и теории характеров; новшеством являются здесь построение инвариантной меры на группе характеров и доказательство формул обращения для преобразования Фурье, совершенно не основывающиеся на теоремах о представлении положительно определенных функций или положительных функционалов; в связи с этим и рассмотрение положительно определенных функций перенесено в самый конец главы. Наконец, последняя глава второй части (гл. V) — наиболее специальная из всех глав книги — посвящена исследованию кольца функций с ограниченным изменением на прямой с умножением, определенным как свертывание; основным добавлением к старому тексту является здесь полное описание максимальных идеалов этого кольца. Последняя часть книги — третья — распадается на две главы, посвященные рассмотрению двух важных классов колец функций: регулярных колец (гл. VI) и колец с равномерной сходимостью (гл. VII). В первой из этих глав изучается в основном строение идеалов в регулярных кольцах; в качестве одного из применений доказывается в обобщенном виде известная тауберова теорема Винера; глава заключается найденным Л. Шварцем примером кольца функций, обладающего замкнутыми идеалами, непредставимыми в виде пересечения максимальных идеалов. В последней главе (гл. VII) рассматриваются кольца $C(S)$ всех ограниченных непрерывных комплексных функций на вполне регулярных пространствах S и различные их подкольца; первый параграф воспроизводит здесь (хотя и в совершенно новой редакции) результаты, содержавшиеся в статье: установление естественного соответствия между бикомпактными расширениями вполне регулярного пространства S и симметричными подкольцами кольца $C(S)$; остальные два параграфа (посвященные произвольным подкольцам колец $C(S)$ и их идеалам) содержат преимущественно новые результаты *).

---

*) Зависимость между главами книги такова. На главу I существенно опираются все дальнейшие главы. От главы II зависят лишь глава VI (опирающаяся на § 9) и одно место § 44 (глава VII), опирающееся на § 14; кроме того, в мелком шрифте главы III имеются две ссылки на § 13. От главы III зависят главы IV и V (опирающиеся на §§ 16 и 17) и мелкий шрифт главы VI (где в § 41 имеется ссылка также на § 19). Главы IV и V независимы, и дальнейшие главы на них не опираются. На главу VI опираются последние два параграфа главы VII.

Поскольку для теоретико-групповых применений важны некоммутативные нормированные кольца с инволюцией, в конце книги в виде приложения воспроизводится с некоторыми сокращениями статья И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка «Нормированные кольца с инволюцией и их представления». Читатель, желающий подробнее ознакомиться с теорией некоммутативных нормированных колец, может найти обстоятельное изложение ее в большой монографии М. А. Наймарка «Нормированные кольца». Эта монография содержит также изложение основ теории коммутативных нормированных колец, не касаясь, однако, большинства ее аналитических применений. То же замечание можно сделать и по поводу книги Л. Люмиса «Введение в абстрактный гармонический анализ».

У читателя предполагается знание элементов теории нормированных пространств и теоретико-множественной топологии. Для понимания четвертой главы требуется еще знать, что такое топологическая группа. Разумеется, основные понятия теории меры и интеграла Лебега также предполагаются известными.

Чтобы не прерывать изложения, историко-литературные указания выделены в конец книги. Цифры в квадратных скобках относятся к списку литературы, приложенному к историко-литературным указаниям.

И. М. Гельфанд,
Д. А. Райков,
Г. Е. Шилов

ЧАСТЬ I

ГЛАВА I
ОБЩАЯ ТЕОРИЯ КОММУТАТИВНЫХ НОРМИРОВАННЫХ КОЛЕЦ

§ 1. Понятие нормированного кольца

Определение 1. *Нормированным кольцом* *) называется комплексное банаховское пространство, для элементов которого определено ассоциативное умножение, перестановочное с умножением на комплексные числа, дистрибутивное относительно сложения и непрерывное по каждому множителю.

В дальнейшем мы будем предполагать, что *умножение коммутативно*.

Каждое нормированное кольцо, не содержащее единицы e относительно умножения, можно дополнить до нормированного кольца с единицей, формально присоединив последнюю, т. е. образовав кольцо формальных сумм $\lambda e + x$, где λ пробегает все комплексные числа, x — все элементы рассматриваемого кольца, а e есть присоединенная единица; операции в расширенном кольце определяются естественным образом:

$$(\lambda e + x) + (\mu e + y) = (\lambda + \mu) e + (x + y),$$
$$\mu (\lambda e + x) = \mu\lambda e + \mu x,$$
$$(\lambda e + x)(\mu e + y) = \lambda\mu e + (\mu x + \lambda y + xy),$$

норма же задается формулой

$$\|\lambda e + x\| = |\lambda| + \|x\|.$$

*) В другой терминологии: *банаховской алгеброй*. Всюду в дальнейшем под «кольцом» понимается алгебра над телом комплексных чисел.

Поэтому при построении общей теории нормированных колец можно ограничиться рассмотрением *нормированных колец с единицей*, что мы и будем делать.

Приведем несколько примеров нормированных колец.

1° Пусть C — пространство всех комплексных функций, определенных и непрерывных на отрезке $[0, 1]$, наделенное нормой $\|x\| = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)|$. C есть нормированное кольцо (с единицей $x(t) \equiv 1$) относительно обычного умножения (очевидно, удовлетворяющего всем условиям определения 1).

2° Пусть D_n — пространство всех комплексных функций, определенных и обладающих непрерывной n-й производной на отрезке $[0, 1]$, наделенное нормой

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{n} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x^{(k)}(t)|. \tag{1}$$

D_n есть нормированное кольцо (с единицей $x(t) \equiv 1$) относительно обычного умножения (которое, как нетрудно проверить, непрерывно в норме (1) по совокупности обоих сомножителей и, очевидно, удовлетворяет также всем остальным условиям определения 1).

3° Пусть W — пространство всех комплексных функций вещественного переменного, разложимых в абсолютно сходящийся тригонометрический ряд, наделенное нормой

$$\|z\| = \left\| \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \right\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| \tag{2}$$

(однозначно определяемой вместе с этим рядом его суммой $z = z(t)$). Если

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt} \in W \text{ и } y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_l e^{ilt} \in W,$$

то также $z(t) = x(t)\, y(t) \in W$. Действительно, произведение абсолютно сходящихся рядов $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt}$ и $\sum\limits_{l=-\infty}^{\infty} b_l e^{ilt}$ есть абсолютно сходящийся ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$, где

$$c_n = \sum_{k+l=n} a_k b_l = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{n-l}\, b_l.$$

Так как при этом

$$\|z\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |a_{n-l}| |b_l| =$$
$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_{n-l}| \right) |b_l| =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| \sum_{l=-\infty}^{\infty} |b_l| = \|x\| \|y\|,$$

то умножение непрерывно в норме (2) по совокупности обоих сомножителей. Тем самым W есть нормированное кольцо (с единицей $x(t) \equiv 1$) относительно обычного умножения.

4° Пусть $I^{(n)}$ — кольцо с единицей, порожденное оператором дифференцирования D в пространстве полиномов степени $\leqslant n$ от одного переменного с комплексными коэффициентами. Так как $D^{n+1} = 0$, то элементами этого кольца являются всевозможные полиномы $\sum_{k=0}^{n} a_k D^k$, где a_k — произвольные комплексные числа и D^0 — единичный оператор. Положим

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} a_k D^k \right\| = \sum_{k=0}^{n} |a_k|.$$

Тогда $I^{(n)}$ будет нормированным кольцом относительно умножения операторов с единицей $e = D^0$.

5° Пусть $L^1(0, 1)$ — пространство всех абсолютно интегрируемых измеримых комплексных функций на отрезке $[0,1]$, наделенное нормой $\|x\| = \int_0^1 |x(t)|\, dt$. С помощью теоремы Фубини о связи двойного интеграла Лебега с повторными можно показать, что, каковы бы ни были функции $x(t)$ и $y(t)$ из $L^1(0, 1)$, их «свертка»

$$(x * y)(t) = \int_0^t x(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1) \tag{3}$$

существует почти для всех t и принадлежит $L^1(0, 1)$, а операция «свертывания» (3) ассоциативна *). Эта операция,

*) Подробнее об этом см. § 16.

очевидно, билинейна, а подстановка $\tau \to t-\tau$ показывает, что она также коммутативна. При этом (снова на основании теоремы Фубини)

$$\|x*y\| = \int_0^1 \left| \int_0^t x(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^t |x(t-\tau)|\,|y(\tau)|\, d\tau \right) dt =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_\tau^1 |x(t-\tau)|\, dt \right) |y(\tau)|\, d\tau =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-\tau} |x(t)|\, dt \right) |y(\tau)|\, d\tau \leqslant \int_0^1 |x(t)|\, dt \int_0^1 |y(\tau)|\, d\tau =$$

$$= \|x\|\,\|y\|,$$

откуда следует, что свертывание непрерывно по совокупности обоих «сомножителей». Таким образом, $L^1(0, 1)$ есть нормированное кольцо относительно свертывания. Легко видеть, что оно не содержит единицы *). *Нормированное кольцо, полученное путем формального присоединения к* $L^1(0, 1)$ *единицы, мы будем обозначать* I.

6° Пусть A — пространство всех функций комплексного переменного ζ, определенных и непрерывных в круге $|\zeta| \leqslant 1$ и регулярных всюду внутри этого круга, наделенное нормой $\|x\| = \max\limits_{|\zeta| \leqslant 1} |x(\zeta)|$. A есть нормированное кольцо (с единицей $x(\zeta) \equiv 1$) относительно обычного умножения (очевидно, удовлетворяющего всем условиям определения 1).

Как было выше установлено, в кольцах примеров 3° и 5° норма обладает следующим свойством:

$$\|xy\| \leqslant \|x\|\,\|y\|. \tag{4}$$

Тому же неравенству, очевидно, удовлетворяет норма также в кольцах примеров 1°, 4° и 6°. Однако в примере 2° при

*) Ср. § 16. Отсутствие в кольце $L^1(0, 1)$ единицы следует также из того, что это кольцо состоит из обобщенных нульстепенных элементов (см. стр. 34).

$n \geqslant 2$ неравенство (4), вообще говоря, не выполняется; так, для $x(t) \equiv t$ имеем: $\|x(t)\| = 2$, $\|x^2(t)\| = 5 > \|x(t)\|^2$.

Но если вместо (1) взять в D_n в качестве нормы

$$\|x(t)\| = \sum_{k=0}^{n} \frac{\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x^{(k)}(t)|}{k!}, \tag{5}$$

то неравенство (4), как в этом нетрудно убедиться, окажется уже выполненным. При этом нормы (1) и (5) *топологически эквивалентны*. Возможность такой перенормировки является общим свойством нормированных колец.

Теорема 1. *Для каждого нормированного кольца R можно найти топологически и алгебраически изоморфное ему кольцо R', обладающее свойствами*

$$\|xy\| \leqslant \|x\| \, \|y\| \quad \textit{и} \quad \|e\| = 1. \tag{*}$$

Доказательство. Каждый элемент x кольца R порождает оператор A_x умножения на x: $A_x y = xy$. В силу определения 1, этот оператор является линейным. Операторы A_x образуют в кольце Q всех линейных операторов, отображающих банаховское пространство R в себя, подкольцо R' с единицей (а именно, единичным оператором E, порождаемым единицей e кольца R).

Покажем, что R' есть нормированное кольцо относительно нормы $\|A_x\| = \sup\limits_{\|y\| \leqslant 1} \|xy\|$. В доказательстве нуждается лишь полнота R', т. е. замкнутость R' в Q.

В силу ассоциативности умножения имеем: $A_x(yz) = x(yz) = (xy)z = A_x y \cdot z$. Нетрудно видеть, что это свойство характеристично для операторов из кольца R'. Действительно, если оператор A таков, что для любых y и z имеет место равенство $A(yz) = Ay \cdot z$, то, полагая $Ae = x$, имеем: $Ay = A(ey) = Ae \cdot y = xy$, т. е. A есть оператор умножения на x.

Пусть теперь операторы $A_n \in R'$ сильно сходятся к некоторому оператору A, т. е. $A_n x$ сходится к Ax по норме пространства R для каждого $x \in R$. Тогда, в силу непрерывности умножения по первому множителю, имеем: $A(xy) = \lim A_n(xy) = \lim A_n x \cdot y = Ax \cdot y$ и, значит, по только что доказанному, также $A \in R'$. Таким образом, R' замкнуто в Q не только в смысле равномерной, но и в смысле сильной сходимости операторов.

Очевидно, кольца R и R' алгебраически изоморфны. Покажем, что они изоморфны также топологически. Имеем:

$$\|A_x\| = \sup_{\|y\| \leqslant 1} \|xy\| \geqslant \left\| x \frac{e}{\|e\|} \right\| = \frac{\|x\|}{\|e\|} \; ^{*})$$

*) Легко проверить, что $e \neq 0$ и потому $\|e\| > 0$.

или

$$\|x\| \leqslant \|e\| \, \|A_x\|. \tag{6}$$

Таким образом, отображение $A_x \to x$ пространства R' на пространство R непрерывно. Но так как оба эти пространства полны, то, в силу известной теоремы Банаха *), также обратное отображение $x \to A_x$ непрерывно. Тем самым топологический изоморфизм колец R и R' доказан, а с ним доказано и утверждение теоремы, так как норма в R' обладает свойством (*). Одновремено мы получили, что *каждое нормированное кольцо топологически и алгебраически изоморфно некоторому нормированному кольцу операторов в банаховском пространстве.*

Замечание. Если в кольце R выполнено условие (*), то R и R' *изометричны*. Действительно, (6) в этом случае дает: $\|x\| \leqslant \|A_x\|$. С другой стороны, в силу (4), имеем:

$$\|A_x\| = \sup_{\|y\| \leqslant 1} \|xy\| \leqslant \|x\| \sup_{\|y\| \leqslant 1} \|y\| = \|x\|.$$

Соединяя оба неравенства, получаем: $\|A_x\| = \|x\|$.

Следствие 1. *Произведение xy непрерывно по совокупности обоих сомножителей.*

Определение 2. Ряд $x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots$ будем называть *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$\|x_1\| + \|x_2\| + \ldots + \|x_n\| + \ldots$$

Очевидно, каждый абсолютно сходящийся ряд в R сходится.

Следствие 2. *Абсолютно сходящиеся ряды, составленные из элементов нормированного кольца, можно складывать и перемножать так же, как и абсолютно сходящиеся числовые ряды.*

В дальнейшем *мы будем всюду предполагать, что норма удовлетворяет условию* (*).

§ 2. Максимальные идеалы

Лемма. *Множество O всех элементов x нормированного кольца R, для которых существует обратный элемент x^{-1}, открыто, причем x^{-1} есть непрерывная функция от x на O.*

*) См. Л. А. Люстерник и В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, М. — Л., 1951, стр. 146—149, или А. Н. Колмогоров и С. В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, М., 1954, стр. 123—126.

Доказательство. Прежде всего *каждый элемент* x, *для которого* $\|e-x\|<1$, *обладает обратным элементом* x^{-1}. Действительно, рассмотрим ряд

$$e+(e-x)+(e-x)^2+\ldots \tag{1}$$

Так как $\|(e-x)^n\|\leqslant\|e-x\|^n$, то этот ряд абсолютно сходится и, следовательно, представляет какой-то элемент из R. Умножив его на $x=e-(e-x)$ и применив следствие 2 теоремы 1 § 1, получим:

$$e+(e-x)+(e-x)^2+\ldots-(e-x)-(e-x)^2-\ldots=e.$$

Следовательно, сумма ряда (1) и есть обратный элемент x^{-1}, существование которого мы утверждали.

Пусть теперь x — произвольный элемент из O. Обозначим через $U_0(e)$ окрестность $\|e-y\|<1$ единичного элемента e, по доказанному, содержащуюся в O. Так как $xx^{-1}=e$, то, в силу непрерывности умножения, существует такая окрестность $U(x)$ элемента x, что $U(x)x^{-1}\subset U_0(e)$. Значит, zx^{-1} для произвольного $z\in U(x)$ имеет обратный элемент $(zx^{-1})^{-1}$: $zx^{-1}(zx^{-1})^{-1}=e$. Но тогда $x^{-1}(zx^{-1})^{-1}$ есть обратный элемент для z, т. е. вместе с x в O содержится и его окрестность $U(x)$.

Пусть, наконец, $x_n\to x\in O$. Тогда $z_n=x_nx^{-1}\to$ $\to xx^{-1}=e$, и поэтому, как вытекает из выражения (1) для обратного элемента, также

$$xx_n^{-1}=z_n^{-1}=e+(e-z_n)+(e-z_n)^2+\ldots\to e.$$

Умножив обе части этого предельного соотношения на x^{-1}, получим $x_n^{-1}\to x^{-1}$, и лемма полностью доказана.

Определение 1. Множество I элементов кольца R называется *идеалом*, если оно обладает следующими свойствами:

а) если $x\in I$ и $y\in I$, то также $x+y\in I$;

б) если $x\in I$, то $zx\in I$ для всех $z\in R$.

Идеал I кольца R называется *собственным*, если, кроме того,

в) $I\neq R$.

Примером собственного идеала кольца C примера 1° § 1 может служить совокупность всех функций из C, равных нулю на отрезке $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Элемент кольца R, обладающий обратным элементом, не может содержаться ни в каком собственном идеале. Действительно, если $x \in I$, то при существовании x^{-1} мы для всякого элемента z кольца R имели бы $z = (zx^{-1})x \in I$, т. е. I совпадал бы с R.

С другой стороны, каждый элемент, не имеющий обратного, содержится в некотором собственном идеале, а именно, в совокупности элементов zx, где z пробегает всё R.

Таким образом, *для того чтобы элемент кольца R имел обратный, необходимо и достаточно, чтобы он не принадлежал ни одному собственному идеалу*. В частности, *если кольцо R не содержит собственных идеалов, отличных от нулевого* (т. е. состоящего лишь из элемента 0), *то R есть тело.*

Нетрудно убедиться в том, что замыкание $\bar{I}$ идеала I удовлетворяет условиям а) и б) определения 1. Так как вместе с тем каждый собственный идеал I содержится в замкнутом в силу леммы множестве $R \setminus O$, то и его замыкание $\bar{I}$ содержится в $R \setminus O$ и, значит, не совпадает с R. Таким образом, *замыкание собственного идеала есть снова собственный идеал.*

Определение 2. *Максимальным идеалом* называется собственный идеал, не содержащийся ни в каком другом собственном идеале.

Найдем все максимальные идеалы кольца C примера 1° § 1.

Максимальный идеал кольца C есть совокупность всех функций из C, обращающихся в нуль в какой-либо фиксированной точке отрезка [0, 1].

Совокупность M_τ всех функций $x(t) \in C$, для которых $x(\tau) = 0$, является собственным идеалом кольца C. Пусть $y(t)$ — какая-нибудь функция из C, не принадлежащая M_τ. Нам нужно показать, что не существует собственного идеала, который содержал бы M_τ и $y(t)$. Но это следует из того, что всякая функция $z(t) \in C$ представима в виде

$$z(t) = \frac{z(\tau)}{y(\tau)} y(t) + \left(z(t) - \frac{y(t)}{y(\tau)} z(\tau)\right),$$

где $z(t) - \dfrac{y(t)}{y(\tau)} z(\tau) \in M_\tau$, а первое слагаемое кратно $y(t)$ *).

---

*) Так же можно убедиться в том, что во всяком кольце функций (с обычными алгебраическими операциями) совокупность всех функций, обращающихся в нуль в одной и той же точке, образует максимальный идеал.

Пусть теперь M — какой-нибудь максимальный идеал кольца C. Покажем, что все функции, входящие в этот максимальный идеал, обращаются в нуль в некоторой фиксированной точке отрезка $[0, 1]$. В самом деле, если это не так, то для каждой точки $\tau \in [0, 1]$ найдется функция $x_\tau(t) \in M$ такая, что $x_\tau(\tau) \neq 0$ и, значит, $|x_\tau(t)| > \delta_\tau > 0$ в некотором интервале, окружающем τ. По лемме Бореля — Лебега, существует конечное число таких интервалов, покрывающих весь отрезок $[0, 1]$. Пусть $\tau_1, \ldots, \tau_n$ — соответствующие им точки. Функция

$$x(t) = x_{\tau_1}(t)\overline{x_{\tau_1}(t)} + \ldots + x_{\tau_n}(t)\overline{x_{\tau_n}(t)} = \\ = |x_{\tau_1}(t)|^2 + \ldots + |x_{\tau_n}(t)|^2$$

содержится в M. Но, с другой стороны, $x(t) > \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \delta_{\tau_k}^2 > 0$ и, значит, в C существует функция $\frac{1}{x(t)}$, а в таком случае $x(t)$, как мы видели, не может принадлежать ни одному собственному идеалу, в частности максимальному идеалу M. Полученное противоречие показывает, что существует такая точка τ, что $x(\tau) = 0$ для всех $x(t) \in M$. Но тогда M, будучи максимальным, есть идеал M_τ, составленный из в с е х функций кольца C, обращающихся в нуль в точке τ.

Таким же точно образом убеждаемся в том, что совокупность всех абсолютно сходящихся рядов $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$, суммы которых обращаются в нуль в некоторой точке τ, образует максимальный идеал в кольце W примера 3° § 1. Но, желая повторить для кольца W приведенное выше доказательство обратного утверждения, мы пришли бы к пункту, где из того, что сумма абсолютно сходящегося ряда $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ отлична от нуля для всех t, делается заключение, что $\left(\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}\right)^{-1}$ также принадлежит кольцу W, т. е. разлагается в абсолютно сходящийся тригонометрический ряд. Это заключение верно и составляет содержание одной теоремы Винера ([29], стр. 14; [30], стр. 91)*); однако ниже мы докажем его, как раз основываясь на том, что все максимальные идеалы кольца W имеют указанный вид.

З а м е ч а н и е. Пусть R — произвольное нормированное кольцо, составленное из (необязательно всех) непрерывных функций $x(t)$, заданных на бикомпакте (т. е. бикомпактном хаусдорфовом пространстве) S, с обычными сложением и умножением. C и D_n (пример 2° § 1) принадлежат этому типу; W также принадлежит, если

*) См. также А. З и г м у н д, Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939, стр. 145.

входящие в него функции считать заданными не на прямой, а на окружности радиуса 1. Просматривая приведенные выше рассуждения, мы видим, что совокупность всех функций из R, одновременно обращающихся в нуль в какой-нибудь точке множества S, всегда является максимальным идеалом кольца R *); для справедливости же обратного утверждения достаточно, чтобы R обладало следующими свойствами:

а) вместе с каждой функцией $x(t)$ в R входит и комплексно сопряженная функция $\overline{x(t)}$;

б) вместе с функцией $x(t)$, нигде на S не обращающейся в нуль, в R входит и функция $\frac{1}{x(t)}$.

Чтобы этим устанавливалось взаимно однозначное соответствие между максимальными идеалами и точками множества S, нужно еще, чтобы кольцо R обладало следующим «свойством отделимости»:

в) для любых двух различных точек t_1, t_2 множества S в R существует функция $x(t)$ такая, что $x(t_1) \neq x(t_2)$.

Условие б) не только достаточно (в соединении с условием а)), но и необходимо. Условие а) не является необходимым, как мы увидим в § 4 при определении максимальных идеалов кольца A примера 6° § 1.

Так как D_n обладает свойствами а), б) и в), то заключаем, что *максимальные идеалы кольца D_n это совокупности всех функций из D_n, обращающихся в нуль в произвольной фиксированной точке отрезка* [0, 1].

Далее, кольцо $C(S)$ всех непрерывных комплексных функций на S, очевидным образом удовлетворяющее условиям а) и б), в силу нормальности пространства S и известной теоремы Урысона **) обладает также свойством отделимости в). Таким образом, и *максимальные идеалы кольца $C(S)$ это совокупности всех функций из $C(S)$, обращающихся в нуль в произвольной фиксированной точке бикомпакта S.*

Очевидно, *всякий максимальный идеал замкнут*: в противном случае он содержался бы в своем замыкании как собственная часть и, значит, не был бы максимальным.

Теорема 1. *Всякий собственный идеал I содержится в максимальном.*

Доказательство проведем с помощью трансфинитной индукции. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_\omega, \ldots, x_\alpha, \ldots$ — вполне упорядоченная трансфинитная последовательность всех элементов кольца R. Каждому не максимальному собственному идеалу I можно поставить в соответствие собственный

---

*) Притом независимо от бикомпактности пространства S и непрерывности функций $x(t)$ (см. сноску на стр. 18).

**) См., например, П. С. Александров, Введение в общую теорию функций и множеств, М. — Л., 1948, стр. 305.

идеал $I^+ \supset I$ следующим образом: так как I не максимальный, то существуют элементы $x \in R \setminus I$, обладающие тем свойством, что совокупность всех элементов вида $j + rx$ где $j \in I$, $r \in R$, образует собственный идеал; пусть x_I—первый из подобных элементов в последовательности $\{x_\alpha\}$; тогда полагаем $I^+ = \{j + rx_I\}$. Построим теперь трансфинитную последовательность собственных идеалов I_α следующим образом: положим $I_0 = I$ и пусть I_α построены для всех $\alpha < \beta$; если β первого класса, т. е. существует $\beta - 1$, то положим $I_\beta = I^+_{\beta-1}$; если β второго класса, то положим $I_\beta = \bigcup\limits_{\alpha < \beta} I_\alpha$. Эта последовательность имеет мощность, не превосходящую мощности кольца R, и потому обладает последним членом, который тем самым и является максимальным идеалом, содержащим идеал I.

В соединении со сделанным выше замечанием об условии существования обратного элемента отсюда непосредственно следует

Теорема 2. *Для того чтобы элемент коммутативного нормированного кольца R имел обратный, необходимо и достаточно, чтобы он не принадлежал ни одному максимальному идеалу. В частности, если кольцо не содержит ни одного ненулевого максимального идеала, то оно является телом.*

Элементы $x, y \in R$ называются *сравнимыми по идеалу* I, если $x - y \in I$. Так как отношение сравнимости рефлексивно, симметрично и транзитивно, то R разбивается на классы сравнимых между собой элементов. Назвав суммой (произведением) классов X, Y класс, содержащий суммы (произведения) элементов x, y из X, Y, и обозначив через λX (λ—комплексное число) класс, составленный из элементов λx, где $x \in X$, получим кольцо R/I классов вычетов кольца R по идеалу I. Нулем этого *кольца вычетов* служит класс, образованный всеми элементами $x \in I$, а единицей E—класс, содержащий единичный элемент e кольца R.

Введем в R/I норму

$$\|X\| = \inf_{x \in X} \|x\|. \tag{2}$$

Теорема 3. *Если I — замкнутый собственный идеал, то R/I есть нормированное кольцо.*

Доказательство.

1) $\|\lambda X\| = |\lambda| \|X\|$.

Очевидно.

2) $\|X+Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\|$.

Имеем:

$$\|X+Y\| = \inf_{z \in X+Y} \|z\| = \inf_{x \in X,\, y \in Y} \|x+y\| \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{x \in X,\, y \in Y} \{\|x\| + \|y\|\} = \inf_{x \in X} \|x\| + \inf_{y \in Y} \|y\| = \|X\| + \|Y\|.$$

3) $\|XY\| \leqslant \|X\| \|Y\|$.

Имеем:

$$\|XY\| = \inf_{z \in XY} \|z\| \leqslant \inf_{x \in X,\, y \in Y} \|xy\| \leqslant \inf_{x \in X,\, y \in Y} \|x\| \|y\| =$$

$$= \inf_{x \in X} \|x\| \inf_{y \in Y} \|y\| = \|X\| \|Y\|.$$

4) $\|E\| = 1$.

Так как $e \in E$, то $\|E\| \leqslant 1$. Пусть y — произвольный элемент из E. Имеем: $y = e + x$, где $x \in I$. Если бы $\|y\|$ было меньше 1, то, как было показано в начале параграфа, x имел бы обратный и, значит, не мог бы принадлежать собственному идеалу I. Таким образом, $\|E\| \geqslant 1$ и, значит, $\|E\| = 1$.

5) Если $\|X\| = 0$, то X есть нулевой класс.

В силу (2) существует последовательность $x_n \in X$ такая, что $x_n \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть x — произвольный элемент класса X. Имеем: $x - x_n \in I$, и так как $x_n \to 0$, то $x = \lim\limits_{n \to \infty} (x - x_n) \in \bar{I}$. Но, по предположению, идеал I замкнут, $\bar{I} = I$. Таким образом, X совпадает с I, т. е. является нулевым классом.

6) R/I полно по норме (2).

Пусть $\{X_n\}$ — фундаментальная последовательность классов, т. е. $\|X_n - X_m\| \to 0$ при $m, n \to \infty$. Тогда из нее можно выбрать подпоследовательность $\{X_{n_k}\}$ такую, чтобы ряд $\sum\limits_k \|X_{n_{k+1}} - X_{n_k}\|$ сходился. В силу (2), для произвольного элемента $x_1 \in X_{n_1}$ найдется элемент $x_2 \in X_{n_2}$ такой, что

$\|x_2 - x_1\| < 2\|X_{n_2} - X_{n_1}\|$; далее, для этого x_2 найдется элемент $x_3 \in X_{n_3}$ такой, что $\|x_3 - x_2\| < 2\|X_{n_3} - X_{n_2}\|$, и т. д. Очевидно, последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна и, следовательно, сходится к некоторому $x \in R$. Но тогда последовательность $\{X_{n_k}\}$, а значит и вся последовательность $\{X_n\}$, сходится к классу X, содержащему x.

Замечание 1. Гомоморфное отображение кольца R в кольцо вычетов R/I по замкнутому идеалу I, получающееся, если элементу $x \in R$ поставить в соответствие содержащий его класс X, является открытым непрерывным отображением *). В самом деле, пусть $U \subset R$ — открытый шар с центром в нуле: $U = \{x \in R\colon \|x\| < \delta\}$, и пусть U' — образ U в R/I. По определению нормы в кольце вычетов, этот образ составлен из тех и только тех классов $X \in R/I$, для которых $\|X\| < \delta$; следовательно, U' — открытое множество в R/I. Точно так же убедимся в том, что образ всякого открытого шара из R есть открытое множество в R/I. Так как открытые шары образуют в R определяющую систему окрестностей, то отсюда следует, что всякое открытое множество из R имеет открытый образ в R/I. С другой стороны, пусть $F' \subset R/I$ замкнуто, F — полный прообраз F', $x_1 (\in X_1)$, $x_2 (\in X_2)$, ..., $x_n (\in X_n)$, ... — фундаментальная последовательность в F, $x \in R$ — ее предел и $x \in X$. Так как $\|X - X_n\| \leqslant \|x - x_n\|$, то $X = \lim\limits_{n \to \infty} X_n$ и, следовательно, принадлежит F'; но тогда $x \in F$ и, следовательно, F замкнуто.

Замечание 2. Между замкнутыми идеалами J кольца R, содержащими замкнутый идеал I, и замкнутыми идеалами J' кольца R/I существует взаимно однозначное соответствие, при котором каждому идеалу J отвечает его образ J' в R/I.

Действительно, в силу непрерывности отображения $R \to R/I$, полный прообраз J всякого замкнутого идеала J' кольца R/I есть замкнутый идеал кольца R, очевидно, содержащий I, причем из $J_1' \neq J_2'$ следует $J_1 \neq J_2$. Обратно, образ J' всякого

*) То есть образ всякого открытого множества из R является открытым множеством в R/I (отображение открытое) и полный прообраз всякого замкнутого множества из R/I является замкнутым множеством в R (отображение непрерывное).

идеала J, содержащего I, есть идеал в кольце R/I; при этом J — полный прообраз идеала J', так как J вместе с каждым элементом x содержит все элементы, сравнимые с x по идеалу I; и так как $R \to R/I$ — открытое отображение, а при открытом отображении из замкнутости полного прообраза следует замкнутость образа, то образ J' всякого замкнутого идеала J, содержащего I, является замкнутым идеалом в R/I.

Очевидно, собственные идеалы кольца R/I являются образами собственных идеалов кольца R. В частности, максимальные идеалы кольца R/I это образы максимальных идеалов кольца R, содержащих I.

Теорема 4. *Кольцо R/M вычетов коммутативного нормированного кольца R по максимальному идеалу M есть тело.*

Доказательство. В силу теорем 1 и 2, достаточно убедиться в том, что кольцо R/M не содержит ни одного ненулевого собственного идеала. Но если бы в R/M имелся такой идеал J, то его прообраз в R был бы собственным идеалом, содержащим идеал M и не совпадающим с ним, в противоречие с максимальностью идеала M.

Заметим, что, в силу теоремы 3, R/M есть нормированное кольцо, ибо, как мы видели выше, максимальный идеал всегда замкнут.

Нетрудно видеть, что верна и обратная теореме 4

Теорема 5. *Если кольцо R/I вычетов кольца R по собственному идеалу I есть тело, то I является максимальным идеалом. При этом заранее не предполагается, что идеал I замкнут.*

Доказательство. Если бы в кольце R существовал собственный идеал J, содержащий идеал I и не совпадающий с ним, то его образ в R/I был бы ненулевым собственным идеалом, что невозможно, так как R/I, по предположению, есть тело.

Рассмотрим кольцо вычетов кольца C по максимальному идеалу M. Так как M состоит из всех функций $x(t) \in C$, обращающихся в нуль в некоторой точке τ (см. стр. 19), то каждый класс вычетов X состоит из всех функций $x(t) \in C$, принимающих в этой точке одно и то же значение λ_X. При этом $\lambda_{X+Y} = \lambda_X + \lambda_Y$, $\lambda_{XY} = \lambda_X \lambda_Y$, $\lambda_{\mu X} = \mu \lambda_X$. Кроме того, $\|X\| = |\lambda_X|$; в самом деле, если $x(t) \in X$, то $\|x\| \geqslant |x(\tau)| = |\lambda_X|$, а с другой стороны, функция $x(t) \equiv \lambda_\chi$ принадлежит классу X. Таким образом, C/M изоморфно телу комплексных чисел.

Ниже мы увидим, что этим свойством обладают все коммутативные нормированные кольца. При доказательстве этого мы используем методы теории аналитических функций.

§ 3. Абстрактные аналитические функции

Определение 1. Функцию $x(\lambda)$, определенную в некоторой области D плоскости комплексного переменного λ и принимающую значения из нормированного кольца R, мы будем называть *аналитической* в D, если для всех $\lambda \in D$ она сильно дифференцируема, т. е. отношение

$$\frac{x(\lambda+h)-x(\lambda)}{h} \tag{1}$$

сходится по норме к некоторому пределу $x'(\lambda)$, когда $h \to 0$.

Так, если обратный элемент $x(\lambda)=(z-\lambda e)^{-1}$ существует для $\lambda=\lambda_0$ (а тогда, в силу леммы § 2, он существует и для всех λ, достаточно близких к λ_0), то он является аналитической функцией от λ в некоторой окрестности точки λ_0. Действительно,

$$\frac{(z-(\lambda+h)e)^{-1}-(z-\lambda e)^{-1}}{h}=(z-(\lambda+h)e)^{-1}(z-\lambda e)^{-1}$$

и, в силу леммы § 2, произведение в правой части сходится к $(z-\lambda e)^{-2}$, когда $h \to 0$.

Если функция $x(\lambda)$ аналитична в D и f — любой линейный функционал, определенный на пространстве R, то $f\{x(\lambda)\}$ есть обыкновенная аналитическая функция в D. Действительно, из сильной сходимости отношения (1) следует также сходимость отношения

$$\frac{f\{x(\lambda+h)\}-f\{x(\lambda)\}}{h}=f\left\{\frac{x(\lambda+h)-x(\lambda)}{h}\right\},$$

т. е. дифференцируемость функции $f\{x(\lambda)\}$.

На наши «абстрактные» аналитические функции (со значениями в R) можно распространить основные результаты теории обыкновенных аналитических функций и прежде всего теорему и формулу Коши. Для этого нам нужно будет еще определить контурное интегрирование абстрактных функций.

Пусть Γ — ориентированная дуга спрямляемой кривой в плоскости комплексного переменного λ и $x(\lambda)$ — функция со значениями в R, определенная и непрерывная по норме на Γ. Интеграл $\int\limits_{\Gamma} x(\lambda)\,d\lambda$ мы определим обычным образом:

$$\int\limits_{\Gamma} x(\lambda)\,d\lambda = \lim_{\max|\lambda_{k+1}-\lambda_k|\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} x(\lambda'_k)(\lambda_{k+1}-\lambda_k),$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ — разбиение дуги Γ последовательными точками, λ'_k — любая точка, заключенная на Γ между λ_k и λ_{k+1}, и предел понимается в смысле сильной сходимости. Существование и однозначность этого предела следуют из спрямляемости кривой Γ и равномерной непрерывности $x(\lambda)$ на Γ и доказываются обычным способом. Из определения интеграла видно также, что

$$f\left\{\int\limits_{\Gamma} x(\lambda)\,d\lambda\right\} = \int\limits_{\Gamma} f\{x(\lambda)\}\,d\lambda \tag{2}$$

для любого линейного функционала f.

Теорема Коши. *Если функция $x(\lambda)$ со значениями в нормированном кольце R аналитична в замкнутой области, ограниченной простой спрямляемой кривой Γ, то*

$$\int\limits_{\Gamma} x(\lambda)\,d\lambda = 0.$$

Доказательство. Положим $\int\limits_{\Gamma} x(\lambda)\,d\lambda = y$. В силу (2) для всякого линейного функционала f имеем: $f\{y\} = \int\limits_{\Gamma} f\{x(\lambda)\}\,d\lambda$. Следовательно, по теореме Коши для обыкновенных аналитических функций, $f\{y\} = 0$ для всякого f. Но тогда и $y = 0$, ибо, по теореме Хана — Банаха, для всякого $y \neq 0$ существует линейный функционал f такой, что $f\{y\} \neq 0$.

Аналогично доказывается

Интегральная формула Коши. *Если функция $x(\lambda)$ со значениями в нормированном кольце R аналитична в замкнутой области, ограниченной спрямля-*

емой кривой Γ, *то для всех внутренних точек* λ *этой области она представима в виде*

$$x(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{x(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\lambda}. \tag{3}$$

Из формулы (3) обычным образом следует, что *аналитическая функция со значениями в нормированном кольце R неограниченно дифференцируема и в окрестности каждой точки регулярности* $\lambda=\lambda_0$ *разлагается в абсолютно сходящийся ряд Тейлора*

$$x(\lambda)=x(\lambda_0)+x'(\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)+\frac{x''(\lambda_0)}{2!}(\lambda-\lambda_0)^2+\ldots,$$

причем радиус сходимости этого ряда равен расстоянию от λ_0 *до ближайшей особенности функции* $x(\lambda)$.

В качестве примера (дальше он нам понадобится) определим радиус наибольшего круга с центром в $\lambda=0$, внутри которого существует $(e-\lambda x)^{-1}$. Эта функция дифференцируема, т. е. аналитична, во всей области, где она существует. Поэтому ее ряд Тейлора

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n x^n \tag{4}$$

должен внутри искомого круга абсолютно сходиться. Обратно, функция $(e-\lambda x)^{-1}$, очевидно, существует внутри круга абсолютной сходимости ряда (4) и совпадает с суммой этого ряда. Но кругом абсолютной сходимости ряда (4) является

$$|\lambda|<\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|x^n\|}}\;{}^{*)}.$$

Таким образом, искомым радиусом служит $\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|x^n\|}}$.

---

*) Из неравенства (4) § 1 легко следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|z^n\|}$ существует для любого $z\in R$. Действительно, в силу указанного неравенства, полагая $\|z^n\|=a_n$, имеем: $a_n=a_{mk+l}\leqslant a_k^m a_l$ $(0\leqslant l<k)$,

Аналогично можно убедиться в том, что наибольший радиус ρ_x шаровой окрестности точки $x \in O$, целиком содержащейся в O, равен $\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^{-n}\|}}$.

§ 4. Функции на максимальных идеалах. Радикал кольца

Опираясь на результаты, полученные в предыдущем параграфе, мы можем теперь закончить изучение кольца вычетов коммутативного нормированного кольца по максимальному идеалу, начатое в § 2.

Определение 1. *Спектром* элемента x нормированного кольца R называется совокупность всех комплексных чисел λ, для которых $(x-\lambda e)^{-1}$ не существует.

Теорема 1. *Каждый элемент x нормированного кольца R обладает непустым спектром.*

Доказательство. Пусть, в противоречие с утверждением теоремы, элемент $x \in R$ имеет пустой спектр, т. е. $(x-\lambda e)^{-1}$ существует для всех λ. Беря, в частности, $\lambda=0$, получаем, что тогда существует x^{-1}. При этом x^{-1} также имеет пустой спектр, т. е. и $(x^{-1}-\lambda e)^{-1}$ существует для всех λ. В самом деле, для $\lambda=0$ это очевидно, а для $\lambda \neq 0$ имеем:

$$(x^{-1}-\lambda e)^{-1} = -\lambda^{-1}x(x-\lambda^{-1}e)^{-1}.$$

Так как, таким образом, $(x-\lambda e)^{-1}$ и $(x^{-1}-\lambda e)^{-1}$ — целые функции, то, согласно § 3, их ряды Тейлора $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{-n-1}\lambda^n$ и

откуда $\alpha_n^{\frac{1}{n}} \leqslant \alpha_k^{\frac{1}{k}-\frac{l}{kn}} \alpha_l^{\frac{1}{n}}$. Фиксируя k и беря $n\to\infty$, получаем: $\overline{\lim}\, \alpha_n^{\frac{1}{n}} \leqslant \alpha_k^{\frac{1}{k}}$. Беря теперь $k\to\infty$, находим: $\overline{\lim}\, \alpha_n^{\frac{1}{n}} \leqslant \underline{\lim}\, \alpha_n^{\frac{1}{n}} = \lim \alpha_n^{\frac{1}{n}}$. Одновременно мы видим, что $\sqrt[k]{\|z^k\|} \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|z^n\|}$ для всех k. Заметим, что мы воспользовались лишь тем свойством последовательности $\|z^n\|=\alpha_n\ (\geqslant 0)$, что $\alpha_{m+n} \leqslant \alpha_m\alpha_n$.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n+1}\lambda^n$ абсолютно сходятся во всей плоскости, в частности при $\lambda = 1$. Но тогда должны одновременно выполняться предельные соотношения $x^{-n} \to 0$ и $x^n \to 0$, что невозможно, так как $x^n x^{-n} = e$.

Замечание. Теорема 1 может быть доказана также с помощью теоремы Лиувилля, которая для абстрактных аналитических функций гласит:

Если функция $x(\lambda)$ со значениями в нормированном кольце R регулярна на всей плоскости λ и равномерно ограниченна по норме, то $x(\lambda) \equiv x_0$, где x_0 — некоторый постоянный элемент кольца R.

Доказательство этой теоремы проводится тем же способом, что и данные в § 3 доказательства теоремы и формулы Коши. В силу теоремы Лиувилля для обыкновенных аналитических функций, для любого линейного функционала f имеем: $f\{x(\lambda)\} \equiv \text{const}$. Но тогда и $x(\lambda) \equiv \text{const}$, ибо если $x(\lambda)$ принимает два различных значения $x(\lambda_1)$ и $x(\lambda_2)$, то, по теореме Хана — Банаха, существует такой линейный функционал f, что $f\{x(\lambda_1)\} \neq f\{x(\lambda_2)\}$.

Пусть теперь $(x - \lambda e)^{-1}$ существует для всех λ. Имеем:

$$\|(x - \lambda e)^{-1}\| = |\lambda^{-1}|\, \|(e - \lambda^{-1} x)^{-1}\|.$$

В силу леммы § 2, второй множитель в правой части при $|\lambda| \to \infty$ стремится к 1, следовательно, $\|(x - \lambda e)^{-1}\| \to 0$. Отсюда вытекает, что функция $(x - \lambda e)^{-1}$ ограниченна на всей плоскости; значит, по теореме Лиувилля, $(x - \lambda e)^{-1} \equiv \text{const}$. Так как $(x - \lambda e)^{-1} \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$, то заключаем, что $(x - \lambda e)^{-1} \equiv 0$. Но это невозможно.

Теорема 2. *Нормированное тело R изоморфно телу комплексных чисел.*

Доказательство. По теореме 1, для каждого $x \in R$ существует λ, при котором элемент $x - \lambda e$ не имеет обратного в R. Так как R — тело, то это означает, что $x - \lambda e = 0$, т. е. $x = \lambda e$. Соответствие

$$\lambda e \to \lambda \tag{1}$$

и будет утверждаемым в теореме изоморфизмом между телом R и телом комплексных чисел.

Изоморфизм (1) мы будем называть *каноническим*.

Из теоремы 4 § 2 и теоремы 2 непосредственно вытекает следующая важная теорема:

Теорема 3. *Кольцо R/M вычетов коммутативного нормированного кольца R по максимальному идеалу M канонически изоморфно телу комплексных чисел.*

Таким образом, максимальный идеал M определяет каноническое гомоморфное отображение кольца R в тело комплексных чисел, при котором все элементы одного и того же класса из R/M переходят в то комплексное число, которое отвечает этому классу в силу канонического изоморфизма между R/M и телом комплексных чисел.

Вместе с тем теорема 5 § 2 показывает, что, обратно, *всякое нетривиальное алгебраически гомоморфное отображение кольца R в тело комплексных чисел порождает максимальный идеал.* Действительно, ядро этого гомоморфного отображения образует в R идеал, кольцо вычетов по которому изоморфно телу комплексных чисел; в силу теоремы 5 § 2, этот идеал (состоящий из всех элементов кольца, переходящих в нуль) является максимальным.

Обозначим через $x(M)$ число, соответствующее элементу $x \in R$ при каноническом гомоморфном отображении кольца R в тело комплексных чисел, определяемом максимальным идеалом M. Для каждого фиксированного x мы получаем при меняющемся M функцию $x(M)$, определенную на множестве $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(R)$ всех максимальных идеалов кольца R. Эти функции, очевидно, обладают следующими свойствами:

а) Если $x = x_1 + x_2$, то $x(M) = x_1(M) + x_2(M)$.

б) Если $x = x_1 x_2$, то $x(M) = x_1(M)\, x_2(M)$.

в) Если $x_2 = \lambda x_1$, то $x_2(M) = \lambda x_1(M)$.

г) $e(M) \equiv 1$.

д) Если $x \in M_0$, то $x(M_0) = 0$, и обратно, если $x(M_0) = 0$, то $x \in M_0$.

е) Если $M_1 \neq M_2$, то существует $x \in R$ такой, что $x(M_1) \neq x(M_2)$.

Кроме того,

ж) $|x(M)| \leqslant \|x\|$.

Действительно, $x(M)$ есть то число λ_X, которое, в силу канонического изоморфизма между R/M и телом комплексных чисел, соответствует классу X, содержащему x. Так как $X = \lambda_X E$, то $\|X\| = |\lambda_X|\,\|E\| = |\lambda_X|$. Вспоминая определение нормы класса вычетов, получаем: $|x(M)| = |\lambda_X| = \inf\limits_{z \in X} \|z\| \leqslant \|x\|$.

Свойства а)—г) показывают, что функции $x(M)$ образуют кольцо $\hat{R}$ с единицей, причем

$$x \to x(M) \tag{2}$$

есть гомоморфное отображение кольца R на это кольцо $\hat{R}$. Мы будем называть (2) *каноническим гомоморфным отображением* R на $\hat{R}$.

Далее, свойства а), в), г) и ж) показывают, что каждый максимальный идеал M кольца R порождает на R линейный функционал с нормой 1, определяемый равенством

$$M(x) = x(M)$$

с заданным M и переменным x. Действительно, в силу этих свойств, имеем:

$$M(x_1 + x_2) = M(x_1) + M(x_2), \qquad M(\lambda x) = \lambda M(x),$$
$$|M(x)| \leqslant \|x\| \quad \text{и} \quad M(e) = 1.$$

При этом, в силу свойства отделимости е), различные максимальные идеалы порождают различные линейные функционалы. В множестве всех линейных функционалов на R они выделяются свойством «мультипликативности»

$$M(x_1 x_2) = M(x_1) M(x_2)$$

(вытекающим из б)), на основании чего их называют *мультипликативными линейными функционалами*.

В силу д) мы можем теперь формулировать теорему 2 § 2 следующим образом:

Теорема 3′. *Для того чтобы элемент x кольца R имел обратный, необходимо и достаточно, чтобы функция $x(M)$ нигде не обращалась в нуль.*

В качестве иллюстрации к полученным результатам определим максимальные идеалы колец W (пример 3° § 1) и A (пример 6° § 1).

1. Пусть элемент e^{it} кольца W при каноническом гомоморфном отображении по максимальному идеалу M переходит в число a, так что e^{-it} переходит в a^{-1}. В силу ж) имеем: $|a| \leqslant \|e^{it}\| = 1$ и $|a^{-1}| \leqslant \|e^{-it}\| = 1$, следовательно, $a = e^{it_0}$ $(0 \leqslant t_0 < 2\pi)$. Таким образом, e^{it} переходит в e^{it_0}. Но тогда $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \in W$ переходит в $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int_0}$. При этом M состоит из всех рядов, переходящих

в нуль, т. е. из всех функций $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$, обращающихся в нуль в точке t_0.

Основываясь на этом результате, мы можем теперь доказать теорему Винера, упомянутую в § 2 (стр. 19). Действительно, пусть сумма абсолютно сходящегося ряда $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ нигде не обращается в нуль. По доказанному, это означает, что она как элемент кольца W не принадлежит ни одному максимальному идеалу, а тогда, по теореме 2 § 2, в W существует обратный элемент, т. е. $\dfrac{1}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}}$ также разлагается в абсолютно сходящийся тригонометрический ряд.

2. Так же как и при рассмотрении кольца C (стр. 18), убеждаемся в том, что совокупность всех функций из A, обращающихся в нуль в некоторой точке ζ_0 круга $|\zeta| \leqslant 1$, образует в A максимальный идеал. Покажем, что верно и обратное. Пусть M_0 — максимальный идеал кольца A и ζ_0 — число, в которое переходит функция $x(\zeta) \equiv \zeta \in A$ при каноническом гомоморфном отображении по этому максимальному идеалу. Функция ζ является *образующей* кольца A: все функции из A — пределы равномерно сходящихся последовательностей полиномов*). Отсюда следует, что для каждого элемента $x(\zeta) \in A$ имеем: $x(M_0) = x(\zeta_0)$ и, значит, M_0 совпадает с совокупностью всех $x(\zeta) \in A$, для которых $x(\zeta_0) = 0$. Отметим, что кольцо A не удовлетворяет условию а), приведенному на стр. 20.

Замечание. Проведенное нами исследование максимальных идеалов колец C, D_n, W и A показало, что между точками t областей задания функций $x(t)$, входящих в эти кольца, и максимальными идеалами M существует взаимно однозначное соответствие $t \longleftrightarrow M_t$, при котором $x(t) \equiv x(M_t)$. Мы будем поэтому отождествлять для этих колец максимальные идеалы с соответствующими точками.

Между функцией $x(M)$ и спектром элемента x (определение 1) имеется простая связь:

Теорема 4. *Спектр элемента x совпадает с совокупностью значений, принимаемых функцией $x(M)$.*

Доказательство. Если $x(M_0) = \lambda_0$, то $(x - \lambda_0 e)(M_0) = 0$, значит, $x - \lambda_0 e \in M_0$ и, следовательно, $(x - \lambda_0 e)^{-1}$

---

*) Действительно, пусть $x \in A$. $x(\zeta)$ равномерно аппроксимируема в круге $|\zeta| \leqslant 1$ функциями $x\left(\dfrac{\zeta}{1+\varepsilon}\right)$ $(\varepsilon > 0)$, а последние, будучи аналитическими в соответствующем круге $|\zeta| < 1 + \varepsilon$, равномерно аппроксимируемы полиномами от ζ во внутреннем по отношению к нему круге $|\zeta| \leqslant 1$.

не существует. Обратно, если $(x-\lambda_0 e)^{-1}$ не существует, то это означает, что $(x-\lambda_0 e)(M)$ обращается на некотором максимальном идеале M_0 в нуль, т. е. $x(M_0)=\lambda_0$.

Ядром канонического гомоморфного отображения кольца R на кольцо $\hat{R}$, образованное функциями $x(M)$, является совокупность всех элементов $x \in R$, для которых $x(M) \equiv 0$, т. е. которые содержатся во всех максимальных идеалах кольца. Пусть x — такой элемент. В силу теоремы 4, $(x-\lambda e)^{-1}$ существует для всех λ, кроме $\lambda=0$, и, следовательно, функция $(e-\lambda x)^{-1}$ целая. Но это означает, что радиус сходимости ее ряда Тейлора $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n x^n$, равный $\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}}$ (см. стр. 27), бесконечен, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}=0. \tag{3}$$

Обратно, если для элемента x кольца R выполняется соотношение (3), то ряд Тейлора для $(e-\lambda x)^{-1}$ абсолютно сходится для всех λ, поэтому $(x-\lambda e)^{-1}$ существует для всех λ, кроме $\lambda=0$, и, следовательно, в силу теоремы 4, $x(M)\equiv 0$.

Таким образом, ядро канонического гомоморфного отображения кольца R на кольцо $\hat{R}$ функций $x(M)$ состоит из тех и только тех элементов $x \in R$, для которых выполняется соотношение (3).

Определение 2. Элемент $x \in R$, для которого выполняется соотношение (3), называется *обобщенным нульстепенным* *), а совокупность всех обобщенных нульстепенных элементов — *радикалом* кольца. Кольцо, в котором нет ненулевых обобщенных нульстепенных элементов, называется для краткости *кольцом без радикала.*

Полученный нами результат может быть теперь сформулирован следующим образом:

---

*) Очевидно, обычные нульстепенные элементы, т. е. элементы x, удовлетворяющие условию $x^n=0$ для некоторого n, являются также обобщенными нульстепенными элементами. Однако обратное, вообще говоря, неверно.

Теорема 5. *Пересечение всех максимальных идеалов коммутативного нормированного кольца совпадает с радикалом этого кольца.*

Тривиальным примером кольца с радикалом, т. е. кольца, в котором имеются неиулевые обобщенные нульстепенные элементы, является кольцо $I^{(n)}$ примера 4° § 1. В нем $D^{n+1}=0$, и потому все элементы, не содержащие свободного члена, являются нульстепенными, а значит и обобщенными нульстепенными, и образуют единственный максимальный идеал этого кольца.

Нетривиальный пример кольца с радикалом доставляет кольцо I примера 5° § 1. Оно имеет в качестве образующей функцню $x_0(t)\equiv 1$ *). Действительно, $x_0^n=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$, поэтому x_0 порождает все полиномы, а последние всюду плотны по норме в пространстве $L^1(0,1)$. Но $\|x_0^n\|=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^1 t^{n-1}\,dt=\frac{1}{n!}$, так что $\sqrt[n]{\|x_0^n\|}\to 0$ при $n\to\infty$. Таким образом, x_0 есть обобщенный нульстепенный элемент. Так как он служит образующей, то и все элементы кольца I, не содержащие присоединенной единицы, являются обобщенными нульстепенными. Они образуют единственный максимальный идеал кольца I.

Отсюда следует, что всякий элемент $\lambda e+x(t)\in I$, в котором $\lambda\neq 0$, обладает в I обратным элементом $\mu e+u(t)$. Взяв здесь $x=-\lambda^2 k$, получим, что уравнение

$$u(t)=k(t)+\lambda\int\limits_0^t k(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau,$$

где $k(t)\in L^1(0,1)$, разрешимо в $L^1(0,1)$ при любом λ.

Примерами колец без радикала могут служить рассматривавшиеся выше кольца C, D_n, W и A. Действительно, для этих колец было установлено взаимно однозначное соответствие между максимальными идеалами и точками множеств, на которых заданы функции, входящие в кольцо; при этом значение функции $x(M)$ на максимальном идеале M оказывалось совпадающим со значением функции $x(t)$ в соответствующей точке t. Таким образом, в этих кольцах единственным элементом, обращающимся в нуль на всех максимальных идеалах, является тождественный нуль.

Рассмотрим еще кольцо, порожденное эрмитово-симметричным ядром $k(s,t)$, $\overline{k(t,s)}\equiv k(s,t)$, определенным и непрерывным в ква-

---

*) Единица кольца к образующим не причисляется.

драте $0 \leqslant s, t \leqslant 1$, с нормой $\|h\| = \max\limits_{0 \leqslant s, t \leqslant 1} |h(s, t)|$ и умножением

$$g(s, t) * h(s, t) = \int_0^1 g(s, \tau) h(\tau, t)\, d\tau,$$

с формально присоединенной единицей. Отсутствие ненулевых обобщенных нульстепенных элементов равносильно здесь теореме о существовании у эрмитово-симметричного ядра $h(s, t)$ по крайней мере одного собственного значения. Действительно, если $g(s, t)$ — обобщенный нульстепенный элемент, то обобщенным нульстепенным будет также эрмитово-симметричное ядро

$$g(s, t) * \overline{g(t, s)} = \int_0^1 g(s, \tau)\, \overline{g(t, \tau)}\, d\tau,$$

которое равно нулю, лишь если $g(s, t) \equiv 0$. Но, как известно, собственные значения эрмитово-симметричного ядра $h(s, t)$ это особые точки ряда Неймана, составленного для этого ядра, т. е. особые точки функции $(e - \lambda h)^{-1}$. Если бы $h(s, t) \not\equiv 0$ было обобщенным нульстепенным элементом, то эта функция не имела бы особенностей, т. е. h не имело бы ни одного собственного значения, в противоречие с известным результатом теории интегральных уравнений.

Соотношение (3), характеризующее обобщенные нульстепенные элементы, является частным случаем следующего общего соотношения:

Теорема 6. *Для любого* $x \in R$

$$\sup_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)| = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}, \tag{4}$$

где в левой части $\mathfrak{M}$ *означает множество всех максимальных идеалов кольца* R.

Доказательство. Положим $\sup\limits_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)| = a$. В силу теоремы 4, элемент $x - \mu e$ имеет обратный для всех μ с $|\mu| > a$ и потому функция $(e - \lambda x)^{-1}$, где $\lambda = \frac{1}{\mu}$, аналитична в круге $|\lambda| < \frac{1}{a}$. Отсюда следует, что $\frac{1}{a}$ не превосходит радиуса сходимости $\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\|x^n\|}}$ ряда Тейлора этой функции, или

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\|x^n\|} \leqslant a. \tag{5}$$

С другой стороны, так как для всех n $\sup_{M \in \mathfrak{M}} |x^n(M)| = a^n$, то $\sqrt[n]{\|x^n\|} \geqslant a$ и, значит,

$$\varliminf_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} \geqslant a. \tag{6}$$

Сравнение неравенств (5) и (6) приводит к соотношению (4). Существование $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$ получилось здесь как побочный результат.

В качестве иллюстрации к теореме 6 рассмотрим кольцо W примера 3° § 1. Выше (стр. 31—32) мы нашли, что между максимальными идеалами M этого кольца и точками t полуинтервала $0 \leqslant t < 2\pi$ существует взаимно одиозначное соответствие $t \longleftrightarrow M_t$, при котором $x(M_t) \equiv x(t)$ для всех $x \in W$. Следовательно, $\sup_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)| = \max |x(t)|$. Таким образом, из теоремы 6 в применении к этому случаю вытекает, что *максимум модуля суммы абсолютно сходящегося тригонометрического ряда равен пределу корня n-й степени из суммы абсолютных величин коэффициентов ряда, получающегося путем возведения данного ряда в n-ю степень.* В применении к кольцу, рассмотренному на стр. 35, теорема 6 показывает, что *модуль первого собственного значения непрерывного эрмитово-симметричного ядра равен пределу обратной величины корня n-й степени из максимума модуля n-го итерированного ядра.*

§ 5. Пространство максимальных идеалов

Желая сделать функции $x(M)$ непрерывными, мы естественно приходим к следующей топологизации множества $\mathfrak{M}(R)$ всех максимальных идеалов кольца R.

Определение 1. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — произвольные элементы кольца R и ε — произвольное положительное число. *Окрестностью* $[M_0;\ x_1, \ldots, x_n;\ \varepsilon]$ максимального идеала M_0 мы будем называть совокупность всех максимальных идеалов M, для которых выполняются неравенства

$$|x_1(M) - x_1(M_0)| < \varepsilon, \ \ldots, \ |x_n(M) - x_n(M_0)| < \varepsilon.$$

При таком определении окрестностей, $\mathfrak{M}(R)$ становится хаусдорфовым топологическим пространством. Действительно, прежде всего всякий максимальный идеал, очевидно, обладает окрестностями и содержится в каждой своей окрестности. Далее, пересечение окрестностей

$$[M_0;\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ \varepsilon_1] \text{ и } [M_0;\ x_{n+1},\ \ldots,\ x_{n+m};\ \varepsilon_2]$$

максимального идеала M_0 содержит его окрестность

$$[M_0;\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ x_{n+1},\ \ldots,\ x_{n+m};\ \min(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)].$$

Кроме того, если $M_1 \in [M_0;\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ \varepsilon]$, то также

$$[M_1;\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ \delta] \subset [M_0;\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ \varepsilon],$$

где

$$(0<)\,\delta < \min\{\varepsilon - |x_1(M_1) - x_1(M_0)|,\ \ldots,\ \varepsilon - |x_n(M_1) - x_n(M_0)|\}.$$

Наконец, если $M' \neq M$, то, в силу свойства отделимости е) (стр. 30), найдется элемент $x \in R$ такой, что $x(M') \neq x(M)$, и окрестности $\left[M;\ x;\ \frac{\varepsilon}{2}\right]$ и $\left[M';\ x;\ \frac{\varepsilon}{2}\right]$ не будут пересекаться, если взять $\varepsilon < |x(M') - x(M)|$.

Непрерывность функций $x(M)$ следует непосредственно из определения окрестностей: чтобы найти окрестность максимального идеала M, в которой значения функции $x(M')$ отличаются от ее значения в M меньше чем на ε, достаточно взять множество $[M;\ x;\ \varepsilon]$, по определению являющееся окрестностью.

Убедимся в том, что для колец C, D_n, W и A введенная здесь топология множества $\mathfrak{M}$ совпадает с топологией области задания функций, входящих в соответствующее кольцо (т. е. с топологией отрезка для колец C и D_n, окружности для кольца W и круга для кольца A). Для этого нужно показать, что в каждой новой окрестности содержится старая и, обратно, в каждой старой окрестности содержится новая. Первое следует из того, что функции $x(t)$, входящие в рассматриваемые кольца, непрерывны, и потому множества $[t_0;\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ \varepsilon]$ являются открытыми. Для доказательства обратного утверждения заметим, что в каждом из рассматриваемых колец существует функция, обращающаяся в нуль только в данной точке t_0. Пусть U — произвольная окрестность точки t_0 и $x(t)$ — функция, обладающая указанным свойством. Если бы в множестве $[t_0;\ x;\ \varepsilon]$ для всякого ε содержалась точка, лежащая вне U, то это означало бы, что минимум функции $|x(t)|$ на дополнении к U равен нулю. Но так как $x(t)$ непрерывна, а область задания функций для всех рассматриваемых колец бикомпактна, то $|x(t)|$ достигало бы этого минимума, т. е. $x(t)$ обращалась бы в нуль в некоторой точке, отличной от t_0, в противоречие с предположением. Таким образом, для некоторого ε новая окрестность $[t_0;\ x;\ \varepsilon]$ целиком содержится в старой окрестности U, что и требовалось.

Теорема 1. *Пространство $\mathfrak{M}(R)$ максимальных идеалов коммутативного нормированного кольца R, топологизированное в соответствии с определением* 1, *бикомпактно.*

Доказательство. Поставим в соответствие каждому элементу x кольца R круг Q_x в комплексной плоскости, имеющий центр в точке 0 и радиус $\|x\|$. Пусть Q — топологическое произведение всех этих кругов, т. е. пространство, точками которого служат произвольные наборы (λ_x) чисел $\lambda_x \in Q_x$ (где x пробегает всё R), а фундаментальную систему окрестностей точки $\{\lambda_x^{(0)}\}$ образуют множества

$$\left\{(\lambda_x): \left|\lambda_{x_1} - \lambda_{x_1}^{(0)}\right| < \varepsilon, \ \ldots, \ \left|\lambda_{x_n} - \lambda_{x_n}^{(0)}\right| < \varepsilon\right\},$$

заданные произвольными конечными наборами элементов $x_1, \ldots, x_n \in R$ и произвольными положительными числами ε. Так как все Q_x бикомпактны, то, по известной теореме Тихонова *), также Q бикомпактно.

В силу неравенства $|x(M)| \leqslant \|x\|$, каждому максимальному идеалу M отвечает точка $M' = \{\mu_x\} \in Q$, где $\mu_x = x(M)$. При этом, в силу свойства отделимости е) (стр. 30), двум различным максимальным идеалам соответствуют точки, отличающиеся друг от друга по крайней мере одной координатой и потому различные. Таким образом, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(R)$ взаимно однозначно отображается на часть $\mathfrak{M}'$ пространства Q. Из сравнения определений топологий в $\mathfrak{M}$ и в Q следует, что это отображение гомеоморфно. Чтобы убедиться в бикомпактности пространства $\mathfrak{M}$, остается показать, что $\mathfrak{M}'$ замкнуто в Q.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_x\}$ — точка прикосновения множества $\mathfrak{M}'$. Покажем, что $\Lambda \in \mathfrak{M}'$, т. е. существует максимальный идеал M_0 такой, что $\lambda_x = x(M_0)$ для всех $x \in R$. Для этого покажем, что $\lambda_{x+y} = \lambda_x + \lambda_y$, $\mu\lambda_x = \lambda_{\mu x}$, $\lambda_{xy} = \lambda_x \lambda_y$. Мы ограничимся доказательством последнего из этих соотношений; доказательство первых двух проводится аналогичным способом. Рассмотрим окрестность точки Λ, определяемую элементами e, x, y и xy и произвольным положительным числом ε. Так как Λ является точкой прикосновения для

*) См. П. С. Александров, Введение в общую теорию множеств и функций, М. — Л., 1948, стр. 394.

$\mathfrak{M}'$, то в этой окрестности найдется точка $M' \in \mathfrak{M}'$, т. е. для некоторого $M \in \mathfrak{M}$ будем иметь:

$$|\lambda_e - e(M)| = |\lambda_e - 1| < \varepsilon,$$
$$|\lambda_x - x(M)| < \varepsilon, \quad |\lambda_y - y(M)| < \varepsilon,$$
$$|\lambda_{xy} - (xy)(M)| = |\lambda_{xy} - x(M)\,y(M)| < \varepsilon.$$

Но тогда

$$|\lambda_{xy} - \lambda_x\lambda_y| \leqslant |\lambda_{xy} - x(M)\,y(M)| + |x(M)[y(M) - \lambda_y]| + \\ + |\lambda_y[x(M) - \lambda_x]| \leqslant |\lambda_{xy} - x(M)\,y(M)| + \|x\|\,|y(M) - \lambda_y| + \\ + |\lambda_y|\,|x(M) - \lambda_x| < \varepsilon(1 + \|x\| + |\lambda_y|),$$

и так как ε произвольно, то

$$\lambda_{xy} = \lambda_x\lambda_y, \quad \lambda_e = 1.$$

Таким образом, соответствие $x \to \lambda_x$ есть гомоморфное отображение кольца R в тело комплексных чисел; ядро этого отображения и есть максимальный идеал M_0 такой, что $x(M_0) = \lambda_x$ для всех $x \in R$. Тем самым доказательство теоремы завершено.

Замечание. Мы пришли к определению топологии в множестве $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов, исходя из желания сделать функции $x(M)$ непрерывными на $\mathfrak{M}$. Следующее предложение показывает, что это требование однозначно определяет топологию в $\mathfrak{M}$, при которой $\mathfrak{M}$ становится бикмопактным.

Теорема 1'. *Пусть $\mathfrak{M}'$ — пространство всех максимальных идеалов коммутативного нормированного кольца, топологизированное каким-либо способом так, что* 1) *$\mathfrak{M}'$ бикомпактно и* 2) *функции $x(M)$ непрерывны на $\mathfrak{M}'$. Тогда $\mathfrak{M}'$ гомеоморфно $\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ — пространство тех же максимальных идеалов, топологизированное согласно определению* 1.

Доказательство. Отображение $\mathfrak{M}'$ на $\mathfrak{M}$, ставящее в соответствие каждому максимальному идеалу $M \in \mathfrak{M}'$ его же в $\mathfrak{M}$, взаимно однозначно. Вследствие условия 2) прообраз в $\mathfrak{M}'$ каждой окрестности, а следовательно и каждого открытого множества из $\mathfrak{M}$, есть открытое множество в $\mathfrak{M}'$. Таким образом, указанное отображение $\mathfrak{M}'$ на $\mathfrak{M}$ непрерывно.

Но так как $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ бикомпактны (условие 1)), причем $\mathfrak{M}$ хаусдорфово, то, в силу известной теоремы топологии, также обратное отображение непрерывно, т. е. $\mathfrak{M}'$ гомеоморфно $\mathfrak{M}$.

В этой теореме содержится как частный случай доказанное выше (стр. 37) совпадение для колец C, D_n, W и A топологии множества максимальных идеалов с первоначальной топологией области задания соответствующего кольца. Из нее следует также, что пространство максимальных идеалов кольца $C(S)$ всех непрерывных комплексных функций на бикомпактном хаусдорфовом пространстве S, рассмотренное в § 2, гомеоморфно S.

В соединении с результатами, полученными в § 4, теорема 1 дает:

Теорема 2. *Всякое коммутативное нормированное кольцо гомоморфно отображается на некоторое кольцо непрерывных функций на бикомпактном хаусдорфовом пространстве, причем ядром этого гомоморфного отображения является радикал кольца. Таким образом, если радикал кольца содержит только* 0, *то это отображение является изоморфизмом.*

Дает ли что-нибудь новое сформулированный только что результат в применении к кольцам функций с обычными алгебраическими операциями? Мы ответим на этот вопрос следующим образом: нахождением совокупности всех максимальных идеалов устанавливается естественная область определения функций, образующих кольцо.

Прежде всего ясно, что каждая точка t_0 первоначально заданной области определения функций кольца порождает максимальный идеал: отображение $x(t) \to x(t_0)$ есть гомоморфное отображение кольца на тело комплексных чисел; при этом, по самому своему определению, $x(M_0)$, где M_0 — максимальный идеал, порождаемый точкой t_0, равно $x(t_0)$. Но для того чтобы две различные точки t_1 и t_2 порождали два различных максимальных идеала, нужно, чтобы эти точки были «отделимы» рассматриваемым кольцом, т. е. чтобы в этом кольце существовала функция $x(t)$, для которой $x(t_1) \neq x(t_2)$. Если же точки t_1 и t_2 неотделимы данным кольцом, то при отождествлении всех точек t с соответствующими максимальными идеалами они «склеятся», сольются в одном максимальном идеале. Так склеились точки, отличающиеся на целое кратное 2π, при отождествлении точек прямой с соответствующими максимальными идеалами кольца W; прямая при этом превратилась в окружность радиуса 1 — естественную область задания функций кольца W, поскольку все они имеют период 2π.

Но это не единственное изменение, которое может претерпеть первоначально заданная область определения функций, образующих кольцо, при переходе к максимальным идеалам: она может также расшириться. Рассмотрим, например, кольцо C, считая входящие в него функции заданными только на рациональных точках отрезка $[0, 1]$. Так как рациональные точки лежат в $[0, 1]$ всюду плотно, то функции кольца C, будучи непрерывными, вполне определятся своими значениями в этих точках. Однако множество максимальных идеалов так определенного кольца C не будет исчерпываться рациональными точками: максимальными идеалами будут по-прежнему служить *все* точки отрезка $[0, 1]$. Переход к рассмотрению функций кольца как заданных на множестве всех максимальных идеалов означает здесь расширение области задания функций до ее естественных пределов, в топологических же терминах — переход от пространства рациональных точек (с топологией, индуцированной из отрезка $[0, 1]$) к его *бикомпактному расширению* *).

Рассмотрим в этой связи еще кольцо B, образованное непрерывными почти периодическими функциями Г. Бора на прямой, с нормой $\|x\| = \sup\limits_{-\infty < t < +\infty} |x(t)|$ и обычными алгебраическими операциями. Точки прямой отделимы этим кольцом, и потому склеивания их при переходе к максимальным идеалам не происходит. Однако множество всех максимальных идеалов не исчерпывается точками прямой; действительно, в противном случае из необращения почти периодической функции в нуль следовало бы, что ее обратная величина также есть почти периодическая функция, а это опровергается примером функции $2 - \sin x - \sin \lambda x$ при иррациональном λ: она нигде не обращается в нуль, однако нижняя грань ее значений есть нуль и потому обратная величина ее неограниченна и не принадлежит, таким образом, кольцу B.

В двух последних примерах точки первоначальной области определения функций кольца расположены *всюду плотно* в бикомпактном пространстве максимальных идеалов и нахождение всех максимальных идеалов имеет характер топологического замыкания первоначальной области **). Однако возможны расширения и другого рода. Рассмотрим, например, кольцо A. Так как функции, принадлежащие этому кольцу, вполне определяются своими значениями на границе круга $|\zeta| \leqslant 1$, то мы могли бы считать A некоторым кольцом непрерывных функций, заданных априори не на всем круге, а только на окружности $|\zeta| = 1$. При этом, вводя в качестве нормы максимум модуля на окружности, мы тем самым сохранили бы старую норму, поскольку максимум модуля функции, регулярной внутри круга $|\zeta| \leqslant 1$, достигается на границе этого круга. Однако множество максимальных идеалов кольца A не исчерпывается точками окружности $|\zeta| = 1$ и, более того, эти точки даже не расположены всюду плотно в бикомпактном пространстве максимальных идеалов, совпадающем, как мы знаем, со всем кругом.

---

*) См. § 43.

**) Во втором примере топология на прямой $-\infty < t < +\infty$, индуцируемая из бикомпактного пространства $\mathfrak{M}$, отлична от обычной топологии прямой; ср. стр. 191—192 и 253. Пространство $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов кольца B будет найдено в § 29.

Здесь переход от точек априори заданной области определения функций кольца к пространству максимальных идеалов имеет характер не топологического, а «аналитического» расширения этой области.

Резюмируя, мы можем сказать, что при переходе от первоначальной области задания кольца функций к пространству максимальных идеалов происходят: 1) «склеивание» точек, неотделимых функциями кольца; 2) замыкание получившегося множества точек и, возможно, 3) его «аналитическое» расширение, когда добавляются далекие в топологическом смысле максимальные идеалы, которые, однако, вполне определяются заданием кольца на первоначальной области.

Для задания топологии в множестве максимальных идеалов не обязательно пользоваться всеми элементами кольца.

Определение 2. Множество K элементов нормированного кольца R называется *системой образующих* этого кольца, если наименьшим замкнутым подкольцом с единицей, содержащим множество K, служит всё R.

Замечание. Единица в число образующих не включается.

Теорема 3. *Совокупность $\{U\}$ окрестностей вида $[M;\, x_1, \ldots, x_n;\, \varepsilon]$, где x_i пробегают все элементы системы K образующих кольца R, является фундаментальной системой окрестностей в $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Нам нужно показать, что в любой окрестности $[M;\, y_1, \ldots, y_n;\, \varepsilon]$ содержится окрестность из $\{U\}$. Пусть

$$P_1(x_{11}, \ldots, x_{1k_1}), \ldots, P_n(x_{n1}, \ldots, x_{nk_n})$$

— полиномы от элементов $x_{ik} \in K$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant k \leqslant k_i)$, отличающиеся по норме от соответствующих элементов $y_1, \ldots, y_n$ меньше чем на $\frac{\varepsilon}{3}$, и δ таково, что $[M;\, x_{11}, \ldots, x_{nk_n};\, \delta]$ содержится в $\left[M;\, P_1, \ldots, P_n;\, \frac{\varepsilon}{3}\right]$. Мы утверждаем, что окрестность $[M;\, x_{11}, \ldots, x_{nk_n};\, \delta]$ (принадлежащая системе $\{U\}$) содержится в $[M;\, y_1, \ldots, y_n;\, \varepsilon]$. Действительно, для всех M' из этой окрестности и всех $i = 1, \ldots, n$ имеем:

$$\begin{aligned} |y_i(M') - y_i(M)| &\leqslant |y_i(M') - P_i\{x_{ik}(M')\}| + \\ &+ |P_i\{x_{ik}(M')\} - P_i\{x_{ik}(M)\}| + |P_i\{x_{ik}(M)\} - y_i(M)| \leqslant \\ &\leqslant 2\|P_i - y_i\| + |P_i\{x_{ik}(M')\} - P_i\{x_{ik}(M)\}| \leqslant 2\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Замечание. *Если R допускает счетную систему образующих $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ или, что равносильно этому, R сепарабельно, то в $\mathfrak{M}$ выполняется вторая аксиома счетности* (и значит, по теореме Урысона *), *$\mathfrak{M}$ метризуемо*). Действительно, пусть $r_1, \ldots, r_n, \ldots$ — последовательность всех комплексных рациональных чисел (т. е. чисел вида $r+si$, где r и s — вещественные рациональные числа). Мы утверждаем, что фундаментальной системой окрестностей в $\mathfrak{M}$ служит (счетная) совокупность всех открытых множеств вида

$$\left\{M \in \mathfrak{M}: \ |x_{n_k}(M) - r_{m_k}| < \frac{1}{p} \quad (k = 1, \ldots, l; \ \ p \text{ — целое})\right\}. \quad (1)$$

В силу теоремы 3, достаточно показать, что каждая окрестность $[M_0; x_{n_1}, \ldots, x_{n_l}; \varepsilon]$ содержит такое множество. Но для этого нужно только взять в (1) $p > \frac{2}{\varepsilon}$ и $|r_{m_k} - x_{n_k}(M_0)| < \frac{1}{p}$ $(k = 1, \ldots, l)$.

Специальный интерес представляет случай, когда кольцо имеет конечное число образующих.

Теорема 4. *Если кольцо R имеет конечное число образующих $x_1, \ldots, x_n$, то $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(R)$ гомеоморфно замкнутому ограниченному подмножеству n-мерного комплексного пространства.*

Доказательство. $M \to (x_1(M), \ldots, x_n(M))$ есть непрерывное однозначное отображение пространства $\mathfrak{M}$ на некоторое замкнутое ограниченное подмножество $\mathfrak{M}'$ n-мерного комплексного пространства. Покажем, что это отображение взаимно однозначно; так как $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ бикомпактны и хаусдорфовы, то оно будет и взаимно непрерывным, т. е. $\mathfrak{M}$ будет гомеоморфно $\mathfrak{M}'$.

Пусть две точки M_1 и M_2 отображаются в одну и ту же точку из $\mathfrak{M}'$. Это означает, что $x_1(M_1) = x_1(M_2), \ldots, x_n(M_1) = x_n(M_2)$. Тогда для всякого полинома P, составленного из $x_1, \ldots, x_n$, будем иметь: $P(M_1) = P(M_2)$, а так как $x_1, \ldots, x_n$ являются образующими кольца, то равенство $x(M_1) = x(M_2)$ будет выполняться для всех $x \in R$. Но в таком случае, в силу свойства отделимости е) § 4, $M_1 = M_2$.

Тем самым теорема доказана. Из нее, в частности, следует, что *если R — кольцо с одной образующей, то $\mathfrak{M}$*

---

*) См. П. С. Александров, Введение в общую теорию множеств и функций, М. — Л., 1948, стр. 388.

гомеоморфно некоторому замкнутому ограниченному множеству точек комплексной плоскости.

Возникает вопрос: как можно охарактеризовать множества, гомеоморфные пространствам максимальных идеалов колец с n образующими, среди всех замкнутых ограниченных подмножеств n-мерного комплексного пространства $\mathbf{C}^n$? Ответ на этот вопрос следующий: *множество $F \subset \mathbf{C}^n$ тогда и только тогда гомеоморфно пространству максимальных идеалов нормированного кольца с n образующими, когда оно ограниченно, замкнуто и выпукло относительно полиномов.* Последнее означает следующее: *для любой точки $\zeta^{(0)} = \left(\zeta_1^{(0)}, \ldots, \zeta_n^{(0)}\right)$, не принадлежащей множеству F, можно указать полином $P(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, принимающий значение 1 в точке $\zeta^{(0)}$ и значение, по абсолютной величине меньшее 1, в каждой точке $\zeta \in F$.*

Для доказательства будем рассуждать следующим образом. Пусть R — нормированное кольцо с n образующими $z_1, \ldots, z_n$, $\mathfrak{M}$ — пространство его максимальных идеалов и F — образ $\mathfrak{M}$ при отображении $M \to \zeta = (z_1(M), \ldots, z_n(M))$. F — замкнутое ограниченное множество в пространстве $\mathbf{C}^n$; мы должны доказать, что оно выпукло относительно полиномов.

Пусть некоторая точка $\zeta^{(0)} = \left(\zeta_1^{(0)}, \ldots, \zeta_n^{(0)}\right) \in \mathbf{C}^n$ не принадлежит множеству F. Это означает, что не существует гомоморфизма кольца R в тело комплексных чисел, переводящего каждую образующую z_j в число $\zeta_j^{(0)}$, или, что то же самое, не существует максимального идеала кольца R, содержащего все разности $z_j - \zeta_j^{(0)}e$, где e — единица кольца. Но совокупность всех конечных сумм вида

$$\sum_{j=1}^{n} \left(z_j - \zeta_j^{(0)}e\right) q_j, \tag{2}$$

где q_j — произвольные элементы кольца R, очевидно, образует идеал в R. Поскольку этот идеал не принадлежит ни одному максимальному идеалу, он должен совпадать со всем кольцом R; в частности, при некотором выборе элементов q_j сумма (2) даст единицу кольца:

$$e = \sum_{j=1}^{n} \left(z_j - \zeta_j^{(0)}e\right) q_j. \tag{3}$$

Элементы q_j, фигурирующие в равенстве (3), могут быть с любой точностью аппроксимированы по норме полиномами P_j от образующих $z_1, \ldots, z_n$. В частности, эти полиномы могут быть выбраны так, чтобы норма разности

$$e - \sum_{j=1}^{n} \left(z_j - \zeta_j^{(0)}e\right) P_j \tag{4}$$

стала меньше единицы. Выражение (4) представляет собой некоторый полином $P(z_1, \ldots, z_n)$ от образующих $z_1, \ldots, z_n$. Рассмотрим соответствующий ему полином

$$P(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = 1 - \sum_{j=1}^{n} \left(\zeta_j - \zeta_j^{(0)}\right) P_j(\zeta_1, \ldots, \zeta_n).$$

По построению, этот полином:

а) принимает значение 1 в точке $\zeta^{(0)}$;

б) принимает значение, по абсолютной величине меньшее чем 1, в каждой точке $\zeta \in F$.

Таким образом, множество F выпукло относительно полиномов.

Обратно, пусть F — замкнутое ограниченное множество в $\mathbf{C}^n$, выпуклое относительно полиномов. Введем в кольце R' всевозможных полиномов $P(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ норму по формуле

$$\|P\| = \max_{\zeta \in F} |P(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)| \tag{5}$$

и пусть R — пополнение R' по этой норме.

R представляет собой некоторое кольцо непрерывных функций на F, имеющее своими образующими функции $z_j(\zeta) = \zeta_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. Очевидно, каждая точка $\zeta^{(0)} \in F$ определяет максимальный идеал кольца R, соответствующий гомоморфизму $z_j \to \zeta_j^{(0)}$ $(j = 1, \ldots, n)$, причем различным точкам соответствуют различные максимальные идеалы. Так как R — кольцо с образующими $z_1, \ldots, z_n$, то пространство $\mathfrak{M}(R)$ его максимальных идеалов можно считать подмножеством пространства $\mathbf{C}^n$, содержащим F. Пусть точка $\zeta^{(1)} \in \mathbf{C}^n$ не принадлежит множеству F. Тогда, по условию относительно F, имеется полином $P(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, принимающий на множестве F значения, по абсолютной величине меньшие 1, а в точке $\zeta^{(1)}$ равный 1. Так как F — замкнутое ограниченное множество, то норма этого полинома, в силу определения (5), меньше 1; поэтому полином $P(z_1, \ldots, z_n) \in R$ принимает на каждом максимальном идеале значение, по абсолютной величине меньшее чем 1, и следовательно, точка $\zeta^{(1)}$ не может входить в множество $\mathfrak{M}(R)$.

Таким образом, F совпадает с $\mathfrak{M}(R)$, и наше утверждение полностью доказано.

При $n = 1$ множество $\mathfrak{M}$ допускает более простую характеризацию, притом в чисто топологических терминах: $\mathfrak{M}$ есть замкнутое ограниченное множество на комплексной плоскости $\mathbf{C}^1$, не разбивающее этой плоскости (т. е. имеющее связное дополнение). Доказательство этого утверждения будет дано в § 10. Заметим, что уже для кольца с двумя образующими не может существовать чисто топологической характеристики множества максимальных идеалов как подмножества двумерного комплексного пространства $\mathbf{C}^2$. Например, окружность $|z_1| = 1$, $|z_2| = 0$ не является множеством максимальных идеалов никакого нормированного кольца с образующими

z_1, z_2, в то время как окружность $z_1=e^{i\varphi}$, $z_2=e^{-i\varphi}$ $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$ отождествима с пространством максимальных идеалов кольца всех непрерывных функций на этой окружности, образующими которого являются z_1 и z_2.

§ 6. Аналитические функции от элемента кольца

В нормированном кольце R вместе с каждым элементом x содержатся также все полиномы и, более общим образом, все «целые» функции от x, т. е. все элементы вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, где ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n$ представляет целую аналитическую функцию комплексного переменного ζ. Действительно, в этом случае ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ мажорируется сходящимся рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n| \, \|x\|^n$. Таким образом, каждой целой аналитической функции $f(\zeta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n$ соответствует «абстрактная» аналитическая функция $\tilde{f}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, определенная для всех элементов кольца. При этом

$$\tilde{f}(x)(M) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n(M) = f(x(M)),$$

так что кольцо $\hat{R}$ вместе с функцией $x(M)$ содержит и функцию $f(x(M))$, какова бы ни была целая аналитическая функция $f(\zeta)$ комплексного переменного ζ. Далее, мы видели, что вместе с каждым элементом x, для которого $x(M)$ не обращается в нуль ни на одном максимальном идеале, в кольце содержится обратный элемент x^{-1}. Таким образом, аналитической функции $\frac{1}{\zeta}$, имеющей полюс в точке $\zeta=0$, соответствует абстрактная «аналитическая» функция x^{-1}, определенная для всех элементов x, спектр которых не содержит точки 0, т. е. целиком содержится в области регулярности функции $\frac{1}{\zeta}$; при этом $(x^{-1})(M) = \frac{1}{x(M)}$. Точно так же, вообще, каждой рациональной функции $R(\zeta) = \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)}$

комплексного переменного ζ соответствует абстрактная «рациональная» функция $\widetilde{R}(x) = \widetilde{P}(x)[\widetilde{Q}(x)]^{-1}$, определенная для всех элементов x, спектр которых не содержит ни одного нуля полинома $Q(\zeta)$, т. е. целиком содержится в области регулярности функции $R(\zeta)$; при этом $R(x(M)) = \dfrac{P(x(M))}{Q(x(M))}$.

Естественно возникает вопрос о распространении этого соответствия, установленного для целых и для рациональных функций, на произвольные аналитические функции. Этот вопрос разрешается в положительном смысле следующей теоремой:

Теорема 1. *Пусть $f(\zeta)$ — аналитическая функция комплексного переменного ζ и x — произвольный элемент из R, спектр которого содержится в области регулярности этой функции. Интеграл*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} (\lambda e - x)^{-1} f(\lambda)\, d\lambda, \tag{1}$$

где Γ — любой спрямляемый контур, содержащийся в области регулярности функции $f(\zeta)$ и содержащий внутри ограничиваемой им области спектр S_x элемента x, существует и не зависит от выбора контура Γ, удовлетворяющего указанным требованиям. При каноническом гомоморфном отображении кольца R в кольцо $\hat{R}$ функций $x(M)$ элемент $\tilde{f}(x)$, представляемый интегралом (1), переходит в функцию $f(x(M))$:

$$\tilde{f}(x)(M) = f(x(M)),$$

так что $\hat{R}$ вместе с $x(M)$ содержит и функцию $f(x(M))$, какова бы ни была аналитическая функция $f(\zeta)$ комплексного переменного ζ, регулярная на множестве значений $x(M)$.

Доказательство. Стоящая под знаком интеграла (1) функция $z(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1} f(\lambda)$ переменного λ, пробегающего контур Γ, в силу выбора этого контура, существует и непрерывна по норме. Поэтому, согласно сказанному в § 3, интеграл (1) действительно существует в смысле сходимости по норме. При этом он не зависит от выбора контура Γ, удовлетворяющего требованиям теоремы, так как $z(\zeta)$ есть абстрактная аналитическая функция переменного ζ, регулярная вне S_x, а для таких функций, как мы видели в § 3, справедлива теорема Коши. Наконец, так как $x(M)$ при фиксированном M и переменном x является линейным функционалом от x (см. стр. 31), то, в силу формулы (2) § 3 и интегральной формулы Коши, имеем:

$$\tilde{f}(x)(M) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda e - x)^{-1}(M) f(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\lambda)\, d\lambda}{\lambda - x(M)} = f(x(M)).$$

Тем самым теорема полностью доказана.

В этой теореме содержится как частный случай следующее обобщение упоминавшейся на стр. 19 и 32 теоремы Винера, принадлежащее П. Леви [90] *):

Пусть ряд Фурье периодической функции $x(t)$ абсолютно сходится и значения $x(t)$ заключены в круге $|\zeta - \zeta_0| < \rho$. Если $f(\zeta)$ — функция комплексного переменного ζ, регулярная во всех точках этого круга, то ряд Фурье функции $f(x(t))$ абсолютно сходится.

Распространению теоремы 1 на случай (вообще многолистных) аналитических функций нескольких элементов кольца будет посвящен § 13.

В заключение настоящего параграфа установим алгебраические и топологические свойства, характеризующие отображение

$$f(\zeta) \to \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda e - x)^{-1} f(\lambda)\, d\lambda. \tag{1'}$$

Пусть D — непустое ограниченное замкнутое множество в плоскости комплексного переменного ζ; A_D — кольцо всех аналитических функций, регулярных на D (с обычными операциями сложения и умножения); $\mathfrak{D}$ — совокупность всех элементов нормированного кольца R, спектр которых целиком содержится в D **), и $R_\mathfrak{D}$ — кольцо всех функций со значениями из R, определенных на $\mathfrak{D}$.

Теорема 2. *Отображение кольца A_D в $R_\mathfrak{D}$, задаваемое формулой* (1'), *обладает следующими, однозначно определяющими его свойствами:* а) *оно является алгебраическим изомор-*

*) См. также А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939, стр. 142—145.

**) $\mathfrak{D}$ не пусто: если $\lambda_0 \in D$, то, во всяком случае, $\lambda_0 e \in \mathfrak{D}$.

физмом, при котором б) $f(\zeta)\equiv 1$ *переходит в* $\tilde{f}(x)\equiv e$, в) $f(\zeta)\equiv\zeta$ *переходит в* $\tilde{f}(x)\equiv x$ *и* г) *последовательность функций* $f_n(\zeta)$, *равномерно сходящаяся в какой-либо открытой области, содержащей* D, *переходит в последовательность функций* $\tilde{f}_n(x)$, *сходящуюся по норме для каждого* $x\in\mathfrak{D}$.

Доказательство. Мы покажем сначала, что если отображение, обладающее указанными свойствами, существует, то оно выражается формулой (1′), а затем убедимся в том, что отображение (1′) действительно обладает указанными свойствами.

Итак, пусть интересующее нас отображение $f(\zeta)\to\tilde{f}(x)$ существует. В силу условий а) и б) функция $\frac{1}{f(\zeta)}$, если она одновременно с $f(\zeta)$ содержится в A_D, переходит в $\tilde{f}^{-1}(x)=[\tilde{f}(x)]^{-1}$. Пусть теперь ζ_0 — произвольная точка, не принадлежащая D. Тогда функция $(\zeta-\zeta_0)^{-1}$ содержится в A_D и должна, в силу сказанного, переходить в функцию $(x-\zeta_0 e)^{-1}$, поскольку $\zeta-\zeta_0$, в силу условий а), б) и в), переходит в $x-\zeta_0 e$. Так как, по предположению, $x\in\mathfrak{D}$, а $\zeta_0\notin D$, то последняя функция действительно существует.

Рассмотрим теперь произвольную функцию $f(\zeta)\in A_D$. Так как $f(\zeta)$ регулярна на ограниченном замкнутом множестве D, то существует спрямляемый контур Γ, целиком лежащий в области регулярности функции $f(\zeta)$, охватывающий D и отстоящий от D на положительное расстояние. По формуле Коши для всех точек $\zeta\in D$ имеем:

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\lambda)\,d\lambda}{\lambda-\zeta}.$$

Правая часть этого равенства является пределом последовательности сумм вида

$$f_n(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n}\frac{f(\lambda_k)(\lambda_{k+1}-\lambda_k)}{\lambda_k-\zeta}\qquad(\lambda_k\in\Gamma),$$

равномерно сходящейся на всем множестве D. Каждой такой сумме вследствие сказанного выше и условия а) соответствует абстрактная функция

$$\tilde{f}_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n}f(\lambda_k)(\lambda_k e-x)^{-1}(\lambda_{k+1}-\lambda_k).$$

По условию г), эти функции должны для каждого $x\in\mathfrak{D}$ сходиться по норме к некоторому пределу. Но они являются интегральными суммами для интеграла (1), который, как мы видели при доказательстве теоремы 1, действительно существует в смысле сходимости по норме и не зависит от выбора контура Γ, лежащего в области регулярности функции $f(\zeta)$ и охватывающего спектр элемента x.

Итак, мы пришли к выводу, что всякой функции $f(\zeta) \in A_D$ должна соответствовать абстрактная функция

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda e - x)^{-1} f(\lambda)\, d\lambda, \tag{1''}$$

причем эта функция действительно существует и однозначно определена для всех $x \in \mathfrak{D}$.

Покажем теперь, что отображение $f(\zeta) \to \tilde{f}(x)$ по формуле (1') действительно обладает утверждаемыми в теореме свойствами.

Докажем, что это отображение гомоморфно. Доказательства требует лишь то, что произведение переходит в произведение. Иными словами, мы должны доказать равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda e - x)^{-1} f(\lambda)\, g(\lambda)\, d\lambda =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda e - x)^{-1} f(\lambda)\, d\lambda \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda e - x)^{-1} g(\lambda)\, d\lambda, \tag{2}$$

где Γ — спрямляемый контур, целиком содержащийся в общей области регулярности функций $f(\zeta)$ и $g(\zeta)$ и содержащий внутри ограничиваемой им области спектр элемента x. Заменяя во втором интеграле в правой части контур Γ охватывающим его контуром Γ_1, отстоящим от Γ на положительное расстояние и всё еще целиком содержащимся в области регулярности функций $f(\zeta)$ и $g(\zeta)$, получаем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda e - x)^{-1} f(\lambda)\, d\lambda \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} (\lambda e - x)^{-1} g(\lambda)\, d\lambda =$$
$$= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma_1} (\lambda e - x)^{-1} (\mu e - x)^{-1} f(\lambda)\, g(\mu)\, d\lambda\, d\mu =$$
$$= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\lambda)\, g(\mu)}{\mu - \lambda} [(\lambda e - x)^{-1} - (\mu e - x)^{-1}]\, d\lambda\, d\mu =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda e - x)^{-1} f(\lambda) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{g(\mu)\, d\mu}{\mu - \lambda} \right) d\lambda +$$
$$+ \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} (\mu e - x)^{-1} g(\mu) \left(\int_{\Gamma} \frac{f(\lambda)\, d\lambda}{\mu - \lambda} \right) d\mu.$$

Так как функция $\dfrac{f(\lambda)}{\mu - \lambda}$ при $\mu \in \Gamma_1$ регулярна в замкнутой области плоскости комплексного переменного λ, ограничиваемой контуром Γ, то, по теореме Коши, второе слагаемое в правой части равно нулю. Далее, так как λ есть внутренняя точка области плоскости комплексного переменного μ, ограничиваемой контуром Γ_1, то внутренний интеграл в первом слагаемом по формуле Коши равен $g(\lambda)$. Тем самым мы и приходим к равенству (2).

Покажем теперь, что ζ переходит в x, т. е. что имеет место равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\zeta e - x)^{-1}\zeta\, d\zeta = x.$$

Так как функция $f(\zeta)\equiv\zeta$ регулярна во всей плоскости, то в качестве контура Γ мы можем принять окружность произвольно большого радиуса с центром в 0. Выберем ее так, чтобы ряд

$$\zeta(\zeta e - x)^{-1} = e + \zeta^{-1}x + \zeta^{-2}x^2 + \ldots$$

на ней абсолютно сходился. Тогда, интегрируя почленно, получим:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\zeta e - x)^{-1}\zeta\, d\zeta =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(e + \zeta^{-1}x + \zeta^{-2}x^2 + \ldots)\, d\zeta = x\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\zeta^{-1}\, d\zeta = x.$$

Аналогично устанавливается, что 1 переходит в e.

Пусть теперь $f_n(\zeta)\to f(\zeta)$ равномерно в открытой области D', содержащей D. Беря в качестве Γ контур, лежащий внутри D', охватывающий D и отстоящий от D на положительное расстояние, будем иметь:

$$\|\tilde f(x) - \tilde f_n(x)\| = \left\| \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\lambda e - x)^{-1}[f(\lambda) - f_n(\lambda)]\, d\lambda \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{\lambda\in\Gamma}|f(\lambda) - f_n(\lambda)|\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\|(\lambda e - x)^{-1}\|\,|d\lambda| \to 0 \qquad (n\to\infty).$$

Нам осталось показать, что гомоморфное отображение $f(\zeta)\to\tilde f(x)$ является изоморфизмом, т. е. что $\tilde f(x)$ есть тождественный нуль лишь в том случае, когда $f(\zeta)\equiv 0$.

Но если $f(\zeta)\not\equiv 0$, то существует замкнутое множество $D_1\subset D$, во всех точках которого $f(\zeta)\neq 0$. Тогда $\frac{1}{f(\zeta)}\in A_{D_1}$, и функция $\frac{1}{\tilde f}(x)$ определена для всех x, спектр которых содержится в D_1. По доказанному выше, имеем: $\tilde f(x)\frac{1}{\tilde f}(x) = e$ и, значит, $\tilde f(x)\neq 0$ для всех указанных элементов x.

Тем самым доказательство теоремы 2 завершено.

§ 7. Кольцо $\hat{R}$ функций $x(M)$

В § 4 было показано, что каждому элементу x коммутативного нормированного кольца R естественным образом отвечает функция $x(M)$, определенная на множестве $\mathfrak{M}$ всех максимальных идеалов кольца R, причем эти функции образуют кольцо $\hat{R}$ с единицей относительно обычных алгебраических операций и $x \to x(M)$ есть гомоморфное отображение R на $\hat{R}$, ядром которого служит радикал кольца R. Тем самым было показано, в частности, что каждое коммутативное нормированное кольцо R без радикала допускает каноническое представление в виде кольца функций $\hat{R}$. Запас функций $x(M)$ достаточно велик, чтобы «отделить» любые две различные точки множества $\mathfrak{M}$, и в § 5 с помощью этих функций была определена в $\mathfrak{M}$ топология, при которой $\mathfrak{M}$ становится бикомпактным хаусдорфовым пространством, а $x(M)$ оказываются непрерывными функциями на этом пространстве $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов.

Естественно возникает вопрос: достаточно ли велик запас функций $x(M)$, чтобы можно было аппроксимировать ими все непрерывные функции на $\mathfrak{M}$?

Для кольца A этот вопрос решается отрицательно: как мы видели, пространством максимальных идеалов этого кольца служит круг $|\zeta| \leqslant 1$, и так как A замкнуто относительно предельного перехода, равномерного на этом круге, то неаналитические функции, непрерывные в круге $|\zeta| \leqslant 1$, не могут быть равномерно аппроксимированы функциями из A.

Определение 1. Пусть R — коммутативное нормированное кольцо. Определяемое им кольцо $\hat{R}$ функций $x(M)$ мы будем называть *симметричным*, если вместе с каждой своей функцией оно содержит и комплексно сопряженную функцию, т. е. для каждого элемента $x \in R$ существует элемент $y \in R$ такой, что $y(M) = \overline{x(M)}$ на множестве $\mathfrak{M}$ всех максимальных идеалов M кольца R.

Кольцо A (которое, как мы видели, можно считать совпадающим с $\hat{A}$) несимметрично: $x(\zeta)$ и $\overline{x(\zeta)}$ могут быть одновременно аналитичны в круге $|\zeta| < 1$ лишь если $x(\zeta) = \text{const}$. Напротив, кольца C, D_n и W (рассматриваемые как кольца функций на множествах своих максимальных идеалов) симметричны: для C и D_n

это непосредственно ясно, в кольце же W сопряженным к элементу $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ будет элемент $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{c}_{-n} e^{int}$.

Теорема 1. *Если $\hat{R}$ — симметричное кольцо, то всякая непрерывная на $\mathfrak{M}$ функция $f(M)$ есть предел равномерно сходящейся последовательности функций $x(M) \in \hat{R}$.*

Заметим прежде всего, что, в силу симметричности кольца $\hat{R}$, вещественная и мнимая части каждой функции $x(M) \in \hat{R}$ также принадлежат $\hat{R}$. При этом если $x(M_1) \neq x(M_2)$, то должно выполняться по крайней мере одно из аналогичных неравенств для $\Re x(M)$ или $\Im x(M)$, так что различные максимальные идеалы отделяются уже вещественными функциями из $\hat{R}$. Кроме того, из близости $x(M)$ к $f(M)$, очевидно, следует близость $\Re x(M)$ к $\Re f(M)$ и $\Im x(M)$ к $\Im f(M)$, и обратно. Таким образом, теорема 1 сводится к следующей теореме:

Теорема 1′. *Пусть на бикомпактном пространстве $\mathfrak{M}$ задано семейство K непрерывных вещественных функций, содержащее все постоянные и являющееся алгебраическим кольцом с обычными операциями сложения и умножения, причем для любых двух точек $M_1 \neq M_2$ существует функция $\varphi(M) \in K$ такая, что $\varphi(M_1) \neq \varphi(M_2)$. Тогда каждая непрерывная вещественная функция, заданная на $\mathfrak{M}$, является пределом равномерно сходящейся последовательности функций из K.*

Доказательство теоремы 1′. Обозначим через $C^{\mathbf{R}}(\mathfrak{M})$ пространство всех непрерывных вещественных функций на $\mathfrak{M}$ с нормой $\|f(M)\| = \max |f(M)|$ и через $\overline{K}$ — замыкание семейства K в $C^{\mathbf{R}}(\mathfrak{M})$. Нам нужно показать, что $\overline{K} \equiv C^{\mathbf{R}}(\mathfrak{M})$. Мы разобьем доказательство на несколько последовательных этапов.

1. *Если $f(M) \in \overline{K}$, то и $|f(M)| \in \overline{K}$.*

Действительно, $f(M)$ как непрерывная функция, заданная на бикомпактном пространстве, ограниченна: $|f(M)| \leqslant a$, Имеем:

$$|f(M)| = \sqrt{a^2 - [a^2 - f^2(M)]} = a\sqrt{1 - \left(1 - \frac{f^2(M)}{a^2}\right)} =$$
$$= a\left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\left(1 - \frac{f^2(M)}{a^2}\right)^n\right\},$$

где ряд равномерно сходится, так как $0 \leqslant 1 - \frac{f^2(M)}{a^2} \leqslant 1$. Таким образом, $|f(M)|$ есть предел равномерно сходящейся последовательности функций из $\overline{K}$ (частичных сумм этого ряда), т. е. само принадлежит $\overline{K}$.

2. *Если $f(M)$, $g(M)$, ..., $h(M)$ принадлежат $\overline{K}$, то также*

$$\max[f(M),\ g(M),\ \ldots,\ h(M)]$$

и

$$\min[f(M),\ g(M),\ \ldots,\ h(M)]$$

принадлежат $\overline{K}$.

Очевидно, достаточно убедиться в этом для случая двух функций. Но

$$\max[f(M),\ g(M)] = \frac{f(M) + g(M) + |f(M) - g(M)|}{2}$$

и

$$\min[f(M),\ g(M)] = \frac{f(M) + g(M) - |f(M) - g(M)|}{2},$$

так что справедливость нашего утверждения вытекает из результата, полученного в предыдущем пункте.

3. ***Для любых двух точек $M_1 \neq M_2$ в $\overline{K}$ существует неотрицательная функция, не превосходящая 1, равная 1 в M_1 и 0 в некоторой окрестности точки M_2.***

По условию, существует функция $\varphi(M) \in K$ такая, что $\varphi(M_1) \neq \varphi(M_2)$. Положим $\psi(M) = \frac{\varphi(M) - \varphi(M_2)}{\varphi(M_1) - \varphi(M_2)}$. Очевидно, $\psi(M_1) = 1$, $\psi(M_2) = 0$. В силу непрерывности, $\psi(M) < \varepsilon < 1$ в некоторой окрестности точки M_2. Функция $\chi(M) = \frac{\max[\psi(M) - \varepsilon,\ 0]}{1 - \varepsilon}$ равна тогда 1 в M_1 и 0 во всей указанной окрестности точки M_2 и неотрицательна; значит,

$\omega(M)=\min[\chi(M), 1]$ удовлетворяет всем нашим требованиям.

4. *Пусть F — замкнутое множество в $\mathfrak{M}$ и M_1 — не принадлежащая ему точка. Тогда в $\overline{K}$ существует неотрицательная функция, не превосходящая* 1, *равная* 1 *в M_1 и* 0 *на всем F.*

Действительно, каждой точке $M_2 \in F$ отвечает некоторая функция, обладающая свойствами, указанными в предыдущем пункте, и в частности некоторая окрестность, в которой эта функция равна нулю. Так как F бикомпактно, то существует конечное число n таких окрестностей, покрывающих всё F. Пусть $\omega_1(M), \ldots, \omega_n(M)$ — соответствующие функции. Тогда функция $\omega(M)=\min[\omega_1(M), \ldots, \omega_n(M)]$ будет, очевидно, удовлетворять нашим требованиям.

5. *Пусть F_1 и F_2 — два непересекающихся замкнутых множества. Тогда в $\overline{K}$ существует неотрицательная функция, не превосходящая* 1, *равная* 1 *на F_1 и* 0 *на F_2.*

Действительно, по доказанному в предыдущем пункте, каждой точке $M_1 \in F_1$ отвечает некоторая неотрицательная функция $\varphi(M) \in \overline{K}$, не превосходящая 1, равная 1 в этой точке и 0 на F_2. В силу непрерывности, $\varphi(M) > 1-\varepsilon > 0$ в некоторой окрестности точки M_1. Тогда функция $\psi(M) = \frac{\min[\varphi(M), 1-\varepsilon]}{1-\varepsilon}$ будет равна 0 на F_2 и 1 во всей указанной окрестности точки M_1. Заставляя M_1 пробегать всё F_1, мы получим покрытие бикомпактного множества F_1 окрестностями. Выберем из него конечное покрытие $U_1, \ldots, U_n$ и пусть $\psi_1(M), \ldots, \psi_n(M)$ — соответствующие функции. Тогда функция $\psi(M)=\max[\psi_1(M), \ldots, \psi_n(M)]$ будет удовлетворять всем нашим требованиям.

6. $\overline{K} \equiv C^{\mathbf{R}}(\mathfrak{M})$.

Действительно, пусть $f(M)$ — произвольная вещественная непрерывная функция на $\mathfrak{M}$. Без ограничения общности мы можем считать, что $\min f(M)=0$ и $\max f(M)=1$. Пусть n — натуральное число. Обозначим через P_k множество точек M, в которых $f(M) \leqslant \frac{k}{n}$, и через Q_k — множество точек M, в которых $f(M) \geqslant \frac{k+1}{n}$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$. В силу непрерывности функции $f(M)$ все эти множества замкнуты.

При этом $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_{n-1}$, $Q_0 \supset Q_1 \supset \ldots \supset Q_{n-1}$ и P_k не пересекается с Q_k. Пусть $\psi_k(M)$ — функция из $\overline{K}$, построенная для множеств Q_k и P_k, как указано в предыдущем пункте, т. е. равная 1 на Q_k и 0 на P_k и заключенная всюду в пределах от 0 до 1. Положим $\psi(M) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\psi_k(M)$.

Мы утверждаем, что $|f(M) - \psi(M)| \leqslant \frac{1}{n}$. Действительно, пусть в точке M значение $f(M)$ заключено в пределах от $\frac{k}{n}$ до $\frac{k+1}{n}$: $\frac{k}{n} \leqslant f(M) \leqslant \frac{k+1}{n}$, так что M содержится в Q_{k-1} и P_{k+1}. Тогда $\psi_0(M) = \psi_1(M) = \ldots = \psi_{k-1}(M) = 1$, $\psi_{k+1}(M) = \psi_{k+2}(M) = \ldots = \psi_{n-1}(M) = 0$, и так как $0 \leqslant \psi_k(M) \leqslant 1$, то $\frac{k}{n} \leqslant \psi(M) \leqslant \frac{k+1}{n}$; следовательно, $f(M)$ и $\psi(M)$ находятся в одном и том же интервале длины $\frac{1}{n}$, и значит, $|f(M) - \psi(M)| \leqslant \frac{1}{n}$. Так как теперь n произвольно, а $\overline{K}$ замкнуто, то $f(M) \in \overline{K}$. Таким образом, $\overline{K} \equiv C^{\mathbf{R}}(\mathfrak{M})$, что и утверждалось в теореме 1'.

Тем самым доказана также теорема 1.

Очевидно, в теореме 1' содержатся как частные случаи известные аппроксимационные теоремы Вейерштрасса (для алгебраических и тригонометрических полиномов с любым числом переменных). В качестве еще одной иллюстрации к теореме 1' рассмотрим на топологическом произведении $S \times T$ бикомпактных хаусдорфовых пространств S и T алгебраическое кольцо K, порождаемое совокупностью всех функций вида $\varphi(s)\psi(t)$, где $\varphi(s)$ и $\psi(t)$ — непрерывные вещественные функции, определенные соответственно на S и T. Элементы этого кольца, очевидно, непрерывны на бикомпактном пространстве $S \times T$. Далее, так как S вполне регулярно, то для любых двух его точек $s_1 \neq s_2$ существует непрерывная функция $\varphi(s)$ такая, что $\varphi(s_1) \neq \varphi(s_2)$, и то же верно для T. Поэтому и для любых двух точек $(s_1, t_1) \neq (s_2, t_2)$ пространства $S \times T$ найдется в K функция, приннмающая в этих точках различные значения. Таким образом, семейство K удовлетворяет всем условиям теоремы 1', и мы заключаем: *каждое непрерывное вещественное ядро $k(s, t)$, заданное на $S \times T$, может быть равномерно аппроксимировано «вырожденными» ядрами вида $\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(s)\psi_k(t)$, где $\varphi_k(s)$ и $\psi_k(t)$ — непрерывные вещественные функции, заданные соответственно на S и T.*

Замечание. Условие, что семейство K теоремы 1′ содержит произведения своих элементов, было использовано лишь в пункте 1 доказательства этой теоремы. Таким образом, мы фактически доказали следующее предложение:

Пусть семейство K вещественных непрерывных функций, заданных на бикомпактном множестве $\mathfrak{M}$: 1) содержит функцию $\varphi(M) \equiv 1$; 2) вместе с двумя функциями содержит также их сумму; 3) вместе с $\varphi(M)$ содержит $\lambda\varphi(M)$, где λ — произвольное вещественное число; 4) вместе с $\varphi(M)$ содержит $|\varphi(M)|$ и 5) для любых двух точек $M_1 \neq M_2$ содержит функцию $\varphi(M)$ такую, что $\varphi(M_1) \neq \varphi(M_2)$. Тогда каждая непрерывная вещественная функция, заданная на $\mathfrak{M}$, является пределом равномерно сходящейся последовательности функций из K.

Из теоремы 1 непосредственно вытекает

Теорема 2. *Если $\hat{R}$ симметрично и из равномерной сходимости функций $x_n(M) \in \hat{R}$ следует сходимость элементов x_n кольца R по норме, то R изоморфно кольцу $C(\mathfrak{M})$ всех непрерывных комплексных функций на $\mathfrak{M}$ с нормой $\|f\| = \max|f(M)|$.*

Следствие. *Если для любого элемента x кольца R выполняется равенство $\|x^2\| = \|x\|^2$ и кольцо $\hat{R}$ симметрично, то R изометрически изоморфно кольцу $C(\mathfrak{M})$ всех непрерывных комплексных функций на $\mathfrak{M}$.*

Действительно, из этого равенства и теоремы 6 § 4 вытекает, что

$$\max|x(M)| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{\|x^{2^n}\|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{\|x\|^{2^n}} = \|x\|,$$

и значит, равномерная сходимость функций $x(M)$ влечет сходимость элементов x по норме.

§ 8. Кольца с инволюцией

Определение 1. *Инволюцией* в кольце R называют операцию $x \to x^*$, относящую каждому элементу $x \in R$ однозначно определенный элемент $x^* \in R$ так, что тождественно выполняются следующие условия:

$$\text{а) } (x^*)^* = x; \quad \text{б) } (\lambda x + \mu y)^* = \bar{\lambda} x^* + \bar{\mu} y^*; \quad \text{в) } (xy)^* = y^* x^*.$$

Кольцо R, в котором задана инволюция, мы будем называть *кольцом с инволюцией*, а x^* — элементом, *сопряженным* к x.

Приведем несколько примеров коммутативных нормированных колец с инволюцией.

1. Пусть R — нормированное кольцо ограниченных функций на произвольном множестве S с обычными операциями и «равномерной» нормой $\|x\| = \sup\limits_{t \in S} |x(t)|$. Предположим, кроме того, что вместе с каждой своей функцией R содержит также комплексно сопряженную функцию. Тогда $x(t) \to \overline{x(t)}$ есть инволюция в R.

2. Пусть Q_0 — произвольное множество перестановочных друг с другом ограниченных эрмитовых операторов в гильбертовом пространстве H. Обозначим через Q наименьшее множество ограниченных линейных операторов в H, содержащее Q_0 и единичный оператор E и замкнутое относительно операций умножения на комплексные числа, сложения, перемножения, взятия сопряженного оператора и перехода к пределу по операторной норме. Q есть коммутативное нормированное кольцо относительно обычных операций над операторами и операторной нормы, а переход к сопряженному оператору есть инволюция в Q.

3. В кольце A примера 6° § 1 имеется инволюция

$$x(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n \to \overline{x(\bar{\zeta})} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{c}_n \zeta^n.$$

4. В кольце I примера 5° § 1 имеется инволюция

$$\lambda e + x(t) \to \bar{\lambda} e + \overline{x(t)}.$$

Элементы x кольца с инволюцией $x \to x^*$, для которых $x^* = x$, мы будем называть *самосопряженными*.

Единица e кольца с инволюцией есть самосопряженный элемент. Действительно, в силу условий а) и в) определения 1, имеем: $e = (e^*)^* = (e^*e)^* = e^*(e^*)^* = e^*e = e^*$.

В кольце R с инволюцией xx^* есть самосопряженный элемент при любом $x \in R$. Действительно, в силу тех же условий, $(xx^*)^* = (x^*)^* x^* = xx^*$.

В частности, $0 (= 00^*)$ — самосопряженный элемент, т. е. $0^* = 0$.

Всякий элемент x кольца с инволюцией однозначно представим в виде $y + iz$, где y и z — самосопряженные элементы. Действительно, если $x = y + iz$ — такое представление, то, в силу условия б) определения 1, $x^* = y - iz$, откуда $y = \frac{x + x^*}{2}$ и $z = \frac{x - x^*}{2i}$, а условия а) и б) показывают, что так определенные y и z — действительно самосопряженные элементы.

Определение 2. Коммутативное нормированное кольцо R с инволюцией мы будем называть *симметричным кольцом* (а его инволюцию — *симметричной инволюцией*), *если*

$$x^*(M) = \overline{x(M)}$$

для всех $x \in R$ и всех максимальных идеалов M кольца R.

Замечание. Таким образом, если R симметрично в смысле этого определения, то кольцо $\hat{R}$ вместе с каждой функцией $x(M)$ содержит и комплексно сопряженную функцию $\overline{x(M)}$, т. е. симметрично в смысле определения 1 § 7 (так что, в частности, к нему применима теорема 1 § 7).

Так как $\hat{R}$ алгебраически изоморфно факторкольцу кольца R по радикалу, то его можно рассматривать как коммутативное нормированное кольцо с нормой

$$\|x(M)\| = \inf\{\|x'\|: \quad x' \in R, \quad x'(M) \equiv x(M)\}$$

(см. теорему 3 § 2). Тогда симметричность $\hat{R}$ в смысле определения 1 § 7 означает то же, что симметричность в смысле данного только что определения 2. Действительно, множество максимальных идеалов кольца $\hat{R}$ естественно отождествляется с множеством $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов кольца R, служащим областью определения функций из $\hat{R}$, и симметричность кольца R в смысле определения 1 § 7 равносильна существованию инволюции $x(M) \to \overline{x(M)}$, симметричной в смысле определения 2.

Определение 3. Нормированное кольцо R с инволюцией называется *вполне регулярным*, если инволюция в нем, помимо условий а) — в) определения 1, удовлетворяет еще условию

г) $\|xx^*\| = \|x\|\,\|x^*\|$ для всех $x \in R$.

Теорема 1. *Коммутативное вполне регулярное нормированное кольцо R изометрически изоморфно кольцу $C(\mathfrak{M})$ всех непрерывных комплексных функций на пространстве $\mathfrak{M}$ его максимальных идеалов.*

Доказательство. В силу замечания к определению 2 и следствия теоремы 2 § 7, достаточно показать, что а) R симметрично и б) $\|x^2\| = \|x\|^2$ для каждого $x \in R$.

а) Пусть, вопреки утверждению, R несимметрично, т. е. существуют $x_0 \in R$ и $M_0 \in \mathfrak{M}$ такие, что $x_0^*(M_0) \neq \overline{x_0(M_0)}$, откуда $\mathfrak{J}(x_0 + x_0^*)(M_0) \neq 0$. Положим

$$h = \frac{x_0 + x_0^* - \mathfrak{R}(x_0 + x_0^*)(M_0) \cdot e}{\mathfrak{J}(x_0 + x_0^*)(M_0)},$$

где e — единица кольца R. Тогда $h^* = h$. Далее, $h(M_0) = i$, и потому элемент $h - ie$ кольца R не имеет обратного. Из условия в) определения 1 легко следует, что тогда также $(h - ie)^* = h + ie$ не имеет обратного и, значит, существует $M_1 \in \mathfrak{M}$ такое, что $h(M_1) = -i$. Возьмем произвольное $N > 0$. Так как

$$(h + Nie)(M_0) = (1 + N)i \quad \text{и} \quad (h - Nie)(M_1) = -(1 + N)i,$$

то

$$\|h + Nie\| \geqslant 1 + N \quad \text{и} \quad \|h - Nie\| \geqslant 1 + N,$$

откуда, в силу условия г) определения 3,

$$\|h^2 + N^2 e\| = \|(h + Nie)(h + Nie)^*\| =$$
$$= \|h + Nie\| \, \|h - Nie\| \geqslant (1 + N)^2.$$

Но, с другой стороны, $\|h^2 + N^2 e\| \leqslant \|h^2\| + N^2$, и мы получаем, что $(1 + N)^2 \leqslant \|h^2\| + N^2$ для всех $N > 0$, что невозможно.

б) В силу условия г) определения 3,

$$\|(xx^*)^2\| = \|(xx^*)(xx^*)^*\| = \|xx^*\|^2 = \|x\|^2 \|x^*\|^2$$

и

$$\|x^2 (x^*)^2\| = \|x^2 (x^2)^*\| = \|x^2\| \, \|(x^*)^2\|.$$

Так как, однако, $xx^* = x^* x$, то $x^2 (x^*)^2 = (xx^*)^2$. Следовательно,

$$\|x\|^2 \|x^*\|^2 = \|x^2\| \, \|(x^*)^2\|. \tag{1}$$

Но $\|x^2\| \leqslant \|x\|^2$ и $\|(x^*)^2\| \leqslant \|x^*\|^2$. Если поэтому предположить, что $\|x^2\| < \|x\|^2$, то из равенства (1) будет следовать, что $x^* = 0$; но тогда и $x = (x^*)^* = 0^* = 0$, а это противоречит предположенному неравенству. Тем самым $\|x^2\| = \|x\|^2$ для всех $x \in R$, и теорема полностью доказана.

Так как условие г) определения 3 выполняется для линейных операторов в гильбертовом пространстве, то кольцо Q примера 2 вполне регулярно. Таким образом, из теоремы 1 непосредственно следует, что *всякое коммутативное нормированное кольцо Q ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве, наделенное операторной нормой и вместе с каждым входящим в него оператором содержащее также сопряженный оператор, изометрически изоморфно кольцу всех непрерывных комплексных функций на бикомпактном пространстве своих максимальных идеалов.*

Из этого свойства колец Q легко может быть получено спектральное разложение ограниченных нормальных операторов *).

Симметричность кольца можно охарактеризовать, не пользуясь значениями его элементов на максимальных идеалах.

Теорема 2. *Для того чтобы коммутативное нормированное кольцо R с инволюцией $x \to x^*$ было симметричным, необходимо и достаточно, чтобы $(e+x^*x)^{-1}$ существовало в R для всех $x \in R$.*

Доказательство. а) Необходимость. Если R симметрично, то

$$(e+x^*x)(M)=1+|x(M)|^2 \neq 0$$

для всех максимальных идеалов M, так что $(e+x^*x)^{-1}$ существует.

б) Достаточность. Покажем сначала, что *если условие теоремы выполнено, то функция $x(M)$ вещественна для каждого самосопряженного элемента $x \in R$.* В силу теоремы 4 § 4 для этого достаточно показать, что $(x-(\alpha+i\beta)e)^{-1}$, где α и β — вещественные числа, существует для всех $\beta \neq 0$. Но $(x-\alpha e)^* = x^* - \bar{\alpha} e^* = x - \alpha e$. Поэтому при $\beta \neq 0$ имеем:

$$(x-(\alpha+i\beta)e)(x-(\alpha-i\beta)e)=(x-\alpha e)^2+\beta^2 e=$$
$$=(x-\alpha e)^*(x-\alpha e)+\beta^2 e=\beta^2(e+z^*z),$$

где $z=\dfrac{x-\alpha e}{\beta}$. И так как для правой части, в силу условия теоремы, существует обратный элемент, то существует и

$$(x-(\alpha+i\beta)e)^{-1}=(x-(\alpha-i\beta)e)((x-\alpha e)^2+\beta^2 e)^{-1}.$$

*) См., например, [31], стр. 123—124.

Пусть теперь x — произвольный элемент кольца R. Представляя x в виде $y+iz$, где y и z — самосопряженные элементы, получаем: $x(M)=y(M)+iz(M)$, $x^*(M)=$ $=y(M)-iz(M)$, и следовательно, $x^*(M)=\overline{x(M)}$, поскольку $y(M)$ и $z(M)$, как мы доказали, вещественны.

Теорема 2 дает возможность в некоторых случаях устанавливать симметричность кольца, не находя его максимальных идеалов. Так, покажем, что *инволюция* $x(t)\to\overline{x(t)}$ *в кольце* R *примера* 1 — *симметричная*. По теореме 2, для этого достаточно показать, что если $x(t)\in R$, то также $\frac{1}{1+|x(t)|^2}\in R$.

Пусть $\|x\|=a$. Тогда

$$\frac{1}{1+|x(t)|^2}=\frac{1}{(a^2+1)-[a^2-|x(t)|^2]}=$$

$$=\frac{1}{a^2+1}\frac{1}{1-\frac{a^2-|x(t)|^2}{a^2+1}}=\frac{1}{a^2+1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a^2-|x(t)|^2}{a^2+1}\right)^n,$$

где ряд равномерно сходится, ибо $\left|\frac{a^2-|x(t)|^2}{a^2+1}\right|\leqslant\frac{a^2}{a^2+1}<1$. Но все частичные суммы этого ряда принадлежат R. Так как R замкнуто относительно равномерного предельного перехода, то также сумма ряда, т. е. функция $\frac{1}{1+|x(t)|^2}$, принадлежит R. Значит, R (а тем самым и $\hat{R}$) симметрично.

Так как в R удовлетворяется также условие $\|x^2\|=\|x\|^2$, то, принимая во внимание следствие теоремы 2 § 7, заключаем, что справедлива следующая теорема:

Теорема 3. *Всякое нормированное кольцо R ограниченных функций (с обычными операциями) на произвольном множестве S, наделенное равномерной нормой и вместе с каждой входящей в него функцией содержащее также комплексно сопряженную функцию, изометрически изоморфно кольцу $C(\mathfrak{M})$ всех непрерывных комплексных функций на бикомпактном пространстве $\mathfrak{M}$ своих максимальных идеалов, причем комплексно сопряженным функциям из R отвечают комплексно сопряженные функции в $C(\mathfrak{M})$.*

В частности, это верно для кольца B непрерывных почти периодических функций на прямой (как и на любой вообще топологической группе).

Заметим еще, что симметричность кольца Q примера 2, вытекающую из теоремы 1, можно доказать также, основываясь на теореме 2. Пусть $A \in Q$ и $\|A\| = a$. Достаточно показать, что $\left\| \frac{a^2E - A^*A}{a^2+1} \right\| < 1$, ибо тогда совершенно так же, как в предыдущем случае,

$$(E + A^*A)^{-1} = \frac{1}{a^2+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^2E - A^*A}{a^2+1} \right)^n.$$

Но так как $(A^*Af,\ A^*Af) = (AA^*Af,\ Af) \leqslant \|AA^*\|(Af,\ Af) = a^2(Af,\ Af)$, то

$$\|a^2E - A^*A\|^2 = \sup_{f \neq 0} \frac{((a^2E - A^*A)f,\ (a^2E - A^*A)f)}{(f,f)} =$$

$$= \sup_{f \neq 0} \frac{a^4(f,f) - 2a^2(Af,\ Af) + (A^*Af,\ A^*Af)}{(f,f)} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{f \neq 0} \frac{a^4(f,f) - a^2(Af,\ Af)}{(f,f)} \leqslant a^4,$$

откуда и следует, что

$$\left\| \frac{a^2E - A^*A}{a^2+1} \right\| \leqslant \frac{a^2}{a^2+1} < 1.$$

Определение 4. Линейный функционал f, определенный на кольце R с инволюцией, называют *положительным*, если $f(xx^*) \geqslant 0$ для всех $x \in R$ (или, что то же, $f(x^*x) \geqslant 0$ для всех $x \in R$). Инволюцию в R мы будем называть *существенной*, если для каждого ненулевого элемента $x_0 \in R$ существует положительный линейный функционал f_0 такой, что $f_0(x_0x_0^*) \neq 0$ *).

Пусть R — кольцо примера 1. Каждая точка $t_0 \in S$ определяет линейный функционал $f_{t_0}(x) = x(t_0)$ на R, положительный относительно инволюции $x(t) \to \overline{x(t)}$, и так как $(x_0x_0^*)(t) \equiv |x_0(t)|^2 \not\equiv 0$ означает, что $f_t(x_0x_0^*) \neq 0$ при некотором $t \in S$, то эта инволюция существенная. Как мы видели, она также симметричная.

*) Можно показать, что в кольце с существенной инволюцией для каждого ненулевого элемента x_0 существует положительный линейный функционал f_0 такой, что $f_0(x_0) \neq 0$.

Пусть Q — кольцо примера 2. Каждый элемент $f \in H$ определяет на Q линейный функционал $f(A) = (Af, f)$ $(A \in Q)$, положительный, поскольку $f(A^*A) = (A^*Af, f) = (Af, Af) \geqslant 0$. Так как при этом для каждого $A_0 \neq 0$ существует элемент $f_0 \in H$ такой, что $\left(A_0^* A_0 f_0, f_0\right) = \|A_0 f_0\|^2 \neq 0$, то инволюция $A \to A^*$ в Q существенная. Как мы видели, эта инволюция вместе с тем симметричная.

Инволюция $x(\zeta) \to \overline{x(\bar{\zeta})}$ в кольце A примера 6° § 1 также существенная. Действительно, каждая неубывающая вещественная функция $\sigma(t)$, заданная на отрезке $[-1, 1]$, определяет на A положительный линейный функционал

$$f_\sigma(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\, d\sigma(t)\ ^{*)};$$

если при этом $f_\sigma\left(xx^*\right) = \int_{-1}^{1} |x(t)|^2 d\sigma(t) = 0$ для всех σ, то $x(t) = 0$ для всех $t \in [-1, 1]$ и, значит, будучи аналитической функцией, $x(\zeta) \equiv 0$. Заметим, что рассматриваемая инволюция—несимметричная. Действительно, $x(\zeta) \equiv \zeta \in A$, но функция $\dfrac{1}{1 + x(\zeta)\overline{x(\bar{\zeta})}} = \dfrac{1}{1+\zeta^2}$ имеет полюсы в точках $\zeta = \pm i$ и потому $\notin A$. Впрочем, несимметричность кольца A, установленная в § 7, показывает, что никакая инволюция в этом кольце не может быть симметричной.

Из доказываемой ниже теоремы 4 будет следовать, что никакая инволюция в кольце I примера 5° § 1 не может быть существенной. Между тем, относя элементу $z = \lambda e + x(t)$ элемент $z^* = \bar{\lambda} e + x^*(t)$, она симметрична, поскольку значения z и z^* на единственном максимальном идеале кольца I (образованном элементами z с $\lambda = 0$; см. стр. 34) равны соответственно λ и $\bar{\lambda}$.

Пусть f — положительный линейный функционал на коммутативном нормированном кольце R с инволюцией $x \to x^*$. Из того, что для всех комплексных чисел λ выполняется неравенство

$$f((x+\lambda e)(x+\lambda e)^*) = f(xx^*) + \lambda f(x^*) + \bar{\lambda} f(x) + |\lambda|^2 f(e) \geqslant 0,$$

легко следует, что

$$f(x^*) = \overline{f(x)} \tag{2}$$

и

$$|f(x)|^2 \leqslant f(e) f(xx^*). \tag{3}$$

---

*) Это — общий вид положительного линейного функционала на A; см. Приложение, §§ 2 и 5.

Полагая $xx^* = z$, повторно применяя неравенство (3) и принимая во внимание, что $(z^m)^* = z^m$, получаем:

$$|f(x)| \leqslant f(e)^{\frac{1}{2}} f(z)^{\frac{1}{2}} \leqslant f(e)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} f(z^2)^{\frac{1}{4}} \leqslant \ldots$$
$$\ldots \leqslant f(e)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}} f\left(z^{2^{n-1}}\right)^{\frac{1}{2^n}}.$$

Так как $|f(y)| \leqslant \|f\|\,\|y\|$, то отсюда следует, что

$$|f(x)| \leqslant f(e)^{1-\frac{1}{2^n}} \|f\|^{\frac{1}{2^n}} \left\|z^{2^{n-1}}\right\|^{\frac{1}{2^n}}.$$

Переходя здесь к пределу по $n \to \infty$ и принимая во внимание теорему 6 § 4, получаем:

$$|f(x)| \leqslant f(e) \max_{M \in \mathfrak{M}} |(xx^*)(M)|^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Из этого неравенства вытекают важные следствия.

Теорема 4. *Коммутативное нормированное кольцо R с существенной инволюцией является кольцом без радикала.*

Доказательство. Заменив в (4) x на xx^*, получим:

$$|f(xx^*)| \leqslant f(e) \max_{M \in \mathfrak{M}} |(xx^*)(M)|.$$

Это неравенство показывает, что *если x — обобщенный нульстепенный элемент, т. е. $x(M) \equiv 0$, то $f(xx^*) = 0$ для всех положительных линейных функционалов f.* Но если инволюция в R существенная, то отсюда следует тогда, что $x = 0$, т. е. R — кольцо без радикала.

В гл. IV будут даны применения теоремы 4 к гармоническому анализу на группах.

Теорема 5. *Каждый положительный линейный функционал f на коммутативном нормированном кольце R с симметричной инволюцией $x \to x^*$ определяет положительный линейный функционал $\hat{f}(x(M)) = f(x)$ на пространстве $\hat{R}$ функций $x(M)$, однозначно продолжаемый до положительного линейного функционала на пространстве $C(\mathfrak{M})$ всех непрерывных комплексных функций на $\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ — пространство максимальных идеалов кольца R. При этом положительность функционала на пространстве функций понимается обычным образом.*

Доказательство. Так как R — кольцо с симметричной инволюцией, то $x^*(M) = \overline{x(M)}$ и потому неравенство (4) принимает вид

$$|f(x)| \leqslant f(e) \max_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)|. \tag{4'}$$

Это показывает, что $\hat{f}$ есть однозначно определенный линейный функционал на пространстве $\hat{R}$, наделенном равномерной нормой $\|x\|_0 = \max\limits_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)|$. Покажем, что этот функционал положителен, т. е. что $\hat{f}(x(M)) \geqslant 0$, если $x(M) \geqslant 0$ для всех $M \in \mathfrak{M}$. Заметим прежде всего, что если $x(M)$ вещественно для всех $M \in \mathfrak{M}$, то $f(x)$ вещественно. В самом деле, так как тогда $x^*(M) = x(M)$, то x^* может отличаться от x лишь обобщенным нульстепенным элементом, а на таком элементе f обращается в нуль; поэтому $f(x^*) = f(x)$, т. е., в силу (2), $\overline{f(x)} = f(x)$. Пусть теперь $x(M) \geqslant 0$ для всех $M \in \mathfrak{M}$. Положим $\|x\|_0 = a$. Так как

$$0 \leqslant a - x(M) = (ae - x)(M) \leqslant a$$

и, в силу только что доказанного, $f(ae - x)$ вещественно, то, применяя неравенство (4'), получаем:

$$af(e) - f(x) = f(ae - x) \leqslant f(e) \|ae - x\|_0 \leqslant af(e).$$

Это и показывает, что $\hat{f}(x(M)) = f(x) \geqslant 0$.

В силу симметричности кольца $\hat{R}$ и теоремы 1 § 7, пополнение пространства $\hat{R}$ по равномерной норме совпадает с пространством $C(\mathfrak{M})$. Отсюда следует, что функционал $\hat{f}$ однозначно продолжается до линейного функционала на $C(\mathfrak{M})$. Из теоремы 1 § 7 легко вытекает также, что каждая неотрицательная непрерывная вещественная функция, заданная на $\mathfrak{M}$, равномерно аппроксимируема неотрицательными вещественными функциями из $\hat{R}$. В соединении с предыдущим отсюда следует, что $\hat{f}$ остается положительным и на всем $C(\mathfrak{M})$. Тем самым теорема 5 полностью доказана.

Как показал А. А. Марков [33], *каждый положительный линейный функционал φ на пространстве C* (К) *всех непрерывных комплексных функций, заданных на бикомпакте* К, *однозначно представим в виде*

$$\varphi(z) = \int\limits_{\mathrm{K}} z(t)\, d\Phi(t),$$

где Φ — неотрицательная вещественная вполне аддитивная регулярная *) *функция множества на теле борелевских подмножеств пространства* К. Поэтому из теоремы 5 непосредственно следует

Теорема 5′. *Каждый положительный линейный функционал f, определенный на коммутативном нормированном кольце R с симметричной инволюцией, однозначно представим в виде*

$$f(x) = \int_{\mathfrak{M}} x(M)\, d\Phi(M),$$

где Φ — неотрицательная вещественная вполне аддитивная регулярная функция множества на теле борелевских множеств пространства $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов кольца R.

В гл. IV будет дано применение этой теоремы к доказательству теоремы Бохнера о положительно определенных функциях на группе.

Очевидно, *линейный функционал $M(x) = x(M)$ на коммутативном нормированном кольце R с симметричной инволюцией, порожденный максимальным идеалом M, положителен.* Действительно, $M(x^*) = \overline{M(x)}$, и следовательно, $M(xx^*) = |M(x)|^2 \geqslant 0$ для всех $x \in R$.

Отсюда между прочим следует, что для симметричных колец верно также обращение теоремы 4, т. е. *если R — симметричное кольцо без радикала, то определенная в нем инволюция $x \to x^*$ существенная.* Действительно, для каждого ненулевого элемента $x_0 \in R$ существует максимальный идеал M_0, а значит и порожденный им положительный линейный функционал $M_0(x)$ такой, что $M_0(x_0 x_0^*) = |x_0(M_0)|^2 \neq 0$.

С дальнейшими свойствами колец с инволюцией читатель может познакомиться по статье И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка «Нормированные кольца с инволюцией и их представления», помещенной в конце этой книги в качестве приложения.

---

*) Функция, определенная на теле борелевских множеств, называется *регулярной*, если значение ее полного изменения на каждом борелевском множестве B равно нижней грани значений ее полного изменения на открытых множествах, содержащих B, и верхней грани таких значений на бикомпактных множествах, содержащихся в B.

ГЛАВА II

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ КОММУТАТИВНЫХ НОРМИРОВАННЫХ КОЛЕЦ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

§ 9. Связь между алгебраическим и топологическим изоморфизмами

Если R — кольцо без радикала, то, по теореме 2 § 5, R изоморфно порождаемому им кольцу $\hat{R}$ функций $x(M)$ на множестве максимальных идеалов. Поэтому кольца без радикала мы будем называть также *кольцами функций*.

В настоящем параграфе мы исследуем связь между топологическими и алгебраическими свойствами колец функций.

Теорема 1. *Пусть R_1 и R_2 — два нормированных кольца комплексных функций, определенных на одном и том же множестве, которое для каждого из них служит множеством максимальных идеалов, и пусть R_1 содержится в R_2. Тогда всякая последовательность функций $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ из R_1, сходящаяся по норме кольца R_1, сходится и по норме кольца R_2.*

Доказательство. Обозначим норму функции $x \in R_1$ в кольце R_1 через $\|x\|_1$, а в кольце R_2 — через $\|x\|_2$. Положим

$$\|x\| \doteq \max\{\|x\|_1, \|x\|_2\}. \tag{1}$$

Легко проверить, что все требования, налагаемые на норму, при этом выполнены. Покажем, что R_1 остается полным пространством и по этой новой норме. Пусть $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ — последовательность функций из R_1, фундаментальная в смысле нормы (1). Очевидно, она является фундаментальной и относительно обеих прежних норм. Пусть x и x' — ее пределы по этим нормам. Так как последовательность функций $x_n(M)$ равномерно сходится и к $x(M)$ и к $x'(M)$, то $x(M) \equiv x'(M)$, а потому $x = x'$. Имеем:

$$\|x - x_n\| = \max\{\|x - x_n\|_1, \|x - x_n\|_2\} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Следовательно, x является пределом последовательности $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ и по норме (1). Тем самым R_1 полно по этой норме.

Очевидно, сходимость в R_1 по норме (1) влечет сходимость и по прежней норме кольца R_1. Так как R_1 полно по обеим нормам, то, по теореме Банаха о взаимной непрерывности непрерывного в одну сторону взаимно однозначного отображения полных пространств *), сходимость по прежней норме кольца R_1 влечет сходимость по норме (1), а тогда и по норме кольца R_2. Тем самым теорема доказана.

В качестве иллюстрации к теореме 1 докажем следующее предложение:

Пусть R — нормированное кольцо бесконечно дифференцируемых функций $x(t)$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$, служащем для R множеством максимальных идеалов. Существует последовательность положительных чисел $m_0, m_1, \ldots, m_n, \ldots$ такая, что для каждой функции $x(t) \in R$

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x^{(n)}(t)| < Cm_n, \tag{2}$$

где постоянная C зависит только от функции, но не от номера n.

Доказательство. Достаточно указать для любого n такое положительное число m_n, что из $x(t) \in R$, $\|x\| \leqslant 1$ следует, что $\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x^{(n)}(t)| \leqslant m_n$. Допустим, что для некоторого n такого числа m_n найти нельзя; тогда в R должна существовать последовательность функций $x_1(t), \ldots, x_k(t), \ldots$ такая, что $\|x_k\| \leqslant 1$ для всех k и $\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x_k^{(n)}(t)| > k$. Функции $y_k(t) = \frac{1}{k} x_k(t)$ по норме стремятся к 0. Так как R, очевидно, содержится в D_n (пример 2° § 1; см. также стр. 20), то, по теореме 1, $y_k(t)$ должны стремиться к нулю и в смысле сходимости в кольце D_n, что невозможно, так как $\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |y_k^{(n)}(t)| > 1$.

Следствие. *Кольцо D_∞ всех бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$ ненормируемо.*

---

*) См. сноску на стр. 16.

Доказательство. Пусть D_∞ нормируемо и $m_0, m_1, \ldots, m_n, \ldots$ — числа, фигурирующие в доказанном выше предложении. Как известно, можно построить бесконечно дифференцируемую функцию $y(t)$ такую, что $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |y^{(n)}(t)| > nm_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *). Но для нее неравенства (2) не могут быть удовлетворены, в противоречие с доказанным.

Из теоремы 1 непосредственно следует

Теорема 2. *Алгебраически изоморфные коммутативные нормированные кольца без радикала также топологически изоморфны, т. е. сходимость элементов в одном из этих колец равносильна сходимости соответствующих элементов в другом.*

Смысл и значение этого предложения заключаются в следующем. Для задания нормированного кольца нужно задать, во-первых, запас его элементов с их алгебраическими свойствами и, во-вторых, норму. Теорема 2 показывает, что для кольца функций норма с точностью до эквивалентности однозначно определяется одним только заданием запаса элементов с их алгебраическими свойствами.

Из теоремы 2, в частности, следует, что сформулированное в теореме 2 § 7 достаточное условие изоморфизма симметричного кольца R с кольцом всех непрерывных функций на множестве его максимальных идеалов является также необходимым. Таким образом, алгебраическое кольцо всех непрерывных функций, заданных на бикомпактном хаусдорфовом пространстве S, может быть нормировано с точностью до эквивалентности единственным образом: все возможные на нем нормы эквивалентны норме $\|x\| = \max\limits_{t \in S} |x(t)|$.

---

*) Пусть $1 = k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$ — последовательность натуральных чисел. Положим $a_k = \frac{1}{(2\pi k)^n}$ при $k_n \leqslant k < k_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Так как a_k стремится к нулю быстрее любой степени $\frac{1}{k}$, то функция $y(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e^{2\pi i k t}$ бесконечно дифференцируема. При этом $|y^{(n)}(0)| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k (2\pi k)^n > \sum\limits_{k=k_n}^{k_{n+1}-1} a_k (2\pi k)^n = k_{n+1} - k_n$. Выбрав последовательность (k_n) так, чтобы $k_{n+1} - k_n > nm_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, мы и получим функцию $y(t)$, обладающую требуемым свойством.

Теорема 3. *Всякий автоморфизм коммутативного нормированного кольца R без радикала непрерывен.*

Доказательство. Пусть задан автоморфизм кольца R, т. е. такое взаимно однозначное отображение этого кольца на себя, что если x переходит в x', то λx переходит в $\lambda x'$ для всех комплексных чисел λ, и если x, y переходят соответственно в x', y', то $x+y$ переходит в $x'+y'$ и xy переходит в $x'y'$. Мы можем рассматривать этот автоморфизм как алгебраический изоморфизм между кольцом R функций x и кольцом R' соответствующих функций x'. По теореме 2, кольца R и R' также топологически изоморфны, т. е. сходимость последовательности $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ равносильна сходимости соответствующей последовательности $x'_1, \ldots, x'_n, \ldots$ Но это и означает непрерывность автоморфизма.

Теорема 4. *В симметричном кольце без радикала инволюция непрерывна.*

Доказательство. Пусть R — симметричное кольцо без радикала. В этом случае элемент x^*, сопряженный к x, однозначно определен. Отображение $x \to x^*$ кольца R на себя отличается от автоморфизма только тем, что λx переходит не в λx^*, а в $\bar{\lambda} x^*$. Теорема 1 показывает, что и это отображение непрерывно, т. е. из сходимости x_n к x следует сходимость x_n^* к x^* *). Чтобы в этом убедиться, достаточно, наряду с исходной нормой $\|x\|$, ввести в кольце R новую норму: $|x| = \|x^*\|$.

§ 10. Обобщенные делители нуля

В алгебре делителем нуля кольца R называют такой элемент x этого кольца, который в произведении с некоторым элементом $y \neq 0$ дает нуль.

Например, в кольце C функция $x(t)$, равная нулю на интервале $\Delta = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, есть делитель нуля, так как произведение ее на функцию $y(t) \in C$, равную нулю везде вне интервала Δ, но не тождественно исчезающую, равно нулю.

---

*) Обратное утверждение (из сходимости x_n^* к x^* следует сходимость x_n к x) здесь уже содержится, так как для всякого $z \in R$ имеем $z^{**} = z$.

Наиболее естественным обобщением этого понятия на нормированные кольца является следующее:

Определение 1. Элемент x нормированного кольца R называется *обобщенным делителем нуля*, если существует такая последовательность $(y_n) \subset R$, что

$$1)\ \inf_n \|y_n\| > 0; \qquad 2)\ \lim_{n\to\infty} \|xy_n\| = 0.$$

Очевидно, обычные делители нуля являются и обобщенными. В конечномерном кольце *), где из всякой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся, справедливо также и обратное: каждый обобщенный делитель нуля есть делитель нуля в обычном смысле. Но, вообще говоря, обобщенные делители нуля не являются обычными.

Рассмотрим в кольце C функцию $x(t)$, равную нулю только в одной точке $t=0$; она не является (обычным) делителем нуля. Пусть, далее, $x_n(t)$ — положительная функция, равная нулю на отрезке $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ и достигающая максимального значения на отрезке $\left[0, \frac{1}{n}\right]$, причем $\|x_n(t)\| = 1$. Очевидно, $xx_n \to 0$; следовательно, $x(t)$ есть обобщенный делитель нуля.

Обобщенным делителем нуля может быть лишь такой элемент x, который не имеет обратного. В самом деле, пусть существует x^{-1}. Если $\lim xy_n = 0$, то и $\lim y_n = \lim x^{-1}xy_n = 0$, значит, условия 1) и 2) определения 1 несовместны, т. е. x не есть обобщенный делитель нуля.

Легко убедиться в том, что каждый элемент кольца C, не имеющий обратного, является обобщенным делителем нуля (см. выше). Однако таким свойством обладают не все кольца.

Рассмотрим, например, элемент $x(\zeta) = \zeta$ кольца A (§ 1, пример 6°), очевидно, не имеющий обратного. Пусть последовательность $\{y_n(\zeta)\} \subset A$ такова, что $\|\zeta y_n(\zeta)\| \to 0$. На границе единичного круга $|\zeta| = 1$ и потому $|y_n(\zeta)| \to 0$. В силу принципа максимума модуля $y_n(\zeta)$ равномерно стремится к нулю на всем круге, т. е. $\|y_n\| \to 0$. Следовательно, $x(\zeta) = \zeta$ не есть обобщенный делитель нуля в A.

К понятию обобщенного делителя нуля можно придти из следующих соображений. Будем рассматривать умножение на элемент x как линейный оператор в пространстве R, дающий одно-

---

*) То есть в таком кольце, элементы которого образуют конечномерное пространство.

значное и непрерывное отображение R на часть R. Возможны следующие случаи:

1. Это отображение $R \to R$ не является взаимно однозначным, т. е. существуют различные элементы y и z такие, что $xy = xz$. В этом случае x есть делитель нуля, так как $x(y-z) = 0$.

2. Отображение $R \to R$ взаимно однозначно, и образ заполняет всё пространство R. В этом случае x имеет обратный, так как существует такой $y \in R$, что $xy = e$.

3. Отображение $R \to R$ взаимно однозначно, но образ заполняет не всё пространство R, а лишь некоторое полное подпространство $R' \subset R$. Тогда по теореме Банаха обратное отображение $R' \to R$ также непрерывно, т. е. из $xy_n \to 0$ следует $y_n \to 0$. Это означает, что x не является в R обобщенным делителем нуля*).

4. Отображение $R \to R$ взаимно однозначно, но образ заполняет некоторое неполное подпространство $R' \subset R$. В таком случае обратное отображение $R' \to R$ не является непрерывным (иначе R' было бы гомеоморфно R и, следовательно, полно), т. е. существует такая последовательность $(y_n) \subset R$, что $xy_n \to 0$, но y_n не $\to 0$. В этом случае элемент x есть обобщенный делитель нуля.

Теорема 1. *Пусть x — произвольный элемент коммутативного нормированного кольца R и λ_0 — граничная точка его спектра, т. е. множества S_x значений $x(M)$; тогда $x - \lambda_0 e$ есть обобщенный делитель нуля.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность чисел λ_n $(n = 1, 2, \ldots)$, не принадлежащих S_x и стремящихся к λ_0. В кольце R существуют элементы $(x - \lambda_n e)^{-1}$. Положим $y_n = \dfrac{(x-\lambda_n e)^{-1}}{\|(x-\lambda_n e)^{-1}\|}$. Имеем: $\|y_n\| = 1$. С другой стороны, так как

$$\|(x - \lambda_n e)^{-1}\| \geqslant \max_{M \in \mathfrak{M}} |x(M) - \lambda_n|^{-1} \geqslant |\lambda_0 - \lambda_n|^{-1} \to \infty,$$

то

$$(x - \lambda_0 e) y_n = (x - \lambda_n e) y_n + (\lambda_n - \lambda_0) y_n =$$
$$= \frac{e}{\|(x - \lambda_n e)^{-1}\|} + (\lambda_n - \lambda_0) y_n \to 0,$$

что и требовалось.

Следствие 1. *Если 0 есть единственный обобщенный делитель нуля коммутативного нормированного кольца R, то R изоморфно телу комплексных чисел.*

---

*) Как показал Аренс [1′] (а ранее в некоторых частных случаях Шилов [60′]), такой (и только такой) элемент x обладает обратным в некотором расширении кольца R.

Доказательство. В силу нашего допущения и теоремы 1, для любого $x \in R$ существует такое λ_0, что $x - \lambda_0 e = 0$, т. е. $x = \lambda_0 e$.

В этом результате, очевидно, содержится следующая теорема Мазура [32]:

Если $\|xy\| = \|x\|\,\|y\|$ *для любых* x *и* y *из* R, *то* R *есть тело комплексных чисел.*

Следствие 2. *Всякий элемент* x *симметричного кольца* R *без радикала, не имеющий обратного, есть обобщенный делитель нуля.*

Доказательство. Если x не имеет обратного, то 0 является граничной точкой множества значений (неотрицательной вещественной) функции $(xx^*)(M)$ и, в силу теоремы 1, xx^* есть обобщенный делитель нуля: существует последовательность $(z_n) \subset R$ такая, что $\inf\limits_n \|z_n\| > 0$ и $xx^*z_n = x(x^*z_n) \to 0$ $(n \to \infty)$. Если при этом $\inf\limits_n \|x^*z_n\| > 0$, то теорема доказана; в противном же случае существует подпоследовательность z_{n_k}, для которой $x^*z_{n_k} \to 0$; но тогда, по теореме 4 § 9, также $xz^*_{n_k} = (x^*z_{n_k})^* \to 0$, откуда опять получается, что x есть обобщенный делитель нуля, ибо, по той же теореме 4 § 9, из $\inf\limits_n \|z_n\| > 0$ следует $\inf\limits_n \|z^*_n\| > 0$.

В § 5 было показано, что пространство максимальных идеалов кольца с одной образующей, рассматриваемое как множество значений функции $z(M)$, где z — образующая, есть замкнутое ограниченное множество на комплексной плоскости.

Используя теорему 1, мы можем дать теперь полное топологическое описание этого множества:

Теорема 2. *Множество* S *точек комплексной плоскости тогда и только тогда есть множество значений функции* $z(M)$ *для кольца с одной образующей* z, *когда оно замкнуто, ограниченно и не разделяет плоскости* (т. е. его дополнение связно).

Доказательство. Пусть S удовлетворяет поставленным условиям. Построим кольцо R, положив для полиномов $P(z)$

$$\|P(z)\| = \max_{\zeta \in S} |P(\zeta)|,$$

отождествив полиномы, совпадающие на S (если S конечно), и произведя затем пополнение по введенной норме. Каждый элемент кольца R можно рассматривать как непрерывную функцию $f(\zeta)$, определенную на S и наделенную нормой

$$\|f(\zeta)\| = \max_{\zeta \in S} |f(\zeta)|.$$

Обозначим через S' множество значений $z(M)$, где M пробегает множество всех максимальных идеалов кольца R. Если $\zeta_0 \in S$, то существует гомоморфизм $f(\zeta) \to f(\zeta_0)$ кольца R в тело комплексных чисел, переводящий образующую z в число ζ_0. Отсюда $\zeta_0 \in S'$ и, таким образом, $S' \supset S$. Допустим, что имеется точка $\zeta_1 \in S' \setminus S$. По предположению, из этой точки можно провести непрерывную линию, уходящую в бесконечность и не имеющую общих точек с S; пусть ζ_2 — последняя точка множества S' на этой линии. Тогда ζ_2 есть граничное значение функции $z(M)$, и потому $z - \zeta_2 e$, согласно теореме 1, есть обобщенный делитель нуля, т. е. существует последовательность $y_n \in R$ такая, что $\|y_n(z - \zeta_2 e)\| = \max_{\zeta \in S} |y_n(\zeta)(\zeta - \zeta_2)| \to 0$, причем $\inf_n \|y_n\| > 0$. Но на S имеем: $|\zeta - \zeta_2| \geqslant \rho(\zeta_2, S) > 0$ (где, как обычно, $\rho(\zeta, S)$ означает расстояние от точки ζ до множества S); поэтому последовательность функций $y_n(\zeta)$ должна на S равномерно сходиться к нулю, а следовательно, она и по норме должна сходиться к 0. Полученное противоречие показывает, что $S' = S$.

Обратно, пусть R — кольцо с одной образующей z и S — множество всех значений функции $z(M)$. Мы уже видели в § 5, что S замкнуто и ограниченно. Если бы его дополнение содержало ограниченную связную компоненту G, то всякая фундаментальная в R последовательность полиномов, будучи равномерно сходящейся на S, по принципу максимума модуля сходилась бы равномерно и на G. Взяв произвольную точку $\zeta_0 \in G$ и поставив в соответствие каждому элементу $y = \lim_{n \to \infty} P_n(z) \in R$ число $\lim_{n \to \infty} P_n(\zeta_0)$, мы получили бы гомоморфизм кольца R в тело комплексных чисел, который переводил бы образующую z в число ζ_0; таким образом, S не исчерпывало бы всех значений функции $z(M)$.

Используя общую характеристику множества максимальных идеалов коммутативного нормированного кольца с конечным числом образующих, данную в мелком шрифте в конце § 5, мы приходим к следующему результату:

Следствие. *Для любой точки ζ_0, не принадлежащей множеству S, удовлетворяющему условиям теоремы 2, можно указать полином $P(z)$ такой, что* $|P(\zeta_0)| > \max_{\zeta \in S} |P(\zeta)|$.

§ 11. Граница пространства максимальных идеалов

В кольце A функций комплексного переменного, непрерывных в замкнутом круге $|\zeta| \leqslant 1$ и аналитических в круге $|\zeta| < 1$, ограничивающий контур $|\zeta| = 1$ играет особую роль: модуль каждой функции $x(\zeta) \in A$ достигает на нем своего максимума. Подобное обстоятельство, оказывается, имеет место во всяком коммутативном нормированном кольце.

Определение 1. Пусть R — коммутативное нормированное кольцо и $\mathfrak{M}$ — пространство его максимальных идеалов.

Замкнутое множество $F \subset \mathfrak{M}$ назовем *определяющим*, если абсолютная величина каждой функции $x(M)$ $(x \in R)$ достигает на F своего максимального значения.

Очевидно, по крайней мере одно определяющее множество существует: само $\mathfrak{M}$.

Определение 2. Минимальное определяющее множество (т. е. определяющее множество, ни одно собственное подмножество которого уже не является определяющим) назовем *границей* множества $\mathfrak{M}$ (или *кольцевой границей*).

Теорема 1. *Пространство $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов любого коммутативного нормированного кольца R обладает однозначно определенной границей.*

Доказательство существования границы. Если определяющее множество $F = F_1$ не является минимальным, то существует определяющее множество $F_2 \subset F_1$; если F_2 не минимально, то существует определяющее множество $F_3 \subset F_2$, и т. д. Пусть мы получили таким образом счетную цепочку вложенных друг в друга определяющих множеств $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots$; их пересечение F_ω, не пустое в силу бикомпактности пространства $\mathfrak{M}$, также является определяющим: в самом деле, пусть $m = \max\limits_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)|$ и $M_n \in F_n$ таково, что $|x(M_n)| = m$; так как функция $|x(M)|$ непрерывна, то для любой предельной точки M_ω последовательности M_n будем иметь: $|x(M_\omega)| = m$; но $M_\omega \in F_\omega$; значит, F_ω является определяющим множеством. Если F_ω не минимально, то построение последовательности вложенных друг в друга определяющих множеств можно продолжить; мы получим, таким образом, трансфинитную убывающую последовательность замкнутых множеств; пересечение всех множеств этой последовательности, непустое в силу бикомпактности пространства $\mathfrak{M}$, и даст искомое минимальное множество.

Доказательство единственности границы. Допустим, что в $\mathfrak{M}$ существуют две границы: Γ_1 и Γ_2. Пусть M_1 — какая-нибудь точка из Γ_1; покажем, что в любой ее окрестности найдутся точки из Γ_2. Так как Γ_2 замкнуто, то в таком случае $M_1 \in \Gamma_2$ и, в силу произвольности точки M_1, $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$; но тогда $\Gamma_1 = \Gamma_2$, ибо совершенно так же $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$.

Итак, пусть U — какая-либо окрестность точки M_1; она содержит окрестность U' точки M_1, определяемую n неравенствами $|x_i(M)| < \varepsilon$ $(i = 1, \ldots, n)$, где $x_1, \ldots, x_n$ —

какие-то элементы кольца, принадлежащие M_1. Так как Γ_1 — минимальное определяющее множество, то существует функция $y(M)$ ($y \in R$), абсолютная величина которой достигает своего максимума m на Γ_1 (равного, по условию, максимуму на всем $\mathfrak{M}$) в пределах окрестности U', а вне этой окрестности на Γ_1 остается меньше m; действительно, в противном случае замнутое множество $\Gamma_1 \setminus U' \subset \Gamma_1$ также было бы определяющим и, следовательно, Γ_1 не было бы минимальным. Без ограничения общности можно считать, что $m = 1$; затем, заменив в случае надобности y некоторой его степенью, можно считать, что в точках множества Γ_1, лежащих вне U', $|y(M)| < \frac{\varepsilon}{\max\limits_i \|x_i\|}$. Тогда произведения $x_i y$ ($i = 1, \ldots, n$) всюду на Γ_1, а следовательно и на всем $\mathfrak{M}$, не превосходят по абсолютной величине ε. Но на Γ_2 должна существовать точка M_2, для которой $|y(M_2)| = 1$; так как в ней $|(x_i y)(M_2)| < \varepsilon$, то

$$|x_i(M_2)| < \varepsilon \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Но это и означает, что $M_2 \in U' (\subset U)$. Тем самым единственность границы Γ множества $\mathfrak{M}$ установлена.

Теорема 2. *Для того чтобы точка $M_0 \in \mathfrak{M}$ принадлежала границе Γ, необходимо и достаточно, чтобы для любой окрестности $U(M_0)$ этой точки существовала функция $y(M)$ ($y \in R$), абсолютная величина которой достигает своего максимального значения в пределах $U(M_0)$, а вне $U(M_0)$ меньше его.*

Доказательство. Необходимость условия теоремы 2 вытекает из рассуждения, проведенного во второй части доказательства теоремы 1, достаточность же — из того, что при выполнении этого условия в любой окрестности точки M_0 существуют точки границы.

Для колец R, в которых $\|x\| = \max |x(M)|$, обобщенные делители нуля это те и только те элементы $x \in R$, которые обращаются в нуль хотя бы в одной точке $M_0 \in \Gamma$.

Действительно, R можно рассматривать как некоторое кольцо непрерывных функций на Γ. Пусть R' — кольцо всех непрерывных комплексных функций на Γ. Если $x \in R$ и $x(M)$ не обращается в нуль ни в одной точке $M \in \Gamma$, то x обладает обратным элементом x^{-1} в кольце R' и потому x не может быть обобщенным делителем нуля в подкольце R кольца R'. Обратно, если $x \in R$ и $x(M_0) = 0$ в точке $M_0 \in \Gamma$, то, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, в некоторой окрестности $U(M_0)$ точки M_0 в $\mathfrak{M}(R)$ имеет место неравенство $|x(M)| < \varepsilon$; с другой стороны, так как $M_0 \in \Gamma$, то, по доказанному выше, существует элемент $h \in R$ такой, что $|h(M)|$ принимает в $U(M_0)$ свое наибольшее значение 1, а вне $U(M_0)$ не превосходит $\frac{\varepsilon}{\|x\|}$. Тогда $\|xh\| = \max|x(M)h(M)| \leqslant \varepsilon$, и так как $\|h\| = 1$, то x есть обобщенный делитель нуля.

Граница Γ может быть здесь определена как *наименьшее замкнутое подмножество множества $\mathfrak{M}$, на котором обращается в* 0 *каждый обобщенный делитель нуля.*

Для доказательства, учитывая сказанное выше, достаточно проверить, что для любой окрестности $U(M_0)$ точки $M_0 \in \Gamma$ имеется обобщенный делитель нуля, обращающийся в нуль только в этой окрестности. Рассмотрим элемент $h \in R$, для которого $|h(M)|$ принимает максимальное значение 1 в пределах $U(M_0)$, например в точке $M_1 \in \Gamma$, а вне $U(M_0)$ меньше, например, чем $\frac{1}{2}$. Тогда $h - h(M_1)e$ есть обобщенный делитель нуля (поскольку функция $h(M) - h(M_1)$ обращается в нуль в точке M_1 границы) и заведомо не обращается в нуль вне $U(M_0)$, что и требуется.

Рассмотрим несколько примеров на нахождение кольцевой границы.

1. Пусть R — кольцо с одной образующей. Тогда $\mathfrak{M}(R)$, по теореме 4 § 5, можно считать некоторым ограниченным замкнутым множеством точек комплексной плоскости. Γ в этом случае совпадает с обычной топологической границей множества $\mathfrak{M}(R)$. В самом деле, в силу принципа максимума модуля, для внутренних (в обычном смысле) точек множества $\mathfrak{M}$ условие теоремы 2 заведомо не выполняется, и они, таким образом, не могут принадлежать Γ; если же λ_0 — граничная (в обычном смысле) точка множества $\mathfrak{M}$, то существует последовательность $\lambda_n \to \lambda_0$ такая, что $\lambda_n \notin \mathfrak{M}$; функции $(x - \lambda_n e)^{-1}$, где x — образующая, принадлежат кольцу R и, начиная с некоторого n, удовлетворяют условию теоремы 2; отсюда $\lambda_0 \in \Gamma$.

2. Пусть R — кольцо функций, полученное из семейства всех полиномов от двух комплексных переменных z_1 и z_2 с помощью равномерного предельного перехода в области $|z_1| \leqslant 1$, $|z_2| \leqslant 1$. Легко видеть, что $\mathfrak{M}(R)$ совпадает с множеством всех точек этой области. Топологическая граница множества $\mathfrak{M}(R)$ состоит из всех точек, у которых хотя бы одна координата по модулю равна единице. Кольцевая граница образована всеми точками, у которых обе координаты по модулю равны 1. В самом деле, множество S всех этих точек, как легко видеть, является определяющим, откуда $\Gamma \subset S$; с другой стороны, для каждой точки $(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2})$ множества S функция $(z_1 + e^{i\varphi_1})(z_2 + e^{i\varphi_2})$ удовлетворяет условию теоремы 2, откуда $S \subset \Gamma$.

Этот пример показывает, что кольцевая граница Γ может не совпадать с топологической границей множества $\mathfrak{M}$ (которое предполагается помещенным в естественно связанное с ним комплексное пространство; см. теорему 4 § 5).

3. Пусть R — кольцо функций, полученное из семейства всех полиномов от двух независимых переменных z_1 и z_2 с помощью равномерного предельного перехода в области $|z_1|+|z_2|\leqslant 1$. Здесь $\mathfrak{M}(R)$ есть множество всех точек этой области, а топологическая и кольцевая границы совпадают (доказательство проводится так же, как в нижеследующем примере 4). *Каждая функция $f(M)$, для которой $\frac{1}{f(M)}$ не существует, обращается в нуль на границе.* Пусть сначала $f(M)=f(z_1, z_2)$ есть полином; так как $\frac{1}{f(z_1, z_2)}$ не существует, то $f\left(z_1^0, z_2^0\right)=0$, где $\left|z_1^0\right|+\left|z_2^0\right|\leqslant 1$. Пусть $\left|z_1^0\right|+\left|z_2^0\right|<1$. Полином $f\left(z_1^0, z_2\right)$ от аргумента z_2 имеет корень z_2^0; если параметр z_1^0 непрерывно изменять, то корень z_2^0 будет также непрерывно меняться; поэтому если мы будем увеличивать $\left|z_1^0\right|$, то наступит момент, когда $\left|z_1^0\right|+\left|z_2^0\right|=1$. Таким образом, для полиномов наше утверждение доказано. Пусть теперь $f(M)$ — любая функция из R, для которой $\frac{1}{f(M)}$ не существует, так что $f(M_0)=0$ в некоторой точке $M_0\in\mathfrak{M}(R)$. $f(M)$ можно аппроксимировать с любой точностью полиномом, также обращающимся в 0 в M_0, а следовательно и где-то на границе. Поэтому $\min|f(M)|$ на границе не может быть положительным.

Следствие. *Каждый элемент кольца R, не имеющий обратного, есть обобщенный делитель нуля.*

4. Рассмотрим множество S_a точек $\{z\}=\{z_1, \ldots, z_n, \ldots\}$ бесконечномерного комплексного пространства, выделяемое неравенством $\sum_{j=1}^{\infty}|z_j|\leqslant a$. Кольцо R_a мы образуем из пределов последовательностей полиномов, равномерно сходящихся на S_a, причем каждый полином зависит лишь от конечного числа переменных. Найдем для этого кольца множества $\mathfrak{M}$ и $\Gamma(\mathfrak{M})$. В S_a мы введем обычную тихоновскую топологию, в которой оно является бикомпактным пространством.

Определим $\mathfrak{M}(R_a)$. Как и для колец с конечным числом образующих, каждый максимальный идеал M изображается точкой $\{z(M)\}=\{z_1(M), \ldots, z_n(M), \ldots\}$ рассматриваемого пространства. Как мы знаем, каждая точка из S_a дает максимальный идеал кольца R_a, т. е. $S_a\subset\mathfrak{M}(R_a)$. Пусть теперь M_0 — любой максимальный идеал и $\rho_k e^{i\varphi_k}=z_k(M_0)$. Рассмотрим функцию $F(z)=$ $=\sum_{k=1}^{\infty}z_k e^{-i\varphi_k}$. Ряд этот на S_a абсолютно сходится, и потому $F(z)\in R_a$. Норма $F(z)$, т. е. максимум модуля $F(z)$ на S_a, не превосходит a, и потому $|F(M_0)| \leqslant a$. Но $F(M_0) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(M_0)\, e^{-i\varphi_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k$; следовательно, $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \leqslant a$, $M_0 \in S_a$. Таким образом, $\mathfrak{M}(R_a)$ совпадает с S_a.

Рассмотрим теперь полином $P(z) = \prod_{k=1}^{n} \left(z_k - z_k^0\right)$, где $z_k^0 \neq 0$ и модули $r_k = \left|z_k^0\right|$ обладают тем свойством, что наибольший из них отличается от среднего $c = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} r_k$ не более чем на $\frac{a}{n}$. Покажем, что такой полином достигает на S_a по абсолютной величине максимума в единственной точке. В силу бикомпактности S_a, по меньшей мере о д н а точка, в которой $|P(z)|$ достигает максимума, существует; пусть это будет $\zeta = \{\zeta_k\} = \left\{e^{i\varphi_k}\rho_k\right\}$. Тогда $\varphi_k = \pi + \arg z_k^0$, так как в противном случае мы могли бы сдвинуть ζ_k по окружности радиуса ρ_k и увеличить $|P(z)|$, не выходя из S_a. Поэтому $|P(\zeta)| = \prod_{k=1}^{n} (r_k + \rho_k)$. Там, где это произведение достигает максимума, очевидно, должно выполняться условие $\sum_{k=1}^{n} \rho_k = a$ или $\sum_{k=1}^{n} (r_k + \rho_k) = a + \sum_{k=1}^{n} r_k$. Но этим условием множители $r_k + \rho_k$, для которых произведение достигает максимума, определяются однозначно: каждый из них равен

$$r_k + \rho_k = \frac{a + \sum_{k=1}^{n} r_k}{n} = \frac{a}{n} + c,$$

откуда находим $\rho_k = \frac{a}{n} + c - r_k \geqslant 0$. Итак, точка, в которой $|P(z)|$ достигает максимума, единственна. Покажем, что для любой точки $\{\zeta\} = \{\zeta_1, \ldots, \zeta_n, 0, 0, \ldots\}$ с $\sum_{k=1}^{n} |\zeta_k| = a$ можно подыскать полином $P(z)$, который достигает по модулю своего максимума на S_a именно в этой точке $\{\zeta\}$. Пусть $\zeta_k = \rho_k e^{i\varphi_k}$. Определим числа r_k равенствами

$$r_k = c + \frac{a}{n} - \rho_k \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

где c — произвольное число, большее чем $\rho_k - \frac{a}{n}$ $(k = 1, \ldots, n)$. Легко видеть, что c есть среднее арифметическое чисел r_k и что наибольшее из этих чисел отличается от него не более чем на $\frac{a}{n}$. Положим $z_k^0 = r_k e^{(\pi+\varphi_k)i}$ и рассмотрим полином $P(z) = \prod_{k=1}^{n} (z_k - z_k^0)$; по доказанному, он достигает максимума в единственной точке, и именно в $\{\zeta\}$.

По теореме 2, каждая точка $\{\zeta\} = \{\zeta_1, \ldots, \zeta_n, 0, 0, \ldots\}$ принадлежит $\Gamma(\mathfrak{M})$. Но такие точки образуют всюду плотное множество в S_a; так как Γ замкнуто, то $\Gamma = S_a = \mathfrak{M}$. Здесь мы имеем пример несимметричного кольца с равномерной нормой, в котором $\Gamma = \mathfrak{M}$. Остается открытым вопрос, может ли кольцо с таким свойством обладать лишь конечным числом образующих.

§ 12. Расширение максимальных идеалов

В теории нормированных пространств существенную роль играет теорема Хана — Банаха, утверждающая, что каждый линейный функционал может быть продолжен с данного нормированного пространства на любое более широкое с сохранением нормы. В нормированных кольцах можно сформулировать аналогичный вопрос о возможности продолжения мультипликативных линейных функционалов, т. е. линейных функционалов $f(x)$, удовлетворяющих дополнительному условию $f(xy) = f(x)f(y)$ для всех x, y (см. стр. 31). Вообще говоря, этот вопрос решается отрицательно. Например, в кольце A примера 6° § 1 мультипликативный линейный функционал $f(x) = x(0)$ не продолжается с сохранением мультипликативности на кольцо всех непрерывных функций на окружности $|\zeta| = 1$, содержащее A в качестве замкнутого подкольца (хотя он и продолжается как линейный функционал, например, по формуле $f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=1} \frac{x(\lambda)}{\lambda} d\lambda$).

Но оказывается, что в каждом коммутативном нормированном кольце R_1 имеется набор мультипликативных линейных функционалов, которые продолжаются с сохранением мультипликативности на любое коммутативное нормированное кольцо R, содержащее R_1 в качестве замкнутого подкольца. Именно, это будут как раз те мультипликативные линейные функционалы, которые отвечают максимальным идеалам, составляющим границу пространства $\mathfrak{M}(R_1)$ максимальных идеалов кольца R_1.

Прежде чем переходить к доказательству этого утверждения, заметим следующее. Пусть мультипликативный линейный функционал $f(x)$ расширен с кольца R_1 на более широкое кольцо R. Тогда, в частности, множество M_1 тех $x_1 \in R_1$, для которых $f(x_1) = 0$, станет частью множества M тех $x \in R$, для которых $f(x) = 0$. Но M_1 есть максимальный идеал кольца R_1, а M — максимальный идеал кольца R. Таким образом, продолжение мультипликативного функционала $f(x_1)$ сопровождается расширением максимального идеала M_1 кольца R_1 до максимального идеала M кольца R. Обратно, если максимальный идеал M_1 кольца R_1 расширяется до максимального идеала M кольца R, то мультипликативный линейный функционал $M(x) = x(M)$ на кольце R является продолжением мультипликативного линейного функционала $M_1(x)$, заданного на кольце R_1. Действительно, пусть $x_0 \in R_1$ и $M_1(x_0) = \lambda_0$; тогда $M_1(x_0 - \lambda_0 e) = 0$, откуда $x_0 - \lambda_0 e \in M_1 \subset M$ и, значит, также $M(x_0) = \lambda_0$. Следовательно, задача о продолжении мультипликативного линейного функционала равносильна задаче о расширении соответствующего максимального идеала.

Теорема 1. *Каково бы ни было нормированное кольцо R, содержащее R_1 как замкнутое подкольцо, каждый максимальный идеал из границы Γ_1 пространства $\mathfrak{M}(R_1)$ расширяется до некоторого максимального идеала кольца R.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что если $x \in R_1$, то $\max\limits_{M \subset R} |x(M)| = \max\limits_{M_1 \subset R_1} |x(M_1)|$. Это следует непосредственно из формулы

$$\max |x(M)| = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|},$$

если принять во внимание, что все x^n содержатся одновременно в R_1 и R и их нормы в обоих кольцах совпадают. Допустим теперь, что некоторый максимальный идеал $M_1 \in \Gamma_1$ не содержится ни в одном максимальном идеале кольца R. Это означает, что в кольце R нет собственного идеала, содержащего все элементы из M_1, т. е. что совокупность всех сумм вида

$$\sum_{i=1}^{n} x_i z_i \qquad (x_i \in M_1,\ z_i \in R)$$

совпадает со всем кольцом R; в частности, одна из таких сумм дает тогда единицу кольца R:

$$e = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i.$$

Здесь без ограничения общности можно считать $\max |x_i(M)| \leqslant 1$.

Пусть $\mu > \max\limits_i \{\max\limits_M |z_i(M)|\}$; рассмотрим окрестность точки M_1, определяемую неравенствами

$$|x_i(M)| < \frac{1}{2n\mu} \qquad (i = 1, \ldots, n;\ M \subset R_1),$$

и функцию $y(M)$ $(y \in R_1)$, абсолютная величина которой достигает своего наибольшего значения 1 в пределах этой окрестности, а вне ее не превосходит $\frac{1}{2n\mu}$ (см. теорему 2 § 11). Согласно сделанному выше замечанию, произведение $y \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i z_i = ye = y$ достигает по абсолютной величине значения 1 и на максимальных идеалах кольца R. Но, с другой стороны,

$$\max_{M \subset R} \left| \left(y \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i z_i \right)(M) \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \max |y(M) x_i(M)| \max |z_i(M)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \frac{1}{2n\mu} \cdot \mu = \frac{1}{2}.$$

Полученное противоречие и доказывает справедливость утверждения теоремы.

Следствие. *Всякий максимальный идеал симметричного кольца R_1 расширяется до максимального идеала любого более широкого кольца R.*

Доказательство. В силу доказанной теоремы достаточно показать, что для симметричного кольца $\Gamma = \mathfrak{M}$.

Пусть M_0 — произвольная точка из $\mathfrak{M}$ и $U(M_0)$ — ее окрестность. В силу п. 4 доказательства теоремы 1' § 7, существует элемент $x \in R$ такой, что $\max|x(M) - f(M)| < \frac{1}{2}$, где $f(M)$ — некоторая непрерывная функция, равная 0 вне $U(M_0)$ и 1 в M_0. В таком случае максимальное значение $|x(M)|$ должно достигаться в пределах $U(M_0)$. Но это означает, что условие теоремы 2 § 11 выполнено и $M_0 \in \Gamma$.

Если в кольце R_1 $\|x\| = \max|x(M)|$, то можно утверждать, что существует кольцо $R \supset R_1$, до максимальных идеалов которого расширяются только те $M \subset R_1$, которые принадлежат границе Γ пространства $\mathfrak{M}(R_1)$. В качестве этого кольца R можно взять кольцо всех непрерывных функций, определенных на Γ; оно содержит R_1 как подкольцо, и так как Γ — бикомпактное пространство, то множество всех максимальных идеалов кольца R совпадает с Γ.

§ 13. Локально аналитические операции над несколькими элементами кольца

В § 6 мы видели, что каждой аналитической функции $f(\zeta)$, однозначной на спектре элемента x нормированного кольца R, соответствует такой элемент $y \in R$, что $y(M) = f(x(M))$ для любого максимального идеала кольца R.

Эта теорема еще недостаточна для многих желательных применений. Например, она позволяет установить наличие в кольце R элементов $\sqrt{x}$ или $\ln x$ только в том случае, когда значения функции $\sqrt{\zeta}$ или $\ln \zeta$ на спектре элемента x умещаются в пределах одного листа соответствующей римановой поверхности. Последнее требование представляется для данной задачи явно искусственным.

Рассмотрим для примера случай кольца $C(K)$ всех непрерывных функций на окружности K $(0 \leqslant t < 2\pi)$. Вопрос о том, из каких элементов можно извлечь в кольце квадратный корень, решается здесь просто: если $x(t)$ не обращается в нуль (т. е. функция $\sqrt{\zeta}$ не имеет на спектре элемента x точки разветвления), то $\sqrt{x(t)}$ имеется в кольце $C(K)$ тогда и только тогда, когда полное приращение аргумента функции $x(t)$ при обходе независимым переменным всей окружности K равно целому кратному 4π.

Если мы перейдем от кольца $C(K)$, например, к кольцу W всех функций с абсолютно сходящимся разложением Фурье, то вопрос, из каких элементов можно извлечь квадратный корень в этом кольце, становится уже нетривиальным. Однако оказывается, что приведенное выше условие: полное приращение аргумента функции $x(t)$ равно целому кратному 4π — является необходимым и достаточным и в этом случае, притом не только для кольца W, но и для любого кольца R, имеющего окружность своим пространством максимальных идеалов.

Для точной формулировки общего результата, имеющего место во всех нормированных кольцах, удобно ввести понятие локально аналитической операции.

Мы будем называть *локально аналитической операцией над элементом* z нормированного кольца R переход от функции $z(M)$ к функции $f(M)$, которая в окрестности каждой точки M_0 допускает представление в виде сходящегося ряда

$$f(M)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n [z(M)-z(M_0)]^n.$$

Очевидно, что операции $\sqrt{z}$, $\ln z$ являются локально аналитическими операциями над элементом z, если функции $\sqrt{\zeta}$, $\ln\zeta$ не имеют особенности (точки разветвления) на спектре элемента z, хотя бы значения этих функций и не умещались, как ранее, на одном и том же листе римановой поверхности соответствующей функции.

Мы установим следующее: *если некоторая локально аналитическая операция над элементом z переводит функцию $z(M)$ в однозначную на всем пространстве $\mathfrak{M}$ функцию $f(M)$, то эта функция $f(M)$ порождается некоторым элементом кольца R.*

Тем самым в общем случае решается вопрос о существовании в кольце R без радикала функций $\sqrt{z(M)}$ и $\ln z(M)$: именно, эти функции существуют в кольце R вместе с функцией $z(M)$, если они однозначны на $\mathfrak{M}$. Условие о полном приращении аргумента, которое фигурировало выше, есть для окружности как раз условие однозначности функции $\sqrt{z(M)}$. В случае произвольного пространства $\mathfrak{M}$ роль условия о полном приращении аргумента функции $z(M)$ будет играть каждый раз свое условие, имеющее топологический характер; мы не будем заниматься его выяснением.

Мы не смогли бы дать доказательства указанной теоремы, оставаясь целиком в рамках теории функций одного переменного. Наше доказательство существенно основано на возможности выхода в область функций нескольких комплексных переменных. Поэтому не стоит и в формулировке теоремы ограничиваться функциями одного переменного. Введем следующее общее определение:

Определение 1. *Локально аналитической операцией относительно элементов нормированного кольца R* мы будем называть переход от функций $z(M)$, отвечающих элементам этого кольца, к функции $f(M)$, которая в окрестности каждой точки $M_0 \in \mathfrak{M}$ допускает представление

$$f(M) = \sum_{k_1, \ldots, k_m = 0}^{\infty} a_{k_1 \ldots k_m} [z_1(M) - z_1(M_0)]^{k_1} \ldots \\ \ldots [z_m(M) - z_m(M_0)]^{k_m}, \qquad (1)$$

где степенной ряд

$$\sum_{k_1, \ldots, k_m = 0}^{\infty} a_{k_1 \ldots k_m} \zeta_1^{k_1} \ldots \zeta_m^{k_m}$$

сходится в окрестности начала координат m-мерного комплексного пространства и как элементы $z_1, \ldots, z_m$ в равенстве (1), так и само их число m могут зависеть от выбора точки M_0.

При этом мы и саму функцию $f(M)$ будем для краткости называть *локально аналитической*, имея, конечно, в виду, что этот термин относится к ее зависимости не от M, а от соответствующих функций $z(M)$.

Далее будет доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Всякой локально аналитической операции относительно элементов нормированного кольца R отвечает такой элемент $x \in R$, что $x(M) = f(M)$ для всех $M \in \mathfrak{M}(R)$, где $f(M)$ — соответствующая локально аналитическая функция.*

Эта теорема, очевидно, содержит теорему 1 § 6 как частный случай. Действительно, функции $f(\zeta)$, фигурирующей в теореме 1 § 6, можно сопоставить функцию $f_1(M) = f(x(M))$, определенную на пространстве $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(R)$. Так как, по условию, $f(\zeta)$ аналитична на спектре элемента x, то у каждой точки $M_0 \in \mathfrak{M}$ можно указать окрестность вида $\{M \in \mathfrak{M}: |x(M) - x(M_0)| < \varepsilon\}$, в которой $f_1(M)$ разлагается в ряд Тейлора по степеням $x(M) - x(M_0)$. Следовательно, $x(M) \to f_1(M)$ — локально аналитическая операция; тогда, по сформулированной только что теореме, имеется элемент $x_1 \in R$ такой, что $x_1(M) \equiv f_1(M)$, что и требовалось.

Теорема настоящего параграфа отличается от рассмотренной в § 6 прежде всего тем, что вместо простого ряда Тейлора разрешается использовать и кратные ряды, причем фигурирующие в них элементы могут меняться от точки к точке. Но даже и в том простейшем случае, когда данная локально аналитическая функция представляется в окрестности каждой точки $M_0 \in \mathfrak{M}$ рядом по степеням $x(M) - x(M_0)$ с одним и тем же x, сформулированная здесь теорема не приводится к теореме 1 § 6, так как $f(\zeta)$ может и не быть однозначной функцией на спектре элемента x.

Доказательство теоремы 1 не просто; мы проведем его в несколько этапов.

А) Сначала рассмотрим случай, когда R — кольцо с конечным числом образующих $x_1, \ldots, x_n$, причем во всех разложениях (1) элементы $z_1, \ldots, z_m$ выбираются из числа этих образующих. Как мы знаем (§ 5), пространство $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(R)$ можно отождествить с некоторым ограниченным замкнутым подмножеством F n-мерного комплексного пространства $\mathbf{C}^n$, приводя в соответствие каждому максимальному идеалу M точку $\zeta = \{x_1(M), \ldots, x_n(M)\} \in \mathbf{C}^n$. Так как это соответствие взаимно однозначно, то однозначная на $\mathfrak{M}$ функция $f(M)$ будет тем самым однозначной функцией на множестве F и притом аналитической функцией на этом множестве по переменным $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, так что она будет однозначна и аналитична и в некоторой области G, содержащей множество $F = \mathfrak{M}$.

Как было показано в конце § 5, множество $\mathfrak{M}$ выпукло относительно полиномов и, следовательно, является пересечением некоторого (бесконечного) числа областей вида

$$\{\zeta \in \mathbf{C}^n: \quad |P(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)| < 1\}, \tag{2}$$

где $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, а P — символ полинома от переменных $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$.

Мы будем называть *областью Вейля* любую область, являющуюся пересечением конечного числа областей вида (2), скажем, областей

$$G_k = \{\zeta \in \mathbf{C}^n: \quad |P_k(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)| < 1\} \qquad (k = 1, \ldots, N),$$

где любая система n многообразий

$$\Gamma_k = \{\zeta \in \mathbf{C}^n: \quad |P_k(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)| = 1\}$$

имеет пересечение (вещественной) размерности не выше n.

Покажем, что существует область Вейля, содержащая $\mathfrak{M}$ и заключенная внутри G.

Пусть $\mathfrak{M} = \bigcap\limits_{\nu} G_\nu$, где

$$G_\nu = \{\zeta \in \mathbf{C}^n: \quad |P_\nu(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)| < 1\}.$$

К областям G_ν, в силу ограниченности множества $\mathfrak{M}$, можно добавить еще n областей вида

$$Q_j = \left\{\zeta \in \mathbf{C}^n: \quad \left|\frac{\zeta_j}{c_j}\right| < 1\right\} \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

где c_j — положительные постоянные. Пусть

$$m_\nu = \max_{\zeta \in \mathfrak{M}} |P_\nu(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)|.$$

Очевидно, $m_\nu < 1$. Рассмотрим замкнутые множества

$$F_\nu = \{\zeta \in \mathbf{C}^n: \quad |P_\nu(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)| \leqslant \theta_\nu\}$$

и

$$S_j = \{\zeta \in \mathbf{C}^n: \quad |\zeta_j| \leqslant a_j\},$$

где $m_\nu < \theta_\nu < 1$ и

$$\max_{M \in \mathfrak{M}} |z_j(M)| = \max_{\zeta \in \mathfrak{M}} |\zeta_j| < a_j < c_j \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Поскольку $\mathfrak{M} \subset F_\nu \subset G_\nu$ и $\mathfrak{M} \subset S_j \subset Q_j$, пересечение всех множеств F_ν и S_j также совпадает с $\mathfrak{M}$. Но пересечение всех множеств F_ν и S_j и замкнутого множества $\complement G$, дополнительного к области G, пусто; так как $S = \bigcap\limits_{j=1}^{n} S_j$ — ограниченное замкнутое множество в $\mathbf{C}^n$, то можно поэтому выбрать конечное число индексов $\nu_1, \ldots, \nu_m$ так, что будет пустым пересечение множеств $F_{\nu_1}, \ldots, F_{\nu_m}, S$ и $\complement G$; но это означает, что

$$F_{\nu_1} \cap \ldots \cap F_{\nu_m} \cap S_1 \cap \ldots \cap S_n \subset G.$$

Тем более содержится в G пересечение всех областей

$$\left\{\zeta \in \mathbf{C}^n: \ \left|\frac{1}{\theta_{\nu_i}} P_{\nu_i}(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)\right| < 1\right\} \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

и

$$\left\{\zeta \in \mathbf{C}^n: \ \left|\frac{\zeta_j}{a_j}\right| < 1\right\} \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Это пересечение представляет собой область, содержащуюся в G и содержащую $\mathfrak{M}$.

Выполнения для этой области последнего условия, определяющего область Вейля, всегда можно добиться в силу следующего рассуждения, показывающего, что, наряду с многочленом $P_\nu = P_\nu(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, при построении искомой области годится и любой достаточно близкий к P_ν многочлен $\widetilde{P}_\nu$.

Положим $\widetilde{P}_\nu = \frac{1}{\theta_\nu} P_\nu + R_\nu$, где $R_\nu(\zeta)$ — любой полином, не превосходящий по модулю в области $Q = \{\zeta \in \mathbf{C}^n: |\zeta_j| \leqslant c_j$ $(j = 1, \ldots, n)\}$ заданного числа $\varepsilon > 0$. Так как $\mathfrak{M} \subset Q$, то $\max\limits_{\zeta \in \mathfrak{M}} |\widetilde{P}_\nu(\zeta)| \leqslant \frac{m_\nu}{\theta_\nu} + \varepsilon$. С другой стороны, в области Q из $|\widetilde{P}_\nu(\zeta)| < 1$ следует $|P_\nu(\zeta)| < \theta_\nu(1 + \varepsilon)$. Таким образом, при достаточно малом ε пересечение области $\{\zeta \in \mathbf{C}^n: |\widetilde{P}_\nu(\zeta)| < 1\}$ с областью Q содержит множество $\mathfrak{M}$ и содержится в области $\{\zeta \in \mathbf{C}^n: \ |P_\nu(\zeta)| < 1\}$, а это означает, что при построении области Вейля многочлен $P_\nu(\zeta)$ может быть заменен многочленом $\widetilde{P}_\nu(\zeta)$. Подбирая последние многочлены таким образом, чтобы никакая система n функций $|\widetilde{P}_\nu(\zeta)|$ не была функционально зависимой, мы и получим искомую область Вейля.

Теперь можно перейти к завершению доказательства утверждения теоремы в рассматриваемом случае А. Для кольца с равномерной сходимостью справедливость этого утверждения вытекает прямо из теоремы Вейля, утверждающей, что всякая аналитическая функция в области Вейля G

представляется в виде равномерно сходящегося внутри области G (т. е. на всяком замкнутом ограниченном её подмножестве) ряда полиномов *).

В общем случае мы рассмотрим так называемое *интегральное представление Вейля* (которое было построено им как раз при доказательстве сформулированной только что теоремы). Оно получается следующим образом.

Построенная нами область Вейля определяется неравенствами вида

$$|P_i(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)| < 1 \qquad (i = 1, \ldots, N),$$

где P_i — некоторые полиномы от $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$. Пусть

$$s_i = \{\zeta \in \mathbf{C}^n: \quad |P_i(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)| = 1\}.$$

Через $\sigma_{i_1 \ldots i_n}$ мы обозначим пересечение многообразий $s_{i_1}, \ldots, s_{i_n}$, ориентированное определенным образом, в детали которого нам входить незачем. Для каждой точки $(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \mathfrak{M}$ можно написать разложение

$$P_i(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) - P_i(\tau_1, \ldots, \tau_n) = \sum_{j=1}^{n} (\zeta_j - \tau_j)\, Q_{ij}(\zeta_1, \ldots, \zeta_n),$$

где Q_{ij} — некоторые полиномы от $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, коэффициенты которых зависят от $\tau_1, \ldots, \tau_n$. Положим

$$D_{i_1 \ldots i_n} = \det \| Q_{i_\alpha j} \| \qquad (j,\ \alpha = 1, \ldots, n).$$

Тогда *всякая функция* $f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, *аналитическая в области* G, *представляется на* $\mathfrak{M}$ *в виде интеграла*

$$f(\tau_1, \ldots, \tau_n) = \\ = \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{(i_1, \ldots, i_n)} \int\limits_{\sigma_{i_1 \ldots i_n}} \frac{D_{i_1 \ldots i_n} f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)\, d\zeta_1 \ldots d\zeta_n}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} [P_{i_\nu}(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) - P_{i_\nu}(\tau_1, \ldots, \tau_n)]}, \tag{3}$$

где суммирование производится по всем сочетаниям индексов $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$, изменяющихся от 1 до N **).

*) Б. А. Фукс, Теория аналитических функций многих комплексных переменных, М. — Л., 1948, стр. 329.
**) Там же, стр. 306.

В силу того, что полином $P_{i_\nu}(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) - P_{i_\nu}(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ не обращается в нуль, когда точка $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ пробегает множество $\sigma_{i_1 \ldots i_n}$, а точка $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ — множество $\mathfrak{M}$, интегралу (3) можно придать кольцевой смысл. Именно, прежде всего в R имеется обратный элемент

$$\left[P_{i_\nu}(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)e - P_{i_\nu}(x_1, \ldots, x_n)\right]^{-1}$$

(где e — единица кольца R), очевидно, непрерывно зависящий от параметров $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$. При этом, поскольку $D_{i_1 \ldots i_n}$ как полином также непрерывно зависит от параметров $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, мы можем элемент кольца

$$D_{i_1 \ldots i_n} f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \prod_{\nu=1}^{n} \left[P_{i_\nu}(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)e - P_{i_\nu}(x_1, \ldots, x_n)\right]^{-1}$$

проинтегрировать по параметрам $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, пробегающим область $\sigma_{i_1 \ldots i_n}$. Просуммировав полученные результаты по индексам $i_1, \ldots, i_n$ и умножив на $\frac{1}{(2\pi i)^n}$, мы в итоге снова получим элемент кольца R. В силу непрерывности канонического гомоморфизма $R \to R/M$, значения полученного элемента на максимальных идеалах кольца R будут совпадать со значениями функции $f(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ в соответствующих точках множества $\mathfrak{M}$. Тем самым теорема 1 в случае А доказана.

Б) Для дальнейшего введем важное понятие *совместного спектра* n элементов $x_1, \ldots, x_n$ нормированного кольца R. Мы будем так называть совокупность $S = S_R(x_1, \ldots, x_n)$ всех точек $\{x_1(M), \ldots, x_n(M)\}$ n-мерного комплексного пространства $\mathbf{C}^n$, где M пробегает пространство $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов кольца R. Очевидно, S — замкнутое ограниченное множество, лежащее в области

$$Z = \{\zeta \in \mathbf{C}^n\colon \quad |\zeta_j| \leqslant \|x_j\| \qquad (j = 1, \ldots, n)\}.$$

Заметим, что $S_R(x_1, \ldots, x_n)$ не совпадает, вообще говоря, с совместным спектром $S_{R_0}(x_1, \ldots, x_n)$ элементов $x_1, \ldots, x_n$ в порожденном ими подкольце $R_0 \subset R$, т. е., по теореме 4 § 5, с пространством максимальных идеалов этого подкольца R_0; имеет место вообще лишь включение

$$S_R(x_1, \ldots, x_n) \subset S_{R_0}(x_1, \ldots, x_n)$$

(очевидным образом вытекающее из того, что каждый максимальный идеал кольца R дает в пересечении с R_0 максимальный идеал кольца R_0).

Например, пусть R — кольцо всех непрерывных функций на окружности $|\zeta|=1$ комплексной плоскости. Спектр элемента $z(\zeta)=\zeta$ есть множество точек окружности $|\zeta|=1$. Подкольцо R_0, порожденное этим элементом, есть кольцо A всех функций, аналитических при $|\zeta|<1$ и непрерывных при $|\zeta|\leqslant 1$; множество его максимальных идеалов есть круг $|\zeta|\leqslant 1$, который шире, чем спектр элемента ζ в кольце R.

Теперь мы установим следующее важное предложение:

Лемма. *Для всякой (однозначной) функции $f(\zeta)=f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, аналитической на совместном спектре S элементов $x_1, \ldots, x_n$ кольца R, имеется элемент $x\in R$ такой, что для любого $M\in\mathfrak{M}$ справедливо равенство*

$$f(x_1(M), \ldots, x_n(M))=x(M).$$

Доказательство. В том частном случае, когда $x_1, \ldots, x_n$ — образующие кольца R, их совместный спектр S совпадает с множеством $\mathfrak{M}$ и справедливость леммы вытекает из доказанного в п. А. Оказывается, что в общем случае к элементам $x_1, \ldots, x_n$ можно добавить еще некоторое число элементов $y_1, \ldots, y_p$ кольца R так, что проекция $S_{R'}(x_1, \ldots, x_n)$ на $\mathbf{C}^n$ пространства $\mathfrak{M}'$ максимальных идеалов подкольца $R'\subset R$, порожденного элементами $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_p$, рассматриваемого как подмножество $(n+p)$-мерного комплексного пространства $\mathbf{C}^{n+p}$, будет содержаться в наперед заданной открытой окрестности U множества S, например той, в которой функция $f(\zeta)$ остается аналитической и однозначной. Тогда $f(\zeta)$ можно будет продолжить как постоянную относительно остальных p аргументов на множество $\mathfrak{M}'$, где она снова будет однозначной аналитической функцией и, по доказанному в п. А, будет соответствовать некоторому элементу $x\in R'$, чем доказательство и завершится.

Укажем теперь, как выбирать искомые элементы $y_1, \ldots, y_p$. Если точка $\zeta^0=\{\zeta_1^0, \ldots, \zeta_n^0\}\in\mathbf{C}^n$ не принадлежит $S_R(x_1, \ldots, x_n)$, то это означает, что в кольце R нет такого максимального идеала, который содержал бы все разности $x_j-\zeta_j^0 e$ $(j=1, \ldots, n)$. Но тогда идеал, порожденный этими разностями, есть всё кольцо R, и следовательно, при некотором выборе элементов $y_1, \ldots, y_n$ мы имеем:

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j - \zeta_j^0 e) y_j = e.$$

В некоторой окрестности точки ζ^0 сумма $\sum\limits_{j=1}^{n} (x_j - \zeta_j e) y_j$ отстоит от e по норме менее чем на 1 и, следовательно, имеет в R обратный элемент. Более того, этот обратный элемент содержится уже в подкольце R_1, порожденном элементами $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$. Таким образом, уже в R_1 нет максимального идеала, содержащего все разности $x_j - \zeta_j e$, т. е. $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \notin S_{R_1}(x_1, \ldots, x_n)$, и тем более $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \notin$ $\notin S_{R'}(x_1, \ldots, x_n)$ для всякого $R' \supset R_1$. Теперь заметим, что теоретико-множественная разность $Z \setminus U$ области Z и окрестности U компактна и потому может быть покрыта конечным числом указанных окрестностей. Рассмотрим подкольцо R', порожденное всеми соответствующими элементами $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_p$. Его пространство максимальных идеалов $\mathfrak{M}'$, рассматриваемое как подмножество $(n+p)$-мерного комплексного пространства $\mathbf{C}^{n+p}$, проектируется в пространство $\mathbf{C}^n$ первых n координат на множество $S_{R'}(x_1 \ldots, x_n)$, содержащееся в области Z. При этом, по доказанному, ни одна точка из $Z \setminus U$ не может попасть в проекцию $S_{R'}(x_1, \ldots, x_n)$, которая, таким образом, целиком содержится в U. Лемма доказана.

В) Перейдем теперь к доказательству теоремы в общем случае. По условию, каждой точке $M_0 \in \mathfrak{M}$ сопоставлены ее окрестность $U(M_0)$ и n каких-то элементов $z_1, \ldots, z_n$. В силу бикомпактности пространства $\mathfrak{M}$, оно покрывается конечным числом указанных окрестностей, скажем, окрестностями $U_1, \ldots, U_m$, причем можно считать, что U_j задается неравенствами вида

$$|y_{1j}(M) - y_{1j}(M_j)| < \varepsilon_j, \ldots, |y_{kj}(M) - y_{kj}(M_j)| < \varepsilon_j. \quad (4)$$

Элементы, участвующие в разложениях вида (1) для окрестностей $U_1, \ldots, U_m$, а также в неравенствах (4), описывающих сами эти окрестности, обозначим через $x_1, \ldots, x_q$.

Пусть $S = S_R(x_1, \ldots, x_q)$ — совместный спектр элементов $x_1, \ldots, x_q$, т. е. множество точек

$$\zeta = \{x_1(M), \ldots, x_q(M)\}$$

q-мерного комплексного пространства $\mathbf{C}^q$, где M пробегает $\mathfrak{M}$.

Если точки M' и M'' не принадлежат одной и той же из окрестностей $U_1, \ldots, U_m$, то, по построению, соответствующие точки ζ' и ζ'' различны. Поэтому полный прообраз $\mathfrak{M}_\zeta \subset \mathfrak{M}$ каждой точки $\zeta \in S$ лежит целиком в одной из окрестностей $U_1, \ldots, U_m$. На всем этом прообразе действует одно и то же разложение вида (1). Так как функции $z_j(M)$, участвующие в разложении (1), постоянны на $\mathfrak{M}_\zeta$, то и функция $f(M)$ на всем $\mathfrak{M}_\zeta$ имеет одно и то же значение. Таким образом, возможно определить однозначную функцию $f(\zeta)$ на множестве S, положив ее равной $f(M)$ для любого $M \in \mathfrak{M}_\zeta$. Все функции $x_1(M), \ldots, x_q(M)$ также переносятся на множество S, становясь просто декартовыми координатами его точек в $\mathbf{C}^q$. Разложение (1) показывает, что $f(\zeta)$ есть аналитическая функция в окрестности каждой точки $\zeta \in S$, т. е. аналитическая функция на всем S. Но тогда, в силу леммы, доказанной в п. Б, имеется элемент $x \in R$ такой, что функция $x(M)$ принимает значение, равное $f(\zeta)$, где $\zeta = \{x_1(M), \ldots, x_q(M)\}$, для каждого $M \in \mathfrak{M}$ и, следовательно, совпадает с $f(M)$. Теорема доказана.

В качестве первого примера на применение теоремы 1 докажем следующее предложение, дающее критерий того, что рассматриваемое кольцо функций содержит все функции, аналитические на заданном множестве.

Теорема 2. *Пусть R — кольцо функций комплексного переменного ζ, имеющее своим множеством максимальных идеалов некоторое замкнутое ограниченное множество S на плоскости ζ. Если для каждой точки $\zeta_0 \in S$ существует функция $\varphi_0(\zeta) \in R$, аналитическая в окрестности V_0 точки ζ_0 и имеющая там ненулевую производную, то R содержит всякую функцию, аналитическую на множестве S.*

Доказательство. Всякая функция $f(\zeta)$, аналитическая на V_0, аналитична по отношению к $\varphi_0(\zeta)$, т. е. разлагается в ряд по степеням $\varphi_0(\zeta)$ (поскольку $\varphi_0(\zeta)$ осуществляет конформное отображение на область в своей плоскости и функцию $f(\zeta)$ можно считать заданной и аналитической в этой области). Поэтому всякая функция $f(\zeta)$, аналитическая на множестве S, в силу условия теоремы, является локально аналитической относительно кольца R и, по доказанному, должна принадлежать этому кольцу.

В качестве второго примера укажем применение теоремы 1 к вопросу о разрешимости аналитических уравнений в кольце без радикала.

Начнем с уравнения

$$x^2 = a, \tag{5}$$

где a — известный, а x — искомый элемент нормированного кольца R. Такое уравнение, разумеется, разрешимо не всегда; так, в кольце A функций $z(\zeta)$, аналитических в круге $|\zeta| < 1$ и непрерывных в замкнутом круге $|\zeta| \leqslant 1$, нельзя извлечь квадратный корень из элемента $z(\zeta) = \zeta$. Очевидное необходимое условие разрешимости уравнения (5) состоит в том, чтобы на $\mathfrak{M}(R)$ существовала (однозначная) непрерывная функция $f(M)$, для которой $f^2(M) = a(M)$. В рассмотренном примере это условие, конечно, не выполнено. Но в общем случае и оно еще не является достаточным. Например, в кольце A_0 функций $z(\zeta)$, аналитических в круге $|\zeta| < 1$, непрерывных в круге $|\zeta| \leqslant 1$ и имеющих при $\zeta = 0$ производную, равную нулю, из функции $z(\zeta) = \zeta^2$ нельзя извлечь корня, хотя соответствующая непрерывная функция $f(\zeta) = \zeta$ на пространстве максимальных идеалов имеется.

Используя теорему 1, мы можем дать следующее достаточное условие существования квадратного корня из элемента a: *для разрешимости уравнения* (5) *в кольце R без радикала достаточно, чтобы уравнение $f^2(M) = a(M)$ имело решение в классе всех (однозначных) непрерывных функций на $\mathfrak{M}(R)$ и элемент a имел обратный.* Действительно, при этих предположениях непрерывная функция $f(M)$ в окрестности каждой точки M_0 допускает разложение в ряд по степеням $a(M) - a(M_0)$, а потому, в силу теоремы 1, имеется элемент x такой, что $x(M) = f(M)$ и, значит, $x^2 = a$.

Отсюда, например, следует, что если R — кольцо функций на окружности $\zeta = e^{it}$ $(0 \leqslant t < 2\pi)$, имеющее её пространством своих максимальных идеалов, и если в R содержится функция e^{2it}, то в R содержится и функция e^{it}. Из теорем § 6 этот результат не вытекает.

Использованные здесь соображения почти без изменений переносятся на аналитическое уравнение

$$F(x, a_1, \ldots, a_n) = 0, \tag{6}$$

а также систему таких уравнений

$$F_i(x_1, \ldots, x_k, a_1, \ldots, a_n) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k); \tag{7}$$

при этом уравнение вида (6) мы называем аналитическим, если функция F в окрестности любой системы значений аргументов ζ, $a_1(M), \ldots, a_n(M)$ выражается через эти аргументы степенным рядом.

Достаточное условие разрешимости относительно x уравнения (6) в кольце R без радикала состоит в следующем: *это уравнение* *разрешимо в классе всех непрерывных функций на* $\mathfrak{M}(R)$, *и выражение*

$$\frac{\partial F(x(M), a_1(M), \ldots, a_n(M))}{\partial x}$$

не обращается в нуль на $\mathfrak{M}(R)$.

Достаточные условия разрешимости системы уравнений (7) относительно $x_1, \ldots, x_k$ в кольце R без радикала состоят в следующем: *эти уравнения имеют решение в классе всех непрерывных функций на* $\mathfrak{M}(R)$, *и, кроме того,*

$$\det\left\| \frac{\partial F_i(x_1(M), \ldots, x_k(M), a_1(M), \ldots, a_n(M))}{\partial x_j} \right\|$$

не обращается в нуль на $\mathfrak{M}(R)$.

Действительно, в указанных случаях, в силу классических теорем о неявных функциях, решения $x(M)$ (в случае уравнения (6)) и $x_j(M)$ (в случае системы (7)) являются локально аналитическими функциями элементов $a_1, \ldots, a_n$ и, в силу теоремы 1, принадлежат кольцу R.

В заключение этого параграфа рассмотрим применение полученных результатов к построению операционного исчисления в нормированных кольцах.

Пусть A_F — кольцо функций $\varphi(\zeta)$, аналитических на замкнутом ограниченном множестве F плоскости комплексного переменного ζ. Пусть, далее, спектр элемента x нормированного кольца R содержится в F. В § 6 было показано, что A_F можно гомоморфно отобразить в R так, что функция $\varphi(\zeta) \equiv 1$ перейдет в единицу кольца R, а функция $\varphi(\zeta) \equiv \zeta$ — в элемент x, причем всякая последовательность аналитических функций $\varphi_n(\zeta)$, равномерно сходящаяся на какой-нибудь области $G \supset F$, будет переходить в сходящуюся по норме последовательность элементов кольца R (теорема 2 § 6). При этом становится возможным разумно определить в R аналитические функции от элемента x, так что естественно говорить об *операционном исчислении над элементами x кольца R.*

Эта конструкция может быть обобщена на случай нескольких элементов кольца следующим образом. *Пусть $A(F)$ есть кольцо функций $f(\zeta)=f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, аналитических на замкнутом ограниченном множестве F в n-мерном комплексном пространстве $\mathbf{C}^n$. Пусть, далее, совместный спектр S элементов $x_1, \ldots, x_n$ кольца R содержится в F. Тогда существует гомоморфизм $A(F)$ в R такой, что функ-*

ции $f(\zeta)\equiv 1$ *соответствует единица* e *кольца* R, *функции* $f_j(\zeta)\equiv\zeta_j$ — *элемент* x_j $(j=1, \ldots, n)$ *и из равномерной сходимости функций* $f_\nu(\zeta)$ $(f_\nu\in A(F))$ *на какой-нибудь области* $G\supset F$ *вытекает сходимость соответствующих элементов* $\tilde{f}_\nu(x)$ *по норме кольца* R.

Для доказательства допустим вначале, что элементы $x_1, \ldots, x_n$ — образующие кольца R, так что их совместный спектр S совпадает с пространством $\mathfrak{M}(R)$ максимальных идеалов кольца R. Как было показано в п. А доказательства теоремы 1, каждая аналитическая функция $f(\zeta)$ на S представляется в виде интеграла Вейля

$$f(\tau_1, \ldots, \tau_n)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_n\leqslant N}\ \int_{\sigma_{i_1\ldots i_n}}\frac{D_{i_1\ldots i_n}f(\zeta)\,d\zeta}{\prod_{\nu=1}^{n}[P_{i_\nu}(\zeta)-P_{i_\nu}(\tau)]}, \tag{8}$$

и мы можем поставить в соответствие функции $f(\zeta)$ элемент $\tilde{f}(x)=\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n)$ кольца R, определяемый формулой

$$\tilde{f}(x)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_n\leqslant N}\ \int_{\sigma_{i_1\ldots i_n}}\prod_{\nu=1}^{n}[P_{i_\nu}(\zeta)e-P_{i_\nu}(x)]^{-1}\times$$
$$\times D_{i_1\ldots i_n}(\zeta)f(\zeta)\,d\zeta. \tag{9'}$$

Проверим, что эта формула осуществляет искомый гомоморфизм. Очевидно, она определяет линейное отображение кольца $A(F)$ на некоторую совокупность элементов кольца R, причем из равномерной сходимости функций $f_\nu(\zeta)$ в области $G\supset F$ следует сходимость соответствующих элементов $\tilde{f}_\nu(x)$ по норме кольца R. Мы должны доказать, что это отображение переводит функции $1, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ соответственно в $e, x_1, \ldots, x_n$ и произведение функций $f(\zeta)$ и $g(\zeta)$ — в произведение элементов $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{g}(x)$.

Заметим вначале, что интеграл (8) равен нулю, если хотя бы для одного μ $(1\leqslant\mu\leqslant N)$ мы имеем $|P_\mu(\tau)|>1$. Доказательство *) состоит в том, что интеграл (8) с помощью простых алгебраических преобразований подинтегральных функций приводится к сумме интегралов от аналитических функций переменного ζ, меняющегося в области $\{\zeta\in C^n\colon |P_\mu(\zeta)|<1\}$ по границе этой области; в силу же теоремы Коши каждый из этих интегралов равен нулю. Если элемент $P_\mu(x)-P_\mu(\zeta)e$ имеет в R обратный при любом ζ таком,

*) См., например, Б. А. Фукс, Теория аналитических функций многих комплексных переменных, М.—Л., 1948, стр. 307.

что $|P_\mu(\zeta)| \leqslant 1$, то приведенное рассуждение можно перевести на язык элементов кольца R и вывести, что в этом случае и интеграл (9) равен нулю. Действительно, указанные алгебраические преобразования подинтегральных выражений можно провести и над элементами кольца R; с другой стороны, интеграл всякой абстрактной (со значениями в R) аналитической функции по границе ее области аналитичности равен нулю, поскольку результат применеиия любого линейного функционала к абстрактной аналитической функции дает обычную аналитическую фуикцию.

Отсюда можно легко получить, что значение интеграла (9) не зависит от специального выбора области Вейля, используемой при построении этого интеграла, лишь бы она заключалась в области аналитичности функции $f(\zeta)$. В самом деле, на разности двух таких областей один из многочленов $P_\mu(\zeta)$ всюду по модулю больше 1; это означает, что $P_\mu(\zeta) - P_\mu(\tau)$ не обращается в нуль при $\tau \in S$ и поэтому элемент $P_\mu(x) - P_\mu(\zeta)e$ имеет в R обратный.

Пусть, в частности, функция $f(\zeta)$ имеет вид $f_1(\zeta_1) \ldots f_n(\zeta_n)$, где $f_j(\zeta_j)$ аналитична при $|\zeta_j| \leqslant c_j$. Здесь в качестве области Вейля может быть взято $\{\zeta \in C^n\colon |\zeta_j| \leqslant c_j \ (j=1, \ldots n)\}$; соответствующий интеграл Вейля превращается при этом в произведение n обычных интегралов Коши:

$$f(x) = \prod_{j=1}^{n} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta_j| = c_j} f_j(\zeta_j)(\zeta_j e - x_j)^{-1} d\zeta_j \right\}. \tag{10}$$

Но, как было доказано в § 6, для обычных интегралов Коши справедливы соотношения

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta| = c} (\zeta e - x)^{-1} d\zeta = e, \qquad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta| = c} \zeta (\zeta e - x)^{-1} d\zeta = x.$$

Отсюда непосредственно следует, что интеграл Вейля (9) переводит функции $1, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ соответственно в элементы $e, x_1, \ldots, x_n$ кольца R.

Нам остается показать, что произведеиие $f(\zeta) g(\zeta)$ переходит в произведение $\tilde{f}(x) \tilde{g}(x)$. Для случая, когда f и g зависят каждая только от одной координаты, $f(\zeta) = f(\zeta_j)$ и $g(\zeta) = g(\zeta_k)$, это вытекает при $k = j$ из доказанного в § 6, а при $k \neq j$ — из формулы (10). Отсюда требуемое заключение легко получается в случае, когда $f(\zeta)$ и $g(\zeta)$ являются произведениями функций, зависящих каждая от одной координаты. Переходя к суммам и учитывая линейное свойство интеграла, мы получаем справедливость требуемого свойства для широкого класса функций, включающего, в частности, все многочлеиы. Далее, любая функция $f(\zeta)$, аналитическая на множестве F, а значит и в некоторой области G, заключающей F, есть сумма равномерно сходящегося внутри G ряда многочленов, получающегося при разложении величин $\frac{1}{P_\mu(\zeta) - P_\mu(\tau)}$, стоящих под знаком интеграла (8), в ряды по степеням отношений $\frac{P_\mu(\tau)}{P_\mu(\zeta)}$. Отсюда требуемое свойство $f(\zeta)\, g(\zeta) \to \tilde{f}(x)\, \tilde{g}(x)$ легко получается предельным переходом из аналогичного соотношения для полиномов. Тем самым наша теорема доказана, пока в предположении, что элементы $x_1, \ldots, x_n$ — образующие кольца R.

Подчеркнем, что в рассмотренном случае может существовать лишь единственный гомоморфизм с указанными свойствами, поскольку отображение $\zeta_j \to x_j$ единственным образом распространяется на все многочлены и далее с помощью предельного перехода на все аналитические функции на F.

Переходим теперь к рассмотрению общего случая. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — произвольные элементы кольца R и S — их совместный спектр. Пусть, далее, $G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_\nu \supset \ldots$ — последовательность областей в C^n, стягивающаяся к множеству S. Мы должны сопоставить с каждой функцией $f(\zeta)$, аналитической хотя бы в одной из областей G_ν, такой элемент $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(x_1, \ldots, x_n)$ кольца R, чтобы выполнялись условия гомоморфизма и из равномерной на G_ν сходимости $f_m(\zeta) \to f(\zeta)$ следовало бы, что $\tilde{f}_m(x) \to \tilde{f}(x)$ по норме кольца R.

Как было показано в п. В доказательства теоремы 1, при любом $\nu = 1, 2, \ldots$ можно определить в кольце R элементы $y_{11}, \ldots, y_{1n_1}, y_{21}, \ldots, y_{2n_2}, \ldots, y_{\nu 1}, \ldots, y_{\nu n_\nu}$ так, чтобы множество $\mathfrak{M}_\nu$ максимальных идеалов кольца R_ν, порожденного элементами $x_1, \ldots, x_n$, $y_{11}, \ldots, y_{\nu n_\nu}$, проектировалось из пространства $C^{n+n_1+\ldots+n_\nu}$ переменных $\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \zeta_{11}, \ldots, \zeta_{\nu n_\nu}$, где оно естественно располагается, в пространство C^n внутрь области G_ν. По доказанному выше, существует единственный гомоморфизм кольца $A(\mathfrak{M}_\nu)$ всех функций $f(\zeta) = f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \zeta_{11}, \ldots, \zeta_{\nu n_\nu})$, аналитических на множестве $\mathfrak{M}_\nu$, в кольцо R такой, что функции $1, \zeta_1, \ldots, \zeta_n, \zeta_{11}, \ldots, \zeta_{\nu n_\nu}$ переходят соответственно в элементы $e, x_1, \ldots, x_n, y_{11}, \ldots, y_{\nu n_\nu}$ и последовательности $f_m(\zeta)$, равномерно сходящейся в области $G \supset \mathfrak{M}_\nu$, отвечает сходящаяся по норме последовательность $\tilde{f}_m(x)$. В частности, каждой функции $f(\zeta) = f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, аналитической в области $G_\nu \subset C^n$, поскольку такую функцию можно считать заданной в окрестности множества $\mathfrak{M}_\nu$, этот гомоморфизм ставит в соответствие некоторый элемент $\tilde{f}(x)$ кольца R. Переход от ν к $\nu + 1$ расширяет область определения этого гомоморфизма с класса функций, аналитических в области G_ν, на класс функций, аналитических в области $G_{\nu+1}$, причем, в силу доказанной единственности, образ функции $f(\zeta)$, аналитической в области G_ν, будет при обоих отображениях $A(G_\nu) \to R$, $A(G_{\nu+1}) \to R$ одним и тем же элементом кольца R. Тем самым теорема о гомоморфизме полностью доказана.

Замечание. Впервые операционное исчисление над несколькими элементами кольца, т. е. приведенное выше гомоморфное отображение кольца $A(S)$ в кольцо R, было построено в 1954 г. Л. Валбруком [7], следовавшим несколько иным путем. А именно, внутри области G, содержащей совместный спектр S элементов $x_1, \ldots, x_n$ кольца R, Валбрук строил область, определяемую включениями $\zeta_j \in \Delta_j$ $(j=1, \ldots, n)$, $P_j(\zeta) \in \Delta_j$ $(j=n+1, \ldots, N)$, где $P_j(\zeta)$ — многочлены, а Δ_j $(j=1, \ldots, N)$ — область в комплексной плоскости, быть может, не односвязная. Каждой функции $f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, аналитической в области G, можно сопоставить функцию $F(\zeta) = F(\zeta_1, \ldots, \zeta_N)$ в пространстве C^N, равную $f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ в точках, где $\zeta_j = P_j(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ $(j=n+1, \ldots, N)$. В силу некоторых теорем А. Картана и Ока, функция $F(\zeta)$ распространяется однозначно (как аналитическая функция) на всё множество

$$E = \{\zeta_1 \in \Delta_1, \ldots, \zeta_n \in \Delta_n, \zeta_{n+1} \in \Delta_{n+1}, \ldots, \zeta_N \in \Delta_N\},$$

после чего она может быть представлена в форме кратного интеграла Коши

$$F(\zeta) = \prod_{j=1}^{N} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_j} \frac{F(\tau_j)\, d\tau_j}{\tau_j - \zeta_j} \right\}, \tag{11}$$

где Γ_j — контуры, ограничивающие области Δ_j $(j=1, \ldots, N)$. Формула (11) определяет гомоморфизм кольца функций $A(E)$ в R. Доказывается, с использованием еще одной теоремы Картана, что ядром этого гомоморфизма служит идеал J, порожденный функциями $\zeta_j - P_j(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ $(j=n+1, \ldots, N)$. Факторкольцо $A(E)/J$ изоморфно тогда кольцу $A(S)$ аналитических функций на S, которое, таким образом, оказывается взаимно однозначно отображенным на некоторое множество элементов кольца R.

§ 14. Разложение нормированного кольца в прямую сумму идеалов

Определение 1. Нормированное кольцо R есть *прямая сумма* двух своих идеалов I_1 и I_2, если:

а) пересечение $I_1 \cap I_2$ содержит лишь один элемент 0;

б) каждый элемент $x \in R$ может быть представлен в виде суммы $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in I_1$, $x_2 \in I_2$.

Из условия а) легко следует, что представление б) единственно. В самом деле, если $x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, то $0 = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)$. Так как 0 и $x_1 - y_1$ принадлежат I_1, то и $x_2 - y_2 \in I_1$; но, с другой стороны, $x_2 - y_2 \in I_2$; поэтому $x_2 - y_2 = 0$, $x_2 = y_2$ и, значит, также $x_1 = y_1$.

Далее, так как I_1 и I_2 — идеалы, то для любых элементов $x_1 \in I_1$ и $x_2 \in I_2$ имеем: $x_1 x_2 \in I_1 \cap I_2$ и, значит, в силу условия а), $x_1 x_2 = 0$.

Пусть R есть прямая сумма своих идеалов I_1 и I_2. Рассмотрим составляющие единицы: $e = e_1 + e_2$, $e_1 \in I_1$, $e_2 \in I_2$. Так как $e_1 e_2 = 0$, то $e = e^2 = e_1^2 + e_2^2$, откуда, в силу единственности разложения, $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$. Элемент e_1 в идеале I_1, равно как и e_2 в I_2, играет роль единицы: если $x_1 \in I_1$, то $x_1 e_2 = 0$, и потому $x_1 e_1 = x_1 (e - e_2) = x_1$. Идеалы I_1 и I_2 замкнуты: если $x_n \in I_1$ и $x_n \to x$, то $x_n = x_n e_1 \to x e_1$ и, следовательно, $x = x e_1 \in I_1$. Таким образом, *I_1 и I_2 представляют собой нормированные кольца соответственно с единицами e_1 и e_2.*

Пусть, обратно, имеется элемент $e_1 \in R$, отличный от нуля и единицы и обладающий свойством $e_1^2 = e_1$. Рассмотрим элемент $e_2 = e - e_1$; очевидно,

$$e_1 e_2 = e_1 (e - e_1) = e_1 - e_1^2 = 0 \quad \text{и} \quad e_2^2 = (e - e_1) e_2 = e_2.$$

Пусть I_1 и I_2 — идеалы, порожденные соответственно элементами e_1 и e_2. Пусть $x \in I_1 \cap I_2$; это означает, что $x = x' e_1 = x'' e_2$, а отсюда следует, что $x = x (e_2 + e_1) = x' e_1 e_2 + x'' e_2 e_1 = 0$. Таким образом, пересечение $I_1 \cap I_2$ содержит лишь 0. Далее, каждый элемент $x \in R$ может быть представлен в виде суммы $x = x e_1 + x e_2$, где $x e_1 \in I_1$, $x e_2 \in I_2$. Мы видим, что условия а) и б) определения 1 выполнены, следовательно, R есть прямая сумма идеалов I_1 и I_2.

Теорема 1. *Если коммутативное нормированное кольцо R разлагается в прямую сумму двух своих идеалов I_1 и I_2, то пространство $\mathfrak{M}(R)$ максимальных идеалов кольца R распадается на сумму двух непересекающихся замкнутых множеств F_1 и F_2, служащих пространствами максимальных идеалов соответственно для колец I_1 и I_2.*

Доказательство. Пусть e_1 и e_2 — единицы колец I_1 и I_2. Как следует из равенств $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$, функции $e_1(M)$ и $e_2(M)$ принимают лишь значения 0 и 1. Пусть F_1 — множество всех тех максимальных идеалов, где $e_1(M) = 1$, и F_2 — множество всех тех максимальных идеалов, где $e_2(M) = 1$. Эти множества замкнуты. Так как $e_1 + e_2 = e$, то $e_1(M) + e_2(M) = 1$, и потому F_1 и F_2 не пересекаются и в сумме дают $\mathfrak{M}(R)$. Таким образом, разложению кольца R в прямую сумму идеалов I_1 и I_2 отвечает разложение пространства $\mathfrak{M}(R)$ максимальных идеалов кольца R на сумму двух замкнутых непересекающихся множеств: $\mathfrak{M}(R) = F_1 + F_2$, где

$$F_1 = \{M \in \mathfrak{M}(R)\colon\ e_1(M) = 1\}, \quad F_2 = \{M \in \mathfrak{M}(R)\colon\ e_2(M) = 1\}.$$

Покажем, что $F_1 = \mathfrak{M}(I_1)$, $F_2 = \mathfrak{M}(I_2)$. В самом деле, пусть $M_1 \in F_1$. Ставя каждому элементу $x_1 \in I_1$ в соответствие число $x_1(M_1)$, мы получаем гомоморфное отображение кольца I_1 в тело комплексных чисел, нетривиальное, так как e_1 переходит в 1. Таким образом, каждый максимальный идеал $M_1 \in F_1$ кольца R определяет некоторый максимальный идеал кольца I_1. При этом двум разным максимальным идеалам M_1, $M_1' \in F_1$ соответствуют разные максимальные идеалы кольца I_1, так как для всякого элемента $x \in R$ имеем: $M_1(x) = M_1(xe_1)$ и $M_1'(x) = M_1'(xe_1)$ и потому M_1 и M_1' должны различаться хотя бы для одного элемента $xe_1 \in I_1$. Обратно, пусть M' — максимальный идеал кольца I_1. Ставя каждому элементу $x \in R$ в соответствие число $x_1(M')$, где $x_1 = xe_1$, мы получим нетривиальное гомоморфное отображение кольца R в тело комплексных чисел. Максимальный идеал, определяемый этим гомоморфным отображением, должен содержаться в F_1, ибо для всякого максимального идеала $M_2 \in F_2$ имеем $x_1(M_2) = 0$. Таким образом, каждый максимальный идеал M' кольца I_1 определяет некоторый максимальный идеал M_1 кольца R, причем, очевидно, разные максимальные идеалы $M' \subset I_1$ порождают разные максимальные идеалы $M_1 \subset R$, и если M' порождает M_1, то M_1 порождает указанным выше способом тот же максимальный идеал M'. Тем самым установлено взаимно однозначное соответствие между F_1 и $\mathfrak{M}(I_1)$. Из равенства $x(M') = x_1(M_1)$ следует, что топологические пространства F_1 и $\mathfrak{M}(I_1)$ гомеоморфны. Так же убеждаемся в совпадении F_2 и $\mathfrak{M}(I_2)$.

Теорема 2. *Пусть R — нормированное кольцо и $\mathfrak{M}(R)$ можно представить в виде суммы двух замкнутых непересекающихся множеств F_1 и F_2. Тогда R разлагается в прямую сумму двух идеалов I_1 и I_2, являющихся кольцами с единицей, имеющими соответственно F_1 и F_2 своими пространствами максимальных идеалов. При этом* *идеалы I_1 и I_2 определяются множествами F_1 и F_2 однозначно.*

Доказательство. Для доказательства первого утверждения, в силу теоремы 1, достаточно установить существование элемента e_1, обладающего свойствами:

$$\text{а) } e_1^2 = e_1; \text{ б) } \{M \in \mathfrak{M}(R)\colon\ e_1(M) = 1\} = F_1.$$

Функция $f(M)$, равная 1 на F_1 и 0 на F_2, удовлетворяет условиям теоремы 1 § 13; в силу этой теоремы, существует $z \in R$ такое, что $z(M) = 1$ на F_1 и $z(M) = 0$ на F_2. Если $z^2 = z$, положим $e_1 = z$, $e_2 = e - z$. Если же $z^2 \neq z$ (z^2 и z, вообще говоря, могут отличаться на элемент радикала), мы поступим следующим образом. Все значения $z(M)$ на F_1 заключены в круге $|1 - \lambda| < \frac{1}{3}$, а все значения $z(M)$ на F_2 — в круге $|\lambda| < \frac{1}{3}$. Обозначим через D совокупность этих кругов. Спектр элемента z содержится в D, а функция $e_1(\lambda)$, равная 1 в круге $|1 - \lambda| < \frac{1}{2}$ и 0 в круге $|\lambda| < \frac{1}{2}$, аналитична в D. Положим

$$e_1 = e_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|1-\lambda| = \frac{1}{2}} (\lambda e - z)^{-1}\, d\lambda.$$

Так как $(e_1(\lambda))^2 = e_1(\lambda)$, то, в силу равенства (2) § 6, $e_1^2 = e_1$. Кроме того, в силу теоремы 1 § 6, $e_1(M)$ равно 1 на F_1 и 0 на F_2 и, значит, e_1 отлично от 0 и e. Тем самым первое утверждение теоремы доказано.

Для доказательства второго утверждения достаточно убедиться в следующем: если e_1 и e_1' таковы, что $e_1^2 = e_1$, $e_1'^2 = e_1'$ и $e_1(M) = 1$ тогда и только тогда, когда $e_1'(M) = 1$, то $e_1' = e_1$.

Так как функция $e_1(M) - e_1'(M)$ равна 0 всюду на $\mathfrak{M}(R)$, то степени $e_1 - e_1'$ должны стремиться к нулю. Но, как легко проверить, $(e_1 - e_1')^{2n+1} = e_1 - e_1'$ для любого целого $n \geqslant 0$. Отсюда и следует, что $e_1 = e_1'$.

Понятие прямой суммы идеалов очевидным образом обобщается на случай любого конечного числа слагаемых $I_1, \ldots, I_n$:

каждый элемент $x \in R$ должен представляться, и притом единственным образом, в виде суммы $x = x_1 + \ldots + x_n$, где $x_i \in I_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Из теоремы 2, в частности, следует, что *нормированное кольцо R с конечным числом максимальных идеалов разлагается в прямую сумму конечного числа идеалов, являющихся кольцами с одним максимальным идеалом.*

§ 15. Нормированное пространство, сопряженное к нормированному кольцу

Как и всякое нормированное пространство, нормированное кольцо R обладает сопряженным пространством R', состоящим из всех линейных функционалов на R.

Мы уже рассматривали в нормированном кольце «мультипликативные» функционалы $M(x) = x(M)$; так как каждый мультипликативный функционал имеет норму, равную 1, то мультипликативные функционалы располагаются на поверхности единичного шара в сопряженном пространстве.

Каждому элементу $x \in R$ отвечает линейный оператор x^* в пространстве R', сопряженный к оператору умножения на x в кольце R; оператор x^* действует на функционал f по формуле

$$\langle y, x^*f \rangle = \langle xy, f \rangle \qquad (f \in R',\ y \in R).$$

Подпространство $P \subset R'$ мы назовем *инвариантным подпространством* пространства R', если P инвариантно относительно любого оператора x^*. Если $P \subset R'$ — замкнутое подпространство, то для его инвариантности необходимо и достаточно, чтобы оно было инвариантно относительно операторов x^*, соответствующих образующим кольца R; действительно, из $x_n \to x$ следует $x_n^* f \to x^* f$.

Как известно, совокупность $A^{\perp}$ всех линейных функционалов, равных нулю на каждом элементе x данного множества $A \subset R$, называется *ортогональным дополнением* множества A. Ортогональное дополнение множества A есть всегда слабо замкнутое подпространство в R'; и обратно, каждое слабо замкнутое подпространство $P \subset R'$ есть ортогональное дополнение некоторого множества $A \subset R$, а именно (слабо замкнутого) множества всех элементов $x \in R$, на которых обращается в нуль каждый функционал $f \in P$; мы будем называть последнее ортогональным дополнением к P в R и обозначать $P^{\perp}$.

Ортогональное дополнение $J^{\perp}$ идеала $J \subset R$ является инвариантным подпространством в R'. В самом деле, если $f \in J^{\perp}$, то для любого $y \in J$ мы имеем: $\langle y, x^*f\rangle = \langle xy, f\rangle = 0$, каков бы ни был элемент $x \in R$; поэтому x^*f входит в $J^{\perp}$ вместе с f. Обратно, если $P \subset R'$ есть инвариантное подпространство в R', то его ортогональное дополнение $P^{\perp} \subset R$ есть идеал в R, поскольку из $f \in P$, $x \in R$, $y \in P^{\perp}$ следует $\langle xy, f\rangle = \langle y, x^*f\rangle = 0$.

Таким образом, слабо замкнутые идеалы в R и слабо замкнутые инвариантные подпространства в R' являются ортогональными дополнениями друг друга.

Инвариантное подпространство $M^{\perp} \subset R'$, ортогональное к максимальному идеалу $M \subset R$, одномерно и состоит из кратных функционала $M(x)$; обратно, каждое одномерное инвариантное подпространство $P \subset R'$ имеет своим ортогональным дополнением некоторый максимальный идеал $M \subset R$.

Одномерные инвариантные подпространства $P \subset R'$ являются, естественно, минимальными инвариантными подпространствами в R'.

Каждое ненулевое слабо замкнутое инвариантное подпространство $P \subset R'$ содержит одномерное инвариантное подпространство. Для доказательства рассмотрим идеал $P^{\perp} \subset R$, ортогональный к P. Он содержится в некотором максимальном идеале M. Следовательно, P как ортогональное дополнение идеала $P^{\perp}$ содержит одномерное инвариантное подпространство, ортогональное к максимальному идеалу M.

Для иллюстрации рассмотрим пространство W', сопряженное к кольцу W абсолютно сходящихся рядов Фурье (пример 3° § 1). Пространство W изоморфно пространству l_1 абсолютно сходящихся числовых рядов $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n$, а пространство l_1', сопряженное к l_1, как известно, можно отождествить с пространством всех ограниченных последовательностей $\{\ldots, f_{-1}, f_0, f_1, \ldots\}$ так, что если $x = \{\ldots, c_{-1}, c_0, c_1, \ldots\} \in l_1$, то

$$\langle x, f\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n c_n. \tag{1}$$

Основываясь на этом, мы будем отождествлять W' с последним пространством.

Замкнутое инвариантное подпространство пространства W' можно определить как замкнутое подпространство, инвариантное относительно операторов, сопряженных к операторам умножения на e^{it} и на e^{-it} в кольце W (поскольку e^{it} и e^{-it} — образующие этого кольца). Оператор умножения на e^{it} сдвигает последовательность коэффициентов ряда $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ на одно место вправо; оператор умножения на e^{-it} сдвигает ту же последовательность на одно место влево. Из формулы (1) легко следует тогда, что операторы $(e^{it})^*$ и $(e^{-it})^*$ сдвигают произвольную последовательность $f=\{\ldots, f_{-1}, f_0, f_1, \ldots\}\in W'$ на одно место соответственно влево и вправо. Таким образом, замкнутое инвариантное подпространство пространства W' есть замкнутое подпространство, инвариантное относительно сдвигов вправо и влево.

Как мы знаем, всякий максимальный идеал M_0 кольца W состоит из функций $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$, обращающихся в нуль в фиксированной точке $t_0\in[0, 2\pi)$, так что $x(t_0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int_0}=0$. Отсюда следует, что одномерное инвариантное подпространство $M_0^{\perp}\subset W'$, ортогональное к M_0, состоит из кратных последовательности $\{e^{int_0}\}$.

Поскольку каждое слабо замкнутое инвариантное подпространство $P\subset W'$ содержит, как мы доказали, одномерное инвариантное подпространство, то получаем следующий результат: *всякое слабо замкнутое подпространство пространства ограниченных двусторонних последовательностей, инвариантное относительно сдвигов, содержит последовательность вида* $\{e^{int_0}\}$. Этот факт составляет содержание известной теоремы Бёрлинга [4, 5].

Бёрлинг доказал также, что *всякое слабо замкнутое инвариантное подпространство* $P\subset W'$, *содержащее только одну последовательность* $\{e^{int_0}\}$, *одномерно и состоит из кратных этой последовательности.* И этот результат можно получить из кольцевых соображений. Именно, ортогональное дополнение в W к подпространству $P\subset W'$, удовлетворяющему условиям Бёрлинга, есть слабо замкнутый идеал в W, содержащийся только в одном максимальном идеале M_{t_0}. Но, как будет доказано в § 39, всякий не только слабо, но и сильно замкнутый идеал кольца W, если он содержится только в одном максимальном идеале, совпадает с этим максимальным идеалом. Отсюда вытекает, что P одномерно и, следовательно, состоит из кратных последовательности $\{e^{int_0}\}$.

ЧАСТЬ II

ГЛАВА III

КОЛЬЦА АБСОЛЮТНО ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ДИСКРЕТНЫЕ АНАЛОГИ

§ 16. Кольцо V абсолютно интегрируемых функций на прямой

Будем обозначать через $L^1(-\infty, \infty)$ или просто L^1 пространство всех измеримых комплексных функций вещественного переменного, абсолютно интегрируемых на прямой, наделенное нормой

$$\|x\| = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,dt, \tag{1}$$

превращающей его в банаховское пространство.

Теорема 1. *Если $x(t)$ и $y(t) \in L^1$, то интеграл*

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau \tag{2}$$

существует почти для всех t и также принадлежит L^1, причем

$$\|x * y\| \leqslant \|x\|\,\|y\|. \tag{3}$$

Операция свертывания $*$, определенная формулой (2), *билинейна, ассоциативна и коммутативна, так что L^1 есть нормированное кольцо относительно умножения, определенного как свертывание по формуле* (2).

Доказательство. Так как $x(t)$ — измеримая функция относительно меры Лебега на прямой, то (как можно показать) $x(t-\tau)$ — измеримая функция относительно меры

Лебега на плоскости (t, τ). Следовательно, и $x(t-\tau)\,y(\tau)$ — измеримая функция от (t, τ). Тогда, по теореме Фубини*), существование первого из интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\,y(\tau)\,dt\,d\tau,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\,y(\tau)\,dt\right)d\tau, \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau\right)dt,$$

а при $x(t)\geqslant 0$, $y(\tau)\geqslant 0$ — любого из них влечет существование двух других и равенство всех трех интегралов. Но второй интеграл существует:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\,y(\tau)\,dt\right)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\,dt\right)y(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt\right)y(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\,d\tau.$$

Заменяя здесь $x(t)$ и $y(\tau)$ на $|x(t)|$ и $|y(\tau)|$, заключаем, что первый, а потому и третий интеграл существует, т. е. интеграл (2) существует почти для всех t, измерим как функция от t и абсолютно интегрируем, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau\right)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\,d\tau.$$

Заменяя здесь $x(t)$ и $y(\tau)$ на $|x(t)|$ и $|y(\tau)|$, получаем:

$$\|x * y\| = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau\right|dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t-\tau)|\,|y(\tau)|\,d\tau\right)dt = \|x\|\,\|y\|,$$

*) См. С. Сакс, Теория интеграла, М., 1949, гл. III, § 9, или П. Халмош, Теория меры, М., 1953, § 36.

т. е. неравенство (3). Снова применяя теорему Фубини и делая подстановку $\tau \to \tau + \sigma$, получаем:

$$x*(y*z) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\left(\int_{-\infty}^{\infty} y(\tau-\sigma)\,z(\sigma)\,d\sigma\right)d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\,y(\tau-\sigma)\,d\tau\right)z(\sigma)\,d\sigma =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\sigma-\tau)\,y(\tau)\,d\tau\right)z(\sigma)\,d\sigma = (x*y)*z,$$

так что свертывание ассоциативно. Далее, подстановка $\tau \to t-\tau$ дает:

$$x*y = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,y(t-\tau)\,d\tau = y*x,$$

т. е. свертывание коммутативно. Наконец, билинейность свертывания очевидна.

Тем самым теорема 1 полностью доказана.

Теорема Фубини, использованная при доказательстве теоремы 1, отнюдь не может быть отнесена к элементарной части теории интеграла Лебега. Кроме того, применимость этой теоремы опиралась на измеримость $x(t-\tau)$ как функции двух переменных, проверка чего хотя и элементарна, но довольно громоздка (почему и была опущена нами). Приведем доказательство теоремы 1, использующее вместо теоремы Фубини её совершенно элементарный аналог для непрерывных функций в конечной прямоугольной области, а также элементарные свойства интеграла Лебега.

Пусть L — векторное подпространство в L^1, образованное всеми непрерывными «финитными» функциями, т. е. равными нулю для всех достаточно больших по абсолютной величине значений аргумента. «Свертка» (2) функций $x(t)$ и $y(t) \in L$ (где интегрирование производится фактически в конечных пределах), как легко видеть, также принадлежит L. Определенная таким образом в L операция свертывания (2), очевидно, билинейна, а подстановка $\tau \to t-\tau$ в (2), как и выше, показывает, что эта операция коммутативна. Далее, совершенно так же, как выше, но опираясь на теорему о перемеие порядка интегрирования для непрерывных функций в конечной прямоугольной области, убеждаемся в том, что свертывание также ассоциативно. Наконец, на основании той же теоремы, а в остальном совершенно так же, как выше, устанавливаем справедливость неравенства (3), показывающего, что свертывание в L непрерывно в норме (1) по совокупности обоих «сомножителей».

Так как L плотно в L^1, то отсюда следует, что в L^1 существует однозначно определенное умножение $\cdot$, совпадающее на L со свертыванием и сохраняющее все указанные свойства последнего. Тем самым L^1 есть нормированное кольцо относительно этого умножения, и остается лишь показать, что определенное так умножение выражается той же формулой (2).

Пусть сначала $y(t)$ ограниченна, $|y(t)| \leqslant C$, так что применима доказываемая ниже лемма. Из нее, в частности, следует, что функция $(x * y)(t)$ интегрируема на каждом конечном интервале. Выберем теперь x_n, $y_n \in L$ так, чтобы

$$\|x - x_n\| < \frac{1}{n^2} \text{ и } \|y - y_n\| < \frac{1}{n^2 \max |x_n(t)|}.$$

Тогда

$$\int_{-n}^{n} |(x * y)(t) - (x_n * y_n)(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-n}^{n} \left| \int_{-\infty}^{\infty} |x(t-\tau) - x_n(t-\tau)|\,|y(\tau)|\, d\tau \right| dt +$$

$$+ \int_{-n}^{n} \left| \int_{-\infty}^{\infty} |x_n(t-\tau)|\,|y(\tau) - y_n(\tau)|\, d\tau \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant 2Cn\|x - x_n\| + 2n \max |x_n(t)|\,\|y - y_n\| < \frac{2(C+1)}{n}. \qquad (4)$$

Отсюда прежде всего вытекает, что

$$\int_{-n}^{n} |(x * y)(t)|\, dt \leqslant \int_{-n}^{n} |(x_n * y_n)(t)|\, dt + \frac{2(C+1)}{n} \leqslant$$

$$\leqslant \|x_n * y_n\| + \frac{2(C+1)}{n}. \qquad (5)$$

Но так как $x_n \to x$ и $y_n \to y$, то, в силу неравенства (3), $\|x_n * y_n\|$ ограниченно. Поэтому неравенство (5) показывает, что $x * y \in L^1$, а переходя затем в (4) к пределу по $n \to \infty$, получаем, что $\|x * y - x \cdot y\| = 0$, т. е. $x \cdot y = x * y$.

Так как каждая функция $z \in L^1$ представима в виде линейной комбинации неотрицательных вещественных функций из L^1:

$$z = \frac{|\Re z| + \Re z}{2} - \frac{|\Re z| - \Re z}{2} + i\frac{|\Im z| + \Im z}{2} - i\frac{|\Im z| - \Im z}{2},$$

а операции $*$ и $\cdot$ билинейны, то для завершения доказательства их совпадения достаточно показать, что $x * y$ существует и совпадает с $x \cdot y$ для любых двух неотрицательных вещественных функций x, $y \in L^1$. Положим для этого

$$y_N(t) = \begin{cases} y(t) & \text{там, где } y(t) \leqslant N, \\ N & \text{там, где } y(t) > N. \end{cases}$$

При $N \to \infty$ имеем: $\|y - y_N\| \to 0$, и потому $\|x \cdot y_N - x \cdot y\| \to 0$. С другой стороны, по доказанному выше, $x \cdot y_N = x * y_N$ (ибо y_N ограниченно), и так как $y_N(\tau) \nearrow y(\tau)$, т. е. $y_N(\tau)$ в каждой точке монотонно стремится к $y(\tau)$, то $x(t-\tau) y_N(\tau) \nearrow x(t-\tau) y(\tau)$, а следовательно

$$(x * y_N)(t) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) y_N(\tau) \, d\tau \nearrow \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) y(\tau) \, d\tau = (x * y)(t).$$

В соединении с предыдущим это показывает, что $(x * y)(t)$ конечно почти для всех t, принадлежит L^1 и совпадает в L^1 с $x \cdot y$. Тем самым теорема 1 полностью доказана.

Теорема 2. *Кольцо L^1 не содержит единицы.*

Доказательство этой теоремы будет опираться на следующую лемму, которая понадобится и в дальнейшем*).

Лемма. *Свертка $(x * y)(t)$ функции $x \in L^1$ с произвольной ограниченной измеримой функцией $y(t)$* (очевидно, существующая для всех значений t) *является непрерывной функцией от t.*

Доказательство леммы. Пусть $|y(t)| \leqslant C$. Тогда

$$|(x * y)(t+h) - (x * y)(t)| \leqslant$$
$$\leqslant C \int_{-\infty}^{\infty} |x(t+h-\tau) - x(t-\tau)| \, d\tau =$$
$$= C \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau+h) - x(\tau)| \, d\tau.$$

Но последний интеграл стремится к нулю при $h \to 0$. Действительно, если $x(t)$ — непрерывная «финитная» функция, т. е. непрерывная функция, равная нулю вне конечного интервала, то это следует из ее равномерной непрерывности

*) И уже была использована выше в мелком шрифте

и ограниченности множества, на котором она отлична от нуля. На остальные же функции из L^1 это свойство «абсолютной непрерывности» интеграла Лебега распространяется на основании плотности множества непрерывных финитных функций в L^1 и инвариантности L^1 относительно «сдвигов» $x(\tau) \to x(\tau+h)$. Тем самым лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Если бы в L^1 содержалась единица $e(t)$ относительно свертывания, то каждая ограниченная функция $x \in L^1$ должна была бы почти всюду совпадать с непрерывной, в силу леммы, функцией $(e * x)(t)$. Но в $L^1(-\infty, \infty)$ имеются ограниченные функции, отличающиеся от каждой непрерывной функции на множестве положительной меры: простым примером может служить характеристическая функция конечного интервала.

Через V мы будем обозначать нормированное кольцо, получающееся путем формального присоединения к L^1 единицы.

Таким образом, V составлено из элементов $\mathfrak{z} = \lambda e + x(t)$, где e — присоединенная единица, λ — произвольное комплексное число и $x(t)$ — произвольная функция из L^1, причем $\|\mathfrak{z}\| = |\lambda| + \|x\|$.

Пусть теперь $L^1(0, \infty)$ — пространство всех абсолютно интегрируемых измеримых комплексных функций на полупрямой $0 \leqslant t < \infty$ с нормой $\|x\| = \int\limits_0^\infty |x(t)|\,dt$. Оно является нормированным кольцом относительно умножения, определенного как «свертывание» по формуле

$$(x * y)(t) = \int\limits_0^t x(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau. \tag{2'}$$

Действительно,

$$x(t) \to \hat{x}(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } t \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } t < 0, \end{cases} \tag{6}$$

есть изометрическое вложение $L^1(0, \infty)$ в $L^1(-\infty, \infty)$, причем

$$\int\limits_0^t x(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau = \int\limits_{-\infty}^\infty \hat{x}(t-\tau)\,\hat{y}(\tau)\,d\tau.$$

Таким образом, $L^1(0, \infty)$, отождествленное с его образом L^1_+ в $L^1(-\infty, \infty)$ при отображении (6), является подкольцом кольца L^1. Через V_+ мы будем обозначать подкольцо кольца V, полученное путем присоединения к L^1_+ единицы.

На вид той же формулой (2′) задавалось умножение и в кольце I примера 5° § 1. Но там t пробегало лишь интервал $[0, 1]$. Таким образом, если продолжить каждую функцию $x(t) \in L^1(0, 1)$ на полупрямую $(0, \infty)$ или на всю числовую прямую $(-\infty, \infty)$, положив $x(t)$ равной нулю всюду вне отрезка $[0, 1]$, то произведение в $L^1(0, 1)$ можно будет рассматривать как сужение на интервал $[0, 1]$ произведения соответствующих функций в $L^1(0, \infty)$ или $L^1(-\infty, \infty)$ *).

Аналогичным образом пространство $L^1(0, T)$ всех абсолютно интегрируемых измеримых комплексных функций на любом отрезке $[0, T]$, наделенное нормой $\|x\| = \int\limits_0^T |x(t)|\,dt$, является нормированным кольцом относительно умножения, определенного как свертывание по формуле

$$(x * y)(t) = \int\limits_0^t x(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau \qquad (0 \leqslant t \leqslant T).$$

Кольцо, получающееся путем присоединения к $L^1(0, T)$ единицы, мы будем обозначать $I(0, T)$.

§ 17. Максимальные идеалы колец V и V_+

Очевидно, L^1 образует в V максимальный идеал. Мы обозначим его через M_∞; ниже мы увидим, что в пространстве максимальных идеалов кольца V он играет роль бесконечно удаленной точки.

Найдем остальные максимальные идеалы кольца V. Пусть s — произвольное вещественное число. Для каждого элемента $\mathfrak{z} = \lambda e + x(t) \in V$ положим

$$\mathfrak{z}^\sim(s) = \lambda + \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{ist}\, dt.$$

*) Отсюда снова следуют все свойства свертки в $L^1(0, 1)$, установленные в § 1.

Легко проверить, что $\mathfrak{z} \to \mathfrak{z}^{\sim}(s)$ является гомоморфным отображением кольца V в тело комплексных чисел. В самом деле, в проверке нуждается лишь то, что произведение элементов кольца переходит в произведение соответствующих чисел. Для этого достаточно показать, что свертыванию функций x, $y \in L^1$ отвечает перемножение их *преобразований Фурье*

$$x^{\sim}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{ist}\, dt, \qquad y^{\sim}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{ist}\, dt.$$

Так как при этом $|x^{\sim}(s)| \leqslant \|x\|$, а совокупность L непрерывных финитных функций плотна в L^1, то можно ограничиться тем случаем, когда x, $y \in L$. Но тогда, в силу законности перемены порядка интегрирования для непрерывных функций в конечной прямоугольной области, имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x * y)(t)\, e^{ist}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau \right) e^{ist}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, e^{is(t-\tau)}\, y(\tau)\, e^{is\tau}\, d\tau \right) dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, e^{is(t-\tau)}\, dt \right) y(\tau)\, e^{is\tau}\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{ist}\, dt \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\, e^{is\tau}\, d\tau.$$

Максимальный идеал, порождаемый отображением $\mathfrak{z} \to \mathfrak{z}^{\sim}(s_0)$, т. е. совокупность всех элементов $\mathfrak{z} = \lambda e + x(t) \in V$, для которых

$$\mathfrak{z}^{\sim}(s_0) = \lambda + x^{\sim}(s_0) = \lambda + \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{is_0 t}\, dt = 0,$$

мы обозначим через M_{s_0}. Таким образом, $\mathfrak{z}(M_{s_0}) = \mathfrak{z}^{\sim}(s_0)$. Если $s_1 \neq s_2$, то максимальные идеалы M_{s_1} и M_{s_2} различны; действительно, тогда существует $t = t_0$ такое, что $e^{is_1 t_0} \neq e^{is_2 t_0}$, и взяв в качестве $x(t)$ характеристическую функцию достаточно малой окрестности точки t_0, будем иметь $x^{\sim}(s_1) \neq x^{\sim}(s_2)$.

Вместе с тем все эти максимальные идеалы отличны от M_∞, так как $x(M_\infty)=0$ для любой функции $x \in L^1$, тогда как для каждого s_0 существует функция $x \in L^1$ такая, что $x(M_{s_0}) = x^\sim(s_0) \neq 0$ (например, характеристическая функция достаточно малой окрестности точки $t=0$).

Мы покажем, что *максимальными идеалами* M_s *и* M_∞ *исчерпываются все максимальные идеалы кольца* V.

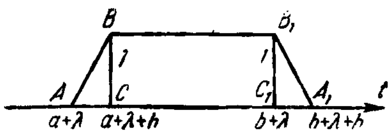
Обозначим через $x_{a,b}(t)$ характеристическую функцию интервала (a, b). Функции $x_{a,b}(t)$ являются образующими в L^1, а значит, также в V.

Лемма. *Замкнутый идеал кольца* V, *содержащий функцию* $z(t) \in L^1$, *содержит также все ее «сдвиги»* $z(t-\lambda)$, *а именно*:

$$z(t-\lambda) = \lim_{h \to 0} \left\{ z(t) * \frac{x_{c,\lambda+h}(t) - x_{c,\lambda}(t)}{h} \right\} \qquad (c < \lambda), \qquad (1)$$

где предел понимается в смысле сходимости по норме.

Доказательство. Функции $\frac{x_{c,\lambda+h}(t) - x_{c,\lambda}(t)}{h}$ (очевидно, не зависящие от c) ограниченны по норме, а именно, все имеют норму 1. Отсюда следует, что выполнение предельного соотношения (1) достаточно доказать для функций $z(t) = x_{a,b}(t)$, являющихся, как было указано, образующими в V. Но при $z(t) = x_{a,b}(t)$ произведение, стоящее в (1) под знаком предела, легко сосчитать: график его дан на чертеже.



Разность между этим произведением и $x_{a,b}(t-\lambda)$ имеет норму h, равную сумме площадей треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Таким образом, пределом произведения при $h \to 0$ действительно является функция $x_{a,b}(t-\lambda)$.

Теорема 1. *Если максимальный идеал* M *кольца* V *отличен от* M_∞, *то существует такое вещественное число* s, *что для любого* $\mathfrak{z} = \lambda e + x(t) \in V$ *имеет место равенство*

$$\mathfrak{z}(M) = \lambda + \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{ist}\, dt = \mathfrak{z}^\sim(s), \qquad (2)$$

иными словами, M *совпадает с максимальным идеалом* M_s.

Доказательство. Пусть M — максимальный идеал кольца V, отличный от M_∞. Тогда существует функция $z(t) \in L^1$ такая, что $z(M) \neq 0$. Положим $z_\lambda(t) = z(t-\lambda)$. Применение функционала $M(x) = x(M)$ к обеим частям равенства (1) показывает, что

$$\lim_{h \to 0} M\left\{\frac{x_{c,\lambda+h}(t) - x_{c,\lambda}(t)}{h}\right\} = \frac{d}{d\lambda} M(x_{c,\lambda}) = \chi(\lambda) \qquad (3)$$

существует для всех λ, причем

$$\chi(\lambda) = \frac{M(z_\lambda)}{M(z)}, \qquad (4)$$

так что, в частности,

$$\chi(0) = 1. \qquad (5)$$

Так как $\left\|\frac{x_{c,\lambda+h} - x_{c,\lambda}}{h}\right\| = 1$, а $|M(x)| \leqslant \|x\|$, то из формулы (3) следует, что

$$|\chi(\lambda)| \leqslant 1. \qquad (6)$$

Далее, так как $z_{\lambda+\mu} * z = z_\lambda * z_\mu$, то $M(z_{\lambda+\mu}) M(z) = M(z_\lambda) M(z_\mu)$. Деля на $[M(z)]^2$ и принимая во внимание формулу (4), получаем:

$$\chi(\lambda+\mu) = \chi(\lambda)\chi(\mu). \qquad (7)$$

В частности, при $\mu = -\lambda$, учитывая равенство (5), имеем:

$$1 = \chi(\lambda)\chi(-\lambda),$$

откуда, в силу (6), следует, что

$$|\chi(\lambda)| \equiv 1. \qquad (8)$$

Из формулы (4) следует, что функция $\chi(\lambda)$ непрерывна, поскольку z_λ есть непрерывная (по норме) функция от λ (см. доказательство леммы § 16). Но всякая непрерывная функция, удовлетворяющая функциональному уравнению (7) и условию (8), есть функция вида $e^{is\lambda}$, где s — некоторое вещественное число. Следовательно, мы имеем:

$$\chi(\lambda) = e^{is\lambda}.$$

Интегрируя теперь второе из равенств (3) по интервалу $a \leqslant \lambda \leqslant b$ и замечая, что $M(x_{c,b}) - M(x_{c,a}) = M(x_{a,b})$, получаем:

$$x_{a,b}(M) = M(x_{a,b}) = \int_a^b e^{is\lambda}\, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} x_{a,b}(t) e^{ist}\, dt = x_{a,b}^{\sim}(s).$$

Равенство (2) установлено, таким образом, для функций $\mathfrak{z}=x_{a,b}(t)$. Так как эти функции — образующие в V, то оно справедливо и для всех элементов $\mathfrak{z}\in V$, и теорема 1 доказана. Из нее, в силу теорем 3′ и 1 §§ 4 и 6, вытекают:

Следствие 1. *Для того чтобы элемент $\mathfrak{z}=\lambda e+ x(t)\in V$ имел в кольце V обратный, необходимо и достаточно, чтобы выражение*

$$\lambda\left(\lambda+\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{ist}\, dt\right)$$

было отлично от нуля при любом s.

Следствие 2. *Если $X(s)$ есть преобразование Фурье функции $x\in L^1$ и $F(z)$ — аналитическая функция, регулярная на замыкании множества значений функции $X(s)$ и обращающаяся в нуль в точке $z=0$, то $Y(s)=F(X(s))$ также есть преобразование Фурье некоторой функции $y\in L^1$.*

Если вместо теоремы 1 § 6 использовать более сильную теорему 1 § 13 и, отождествляя максимальные идеалы кольца V с соответствующими точками, рассматривать $\hat{V}$ как кольцо функций на прямой $-\infty<s<\infty$, дополненной точкой $s=\infty$, то получится следующий результат:

Следствие 2′. *Если $Y(s)$ ($|s|\leqslant\infty$) — функция, разлагающаяся в окрестности каждой точки s_0 (включая и $s_0=\infty$) в степенной ряд вида*

$$Y(s)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,[X_{s_0}(s)-X_{s_0}(s_0)]^n,$$

где $X_{s_0}(s)\in\hat{V}$, то $Y(s)\in\hat{V}$.

В частности, если $X(s)\in\hat{V}$ не обращается в нуль ни для какого s ($|s|\leqslant\infty$) и полное приращение $\arg X(s)$ при обходе прямой $-\infty<s<\infty$ равно нулю, то в кольце $\hat{V}$ имеется $\ln X(s)$, т. е. функция $Y(s)$, удовлетворяющая уравнению $e^{Y(s)}=X(s)$. Этот факт используется в теории интегральных уравнений (см. также конец § 35). Получить его непосредственно из предшествующего следствия 2 нельзя, так как спектр элемента $X(s)$ может не умещаться ни на каком листе римановой поверхности функции $\ln\zeta$.

Выясним строение пространства $\mathfrak{M}(V)$ максимальных идеалов кольца V. А именно, покажем, что $\mathfrak{M}(V)$ *есть* *проективная прямая*, т. е. гомеоморфно окружности. Проективная прямая получается путем присоединения к вещественной прямой $-\infty < s < \infty$ бесконечно удаленной точки, причем окрестности обыкновенных точек остаются старые, а окрестности бесконечно удаленной точки определяются как множества точек s (включая и саму бесконечно удаленную точку), удовлетворяющих неравенству $|s| > A$, для всевозможных $A > 0$. Мы покажем, что *если отождествить максимальные идеалы M_s с соответствующими точками s вещественной прямой $-\infty < s < \infty$, а максимальный идеал M_∞ — с бесконечно удаленной точкой, то топология, имеющаяся в $\mathfrak{M}(V)$ как в пространстве максимальных идеалов, совпадет с топологией проективной прямой.*

Вследствие бикомпактности проективной прямой, для этого достаточно, в силу теоремы 1′ § 5, доказать, что $\mathfrak{z}(M) = \lambda + x(M)$, рассматриваемые как функции на проективной прямой, непрерывны для всех $\mathfrak{z} = \lambda e + x(t) \in V$. Так как $x(M_s) = x^\sim(s)$, а $x(M_\infty) = 0$, то нужно лишь показать, что преобразование Фурье $x^\sim(s)$ абсолютно интегрируемой функции $x(t)$ непрерывно и стремится к нулю при $|s| \to \infty$. Но этими свойствами обладают преобразования Фурье $x_{a,b}^\sim(s)$ функций $x_{a,b}(t)$, как явствует из равенства

$$x_{a,b}^\sim(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_{a,b}(t)\, e^{ist}\, dt = \int\limits_{a}^{b} e^{ist}\, dt = \frac{e^{isb} - e^{isa}}{is},$$

а так как $x_{a,b}(t)$ являются образующими кольца V, то, принимая во внимание очевидное неравенство $|x^\sim(s)| \leqslant \|x\|$, легко заключаем, что указанными свойствами обладают все функции $x^\sim(s)$.

Основываясь на этом, мы будем отождествлять максимальные идеалы кольца V с соответствующими точками проективной прямой, причем распространим преобразование Фурье функции $x(t) \in L^1$ и на бесконечно удаленную точку, принимая, по определению, $x^\sim(\infty) = 0$.

В теории интеграла Фурье важное значение имеет теорема единственности, согласно которой *абсолютно интегрируемая функция однозначно определяется своим преобразованием Фурье.* В силу теоремы 1 это есть не что иное, как утверждение, что в кольце V нет обобщенных нульстепенных элементов $x(t)\in L^1$, отличных от нуля. Так как элемент $\mathfrak{z}=\lambda e+x(t)$, у которого $\lambda\neq 0$, очевидно, не является обобщенным нульстепенным (ибо $\mathfrak{z}(M_\infty)=\lambda\neq 0$), то мы видим, что *теорема единственности для преобразования Фурье абсолютно интегрируемой функции равносильна теореме об отсутствии радикала в кольце V.* В гл. IV эта теорема будет доказана для широкого класса колец, включающего кольцо V.

Применим полученные результаты к анализу вопроса о разрешимости интегрального уравнения с ядром, зависящим от разности аргументов.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(t)+\lambda\int_{-\infty}^{\infty}k(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau=f(t), \tag{9}$$

где $f(t), k(t)\in L^1(-\infty,\infty)$. Это уравнение можно записать в форме

$$\varphi(t)+\lambda(k*\varphi)(t)=f(t).$$

Предполагая, что $\varphi(t)$ также принадлежит L^1, перейдем от уравнения (9) к соответствующему уравнению на множестве максимальных идеалов; иначе говоря, применим ко всем членам уравнения (9) преобразование Фурье (продолженное и на бесконечно удаленную точку). Мы придем к уравнению

$$\varphi^{\sim}(s)+\lambda k^{\sim}(s)\,\varphi^{\sim}(s)=f^{\sim}(s),$$

или

$$\varphi^{\sim}(s)\,[1+\lambda k^{\sim}(s)]=f^{\sim}(s).$$

Для разрешимости этого уравнения при преобразованиях Фурье $f^{\sim}(s)$ любых функций $f(t)\in L^1$ необходимо и достаточно, чтобы функция $1+\lambda k^{\sim}(s)$ не обращалась в нуль ни для одного вещественного значения s. Действительно, необходимость этого условия очевидна, так как если $1+\lambda k^{\sim}(s_0)=0$, то уравнение (9) неразрешимо при тех $f(t)$, для которых $f^{\sim}(s_0)=0$. Если же условие выполнено, то функция $g(s)=\dfrac{1}{1+\lambda k^{\sim}(s)}$ также есть элемент кольца $\hat{V}$. Выделяя единицу, получаем:

$$\frac{1}{1+\lambda k^{\sim}(s)}=1+Q(s,\lambda),$$

где $Q(s,\lambda)$ есть преобразование Фурье некоторой функции $q(t,\lambda)\in L^1$. В результате имеем:

$$\varphi^{\sim}(s)=\frac{1}{1+\lambda k^{\sim}(s)}f^{\sim}(s)=[1+Q(s,\lambda)]\,f^{\sim}(s)=$$
$$=f^{\sim}(s)+Q(s,\lambda)\,f^{\sim}(s),$$

откуда (в силу теоремы единственности для преобразования Фурье абсолютно интегрируемых функций)

$$\varphi(t) = f(t) + \int_{-\infty}^{\infty} q(t-\tau, \lambda) f(\tau)\, d\tau. \tag{10}$$

Таким образом, *если функция* $k^{\sim}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t) e^{ist}\, dt$ *не принимает значения* $-\frac{1}{\lambda}$, *то уравнение* (9) *разрешимо и формула для его решения имеет вид* (10), *где* $q(t, \lambda)$ — *функция, снова абсолютно интегрируемая по* t. Мы получили основной результат теории интегральных уравнений на прямой с ядром, зависящим от разности.

Рассмотрим теперь подкольцо V_+ кольца V, получаемое путем присоединения единицы к кольцу L^1_+ тех функций из $L^1(-\infty, \infty)$, которые равны нулю для всех $t < 0$. Это кольцо играет роль в вопросах, связанных с преобразованием Лапласа. Найдем максимальные идеалы кольца V_+.

L^1_+ составляет в V_+ максимальный идеал; мы его по-прежнему обозначим через M_∞. Пусть M — максимальный идеал кольца V_+, отличный от M_∞. Так как операция $x(t) \to x(t-\lambda)$ определена на всем кольце L^1_+ лишь для значений $\lambda \geqslant 0$, то рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1, показывают, что функция

$$\chi(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} M(x_0, \lambda)$$

существует и непрерывна для всех $\lambda \geqslant 0$ и удовлетворяет (для этих λ) условиям

$$|\chi(\lambda)| \leqslant 1$$

и

$$\chi(\lambda + \mu) = \chi(\lambda)\chi(\mu).$$

Отсюда следует, что

$$\chi(\lambda) = e^{is\lambda},$$

где s может быть теперь любым комплексным числом с неотрицательной мнимой частью, и так же, как в конце доказательства теоремы 1, получаем:

$$(\lambda e + x)(M) = \lambda + \int_{0}^{\infty} x(t) e^{ist}\, dt$$

для всех $\lambda e + x \in V_+$. Легко видеть, что, и обратно, отображение

$$\lambda e + x \to \lambda + \int_0^\infty x(t)\, e^{ist}\, dt$$

при любом s с $\mathfrak{J}s \geqslant 0$ является гомоморфизмом кольца V_+ в тело комплексных чисел и определяет, следовательно, некоторый максимальный идеал M_s кольца V_+; при этом если $s_1 \neq s_2$, то $M_{s_1} \neq M_{s_2}$, и все $M_s \neq M_\infty$. Таким образом, множество максимальных идеалов кольца V_+ можно отождествить с полуплоскостью $\mathfrak{J}s \geqslant 0$, дополненной «несобственной» точкой (соответствующей максимальному идеалу M_∞).

Предоставляем читателю сформулировать для кольца V_+ аналоги следствий 1, 2 и 2′ теоремы 1 и доказать гомеоморфизм пространства $\mathfrak{M}(V_+)$ с полуплоскостью $\mathfrak{J}s \geqslant 0$, расширенной до бикомпакта путем присоединения бесконечно удаленной точки.

§ 18. Кольца абсолютно интегрируемых функций с весом

Почти не изменяя рассуждений, проведенных в предыдущих двух параграфах, можно существенно обобщить полученные там результаты.

Пусть $\alpha(t)$ — положительная функция, определенная и непрерывная для всех вещественных значений t и удовлетворяющая условию

$$\alpha(t_1 + t_2) \leqslant \alpha(t_1)\, \alpha(t_2), \tag{1}$$

каковы бы ни были t_1 и t_2.

Повторяя с надлежащими модификациями рассуждения, проведенные в § 16, убедимся в том, что совокупность $L^{\langle\alpha\rangle}$ всех измеримых комплексных функций $x(t)$ $(-\infty < t < \infty)$, для которых

$$\|x\| = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, \alpha(t)\, dt < \infty,$$

образует нормированное кольцо с обычными линейными операциями и свертыванием

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau$$

в качестве умножения, причем в этом кольце нет единицы. Нормированное кольцо, получающееся из $L^{\langle\alpha\rangle}$ путем присоединения единицы, мы обозначим через $V^{\langle\alpha\rangle}$.

Максимальный идеал кольца $V^{\langle\alpha\rangle}$, образованный всеми функциями из $L^{\langle\alpha\rangle}$, мы обозначим через M_∞. Разысканию остальных максимальных идеалов предпошлем следующие замечания относительно «весовой функции» $\alpha(t)$.

Вместе с $\alpha(t)$ также $\alpha(-t)$ удовлетворяет условию (1). Применяя к функциям $\ln\alpha(t)$ и $\ln\alpha(-t)$ рассуждения, аналогичные проведенным в сноске на стр. 27—28, можно показать, что

$$\tau_1 = \sup_{t>0} \frac{\ln\alpha(t)}{-t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln\alpha(t)}{-t} \tag{2}$$

и

$$\tau_2 = \inf_{t>0} \frac{\ln\alpha(-t)}{t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln\alpha(-t)}{t}. \tag{3}$$

При этом, так как из (1) следует, что $\frac{\ln\alpha(t)}{-t} \leqslant \frac{\ln\alpha(-t)}{t} - \frac{\ln\alpha(0)}{t}$ для всех $t>0$, то

$$-\infty < \tau_1 \leqslant \tau_2 < +\infty. \tag{4}$$

Пусть теперь M — максимальный идеал кольца $V^{\langle\alpha\rangle}$, отличный от M_∞. Легко видеть, что операция $x(t) \to x_\lambda(t) = x(t-\lambda)$ определена в $L^{\langle\alpha\rangle}$ для всех вещественных λ, причем лемма § 17 сохраняет силу и x_λ есть непрерывная (по норме) функция от λ. Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1 § 17, приходим к заключению, что функция

$$\chi(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} M(x_{c,\lambda}) = \lim_{h\to 0} M\left\{\frac{x_{c,\lambda+h} - x_{c,\lambda}}{h}\right\} \qquad (c<\lambda)$$

существует для всех вещественных λ, непрерывна и удовлетворяет условиям

$$\chi(\lambda+\mu) = \chi(\lambda)\chi(\mu) \tag{5}$$

и

$$|\chi(\lambda)| \leqslant \alpha(\lambda), \tag{6}$$

последнее из которых вытекает из того, что

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{x_{c,\lambda+h} - x_{c,\lambda}}{h}\right\| = \alpha(\lambda).$$

Из (5) и непрерывности функции $\chi(\lambda)$ следует, что

$$\chi(t) = e^{izt},$$

где $z = \sigma + i\tau$ — некоторое фиксированное комплексное число. Неравенство (6) показывает, что

$$e^{-\tau t} \leqslant \alpha(t) \tag{7}$$

для всех вещественных значений t или, что то же,

$$\frac{\ln\alpha(t)}{-t} \leqslant \tau \leqslant \frac{\ln\alpha(-t)}{t}$$

для всех $t > 0$. Принимая во внимание формулы (2) — (3), заключаем, что

$$\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2. \tag{8}$$

Итак, z лежит в полосе конечной (в силу (4)) ширины, определяемой неравенствами (8), и так же, как в конце доказательства теоремы 1 § 17, получаем:

$$(\lambda e + x)(M) = \lambda + \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{izt}\, dt \tag{9}$$

для всех $\lambda e + x \in V^{\langle\alpha\rangle}$, причем интеграл в (9) абсолютно сходится в силу неравенства (7).

Обратно, ставя каждому элементу $\lambda e + x \in V^{\langle\alpha\rangle}$ в соответствие число, выражаемое правой частью формулы (9), где $z = \sigma + i\tau$ — любая фиксированная точка полосы $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$, мы получаем гомоморфное отображение кольца $V^{\langle\alpha\rangle}$ в тело комплексных чисел, определяющее, следовательно, максимальный идеал этого кольца.

Таким образом, максимальные идеалы $M \neq M_\infty$ заполняют полосу $\tau_1 \leqslant \mathfrak{J}z \leqslant \tau_2$; максимальный идеал M_∞ замыкает ее до бикомпактного пространства. Очевидно, имеют место предложения, аналогичные следствиям 1, 2 и 2′ теоремы 1 § 17.

Рассмотрим теперь совокупность $L_+^{\langle\alpha\rangle}$ всех измеримых комплексных функций $x(t)$ $(0 \leqslant t < \infty)$, удовлетворяющих условию

$$\|x\| = \int_0^\infty |x(t)|\, \alpha(t)\, dt < \infty,$$

где $\alpha(t)$ — положительная непрерывная функция, определенная только для $t \geqslant 0$ и удовлетворяющая условию (1) для этих значений t. Эта совокупность образует нормированное кольцо с обычными линейными операциями и умножением, определенным по формуле

$$(x * y)(t) = \int_0^t x(t - \tau)\, y(\tau)\, d\tau.$$

Нормированное кольцо, получаемое путем присоединения к $L_+^{\langle\alpha\rangle}$ единицы, мы обозначим через $V_+^{\langle\alpha\rangle}$.

Те же рассуждения, с помощью которых мы нашли максимальные идеалы кольца $V^{\langle\alpha\rangle}$, приводят здесь к следующему результату: *множество максимальных идеалов кольца $V_+^{\langle\alpha\rangle}$ представляет собой полуплоскость $\mathfrak{J}z \geqslant \tau_1 = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln \alpha(t)}{-t}$, которая естественным образом замыкается до бикомпактного пространства максимальным идеалом $M_\infty = L_+^{\langle\alpha\rangle}$.* Заметим, что здесь уже не исключена возможность того, что $\tau_1 = +\infty$ (осуществляющаяся, например, при $\alpha(t) = t^{-t}$); тогда полуплоскость $\mathfrak{J}z \geqslant \tau_1$ вырождается и M_∞ остается единственным максимальным идеалом кольца $V_+^{\langle\alpha\rangle}$; в этом случае те и только те элементы $\lambda e + x \in V_+^{\langle\alpha\rangle}$ имеют обратный, для которых $\lambda \neq 0$.

Мы применим этот результат к выводу следующей теоремы тауберова типа:

Пусть $\alpha(t)$ — положительная непрерывная функция, определенная для всех $t \geqslant 0$ и удовлетворяющая условию (1), *$F(t)$ — функция, измеримая и ограниченная на каждом конечном интервале положительной оси. Пусть $x_0(t) \in L_+^{\langle\alpha\rangle}$ такова, что*

$$\int_0^\infty x_0(t)\, e^{izt}\, dt \neq -1 \tag{10}$$

для всех $z = \sigma + i\tau$ с $\tau \geqslant \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln \alpha(t)}{-t}$, и

$$\left(F(t) + \int_0^t x_0(t-s)\, F(s)\, ds \right) \alpha(t) \to 0 \text{ при } t \to \infty. \tag{11}$$

Тогда также

$$F(t)\, \alpha(t) \to 0 \text{ при } t \to \infty.$$

Доказательство. Каждому элементу $\mathfrak{z} = \lambda e + x(t) \in V_+^{\langle\alpha\rangle}$ отвечает операция $\mathfrak{z}*$, переводящая любую измеримую и ограниченную на каждом конечном интервале функцию $\Phi(t)$ $(0 \leqslant t < \infty)$ в функцию

$$\mathfrak{z} * \Phi(t) = \lambda \Phi(t) + \int_0^t x(t-s)\, \Phi(s)\, ds,$$

также измеримую и ограниченную на каждом конечном интервале. Очевидно, $\mathfrak{z}_1 * (\mathfrak{z}_2 * \Phi(t)) = (\mathfrak{z}_1 * \mathfrak{z}_2) * \Phi(t)$. В пределах кольца $V_+^{\langle\alpha\rangle}$ операция $\mathfrak{z}*$ есть операция умножения на $\mathfrak{z}$. Легко показать, что из $\Phi(t)\, \alpha(t) \to 0$ (при $t \to \infty$) вытекает, что $(\mathfrak{z} * \Phi(t))\, \alpha(t) \to 0$ (при $t \to \infty$) для любого $\mathfrak{z} \in V_+^{\langle\alpha\rangle}$. По условию (10), элемент $e + x_0$ не принадлежит ни одному максимальному идеалу кольца $V_+^{\langle\alpha\rangle}$ и, значит, имеет в $V_+^{\langle\alpha\rangle}$ обратный. Далее, условие (11) может быть переписано в виде $[(e + x_0) * F(t)]\, \alpha(t) \to 0$. Но тогда, согласно сказанному выше, и

$$(e + x_0)^{-1} * [(e + x_0) * F(t)]\, \alpha(t) =$$
$$= [(e + x_0)^{-1} * (e + x_0)] * F(t)\, \alpha(t) = F(t)\, \alpha(t) \to 0,$$

что мы и утверждали.

Эта теорема для частного случая $\alpha(t) \equiv 1$ была впервые установлена Палеем и Винером ([37], стр. 59—60).

§ 19. Дискретные аналоги колец абсолютно интегрируемых функций

В § 16 были рассмотрены кольца абсолютно интегрируемых функций V, V_+ и $I(0, T)$, в которых умножение задавалось как свертывание по формуле

(а) $(x * y)(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau$ в кольце V;

(б) $(x * y)(t) = \int\limits_{0}^{\infty} x(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau = \int\limits_{0}^{t} x(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau$

в кольце V_+;

(в) $(x * y)(t) = \int\limits_{0}^{T} x(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau = \int\limits_{0}^{t} x(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau$

$(0 \leqslant t \leqslant T)$ в кольце $I(0, T)$.

В этом параграфе мы рассмотрим дискретные аналоги колец V, V_+ и $I(0, T)$ (а также колец $V^{\langle\alpha\rangle}$ и $V_+^{\langle\alpha\rangle}$ § 18).

Вместо функций $x(t)$ континуального аргумента t мы будем рассматривать функции a_n целочисленного аргумента n, меняющегося в первом случае от $-\infty$ до $+\infty$, во втором — от 0 до $+\infty$ и в третьем — от 0 до m. В качестве нормы возьмем, естественно, величину

$$\|x\| = \sum_n |a_n|,$$

где сумма распространена на соответствующее множество значений n. Умножение будем задавать формулами, аналогичными формулам (а) — (в):

(а′) $\quad a_n * b_n = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k} b_k;$

(б′) $\quad a_n * b_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{n-k} b_k = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k;$

(в′) $\quad a_n * b_n = \sum\limits_{k=0}^{m} a_{n-k} b_k = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k \quad (0 \leqslant n \leqslant m).$

Кольцо последовательностей (a_n) $(-\infty < n < \infty)$ с умножением по формуле (а′), очевидно, изоморфно кольцу W

абсолютно сходящихся рядов Фурье; изоморфизм осуществляется соответствием

$$(a_n) \to \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}.$$

Кольцо конечных последовательностей (a_n) $(0 \leqslant n \leqslant m)$ с умножением по формуле (в′) изоморфно кольцу $I^{(m)}$ примера 4° § 1.

Кольцо последовательностей (a_n) $(0 \leqslant n < \infty)$ с умножением по формуле (б′) мы обозначим через W_+. Оно не встречалось нам ранее.

Иногда удобно представлять себе кольца W, W_+, $I^{(m)}$ как кольца формальных степенных рядов: $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n X^n$ (кольцо W), $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ (кольцо W_+), $\sum\limits_{n=0}^{m} a_n X^n$ (кольцо $I^{(m)}$). При такой записи операция умножения превращается в обычную операцию умножения степенных рядов (в последнем случае — с условием, что $X^p = 0$ при $p > m$).

Найдем максимальные идеалы кольца W_+.

Пусть элемент X кольца W_+ при каноническом гомоморфном отображении $W_+ \to W_+/M$ переходит в комплексное число ζ. В силу условия ж) § 4 имеем: $|\zeta| \leqslant \|X\| = 1$, и $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ переходит в $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$. Обратно, всякое отображение $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n X^n \to \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$ с $|\zeta| \leqslant 1$ есть, очевидно, гомоморфизм кольца W_+ в тело комплексных чисел. Таким образом, множеством максимальных идеалов кольца W_+ служит круг $|\zeta| \leqslant 1$ комплексной плоскости; при этом $x(M) = x(\zeta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$. И так как отсюда следует, что $x(M) = 0$ лишь если $x = 0$, то заключаем, что W_+ изоморфно кольцу аналитических функций, обладающих тейлоровским разложением, абсолютно сходящимся в круге $|\zeta| \leqslant 1$.

W_+ можно рассматривать также как подкольцо кольца W, образованное теми элементами последнего, у которых все a_n с $n < 0$ равны нулю. Напомним, что множеством максимальных идеалов кольца W служит окружность $\zeta = e^{it}$ $(0 \leqslant t < 2\pi)$. Таким образом, при переходе от W к W_+ множество максимальных идеалов расширяется путем присоединения всех внутренних точек круга $|\zeta| \leqslant 1$.

Аналогичный процесс мы наблюдали и при переходе от кольца V к его подкольцу V_+: к прямой $-\infty < s < \infty$ (пополненной бесконечно удаленной точкой) присоединились все точки верхней полуплоскости.

Перейдем к аналогам колец $V^{\langle\alpha\rangle}$ и $V_+^{\langle\alpha\rangle}$ § 18.

Пусть α_n — положительная функция целочисленного аргумента n $(-\infty < n < \infty)$, удовлетворяющая условию

$$\alpha_{k+l} \leqslant \alpha_k \alpha_l. \tag{1}$$

Тому же условию удовлетворяет тогда и $\alpha'_n = \alpha_{-n}$. Применяя к α_n и α_{-n} результаты, выведенные в сноске на стр. 27—28, получаем:

$$\rho_1 = \sup_{n>0} \frac{1}{\sqrt[n]{\alpha_{-n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\alpha_{-n}}},$$

$$\rho_2 = \inf_{n>0} \sqrt[n]{\alpha_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\alpha_n},$$

причем, так как из (1) следует, что $\dfrac{1}{\sqrt[n]{\alpha_{-n}}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt[n]{\alpha_0}} \sqrt[n]{\alpha_n}$ для всех $n > 0$, то

$$(0 <)\, \rho_1 \leqslant \rho_2 \,(< +\infty).$$

Обозначим через $W^{\langle\alpha\rangle}$ совокупность всех формальных рядов $x = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n X^n$, для которых

$$\|x\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| \alpha_n < \infty. \tag{2}$$

Из (1) следует, что $W^{\langle\alpha\rangle}$ вместе с каждыми двумя содержащимися в нем рядами $x = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k X^k$ и $y = \sum\limits_{l=-\infty}^{\infty} b_l X^l$ содержит также их формальное произведение

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m X^m = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{m-l} b_l \right) X^m,$$

причем

$$\|xy\| = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{m-l} b_l \right| \alpha_m \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |a_{m-l}| \alpha_{m-l} |b_l| \alpha_l =$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} |a_{m-l}| \alpha_{m-l} \right) |b_l| \alpha_l = \|x\| \, \|y\|.$$

Таким образом, $W^{\langle\alpha\rangle}$ есть нормированное кольцо относительно обычных операций над степенными рядами.

Пусть M — максимальный идеал кольца $W^{\langle\alpha\rangle}$ и $X(M) = \zeta = \rho e^{i\varphi}$. Тогда $X^n(M) = \rho^n e^{in\varphi}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, и так как $\|X^n\| = \alpha_n$, то $\rho^n \leqslant \alpha_n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, откуда

$$\rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2. \tag{3}$$

Таким образом, для любого $x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n X^n \in W^{\langle\alpha\rangle}$ имеем:

$$x(M) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \zeta^n, \tag{4}$$

где $\zeta = \rho e^{i\varphi}$ — точка кругового кольца, определяемого неравенствами (3).

Обратно, ставя каждому элементу $x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n X^n \in W^{\langle\alpha\rangle}$ в соответствие сумму ряда (4), где $\zeta = \rho e^{i\varphi}$ — любая фиксированная точка кругового кольца (3), мы получаем гомоморфное отображение кольца $W^{\langle\alpha\rangle}$ в тело комплексных чисел, определяющее тем самым максимальный идеал этого кольца.

Таким образом, $W^{\langle\alpha\rangle}$ имеет множеством своих максимальных идеалов область (3) и изоморфно кольцу тех аналитических внутри нее функций, у которых ряд Лорана (4) удовлетворяет условию (2).

При $\rho_1 = \rho_2$ круговое кольцо (3) вырождается в окружность, необходимым и достаточным условием для чего является, очевидно, выполнение равенства

$$\inf_{n>0} \sqrt[n]{\alpha_n} \cdot \inf_{n>0} \sqrt[n]{\alpha_{-n}} = 1.$$

Если оба множителя в левой части сами равны 1, то $\rho_1 = \rho_2 = 1$ и $W^{\langle\alpha\rangle}$ представляется в виде кольца рядов Фурье $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\varphi}$, абсолютно сходящихся с весом α_n.

Рассмотрим теперь совокупность $W_+^{\langle\alpha\rangle}$ всех формальных степенных рядов $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n X^n$, удовлетворяющих условию

$$\|x\| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \alpha_n < \infty, \tag{5}$$

где α_n — положительная функция от n, определенная только для целых $n \geqslant 0$ и удовлетворяющая условию (1) только для таких значений k и l. Эта совокупность образует нормированное кольцо относительно обычных операций над степенными рядами, и совершенно так же, как выше, можно показать, что это кольцо $W_+^{\langle\alpha\rangle}$ изоморфно кольцу всех функций комплексного переменного, аналитических внутри круга $|\zeta| \leqslant \rho_2 = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n}$, ряд Тэйлора $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$ которых удовлетворяет условию (5). Впрочем, в отличие от случая кольца $W^{\langle\alpha\rangle}$, здесь не исключена возможность того, что $\rho_2 = 0$; в этом (и только этом) случае $W_+^{\langle\alpha\rangle}$ есть кольцо с одним максимальным идеалом.

Предоставляем читателю сформулировать для колец W_+, $W^{\langle\alpha\rangle}$ и $W_+^{\langle\alpha\rangle}$ аналоги следствий 1, 2 и 2′ теоремы 1 § 17.

Б. С. Митягин [34′] дал полное описание пространств максимальных идеалов n-мерных аналогов колец $W_+^{\langle\alpha\rangle}$ (как замкнутых n-кратно круговых областей n-мерного комплексного пространства, являющихся замыканиями областей регулярности).

ГЛАВА IV

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА КОММУТАТИВНЫХ ЛОКАЛЬНО БИКОМПАКТНЫХ ГРУППАХ

В § 16 было рассмотрено кольцо V, полученное путем формального присоединения единицы к кольцу L^1 всех абсолютно интегрируемых измеримых комплексных функций на вещественной прямой, с нормой $\|x\| = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,dt$ и умножением («свертыванием»)

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau.$$

Мы нашли, что максимальные идеалы кольца V, отличные от L^1, можно поставить во взаимно однозначное соответствие с точками прямой $-\infty < s < \infty$ так, что для максимального идеала M_s, соответствующего точке s,

$$x(M_s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{ist}\,dt = x^{\sim}(s). \tag{1}$$

Тем самым было обнаружено, что преобразование Фурье $x^{\sim}(s)$ абсолютно интегрируемой функции $x(t)$ можно трактовать как каноническое представление ее в виде функции $x(M)$ на максимальных идеалах кольца V.

При определении кольца V мы пользовались лишь тем, что на вещественной прямой имеется мера, инвариантная относительно сдвигов (мера Лебега). Как показал Хаар [51] (см. также [3]), мера, обладающая этим свойством, существует на любой локально компактной группе со второй аксиомой счетности; а впоследствии этот результат был распространен А. Вейлем [8] на все локально бикомпактные группы. Для любой такой коммутативной группы G естественным аналогом кольца V является кольцо $V(G)$ всех комплексных функций $x(g)$ $(g \in G)$, измеримых и абсолютно интегрируемых относительно меры Хаара, со свертыванием

$$(x * y)(g) = \int x(g-h)\, y(h)\, dh\, ^{*})$$

в качестве умножения и с присоединенной в случае надобности единицей. Возникает вопрос: будет ли каноническое представление $x(g)$ как функции на максимальных идеалах кольца $V(G)$ записываться в виде интеграла типа (1) и что будет служить здесь аналогом функций e^{ist}?

Доказательство того, что свертыванию функций $x(t)$ отвечает перемножение их преобразований Фурье, основывается лишь на следующем свойстве функций e^{ist}: $e^{is(u+v)} = e^{isu}e^{isv}$. Кроме того, само существование интеграла (1) для всех $x \in L^1$ основывается на ограниченности функций e^{ist}, именно, $|e^{ist}| \equiv 1$. Отмеченные свойства в соединении с непрерывностью функций e^{ist} выражают, что эти функции являются характерами аддитивной топологической группы вещественных чисел.

Вообще, *характером* коммутативной топологической группы G называют, по Понтрягину **), гомоморфное отображение этой группы в группу К всех вращений окружности, топологизированную естественным образом. Группу К можно представлять аналитически и как аддитивную группу вещественных чисел, приведенных по модулю 2π, и как мультипликативную группу комплексных чисел, равных по абсолютной величине единице. При аддитивной трактовке группы К характер χ группы G задается в виде непрерывной функции $\chi(g)$ аргумента $g \in G$, принимающей вещественные значения, приведенные по модулю 2π, и удовлетворяющей условию

$$\chi(g+h) = \chi(g) + \chi(h) \pmod{2\pi}$$

---

*) Мы пользуемся аддитивной записью групповой операции в G. Всюду, где при интеграле не указана область интегрирования, предполагается, что ею служит вся группа G.

**) Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, изд. 2-е, перераб. и дополн., М., 1954, определение 36.

(«аддитивный характер»). При мультипликативной трактовке группы $\mathbf{K}$ характер χ задается в виде непрерывной комплексной функции $e^{i\chi(g)}$, очевидно, удовлетворяющей условиям

$$e^{i\chi(g+h)} = e^{i\chi(g)}e^{i\chi(h)}, \qquad |e^{i\chi(g)}| \equiv 1.$$

Итак, мы можем ожидать, что между максимальными идеалами кольца $V(G)$ (отличными от совокупности $L^1(G)$ всех абсолютно интегрируемых измеримых функций, если она не содержит единицы относительно свертывания) и характерами группы G имеется взаимно однозначное соответствие такое, что для максимального идеала M_χ, соответствующего характеру χ,

$$x(M_\chi) = \int x(g)\, e^{i\chi(g)}\, dg = x^{\sim}(\chi).$$

Это позволит нам трактовать преобразование Фурье $x^{\sim}(\chi)$ абсолютно интегрируемой функции $x(g)$ как ее каноническое представление в виде функции на максимальных идеалах кольца $V(G)$. При этом мы не будем предполагать заранее известным существование нетривиальных характеров у произвольной коммутативной локально бикомпактной группы G. Мы построим их с помощью максимальных идеалов кольца $V(G)$ и докажем, что их имеется достаточно много.

На этой базе будет получено далее основное предложение гармонического анализа — теорема Планшереля, которая позволит затем дать чисто аналитическое доказательство понтрягинского закона двойственности для коммутативных локально бикомпактных групп. В заключение будут рассмотрены положительно определенные функции, также играющие важную роль в гармоническом анализе.

§ 20. Групповое кольцо коммутативной локально бикомпактной группы

Во всем дальнейшем G будет обозначать (произвольную) коммутативную локально бикомпактную группу; (B) — тело всех борелевских множеств на G, т. е. наименьшее семейство множеств в G, содержащее все замкнутые множества и инвариантное относительно операций дополнения и счетного объединения (а следовательно, и счетного пересечения).

На теле (B) существует ***мера Хаара***, т. е. вполне аддитивная функция множества $m(E) \geqslant 0$, конечная для всех бикомпактных множеств, отличная от нуля для всех открытых множеств и *инвариантная относительно сдвигов*:

$$m(E+g) = m(E) \quad \text{для всех} \quad E \in (B) \text{ и } g \in G.$$

Эта мера обычным образом распространяется (с сохранением инвариантности) на все *измеримые* относительно нее множества, причем мера каждого такого множества (и в частности, каждого множества из (B)) совпадает с нижней гранью мер содержащих его открытых множеств и верхней гранью мер содержащихся в нем бикомпактных множеств (*регулярность* меры Хаара). Наконец, мера Хаара на G также *инвариантна относительно отражения*: для всех измеримых множеств $E \subset G$ имеем:

$$m(-E) = m(E).$$

Таким образом, мера Хаара на G обладает всеми основными свойствами меры Лебега на прямой (и совпадает с этой последней мерой, когда в качестве G взята аддитивная топологическая группа вещественных чисел).

В дальнейшем под измеримостью или интегрируемостью функции на G будет пониматься всегда измеримость или интегрируемость относительно меры Хаара. $L^p(G)$ $(p \geqslant 1)$ будет означать пространство всех измеримых комплексных функций $x(g)$ на G, удовлетворяющих условию

$$\|x\|_p = \left(\int |x(g)|^p \, dg\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \tag{1}$$

где интегрирование производится по мере Хаара и областью интегрирования служит вся группа G. $L^p(G)$, наделенное нормой (1), есть банаховское пространство. При $p=1$ мы вместо $\|x\|_1$ пишем просто $\|x\|$. Под $L^{1,2}(G)$ будет пониматься $L^1(G) \cap L^2(G)$.

Из инвариантности меры относительно сдвигов следует такая же *инвариантность интеграла*:

$$\int x(g+h)\, dg = \int x(g)\, dg \quad \text{для всех} \quad x \in L^1(G) \quad \text{и} \quad h \in G.$$

Точно так же из инвариантности меры относительно отражения следует *инвариантность интеграла относительно отражения*:

$$\int x(-g)\,dg = \int x(g)\,dg \quad \text{для всех } x \in L^1(G).$$

Носителем функции на топологическом пространстве называют замыкание множества тех точек, где она отлична от нуля; *финитными* функциями — функции с бикомпактным носителем. Непрерывные финитные функции на G образуют векторное пространство; мы будем обозначать его $L(G)$. Оно содержится как всюду плотное подмножество в каждом пространстве $L^p(G)$ $(p \geqslant 1)$.

Каждый элемент $g_0 \in G$ порождает *оператор сдвига* T_{g_0}:

$$T_{g_0}x(g) = x(g - g_0).$$

Из инвариантности интеграла следует, что если $x \in L^p(G)$, то $T_h x \in L^p(G)$ для каждого $h \in G$ и $\|T_h x\| = \|x\|$. При этом, каково бы ни было $x \in L^p(G)$,

$$\|T_h x - x\|_p \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0; \tag{2}$$

иными словами, *для всякого* $\varepsilon > 0$ *существует окрестность* U *нуля группы* G *такая, что*

$$\int |x(g-h) - x(g)|^p\,dg < \varepsilon \quad \textit{для всех} \quad h \in U \tag{2'}$$

(*абсолютная непрерывность* интеграла по мере Хаара) *).

Теорема 1. *Если x и $y \in L^1(G)$, то интеграл*

$$(x * y)(g) = \int x(g-h)\,y(h)\,dh \tag{3}$$

существует почти для всех g и также принадлежит $L^1(G)$, причем

$$\|x * y\| \leqslant \|x\|\,\|y\|$$

и операция свертывания $*$, определенная формулой (3), *билинейна, ассоциативна и коммутативна.*

---

*) См. доказательство леммы § 16. Доказательство существования интеграла и меры Хаара и обоснование всех перечисленных их свойств можно найти в [8], [31] или [36], аксиоматическое исследование меры Хаара — в [43].

Доказательство. С помощью меры Хаара m, заданной на G, можно построить вполне аддитивную меру μ (также меру Хаара) на $G \times G$, однозначно определенную следующим свойством: для любого «прямоугольника» $X \times Y$, где X, $Y \in (B)$, имеет место равенство $\mu(X \times Y) = m(X) m(Y)$. Можно показать, что $x(g-h)$, а значит и $x(g-h) y(h)$, измерима как функция точки $(g, h) \in G \times G$ относительно меры μ. Тем самым к $x(g-h) y(h)$ применима теорема Фубини, и мы можем поэтому слово в слово повторить доказательство, данное в § 16 (крупным шрифтом) рассматриваемой теореме для случая, когда G есть аддитивная топологическая группа вещественных чисел*).

Теорема 1 показывает, что $L^1(G)$ *является коммутативным нормированным кольцом со свертыванием в качестве умножения.*

Если группа G дискретна, то, очевидно, все одноточечные множества имеют одну и ту же конечную меру $\rho > 0$. При этом без ограничения общности можно считать, что $\rho = 1$ (ибо этого можно добиться надлежащим «нормированием» меры Хаара на G, а именно, делением меры каждого множества на ρ). Тогда интеграл функции $x(g) \in L^1(G)$ оказывается просто суммой всех ее значений, так что $L^1(G)$ есть не что иное, как пространство $l^1(G)$ всех «абсолютно суммируемых» функций $x(g)$, т. е. комплексных функций на G, отличных от нуля не более чем на счетном множестве точек и таких, что

$$\|x\| = \sum_{g \in G} |x(g)| < \infty.$$

Свертывание же функций x, $y \in l^1(G)$ производится по формуле

$$(x * y)(g) = \sum_{h \in G} x(g-h) y(h).$$

$l^1(G)$ содержит «δ-функции», т. е. неотрицательные вещественные функции с нормой 1, весь интеграл от которых сосредоточен в одной точке; это просто функции

$$e_{g_0}(g) = \begin{cases} 1 & \text{при } g = g_0, \\ 0 & \text{при } g \neq g_0. \end{cases}$$

*) Доказательство, не опирающееся на теорему Фубини, напечатанное в § 16 мелким шрифтом, при небольшом видоизменении также оказывается пригодным в рассматриваемом общем случае.

Умножение на $e_{g_0}(g)$ в кольце $l^1(G)$ равносильно сдвигу на g_0:

$$T_{g_0}x = x * e_{g_0} \quad \text{для всех} \quad x \in l^1(G). \tag{4}$$

В частности, $e_0(g)$ есть единица кольца $l^1(G)$. Таким образом, *если группа G дискретна, то $L^1(G)$ есть кольцо с единицей.*

В случае, когда группа G недискретна, все ее одноточечные множества имеют меру 0, ибо иначе ее бесконечные бикомпактные множества (необходимо имеющиеся в недискретной локально бикомпактной группе) не могли бы обладать конечной мерой. Поэтому $L^1(G)$ не может уже содержать δ-функций. Действительно, интеграл от δ-функции, взятый по любой окрестности той точки g_0, в которой эта δ-функция сосредоточена, должен был бы равняться 1; но так как множество, образованное этой точкой, имеет меру 0, мера же Хаара регулярна, то существует последовательность окрестностей точки g_0, меры которых стремятся к нулю, а тогда и интегралы по ним от любой функции из $L^1(G)$ должны стремиться к нулю.

В том (общем) случае, когда группа G недискретна, роль δ-функций будут играть «δ-последовательности», стягивающиеся к элементам этой группы. Условимся под $e_A(g)$, где A — измеримое множество положительной меры, понимать (любую) функцию из $L^1(G)$, удовлетворяющую условиям:

1° $e_A(g) \geqslant 0$ для всех $g \in G$;

2° $e_A(g) = 0$ для всех $g \notin A$;

3° $\|e_A\| = 1$.

Примером такой функции может служить $\dfrac{f_A(g)}{m(A)}$, где $f_A(g)$ — характеристическая функция множества A конечной положительной меры $m(A)$.

Определение 1. Пусть g_0 — фиксированный элемент группы G, $\{U\}$ — фундаментальная система окрестностей нуля и каждому $U \in \{U\}$ отнесена функция $e_{g_0+U}(g)$. Мы будем говорить тогда, что эти функции образуют *δ-последовательность, стягивающуюся к элементу* g_0.

В пояснение этого термина заметим, что если G обладает счетной фундаментальной системой окрестностей нуля $\{U_n\}$, то функции $e_{g_0+U_n}(g)$ действительно образуют последовательность в обычном смысле этого слова. В общем же случае множество $\{U\}$, частично упорядоченное отношением включения $\supset$, есть *направленное* множество (т. е. для любых U_1, $U_2 \in \{U\}$ существует $U_3 \in \{U\}$ такое, что $U_1 \supset U_3$ и $U_2 \supset U_3$) и функции $e_{g_0+U}(g)$ образуют *обобщенную последовательность*.

Как известно, понятие предела непосредственно переносится на обобщенные последовательности (предел в смысле Шатуновского [55] и Мура — Смита [35]). В частности, число a будет называться пределом числовой обобщенной последовательности f_U, аргумент U которой пробегает фундаментальную систему окрестностей нуля $\{U\}$ группы G, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $U_\varepsilon \in \{U\}$ такое, что $|f_U - a| < \varepsilon$ для всех $U \in \{U\}$, содержащихся в U_ε. Для обозначения этого мы будем употреблять запись $\lim\limits_{U \to 0} f_U = a$.

Фундаментальную роль в дальнейшем будет играть следующая лемма, устанавливающая соотношение, заменяющее для недискретной группы G формулу (4).

Л е м м а. *Пусть $\{e_{g_0+U}\}$ — произвольная δ-последовательность, стягивающаяся к элементу $g_0 \in G$. Тогда, каково бы ни было $x \in L^1(G)$,*

$$\lim_{U \to 0} \|T_{g_0}x - x * e_{g_0+U}\| = 0, \tag{4'}$$

причем предельное соотношение (4′) *при каждом заданном $x \in L^1(G)$ выполняется равномерно для всех δ-последовательностей $\{e_{g_0+U}\}$ и всех $g_0 \in G$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (2′), для каждого $\varepsilon > 0$ существует окрестность нуля U_ε такая, что $\int |x(g) - x(g-h)|\, dg < \varepsilon$ для всех $h \in U_\varepsilon$. Делая подстановки $g \to g + g_0$ и $h \to h + g_0$, применяя теорему Фубини и замечая, что $e_{g_0+U}(h+g_0)$ есть $e_U(h)$, получаем:

$$\|T_{g_0}x - x * e_{g_0+U}\| =$$
$$= \int \left| \int [x(g-g_0) - x(g-h)]\, e_{g_0+U}(h)\, dh \right| dg =$$
$$= \int \left| \int [x(g) - x(g-h)]\, e_{g_0+U}(h+g_0)\, dh \right| dg \leqslant$$
$$\leqslant \int \left(\int |x(g) - x(g-h)|\, dg \right) e_U(h)\, dh \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{h \in U} \int |x(g) - x(g-h)|\, dg \leqslant \varepsilon$$

для всех $U \subset U_\varepsilon$, каковы бы ни были элемент $g_0 \in G$ и δ-последовательность $\{e_{g_0+U}\}$.

В качестве первого приложения этой леммы докажем следующую теорему:

Теорема 2. *Если G недискретна, то в кольце $L^1(G)$ нет единицы.*

Доказательство. Пусть $\{e_U\}$ — δ-последовательность, стягивающаяся к нулевому элементу группы G, и пусть, в противоречие с утверждением теоремы, в $L^1(G)$ существует единица $e(g)$ относительно свертывания. В силу леммы, $\lim\limits_{U\to 0}\|e - e * e_U\| = 0$. Но так как $e(g)$ — единица, то $(e * e_U)(g) = e_U(g)$ почти для всех g. Таким образом, $\lim\limits_{U\to 0} \int |e(g) - e_U(g)|\, dg = 0$. Поскольку все $e_U(g)$, где $U \subset V$, вне V равны нулю, это означает, что $\int\limits_{CV} |e(g)|\, dg = 0$ и потому $\int\limits_{V} |e(g)|\, dg = 1$, какова бы ни была окрестность нуля V. Но, как указывалось выше, в случае недискретной группы G это невозможно.

Определение 2. *Групповым кольцом* $V(G)$ локально бикомпактной группы G мы будем называть кольцо $L^1(G)$, если группа G дискретна, и кольцо $L^1(G)$ с формально присоединенной единицей, если G недискретна; таким образом, в последнем случае $V(G)$ состоит из элементов $\mathfrak{z} = \lambda e + x$, где $x \in L^1(G)$, λ принимает произвольные комплексные значения, e — присоединенная единица и $\|\mathfrak{z}\| = |\lambda| + \|x\|$.

В пояснение термина «групповое кольцо» заметим следующее.

Групповым кольцом конечной группы G называют кольцо формальных многочленов $\sum_{k=1}^{n} c_k g_k$, где g_k пробегает все элементы группы, а c_k — произвольные комплексные коэффициенты. Это определение непосредственно обобщается на случай произвольной дискретной группы G. Групповое кольцо R_G строится здесь следующим образом. Элементами его служат все формальные суммы $x \doteq \sum x(g) g$, где $x(g)$ — абсолютно суммируемые функции на G, алгебраические же операции производятся по обычным формальным правилам действий над многочленами с последующим «приведением подобных членов»; таким образом, в частности (в случае аддитивной дискретной группы G),

$$xy = \sum_h x(h) h \sum_k y(k) k = \sum_h \sum_k x(h) y(k)(h+k) = \sum_g z(g) g,$$

где

$$z(g) = \sum_{h+k=g} x(h) y(k) = \sum_h x(h) y(g-h) = \\ = \sum_h x(g-h) y(h). \quad (5)$$

Нетрудно проверить, что R_G, наделенное нормой

$$\|x\| = \sum |x(g)|, \quad (6)$$

удовлетворяет всем аксиомам нормированного кольца. Оно алгебраически содержит группу G в виде группы одночленов $1g = \sum e_g(h) h$, где

$$e_g(h) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad h = g, \\ 0 & \text{при} \quad h \neq g. \end{cases} \quad (7)$$

Однако для недискретной группы G такое определение группового кольца уже непригодно, так как в нем, по самому его существу, G трактуется как дискретная группа и имеющаяся в ней топология никак не учитывается. Но задание элемента $x = \sum x(g) g$ кольца R_G равносильно заданию функции $x(g)$. Поэтому R_G изоморфно кольцу $l^1(G)$ абсолютно суммируемых функций $x(g)$, в котором норма определена формулой (6), сложение и умножение на комплексные числа — обычные, а перемножение элементов в соответствии с формулой (5) определено как «свертывание»:

$$(x * y)(g) = \sum_h x(g-h)\, y(h). \tag{8}$$

Как мы видели, в таком виде определение группового кольца обобщается на любые локально бикомпактные группы, если в качестве $x(g)$ взять измеримые комплексные функции, абсолютно интегрируемые по мере Хаара, а вместо сумм (6) и (8) — соответствующие интегралы. Таким образом, кольцо $V(G)$ является естественным обобщением группового кольца, рассматриваемого в теории конечных групп.

§ 21. Максимальные идеалы группового кольца и характеры группы

Связь между максимальными идеалами кольца $V(G)$ и характерами группы G обнаруживается в наиболее непосредственной форме, когда G — дискретная коммутативная группа.

Пусть в этом случае M — максимальный идеал кольца $V(G)$ или, что то же, кольца $l^1(G)$ абсолютно суммируемых функций на G (см. конец § 20). Тогда функция от g

$$M(g) = e_g(M), \tag{1}$$

где

$$e_g(h) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad h = g, \\ 0 & \text{при} \quad h \neq g, \end{cases}$$

есть мультипликативный характер группы G.

В самом деле, так как $e_{g+h} = e_g * e_h$, то

$$M(g+h) = e_{g+h}(M) = e_g(M)\, e_h(M) = M(g)\, M(h). \tag{2}$$

Далее,

$$|M(g)| \leqslant \|e_g\| = 1 \quad \text{и} \quad M(0) = e_0(M) = 1\ ^{*}),$$

откуда, в силу (2) (при $h = -g$), следует, что $|M(g)| \equiv 1$.

---

*) Ибо e_0 — единица кольца $V(G)$.

Так как всякий элемент x кольца $l^1(G)$ можно представить в виде $x=\sum x(g)e_g$, где ряд сходится по норме, то из (1) следует, что

$$x(M)=\sum x(g)M(g)=\sum x(g)e^{i\chi_M(g)}, \tag{3}$$

где $\chi_M(g)$ — аддитивный характер группы G, соответствующий мультипликативному характеру $M(g)$, порожденному максимальным идеалом M $\left(\text{т. е. } M(g)=e^{i\chi_M(g)}\right)$.

Обратно, пусть χ — (аддитивный) характер группы G. Отнеся каждому элементу $x\in l^1(G)$ число $\sum x(g)e^{i\chi(g)}$, мы получим гомоморфное отображение кольца $l^1(G)$ в тело комплексных чисел. Действительно, в проверке нуждается лишь переход произведения элементов кольца в произведение соответствующих им чисел. Но

$$\sum_g\left(\sum_h x(g-h)y(h)\right)e^{i\chi(g)}=\sum_h\left(\sum_g x(g-h)e^{i\chi(g)}\right)y(h)=$$
$$=\sum_h\left(\sum_g x(g-h)e^{i\chi(g-h)}\right)e^{i\chi(h)}y(h)=$$
$$=\sum_g x(g)e^{i\chi(g)}\sum_h y(h)e^{i\chi(h)}.$$

Так как e_0 переходит в 1, то это отображение не нулевое. Обозначим через M_χ его ядро. M_χ есть максимальный идеал кольца $l^1(G)$. При этом $x(M_\chi)=\sum x(g)e^{i\chi(g)}$ и, в частности,

$$e_g(M_\chi)=e^{i\chi(g)}. \tag{4}$$

Сравнение формул (1) и (4) показывает, что максимальный идеал M_χ, порожденный характером χ, в свою очередь порождает этот характер: $\chi=\chi_{M_\chi}$.

Из (3) следует, что разные максимальные идеалы порождают разные характеры. Действительно, если $\chi_{M_1}=\chi_{M_2}$, то, в силу (3), $x(M_1)=x(M_2)$ для всех $x\in l^1(G)$, т. е. M_1 и M_2 совпадают.

Из (4) следует, что разные характеры порождают разные максимальные идеалы. Действительно, если $M_{\chi_1}=M_{\chi_2}$, то, в силу (4), $e^{i\chi_1(g)}=e^{i\chi_2(g)}$ для всех $g\in G$, т. е. $\chi_1=\chi_2$.

Тем самым между характерами дискретной коммутативной группы G и максимальными идеалами ее группового кольца $l^1(G)$

установлено взаимно однозначное соответствие такое, что при отождествлении максимальных идеалов с соответствующими характерами функцией на множестве максимальных идеалов кольца $l^1(G)$, канонически-представляющей элемент $x(g) \in l^1(G)$, служит его преобразование Фурье

$$x^{\sim}(\chi) = \sum_{g \in G} x(g)\, e^{i\chi(g)}.$$

Так обстоит дело в том простейшем с топологической точки зрения случае, когда группа G дискретна. Пусть теперь, как и всюду в дальнейшем, группа G недискретна. В этом случае $L^1(G)$ образует в групповом кольце $V(G)$ максимальный идеал; обозначим его M_∞. Таким образом,

$$x(M_\infty) = 0 \text{ для всех } x \in L^1(G).$$

Мы покажем, что в основных чертах такое же, как в дискретном случае, соответствие существует между характерами группы G и максимальными идеалами группового кольца $V(G)$, отличными от M_∞.

Характер дискретной коммутативной группы G, соответствующий максимальному идеалу M ее группового кольца $l^1(G)$, определялся значениями, принимаемыми на M δ-функциями $e_g(h)$. В групповом кольце $V(G)$ недискретной группы G роль этих отсутствующих δ-функций будут играть δ-последовательности, стягивающиеся к элементам g группы G. Хотя сами эти δ-последовательности ни к какому пределу не стремятся, значения, принимаемые ими на каждом максимальном идеале M кольца $V(G)$, как мы покажем, имеют предел, являющийся при каждом фиксированном M и переменном g характером группы G, и этим путем получаются все вообще характеры группы G.

Теорема 1. *Пусть M — максимальный идеал кольца $V(G)$, отличный от M_∞, и $\{e_{g+U}\}$ — δ-последовательность, стягивающаяся к элементу $g \in G$. Тогда*

$$\lim_{U \to 0} e_{g+U}(M) = M(g) \tag{5}$$

существует и не зависит от выбора δ-последовательности, причем предельное соотношение (5) *выполняется равномерно для всех $g \in G$ и всех δ-последовательностей $\{e_{g+U}\}$. $M(g)$ есть мультипликативный характер группы G.*

Доказательство. Так как $M \neq M_\infty$, то существует функция $z \in L^1(G)$ такая, что $z(M) \neq 0$. Положим $T_g z = z_g$. В силу леммы предыдущего параграфа,

$$|z_g(M) - z(M)\, e_{g+U}(M)| \leqslant \\ \leqslant \|z_g - z * e_{g+U}\| \to 0 \quad \text{при } U \to 0, \tag{6}$$

т. е.

$$e_{g+U}(M) \to \frac{z_g(M)}{z(M)},$$

притом равномерно для всех $g \in G$ и всех δ-последовательностей $\{e_{g+U}\}$. Фиксируя z, мы видим, что для всех δ-последовательностей $\{e_{g+U}\}$, стягивающихся к g, существует один и тот же предел

$$M(g) = \frac{z_g(M)}{z(M)}. \tag{7}$$

Фиксируя же какую-нибудь δ-последовательность $\{e_{g+U}\}$, видим, что $M(g)$ не зависит от выбора z.

Покажем, что $M(g)$ есть мультипликативный характер группы G.

Прежде всего $M(g)$ есть непрерывная функция от g. В самом деле, в силу (7) и соотношения (2) § 20,

$$|M(g') - M(g)| = \left|\frac{(z_{g'} - z_g)(M)}{z(M)}\right| \leqslant \\ \leqslant \frac{\|z_{g'} - z_g\|}{|z(M)|} = \frac{\|z_{g'-g} - z\|}{|z(M)|} \to 0 \quad \text{при } g' \to g.$$

Далее, так как $|e_{g+U}(M)| \leqslant \|e_{g+U}\| = 1$, то и

$$|M(g)| \leqslant 1. \tag{8}$$

При этом, как следует из (7),

$$M(0) = 1. \tag{9}$$

Остается показать, что

$$M(g+h) = M(g)\, M(h), \tag{10}$$

ибо тогда, полагая в (10) $h = -g$ и принимая во внимание (8) и (9), мы получим: $|M(g)| \equiv 1$. Но если $\{e_{g+U}\}$ — δ-последовательность, стягивающаяся к g, и $\{e_{h+V}\}$ — δ-последовательность, стягивающаяся к h, то $\{e_{g+U} * e_{h+V}\}$ есть δ-последовательность, стягивающаяся к $g+h$. Поэтому

$$M(g+h) = \lim_{U, V \to 0} (e_{g+U} * e_{h+V})(M) = \\ = \lim_{U \to 0} e_{g+U}(M) \lim_{V \to 0} e_{h+V}(M) = M(g) M(h).$$

Тем самым теорема 1 доказана.

Пусть $\chi_M(g)$ — аддитивный характер группы G, соответствующий мультипликативному характеру $M(g)$, так что $M(g) = e^{i\chi_M(g)}$. Мы будем говорить, что *максимальный идеал M порождает характер χ_M*.

Замечание. Из равенства (5) и соотношения (6), верного для всех $z \in L^1(G)$, следует, что $z_g(M) = e^{i\chi_M(g)} z(M)$ для произвольной функции $z \in L^1(G)$.

Теорема 2. *Если $M \neq M_\infty$, то для всех $x \in L^1(G)$ имеет место равенство*

$$x(M) = \int x(g) e^{i\chi_M(g)} dg, \tag{11}$$

откуда

$$\mathfrak{z}(M) = (\lambda e + x)(M) = \lambda + \int x(g) e^{i\chi_M(g)} dg. \tag{12}$$

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать (11) для ненулевой неотрицательной вещественной функции $x \in L(G)$; действительно, линейные комбинации таких функций заполняют $L(G)$ и, значит, плотны в $L^1(G)$. В силу теоремы 1, для каждого $\varepsilon > 0$ существует окрестность нуля U такая, что

$$\left| e_{g+U}(M) - e^{i\chi_M(g)} \right| < \varepsilon \tag{13}$$

для всех $g \in G$ и всех функций e_{g+U}. Так как носитель D функции $x(g)$ есть бикомпактное множество с внутренними точками, то его можно разбить на конечное число попарно не пересекающихся измеримых подмножеств D_n с внутренними точками, «малых порядка U», т. е. таких, что $g_n - g'_n \in U$ для всех g_n, $g'_n \in D_n$. Пусть $x_n(g) = x(g) f_n(g)$, где $f_n(g)$ — характеристическая функция множества D_n, так что

$x(g)=\sum x_n(g)$. Положим $y_n(g)=\dfrac{x_n(g)}{\int x_n(g)\,dg}$. Так как $y_n(g)$ есть $e_{h+U}(g)$ для любого $h\in D_n$, то, принимая во внимание (13), получаем:

$$\left|x_n(M)-\int x_n(g)\,e^{i\chi_M(g)}\,dg\right|=$$
$$=\left|y_n(M)-\int y_n(g)\,e^{i\chi_M(g)}\,dg\right|\int x_n(g)\,dg=$$
$$=\left|\int\left[y_n(M)-e^{i\chi_M(g)}\right]y_n(g)\,dg\right|\int x_n(g)\,dg\leqslant$$
$$\leqslant\sup_{g\in D_n}\left|y_n(M)-e^{i\chi_M(g)}\right|\cdot\int x_n(g)\,dg\leqslant\varepsilon\int x_n(g)\,dg,$$

и следовательно,

$$\left|x(M)-\int x(g)\,e^{i\chi_M(g)}dg\right|=\left|\sum\left(x_n(M)-\int x_n(g)\,e^{i\chi_M(g)}\,dg\right)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon\sum\int x_n(g)\,dg=\varepsilon\int x(g)\,dg.$$

В силу произвольности ε, отсюда и вытекает равенство (11).

Следствие. *Разные максимальные идеалы порождают разные характеры.*

Действительно, если $\chi_{M_1}=\chi_{M_2}$, то, в силу (12), $\mathfrak{z}(M_1)=\mathfrak{z}(M_2)$ для всех $\mathfrak{z}\in V(G)$, а значит M_1 и M_2 совпадают.

Теорема 3. *Пусть χ — характер группы G. Тогда*

$$\lambda e+x\to\lambda+\int x(g)\,e^{i\chi(g)}\,dg \tag{14}$$

есть гомоморфное отображение группового кольца $V(G)$ в тело комплексных чисел. Максимальный идеал M_χ, являющийся ядром этого отображения, отличен от M_∞.

Доказательство. Линейность отображения (14) очевидна, и нужно проверить лишь его мультипликативность, т. е. убедиться в том, что произведению элементов группового кольца отвечает произведение соответствующих им чисел. Введем обозначение

$$(\lambda e+x)^{\sim}(\chi)=\lambda+\int x(g)\,e^{i\chi(g)}\,dg.$$

Применяя теорему Фубини, получаем:

$$\begin{aligned}(x*y)^{\sim}(\chi) &= \int\left(\int x(g-h)\,y(h)\,dh\right)e^{i\chi(g)}\,dg = \\ &= \int\left(\int x(g-h)\,e^{i\chi(g)}\,dg\right)y(h)\,dh = \\ &= \int\left(\int x(g-h)\,e^{i\chi(g-h)}\,dg\right)y(h)\,e^{i\chi(h)}\,dh = \\ &= \int x(g)\,e^{i\chi(g)}\,dg\int y(h)\,e^{i\chi(h)}\,dh = x^{\sim}(\chi)\,y^{\sim}(\chi).\end{aligned}$$

Отсюда уже непосредственно следует, что

$$(\mathfrak{z}_1*\mathfrak{z}_2)^{\sim}(\chi) = \mathfrak{z}_1^{\sim}(\chi)\,\mathfrak{z}_2^{\sim}(\chi)$$

для любых $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2 \in V(G)$. Таким образом, первое утверждение теоремы доказано. Для доказательства второго утверждения возьмем любую функцию $x \in L^1(G)$, для которой $\int x(g)\,dg \neq 0$. Тогда $x(g)\,e^{-i\chi(g)}$ не будет содержаться в M_χ, ибо $\int x(g)\,e^{-i\chi(g)}\cdot e^{i\chi(g)}\,dg = \int x(g)\,dg \neq 0$. Так как, с другой стороны, $x(g)\,e^{-i\chi(g)} \in M_\infty$, то отсюда и следует, что $M_\chi \neq M_\infty$.

Очевидно, $x^{\sim}(\chi) = x(M_\chi)$ для любой функции $x \in L^1(G)$.

Мы будем говорить, что *характер χ порождает максимальный идеал M_χ*. Теорема 2 показывает, что *максимальный идеал порождается порожденным им характером*: $M = M_{\chi_M}$.

Теорема 4. *Характер порождается порожденным им максимальным идеалом*: $\chi = \chi_{M_\chi}$.

Доказательство. По предыдущей теореме, в $L^1(G)$ существуют функции, не содержащиеся в M_χ. Пусть $z(g)$ — такая функция, т. е. $z^{\sim}(\chi) \neq 0$. Имеем:

$$\begin{aligned}z_g^{\sim}(\chi) &= \int z(h-g)\,e^{i\chi(h)}\,dh = e^{i\chi(g)}\int z(h-g)\,e^{i\chi(h-g)}\,dh = \\ &= e^{i\chi(g)}\int z(h)\,e^{i\chi(h)}\,dh = e^{i\chi(g)}z^{\sim}(\chi),\end{aligned}$$

откуда

$$e^{i\chi(g)} = \frac{z_g^{\sim}(\chi)}{z^{\sim}(\chi)} = \frac{z_g(M_\chi)}{z(M_\chi)} = e^{i\chi_{M_\chi}(g)}.$$

Замечание. При доказательстве теоремы 3 использовалась лишь измеримость характера χ. Поэтому теорема 4 показывает, что *из измеримости характера χ следует его непрерывность.*

Из теоремы 4 вытекает

Следствие. *Разные характеры порождают разные максимальные идеалы.*

Действительно, если M_{χ_1} совпадает с M_{χ_2}, то и $\chi_1 = \chi_{M_{\chi_1}}$ совпадает с $\chi_2 = \chi_{M_{\chi_2}}$.

Теоремы 1—4 устанавливают *каноническое взаимно однозначное соответствие между характерами группы G и максимальными идеалами ее группового кольца $V(G)$, отличными от M_∞.* Вместе с тем эти теоремы показывают, что при отождествлении характера χ с соответствующим максимальным идеалом M_χ *преобразование Фурье*

$$\int x(g)\, e^{i\chi(g)}\, dg$$

абсолютно интегрируемой функции $x(g)$ можно рассматривать как ее каноническое представление в виде функции на множестве максимальных идеалов группового кольца:

$$x^{\sim}(\chi) = \int x(g)\, e^{i\chi(g)}\, dg = x(M_\chi).$$

Эта новая трактовка преобразования Фурье и кладется ниже в основу построения гармонического анализа на коммутативных локально бикомпактных группах.

§ 22. Теорема единственности для преобразования Фурье и достаточность множества характеров

В силу установленной выше связи между характерами коммутативной локально бикомпактной группы и максимальными идеалами ее группового кольца естественно ожидать, что имеется связь и между вопросом о существовании у такой группы достаточно большого количества характеров и вопросом о существовании в ее групповом кольце достаточно большого количества максимальных идеалов.

Каждая коммутативная группа обладает по крайней мере одним характером: $\chi(g) \equiv 0$. Говорят, что коммутативная группа G обладает *достаточным множеством характеров*, если для каждого ее элемента g_0, отличного от нуля, существует характер χ_0 такой, что $\chi_0(g_0) \neq 0$. Аналогично можно было бы говорить, что коммутативное нормированное кольцо R обладает достаточным множеством максимальных идеалов, если для каждого элемента $x_0 \in R$, отличного от нуля, существует максимальный идеал M_0 такой, что $x_0(M_0) \neq 0$. Но это есть не что иное, как утверждение, что R — кольцо без радикала. В настоящем параграфе мы докажем это утверждение для группового кольца $V(G)$. В силу результатов, полученных в предыдущем параграфе, тем самым будет доказана теорема единственности для преобразования Фурье абсолютно интегрируемой функции. Отсюда мы выведем как следствие, что рассматриваемые группы обладают достаточным множеством характеров.

Операция

$$\mathfrak{z} = \lambda e + x(g) \to \bar{\lambda} e + \overline{x(-g)} = \mathfrak{z}^* \qquad (1)$$

удовлетворяет условиям а) — в) определения 1 § 8 и, значит, является инволюцией в кольце $V(G)$. Чтобы доказать, что $V(G)$ — кольцо без радикала, достаточно поэтому, в силу теоремы 4 § 8, показать, что эта инволюция существенная, т. е. что для каждого ненулевого $\mathfrak{z} \in V(G)$ существует положительный линейный функционал f на $V(G)$ такой, что $f(\mathfrak{z} * \mathfrak{z}^*) \geqslant 0$. Предпошлем этому три леммы.

Лемма 1. *Свертка $z * x$ функции $x \in L^1(G)$ с произвольной ограниченной измеримой функцией z всюду существует, ограниченна и равномерно непрерывна.*

Доказательство. Пусть $|z(g)| \leqslant C$. Существование $(z * x)(g)$ для всех $g \in G$ очевидно. Далее,

$$|(z * x)(g)| = \left| \int z(g-h)\, x(h)\, dh \right| \leqslant C \|x\|,$$

т. е. $z * x$ ограниченна. Наконец, делая подстановку $k \to k + h$, получаем:

$$(z * x)(g+h) = \int z(g+h-k)\, x(k)\, dk =$$

$$= \int z(g-k)\, x(k+h)\, dk,$$

откуда

$$|(z*x)(g+h)-(z*x)(g)|=$$
$$=\left|\int z(g-k)[x(k+h)-x(k)]\,dk\right|\leqslant$$
$$\leqslant C\int|x(k+h)-x(k)|\,dk,$$

так что $(z*x)(g)$ равномерно непрерывна, поскольку правая часть не зависит от g и стремится к нулю при $h\to 0$ (см. § 20, (2)—(2′)).

Лемма 2. *Если $u(h)$ и $v(h)\in L^2(G)$, то свертка $v^* * u$ всюду существует, ограниченна и равномерно непрерывна.*

Доказательство. В силу инвариантности интеграла, для любого фиксированного $g\in G$ также $T_g v(h)=v(-g+h)\in L^2(G)$. Поэтому

$$(v^* * u)(g)=\int\overline{v(-g+h)}\,u(h)\,dh$$

существует для всех $g\in G$ и равно $\langle u, T_g v\rangle$, где $\langle f, g\rangle$ означает скалярное произведение функций $f, g\in L^2(G)$. Отсюда

$$|(v^* * u)(g)|\leqslant\|u\|_2\|T_g v\|_2=\|u\|_2\|v\|_2, \tag{2}$$

так что $(v^* * u)(g)$ ограниченна. И далее,

$$|(v^* * u)(g+h)-(v^* * u)(g)|=|\langle u, (T_{g+h}-T_g)v\rangle|\leqslant$$
$$\leqslant\|u\|_2\|(T_{g+h}-T_g)v\|_2=\|u\|_2\|T_h v-v\|_2,$$

так что $(v^* * u)(g)$ равномерно непрерывна, поскольку $\|T_h v-v\|_2$ не зависит от g и стремится к нулю при $h\to 0$ (см. § 20, (2)—(2′)).

Лемма 3. *Свертка $(u*x)(h)$ любых двух функций $u\in L^2(G)$ и $x\in L^1(G)$ существует почти для всех $h\in G$ и принадлежит $L^2(G)$.*

Доказательство. Из леммы 2 следует существование интеграла $\int(v^* * u)(-g)\,x(g)\,dg$, причем с помощью подстановки $h\to -g+h$ получаем:

$$\int(v^* * u)(-g)\,x(g)\,dg=\int\left(\int\overline{v(g+h)}\,u(h)\,dh\right)x(g)\,dg=$$
$$=\int\left(\int u(-g+h)\,\overline{v(h)}\,dh\right)x(g)\,dg.$$

Применяя теорему Фубини, заключаем, что тогда интеграл

$$\int u(-g+h)\,x(g)\,dg=(u*x)(h)$$

существует почти для всех $h\in G$ и

$$\int (v^**u)(-g)\,x(g)\,dg=\int (u*x)(h)\,\overline{v(h)}\,dh.$$

Так как

$$\left|\int (v^**u)(-g)\,x(g)\,dg\right|\leqslant \sup_{g\in G}|(v^**u)(-g)|\cdot\|x\|,$$

то, применяя неравенство (2), получаем:

$$\left|\int (u*x)(h)\,\overline{v(h)}\,dh\right|\leqslant\|x\|\,\|u\|_2\|v\|_2. \tag{3}$$

Поскольку это верно для любого $v\in L^2(G)$, заключаем на основании известного свойства гильбертовых пространств, что $u*x\in L^2(G)$, и лемма полностью доказана.

Замечание. Неравенство (3) показывает также, что

$$\|u*x\|_2\leqslant\|x\|\,\|u\|_2.$$

Укажем теперь простой способ построения положительных линейных функционалов на $V(G)$.

Теорема 1. *Пусть $u(h)$ — произвольный ненулевой элемент из $L^2(G)$ и*

$$\varphi(g)=\int u(g+h)\,\overline{u(h)}\,dh. \tag{4}$$

Тогда выражение

$$J_\varphi(\mathfrak{z})=J_\varphi(\lambda e+x)=\lambda\varphi(0)+\int\varphi(-g)\,x(g)\,dg \tag{5}$$

является ненулевым положительным линейным функционалом на $V(G)$.

Доказательство. Делая в (4) подстановку $h\to -g+h$, видим, что

$$\varphi(g)=(u^**u)(g).$$

Таким образом, в силу леммы 2, $\varphi(g)$ существует для всех $g\in G$ и непрерывна, причем, согласно (4) и (2):

$$|\varphi(g)|\leqslant\|u\|_2^2=\varphi(0). \tag{2'}$$

Это показывает, что

$$|J_\varphi(\mathfrak{z})| \leqslant \varphi(0)\,\|\mathfrak{z}\|$$

и, значит, $J_\varphi(\mathfrak{z})$ есть линейный функционал на $V(G)$. Так как при этом

$$\varphi(0) = \|u\|_2^2 > 0, \tag{6}$$

то этот функционал ненулевой (не только на $V(G)$, но и на $L^1(G)$). Заменяя в (4) g на $-g$ и делая подстановку $h \to g + h$, получаем далее:

$$\varphi(-g) = \int u(-g+h)\overline{u(h)}\,dh = \int u(h)\overline{u(g+h)}\,dh,$$

т. е.

$$\varphi(-g) = \overline{\varphi(g)}. \tag{7}$$

Из инвариантности интеграла относительно отражения и равенства (7) вытекает, что

$$J_\varphi(\mathfrak{z}^*) = \overline{\lambda}\varphi(0) + \int \varphi(-g)\overline{x(-g)}\,dg =$$
$$= \overline{\lambda}\varphi(0) + \int \varphi(g)\overline{x(g)}\,dg,$$

т. е.

$$J_\varphi(\mathfrak{z}^*) = \overline{J_\varphi(\mathfrak{z})}. \tag{8}$$

Пусть теперь x — произвольная функция из $L^1(G)$. В силу свойств ассоциативности и коммутативности свертывания *) и свойства инволюции $x^* * u^* = (u * x)^*$, имеем:

$$(u^* * u) * (x * x^*) = (u * x)^* * (u * x),$$

т. е.

$$((u^* * u) * (x * x^*))(g) = ((u * x)^* * (u * x))(g) \tag{9}$$

почти для всех $g \in G$. Но функция $(u^* * u) * (x * x^*)$ непрерывна в силу лемм 2 и 1, а $(u * x)^* * (u * x)$ — в силу лемм 3 и 2. Следовательно, равенство (9) имеет место для всех $g \in G$ без исключения, и в частности для $g = 0$. Так как при этом

$$((u^* * u) * (x * x^*))(0) = J_\varphi(x * x^*)$$

---

*) При установлении которых в доказательстве теоремы 1 § 16 использовалось лишь существование соответствующих интегралов, но вовсе не принадлежность всех рассматриваемых функций пространству L^1.

и

$$((u*x)^**(u*x))(0)=\int|(u*x)(h)|^2\,dh,$$

то заключаем, что

$$J_\varphi(x*x^*)=\int|(u*x)(h)|^2\,dh, \tag{10}$$

откуда

$$J_\varphi(x*x^*)\geqslant 0 \quad \text{для всех } x\in L^1(G).$$

Таким образом, $J_\varphi(x*y^*)\geqslant 0$ при $y=x$. При этом $J_\varphi(x*y^*)$ линейно по x и «полулинейно» по y *). Тем самым $J_\varphi(x*y^*)$ обладает свойствами скалярного произведения, из которых известным образом вытекает неравенство

$$|J_\varphi(x*y^*)|^2\leqslant J_\varphi(x*x^*)\,J_\varphi(y*y^*).$$

Фиксируя здесь x, полагая $y=e_U^*$, где $\{e_U\}$ — δ-последовательность, стягивающаяся к нулевому элементу группы G, и переходя к пределу при $U\to 0$, получаем неравенство

$$|J_\varphi(x)|^2\leqslant\varphi(0)\,J_\varphi(x*x^*). \tag{11}$$

Это неравенство распространяется на произвольные элементы кольца $V(G)$, т. е.

$$|J_\varphi(\mathfrak{z})|^2\leqslant\varphi(0)\,J_\varphi(\mathfrak{z}*\mathfrak{z}^*) \tag{12}$$

для всех $\mathfrak{z}=\lambda e+x\in V(G)$. Действительно, в силу (8) и (11)

$$\begin{aligned}J_\varphi(\mathfrak{z})|^2&=|\lambda\varphi(0)+J_\varphi(x)|^2=\\&=\lambda\bar\lambda\varphi^2(0)+\lambda\varphi(0)\overline{J_\varphi(x)}+\bar\lambda\varphi(0)J_\varphi(x)+|J_\varphi(x)|^2\leqslant\\&\leqslant\lambda\bar\lambda\varphi^2(0)+\lambda\varphi(0)\overline{J_\varphi(x)}+\bar\lambda\varphi(0)J_\varphi(x)+\varphi(0)J_\varphi(x*x^*)=\\&=\varphi(0)J_\varphi((\lambda e+x)*(\lambda e+x)^*)=\varphi(0)J_\varphi(\mathfrak{z}*\mathfrak{z}^*).\end{aligned}$$

Принимая во внимание (6), заключаем из (12), что $J_\varphi(\mathfrak{z}*\mathfrak{z}^*)\geqslant 0$, и теорема доказана.

Теорема 2. *Инволюция* (1) *в кольце* $V(G)$ *существенная.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{z}=\lambda e+x$. Так как $M_\infty(\mathfrak{z}*\mathfrak{z}^*)=|\lambda|^2\geqslant 0$, то линейный функционал $M_\infty(\mathfrak{z})=\lambda$

*) То есть $J_\varphi(x*(\lambda y_1+\mu y_2)^*)=\bar\lambda J_\varphi(x*y_1^*)+\bar\mu J_\varphi(x*y_2^*)$.

положителен, причем $M_\infty(\mathfrak{z} * \mathfrak{z}^*) > 0$, когда $\lambda > 0$. Таким образом, остается рассмотреть случай, когда $\mathfrak{z} = x(g)$, где $\|x\| > 0$. Но если $f(x * x^*) = 0$ для всякого положительного линейного функционала f и, в частности, всякого функционала (5), то из равенства (10) следует, что $u * x = 0$ для всех $u \in L^2(G)$. Беря $u = e_U$, где $\{e_U\}$ $(\in L^{1,2}(G))$ — δ-последовательность, стягивающаяся к нулевому элементу группы G, заключаем из леммы § 20, что $x = \lim\limits_{U \to 0} e_U * x = 0$, вопреки предположению. Тем самым теорема полностью доказана.

В силу теоремы 4 § 8, отсюда непосредственно следует

Теорема 3. *$V(G)$ — кольцо без радикала.*

Как мы уже указывали, теорема 3 есть не что иное, как

Теорема единственности. *Если x, $y \in L^1(G)$ и*

$$\int x(g)\, e^{i\chi(g)}\, dg = \int y(g)\, e^{i\chi(g)}\, dg$$

для всех характеров χ группы G, то $x(g)$ и $y(g)$ совпадают почти для всех $g \in G$.

Действительно, сказать, что в коммутативном нормированном кольце нет обобщенных нульстепенных элементов, отличных от нуля, это все равно, что сказать, что каждый элемент этого кольца вполне определяется значениями, принимаемыми им на максимальных идеалах.

Теорема 4. *Коммутативная локально бикомпактная группа G обладает достаточным множеством характеров.*

Доказательство. Пусть g_0 — произвольный элемент группы G, отличный от нуля. Нужно доказать, что существует характер χ_0 такой, что $e^{i\chi_0(g_0)} \neq 1$. Так как $g_0 \neq 0$, то существует окрестность нуля U с бикомпактным замыканием столь малая, что U и $U + g_0$ не пересекаются. Пусть $f(g)$ — характеристическая функция множества U. Тогда $T_{g_0} f(g) = f(g - g_0)$ есть характеристическая функция множества $U + g_0$ и $\|T_{g_0} f - f\| = 2\,\|f\| > 0$. Таким образом, в силу теоремы 3, $T_{g_0} f - f$ не является обобщенным нульстепенным элементом, т. е. существует максимальный идеал M_0 такой, что

$$(T_{g_0} f - f)(M_0) = (T_{g_0} f)(M_0) - f(M_0) \neq 0,$$

или

$$(T_{g_0} f)(M_0) \neq f(M_0). \tag{13}$$

Очевидно, $M_0 \neq M_\infty$, ибо $(T_{g_0}f)(M_\infty) = f(M_\infty) = 0$. В силу замечания к теореме 1 § 21, неравенство (13) можно записать в виде

$$M_0(g_0) f(M_0) \neq f(M_0).$$

Отсюда прежде всего следует, что $f(M_0) \neq 0$; сокращая на $f(M_0)$ и обозначая через χ_0 характер, порождаемый согласно теореме 1 § 21 максимальным идеалом M_0, получаем:

$$e^{i\chi_0(g_0)} = M_0(g_0) \neq 1,$$

и теорема доказана.

§ 23. Группа характеров

Если χ_1 и χ_2 — два (аддитивных) характера коммутативной топологической группы G, то их разность

$$(\chi_1 - \chi_2)(g) = \chi_1(g) - \chi_2(g) \pmod{2\pi} \tag{1}$$

тоже есть характер этой группы. Тем самым совокупность X всех характеров группы G в свою очередь образует группу. Эту группу топологизируют по Понтрягину *), принимая совокупность множеств вида

$$\{\chi \in \mathrm{X}: \ |e^{i\chi(g)} - e^{i\chi_0(g)}| < \delta \quad \text{для всех} \quad g \in F\}, \tag{2}$$

где F — всевозможные бикомпактные множества из G, а δ — произвольные положительные числа, за фундаментальную систему окрестностей характера χ_0. Легко проверить, что групповая операция (1) непрерывна в топологии, определяемой окрестностями (2), так что X, наделенное этой топологией, есть топологическая группа. Ее называют *группой характеров* группы G.

Пусть теперь G — коммутативная локально бикомпактная группа. В § 21 было установлено каноническое взаимно однозначное соответствие между характерами группы G и максимальными идеалами её группового кольца $V(G)$, отличными от M_∞. Отождествляя характеры с соответствующими максимальными идеалами, мы можем ввести в совокупность X характеров группы G топологию, индуцированную из про-

*) Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, изд. 2-е, перераб. и допо..н., М., 1954, определение 36.

странства $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов кольца $V(G)$. В этой топологии фундаментальную систему окрестностей характера χ_0 образуют множества вида

$$\{\chi \in X\colon \left| \int x_k(g) [e^{i\chi(g)} - e^{i\chi_0(g)}] \, dg \right| < \varepsilon \quad (k = 1, \ldots, n)\}, \tag{3}$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — всевозможные конечные наборы функций из $L^1(G)$, а ε — произвольные положительные числа. При этом X, получающееся при указанном отождествлении из $\mathfrak{M}$ путем удаления единственной точки M_∞, становится локально бикомпактным пространством.

Естественно возникает вопрос: какова связь между понтрягинской топологией группы X, определяемой окрестностями (2), и «кольцевой» топологией, определяемой окрестностями (3)? Мы покажем, что эти две топологии совпадают.

Теорема 1. *Групповое кольцо $V(G)$ коммутативной локально бикомпактной группы G, наделенное инволюцией*

$$\mathfrak{z} = \lambda e + x(g) \to \bar{\lambda} e + \overline{x(-g)} = \mathfrak{z}^*,$$

симметрично.

Доказательство. $\mathfrak{z}^*(M_\infty) = \bar{\lambda} = \overline{\mathfrak{z}(M_\infty)}$; если же $M \neq M_\infty$, то, в силу теоремы 2 § 21, инвариантности интеграла относительно отражения и равенства $\chi_M(-g) = -\chi_M(g) \pmod{2\pi}$, имеем:

$$\mathfrak{z}^*(M) = \bar{\lambda} + \int \overline{x(-g)}\, e^{i\chi_M(g)} \, dg = \\ = \bar{\lambda} + \int \overline{x(g)}\, \overline{e^{i\chi_M(g)}} \, dg = \overline{\mathfrak{z}(M)}.$$

Лемма 1. *$e^{i\chi(g)}$ при каждом фиксированном $g \in G$ есть непрерывная функция от χ в кольцевой топологии, определяемой окрестностями* (3).

Доказательство. Пусть M — максимальный идеал, соответствующий характеру χ. По формуле (7) § 21 тогда

$$e^{i\chi(g)} = \frac{z_g(M)}{z(M)}, \tag{4}$$

где $z \in L^1(G)$, $z(M) \neq 0$ и $z_g = T_g z$. Но выражение в правой части является непрерывной функцией от M на $\mathfrak{M}$. Следовательно, $e^{i\chi(g)}$ при топологии в X, индуцированной из $\mathfrak{M}$, — непрерывная функция от χ.

Лемма 2. *Каждое множество* K *характеров, имеющее в кольцевой топологии, определяемой окрестностями* (3), *бикомпактное замыкание* $\overline{K}$, *равностепенно равномерно непрерывно, т. е. для всякого* $\varepsilon > 0$ *существует такая окрестность* U *нуля группы* G, *что*

$$|e^{i\chi(h+g)} - e^{i\chi(h)}| < \varepsilon$$

для всех $\chi \in K$, $g \in U$, $h \in G$.

Доказательство. В силу формулы (4),

$$|e^{i\chi(h+g)} - e^{i\chi(h)}| = |e^{i\chi(g)} - 1| = \left| \frac{z_g(M) - z(M)}{z(M)} \right| \leqslant \frac{\|T_g z - z\|}{|z(M)|}. \quad (5)$$

Так как $M_\infty \notin \overline{K}$, а кольцо $V(G)$, по теореме 1, симметрично, то, согласно пункту 4 доказательства теоремы 1′ § 7, существуют функция $\varphi(M)$, непрерывная на $\mathfrak{M}$, равная 1 на K и 0 в M_∞, и элемент $\mathfrak{z} = \lambda e + x \in V(G)$ такой, что

$$|\varphi(M) - \mathfrak{z}(M)| < \frac{1}{4} \quad \text{для всех} \quad M \in \mathfrak{M}.$$

Взяв здесь $M = M_\infty$, получаем $|\lambda| < \frac{1}{4}$ и, значит,

$$|\varphi(M) - x(M)| < \frac{1}{2} \quad \text{для всех} \quad M \in \mathfrak{M}.$$

Это показывает, что $|x(M)| > \frac{1}{2}$ для всех $M \in K$. Беря в (5) в качестве z эту функцию x, получаем:

$$|e^{i\chi(h+g)} - e^{i\chi(h)}| \leqslant 2\,\|T_g x - x\| \quad \text{для всех} \quad \chi \in K \text{ и } h \in G,$$

и утверждение леммы следует из формул (2)—(2′) § 20.

Теорема 2. *Кольцевая топология в* X, *определяемая окрестностями* (3), *совпадает с понтрягинской топологией, определяемой окрестностями* (2).

Доказательство. Так как сдвиг $\chi \to \chi - \chi_0$ переводит каждую окрестность вида (2) или (3) характера χ_0 в окрестность того же вида нулевого характера, то достаточно ограничиться случаем, когда $\chi_0 = 0$.

1° *Во всякой заданной окрестности вида* (2) *содержится окрестность вида* (3).

Действительно, так как, согласно лемме 1, $e^{i\chi(h)}$ при любом h есть непрерывная функция от χ в кольцевой топологии, а $e^{i\chi(h)}=1$ при $\chi=0$, то для всякого $h\in G$ существует окрестность V_h вида (3) нуля группы X такая, что $|e^{i\chi(h)}-1|<\frac{\delta}{2}$ для всех $\chi\in V_h$. При этом, в силу локальной бикомпактности пространства X в кольцевой топологии, можно считать, что V_h имеет бикомпактное замыкание в X. Тогда, согласно лемме 2, существует такая окрестность нуля U_h группы G, что $|e^{i\chi(g)}-e^{i\chi(h)}|<\frac{\delta}{2}$ и, следовательно, $|e^{i\chi(g)}-1|<\delta$ для всех $g\in U_h+h$ и $\chi\in V_h$. Так как, теперь, F бикомпактно, то существуют элементы $h_1, \ldots$ $\ldots, h_n\in G$ такие, что $F\subset\bigcup\limits_{k=1}^{n}(U_{h_k}+h_k)$. Но тогда $V=\bigcap\limits_{k=1}^{n}V_{h_k}$ будет окрестностью вида (3), содержащейся в рассматриваемой окрестности (2).

2° *Во всякой заданной окрестности вида* (3) *содержится окрестность вида* (2).

Действительно, из регулярности меры Хаара следует существование бикомпактного множества $F\subset G$ такого, что

$$\int\limits_{CF}|x_k(g)|\,dg<\frac{\varepsilon}{4}\qquad(k=1, \ldots, n).$$

Окрестность (2) с этим F и $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\|x_k\|}$ содержится в рассматриваемой окрестности (3). В самом деле, для каждого χ из этой окрестности (2) имеем:

$$\left|\int x_k(g)\,e^{i\chi(g)}\,dg-\int x_k(g)\,dg\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int|e^{i\chi(g)}-1|\,|x_k(g)|\,dg\leqslant 2\int\limits_{CF}|x_k(g)|\,dg+$$
$$+\|x_k\|\max_{g\in F}|e^{i\chi(g)}-1|<\frac{\varepsilon}{2}+\|x_k\|\,\delta\leqslant\varepsilon\qquad(k=1, \ldots, n).$$

Тем самым теорема доказана.

Следствие. *Совокупность* X *характеров коммутативной локально бикомпактной группы* G, *наделенная кольцевой или, что то же, понтрягинской топологией, является локально бикомпактной группой.*

§ 24. Инвариантный интеграл на группе характеров

Так как группа X локально бикомпактна, то на ней в свою очередь существует мера Хаара. Поэтому можно тем же путем, каким мы строили группу характеров X группы G, построить группу характеров G^* группы X. При этом G будет естественно вкладываться в G^*. Чтобы убедиться в этом, заметим, что каждый элемент g исходной группы G порождает характер группы X, а именно, $g(\chi) = \chi(g)$, где g фиксирован, а χ — переменное. Действительно, прежде всего $g(\chi)$ вещественно и однозначно определено по модулю 2π; далее, по определению групповой операции в X

$$g(\chi_1 - \chi_2) = (\chi_1 - \chi_2)(g) = \chi_1(g) - \chi_2(g) = \\ = g(\chi_1) - g(\chi_2) \pmod{2\pi};$$

наконец, по лемме 1 § 23, $g(\chi)$ есть непрерывная функция от χ. При этом, так как для каждой пары различных элементов g, h группы G существует характер χ_0 такой, что $e^{i\chi_0(g)} \neq e^{i\chi_0(h)}$, т. е. $g(\chi_0) \neq h(\chi_0) \pmod{2\pi}$ (достаточность множества характеров — теорема 4 § 22), то разные элементы группы G порождают разные характеры группы X. Таким образом, элементы группы G можно отождествить с порожденными ими характерами группы X, и тогда G будет алгебраически содержаться в G^*. Одним из важнейших предложений понтрягинской теории характеров является «закон двойственности», устанавливающий, что при указанном отождествлении G совпадает с G^* и по запасу элементов и по топологии. Дальнейшие рассмотрения будут существенно связаны с доказательством этого понтрягинского закона двойственности в рамках излагаемой теории (которое будет дано в § 26).

Это доказательство будет основано на тесной связи между мерами Хаара или, что то же, инвариантными интегралами на группах X и G. Конечно, существование инвариантного интеграла на группе X следует из локальной бикомпактности этой группы. Но конструкция Хаара — А. Вейля, устанавливающая это существование, для наших целей ничего не сможет дать. Связь между инвариантными интегралами на X и на G мы установим путем фактического построения инвариантного интеграла на X по данному нам инвариантному интегралу на G. Этому и будет посвящен настоящий параграф.

При этом построении мы будем исходить из той идеи, что *связь между инвариантными интегралами на* X *и на* G *заключена в формулах обращения для преобразования Фурье.* А именно, по аналогии с тем, что имеет место, когда G — аддитивиая топологическая группа вещественных чисел, мы можем ожидать, что преобразование Фурье

$$\varphi^{\sim}(\chi) = \int_G \varphi(g)\, e^{i\chi(g)}\, dg$$

всякой функции φ вида $u^* * u$, где $u \in L^{1,2}(G)$, равное

$$\left| \int_G u(g)\, e^{i\chi(g)}\, dg \right|^2,$$

есть абсолютно интегрируемая функция на X и, при надлежащей нормировке меры Хаара на X, имеет место формула обращения

$$\varphi(g) = \int_X \varphi^{\sim}(\chi)\, e^{-ig(\chi)}\, d\chi.$$

Тогда, в частности,

$$\varphi(0) = \int_X \varphi^{\sim}(\chi)\, d\chi. \tag{1}$$

Но в левой части последнего (предполагаемого) равенства стоит значение функции, заданной на исходной группе G. Это дает возможность принять формулу (1) за о п р е д е л е н и е интеграла от указанных фуикций $\varphi^{\sim}(\chi)$ и отправной пункт для распространения интегрирования на непрерывные финитные функции, после чего построеиие всего класса интегрируемых функций на X вливается уже в русло стандартной теории.

Именно так было впервые выполнено построение инвариантного интеграла на X по заданному инвариантному интегралу на G в работе М. Г. Крейна [28]. Та же формула (1) послужила отправным пунктом и для прямого построения меры Хаара на X по инвариантному интегралу на G в работе Д. А. Райкова [43]. Однако этот прямой путь построения инвариантного интеграла или меры Хаара на X оказался технически довольно сложным. Основная причина этого заключается в том, что функционал

$$I(x^{\sim}) = x(0),$$

значение которого при $x = \varphi$ стоит в левой части формулы (1), определен не для всех элементов $x \in L^1(G)$.

Здесь будет изложен другой, технически более простой способ, состоящий в замене прямого рассмотрения функционала I рассмотрением «регуляризованных» функционалов

$$I_\varphi(\mathfrak{z}^{\sim}) = J_\varphi(\mathfrak{z}) = (\varphi * \mathfrak{z})(0) = I(\varphi^{\sim}\mathfrak{z}^{\sim}),$$

определяемых всевозможными функциями φ вида $u^* * u$, где $u \in L^{1,2}(G)$. Каждый такой функционал определен уже для всех $\mathfrak{z} \in V(G)$, и так как $J_\varphi(\mathfrak{z})$, по теореме 1 § 22, положителен, то $I_\varphi(\mathfrak{z}^\sim)$ однозначно распространяется с сохранением положительности на всё $C(\mathfrak{M})$. Это дает возможность для любой непрерывной функции $h(\chi)$ на X, стремящейся к конечному пределу при $\chi \to M_\infty$, принять

$$I(\varphi^\sim h) = I_\varphi(h).$$

Если теперь $f(\chi)$ — произвольная непрерывная финитная функция на X и Δ — ее (бикомпактный) носитель, то, выбрав φ так, чтобы $\varphi^\sim(\chi)$ было отлично от нуля на всем Δ (что, как мы увидим, всегда возможно), и взяв

$$h(\chi) = \begin{cases} \dfrac{f(\chi)}{\varphi^\sim(\chi)}, & \text{когда} \quad \varphi^\sim(\chi) > 0, \\ 0 & \text{когда} \quad \varphi^\sim(\chi) = 0, \end{cases}$$

мы получим:

$$I(f) = I_\varphi\left(\frac{f}{\varphi^\sim}\right).$$

Эта формула и будет принята ниже за отправной пункт построения инвариантного интегрирования на X.

При проведении доказательств мы будем обычно отождествлять характеры группы G с соответствующими максимальными идеалами ее группового кольца $V(G)$ и рассматривать таким образом X как часть пространства $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов этого кольца. Так как при этом X будет получаться путем удаления из $\mathfrak{M}$ одной лишь точки M_∞, то каждая непрерывная функция $h(M)$ на $\mathfrak{M}$ будет однозначно определяться своим сужением $h(\chi)$ на X, и мы не будем делать различия между функциями $h(M)$ и $h(\chi)$. Однако в случае функции $\mathfrak{z}(M)$, где $\mathfrak{z} \in V(G)$, мы вместо $\mathfrak{z}(\chi)$ будем по-прежнему писать $\mathfrak{z}^\sim(\chi)$ или $\mathfrak{z}^\sim$.

Обозначим через P совокупность всех функций φ вида $u^* * u$, где $u \in L^{1,2}(G)$, так что если $\varphi \in P$, то

$$\varphi^\sim(\chi) = |u^\sim(\chi)|^2 \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad \chi \in X.$$

Лемма. *Для всякого бикомпактного множества $\Delta \subset X$ существует функция $\varphi \in P$ такая, что $\varphi^\sim(\chi) > 0$ во всех точках $\chi \in \Delta$.*

Доказательство. В силу леммы 2 § 23, существует окрестность V нулевого элемента группы G такая, что

$$|e^{i\chi(g)} - 1| < \frac{1}{2} \quad \text{для всех} \quad \chi \in \Delta \quad \text{и} \quad g \in V. \tag{2}$$

Возьмем окрестность U нулевого элемента группы G, удовлетворяющую условию $U-U\subset V$, и пусть $\varphi=e_U^* * e_U$, где $e_U\in L^{1,2}(G)$ (и имеет смысл, определенный на стр. 136), так что $\varphi\in P$. Легко видеть, что $\varphi=e_V$, и потому

$$\varphi^{\sim}(\chi)=\int\limits_V \varphi(g)\, e^{i\chi(g)}\, dg=1+\int\limits_V \varphi(g)\,[e^{i\chi(g)}-1]\, dg,$$

откуда, в силу (2), $|\varphi^{\sim}(\chi)-1|<\frac{1}{2}$ для всех $\chi\in\Delta$. Следовательно, $\varphi^{\sim}(\chi)=|\varphi^{\sim}(\chi)|>\frac{1}{2}$ во всех точках $\chi\in\Delta$, и лемма доказана.

Для каждой $\varphi\in P$ и каждого $\mathfrak{z}=\lambda e+x\in V(G)$ положим теперь

$$J_\varphi(\mathfrak{z})=\lambda\varphi(0)+\int \varphi(-h)\, x(h)\, dh.$$

Согласно теореме 1 § 22, J_φ — положительный линейный функционал на $V(G)$. Но, по теореме 1 § 23, $V(G)$ симметрично. Поэтому J_φ порождает, согласно теореме 5 § 8, положительный линейный функционал $\hat{J}_\varphi$ на пространстве $\hat{V}(G)$ функций $\mathfrak{z}(M)$, определяемый равенством

$$\hat{J}_\varphi(\mathfrak{z}(M))=J_\varphi(\mathfrak{z}),$$

причем $\hat{J}_\varphi$ однозначно продолжается до положительного линейного функционала на всем $C(\mathfrak{M})$. Этот продолженный функционал мы обозначим I_φ и в соответствии с принятым выше соглашением будем рассматривать его также как функционал на пространстве функций $h(\chi)$, являющихся сужениями на X функций $h(M)\in C(\mathfrak{M})$. Таким образом, в частности, для каждого $\mathfrak{z}=\lambda e+x\in V(G)$ будем иметь:

$$I_\varphi(\mathfrak{z}^{\sim})=\lambda\varphi(0)+\int \varphi(-h)\, x(h)\, dh=(\varphi * \mathfrak{z})(0). \tag{3}$$

Пусть также $\psi\in P$. В силу (3), тогда

$$I_\varphi(\mathfrak{z}^{\sim}\psi^{\sim})=(\varphi * \mathfrak{z} * \psi)(0)=I_\psi(\mathfrak{z}^{\sim}\varphi^{\sim}). \tag{4}$$

Так как $I_\varphi(\mathfrak{z}^{\sim}\psi^{\sim})$ и $I_\psi(\mathfrak{z}^{\sim}\varphi^{\sim})$ — непрерывные функционалы от $\mathfrak{z}^{\sim}$ или, что то же, от $\mathfrak{z}(M)$, а множество функций $\mathfrak{z}(M)$

плотно в $C(\mathfrak{M})$, то из (4) заключаем, что

$$I_\varphi(h\psi^\sim)=I_\psi(h\varphi^\sim) \tag{5}$$

для любого $h\in C(\mathfrak{M})$.

В согласии с принятыми в § 20 обозначениями будем под $L(X)$ понимать совокупность всех непрерывных финитных функций на X, т. е. непрерывных функций $f(\chi)$ с бикомпактным носителем Δ_f *). Для каждой функции $f\in L(X)$ обозначим через P_f множество тех $\varphi\in P$, для которых $\varphi^\sim(\chi)>0$ во всех точках $\chi\in\Delta_f$. *P_f не пусто.* Действительно, если $f(\chi)\equiv 0$, то Δ_f пусто и $P_f=P$, если же $f(\chi)\not\equiv 0$, то Δ_f — непустое бикомпактное множество и P_f не пусто в силу доказанной выше леммы.

Беря в формуле (5) $\varphi, \psi\in P_f$ и

$$h(\chi)=\begin{cases}\dfrac{f(\chi)}{\varphi^\sim(\chi)\psi^\sim(\chi)} & \text{при } \chi\in\Delta_f,\\ 0 & \text{при } \chi\notin\Delta_f,\end{cases}$$

получаем:

$$I_\varphi\left(\frac{f}{\varphi^\sim}\right)=I_\psi\left(\frac{f}{\psi^\sim}\right). \tag{6}$$

Для каждой функции из $L(X)$ положим теперь

$$I(f)=I_\varphi\left(\frac{f}{\varphi^\sim}\right) \qquad (\varphi\in P_f). \tag{7}$$

В силу равенства (6), $I(f)$ есть однозначно определенный функционал на $L(X)$.

Обозначим через $L_+(X)$ совокупность всех неотрицательных вещественных функций из $L(X)$. В согласии с обозначениями § 20 будем под T_ξ при каждом фиксированном $\xi\in X$ понимать оператор сдвига на ξ, определенный равенством $T_\xi f(\chi)=f(\chi-\xi)$.

Теорема 1. *Функционал $I(f)$, определяемый на $L(X)$ формулой (7), является инвариантным интегралом на X, т. е.*

1) *$I(f)$ линейно зависит от f;*

2) *$I(f(\chi-\xi))=I(f(\chi))$ для каждого фиксированного $\xi\in X$;*

---

*) Напомним, что носителем функции называют замыкание множества тех точек, в которых она имеет ненулевое значение.

3) $I(f) \geqslant 0$, *если* $f \in L_{+}(\mathrm{X})$;

4) $I(f) > 0$, *если* $f \in L_{+}(\mathrm{X})$ *и* $f(\chi) \not\equiv 0$.

Доказательство. 1) Пусть $f_1, f_2 \in L(\mathrm{X})$ и λ_1, λ_2 — произвольные комплексные числа. Так как $\Delta_{f_1} \cup \Delta_{f_2}$ бикомпактно, то, по лемме, существует функция $\varphi \in P$ такая, что $\varphi^{\sim}(\chi) > 0$ во всех точках $\chi \in \Delta_{f_1} \cup \Delta_{f_2}$. Тогда $\varphi \in P_{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2} \cap P_{f_1} \cap P_{f_2}$, и потому

$$I(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = I_{\varphi}\left(\frac{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2}{\varphi^{\sim}}\right) =$$

$$= \lambda_1 I_{\varphi}\left(\frac{f_1}{\varphi^{\sim}}\right) + \lambda_2 I_{\varphi}\left(\frac{f_2}{\varphi^{\sim}}\right) = \lambda_1 I(f_1) + \lambda_2 I(f_2).$$

2) Пусть $\mathfrak{z} = \lambda e + x \in V(G)$ и $\xi \in \mathrm{X}$. Положим $\mathfrak{z}_{\xi} = \lambda e + e^{-i\xi(g)} x(g)$. Тогда

$$\mathfrak{z}_{\xi}^{\sim}(\chi) = \lambda + \int x(g) e^{i(\chi - \xi) g}\, dg = \lambda + x^{\sim}(\chi - \xi) =$$

$$= \mathfrak{z}^{\sim}(\chi - \xi) = T_{\xi} \mathfrak{z}^{\sim}(\chi).$$

Но если $\varphi(g) \in P$, то также $\varphi_{\xi}(g) = e^{-i\xi(g)} \varphi(g) \in P$, ибо, как легко проверить, $(u^* * u)_{\xi} = u_{\xi}^* * u_{\xi}$ для любых $\xi \in \mathrm{X}$ и $u \in L^1(G)$. Поэтому

$$I_{\varphi}(\mathfrak{z}^{\sim}) = \lambda \varphi(0) + \int \varphi(-g)\, x(g)\, dg =$$

$$= \lambda \varphi_{\xi}(0) + \int \varphi_{\xi}(-g)\, x_{\xi}(g)\, dg = I_{\varphi_{\xi}}(\mathfrak{z}_{\xi}^{\sim}) = I_{\varphi_{\xi}}(T_{\xi} \mathfrak{z}^{\sim}).$$

Так как $\hat{V}(G)$ плотно в $C(\mathfrak{M})$, то заключаем отсюда, что

$$I_{\varphi}(h) = I_{\varphi_{\xi}}(T_{\xi} h) \quad \text{для всех} \quad h \in C(\mathfrak{M}).$$

Пусть теперь $f \in L(\mathrm{X})$. Беря $\varphi \in P_f$, откуда $\varphi_{\xi} \in P_{T_{\xi} f}$, получаем:

$$I(T_{\xi} f) = I_{\varphi_{\xi}}\left(\frac{T_{\xi} f}{\varphi_{\xi}^{\sim}}\right) = I_{\varphi_{\xi}}\left(T_{\xi} \frac{f}{\varphi^{\sim}}\right) = I_{\varphi}\left(\frac{f}{\varphi^{\sim}}\right) = I(f).$$

3) Если $f \in L_{+}(\mathrm{X})$ и $\varphi \in P_f$, то $\frac{f}{\varphi^{\sim}} \in L_{+}(\mathrm{X})$, и так как I_{φ} — положительный функционал, то $I(f) = I_{\varphi}\left(\frac{f}{\varphi^{\sim}}\right) \geqslant 0$.

4) Для доказательства последнего утверждения теоремы достаточно установить существование хотя бы одной функции $f_0 \in L_+(X)$, для которой $I(f_0) > 0$. Действительно, если $f \in L_+(X)$ и $f(\chi) \not\equiv 0$, то существуют открытое множество $V \subset X$ такое, что $f(\chi) > a > 0$ для всех $\chi \in V$, и точки $\chi_1, \ldots, \chi_n \in X$ такие, что $\Delta_{f_0} \subset \bigcup_{k=1}^{n} (V + \chi_k)$. Полагая тогда $b = \max_{\chi \in X} f_0(\chi)$, получаем:

$$\frac{b}{a} \sum_{k=1}^{n} f(\chi - \chi_k) \geqslant f_0(\chi) \quad \text{для всех} \quad \chi \in X,$$

и потому, в силу уже доказанных свойств функционала I,

$$\frac{b}{a} nI(f) = I\left(\frac{b}{a} \sum_{k=1}^{n} f(\chi - \chi_k)\right) \geqslant I(f_0),$$

откуда $I(f) > 0$.

Пусть теперь $u \in L^{1,2}(G)$, причем $u(g) \geqslant 0$ для всех $g \in G$ и $\|u\| = \int u(g)\,dg \neq 0$. Пусть, далее, $\varphi = u^* * u$, так что $\varphi \in P$ и $\varphi^\sim(\chi) \geqslant 0$, причем $\varphi^\sim(\chi) \not\equiv 0$, поскольку $\varphi^\sim(0) = \|u\|^2 > 0$. Положим $c = I_\varphi(\varphi^\sim)$. Так как, по установленному при доказательстве теоремы 1 § 22, $\varphi(g)$ непрерывна, $\varphi(-g) = \overline{\varphi(g)}$ и $\varphi(0) > 0$, то

$$c = \int \varphi(-g)\varphi(g)\,dg = \int |\varphi(g)|^2\,dg > 0.$$

Обозначим через α меньшее из (положительных) чисел $\max_{\chi \in X} \varphi^\sim(\chi)$ и $\frac{c}{\varphi(0)}$, и пусть A — множество тех $M \in \mathfrak{M}$, для которых $\varphi(M) \geqslant \frac{2}{3}\alpha$, и B — множество тех $M \in \mathfrak{M}$, для которых $\varphi(M) \leqslant \frac{1}{3}\alpha$. A и B не пусты и, в силу непрерывности функции $\varphi(M)$, замкнуты, причем $A \subset \mathfrak{M} \setminus B$. В силу установленного в пункте 5 доказательства теоремы 1′ § 7, существует функция $h \in C(\mathfrak{M})$ такая, что $h(M) = 1$ на A, $h(M) = 0$ на B и $0 \leqslant h(M) \leqslant 1$ на всем $\mathfrak{M}$. Имеем:

$$c = I_\varphi(\varphi^\sim) = I_\varphi(h\varphi^\sim) + I_\varphi((1 - h)\varphi^\sim).$$

Но так как $[1-h(M)]\,\varphi(M)<\frac{2}{3}\alpha$ для всех $M\in\mathfrak{M}$, то

$$I_\varphi((1-h)\,\varphi^\sim)\leqslant I_\varphi\left(\frac{2}{3}\alpha\right)=\frac{2}{3}\alpha\varphi(0)<c.$$

Поэтому $I_\varphi(h\varphi^\sim)>0$. Требуемым свойством будет обладать теперь функция $f_0(\chi)=h(\chi)[\varphi^\sim(\chi)]^2$. В самом деле, так как $\varphi(M_\infty)=0$, а $\overline{\mathfrak{M}\setminus B}$ — замкнутое множество, во всех точках которого $\varphi(M)\geqslant\frac{\alpha}{3}$, то $\overline{\mathfrak{M}\setminus B}$ — бикомпактное множество в X; и так как $\Delta_{f_0}\subset\Delta_h\subset\overline{\mathfrak{M}\setminus B}$, а $\varphi^\sim(\chi)>0$ на $\overline{\mathfrak{M}\setminus B}$, то заключаем, что $f_0\in L_+(X)$ и $\varphi\in P_{f_0}$. Но тогда

$$I(f_0)=I_\varphi\left(\frac{f_0}{\varphi^\sim}\right)=I_\varphi(h\varphi^\sim)>0.$$

Тем самым теорема полностью доказана.

Интеграл $I(f)$ стандартным образом порождает на теле борелевских множеств пространства X вполне аддитивную меру μ, причем для бикомпактного множества $\Delta\subset X$ имеем $\mu(\Delta)=\inf I(f)$ по всем $f\in L_+(X)$, для которых $f(\chi)>1$ на Δ, так что $\mu(\Delta)<\infty$, а для открытого множества $O\subset X$ имеем $\mu(O)=\sup I(f)$ по всем $f\in L_+(X)$, для которых $f(\chi)\leqslant f_O(\chi)$, где f_O — характеристическая функция множества O, откуда на основании пункта 4 теоремы 1 легко следует, что $\mu(O)>0$. Инвариантность $I(f)$ влечет инвариантность этой меры и, значит, совпадение ее с надлежаще нормированной мерой Хаара на X *). При этом для всех $f\in L(X)$ имеем $I(f)=\int f(\chi)\,d\chi$, где справа стоит интеграл, определяемый этой мерой, и пополнение $L(X)$ по норме $\|f\|_1=\int|f(\chi)|\,d\chi$ совпадает с пространством $L^1(X)$ всех абсолютно интегрируемых по мере Хаара функций на X (определенных с точностью до значений на множествах меры 0).

*) Определяемой отмеченными сейчас свойствами однозначно с точностью до произвольного постоянного множителя (см. [8], [36] или [42]).

§ 25. Формулы обращения для преобразования Фурье

Главной целью настоящего параграфа является доказательство основного предложения гармонического анализа — теоремы Планшереля, распространяющей понятие преобразования Фурье на все измеримые функции с интегрируемым квадратом и устанавливающей, что это преобразование есть изометрически изоморфное отображение пространства $L^2(G)$ на пространство $L^2(X)$, причем обратным к нему служит «сопряженное» преобразование Фурье, в котором каждый характер $e^{i\chi(g)}$ группы G заменен сопряженным характером $e^{-ig(\chi)}$ группы X. Доказательство этой теоремы будет основываться на формуле обращения для преобразования Фурье функций класса P, введенного в предыдущем параграфе, т. е. функций на G, представимых в виде $(u^* * u)(g) = \int u(g+h)\overline{u(h)}\,dh$, где $u \in L^{1,2}(G)$.

Как и в предыдущем параграфе, через Δ_f будет обозначаться носитель функции $f(\chi)$, т. е. замыкание множества тех точек $\chi \in X$, в которых $f(\chi) \neq 0$, и через P_f — совокупность тех функций $\varphi \in P$, для которых $\varphi^\sim(\chi) = \int \varphi(g)\,e^{i\chi(g)}\,dg > 0$ во всех точках $\chi \in \Delta_f$.

Теорема 1. *Если* $\varphi \in P$, *т. е.* $\varphi(g) = \int u(g+h)\overline{u(h)}\,dh$, *где* $u \in L^{1,2}(G)$, *то*

$$\varphi^\sim(\chi) = \int \varphi(g)\,e^{i\chi(g)}\,dg \in L^1(X)$$

и

$$\varphi(g) = \int \varphi^\sim(\chi)\,e^{-i\chi(g)}\,d\chi.$$

Доказательство. При $\varphi(g) \equiv 0$ утверждение тривиально. Пусть $\varphi(g) \not\equiv 0$. В силу теоремы единственности для преобразования Фурье (§ 22), тогда и $\varphi^\sim(\chi) \not\equiv 0$. Так как при этом $\varphi^\sim(\chi) = |u^\sim(\chi)|^2 \geqslant 0$, то $c = \max\limits_{\chi \in X} \varphi^\sim(\chi) > 0$. Пусть C_n — множество тех $M \in \mathfrak{M}$, для которых $\varphi(M) \geqslant \frac{c}{n}$, и D_n — множество тех $M \in \mathfrak{M}$, для которых $\varphi(M) \leqslant \frac{c}{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Множества C_n и D_n не пусты, не пересекаются и замкнуты. Поэтому, согласно пункту 5 доказательства теоремы 1′ § 7, существует функция $h_n \in C(\mathfrak{M})$ такая, что $h_n(M)=1$ на C_n, $h_n(M)=0$ на D_n и $0 \leqslant h_n(M) \leqslant 1$ на всем $\mathfrak{M}$. Так как $\varphi^{\sim}(\chi) \geqslant \frac{c}{n+1}$ на $\overline{CD}_n$, а $\varphi(M_\infty)=0$, то $\overline{CD}_n \subset X$. Но $\Delta_{h_n} \subset \overline{CD}_n$; следовательно, $h_n \in L(X)$ и $\varphi^{\sim} \in P_{h_n}$, так что

$$\int h_n(\chi)\,\varphi^{\sim}(\chi)\,d\chi = I(h_n\varphi^{\sim}) = I_\varphi(h_n) \leqslant I_\varphi(1) = \varphi(0). \qquad (1)$$

Так как функции $h_n(\chi)\,\varphi^{\sim}(\chi)$ образуют монотонно возрастающую последовательность, стремящуюся к $\varphi^{\sim}(\chi)$ на всем X, то из (1) следует, что $\varphi^{\sim} \in L^1(X)$, причем

$$\int \varphi^{\sim}(\chi)\,d\chi \leqslant \varphi(0). \qquad (2)$$

Пусть также $\psi \in P$, т. е. $\psi = v^* * v$, где $v \in L^{1,2}(G)$. Так как $h_n\psi^{\sim} \in L(X)$ и $\varphi \in P_{h_n\psi^{\sim}}$, то, принимая во внимание формулу (5) § 24, имеем:

$$\int h_n(\chi)\,\varphi^{\sim}(\chi)\,\psi^{\sim}(\chi)\,d\chi = I(h_n\varphi^{\sim}\psi^{\sim}) = I_\varphi(h_n\psi^{\sim}) = I_\psi(h_n\varphi^{\sim}). \quad (3)$$

Но $h_n\varphi^{\sim}\psi^{\sim}$ и $h_n\varphi^{\sim}$ при $n \to \infty$ монотонно стремятся соответственно к $\varphi^{\sim}\psi^{\sim}$ и $\varphi^{\sim}$. Принимая во внимание положительность функционалов I и I_φ и переходя в (3) к пределу по $n \to \infty$, заключаем поэтому, что

$$\int \varphi^{\sim}(\chi)\,\psi^{\sim}(\chi)\,d\chi = I_\psi(\varphi^{\sim}) = \int \varphi(g)\,\overline{\psi(g)}\,dg. \qquad (4)$$

Так как $\varphi(g)$ непрерывна, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует окрестность V нуля группы G такая, что $\Re\varphi(g) \geqslant \varphi(0) - \varepsilon$ для всех $g \in V$. Пусть U — окрестность нуля в G, удовлетворяющая условию $U - U \subset V$. Возьмем $v = e_U$, где $e_U \in L^{1,2}(G)$ имеет смысл, определенный на стр. 136. Тогда $\psi = e_U^* * e_U = e_V$, и так как интеграл $\int \varphi(g)\,\overline{\psi(g)}\,dg$, в силу формулы (4), вещественен, то

$$\int \varphi(g)\,\overline{\psi(g)}\,dg = \int\limits_V \Re\varphi(g)\cdot e_V(g)\,dg \geqslant \varphi(0) - \varepsilon;$$

с другой стороны, $\psi^\sim(\chi)=|e^\sim_U(\chi)|^2\leqslant 1$. Из формул (2) и (4) поэтому получаем:

$$\varphi(0)-\varepsilon\leqslant\int\varphi(g)\overline{\psi(g)}\,dg=\int\varphi^\sim(\chi)\psi^\sim(\chi)\,d\chi\leqslant$$
$$\leqslant\int\varphi^\sim(\chi)\,d\chi\leqslant\varphi(0),$$

откуда, в силу произвольности ε, следует, что

$$\int\varphi^\sim(\chi)\,d\chi=\varphi(0). \tag{2'}$$

Положим теперь

$$\omega(g)=(1+|\lambda|^2)\,\varphi(g)+\lambda\varphi(g+h)+\bar\lambda\varphi(g-h)=$$
$$=((u+\lambda T_{-h}u)^* * (u+\lambda T_{-h}u))(g).$$

Так как $u+\lambda T_{-h}u\in L^{1,2}(G)$, то $\omega\in L^{1,2}(G)$ и, по только что доказанному,

$$\omega(0)=(1+|\lambda|^2)\,\varphi(0)+\lambda\varphi(h)+\bar\lambda\varphi(-h)=\int\omega^\sim(\chi)\,d\chi=$$
$$=(1+|\lambda|^2)\int\varphi^\sim(\chi)\,d\chi+\lambda\int\left(\int\varphi(g+h)\,e^{i\chi(g)}\,dg\right)d\chi+$$
$$+\bar\lambda\int\left(\int\varphi(g-h)\,e^{i\chi(g)}\,dg\right)d\chi=(1+|\lambda|^2)\int\varphi^\sim(\chi)\,d\chi+$$
$$+\lambda\int\varphi^\sim(\chi)\,e^{-i\chi(h)}\,d\chi+\bar\lambda\int\varphi^\sim(\chi)\,e^{i\chi(h)}\,d\chi,$$

или, принимая во внимание (2′),

$$\lambda\varphi(h)+\bar\lambda\varphi(-h)=\lambda\int\varphi^\sim(\chi)\,e^{-i\chi(h)}\,d\chi+\bar\lambda\int\varphi^\sim(\chi)\,e^{i\chi(h)}\,d\chi.$$

Поделив на λ и положив последовательно $\lambda=1$ и $\lambda=i$, получим:

$$\varphi(h)=\int\varphi^\sim(\chi)\,e^{-i\chi(h)}\,d\chi.$$

Тем самым теорема полностью доказана.

Теорема 2 (обобщенная теорема Планшереля). *Оператор*

$$Tx=\int x(g)\,e^{i\chi(g)}\,dg\qquad(x\in L^2(G)),$$

где под интегралом в правой части понимается предел в $L^2(X)$ *интегралов* Tx_n *для последовательности* $(x_n) \subset \subset L^{1,2}(G)$, *сходящейся в* $L^2(G)$ *к* x, *однозначно определен для всех* $x \in L^2(G)$ *и изометрично отображает* $L^2(G)$ *на* $L^2(X)$, *причем обратным ему служит оператор*

$$T^{-1}f = \int f(\chi)\, e^{-i\chi(g)}\, d\chi \qquad (f \in L^2(X)) \tag{5}$$

(*определенный аналогичным образом*), *так что имеют место равенства*

$$x(g) = \int \left(\int x(h)\, e^{i\chi(h)}\, dh \right) e^{-i\chi(g)}\, d\chi \tag{5'}$$

и

$$f(\chi) = \int \left(\int f(\xi)\, e^{-i\xi(g)}\, d\xi \right) e^{i\chi(g)}\, dg.$$

Доказательство. Пусть $u \in L^{1,2}(G)$. Тогда $u^* * u \in P$ и, согласно теореме 1, $(u^* * u)^{\sim} = |u^{\sim}(\chi)|^2 \in L^1(X)$, так что $u^{\sim} \in L^2(X)$, причем, по той же теореме,

$$(u^* * u)(g) = \int u(g+h)\, \overline{u(h)}\, dh =$$
$$= \int \left| \int u(h)\, e^{i\chi(h)}\, dh \right|^2 e^{-i\chi(g)}\, d\chi.$$

Полагая здесь $g = 0$, получаем:

$$\int |u(h)|^2\, dh = \int \left| \int u(h)\, e^{i\chi(h)}\, dh \right|^2 d\chi.$$

Таким образом, оператор T изометрично отображает $L^{1,2}(G)$ в $L^2(X)$. Так как $L^{1,2}(G)$ всюду плотно в $L^2(G)$, то он однозначно распространяется на всё $L^2(G)$ с сохранением изометричности (а тем самым и взаимной однозначности) отображения.

Покажем, что образом $L^2(G)$ служит при этом всё $L^2(X)$. Для любого $\xi \in X$ и любой функции $z(g)$ на G положим $z_\xi(g) = e^{-i\xi(g)} z(g)$, откуда $z_\xi^{\sim}(\chi) = z^{\sim}(\chi - \xi)$ (см. стр. 163). Если $x \in L^1(G)$ и $\varphi \in P$, то также $x_\xi \in L^1(G)$ и, как было указано на стр. 163, $\varphi_\xi \in P$. Так как при этом, в силу формулы (2′) § 22, $|\varphi_\xi(g)| \leqslant \varphi_\xi(0)$, то

$$|(\varphi_\xi * x_\xi)(g)| \leqslant \|x_\xi\| \varphi_\xi(0) = \|x\| \varphi(0),$$

так что $\varphi_\xi * x_\xi$ как ограниченная функция из $L^1(G)$ принадлежит $L^2(G)$, причем $(\varphi_\xi * x_\xi)^\sim \in L^2(X)$.

Пусть теперь функция $f \in L^2(X)$ ортогональна к $TL^2(G)$. В силу только что сказанного, для любых $\xi \in X$, $x \in L^1(G)$ и $\varphi \in P$ имеем:

$$\int f(\chi+\xi)\varphi^\sim(\chi)x^\sim(\chi)\,d\chi = \int f(\chi)\varphi^\sim(\chi-\xi)x^\sim(\chi-\xi)\,d\chi =$$
$$= \int f(\chi)(\varphi_\xi * x_\xi)^\sim(\chi)\,d\chi = 0.$$

Умножая первый интеграл на $\overline{f(\xi)}$, интегрируя по ξ и применяя теорему Фубини, получаем:

$$\int (f^* * f)(\chi)\varphi^\sim(\chi)x^\sim(\chi)\,d\chi = 0. \qquad (6)$$

Но, в силу леммы 2 § 22 (примененной к $L^2(X)$ вместо $L^2(G)$), $(f^* * f)(\chi)$ — непрерывная ограниченная функция. Поэтому $g(\chi) = (f^* * f)(\chi)\varphi^\sim(\chi)$ — непрерывная функция на X, стремящаяся к нулю при $\chi \to M_\infty$ и, следовательно, являющаяся сужением на X функции $g(M) \in C(\mathfrak{M})$, равной нулю в точке M_∞. В силу симметричности кольца $V(G)$ и теоремы 1 § 7, для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\mathfrak{z} = \lambda e + x \in V(G)$ такое, что

$$|g(M) - \lambda - x(M)| < \varepsilon \text{ для всех } M \in \mathfrak{M};$$

беря здесь $M = M_\infty$, получаем $|\lambda| < \varepsilon$ и, следовательно, $|g(\chi) - x^\sim(\chi)| < 2\varepsilon$ для всех $\chi \in X$. Так как, вследствие теоремы 1, $g \in L^1(X)$ и, значит, в силу своей ограниченности, $g \in L^2(X)$, то, принимая во внимание (6), получаем:

$$\int g^2(\chi)\,d\chi = \int g^2(\chi)\,d\chi - \int g(\chi)x^\sim(\chi)\,d\chi =$$
$$= \int g(\chi)[g(\chi) - x^\sim(\chi)]\,d\chi \leqslant 2\varepsilon \int g(\chi)\,d\chi.$$

Вследствие произвольности ε заключаем, что $\int g^2(\chi)\,d\chi = 0$, откуда, будучи непрерывной, $g(\chi) = (f^* * f)(\chi)\varphi^\sim(\chi) \equiv 0$. Но, как следует из леммы § 24, для каждого $\chi_0 \in X$ существует $\varphi \in P$ такое, что $\varphi^\sim(\chi_0) \neq 0$. Следовательно, $(f^* * f)(\chi) \equiv 0$. Полагая здесь $\chi = 0$, получаем $\int |f(\xi)|^2\,d\xi = 0$, т. е. $f = 0$.

Так как $TL^2(G)$, в силу полноты $L^2(G)$ и изометричности T, замкнуто в $L^2(X)$, то тем самым и доказано, что $TL^2(G) = L^2(X)$.

Остается показать, что оператор, обратный к T, определяется формулой (5), т. е. что справедлива формула (5′). Но для функций $x \in P$, т. е. $x = u^* * u$, где $u \in L^{1,2}(G)$, справедливость формулы (5′) установлена теоремой 1. Так как

$$v^* * u = \frac{1}{4}[(u+v)^* * (u+v) - (u-v)^* * (u-v) + \\ + i(u+iv)^* * (u+iv) - i(u-iv)^* * (u-iv)],$$

то формула (5′) справедлива тогда также для всех функций $x = v^* * u$, где u, $v \in L^{1,2}(G)$. Но множество этих функций плотно в $L^2(G)$. Действительно, с одной стороны, множество всех ограниченных функций из $L^{1,2}(G)$ плотно в $L^2(G)$. С другой стороны, если $u \in L^{1,2}(G)$ и $|u(g)| \leqslant C$, то, беря $v = e_U^*$, где $\{e_U\}$ $(\subset L^{1,2}(G))$ — δ-последовательность, стягивающаяся к нулевому элементу группы G, имеем $|(v^* * u)(g)| \leqslant C$, и потому

$$\|v^* * u - u\|_2 = \left(\int |(e_U * u)(g) - u(g)|^2 \, dg\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \\ \leqslant (2C\|e_U * u - u\|_1)^{\frac{1}{2}},$$

так что, в силу леммы § 20, $\|v^* * u - u\|_2 \to 0$ при $U \to 0$. Таким образом, для любого $x \in L^2(G)$ существует сходящаяся к нему последовательность $(x_n) \subset L^2(G)$ такая, что

$$x_n(g) = \int \left(\int x_n(h) e^{i\chi(h)} \, dh\right) e^{-i\chi(g)} \, d\chi,$$

где интегралы понимаются в обычном смысле. Так как при этом, по доказанному, $x_n^\sim \to x^\sim$ в $L^2(X)$, то заключаем, что формула (5′) верна и для x, если понимать в ней интегралы в обобщенном смысле, определенном в формулировке теоремы 2.

Тем самым теорема 2 полностью доказана.

§ 26. Понтрягинский закон двойственности

При построении меры Хаара на группе характеров мы руководствовались формулами обращения для преобразования Фурье. Но для функций класса L^2 эти формулы симметричны относительно групп G и X, так что группа G как бы играет в них роль группы характеров группы X. В настоящем параграфе мы как раз и получим «закон двойственности», утверждающий, что G действительно есть группа характеров группы X, исходя из формул обращения для преобразования Фурье, доказанных в предыдущем параграфе.

Как уже отмечалось в начале § 24, G можно считать алгебраической подгруппой группы G^* характеров группы X.

Теорема 1 (понтрягинский закон двойственности). *G совпадает с G^* по запасу элементов и топологии.*

Доказательство. Прописные латинские буквы со звездочкой будут обозначать множества из G^*, те же буквы без звездочки — проекции этих множеств на G. $f^{\sim}(\chi)$, где $f \in L_1(X)$, будет означать $\int f(\chi)\, e^{ig^*(\chi)}\, d\chi$ $(g^* \in G^*)$; f_E, где E — множество из G или G^*, будет означать характеристическую функцию этого множества.

Доказательство будет проведено в несколько этапов.

1° *G есть гомеоморфная часть G^*.*

Действительно, множества

$$U^* = \{g^* \in G^*: \quad |f_k^{\sim}(g^*) - f_k^{\sim}(g_0)| < \varepsilon \qquad (k = 1, \ldots, n;\ f_k \in L^1(X))\} \tag{1}$$

образуют базис окрестностей элемента $g_0 \in G$ в группе G^*. Но функции $f^{\sim}(g)$, где $f \in L^1(X)$, непрерывны на G. В самом деле, для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое бикомпактное множество $\Delta \subset X$, что $\int\limits_{C\Delta} |f(\chi)|\, d\chi < \varepsilon$; в силу же леммы 2 § 23, существует такая окрестность нуля U группы G, что $|e^{ih(\chi)} - 1| < \varepsilon$ для всех $\chi \in \Delta$ и $h \in U$; поэтому

$$|f^{\sim}(g+h) - f^{\sim}(g)| \leqslant 2 \int\limits_{C\Delta} |f(\chi)|\, d\chi + \int\limits_{\Delta} |e^{ih(\chi)} - 1|\, |f(\chi)|\, d\chi < \varepsilon(2 + \|f\|)$$

для всех $h \in U$ и $g \in G$. Отсюда следует, что проекция

$$U = \{g \in G\colon\ |f_k^{\sim}(g) - f_k^{\sim}(g_0)| < \varepsilon \quad (k = 1, \ldots, n;\ f_k \in L^1(X))\}$$

всякой окрестности (1) есть открытое множество в G. С другой стороны, для каждой окрестности V нуля группы G существует окрестность нуля U^* группы G^* такая, что $U \subset V$. В самом деле, существует окрестность нуля W с бикомпактным замыканием, для которой $W - W \subset V$. Положим

$$\varphi(g) = \int f_W(g+h) f_W(h)\, dh.$$

Так как $\varphi \in P$, то, по теореме 1 § 25, $\varphi(g) = f^{\sim}(-g)$, где $f(\chi) = |f_W^{\sim}(\chi)|^2 \in L^1(X)$. Возьмем теперь

$$U^* = \{g^* \in G^*\colon\ |f^{\sim}(-g^*) - f^{\sim}(0)| < \varphi(0)\}.$$

Тогда

$$U = \{g \in G\colon\ |\varphi(g) - \varphi(0)| < \varphi(0)\} \subset W - W \subset V,$$

так как, очевидно, $\varphi(g) = 0$ вне $W - W$. Тем самым доказано, что топология, индуцируемая в G из G^*, совпадает с топологией, заданной в G.

2° *Кольцо* $V(X)$ *регулярно*, т. е. для любой точки $g_0^* \in G^*$ и ее окрестности V^* существует функция $f \in L^1(X)$ такая, что $f^{\sim}(g_0^*) \neq 0$ и $f^{\sim}(g^*) = 0$ всюду вне V^*.

Действительно, пусть W^* — окрестность нуля группы G^*, имеющая бикомпактное замыкание и такая, что $g_0^* + W^* - W^* \subset V^*$. Положим

$$\varphi(g^*) = \int f_{W^*}(g^* - g_0^* + h^*) f_{W^*}(h^*)\, dh^*$$

(где интегрирование производится по мере Хаара на группе G^*). Очевидно, $\varphi(g_0^*) > 0$ и $\varphi(g^*) = 0$ всюду вне $g_0^* + W^* - W^*$, а значит, тем более, вне V^*. Но так как $\varphi \in L^2(G^*)$, то, в силу теоремы 2 § 25, примененной к группам X и G^*, $\varphi(g^*) = f^{\sim}(g^*)$, где

$$f(\chi) = \int \varphi(g^*) e^{-ig^*(\chi)}\, dg^* = e^{-ig_0^*(\chi)} \left| \int f_{W^*}(h^*) e^{-ih^*(\chi)}\, dh^* \right|^2,$$

причем $f\in L^1(X)$, поскольку $f_{W^*}\in L^2(G^*)$ и, значит, по той же теореме, $\int f_{W^*}(h^*)\,e^{-ih^*(\chi)}\,dh^*\in L^2(X)$. Заметим, что $f(\chi)$ ограниченна.

3° *Если $f\in L^1(X)$ ограниченна и $f^\sim(g)=0$ для всех $g\in G$, то $f=0$.*

Действительно, в силу своей ограниченности, $f\in L^2(X)$, и поэтому на основании теоремы 2 § 25 почти для всех $\chi\in X$ имеет место равенство

$$f(\chi)=\int e^{i\chi(g)}f^\sim(-g)\,dg=0.$$

4° *G всюду плотна в G^*.*

Действительно, если бы существовало открытое множество $V^*\subset G^*$, не пересекающееся с G, то, в силу 2°, существовала бы ограниченная функция $f\in L^1(X)$ такая, что $f^\sim(g)=0$ для всех $g\in G$ и в то же время $f^\sim(g_0^*)\neq 0$ для некоторого $g_0^*\in V^*$. Но из 3° следует, что $f(\chi)$ должна была бы почти всюду равняться нулю и, значит, $f^\sim(g^*)$ должно было бы равняться нулю для всех $g^*\in G^*$, в противоречие с определением функции f.

5° $G=G^*$.

Действительно, в силу 1° существует окрестность U^* нуля группы G^* такая, что ее проекция U на G имеет в G бикомпактное замыкание $\overline{U}$. В силу 4°, U, а значит и $\overline{U}$, плотно в U^*. Но так как, в силу 1°, вложение G в G^* непрерывно, то $\overline{U}$ бикомпактно и тем самым замкнуто в G^*. Следовательно, $U^*\subset\overline{U}$. Пусть теперь g_0^*—произвольный элемент из G^*. В силу 4°, его окрестность $g_0^*-U^*$ содержит элемент $g_0\in G$. Но тогда $g_0^*\in g_0+U^*\subset g_0+\overline{U}\subset G$, т. е. $g_0^*\in G$.

Тем самым, G совпадает с G^* и по запасу элементов (5°), и по топологии (5°+1°), чем теорема полностью доказана.

§ 27. Положительно определенные функции

Функции, с помощью которых мы строили в §§ 22 и 24 положительные линейные функционалы на $V(G)$, принадлежат к классу так называемых *положительно определенных функций*, т. е. классу функций $\varphi(g)$ на G, характеризуемых следующим структурным свойством: для любого конечного набора элементов $g_1, \ldots, g_n$ группы G и комплексных чисел $\xi_1, \ldots, \xi_n$ имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \varphi(g_k - g_l)\bar{\xi}_k \xi_l \geqslant 0. \tag{1}$$

Действительно, если

$$\varphi(g) = \int u(g+h)\overline{u(h)}\,dh, \tag{2}$$

где $u \in L^2(G)$, то, составляя для φ форму (1), получим:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \varphi(g_k - g_l)\bar{\xi}_k \xi_l = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \bar{\xi}_k \xi_l \int u(g_k - g_l + h)\overline{u(h)}\,dh =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \bar{\xi}_k \xi_l \int u(g_k + h)\overline{u(g_l + h)}\,dh =$$

$$= \int \left| \sum_{k=1}^{n} \bar{\xi}_k u(g_k + h) \right|^2 dh \geqslant 0.$$

Оказывается, что в основе положительности функционалов J_φ, порождаемых функциями вида (2), лежит положительная определенность этих функций.

Теорема 1. *Выражение*

$$J_\varphi(\mathfrak{z}) = J_\varphi(\lambda e + x) = \lambda\varphi(0) + \int \varphi(-g)\,x(g)\,dg \tag{3}$$

является положительным линейным функционалом на $V(G)$ для каждой непрерывной положительно определенной функции $\varphi(g)$.

Доказательство. Установление положительности функционала (3), порожденного функцией (2), данное в доказательстве теоремы 1 § 22, опиралось в конечном счете на следующие свойства этой функции: $\varphi(g)$ непрерывна,

$$\varphi(-g) = \overline{\varphi(g)}, \tag{4}$$

$$|\varphi(g)| \leqslant \varphi(0) \tag{5}$$

и

$$J_\varphi(x^* * x) = \int \varphi(-g)\left(\int x(g+h)\overline{x(h)}\,dh\right)dg =$$

$$= \int\int \varphi(g-h)\overline{x(g)}\,x(h)\,dg\,dh \geqslant 0 \tag{6}$$

для всех $x, y \in L^1(G)$. Таким образом, нужно лишь показать, что свойствами (4), (5) и (6) обладает всякая непрерывная положительно определенная функция на G.

Полагая в (1) $n=2$, $g_1=g$, $g_2=0$, $\xi_1=1$, $\xi_2=\lambda$, получаем неравенство

$$\varphi(0)+\varphi(g)\lambda+\varphi(-g)\overline{\lambda}+\varphi(0)|\lambda|^2 \geqslant 0, \tag{7}$$

справедливое для всех комплексных значений λ. При $\lambda=0$ это дает $\varphi(0)\geqslant 0$. Поэтому $\varphi(g)\lambda+\varphi(-g)\overline{\lambda}$ вещественно для всех λ; так как и $\varphi(g)\lambda+\overline{\varphi(g)}\,\overline{\lambda}$ вещественно для всех λ, то, вычитая, получаем, что $[\varphi(-g)-\overline{\varphi(g)}]\,\overline{\lambda}$ вещественно для всех λ, откуда при $\lambda=i[\varphi(-g)-\overline{\varphi(g)}]$ следует (4).

Если теперь $\varphi(0)>0$, то, полагая в (7) $\overline{\lambda}=-\frac{\varphi(g)}{\varphi(0)}$, получаем $\varphi(0)-\frac{|\varphi(g)|^2}{\varphi(0)}\geqslant 0$, откуда следует (5). Если же $\varphi(0)=0$, то, полагая в (7) $\overline{\lambda}=-\varphi(g)$, получаем $-2|\varphi(g)|^2\geqslant 0$, откуда $\varphi(g)=0$, и значит, снова верно (5).

Наконец, неравенство (6), являющееся интегральным аналогом неравенства (1), вытекает из последнего с помощью следующего приема, принадлежащего Ф. Риссу [45].

Пусть сначала $x\in L(G)$, K — носитель x и $x\neq 0$, так что $\mu=m(K)>0$. Положим в (1) $\xi_k=x(g_k)$ $(k=1,\ldots,n)$ и, рассматривая $g_1,\ldots,g_n$ как независимые переменные, возьмем n-кратный интеграл от обеих частей неравенства

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\varphi(g_k-g_l)\,\overline{x(g_k)}\,x(g_l)\geqslant 0 \tag{1'}$$

по множеству K. Мы получим:

$$n\varphi(0)\mu^{n-1}\int_K |x(g)|^2\,dg+$$
$$+n(n-1)\mu^{n-2}\iint_{K\times K}\varphi(g-h)\,\overline{x(g)}\,x(h)\,dg\,dh\geqslant 0.$$

Поделив на $n(n-1)\mu^{n-2}$ и перейдя к пределу при $n\to\infty$, придем к неравенству

$$\iint_{K\times K}\varphi(g-h)\,\overline{x(g)}\,x(h)\,dg\,dh\geqslant 0,$$

т. е., принимая во внимание, что $x(g)=0$ вне K, — к неравенству (6), которое тем самым доказано для всякой функции $x\in L(G)$ (для $x(g)\equiv 0$ оно тривиально). А так как $L(G)$ плотно в $L^1(G)$, то, в силу вытекающей из (5) непрерывности функционала (3), неравенство (6) распространяется на все функции из $L^1(G)$.

Тем самым теорема 1 доказана.

Таким образом, отсутствие радикала в групповом кольце, теорема единственности для преобразования Фурье абсолютно интегрируемой функции и существование достаточного множества характеров, в конечном счете, являются следствиями существования на рассматриваемых группах достаточно большого количества положительно определенных функций.

Оказывается, что теорема 1 допускает обращение.

Лемма 1. *Если $\Phi(\mathrm{P})$ — неотрицательная вещественная вполне аддитивная регулярная функция множества* P *на теле борелевских множеств пространства* X *характеров коммутативной локально бикомпактной группы G, то*

$$\varphi(g) = \int_{\mathrm{X}} e^{-i\chi(g)}\, d\Phi(\chi) \tag{8}$$

— непрерывная положительно определенная функция на G.

Доказательство. В силу леммы 1 § 23, интеграл (8) существует для каждого $g \in G$. Далее, составляя для него форму (1) и принимая во внимание, что $\Phi(\mathrm{P}) \geqslant 0$, получаем:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \varphi(g_k - g_l)\,\bar{\xi}_k\xi_l = \int_{\mathrm{X}} \left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} e^{-i\chi(g_k-g_l)}\,\bar{\xi}_k\xi_l\right) d\Phi(\chi) =$$

$$= \int_{\mathrm{X}} \left|\sum_{k=1}^{n} e^{i\chi(g_l)}\,\xi_l\right|^2 d\Phi(\chi) \geqslant 0,$$

так что $\varphi(g)$ — положительно определенная функция. Наконец, из регулярности функции $\Phi(\mathrm{P})$ вытекает существование для каждого $\varepsilon > 0$ бикомпактного множества $\mathrm{K} \subset \mathrm{X}$ такого, что $\Phi(\mathrm{X} \diagdown \mathrm{K}) < \varepsilon$; так как при этом, по лемме 2 § 23, существует окрестность U нуля группы G такая, что

$$|e^{i\chi(h)} - 1| < \varepsilon \text{ для всех } h \in U \text{ и } \chi \in \mathrm{K},$$

то для всех $g \in G$ и $h \in U$ имеем:

$$|\varphi(g+h) - \varphi(g)| \leqslant \int_{\mathrm{K}} |e^{i\chi(h)} - 1|\, d\Phi(\chi) +$$
$$+ 2\Phi(\mathrm{X} \diagdown \mathrm{K}) < \varepsilon\,[\varphi(0) + 2],$$

так что $\varphi(g)$ непрерывна, и лемма полностью доказана.

Замечание. При доказательстве положительной определенности функции $\varphi(g)$ мы фактически воспользовались тем, что *каждый мультипликативный характер $e^{i\chi(g)}$ является положительно определенной функцией.*

Теорема 2. *Каждый положительный линейный функционал на $V(G)$ представим в виде*

$$f(\mathfrak{z}) = f(\lambda e + x) = \lambda\rho + J_{\varphi}(\mathfrak{z}), \tag{9}$$

где φ — *однозначно определенная непрерывная положительно определенная функция на* G, *а* $\rho \geqslant 0$. *При этом* $f = J_\varphi$, *т. е.* $\rho = 0$, *тогда и только тогда, когда* $f(e) = \lim\limits_{U \to 0} f(e_U)$, *где* $\{e_U\}$ — δ-*последовательность, стягивающаяся к нулю группы* G.

Доказательство. В силу теоремы 5′ § 8, для любого $\mathfrak{z} = \lambda e + x \in V(G)$ имеем:

$$f(\mathfrak{z}) = \int\limits_{\mathfrak{M}} \mathfrak{z}(M)\, d\Phi(M) = \int\limits_{\mathfrak{M}} [\lambda + x(M)]\, d\Phi(M),$$

где Φ — неотрицательная вещественная вполне аддитивная регулярная функция множества на теле борелевских множеств пространства $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов кольца $V(G)$. Принимая во внимание теорему 2 § 21 и применяя теорему Фубини, получаем:

$$\begin{aligned} f(\mathfrak{z}) &= \lambda\Phi(\mathfrak{M}) + \int\limits_{\mathrm{X}} x^{\sim}(\chi)\, d\Phi(\chi) = \\ &= \lambda\Phi(\mathfrak{M}) + \int\limits_{\mathrm{X}} \left(\int\limits_{G} e^{i\chi(g)} x(g)\, dg \right) d\Phi(\chi) = \\ &= \lambda\Phi(\mathfrak{M}) + \int\limits_{G} \left(\int\limits_{\mathrm{X}} e^{i\chi(g)}\, d\Phi(\chi) \right) x(g)\, dg = \\ &= \lambda\Phi(M_\infty) + \lambda\Phi(\mathrm{X}) + \int \varphi(-g)\, x(g)\, dg, \end{aligned}$$

где $\varphi(g) = \int\limits_{\mathrm{X}} e^{-i\chi(g)} d\Phi(\chi)$, по лемме 1, — непрерывная положительно определенная функция на G. Так как при этом $\Phi(\mathrm{X}) = \varphi(0)$, то мы и пришли к формуле (9), где $\rho = \Phi(M_\infty) \geqslant 0$. Беря здесь $\mathfrak{z} = e_U$, где $\{e_U\}$ — δ-последовательность, стягивающаяся к нулю группы G, и переходя к пределу при $U \to 0$, получаем:

$$\lim_{U \to 0} f(e_U) = \varphi(0).$$

С другой стороны, при $\mathfrak{z} = e$ имеем:

$$f(e) = \Phi(M_\infty) + \varphi(0).$$

Тем самым $\Phi(M_\infty) = 0$, т. е. $f(\mathfrak{z}) = J_\varphi(\mathfrak{z})$, тогда и только тогда, когда $f(e) = \lim\limits_{U \to 0} f(e_U)$. Наконец, однозначная определенность функции φ следует из того, что если $\int \varphi(-g)\, x(g)\, dg = \int \psi(-g)\, x(g)\, dg$ для всех $x \in L^1(G)$, а φ и ψ непрерывны, то $\varphi(g) \equiv \psi(g)$.

Тем самым теорема 2 полностью доказана. Вместе с тем в процессе доказательства мы фактически получили и предложение, обратное утверждению леммы 1, являющееся обобщением известных теорем Герглотца [23] и Бохнера [6] о представлении положительно определенных функций, заданных на аддитивной группе целых чисел и аддитивной топологической группе вещественных чисел соответственно:

Теорема 3 (обобщенная теорема Бохнера). *Каждая непрерывная положительно определенная функция $\varphi(g)$, заданная на коммутативной локально бикомпактной группе G, может быть представлена, и притом единственным образом, в виде*

$$\varphi(g) = \int_{X} e^{-i\chi(g)}\, d\Phi(\chi), \tag{8}$$

где Φ — неотрицательная вещественная вполне аддитивная регулярная функция множества на теле борелевских множеств пространства X характеров группы G.

Действительно, следует лишь применить доказательство теоремы 2 к тому случаю, когда f есть функционал J_φ (положительный по теореме 1). Впрочем, доказательство теоремы 3 можно провести и несколько более прямым путем: вследствие теоремы 1 настоящего параграфа и теоремы 5′ § 8

$$\int \varphi(-g)\, x(g)\, dg = \int_{X} x^{\sim}(\chi)\, d\Phi(\chi)$$

(поскольку $x(M_\infty) = 0$). Беря здесь $x = e_{g_0+U}$, где $\{e_{g_0+U}\}$ — δ-последовательность, стягивающаяся к элементу $g_0 \in G$, переходя к пределу при $U \to 0$ и принимая во внимание теорему 1 § 21, получаем:

$$\varphi(-g_0) = \int e^{i\chi(g_0)}\, d\Phi(\chi),$$

т. е. по замене g_0 на $-g$ формулу (8).

Покажем в заключение, что формула обращения, установленная теоремой 1 § 24, справедлива для класса $P(G)$ всех непрерывных абсолютно интегрируемых положительно определенных функций на G.

Лемма 2. *Если $\varphi \in P(G)$, то $\varphi^{\sim}(\chi) \geqslant 0$ для всех $\chi \in X$.*

Доказательство. Так как $\varphi = \varphi^*$, то $\varphi^{\sim}(\chi)$ вещественна. Пусть, вопреки утверждению леммы, $\varphi^{\sim}(\chi_0) < 0$. Будучи непрерывной, $\varphi^{\sim}(\chi) < 0$ на некоторой окрестности V точки χ_0. В силу установленного в пункте 4 доказательства теоремы 1′ § 7, существует функция $f_0 \in L_+(X)$, для которой $\Delta_{f_0} \subset V$ и $f_0(\chi_0) = 1$. Тогда $\dfrac{f_0(\chi)}{\varphi^{\sim}(\chi)} \leqslant 0$ всюду на X и, в силу положительности функционала I_φ, имеем $I_\varphi\left(\dfrac{f_0}{\varphi^{\sim}}\right) \leqslant 0$. Но, с другой стороны, в силу теоремы 1, построение инвариантного интеграла на $L(X)$ можно было бы выполнить, пользуясь не классом P, как это было сделано в § 24, а более широким классом $\mathrm{P}(G)$. Тогда, по пункту 4 теоремы 1 § 24, $I_\varphi\left(\frac{f_0}{\varphi^\sim}\right)=I(f_0)>0$. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Лемма 3. *Если $\varphi\in\mathrm{P}(G)$, то для любого набора элементов $h_1,\ldots,h_m\in G$ и чисел $\eta_1,\ldots,\eta_m$ также*

$$\psi(g)=\sum_{i,j=1}^{m}\varphi(g+h_i-h_j)\overline{\eta}_i\eta_j\in\mathrm{P}(G).$$

Доказательство. Для любого набора элементов $g_1,\ldots$ $\ldots,g_n\in G$ и чисел $\xi_1,\ldots,\xi_n$, полагая $g_k^i=g_k+h_i$ и $\xi_k^i=\xi_k\eta_i$ и принимая во внимание положительную определенность функции $\varphi(g)$, имеем:

$$\sum_{k,l=1}^{n}\psi(g_k-g_l)\overline{\xi}_k\xi_l=\sum_{i,j=1}^{m}\sum_{k,l=1}^{n}\varphi\left(g_k^i-g_l^j\right)\overline{\xi_k^i}\,\xi_l^j\geqslant 0.$$

Непрерывность же и абсолютная интегрируемость функции $\psi(g)$ очевидны.

Теорема 4. *Если $\varphi\in\mathrm{P}(G)$, то $\varphi^\sim\in L^1(X)$ и*

$$\varphi(g)=\int e^{-i\chi(g)}\left(\int e^{i\chi(h)}\varphi(h)\,dh\right)d\chi.$$

Доказательство этой теоремы почти дословно повторяет доказательство теоремы 1 § 24, с теми лишь отличиями, что теперь $\varphi^\sim(\chi)\geqslant 0$ по лемме 2, а функция

$$\omega(g)=(1+|\lambda|^2)\,\varphi(g)+\lambda\varphi(g+h)+\overline{\lambda}\varphi(g-h)$$

принадлежит классу $\mathrm{P}(G)$ (заменяющему здесь класс P теоремы 1 § 24) в силу леммы 3 (с $m=2$, $h_1=h$, $h_2=0$, $\eta_1=\lambda$ и $\eta_2=0$).

ГЛАВА V

КОЛЬЦО ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ НА ПРЯМОЙ

§ 28. Функции с ограниченным изменением на прямой

Пусть $f(t)$ — функция с ограниченным изменением на прямой $-\infty < t < \infty$. Как известно, $f(t)$ может быть представлена в виде разности двух неубывающих функций с ограниченным изменением. Поэтому в каждой точке t существуют предел справа $f(t+0)$ и предел слева $f(t-0)$; кроме того, существуют предельные значения $f(-\infty)$ и $f(+\infty)$. Функция $f(t+0)$, очевидно, непрерывна справа и также имеет ограниченное изменение. Так как $f(t)$ может иметь, самое большее, счетное множество точек разрыва, то $f(t+0)$ всюду, за исключением, самое большее, счетного множества точек, совпадает с $f(t)$. Функция $f(t+0)$ уже не имеет устранимых точек разрыва; все ее точки разрыва — первого рода. В дальнейшем, говоря о функциях с ограниченным изменением, мы всюду будем иметь в виду функции, непрерывные справа, т. е. удовлетворяющие условию $f(t)=f(t+0)$.

Обозначим через $V^{(b)}$ линейное пространство всех комплексных функций $f(t)$, имеющих ограниченное изменение на $-\infty < t < \infty$, удовлетворяющих условию $f(-\infty)=0$ и непрерывных справа, с нормой

$$\|f\| = \operatorname{Var} f.$$

Пространство $V^{(b)}$ полное. В нем можно ввести операцию перемножения элементов, определив ее как «свертывание» по формуле

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)\, df_2(\tau).$$

Действительно, нетрудно проверить, что *если f_1, $f_2 \in V^{(b)}$, то также $f_1 * f_2 \in V^{(b)}$, причем* $\|f_1 * f_2\| \leqslant \|f_1\|\,\|f_2\|$. С помощью теоремы Фубини можно показать, что *свертывание ассоциативно и коммутативно*. Очевидно, функция

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < 0, \\ 1 & \text{при} \quad t \geqslant 0 \end{cases}$$

является единицей относительно свертывания, причем $\|\varepsilon\| = 1$. Таким образом, *$V^{(b)}$ является коммутативным нормированным кольцом с единицей.*

Пусть $f(t) \in V^{(b)}$. Функция

$$h(t) = \sum_{\lambda \leqslant t} \omega(\lambda),$$

где для краткости положено $f(\lambda) - f(\lambda - 0) = \omega(\lambda)$ и сумма распространена на все точки разрыва λ функции $f(t)$, лежащие не правее, чем t, называется *функцией скачков* или *дискретной частью* функции $f(t)$ *). Имеем:

$$\operatorname{Var} h = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} |f(\lambda) - f(\lambda - 0)| \leqslant \operatorname{Var} f < \infty.$$

Разность $f(t) - h(t) = c(t)$ называется *непрерывной частью* функции $f(t)$. В ней можно выделить *сингулярную часть*, т. е. непрерывное слагаемое $s(t)$, всё изменение которого сосредоточено на множестве меры 0, причем разность $c(t) - s(t) = g(t)$ уже *абсолютно непрерывна*, т. е., каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует $\delta > 0$ такое, что $\sum |g(t_{k+1}) - g(t_k)| < \varepsilon$ для всякой конечной системы неперекрывающихся интервалов (t_k, t_{k+1}), сумма длин которых меньше, чем δ; $s(t)$ есть непрерывная функция с ограниченным изменением, имеющая почти всюду производную, равную нулю. Таким образом, всякая функция $f(t) \in V^{(b)}$ может быть, и

*) Если $f(t)$ непрерывна, так что множество слагаемых указанной суммы пустое, то по общепринятому соглашению эту сумму следует считать равной нулю, т. е. функция скачков непрерывной функции с ограниченным изменением тождественно равна нулю.

притом единственным образом, представлена в виде суммы

$$f(t) = g(t) + h(t) + s(t),$$

где $g(t)$ абсолютно непрерывна, $h(t)$ — функция скачков и $s(t)$ — сингулярная функция. При этом

$$\|f\| = \|g\| + \|h\| + \|s\|.$$

Конечно, каждая из этих компонент может обращаться в нуль, т. е. фактически отсутствовать.

Абсолютно непрерывная функция $g(t) \in V^{(b)}$ характеризуется следующими свойствами: она имеет почти всюду производную $g'(t)$, причем $g'(t)$ абсолютно интегрируема и $g(t)$ является ее интегралом, т. е. $g(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} g'(\tau)\,d\tau$. Отсюда следует, что $\operatorname{Var} g = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |g'(t)|\,dt$. Далее, свертыванию абсолютно непрерывных функций соответствует свертывание их производных как функций из V, т. е. если

$$g(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_1(t-\tau)\,dg_2(\tau), \text{ то } g'(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_1'(t-\tau)\,g_2'(\tau)\,d\tau.$$

Все это показывает, что, отнеся каждому элементу $\lambda e + x(t) \in V$ функцию $\lambda\varepsilon(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$, мы получим изометричное и изоморфное вложение кольца V в кольцо $V^{(b)}$; иными словами, *кольцо V есть подкольцо кольца $V^{(b)}$*.

§ 29. Кольцо функций скачков

Так же естественно, как абсолютно непрерывные функции множества связаны с абсолютно интегрируемыми функциями, функции скачков связаны с «абсолютно суммируемыми» функциями *).

*) Ср. § 20. Чтобы сделать настоящую главу независимой от предыдущей, мы заново излагаем здесь сведения о групповом кольце дискретной аддитивной группы вещественных чисел, которые содержатся как частный случай среди результатов, полученных в гл. IV для произвольной дискретной коммутативной группы.

Комплексная функция $x(\lambda)$, определенная на бесконечном множестве Λ, называется *абсолютно суммируемой*, если она отлична от нуля не более чем на счетном множестве точек и

$$\|x\| = \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)| < +\infty. \tag{1}$$

Совокупность всех абсолютно суммируемых функций на Λ образует векторное пространство относительно обычного сложения и умножения на комплексные числа, а формула (1) определяет на нем норму, превращающую его в банаховское пространство; будем обозначать его $l^1(\Lambda)$.

Рассмотрим теперь $l^1(\Gamma)$, где Γ — дискретная аддитивная группа всех вещественных чисел. В $l^1(\Gamma)$ естественно вводится операция перемножения элементов, определенная как «свертывание» по формуле

$$(x * y)(\lambda) = \sum_{\mu} x(\lambda - \mu)\, y(\mu). \tag{2}$$

Ряд в правой части мажорируется рядом $\sum_{\mu} \|x\|\, |y(\mu)|$ и потому абсолютно сходится, так что функция $z(\lambda) = (x * y)(\lambda)$ определена для всех $\lambda \in \Gamma$. При этом сумма ряда (2) может отличаться от нуля лишь в точках λ вида $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, где $x(\lambda_1) \neq 0$ и $y(\lambda_2) \neq 0$ (ибо иначе все члены ряда равны нулю); таким образом, $z(\lambda)$ отлична от нуля не более чем на счетном множестве точек. Наконец,

$$\sum_{\lambda} |z(\lambda)| = \sum_{\lambda} \Big| \sum_{\mu} x(\lambda - \mu)\, y(\mu) \Big| \leqslant \sum_{\lambda} \sum_{\mu} |x(\lambda - \mu)|\, |y(\mu)| =$$
$$= \sum_{\mu} \Big(\sum_{\lambda} |x(\lambda - \mu)| \Big) |y(\mu)| = \|x\|\, \|y\|;$$

следовательно, для любых $x,\ y \in l^1(\Gamma)$ также $x * y \in l^1(\Gamma)$, причем $\|x * y\| \leqslant \|x\|\, \|y\|$. Очевидно, функция

$$e(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{при } \lambda = 0, \\ 0 & \text{при } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

является единицей относительно умножения, определенного формулой (2); при этом $\|e\| = 1$. Легко проверить также, что умножение (2) ассоциативно и коммутативно. Таким образом, $l^1(\Gamma)$ является коммутативным нормированным кольцом с единицей относительно этого умножения.

Пусть $h(\lambda) \in V^{(b)}$ — функция скачков. Положим

$$x_h(\lambda) = h(\lambda) - h(\lambda - 0).$$

Очевидно, $x_h(\lambda) \in l^1(\Gamma)$ и $\operatorname{Var} h = \|x_h\|$. При этом каждой функции $x(\lambda) \in l^1(\Gamma)$ отвечает однозначно определенная функция скачков $h(\lambda)$ такая, что $x(\lambda) = x_h(\lambda)$, а именно функция $h(\lambda) = \sum_{\mu \leqslant \lambda} x(\mu)$. Наконец, для произвольных двух функций скачков h_1 и h_2 имеем:

$$(h_1 * h_2)(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\lambda - \mu)\, dh_2(\mu) = \sum_{\mu} h_1(\lambda - \mu)\, x_{h_2}(\mu),$$

откуда следует, что $h_1 * h_2$ — также функция скачков, причем

$$x_{h_1 * h_2} = x_{h_1} * x_{h_2}.$$

Мы видим, таким образом, что *совокупность H всех функций скачков образует подкольцо нормированного кольца $V^{(b)}$, изометрически изоморфное кольцу $l^1(\Gamma)$ абсолютно суммируемых функций на дискретной аддитивной группе вещественных чисел.*

Основываясь на этом, мы будем в дальнейшем часто отождествлять кольца H и $l^1(\Gamma)$, всегда при этом подразумевая, что отождествление осуществлено посредством соответствия $h \to x_h$.

В кольце $l^1(\Gamma)$ имеется естественная инволюция (§ 8)

$$x(\lambda) \to x^*(\lambda) = \overline{x(-\lambda)}\ ^{*)}. \tag{3}$$

Рассмотрим на $l^1(\Gamma)$ функционал $f(x) = x(0)$. Так как $(x * x^*)(\lambda) = \sum_{\mu} x(\lambda - \mu)\overline{x(-\mu)}$, то $f(x * x^*) = \sum_{\mu} |x(\mu)|^2$, так что $f(x * x^*) > 0$ для всех ненулевых $x \in l^1(\Gamma)$, т. е. f — положительный линейный функционал на $l^1(\Gamma)$ и инволюция (3) существенная. Применяя теорему 4 § 8, заключаем, что $l^1(\Gamma)$, а значит и H, — *кольцо без радикала.*

Каждой функции $x(\lambda) \in l^1(\Gamma)$ можно отнести *ряд Фурье* $\sum_{\lambda} x(\lambda) e^{i\lambda s}$, очевидно, абсолютно и равномерно сходящийся

---

*) Индуцируемая инволюцией $f(t) \to f^*(t) = \overline{f}(\infty) - \overline{f}(-t-0)$ кольца $V^{(b)}$.

на всей вещественной прямой $-\infty < s < \infty$. Соответствие

$$x(\lambda) \to \sum_{\lambda} x(\lambda) e^{i\lambda s} \tag{4}$$

линейно. Нетрудно убедиться в том, что оно взаимно однозначно, т. е. (учитывая линейность) что *если* $x(\lambda) \in l^1(\Gamma)$ *и* $f(s) = \sum_{\lambda} x(\lambda) e^{i\lambda s} \equiv 0$, *то* $x = 0$. Действительно, это непосредственно следует из формулы

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(s)|^2 ds = \sum_{\lambda} |x(\lambda)|^2, \tag{5}$$

справедливость которой устанавливается простым прямым подсчетом (независимо от общей теории почти периодических функций).

Свертыванию абсолютно суммируемых функций отвечает перемножение их рядов Фурье. Действительно,

$$\sum_{\lambda} \left(\sum_{\mu} x(\lambda - \mu) y(\mu) \right) e^{i\lambda s} = \sum_{\mu} \left(\sum_{\lambda} x(\lambda - \mu) e^{i\lambda s} \right) y(\mu) =$$
$$= \sum_{\mu} \left(\sum_{\lambda} x(\lambda - \mu) e^{i(\lambda - \mu)s} \right) e^{i\mu s} y(\mu) =$$
$$= \sum_{\lambda} x(\lambda) e^{i\lambda s} \sum_{\mu} y(\mu) e^{i\mu s}. \tag{6}$$

Таким образом, *совокупность* $B^{(a)}$ *всех почти периодических функций Бора на прямой, разлагающихся в абсолютно сходящийся ряд Фурье, наделенная нормой*

$$\left\| \sum_{\lambda} x(\lambda) e^{i\lambda s} \right\| = \sum_{\lambda} |x(\lambda)|,$$

образует нормированное кольцо относительно обычных алгебраических операций над функциями, изометрически изоморфное кольцу H.

Вместе с тем равенство (6) показывает, что соответствие (4) при каждом фиксированном значении s является гомоморфизмом кольца $H = l^1(\Gamma)$ в тело комплексных чисел, и тем самым каждое вещественное число s определяет максимальный идеал кольца H. Этими максимальными идеалами M_s, однако, еще не исчерпывается пространство $\mathfrak{M}(H)$ максимальных идеалов кольца H.

Характером группы Γ называется всякое гомоморфное отображение ее в мультипликативную группу комплексных чисел, равных по модулю единице, т. е. комплексная функция $\chi(\lambda)$ вещественного переменного λ такая, что $|\chi(\lambda)| \equiv 1$ и $\chi(\lambda+\mu)=\chi(\lambda)\chi(\mu)$ для всех вещественных λ и μ. Взяв $\mu=0$, получаем, что $\chi(0)=1$. Взяв затем $\mu=-\lambda$, находим, что $\chi(-\lambda)=\frac{1}{\chi(\lambda)}=\overline{\chi(\lambda)}$. Очевидно, функция $\chi(\lambda)=e^{is\lambda}$ при каждом фиксированном вещественном s является характером группы Γ. Нетрудно показать, что этими функциями исчерпываются все характеры группы Γ, непрерывные в обычной топологии вещественной прямой. С другой стороны, с помощью аксиомы Цермело легко построить разрывные характеры [52]; все они неизмеримы.

Если χ_1 и χ_2 — характеры группы Γ, то также $\chi_1\chi_2^{-1}$ является ее характером. Таким образом, характеры группы Γ образуют группу относительно обычного умножения. *Группой характеров группы* Γ называется эта группа X, наделенная топологией, в которой всевозможные множества вида

$$\{\chi \in \mathrm{X}:\quad |\chi(\lambda_k)-\chi_0(\lambda_k)|<\varepsilon \qquad (k=1, \ldots, n)\}$$

образуют фундаментальную систему окрестностей точки $\chi_0 \in \mathrm{X}$.

Теорема 1. *Между пространством $\mathfrak{M}(H)$ максимальных идеалов кольца $H=l^1(\Gamma)$ и группой X характеров группы Γ имеется взаимно однозначное соответствие, при котором элемент $x \in l^1(\Gamma)$ принимает на максимальном идеале M_χ, соответствующем характеру χ, значение*

$$x(M_\chi)=\sum_\lambda x(\lambda)\chi(\lambda)$$

или, что то же, элемент $h \in H$ — значение

$$h(M_\chi)=\int_{-\infty}^{\infty}\chi(t)\,dh(t).$$

Это соответствие является гомеоморфизмом пространств $\mathfrak{M}(H)$ и X, так что группа X бикомпактна.

Доказательство. Пусть M — максимальный идеал кольца $l^1(\Gamma)$. Положим $e_\lambda(t)=e(t-\lambda)$. Тогда

$$\chi_M(\lambda)=e_\lambda(M) \tag{7}$$

будет характером группы Γ. В самом деле, так как $e_\lambda * e_\mu = e_{\lambda+\mu}$, то

$$\chi_M(\lambda+\mu) = e_{\lambda+\mu}(M) = e_\lambda(M)\, e_\mu(M) = \chi_M(\lambda)\,\chi_M(\mu); \quad (8)$$

далее, $|\chi_M(\lambda)| \leqslant \|e_\lambda\| = 1$ и $\chi_M(0) = e(M) = 1$, откуда в силу (8) следует, что $|\chi_M(\lambda)| \equiv 1$. Так как всякий элемент $x \in l^1(\Gamma)$ можно представить в виде $x = \sum\limits_\lambda x(\lambda)\, e_\lambda$, где ряд сходится по норме кольца $l^1(\Gamma)$, то из (7) следует, что

$$x(M) = \sum_\lambda x(\lambda)\,\chi_M(\lambda). \quad (9)$$

С другой стороны, поставив в соответствие каждому элементу $x \in l^1(\Gamma)$ число $\sum\limits_\lambda x(\lambda)\,\chi(\lambda)$, где χ — заданный характер группы Γ, мы получим гомоморфное отображение кольца $l^1(\Gamma)$ в тело комплексных чисел. Действительно, в проверке нуждается лишь переход произведения элементов кольца в произведение соответствующих им чисел; но для этого нужно лишь заменить в формулах (6) $e^{i\lambda s}$ любым характером $\chi(\lambda)$. Ядро M_χ этого гомоморфного отображения (ненулевого, поскольку e переходит в 1) есть максимальный идеал кольца $l^1(\Gamma)$. При этом $x(M_\chi) = \sum\limits_\lambda x(\lambda)\,\chi(\lambda)$ и, в частности,

$$e_\lambda(M_\chi) = \chi(\lambda). \quad (10)$$

Сравнение формул (7) и (10) показывает, что максимальный идеал M_χ, порожденный характером χ, в свою очередь порождает этот характер: $\chi = \chi_{M_\chi}$. Из (9) следует, что разные максимальные идеалы порождают разные характеры: если $\chi_{M_1}(\lambda) \equiv \chi_{M_2}(\lambda)$, то, в силу (9), $x(M_1) = x(M_2)$ для всех $x \in l^1(\Gamma)$, т. е. M_1 и M_2 совпадают. Из (10) следует, что разные характеры порождают разные максимальные идеалы: если $M_{\chi_1} = M_{\chi_2}$, то, в силу (10), $\chi_1(\lambda) = \chi_2(\lambda)$ для всех $\lambda \in \Gamma$, т. е. $\chi_1 = \chi_2$.

Наконец, так как функции e_λ ($\lambda \neq 0$) являются образующими кольца $l^1(\Gamma)$, то, согласно теореме 3 § 5, множества вида

$$\{M \in \mathfrak{M}(H)\colon \; |e_{\lambda_k}(M) - e_{\lambda_k}(M^0)| = \\ = |\chi_M(\lambda_k) - \chi_{M^0}(\lambda)| < \varepsilon \quad (k = 1, \ldots, n)\} \quad (11)$$

образуют фундаментальную систему окрестностей точки $M^0 \in \mathfrak{M}(H)$, так что, в силу установленного соответствия между максимальными идеалами кольца H и характерами группы Γ, пространства $\mathfrak{M}(H)$ и X гомеоморфны.

Тем самым теорема 1 полностью доказана.

Следствие. *Кольцо $H = l^1(\Gamma)$ симметрично.*

Действительно, в силу формулы (9),

$$x^*(M) = \sum_\lambda \overline{x(-\lambda)}\, \chi_M(\lambda) = \sum_\lambda \overline{x(\lambda)}\, \chi_M(-\lambda) =$$
$$= \overline{\sum_\lambda x(\lambda)\, \chi_M(\lambda)} = \overline{x(M)}.$$

Теорема 2. *Совокупность максимальных идеалов M_s кольца $H = l^1(\Gamma)$, соответствующих непрерывным характерам $\chi(\lambda) = e^{is\lambda}$ $(-\infty < s < \infty)$, всюду плотна в пространстве $\mathfrak{M}(H)$.*

Доказательство. Пусть M^0 — произвольный максимальный идеал кольца $H = l^1(\Gamma)$ и $U(M^0)$ — любая его окрестность; нужно показать, что существует максимальный идеал $M_{s_0} \in U(M^0)$. В силу сказанного в конце доказательства теоремы 1, $U(M^0)$ содержит окрестность $U'(M^0)$ вида (11). Из чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ можно по индукции отобрать числа $\lambda_{k_1}, \ldots, \lambda_{k_m}$ такие, что 1) λ_{k_j} $(j = 1, \ldots, \mu)$ линейно независимы над телом рациональных чисел, т. е. из равенства $\sum_{j=1}^{m} r_j \lambda_{k_j} = 0$, где r_j — рациональные числа, следует, что все $r_j = 0$, и 2) каждое λ_k разложимо в линейную комбинацию чисел λ_{k_j} с рациональными коэффициентами. Пусть A — наименьшее общее кратное знаменателей коэффициентов всех этих разложений. Числа λ_k будут выражаться через числа $\mu_j = \frac{1}{A}\lambda_{k_j}$ уже в виде линейных комбинаций с целыми коэффициентами. В то же время числа μ_j, как и λ_{k_j}, линейно независимы. Так как функции e_{λ_k} являются произведениями функций e_{μ_j}, то окрестность $U'(M^0)$ содержит окрестность $U''(M^0)$ вида

$$\{M \in \mathfrak{M}(H)\colon\ |e_{\mu_j}(M) - e_{\mu_j}(M^0)| =$$
$$= |\chi_M(\mu_j) - \chi_{M^0}(\mu_j)| < \delta \quad (j = 1, \ldots, m)\}.$$

Пусть $\chi_{M^0}(\mu_j)=e^{2\pi i a_j}$ $(j=1, \ldots, m)$ и $\mu>0$ таково, что $|e^{it_1}-e^{it_2}|<\delta$ при $|t_1-t_2|<\eta$. По известной теореме Кронекера существуют вещественное t_0 и целые числа $p_1, \ldots, p_m$ такие, что

$$|a_j-t_0\mu_j-p_j|<\frac{\eta}{2\pi}, \quad \text{т. е.} \quad |(2\pi a_j-2\pi p_j)-2\pi t_0\mu_j|<\eta$$

для всех $j=1, \ldots, m$. Тогда

$$\left|e^{2\pi i t_0\mu_j}-e^{2\pi i a_j}\right|=\left|e^{2\pi i a_j-2\pi i p_j}-e^{2\pi i t_0\mu_j}\right|<\delta \quad (j=1, \ldots, m),$$

т. е.

$$\left|e^{2\pi i t_0\mu_j}-\chi_{M^0}(\mu_j)\right|<\delta \qquad (j=1, \ldots, m).$$

Но это означает, что $U''(M^0)$, а тем самым и $U(M^0)$ содержит максимальный идеал M_{s_0}, где $s_0=2\pi t_0$, чем теорема и доказана.

Приведём доказательство, не опирающееся на теорему Кронекера.

Покажем, что

$$\left|\sum_\lambda x(\lambda)\chi(\lambda)\right| \leqslant \sup_s \left|\sum_\lambda x(\lambda)e^{i\lambda s}\right| \tag{12}$$

для всех $x \in l^1(\Gamma)$ и $\chi \in X$.

Пусть сначала x «финитно», т. е. $x(\lambda)$ отличается от нуля лишь в конечном числе точек $\lambda=\lambda_k$ $(k=1, \ldots, n)$, так что

$$\sum_\lambda x(\lambda)\chi(\lambda)=\sum_{k=1}^n x(\lambda_k)\chi(\lambda_k)=\sum_{k=1}^n c_k\chi(\lambda_k).$$

По неравенству Коши и формуле (5),

$$\left|\sum_{k=1}^n c_k\chi(\lambda_k)\right|^2 \leqslant \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \sum_{k=1}^n |\chi(\lambda_k)|^2=n\sum_{k=1}^n |c_k|^2=$$

$$=n\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|\sum_{k=1}^n c_k e^{i\lambda_k s}\right|^2 ds,$$

откуда

$$\left|\sum_{k=1}^n c_k\chi(\lambda_k)\right| \leqslant \sqrt{n}\sup_s\left|\sum_{k=1}^n c_k e^{i\lambda_k s}\right|.$$

Применим теперь это неравенство, справедливое для любой финитной функции из $l^1(\Gamma)$, к N-й итерации x^N нашей функции x. Так как x отлична от нуля в n точках, то, как нетрудно подсчитать, x^N может быть отличным от нуля не более чем в $\binom{N+n-1}{N}$ точках (где указанная граница достигается, когда числа λ_k линейно независимы). Поэтому

$$\left|\left(\sum_{k=1}^{n} c_k\chi(\lambda_k)\right)^N\right| \leqslant \sqrt{\binom{N+n-1}{N}} \sup_s \left|\sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda_k s}\right|^N,$$

т. е.

$$\left|\sum_{k=1}^{n} c_k\chi(\lambda_k)\right| \leqslant \binom{N+n-1}{N}^{\frac{1}{2N}} \sup_s \left|\sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda_k s}\right|. \tag{13}$$

Но $\binom{N+n-1}{N}^{\frac{1}{2N}} \to 1$ при $N \to \infty$. Переходя в (13) к пределу по $N \to \infty$, получаем, таким образом, что неравенство (12) справедливо для всех финитных функций из $l^1(\Gamma)$. А так как последние плотны в $l^1(\Gamma)$, в обеих же частях неравенства (12) стоят непрерывные функционалы, то заключаем, что оно справедливо для всех $x \in l^1(\Gamma)$.

Справедливость утверждения теоремы 2 легко следует теперь из неравенства (12) в силу симметричности кольца $l^1(\Gamma)$. Действительно, если бы существовал максимальный идеал $M^0 \in \mathfrak{M}(H)$, обладающий окрестностью $U(M^0)$, не пересекающейся с множеством $\{M_s\}$, то, в силу установленного в пункте 4 доказательства теоремы 1 § 7, на $\mathfrak{M}(H)$ существовала бы непрерывная функция $\varphi(M)$, равная 1 в точке M^0 и 0 на всем $\{M_s\}$, а в $l^1(\Gamma)$ — элемент x такой, что $|x(M) - \varphi(M)| < \frac{1}{2}$ для всех $M \in \mathfrak{M}(H)$, так что

$$|x(M_s)| = \left|\sum_{\lambda} x(\lambda) e^{i\lambda s}\right| < \frac{1}{2}$$

для всех s, а

$$|x(M^0)| = \left|\sum_{\lambda} x(\lambda)\chi_{M^0}(\lambda)\right| > \frac{1}{2}.$$

Но это противоречило бы неравенству (12), примененному к $\chi = \chi_{M^0}$.

Заметим, что топология, индуцируемая на прямой $-\infty < s < \infty$ из пространства $\mathfrak{M}(H)$ при отождествлении максимальных идеалов M_s с соответствующими точками s, отличается от обычной топологии прямой. А именно, определяющие окрестности имеют вид

$$\left\{s\colon \left|e^{i\lambda_k s} - e^{i\lambda_k s_0}\right| < \varepsilon \qquad (k = 1, \ldots, n)\right\};$$

каждое из указанных неравенств выделяет на прямой некоторую периодическую систему интервалов, а пересечение n таких систем дает «почти периодическую» систему интервалов, состоящую из бесконечного множества интервалов различной длины, встречающихся на каждом достаточно большом отрезке прямой и заполняющих его часть, составляющую почти одну и ту же долю его длины.

Следствие 1. *Если $f(s)$ — почти периодическая функция с абсолютно сходящимся рядом Фурье и $\inf\limits_{-\infty<s<\infty} |f(s)| > 0$, то $\frac{1}{f(s)}$ — также почти периодическая функция с абсолютно сходящимся рядом Фурье.*

В силу установленного выше изоморфизма между кольцами $B^{(a)}$ и $l^1(\Gamma)$, справедливость утверждения следует непосредственно из того, что непрерывная функция, нижняя грань модуля значений которой на всюду плотном множестве положительна, не может нигде обратиться в нуль.

Следствие 2. *Если $f(s)$ — почти периодическая функция с абсолютно сходящимся рядом Фурье и $F(\zeta)$ — аналитическая функция, регулярная на замыкании множества значений функции $f(s)$, то $F(f(s))$ — также почти периодическая функция с абсолютно сходящимся рядом Фурье.*

Из результатов этого параграфа вытекает также

Теорема 3. *Кольцо B всех непрерывных почти периодических функций на прямой изометрично и изоморфно кольцу $C(\mathfrak{X})$ всех непрерывных функций на группе $\mathfrak{X}$ характеров дискретной аддитивной группы Γ вещественных чисел.*

Доказательство. Пусть $f(\chi) \in C(\mathfrak{X})$ и $f(s)$—сужение $f(\chi)$ на множество непрерывных характеров $\{e^{is\lambda}\}$, отождествленных с соответствующими точками s вещественной прямой. Так как, по следствию теоремы 1, кольцо $l^1(\Gamma)$ симметрично, то, по теореме 1 § 7 и теореме 1, функции (9) плотны в $C(\mathfrak{X})$. Поэтому $f(s)$ есть равномерный предел их сужений на вещественную прямую, т. е. почти периодических функций с абсолютно сходящимся рядом Фурье, и, значит, $f(s) \in B$. Так как вещественная прямая, по теореме 2, плотна в пространстве $\mathfrak{X}$, то соответствие $f(\chi) \to f(s)$ взаимно однозначно. При этом каждая функция $f(s) \in B$ есть сужение некоторой функции $f(\chi) \in C(\mathfrak{X})$. Действительно, как известно, $f(s)$ является пределом последовательности тригонометрических полиномов $P_n(s) = \sum\limits_{k=1}^{k_n} c_k^{(n)} e^{i\lambda_k s}$, равномерно сходящейся на всей вещественной прямой; но тогда соответствующие полиномы $P_n(\chi) = \sum\limits_{k=1}^{k_n} c_k^{(n)} \chi(\lambda_k)$, в силу теоремы 2, равномерно сходятся на $\mathfrak{X}$

к некоторой функции $f(\chi) \in C(X)$, сужением которой на вещественную прямую и служит $f(s)$. Наконец, снова в силу теоремы 2, $\sup\limits_{-\infty<s<\infty} |f(s)| = \max\limits_{\chi \in X} |f(\chi)|$, так что соответствие $f(s) \to f(\chi)$ изометрично. Тем самым теорема 3 полностью доказана.

§ 30. Абсолютно непрерывные и дискретные максимальные идеалы кольца $V^{(b)}$

Мы переходим к изучению максимальных идеалов кольца $V^{(b)}$. В этом параграфе будут рассмотрены два простейших их класса.

Пусть $f(t) \in V^{(b)}$. Интеграл

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}\, df(t),$$

очевидно существующий для всех вещественных значений s, называется *преобразованием Фурье — Стильтьеса* функции $f(t)$. Ясно, что сложению функций из $V^{(b)}$ и умножению их на скаляры соответствуют те же операции над их преобразованиями Фурье — Стильтьеса. Свертыванию функций из $V^{(b)}$ соответствует перемножение их преобразований Фурье — Стильтьеса. Действительно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} d \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-u)\, df_2(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}\, df_1(t-u) \right) df_2(u) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{is(t-u)}\, df_1(t-u) \right) e^{isu}\, df_2(u) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}\, df_1(t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{isu}\, df_2(u).$$

Таким образом, поставив в соответствие каждой функции $f(t) \in V^{(b)}$ значение ее преобразования Фурье — Стильтьеса в произвольной фиксированной точке s_0, мы получим гомоморфное отображение кольца $V^{(b)}$ в тело комплексных чисел.

Максимальный идеал, порождаемый этим отображением, мы обозначим M_{s_0}. Таким образом,

$$f(M_{s_0}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{is_0t}\,df(t) = F(s_0).$$

Если $s_1 \neq s_2$, то $M_{s_1} \neq M_{s_2}$, так как найдется значение $t = t_0$ такое, что $e^{is_1t_0} \neq e^{is_2t_0}$, а тогда $f(M_{s_1}) \neq f(M_{s_2})$ для $f(t) = \varepsilon(t - t_0)$.

Максимальные идеалы M_s $(-\infty < s < \infty)$ мы будем называть *абсолютно непрерывными.*

Покажем, что *каждая функция* $f(t) \in V^{(b)}$ *однозначно определяется своими значениями на абсолютно непрерывных максимальных идеалах, т. е. своим преобразованием Фурье—Стильтьеса* $F(s)$. Очевидно, отсюда, в частности, будет следовать, что *кольцо* $V^{(b)}$ *не имеет радикала.*

Лемма. *Совокупность* G *всех абсолютно непрерывных функций* $g(t) \in V^{(b)}$ *есть идеал кольца* $V^{(b)}$.

Доказательство. Пусть $g(t) \in G$ и $f(t)$ — произвольная функция из $V^{(b)}$, отличная от нуля. Нам нужно показать, что $f * g \in G$. Пусть $\varepsilon > 0$ и пусть $\delta > 0$ таково, что

$$\sum |g(t_{k+1}) - g(t_k)| < \frac{\varepsilon}{\|f\|}$$

для всякой конечной системы неперекрывающихся интервалов (t_k, t_{k+1}), сумма длин которых меньше δ. Тогда

$$\sum |(f * g)(t_{k+1}) - (f * g)(t_k)| =$$

$$= \sum \left| \int_{-\infty}^{\infty} [g(t_{k+1} - \tau) - g(t_k - \tau)]\,df(\tau) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \sum |g(t_{k+1} - \tau) - g(t_k - \tau)|\,|df(\tau)| < \frac{\varepsilon}{\|f\|}\,\mathrm{Var}\,f = \varepsilon,$$

что и доказывает утверждение леммы.

Пусть теперь $f(t) \in V^{(b)}$ и $f(M_s) \equiv F(s) = 0$ для всех s. Положим

$$g_h(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < -h, \\ 1 + \dfrac{t}{h} & \text{при } -h \leqslant t \leqslant 0, \\ 1 & \text{при } t > 0, \end{cases}$$

$g_h(t)$ абсолютно непрерывна. Поэтому, в силу леммы 1, функция

$$(f * g_h)(t) = \frac{1}{h} \int_0^h f(t + \tau)\, d\tau$$

также абсолютно непрерывна и, значит, принадлежит кольцу V. При этом, в силу нашего предположения, $(f * g_h)(M_s) = f(M_s) g_h(M_s) \equiv 0$. Принимая во внимание теорему единственности для преобразования Фурье абсолютно интегрируемой функции *), заключаем отсюда, что $(f * g_h)(t) \equiv 0$. Но так как $f(t)$ непрерывна справа, то $(f * g_h)(t) \to f(t)$ при $h \to 0$. Следовательно, $f(t) \equiv 0$, что и требовалось доказать.

С л е д с т в и е. *Единственными максимальными идеалами кольца $V^{(b)}$, не содержащими идеал G, являются абсолютно непрерывные максимальные идеалы.*

Действительно, пусть M — максимальный идеал кольца $V^{(b)}$, не содержащий весь идеал G, т. е. существует абсолютно непрерывная функция $g_0(t) \in V^{(b)}$ такая, что $g_0(M) \neq 0$. Относя каждому элементу $\lambda e(t) + g(t)$ кольца V число $\lambda + g(M)$, мы получим гомоморфное отображение этого кольца в тело комплексных чисел, нетривиальное, ибо $g_0(t)$ перейдет в число, отличное от нуля. Согласно теореме 1 § 17, всякая абсолютно непрерывная функция $g(t) \in V^{(b)}$ при этом отображении перейдет в число

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{is_0 t}\, dg(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{is_0 t} g'(t)\, dt.$$

---

*) См., например, Е. Т и т ч м а р ш, Введение в теорию интегралов Фурье, М.—Л., 1948, теорема 120. (Теорема единственности доказана в гл. IV (§ 22) для функций, заданных на произвольных коммутативных локально бикомпактных группах.)

Пусть $f(t)$ — произвольная функция из $V^{(b)}$. Согласно лемме, $g(t)=(g_0 * f)(t)$ есть абсолютно непрерывная функция. Следовательно,

$$(g_0 * f)(M)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{is_0 t} d(g_0 * f)(t)=$$

$$=g_0(M) f(M)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{is_0 t}\, dg_0(t) \cdot f(M).$$

Но, с другой стороны,

$$(g_0 * f)(M)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{is_0 t}\, dg(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{is_0 t}\, dg_0(t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{is_0 t}\, df(t).$$

Так как первый множитель в правой части, по условию, отличен от нуля, то получаем:

$$f(M)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{is_0 t}\, df(t)$$

для любой $f(t) \in V^{(b)}$. Но это и означает, что $M=M_{s_0}$.

Таким образом, *на не абсолютно непрерывных максимальных идеалах все абсолютно непрерывные функции из* $V^{(b)}$ *обращаются в нуль.* Укажем простейший класс таких максимальных идеалов.

Заметим прежде всего, что *совокупность C всех непрерывных функций $c(t) \in V^{(b)}$ является идеалом кольца* $V^{(b)}$. Действительно, пусть $c(t) \in C$ и $f(t)$ — произвольная функция из $V^{(b)}$, отличная от нуля. Пусть ε — произвольное фиксированное положительное число. Существует такой отрезок $[-A, A]$, что полное изменение $c(t)$ вне этого отрезка меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2\|f\|}$. Пусть $\delta>0$ таково, что $|c(t')-c(t)|<\frac{\varepsilon}{2\|f\|}$ для всех точек t, t' отрезка $[-A, A]$, удовлетворяющих неравенству $|t'-t|<\delta$. Тогда $|c(t')-c(t)|<\frac{\varepsilon}{\|f\|}$ для любых точек t, t' вещественной прямой, удовлетворяющих указанному неравенству. Поэтому

$$|(c*f)(t') - (c*f)(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} [c(t'-\tau) - c(t-\tau)]\, df(\tau) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |c(t'-\tau) - c(t-\tau)|\, |df(\tau)| < \frac{\varepsilon}{\|f\|} \operatorname{Var} f = \varepsilon,$$

т. е. $(c*f)(t)$ непрерывна, что и доказывает наше утверждение. Из него следует, что *функция скачков свертки двух функций из $V^{(b)}$ равна свертке их функций скачков.* Действительно, пусть $f_1(t) = c_1(t) + h_1(t)$, $f_2(t) = c_2(t) + h_2(t)$ (c_1, $c_2 \in C$; h_1, $h_2 \in H$). Тогда

$$(f_1 * f_2)(t) = [(c_1 * c_2)(t) + (c_1 * h_2)(t) + (c_2 * h_1)(t)] + (h_1 * h_2)(t),$$

и выражение, стоящее в квадратных скобках в правой части, является, по доказанному, непрерывной функцией, последнее же слагаемое правой части, как было показано в предыдущем параграфе, есть функция скачков.

Пусть теперь M — произвольный максимальный идеал кольца H. По теореме 1 § 29 он порождается некоторым характером χ дискретной аддитивной группы Γ всех вещественных чисел. Поставим в соответствие каждой функции $f(t) \in V^{(b)}$ число $h(M) = \sum_{\lambda} x_h(\lambda)\chi(\lambda)$, где $h(t)$ — функция скачков функции $f(t)$ и $x_h(\lambda) = h(\lambda) - h(\lambda - 0) = f(\lambda) - f(\lambda - 0)$. Из только что доказанного следует, что мы получим гомоморфное отображение кольца $V^{(b)}$ в тело комплексных чисел. Максимальный идеал, порождаемый этим отображением, мы обозначим $M_{\chi\mathcal{N}}$ *).

Очевидно, $c(M_{\chi\mathcal{N}}) = 0$ для всякой непрерывной функции $c(t) \in V^{(b)}$ и всякого максимального идеала $M_{\chi\mathcal{N}}$. Нетрудно видеть, что и обратно, если $c(M) = 0$ для всякой непрерывной функции $c(t) \in V^{(b)}$, то $M = M_{\chi\mathcal{N}}$. Действительно, максимальный идеал M кольца $V^{(b)}$ порождает некоторый максимальный идеал кольца H; следовательно, в силу

*) Смысл этого обозначения выяснится в следующем параграфе.

теоремы 1 § 29, существует такой характер χ дискретной аддитивной группы Γ вещественных чисел, что $h(M) = \sum_{\lambda} x_h(\lambda)\chi(\lambda)$ для всякой функции $h(t) \in H$. Так как, в силу предположения, для всякой функции $f(t) = c(t) + h(t) \in V^{(b)}$ имеем: $f(M) = c(M) + h(M) = h(M)$, то $M = M_{\chi\mathcal{N}}$.

Максимальные идеалы $M_{\chi\mathcal{N}}$ мы будем называть *дискретными максимальными идеалами* кольца $V^{(b)}$.

Для каждого абсолютно непрерывного максимального идеала M_s существует непрерывная функция $g(t) \in V^{(b)}$ такая, что $g(M_s) \neq 0$. Таким образом, дискретные максимальные идеалы отличны от абсолютно непрерывных.

§ 31. Сингулярные максимальные идеалы кольца $V^{(b)}$

Классами абсолютно непрерывных и дискретных максимальных идеалов отнюдь не исчерпывается совокупность всех максимальных идеалов кольца $V^{(b)}$. Мы укажем сейчас конструкцию, дающую как эти классы (в качестве двух крайних частных случаев), так и обширное семейство новых классов максимальных идеалов кольца $V^{(b)}$. Но для этого нам нужно будет перейти к трактовке функций с ограниченным изменением на прямой как функций множества.

Рассмотрим сначала неубывающие вещественные функции $f(t) \in V^{(b)}$. Пусть $f(t)$ — такая функция, и пусть F — произвольное ограниченное замкнутое множество на прямой $-\infty < t < \infty$. Положим

$$f(F) = \inf\{[f(t_1') - f(t_1)] + [f(t_2') - f(t_2)] + \ldots \\ \ldots + [f(t_n') - f(t_n)]\},$$

где нижняя грань берется по всем конечным системам неперекрывающихся интервалов (t_1, t_1'), (t_2, t_2'), ..., (t_n, t_n'), покрывающим множество F. Для произвольного борелевского множества E точек прямой $-\infty < t < \infty$ положим затем

$$f(E) = \sup f(F^E),$$

где верхняя грань берется по всем ограниченным замкнутым множествам F^E, содержащимся в E. Можно показать, что

$f(E)$ — вполне аддитивная функция, т. е. для всякой конечной или счетной системы попарно непересекающихся борелевских множеств E_1, E_2, ... имеет место равенство

$$f(E_1 \cup E_2 \cup \ldots) = f(E_1) + f(E_2) + \ldots$$

Для множества $E_t = (-\infty, t]$ будем иметь: $f(E_t) = f(t+0) - f(-\infty) = f(t)$.

Будем обозначать полное изменение функции $f(t)$ на интервале $(-\infty, t]$ (являющееся функцией от t) через $(\operatorname{Var} f)(t)$. Пусть $f(t)$ — произвольная функция из $V^{(b)}$. Тогда ее вещественная и мнимая части $\Re f(t)$ и $\Im f(t)$ — также функции из $V^{(b)}$. Но каждую вещественную функцию $\varphi(t) \in V^{(b)}$ можно представить в виде разности $\varphi(t) = \varphi^+(t) - \varphi^-(t)$, где $\varphi^+(t)$ и $\varphi^-(t)$ — неубывающие функции с ограниченным изменением, однозначно определяемые функцией $\varphi(t)$:

$$\varphi^+(t) = \frac{1}{2}[(\operatorname{Var} f)(t) + \varphi(t)], \quad \varphi^-(t) = \frac{1}{2}[(\operatorname{Var} f)(t) - \varphi(t)].$$

Для всякой функции $f(t) \in V^{(b)}$ мы положим теперь

$$f(E) = (\Re f)^+(E) - (\Re f)^-(E) + i(\Im f)^+(t) - i(\Im f)^-(t).$$

Равенство $f(E_t) = f(t)$ показывает, что функция $f(t) \in V^{(b)}$ однозначно определяется порожденной ею функцией множества $f(E)$. Функция $f(t) \in V^{(b)}$ непрерывна тогда и только тогда, когда $f(E) = 0$ для всякого одноточечного множества E. $f(t) \in V^{(b)}$ абсолютно непрерывна тогда и только тогда, когда $f(E) = 0$ для всякого борелевского множества E лебеговой меры 0. $f(t) \in V^{(b)}$ сингулярна тогда и только тогда, когда она непрерывна и существует борелевское множество E_0 лебеговой меры 0 такое, что $f(E) = 0$ для всякого борелевского множества E, не пересекающегося с E_0.

Функции множества $f(E)$, порождаемые неотрицательными вещественными функциями $f(t) \in V^{(b)}$, мы будем называть *мерами*.

Свертыванию функций из $V^{(b)}$ будет отвечать следующая операция над соответствующими функциями множества:

$$(f_1 * f_2)(E) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(E - u)\, df_2(u),$$

где интеграл понимается в смысле Лебега — Стильтьеса. С этой операцией тесно связана операция арифметического суммирования множеств.

Арифметической суммой множеств A и B мы будем называть множество, составленное из всех точек вида $a+b$, где $a\in A$, $b\in B$. Для обозначения арифметической суммы множеств мы будем пользоваться обычным знаком $+$. Очевидно, если A и B содержат точку 0, то $A\subset A+B$ и $B\subset A+B$. Нетрудно проверить, что если A и B — ограниченные замкнутые множества, то $A+B$ также замкнуто. Если A и B — аналитические множества, то $A+B$ также есть аналитическое множество [47] *). Через $(n)A$ будем обозначать сумму $A+A+\ldots+A$, где A взято слагаемым n раз.

Лемма. *Если A имеет положительную меру, то $(2)A$ содержит отрезок.*

Доказательство. Очевидно, достаточно рассмотреть тот случай, когда мера $m(A)$ множества A конечна. Пусть $f_A(t)$ — характеристическая функция множества A; образуем функцию

$$\varphi(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_A(t-u)\,f_A(u)\,du.$$

Эта функция не равна тождественно нулю, так как

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,dt=\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_A(u)\,du\right)^2=[m(A)]^2,$$

а $m(A)$ — мера множества A — по условию отлична от нуля. Так как $f_A(u)$ ограниченна, то $\varphi(t)$ непрерывна (см., например, лемму § 16). Таким образом, существует отрезок, на котором $\varphi(t)$ не обращается в нуль. Но $\varphi(t)$, как непосредственно следует из определяющей ее формулы, может быть отлична от нуля лишь в точках множества $(2)A$. Следовательно, $(2)A$ содержит отрезок, и лемма доказана.

Основываясь на этой лемме, покажем, что существуют совершенные множества F, для которых $(n)F$ есть множе-

*) Если A и B — измеримые по Лебегу, но не аналитические множества, то $A+B$ может быть и неизмеримым; см. [47].

ство меры 0 при любом n. Примером такого множества F может служить совокупность всех правильных дробей (включая и 0), в разложении которых в конечную или бесконечную двоичную дробь цифра 1 может встречаться лишь на местах с номерами a_n, где $\varliminf_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\infty$. Действительно, так как цифра 1 на месте с номером a_n+1 может появиться лишь от сложения цифр 1, стоящих на местах с номерами $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$, то дробь, содержащая цифру 1 на месте с номером a_n+1, может быть представлена лишь в виде суммы дробей из F, содержащей по меньшей мере $a_{n+1}-a_n$ слагаемых. Так как разность $a_{n+1}-a_n$ может быть произвольно большой, то заключаем отсюда, что дробь, a_N-й остаток которой равен $\sum\limits_{n=N}^{\infty} 2^{-a_n-1}$, не может содержаться ни в одном из множеств $(n)F$. Но дроби с остатками указанного вида расположены всюду плотно на прямой. Следовательно, $(n)F$ ни при каком n не может содержать целого отрезка. Но если бы $(n)F$ при некотором n имело положительную меру, то, в силу леммы, множество $(2n)F$ содержало бы отрезок, что, как мы выяснили, невозможно. Таким образом, все $(n)F$ имеют меру нуль, и наше утверждение доказано.

Пусть теперь $\mathcal{F}$ означает непустое семейство множеств типа F_σ (т. е. конечных или счетных объединений ограниченных замкнутых множеств), обладающее следующими свойствами:

1° если $A\in\mathcal{F}$ и A' — произвольное подмножество типа F_σ множества A, то также $A'\in\mathcal{F}$;

2° если $A_1, A_2, \ldots$ — конечная или счетная совокупность множеств, содержащихся в $\mathcal{F}$, то $A_1\cup A_2\cup\ldots$ также содержится в $\mathcal{F}$;

3° если $A\in\mathcal{F}$, то также $A-t\in\mathcal{F}$ для всех t, $-\infty<t<\infty$;

4° если $A\in\mathcal{F}$, то также $(2)A\in\mathcal{F}$.

Очевидно, беря систему всех подмножеств типа F_σ какого-нибудь множества A и произведя над ними, равно как и над получающимися новыми множествами, всевозможными способами операции, указанные в 1°—4°, мы получим семейство $\mathcal{F}_A$, обладающее всеми перечисленными свойствами.

Мы будем говорить, что функция $f(E)$ *сосредоточена вне* $\mathcal{F}$, если $f(A)=0$ для всех $A \in \mathcal{F}$; мы будем говорить, что функция f из $V^{(b)}$ *сосредоточена в* $\mathcal{F}$, если

$$(\operatorname{Var} f)(E) = \sup_{\substack{A \subset E \\ A \in \mathcal{F}}} (\operatorname{Var} f)(A)$$

для каждого борелевского множества E *). Если f сосредоточена в некотором множестве A из $\mathcal{F}$, т. е. $f(E)=f(E \cap A)$ для всякого борелевского множества E, то f, очевидно, сосредоточена в $\mathcal{F}$. Но и обратно, *если f сосредоточена в $\mathcal{F}$, то она сосредоточена в некотором A из $\mathcal{F}$.*

Действительно, если f сосредоточена в $\mathcal{F}$, то для каждого n существует $A_n \in \mathcal{F}$ такое, что $(\operatorname{Var} f)(A_n) > \operatorname{Var} f - \frac{1}{n}$. Тогда для $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ получаем: $(\operatorname{Var} f)(A) = \operatorname{Var} f$; при этом $A \in \mathcal{F}$ (свойство 2°). Очевидно, $f(E)=f(E \cap A)$ для всякого борелевского множества E.

Если f_1 сосредоточена в $\mathcal{F}$, а f_2 — вне $\mathcal{F}$, то $\operatorname{Var}(f_1+f_2)=\operatorname{Var} f_1+\operatorname{Var} f_2$. Действительно, по доказанному, f_1 сосредоточена в некотором $A \in \mathcal{F}$; очевидно, f_2 сосредоточена в CA. Имеем:

$$\operatorname{Var}(f_1+f_2) = (\operatorname{Var}(f_1+f_2))(A) + (\operatorname{Var}(f_1+f_2))(CA) =$$
$$= (\operatorname{Var} f_1)(A) + (\operatorname{Var} f_2)(CA) = \operatorname{Var} f_1 + \operatorname{Var} f_2.$$

Если f_1 и f_2 сосредоточены в $\mathcal{F}$, то также любая их линейная комбинация $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ сосредоточена в $\mathcal{F}$. Действительно, по доказанному, f_1 сосредоточена в некотором $A_1 \in \mathcal{F}$ и f_2 — в некотором $A_2 \in \mathcal{F}$; но тогда обе эти функции, а значит и любые их линейные комбинации, сосредоточены в $A = A_1 \cup A_2$ и, следовательно, в $\mathcal{F}$. Очевидно, *если f_1 и f_2 сосредоточены вне $\mathcal{F}$, то и любая их линейная комбинация $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ сосредоточена вне $\mathcal{F}$.*

Каждая функция f из $V^{(b)}$ однозначно разложима в сумму двух слагаемых, также из $V^{(b)}$, одно из кото-

*) Так как, по условию, $\mathcal{F}$ не пусто, то, в силу свойств 1° и 3°, оно содержит все одноточечные множества; поэтому множества A из $\mathcal{F}$, содержащиеся в E, существуют.

рых сосредоточено в $\mathcal{F}$, а другое — вне $\mathcal{F}$. В силу только что доказанного, возможность разложения указанного вида достаточно доказать для мер, так как всякая функция $f(E)$ из $V^{(b)}$ является линейной комбинацией мер. Положим

$$f_{\mathcal{F}}(E)=\sup_{\substack{A\subset E\\ A\in\mathcal{F}}} f(A),\qquad f_{C\mathcal{F}}(E)=f(E)-f_{\mathcal{F}}(E).$$

Легко проверить, используя свойства 1° и 2°, что $f_{\mathcal{F}}(E)$ (а значит, и $f_{C\mathcal{F}}(E)$) вполне аддитивна. Очевидно, $f(A)=f_{\mathcal{F}}(A)$ и, следовательно, $f_{C\mathcal{F}}(A)=0$ для всякого $A\in\mathcal{F}$. Таким образом, $f_{C\mathcal{F}}$ сосредоточена вне $\mathcal{F}$. Далее, $f_{\mathcal{F}}(E)=$ $=\sup\limits_{\substack{A\subset E\\ A\in\mathcal{F}}} f(A)=\sup\limits_{\substack{A\subset E\\ A\in\mathcal{F}}} f_{\mathcal{F}}(A)$, т. е. $f_{\mathcal{F}}$ сосредоточена в $\mathcal{F}$.

Пусть теперь $f=f_1+f_2=f_3+f_4$, где f_1 и f_3 сосредоточены в $\mathcal{F}$, а f_2 и f_4 — вне $\mathcal{F}$. Тогда

$$0=(f_1-f_3)+(f_2-f_4),$$

и так как f_1-f_3 сосредоточена в $\mathcal{F}$, а f_2-f_4 сосредоточена вне $\mathcal{F}$, то, по ранее доказанному,

$$0=\mathrm{Var}(f_1-f_3)+\mathrm{Var}(f_2-f_4),$$

откуда следует, что $f_3=f_1$, $f_4=f_2$, т. е. указанное разложение функции f единственно.

Совокупность $V_{C\mathcal{F}}$ всех функций из $V^{(b)}$, сосредоточенных вне $\mathcal{F}$, есть идеал кольца $V^{(b)}$. Действительно, как мы указывали, $V_{C\mathcal{F}}$ есть линейная система. Пусть теперь $f\in V_{C\mathcal{F}}$ и A — произвольное множество из $\mathcal{F}$; тогда также $A-t\in\mathcal{F}$ для любого t (свойство 3°); поэтому $f(A-t)\equiv 0$ и, значит, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(A-t)\,df_1(t)=0$, т. е. $f*f_1\in V_{C\mathcal{F}}$ для произвольной функции $f_1\in V^{(b)}$.

Совокупность $V_{\mathcal{F}}$ всех функций из $V^{(b)}$, сосредоточенных в $\mathcal{F}$, есть подкольцо кольца $V^{(b)}$. Действительно, как было показано, $V_{\mathcal{F}}$ есть линейная система. Остается показать, что если f_1 и $f_2\in V_{\mathcal{F}}$, то также $f_1*f_2\in V_{\mathcal{F}}$. Очевидно, при этом достаточно ограничиться случаем, когда $f_1(E)$ и $f_2(E)$ — меры. Как мы видели выше, при доказательстве линейности системы $V_{\mathscr{F}}$, функции f_1 и f_2 сосредоточены на некотором множестве $A \in \mathscr{F}$; при этом мы, очевидно, можем считать, что A содержит точку 0 и потому $\lim\limits_{n \to \infty} (2^n)A = X$ существует. X есть сумма счетного числа замкнутых множеств и, в силу свойств 4° и 2°, принадлежит $\mathscr{F}$. Мы покажем, что функция $f_1 * f_2$ сосредоточена в X. Имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(E-t)\,df_2(t) = \int_X f_1(E-t)\,df_2(t) =$$

$$= \int_X f_1((E \cap X) - t)\,df_2(t) + \int_X f_1((E \cap CX) - t)\,df_2(t).$$

Но $X = (2)X$; поэтому множество $(E \cap CX) - t$ при $t \in X$ целиком содержится в CX, ибо иначе множества $E \cap CX \subset CX$ и $X + t \subset X$ пересекались бы, что невозможно. Следовательно, последний интеграл в правой части равен нулю, ибо в нем $|f_1((E \cap CX) - t)| \leqslant \operatorname{Var} f_1(CX) = 0$, и мы получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(E-t)\,df_2(t) = \int_X f_1((E \cap X) - t)\,df_2(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1((E \cap X) - t)\,df_2(t),$$

т. е. $f_1 * f_2$ сосредоточено в X. А так как $X \in \mathscr{F}$, то $f_1 * f_2 \in V_{\mathscr{F}}$.

Пусть теперь Γ — дискретная аддитивная группа всех вещественных чисел и $X_{\mathscr{F}}$ — совокупность всех характеров $\chi(t)$ группы Γ, измеримых относительно каждой меры $f(E) \in V^{(b)}$, сосредоточенной в $\mathscr{F}$. $X_{\mathscr{F}}$ во всяком случае содержит все непрерывные характеры e^{ist}. Образуем для каждой функции $f \in V^{(b)}$ интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi(t)\,df_{\mathscr{F}}(t)$, где $\chi(t)$ — произвольный фиксированный характер из $X_{\mathscr{F}}$. Мы получим таким образом гомоморфное отображение кольца $V^{(b)}$ в тело комплексных чисел. Действительно, $f_{1\mathscr{F}} + f_{2\mathscr{F}} \in V_{\mathscr{F}}$,

$f_{1C\mathcal{F}} + f_{2C\mathcal{F}} \in V_{C\mathcal{F}}$, следовательно, $(f_1 + f_2)_{\mathcal{F}} = f_{1\mathcal{F}} + f_{2\mathcal{F}}$ и, значит, сумме функций отвечает сумма соответствующих интегралов. Далее,

$$f_1 * f_2 = f_{1\mathcal{F}} * f_{2\mathcal{F}} + (f_{1\mathcal{F}} * f_{2C\mathcal{F}} + f_{1C\mathcal{F}} * f_{2\mathcal{F}} + f_{1C\mathcal{F}} * f_{2C\mathcal{F}});$$

первое слагаемое в правой части есть функция из $V_{\mathcal{F}}$, ибо $V_{\mathcal{F}}$ — кольцо; выражение в скобках в правой части есть функция из $V_{C\mathcal{F}}$, ибо $V_{C\mathcal{F}}$ — идеал кольца $V^{(b)}$; следовательно, $(f_1 * f_2)_{\mathcal{F}} = f_{1\mathcal{F}} * f_{2\mathcal{F}}$. Но для каждого характера $\chi(t)$ из $X_{\mathcal{F}}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi(t)\, d(f_{1\mathcal{F}} * f_{2\mathcal{F}})(t) \text{ существует}$$

$$\text{и } = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t)\, df_{1\mathcal{F}}(t) \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t)\, df_{2\mathcal{F}}(t). \qquad (1)$$

Действительно, достаточно доказать это для случая, когда $f_{1\mathcal{F}}$ и $f_{2\mathcal{F}}$ — меры. Как мы видели выше при доказательстве того, что $V_{\mathcal{F}}$ является кольцом, $f_{1\mathcal{F}}$ и $f_{2\mathcal{F}}$ сосредоточены на некотором множестве X из $\mathcal{F}$, таком, что $(2)X = X$. Так как функция $\chi(t)$ измерима на X относительно мер $f_{1\mathcal{F}}$ и $f_{2\mathcal{F}}$, то функция $\chi(t+\tau) = \chi(t)\chi(\tau)$ измерима на топологическом квадрате $X \times X$ относительно произведения этих мер. При этом

$$\iint_{X \times X} \chi(t+\tau)\, df_{1\mathcal{F}}(t)\, df_{2\mathcal{F}}(\tau) =$$

$$= \iint_{X \times X} \chi(t)\chi(\tau)\, df_{1\mathcal{F}}(t)\, df_{2\mathcal{F}}(\tau) =$$

$$= \int_X \chi(t)\, df_{1\mathcal{F}}(t) \int_X \chi(\tau)\, df_{2\mathcal{F}}(\tau) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t)\, df_{1\mathcal{F}}(t) \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\tau)\, df_{2\mathcal{F}}(\tau). \qquad (2)$$

Но, с другой стороны, применяя теорему Фубини и принимая во внимание, что $X \subset X - \tau$ при $\tau \in X$, получаем:

$$\iint\limits_{X \times X} \chi(t+\tau)\, df_{1\mathcal{F}}(t)\, df_{2\mathcal{F}}(\tau) =$$

$$= \int\limits_X \left(\int\limits_X \chi(t+\tau)\, df_{1\mathcal{F}}(t) \right) df_{2\mathcal{F}}(\tau) =$$

$$= \int\limits_X \left(\int\limits_{X-\tau} \chi(t+\tau)\, df_{1\mathcal{F}}(t) \right) df_{2\mathcal{F}}(\tau) =$$

$$= \int\limits_X \left(\int\limits_X \chi(t)\, df_{1\mathcal{F}}(t-\tau) \right) df_{2\mathcal{F}}(\tau) =$$

$$= \int\limits_X \chi(t)\, d \int\limits_X f_{1\mathcal{F}}(t-\tau)\, df_{2\mathcal{F}}(\tau) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi(t)\, d \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{1\mathcal{F}}(t-\tau)\, df_{2\mathcal{F}}(\tau). \qquad (3)$$

Сравнивая (2) и (3), получаем требуемое равенство (1). Таким образом, мы доказали, что свертке функций отвечает произведение соответствующих интегралов; тем самым наше утверждение полностью доказано.

Максимальный идеал, порождаемый рассмотренным отображением, мы обозначим $M_{\chi\mathcal{F}}$. Таким образом,

$$f(M_{\chi\mathcal{F}}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi(t)\, df_{\mathcal{F}}(t);$$

при этом предполагается, что характер $\chi(t)$ измерим относительно в с е х мер из $V^{(b)}$, сосредоточенных в $\mathcal{F}$.

Если в семействе $\mathcal{F}$ содержится хотя бы одно множество положительной меры, то это семейство совпадает с совокупностью всех множеств F_σ. Действительно, пусть в $\mathcal{F}$ содержится множество A положительной меры, тогда в $\mathcal{F}$ содержится и $(2)A$ (свойство 4°). Но, в силу леммы, $(2)A$ содержит целый отрезок; поэтому в $\mathcal{F}$ содержится отрезок (свойство 1°). А тогда, в силу свойств 1°, 2° и 3°, в $\mathcal{F}$ содержится вообще всякое множество F_σ.

Но в таком случае $f_{\mathcal{F}}(t)$ есть просто $f(t)$; единственными же характерами группы Г, измеримыми относительно всех мер из $V^{(b)}$, сосредоточенных в $\mathcal{F}$, являются непрерывные характеры e^{ist}. Таким образом, мы получаем здесь в качестве максимальных идеалов $M_{\chi\mathcal{F}}$ известные уже нам абсолютно непрерывные максимальные идеалы M_s.

Противоположный случай — наиболее узкого семейства $\mathcal{F}$ — представляет семейство $\mathcal{N}$ всех счетных множеств (очевидно, удовлетворяющее всем изложенным нами требованиям и содержащееся как часть в каждом семействе $\mathcal{F}$). Для этого семейства $f_{\mathcal{N}}(t)$ есть функция скачков функции $f(t)$; каждый характер $\chi(t)$ группы Г измерим на всех множествах семейства $\mathcal{N}$. Таким образом, мы получим здесь в качестве максимальных идеалов $M_{\chi\mathcal{F}}$ найденные выше дискретные максимальные идеалы (почему мы и обозначили их $M_{\chi\mathcal{N}}$).

Рассмотрим теперь случай, когда все множества семейства $\mathcal{F}$ имеют меру 0, причем $\mathcal{F}$ содержит и несчетные множества. Таким семейством будет, например, семейство $\mathcal{F}_F$, построенное указанным выше образом исходя из произвольного совершенного множества F, для которого $(n)F$ имеет меру 0 при любом n. Покажем, что максимальные идеалы $M_{\chi\mathcal{F}}$ будут здесь отличны от M_s и $M_{\chi\mathcal{N}}$. Действительно, для каждой абсолютно непрерывной функции $g(t)$, очевидно, имеем $g_{\mathcal{F}}(E) \equiv 0$, ибо все множества из $\mathcal{F}$, по предположению, имеют меру нуль. Поэтому $g(M_{\chi\mathcal{F}}) = 0$ для всякого $M_{\chi\mathcal{F}}$ и, значит, $M_{\chi\mathcal{F}}$ отличны от всех M_s, ибо для каждого M_s существует абсолютно непрерывная функция $g(t)$ такая, что $g(M_s) \neq 0$. Пусть теперь A — какое-нибудь несчетное множество из $\mathcal{F}$. В нем содержится некоторое совершенное подмножество F. Пусть $f(t)$ — какая-нибудь ненулевая сингулярная функция, всё изменение которой сосредоточено на множестве F; построить такую функцию можно тем же способом, каким строится сингулярная функция, отображающая канторово совершенное множество на отрезок. Так как $f(E)$ сосредоточена на F, а $F \in \mathcal{F}$, то $f \in V_{\mathcal{F}}$. В силу теоремы единственности для интеграла Фурье — Стильтьеса, существует точка s_0 такая, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{is_0t}\,df(t) \neq 0$. Пусть теперь $\chi(t)$ — произвольный характер из $X_{\mathcal{F}}$. Тогда также $e^{is_0t}\overline{\chi(t)} \in X_{\mathcal{F}}$. Поэтому $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{is_0t}\overline{\chi(t)}\,df(t)$ существует. Очевидно, $\varphi(t)$ есть функция с ограниченным изменением, сосредоточенным на F. Но

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi(t)\,d\varphi_{\mathcal{F}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t)\,d\varphi(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t)\,d\int_{-\infty}^{t} e^{is_0\tau}\overline{\chi(t)}\,df(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{is_0t}\,df(t) \neq 0.$$

Тем самым мы показали, что для всякого максимального идеала $M_{\chi\mathcal{F}}$ существует непрерывная функция $\varphi \in V^{(b)}$ такая, что $\varphi(M_{\chi\mathcal{F}}) \neq 0$. Но отсюда следует, что $M_{\chi\mathcal{F}}$ отличны также от всех $M_{\chi\mathcal{N}}$, ибо $\varphi(M_{\chi\mathcal{N}}) = 0$ для всякой непрерывной функции $\varphi \in V^{(b)}$.

Итак, мы указали конструкцию, дающую как хорошо известные максимальные идеалы M_s и $M_{\chi\mathcal{N}}$, так и новые максимальные идеалы, которые мы будем называть *сингулярными*.

§ 32. Совершенные множества с линейно независимыми точками. Несимметричность кольца $V^{(b)}$

Способ построения максимальных идеалов кольца $V^{(b)}$, изложенный в предыдущем параграфе, дает возможность получить некоторые результаты отрицательного характера, относящиеся к этому кольцу. Мы докажем в этом параграфе, что кольцо $V^{(b)}$ несимметрично и абсолютно непрерывные максимальные идеалы не всюду плотны в пространстве $\mathfrak{M}(V^{(b)})$. Доказательство обоих фактов будет основываться на существовании совершенных множеств с линейно независимыми точками.

Множеством с линейно независимыми точками мы будем называть множество на вещественной прямой, каждая конечная система $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ попарно различных точек которого линейно независима над телом рациональных чисел, т. е. из равенства $n_1\lambda_1 + \ldots + n_k\lambda_k = 0$, где $n_1, \ldots, n_k$ — целые числа, следует, что $n_1 = \ldots = n_k = 0$.

Лемма 1. *Если система* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ *линейно независима, то каждое несчетное множество на вещественной прямой содержит число* λ, *при котором и система* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda)$ *линейно независима.*

Действительно, чисел λ, при которых система $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda)$ линейно зависима, имеется лишь счетное множество.

Мы будем говорить, что система $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ *линейно независима ранга* n, если из равенства $n_1\lambda_1 + \ldots + n_k\lambda_k = 0$, где $n_1, \ldots, n_k$ — целые числа, по абсолютной величине не превосходящие n, следует, что $n_1 = \ldots = n_k = 0$. В противном случае будем называть систему $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ *линейно зависимой ранга* n.

Лемма 2. *Если система* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ *линейно независима, то для каждого* $n > 0$ *существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что любая система* $(\lambda_1', \ldots, \lambda_k')$, *удовлетворяющая неравенствам* $|\lambda_1' - \lambda_1| < \varepsilon, \ldots, |\lambda_k' - \lambda_k| < \varepsilon$, *линейно независима ранга* n.

Действительно, множество точек k-мерного пространства, система координат которых линейно зависима ранга n, как объединение конечного числа гиперплоскостей $n_1\mu_1 + \ldots + n_k\mu_k = 0$ $(|n_1| \leqslant n, \ldots, |n_k| \leqslant n)$ замкнуто, а потому точка $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, не входящая в это множество, отделима от него достаточно малой своей окрестностью.

Теорема 1. *Любое совершенное множество* P *на вещественной прямой содержит совершенное подмножество* Π *с линейно независимыми точками.*

Доказательство. Пусть P^0 — множество, полученное из P путем удаления концов всех смежных с P интервалов. Так как P^0 несчетно, то, в силу леммы 1, оно содержит пару линейно независимых точек. Пусть Δ — соединяющий их отрезок. Вследствие лемм 1 и 2 из него можно удалить внутренний промежуток δ, концы которого принадлежат P^0, так, что система четырех точек, образованная концами оставшихся отрезков Δ_0 и Δ_1 «первого ранга», будет линейно независима, длины этих отрезков будут меньше 1 и любая пара точек по одной из каждого отрезка будет линейно независима ранга 1. Затем, по тем же леммам 1 и 2, из отрезков Δ_0 и Δ_1 можно будет удалить по внутреннему промежутку δ_0 и δ_1 с концами, принадлежащими P^0, так, что система, образованная восьмью концами оставшихся четырех отрезков «второго ранга» Δ_{00}, Δ_{01}, Δ_{10}, Δ_{11} будет линейно независима, длина каждого из этих отрезков будет меньше $\frac{1}{2}$ и любая четверка точек по одной из каждого отрезка будет линейно независима ранга 2. Неограниченно продолжая это построение, мы на n-м шаге получим множество Π_n, являющееся объединением 2^n попарно непересекающихся отрезков n-го ранга длины $<\frac{1}{n}$, концы которых принадлежат P^0 и образуют линейно независимую систему, а любой набор точек по одной из каждого отрезка образует линейно независимую систему ранга n. Пусть $\Pi=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\Pi_n$. По построению, Π — совершенное множество. Так как каждая его точка — предельная для множества концов смежных интервалов, а последнее по построению выбрано из P, то $\Pi\subset P$. Мы утверждаем, что любая конечная система $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ точек из Π линейно независима. Действительно, пусть d — наименьшее из расстояний между точками этой системы. Тогда при $n>\frac{1}{d}$ никакие две ее точки не могут принадлежать одному и тому же отрезку n-го ранга. Поэтому она линейно независима ранга n, ибо в противном случае, добавив произвольно по точке из всех 2^n-k не пересекающихся с ней отрезков n-го ранга и наделив каждую из них нулевым коэффициентом, мы получили бы систему точек по одной из каждого отрезка n-го ранга, линейно зависимую ранга n, в противоречие с построением этих отрезков. Так как n произвольно велико, то заключаем, что система $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ линейно независима, и теорема доказана.

Замечание. Совершенно так же доказывается более общая

Теорема 1′. *Любое совершенное множество P на вещественной прямой содержит совершенное подмножество* Π *с алгебраически независимыми точками.*

Лемма 3. *Если* Π — *совершенное множество с линейно независимыми точками и* $\mathcal{F}$ — *минимальное содержащее его семейство множеств* F_σ, *удовлетворяющее условиям* 1°—4° *предыдущего параграфа, то множество* —Π *пересекает каждое множество из* $\mathcal{F}$ *не более чем по счетному множеству точек.*

Доказательство. $\mathcal{F}$ состоит из подмножеств типа F_σ всевозможных конечных или счетных объединений множеств вида $(n)\Pi - t$. Поэтому достаточно показать, что $-\Pi$ пересекается с каждым множеством $(n)\Pi - t$ не более чем в $n+1$ точке. Но если бы $-\Pi$ пересекалось с $(n)\Pi - t$ в $n+2$ различных точках, т. е. имели бы место равенства вида

$$x_1^{(i)} + \ldots + x_n^{(i)} - t = -x_i \qquad (i = 1, \ldots, n+2),$$

где все $x_j^{(i)}$, $x_i \in \Pi$ и точки x_i попарно различны, то, исключив t, мы получили бы $n+1$ равенство вида

$$x_1^{(i)} + \ldots + x_n^{(i)} + x_i = x_1^{(1)} + \ldots + x_n^{(1)} + x_1$$

$$(i = 2, \ldots, n+2),$$

откуда, в силу линейной независимости точек множества Π и отличия всех x_i от x_1, следовало бы, что для каждого рассматриваемого i существовал бы номер j_i, при котором $x_i = x_{j_i}^{(1)}$. Но различных точек x_i здесь $n+1$, а номеров j_i не более n.

Теорема 2. *Кольцо $V^{(b)}$ несимметрично.*

Доказательство. В $V^{(b)}$, рассматриваемом как кольцо функций множества на прямой, имеется естественная инволюция $f \to f^*$, где

$$f^*(E) = \overline{f(-E)} \tag{1}$$

для каждого борелевского множества E. Из формулы (1) следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda}\, df^*(\lambda) = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda}\, df(\lambda)} \tag{2}$$

для всех вещественных значений s. Но в § 30 мы видели, что каждый элемент кольца $V^{(b)}$ однозначно определяется своим преобразованием Фурье — Стильтьеса, т. е. своими значениями на абсолютно непрерывных максимальных идеалах. Если бы, поэтому, $V^{(b)}$ было симметрично, то из равенства (2) следовало бы, что элементом, сопряженным к $f \in V^{(b)}$ в смысле определения 1 § 8, должен служить как раз элемент f^*, определяемый формулой (1), причем равенство (2) распространяется на все максимальные идеалы, т. е.

$$f^*(M)=\overline{f(M)} \tag{3}$$

для всех $M\in\mathfrak{M}(V^{(b)})$. Но это неверно, ибо существуют $f\in V^{(b)}$ и $M\in\mathfrak{M}(V^{(b)})$ такие, что $f(M)=1$, а $f^*(M)=0$. Действительно, пусть Π — совершенное множество с линейно независимыми точками и $\mathcal{F}$ — определяемое им семейство множеств леммы 3. Возьмем произвольную монотонную сингулярную функцию $f(t)$ с изменением, равным 1, сосредоточенным на Π, и пусть $M=M_{\chi_0\mathcal{F}}$, где $\chi_0(\lambda)\equiv 1$. Ясно, что $f(E)\in V_{\mathcal{F}}$ и $f(M_{\chi_0\mathcal{F}})=\int df_{\mathcal{F}}=\int df=1$. С другой стороны, так как всё изменение f сосредоточено на Π, то всё изменение f^* сосредоточено на $-\Pi$. Но тогда из леммы 3 следует, что $f^*\in V_{C\mathcal{F}}$ и, значит, $f^*(M_{\chi_0\mathcal{F}})=0$. Тем самым теорема доказана.

Следствие. *Множество абсолютно непрерывных максимальных идеалов не всюду плотно в пространстве максимальных идеалов кольца* $V^{(b)}$.

Действительно, каково бы ни было $f\in V^{(b)}$, в силу формулы (2) для всех абсолютно непрерывных максимальных идеалов M имеет место равенство (3). Если бы множество этих максимальных идеалов было плотно в $\mathfrak{M}(V^{(b)})$, то, по непрерывности функций $f(M)$, порождаемых элементами $f\in V^{(b)}$, равенство (3) распространялось бы на все $M\in\mathfrak{M}(V^{(b)})$. Но это означало бы, что $V^{(b)}$ симметрично, в противоречие с теоремой 2.

Используя конструкцию сингулярных максимальных идеалов, изложенную в предыдущем параграфе, можно показать [66], что множество абсолютно непрерывных максимальных идеалов не плотно и относительно границы пространства $\mathfrak{M}(V^{(b)})$.

Теорема 3. *Существует функция* $\Phi(s)$ $(-\infty<s<\infty)$, *являющаяся преобразованием Фурье — Стильтьеса функции с ограниченным изменением и удовлетворяющая условию* $\inf\limits_{-\infty<s<\infty}|\Phi(s)|>0$, *такая, что* $\frac{1}{\Phi(s)}$ *не является преобразованием Фурье — Стильтьеса никакой функции с ограниченным изменением.*

Доказательство. Этими свойствами обладает, например, преобразование Фурье — Стильтьеса функции $\varphi(t)=$

$=f(t)-f^*(t)-\varepsilon(t)\in V^{(b)}$, где $f(t)$ — функция, рассмотренная при доказательстве теоремы 2, а $\varepsilon(t)$ — единица кольца $V^{(b)}$. Действительно, в силу равенства (2),

$$\Phi(s)=2i\mathfrak{J}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda}\,df(\lambda)\right)-1,$$

и потому $\inf\limits_{-\infty<s<\infty}|\Phi(s)|\geqslant 1$. С другой стороны, так как $f(M_{\chi_0\mathcal{F}})=1$ и $f^*(M_{\chi_0\mathcal{F}})=0$, то $\varphi(M_{\chi_0\mathcal{F}})=0$, следовательно, элемент $\varphi\in V^{(b)}$ не имеет обратного в $V^{(b)}$, а потому $\frac{1}{\Phi(s)}$ не может быть преобразованием Фурье — Стильтьеса функции из $V^{(b)}$.

Теорема 4. *Пусть $F(s)$ — преобразование Фурье — Стильтьеса функции $f\in V^{(b)}$ и $f(t)=g(t)+h(t)+s(t)$ — разбиение ее на абсолютно непрерывную, дискретную и сингулярную части. Если*

1) $$\inf_{-\infty<s<\infty}|F(s)|>0$$

и

2) $$\|s\|<\inf_{-\infty<s<\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda}\,dh(\lambda)\right|,$$

то $\frac{1}{F(s)}$ также является преобразованием Фурье — Стильтьеса некоторой функции из $V^{(b)}$.

Доказательство. Нам нужно показать, что

$$f(M)=g(M)+h(M)+s(M)\neq 0$$

для всех максимальных идеалов M кольца $V^{(b)}$. Для абсолютно непрерывных максимальных идеалов это выполнено вследствие условия 1). Согласно следствию леммы § 30, для всех остальных максимальных идеалов $g(M)=0$, так что $f(M)=h(M)+s(M)$. Гомоморфное отображение $V^{(b)}\to V^{(b)}/M$ порождает некоторое гомоморфное отображение кольца H в тело комплексных чисел. В силу теоремы 2 § 29, при этом отображении $h(t)$ переходит в число, принадлежащее замыканию множества значений $h(M_s)$. Поэтому, в силу условия 2), $|h(M)|>\|s\|\geqslant|s(M)|$ и, следовательно, $f(M)=h(M)+s(M)\neq 0$. Тем самым теорема 4 полностью доказана.

§ 33. Общий вид максимальных идеалов кольца $V^{(b)}$

Все рассмотренные до сих пор максимальные идеалы кольца $V^{(b)}$ охватываются конструкцией, изложенной в § 31. Но она не дает еще всего пространства $\mathfrak{M}(V^{(b)})$. Общий вид максимальных идеалов кольца $V^{(b)}$ был найден Ю. А. Шрейдером [66]. В этом параграфе мы изложим, в основном без доказательства, полученные им результаты.

Элементы кольца $V^{(b)}$ мы по-прежнему будем трактовать как функции множества, а неотрицательные вещественные функции множества из $V^{(b)}$ называть мерами. Две меры называются *взаимно сингулярными*, если на каждом борелевском множестве, где одна положительна, другая равна нулю. Каждая функция $f \in V^{(b)}$ однозначно представима в виде

$$f(E) = f_1(E) - f_2(E) + if_3(E) - if_4(E),$$

где f_1, f_2, f_3, f_4 — меры, причем как f_1 и f_2, так f_3 и f_4 взаимно сингулярны. *Изменением* $(\mathrm{Var} f)(E)$ функции $f \in V^{(b)}$ на множестве E будет называться сумма изменений ее вещественной и мнимой частей. Говорят, что *функция* $f \in V^{(b)}$ *абсолютно непрерывна относительно функции* $g \in V^{(b)}$, если $(\mathrm{Var} f)(E) = 0$ всякий раз, когда $(\mathrm{Var}\, g)(E) = 0$; для обозначения этого мы будем писать $f \prec g$. Говорят, что некоторое утверждение справедливо почти всюду относительно $f \in V^{(b)}$, если оно может не быть справедливым лишь на множестве E, для которого $(\mathrm{Var} f)(E) = 0$.

Найти общий вид максимальных идеалов M кольца $V^{(b)}$ это значит найти общий вид порождаемых ими линейных функционалов $M(f) = f(M)$ (M фиксировано, f — переменное), которые можно охарактеризовать как *мультипликативные* линейные функционалы на $V^{(b)}$, т. е. ненулевые линейные функционалы, удовлетворяющие дополнительному условию

$$M(f * g) = M(f)\, M(g)$$

для всех

$$f,\ g \in V^{(b)}.$$

Исходным пунктом для этого является нижеследующее представление произвольных линейных функционалов на $V^{(b)}$.

Обобщенной функцией будем называть здесь функцию $\varphi_f(t)$ вещественного аргумента t и переменного элемента f из $V^{(b)}$, удовлетворяющую следующим условиям: 1) $\varphi_f(t)$ при каждом фиксированном $f \in V^{(b)}$ есть функция от t, измеримая относительно f, т. е. относительно меры $(\mathrm{Var} f)(E)$; 2) если $f \prec g$, то $\varphi_f(t) = \varphi_g(t)$ почти всюду относительно f.

Теорема 1. *$L(f)$ есть линейный функционал на $V^{(b)}$ тогда и только тогда, когда он представим в виде*

$$L(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_f(t)\,df(t), \tag{1}$$

где $\varphi_f(t)$ — обобщенная функция, для которой

$$\|\varphi_f\|(=\|L\|)=\sup_f \operatorname{vrai}\max_t |\varphi_f(t)|<+\infty.$$

Какова же должна быть обобщенная функция $\varphi_f(t)$, чтобы порождаемый ею линейный функционал (1) был мультипликативным, т. е. совпадал с линейным функционалом $M(f)$, порождаемым некоторым максимальным идеалом?

Обобщенным характером будем называть обобщенную функцию $\chi_f(t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\chi_f(s+t)=\chi_f(s)\,\chi_f(t)$$

почти для всех пар (s, t) относительно произведения мер $\operatorname{Var} f\times\operatorname{Var} f$ и, кроме того, условию

$$\|\chi_f\|=1.$$

Теорема 2. *$f\to M(f)$ есть гомоморфизм кольца $V^{(b)}$ на тело комплексных чисел, т. е. M — мультипликативный линейный функционал на $V^{(b)}$, тогда и только тогда, когда*

$$M(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\chi_f(t)\,df(t),$$

где $\chi_f(t)$ — обобщенный характер.

Пусть, в частности, $M_{\chi\mathscr{F}}$ — максимальный идеал кольца $V^{(b)}$, определяемый семейством $\mathscr{F}$ множеств F_σ, удовлетворяющим условиям 1° — 4° § 31, и характером $\chi(t)$ группы Γ, измеримым относительно всех мер, сосредоточенных в $\mathscr{F}$; таким образом,

$$M_{\chi\mathscr{F}}(f)=f(M_{\chi\mathscr{F}})=\int_{-\infty}^{\infty}\chi(t)\,df_{\mathscr{F}}(t),$$

где $f_{\mathscr{F}}$ — часть f, сосредоточенная в $\mathscr{F}$. Как было показано в § 31, всё изменение функции $f_{\mathscr{F}}$ сосредоточено на множестве X таком, что $X+X=X$. Положим

$$\chi_f(t)=\begin{cases}\chi(t) & \text{для всех } t\in X,\\ 0 & \text{для всех } t\notin X.\end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $\chi_f(t)$ — обобщенный характер, причем определяемый им максимальный идеал M совпадает с $M_{\chi\mathscr{T}}$. Пусть $V^{(b)} = V_{\mathscr{T}} + V_{C\mathscr{T}}$ — разложение кольца $V^{(b)}$ в полупрямую сумму взаимно сингулярных подкольца и идеала, порождаемое семейством $\mathscr{T}$. Очевидно, $V_{\mathscr{T}}$ можно охарактеризовать как совокупность тех $f \in V^{(b)}$, для которых $\chi_f(t) \neq 0$ почти всюду относительно f, а $V_{C\mathscr{T}}$ — как совокупность тех $g \in V^{(b)}$, для которых $\chi_g(t) = 0$ почти всюду относительно g. Оказывается, что это — общее свойство обобщенных характеров.

Теорема 3. *Пусть M — произвольный максимальный идеал кольца $V^{(b)}$ и $\chi_f(t)$ — соответствующий ему обобщенный характер. Тогда совокупность тех $f \in V^{(b)}$, для которых $\chi_f(t) \neq 0$ почти всюду относительно f, образует подкольцо R кольца $V^{(b)}$, совокупность тех $g \in V^{(b)}$, для которых $\chi_g(t) = 0$ почти всюду относительно g, образует идеал I кольца $V^{(b)}$, причем*

1) *любые две функции $f \in R$ и $g \in I$ взаимно сингулярны;*

2) *каждая функция $f \in V^{(b)}$ однозначно представима в виде суммы $f = f_R + f_I$, где $f_R \in R$, $f_I \in I$.*

Таким образом, каждый максимальный идеал кольца $V^{(b)}$ определяет разложение последнего в полупрямую сумму взаимно сингулярных подкольца и идеала и, очевидно, в свою очередь однозначно определяется индуцируемым им максимальным идеалом этого подкольца. Но и обратно, каково бы ни было разложение кольца $V^{(b)}$ в полупрямую сумму подкольца R и идеала I, всякий максимальный идеал M' подкольца R или, что то же, гомоморфизм $f_R \to f_R(M')$ этого подкольца на тело комплексных чисел порождает гомоморфизм $f \to f_R(M')$ (где f_R — составляющая f в R) всего кольца $V^{(b)}$, т. е. некоторый его максимальный идеал M. Тем самым нахождение максимальных идеалов кольца $V^{(b)}$ сводится к нахождению всевозможных разложений этого кольца в полупрямую сумму взаимно сингулярных подкольца и идеала и последующему определению максимальных идеалов полученного подкольца, а это подкольцо во всяком случае обладает очевидными максимальными идеалами, определяемыми гомоморфизмами

$$f_R \to \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t)\, df_R(t),$$ где $\chi(t)$ — произвольные характеры группы Γ,

измеримые относительно всех функций $f_R \in R$. Так именно и были получены максимальные идеалы $M_{\chi\mathscr{T}}$ § 31. Однако найденные там разложения кольца $V^{(b)}$ в полупрямую сумму взаимно сингулярных подкольца $V_{\mathscr{T}}$ и идеала $V_{C\mathscr{T}}$ не являются единственно возможными.

Теорема 4. *Пусть X — произвольное множество характеров группы Γ, R_X — совокупность всех функций $f \in V^{(b)}$, отно-*

сительно которых измерим каждый характер из X, *и* I_X — *совокупность всех функций* $g \in V^{(b)}$, *сингулярных к каждой функции из* R_X. *Тогда* R_X — *подкольцо, а* I_X — *идеал кольца* $V^{(b)}$ *и* $V^{(b)}$ *есть их полупрямая сумма.*

Теорема 5. *Пусть* φ — *ненулевая непрерывная мера, сосредоточенная в совершенном множестве* Π *с линейно независимыми точками. Тогда подкольцо* R *кольца* $V^{(b)}$, *образованное, согласно теореме* 4, *всеми функциями* $f \in V^{(b)}$, *относительно которых измерим каждый характер, измеримый относительно* φ, *не совпадает ни с каким подкольцом* $V_{\mathcal{F}}$, *построенным по схеме* § 31.

Изложим вкратце доказательство этой теоремы. Пусть, вопреки ее утверждению, $R = V_{\mathcal{F}}$, где $\mathcal{F}$ — какое-то семейство множеств F_σ, удовлетворяющее условиям 1°—4° § 31. Так как $\varphi \in R$, то φ сосредоточено в некотором множества $P \in \mathcal{F}$, причем можно считать, что $P \subset \Pi$. В силу несчетности множества P, в нем сосредоточена также ненулевая непрерывная мера ψ, сингулярная к φ, так что существует разбиение P на непересекающиеся множества P_φ и P_ψ такие, что φ сосредоточена в P_φ, а ψ — в P_ψ. Пусть $\Gamma = A \cup B$ — разбиение вещественной прямой на два взаимно дополнительных вполне несовершенных множества *). Положим

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in P_\varphi, \\ 1, & \text{если } t \in P_\psi \cap A, \\ -1, & \text{если } t \in P_\psi \cap B. \end{cases}$$

Так как P — множество с линейно независимыми точками, то $\chi(t)$ можно продолжить до характера группы Γ. Очевидно, он будет измерим относительно φ, но неизмерим относительно ψ. Поэтому $\psi \notin R$. Но, будучи сосредоточенным в $P \in \mathcal{F}$, $\psi \in V_{\mathcal{F}}$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Следствие. *Существуют максимальные идеалы кольца* $V^{(b)}$, *которые не могут быть получены конструкцией* § 31.

Примером такого максимального идеала может служить максимальный идеал M, определяемый гомоморфизмом $f \to \int\limits_{-\infty}^{\infty} df_R$, где R — кольцо теоремы 5. Действительно, пусть, вопреки этому утверждению, M совпадает с каким-нибудь максимальным идеалом $M_{\chi\mathcal{F}}$,

*) То есть множества, не содержащие совершенных подмножеств; см. Ф. Хаусдорф, Теория множеств, М. — Л., 1937, стр. 196.

так что для всех $f \in V^{(b)}$ выполняется равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} df_R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t)\, df_{\mathcal{T}}(t).$$

Так как меры, сосредоточенные в одной точке, принадлежат $V_{\mathcal{T}}$, то заключаем прежде всего, что $\chi(t) \equiv 1$. Таким образом, для всех $f \in V^{(b)}$ должно выполняться равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} df_R = \int_{-\infty}^{\infty} df_{\mathcal{T}}. \tag{2}$$

Но так как кольца R и $V_{\mathcal{T}}$ не совпадают, то найдется мера f, принадлежащая одному из них и не принадлежащая другому, а для нее равенство (2), очевидно, не может иметь места.

ЧАСТЬ III

ГЛАВА VI

РЕГУЛЯРНЫЕ КОЛЬЦА

В этой главе будут рассматриваться преимущественно нормированные кольца функций. Оказывается, что общие теоремы о многих кольцах функций тесно связаны с тем, что в этих кольцах имеются функции $x \neq 0$, обращающиеся в нуль на любом заданном замкнутом множестве максимальных идеалов. Например, известная тауберова теорема Винера, о которой будет идти речь в § 40, оказывается следствием именно такого свойства кольца абсолютно сходящихся интегралов Фурье. Кольца с указанным свойством, которое формулируется точно в определении 2 § 34, называются регулярными (по близкому названию топологического пространства с соответствующей аксиомой отделимости).

§ 34. Определения, примеры и простейшие свойства

Пусть R — нормированное кольцо и $\mathfrak{M}$ — пространство его максимальных идеалов. Согласно § 4, каждому элементу x кольца R соответствует непрерывная функция $x(M)$, определенная на $\mathfrak{M}$, причем отображение $x \to x(M)$ в случае отсутствия в R радикала является изоморфизмом, так что R в этом случае можно отождествить с кольцом $\hat{R}$ функций $x(M)$.

Определение 1. *Остовом* идеала I нормированного кольца R называется множество F всех точек пространства $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(R)$, в которых обращаются в нуль все функции $x(M)$, соответствующие элементам $x \in I$.

Каждый собственный идеал $I \subset R$, по теореме 1 § 2, содержится в некотором максимальном идеале M_0. Но в соответствии с § 4 включение $x_0 \in M_0$ означает, что $x_0(M_0) = 0$, Это показывает, что остов каждого собственного идеала $I \subset R$ не пуст. С другой стороны, остов несобственного идеала $I = R$ есть, очевидно, пустое множество. Так как всякая непрерывная функция, равная нулю на некотором множестве, равна нулю и на его замыкании, то *остов всякого идеала* $I \subset R$ *есть замкнутое подмножество пространства* $\mathfrak{M}$.

Таким образом, каждому идеалу I кольца R можно сопоставить замкнутое множество $F \subset \mathfrak{M}$ — остов этого идеала. Обратное утверждение: каждое замкнутое множество в $\mathfrak{M}$ есть остов некоторого идеала $I \subset R$, — вообще говоря, неверно. Например, в кольце A функций, аналитических в круге $|\zeta| < 1$ и непрерывных в круге $|\zeta| \leqslant 1$, всякая функция, равная нулю на замкнутом множестве F, имеющем предельную точку внутри круга, тождественно равна нулю; поэтому такое множество F, если оно не совпадает со всем кругом $|\zeta| \leqslant 1$, не может быть остовом никакого идеала кольца A.

Определение 2. Нормированное кольцо R без радикала называется *регулярным*, если для всякого замкнутого множества $F \subset \mathfrak{M} = \mathfrak{M}(R)$ и не принадлежащей ему точки M_0 существует такой элемент $x \in R$, что функция $x(M)$ обращается в нуль на множестве F и отлична от нуля при $M = M_0$.

Так как регулярное кольцо, по самому определению, есть кольцо без радикала, то его можно рассматривать как кольцо функций на $\mathfrak{M}$, что мы, как правило, и будем делать.

Примерами регулярных колец являются кольцо $C(S)$ всех непрерывных комплексных функций на произвольном бикомпакте S (что следует из нормальности S в силу известной теоремы Урысона *)); кольцо всех функций, имеющих непрерывные производные до заданного порядка (на отрезке или в замкнутой области n-мерного пространства). Кольцо A и другие кольца аналитических функций, естественно, не являются регулярными. Кольцо W абсолютно сходящихся тригонометрических рядов регулярно, так как оно содержит любую функцию с непрерывной производной.

Докажем регулярность кольца V абсолютно интегрируемых функций на прямой со сверткой в качестве умножения и присоединенной единицей e (§ 16).

Как мы видели в § 17, пространство максимальных идеалов кольца V отождествимо с вещественной прямой $-\infty < s < \infty$, дополненной бесконечно удаленной точкой и наделенной топологией

---

*) См., например, П. С. Александров, Введение в общую теорию функций и множеств, М. — Л., 1948, стр. 305.

проективной прямой, причем если $\mathfrak{z} = \lambda e + x(t) \in V$, то

$$\mathfrak{z}(M) = \begin{cases} \lambda + x^{\sim}(s) = \lambda + \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{ist}\, dt & \text{при} \quad M = M_s, \\ \lambda & \text{при} \quad M = M_\infty. \end{cases}$$

Покажем, что для любой точки $M^0 \in \mathfrak{M}(V)$ и любой ее окрестности $U(M^0)$ существует элемент $\mathfrak{z} = \lambda e + x(t) \in V$, для которого $\mathfrak{z}(M^0) \neq 0$ и $\mathfrak{z}(M) = 0$ всюду вне $U(M^0)$. Пусть сначала $M^0 = M_{s_0}$, где $s_0 \neq \infty$. Рассмотрим произвольную функцию $y(s)$, обладающую непрерывной второй производной $y''(s)$, отличную от нуля при $s = s_0$ и равную нулю вне конечного интервала $U(s_0)$, содержащегося в заданной окрестности $U(M_{s_0})$. Функция

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} y(s)\, e^{-its}\, ds,$$

очевидно, ограниченна и непрерывна. Интегрируя по частям, получаем:

$$t^2 x(t) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} y''(s)\, e^{-its}\, ds,$$

так что $t^2 x(t)$ — также ограниченная функция. Отсюда следует, что

$$|x(t)| \leqslant \frac{C}{1+t^2}$$

и, следовательно, $x(t)$ принадлежит V. По формуле обращения,

$$x^{\sim}(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{its}\, dt = y(s),$$

и таким образом $\mathfrak{z} = x(t)$ обладает требуемыми свойствами.

Если $M = M_\infty$, то тем же путем, что и выше, мы построим функцию $x(t)$, для которой $x^{\sim}(s) = 1$ на дополнении к окрестности $U(M_\infty)$ (содержащемся в конечном отрезке) и, как и для любой абсолютно интегрируемой функции, $x(M_\infty) = 0$. Тогда поставленным условиям будет удовлетворять $\mathfrak{z} = e - x(t)$.

В регулярном кольце R легко построить идеал, остовом которого является наперед заданное замкнутое множество $F \subset \mathfrak{M}$. Именно, совокупность всех функций $x(M)$, равных нулю на F, образует, очевидно, идеал I; остов его $F(I)$, с одной стороны, содержит каждую точку множества F, с другой, в силу условия регулярности, не содержит ни одной точки $M_0 \notin F$. Таким образом, $F(I) = F$.

Всякий идеал I с остовом F мы будем называть *принадлежащим множеству* F, а идеал, построенный по указанному только что правилу, будем обозначать $I(F)$. Заметим, что $I(F)$, по самому определению, есть пересечение всех максимальных идеалов, составляющих множество F, и потому вместе с ними является замкнутым идеалом.

Образуем кольцо вычетов $R/I(F)$. По условию, две функции $x(M)$ и $y(M)$ принадлежат одному классу вычетов, если их разность принадлежит идеалу $I(F)$; иными словами, $x(M)$ и $y(M)$ входят в один и тот же класс тогда и только тогда, когда эти функции совпадают на множестве F. Мы можем, следовательно, кольцо $R/I(F)$ отождествить с кольцом R_F, образованным сужениями функций $x(M)$ кольца R на множество F, т. е. с кольцом всех функций, определенных на F и продолжимых с этого множества на всё пространство $\mathfrak{M}$ до функций кольца R, причем норма каждой такой функции задается общей формулой (2) § 2, которая в нашем случае принимает вид

$$\|x\|_{R_F} = \|x\|_{R/I(F)} = \inf \|y\|_R,$$

где нижняя грань берется по всем функциям $y(M) \in R$, совпадающих на множестве F с $x(M)$.

Покажем, что пространство максимальных идеалов кольца $R/I(F)$ отождествляется при этом и по запасу элементов, и по топологии с множеством F. Так как R_F есть некоторое кольцо функций, определенных на множестве F, то каждая точка $M \in F$ определяет максимальный идеал кольца R_F, причем различные точки M_1, $M_2 \in F$ определяют различные максимальные идеалы, поскольку они отделяются уже некоторым элементом кольца R. Обратно, если M' есть максимальный идеал кольца $R/I(F)$, то в соответствии с замечанием 2 § 2 его полный прообраз M в R является максимальным идеалом кольца R, содержащим идеал I, и, следовательно, принадлежит F. Таким образом, F есть множество всех максимальных идеалов кольца $R_F = R/I(F)$. А так как функции из R совпадают на F с соответствующими функциями из R_F, то ясно, что и топология множества F

как пространства максимальных идеалов кольца R_F совпадает с его топологией как подпространства пространства $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов кольца R.

Теорема 1. *Пусть (замкнутый или не замкнутый) идеал I регулярного кольца R имеет своим остовом некоторое множество $F \subset \mathfrak{M} = \mathfrak{M}(R)$. Для любого замкнутого множества $\Phi \subset \mathfrak{M}$, не имеющего общих точек с F, существует функция $y(M) \in I$, равная единице во всех точках множества Φ.*

Доказательство. Рассмотрим кольцо вычетов $R/I(\Phi)$ и в нем образ I' идеала I. I' является идеалом в $R/I(\Phi)$. Если бы он принадлежал некоторому максимальному идеалу M_0' кольца $R/I(\Phi)$, то это означало бы, что все функции $x(M') \in I'$ обращаются в нуль в точке M_0'. Но функции $x(M') \in I'$ суть образы функций $x(M) \in I$; мы нашли бы, таким образом, точку $M_0 \in \Phi$, в которой обращаются в нуль все функции $x(M) \in I$, а это невозможно, так как I принадлежит множеству F, не имеющему общих точек с Φ. Поэтому идеал I' не принадлежит никакому максимальному идеалу кольца $R/I(\Phi)$; но тогда он совпадает со всем этим кольцом и, в частности, содержит его единицу. Рассмотрим функцию $y(M) \in I$, переходящую при гомоморфизме $R \to R/I(\Phi)$ в единицу кольца $R/I(\Phi)$; эта функция принимает во всех точках множества Φ значение, равное 1, и, следовательно, удовлетворяет требованию теоремы.

Следствие. *Для любых двух непересекающихся замкнутых множеств F_1 и F_2 в пространстве максимальных идеалов регулярного кольца R существует функция $e(M) \in R$, равная нулю на F_1 и единице на F_2.*

Для доказательства достаточно применить теорему 1 к идеалу $I = I(F_1)$ и множеству $\Phi = F_2$.

§ 35. Локальная теорема

Теорема 1 § 34 и следствие из нее дают возможность установить для регулярных колец «локальные» теоремы винеровского типа. Н. Винер доказал в 1933 г. следующую теорему: *если $f(t)$ в окрестности любой точки t_0 $(-\infty < t_0 < \infty)$ совпадает с функцией $\varphi(t;\ t_0)$, разлагающейся в абсолютно сходящийся ряд Фурье, то и сама* *функция $f(t)$ рзлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье*. Оказывается, что аналогичное предложение справедливо для любого регулярного кольца:

Теорема 1 («локальная теорема»). *Пусть $f(M)$ — функция, определенная на пространстве $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов регулярного кольца R. Предположим, что у каждой точки $M_0 \in \mathfrak{M}$ имеется окрестность $U(M_0)$, в которой $f(M)$ совпадает с некоторой функцией $x(M; M_0)$ из R. Тогда функция $f(M)$ сама является элементом кольца R.*

Доказательство будет основываться на следующей лемме (которая понадобится нам и в гл. VII):

Лемма (о разложении единицы). *Для каждого покрытия пространства $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов регулярного кольца R непустыми открытыми множествами $U_1, \ldots, U_n$ существуют элементы $h_1, \ldots, h_n \in R$ такие, что*

1) $h_j(M) = 0$ *вне* U_j $(j = 1, \ldots, n)$;

2) $\sum\limits_{j=1}^{n} h_j(M) \equiv 1$.

Доказательство леммы проведем индукцией по n. Пусть $n = 2$; это означает, что $\mathfrak{M}$ покрыто двумя множествами U_1 и U_2, причем $F_1 = \mathfrak{M} \setminus U_1$ и $F_2 = \mathfrak{M} \setminus U_2$ замкнуты и не пересекаются. По следствию теоремы 1 § 34, в R имеется функция $h_1(M)$, равная 0 на F_1, т. е. вне U_1, и 1 на F_2. Тогда функция $h_2(M) = 1 - h_1(M)$ равна 0 на F_2, т. е. вне U_2, и, по построению, $h_1(M) + h_2(M) = 1$. Тем самым при $n = 2$ утверждение леммы доказано.

Пусть теперь $n > 2$ и увержение леммы верно в случае покрытия пространства максимальных идеалов любого регулярного кольца $n - 1$ множествами; покажем, что оно верно и для покрытий кольца R n непустыми открытыми множествами. Пусть $U_1, \ldots, U_{n-1}, U_n$ — такое покрытие и $F = \mathfrak{M} \setminus U_n$. F замкнуто и содержится в открытом множестве $U_1 \cup \ldots \cup U_{n-1}$. В силу нормальности пространства $\mathfrak{M}$, существует непустое открытое множество $U \subset \mathfrak{M}$ такое, что $F \subset U \subset \overline{U} \subset U_1 \cup \ldots \cup U_{n-1}$. Рассмотрим кольцо вычетов $R/I(\overline{U})$; согласно сказанному в § 34, можно считать, что оно образовано всеми функциями $x(M)$, заданными на $\overline{U}$ и продолжаемыми на всё $\mathfrak{M}$ до функции из R, и имеет $\overline{U}$ своим пространством максимальных идеалов. Из регулярности кольца R очевидным образом следует, что и $R/I(\overline{U})$ регулярно. По предположению, тогда существуют функции $h'_1(M), \ldots, h'_{n-1}(M) \in R/I(\overline{U})$ такие, что $h'_j(M)=0$ на $\overline{U} \setminus (U_j \cap \overline{U})$ $(j=1, \ldots, n-1)$ и $\sum_{j=1}^{n-1} h'_j(M)=1$ для всех $M \in \overline{U}$. С другой стороны, так как $\mathfrak{M}$ покрыто двумя непустыми открытыми множествами U и U_n, то, по доказанному выше, существуют функции $h(M)$, $h_n(M) \in R$ такие, что $h(M)=0$ вне U, $h_n(M)=0$ вне U_n и $h(M)+h_n(M) \equiv 1$ для всех $M \in \mathfrak{M}$. Пусть $h''_j(M)$ $(j=1, \ldots, n-1)$ — функции из R, переходящие при гомоморфизме $R \to R/I(\overline{U})$ соответственно в функции $h'_j(M)$. Положим

$$h_j(M)=h''_j(M)\,h(M) \qquad (j=1, \ldots, n-1).$$

Тогда $h_j(M)=0$ вне U_j $(j=1, \ldots, n-1)$, поскольку в точках $M \in \overline{U} \setminus U_j$ равен нулю множитель $h''_j(M)$, а вне $\overline{U}$ — множитель $h(M)$. Далее, $h_n(M)=0$ вне U_n по построению. Наконец,

$$\sum_{j=1}^{n} h_j(M)=\left(\sum_{j=1}^{n-1} h''_j(M)\right) h(M)+h_n(M)=h(M)+h_n(M) \equiv 1.$$

Тем самым функции $h_1(M), \ldots, h_n(M)$ удовлетворяют всем требованиям, и лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1. По условию, каждая точка пространства $\mathfrak{M}$ обладает окрестностью, в которой $f(M)$ совпадает с некоторой функцией из R; очевидно, эту окрестность можно считать открытой. Так как $\mathfrak{M}$ бикомпактно, то его открытое покрытие, образованное этими окрестностями, содержит конечное покрытие $U_1, \ldots, U_n$. Пусть $x_1(M), \ldots, x_n(M)$ — соответствующие функции из кольца R, т. е. $f(M)=x_j(M)$ на U_j $(j=1, \ldots, n)$, и $h_1(M), \ldots, h_n(M)$ $(\in R)$ — функции леммы, т. е. $h_j(M)=0$ вне U_j $(j=1, \ldots, n)$ и $\sum_{j=1}^{n} h_j(M) \equiv 1$. Тогда

$$f(M)=\sum_{j=1}^{n} f(M)\,h_j(M)=\sum_{j=1}^{n} x_j(M)\,h_j(M)$$

и, значит, $f \in R$, что и требовалось.

Так как кольцо W абсолютно сходящихся тригонометрических рядов регулярно, то ясно, что сформулированная выше локальная теорема Винера является следствием доказанной сейчас общей теоремы.

Теорема 2. *Если на пространстве максимальных идеалов $\mathfrak{M}$ регулярного кольца R определена функция $f(M)$, которая в окрестности U_0 любой точки $M_0 \in \mathfrak{M}$ представима в виде аналитической функции некоторого элемента x_0* (зависящего от M_0 и U_0), *то в R имеется элемент x, для которого $x(M) \equiv f(M)$.*

Доказательство. Рассмотрим окрестность V_0, входящую в U_0 вместе со своим замыканием, и идеал I_0 всех функций $x(M) \in R$, равных нулю на $\overline{V}_0$. Кольцо вычетов R/I_0 имеет своим пространством максимальных идеалов множество $\overline{V}_0$. Сужение функции $f(M)$ на это множество, по теореме 1 § 6, есть элемент кольца R/I_0. Так как это верно для окрестности любой точки $M_0 \in \mathfrak{M}$, то отсюда следует, что $f(M)$ локально принадлежит кольцу R, и остается применить к ней доказанную только что локальную теорему.

Так, в кольце W абсолютно сходящихся тригонометрических рядов можно извлечь корень m-й степени из любой функции $x(t) \in W$, которая не обращается в нуль на окружности $0 \leqslant t < 2\pi$ и обладает однозначным корнем m-й степени (т. е. $\arg x(t)$ при изменении t от 0 до 2π меняется на величину, кратную $2\pi m$). Аналогичный факт справедлив для кольца V абсолютно интегрируемых функций. Представление элемента $\mathfrak{z} = \lambda e + x(t)$ этого кольца на максимальных идеалах M_s задается формулой

$$\mathfrak{z}^{\sim}(s) = \lambda + \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{ist}\, dt,$$

и возможности извлечения корня m-й степени из $\mathfrak{z}$ в пределах кольца V достаточно, чтобы $\mathfrak{z}^{\sim}(s)$ не обращалась в нуль, а ее аргумент при изменении s от $-\infty$ до $+\infty$ изменялся на величину, кратную $2\pi m$.

Аналогичные предложения имеют место и для бесконечно-многозначных функций. Например, *в кольце V вместе со всяким элементом $\mathfrak{z} = \lambda e + x(t)$, не обращающимся в нуль ни на одном максимальном идеале и удовлетворяющим условию*

$$\int_{-\infty}^{\infty} d \arg \mathfrak{z}^{\sim}(s) = 0,$$

существует функция $\ln \mathfrak{z}$. Этот последний факт лежит в основе теории М. Г. Крейна интегральных уравнений на полупрямой с ядром, зависящим от разности (см. [29]).

Разумеется, перечисленные выше факты вытекают непосредственно и из общей теоремы о локально аналитических функциях от нескольких элементов кольца (теорема 1 § 13). Но приведенный здесь вывод значительно элементарней, поскольку он не опирается на интегральное представление Вейля функций нескольких комплексных переменных. Зато он и не может быть использован при выводе аналогичных фактов для колец $V^{\langle\alpha\rangle}$, не являющихся регулярными, где применение теоремы 1 § 13 остается единственным известным пока методом доказательства.

§ 36. Наименьшие идеалы

Теорема 1. *Пусть R — регулярное кольцо. Среди всех идеалов $I \subset R$, принадлежащих замкнутому множеству $F \subset \mathfrak{M}(R)$, имеется наименьший идеал $J(F)$. Он образован из всех функций $x(M) \in R$, каждая из которых равна нулю на некоторой окрестности множества F. Его замыкание $\overline{J(F)}$ является наименьшим среди всех замкнутых идеалов, принадлежащих множеству F. Функции $x(M) \in \overline{J(F)}$ характеризуются следующим свойством: $x(M) \in R$ принадлежит идеалу $\overline{J(F)}$ тогда и только тогда, когда в кольце R имеется последовательность функций $y_n(M)$, стремящаяся по норме к нулю, причем каждая функция $y_n(M)$ совпадает с $x(M)$ на некоторой окрестности множества F.*

Доказательство. Идеал $J(F)$, образованный функциями $x(M) \in R$, каждая из которых равна нулю на некоторой окрестности множества F, принадлежит этому множеству, так как для любой точки $M_0 \notin F$ можно указать открытое множество $G \supset F$, замыкание которого не содержит точки M_0, и затем построить функцию $y(M) \in R$, равную нулю на G и отличную от нуля при $M = M_0$; эта функция, по условию, входит в идеал $J(F)$, который тем самым может принадлежать только множеству F. Пусть I — произвольный идеал кольца R, принадлежащий множеству F; покажем, что $I \supset J(F)$. Пусть $x(M) \in J(F)$, $F_1 = \{M \in \mathfrak{M}\colon\ x(M) = 0\}$ и F_2 — замыкание дополнения F_1. Множества F и F_2 не пересекаются; в силу теоремы 1 § 34, в идеале I существует функция $e(M)$, равная единице на множестве F_2. Очевидно,

$x(M)=x(M)e(M)$ и тем самым $x(M)\in I$. Таким образом, $J(F)\subset I$ и $J(F)$ — действительно наименьший из всех идеалов, принадлежащих множеству F.

Всякий замкнутый идеал, принадлежащий множеству F, вместе с идеалом $J(F)$ содержит и его замыкание $\overline{J(F)}$; поэтому $\overline{J(F)}$ — наименьший из всех замкнутых идеалов, принадлежащих множеству F. Пусть $x(M)\in\overline{J(F)}$, т. е. $x=\lim\limits_{n\to\infty}h_n$, где $h_n(M)\in J(F)$; тогда функция $x_n(M)=x(M)-h_n(M)$ совпадает с $x(M)$ в некоторой окрестности множества F (а именно, в той, в которой $h_n(M)=0$) и стремится по норме к нулю при $n\to\infty$. Обратно, пусть для данной функции $x(M)\in R$ существует последовательность функций $x_n(M)\in R$, стремящаяся по норме к нулю, причем каждая функция $x_n(M)$ в некоторой окрестности множества F совпадает с $x(M)$. Тогда функции $h_n(M)=x(M)-x_n(M)\in J(F)$ и $x=\lim h_n\in\overline{J(F)}$. Тем самым теорема 1 полностью доказана.

Следствие. *В кольце $C(S)$ всех непрерывных функций $f(t)$, заданных на бикомпактном хаусдорфовом пространстве S, всякий замкнутый идеал I представляет собой совокупность $I(F)$ всех функций $f(t)\in C(S)$, равных нулю на некотором замкнутом множестве $F\subset S$.*

Действительно, как известно, $\mathfrak{M}(C(S))=S$ (см. §§ 2 и 5) и кольцо $C(S)$ регулярно, так что к нему применимы все полученные результаты. Пусть F — остов идеала I. Очевидно, достаточно показать, что наименьший принадлежащий F замкнутый идеал $\overline{J(F)}$ совпадает с наибольшим принадлежащим F замкнутым идеалом $I(F)$. Пусть $f(t)$ — любая непрерывная функция на S, равная нулю на множестве F, и ε — произвольное число >0; рассмотрим замкнутые множества

$$F_1=\{t\in S\colon\ |f(t)|\leqslant\varepsilon\},\qquad F_2=\{t\in S\colon\ |f(t)|\geqslant 2\varepsilon\}.$$

Так как F_1 и F_2 не пересекаются, то, по теореме Урысона имеется непрерывная функция $a(t)$, равная единице на F_1 нулю на F_2 и такая, что $0\leqslant a(t)\leqslant 1$ для всех $t\in S$. Произведение $a(t)f(t)$ по модулю (а значит и по норме кольца $C(S)$) не превосходит 2ε, а на множестве F_1, являющемся (замкнутой) окрестностью множества F, совпадает с $f(t)$. Таким образом, для функции $f(t)$ выполнен критерий принадлежности идеалу $\overline{J(F)}$, установленный теоремой 1. Так как $f(t)$ — любая функция из идеала $I(F)$, то $I(F) = \overline{J(F)}$, что и требуется.

§ 37. Примарные идеалы

Среди всех идеалов нормированного кольца особый интерес представляют идеалы, содержащиеся только в одном максимальном идеале. Имеется ряд проблем анализа, решение которых зависит от структуры идеалов, содержащихся только в данном максимальном идеале: такова, например, обобщенная тауберова проблема Винера (см. § 40). С другой стороны, как мы увидим далее, во многих случаях такие идеалы допускают простое чисто алгебраическое описание.

Определение 1. Собственный идеал I нормированного кольца R называется *примарным*, если он содержится только в одном максимальном идеале кольца R. Нормированное кольцо называется *примарным*, если оно обладает лишь одним максимальным идеалом.

В кольце $\hat{R}$ функций $x(M)$ примарный идеал может быть охарактеризован тем, что множество, на котором обращаются в нуль все функции $x(M) \in I$, состоит из одной единственной точки. Если I — замкнутый примарный идеал, то кольцо вычетов R/I содержит единственный максимальный идеал. Таким образом, *кольцо вычетов любого нормированного коммутативного кольца по замкнутому примарному идеалу есть примарное кольцо.*

В силу теоремы 1 § 36, для каждого максимального идеала M_0 регулярного кольца R существует наименьший замкнутый примарный идеал $\overline{J(M_0)}$. При этом $x(M) \in \overline{J(M_0)}$ тогда и только тогда, когда существует последовательность функций $x_n(M) \in R$, стремящаяся по норме к нулю и такая, что каждая функция $x_n(M)$ совпадает с $x(M)$ в некоторой окрестности точки M_0.

В качестве иллюстрации найдем наименьшие примарные идеалы в кольце D_m (§ 1, пример 2°). Функции $x(t) \in D_m$, равные при $t = t_0$ нулю вместе со всеми производными до m-го порядка включительно, образуют в D_m замкнутый примарный идеал J. Покажем, что он является наименьшим примарным идеалом, принадлежащим точке t_0.

Рассмотрим произвольную функцию $h(t) \in D_m$, равную 1 в окрестности точки t_0 и 0 вне некоторой другой окрестности этой точки, например вне окрестности $|t-t_0| \leqslant c$. Пусть $A = \sup\limits_{\substack{0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 \leqslant k \leqslant m}} |h^{(k)}(t)|$. Для функции $h_\nu(t) = h(\nu(t-t_0))$ оценки производных будут следующие:

$$\left|h_\nu^{(k)}(t)\right| \leqslant \nu^k A = O(\nu^k) \qquad (k = 0, 1, \ldots, m). \tag{1}$$

С другой стороны, для производных заданной функции $f(t) \in J$ в области $|t-t_0| \leqslant \rho$ интегрированием легко получаются следующие оценки:

$$|f^{(r)}(t)| = o(\rho^{m-r}) \qquad (r = 0, 1, \ldots, m). \tag{2}$$

Оценим норму произведения $h_\nu f$. Заметим, что функция $h_\nu(t)$ обращается в нуль при $|t-t_0| \geqslant \frac{c}{\nu}$; поэтому в оценках (2) мы положим $\rho = \frac{c}{\nu}$. Мы имеем по формуле Лейбница

$$|(h_\nu f)^{(q)}| \leqslant \sum_{k=0}^{q} C_q^k \left|h_\nu^{(k)}\right| \left|f^{(q-k)}\right| =$$

$$= \sum_{k=0}^{q} C_q^k O(\nu^k)\, o\left(\frac{1}{\nu^{m-q-k}}\right) = o\left(\frac{1}{\nu^{m-k}}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\nu \to \infty} \|h_\nu f\| = 0.$$

Но каждая функция $h_\nu f$ в некоторой окрестности точки t_0 совпадает с f. В силу теоремы 1 § 36 получаем, что f принадлежит наименьшему замкнутому примарному идеалу, соответствующему точке t_0, что и утверждалось.

Построим кольцо вычетов D_m/J, где J — рассмотренный выше идеал. Поскольку функция $t - t_0$ является образующей кольца D_m, её образ X при каноническом отображении D_m на D_m/J будет образующей кольца D_m/J. Так как функция $(t-t_0)^{m+1}$ обращается в точке t_0 в нуль вместе со всеми производными до m-го порядка включительно, т. е. принадлежит идеалу J, то $X^{m+1} = 0$. Очевидно также, что $X^m \neq 0$. Отсюда следует, что $a_0 + a_1 X + \ldots$ $\ldots + a_m X^m = 0$ лишь если $a_0 = a_1 = \ldots = a_m = 0$. Действительно, умножив обе части на X^m, получим $a_0 X^m = 0$, откуда $a_0 = 0$; затем, умножив на X^{m-1}, так же получим, что $a_1 = 0$, и т. д. Таким образом, D_m/J есть кольцо всех многочленов вида $a_0 + a_1 X + \ldots$

$\ldots + a_m X^m$, т. е. *кольцо D_m/J конечномерно* (и изоморфно кольцу $I^{(m)}$ примера 4° § 1).

Замечание 1. Аналогично можно показать, что в кольце $D_m(G)$, образованном функциями точки $t=(t_1, \ldots, t_n)$ в области $G \subset R^n$, обладающими непрерывными частными производными до m-го порядка включительно, наименьший примарный идеал $\overline{J(t^0)}$ состоит из тех и только тех функций $x(t)$, которые в точке t^0 обращаются в нуль вместе со всеми частными производными до m-го порядка включительно. Кольцо вычетов $D_m(G)/\overline{J(t^0)}$ также конечномерно и состоит из всех многочленов степени $\leqslant m$ от переменных X_1, $X_2, \ldots, X_n$, где X_j есть образ в $D_m(G)/\overline{J(t^0)}$ функции $\varphi_j(t) = t_j - t_j^0$.

§ 38. Локально изоморфные кольца

Определение 1. Пусть R' и R'' — регулярные кольца функций, а M_0' и M_0'' — фиксированные точки бикомпактов $\mathfrak{M}(R')$ и $\mathfrak{M}(R'')$. Кольца R' и R'' будем называть *локально изоморфными в точках M_0' и M_0''*, если существуют окрестности $U(M_0')$ и $U(M_0'')$, которые можно отобразить гомеоморфно друг на друга так, что при этом сужение на $U(M_0')$ каждой функции из кольца R' перейдет в сужение на $U(M_0'')$ некоторой функции из кольца R'' и обратно.

Само определение наименьшего замкнутого примарного идеала $J(M_0)$ (в дальнейшем мы будем рассматривать только замкнутые идеалы, поэтому знак замыкания будем опускать) наводит на мысль, что строение кольца вычетов $R/J(M_0)$ зависит только от поведения функций $x(M) \in R$ в окрестности точки M_0. И действительно, имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *Если кольца R' и R'' локально изоморфны в точках M_0' и M_0'', то кольца вычетов $R'/J(M_0')$ и $R''/J(M_0'')$ изоморфны.*

Доказательство. Выберем внутри окрестностей $U(M_0')$ и $U(M_0'')$ замкнутые окрестности V' и V'' точек M_0' и M_0''. Между кольцами вычетов $R'/I(V')$ и $R''/I(V'')$ будет иметься естественный алгебраический изоморфизм. Но для колец функций алгебраический изоморфизм всегда является и топологическим (теорема 2 § 9). Пусть теперь класс $X' \in R'/J(M_0')$; выберем любую функцию $x'(M) \in X'$ и рассмотрим функцию $x''(M) \in R''$, переходящую в $x'(M)$ при гомеоморфизме

$U(M_0'') \to U(M_0')$. Эта функция переходит при гомоморфизме $R'' \to R''/J(M_0'')$ в некоторый класс X'', который мы и поставим в соответствие классу X'. Покажем, что это отображение однозначно. Пусть $x_1'(M)$ — любая другая функция из класса X' и $x_1''(M)$ — соответствующая функция в кольце R''. Разность $x'(M) - x_1'(M) \in J(M_0')$, и поэтому существует последовательность функций $y_n'(M) \in R'$, равных нулю в окрестности точки M_0', для которых $x'(M) - x_1'(M) - y_n'(M) \to 0$ по норме кольца R'. Это предельное соотношение сохраняется и в кольце вычетов $R'/I(V')$, а в силу изоморфизма этого кольца с кольцом вычетов $R''/I(V'')$, также и в этом последнем. Следовательно, в кольце R'' найдется последовательность функций $y_n''(M)$ ($n = 1, 2, \ldots$), равных нулю в окрестности точки M_0'', для которых $x''(M) - x_1''(M) - y_n''(M) \to 0$ по норме кольца R''. Но это означает, что функции $x''(M)$ и $x_1''(M)$ принадлежат одному и тому же классу $X'' \in R''/J(M_0'')$. Тем самым отображение $X' \to X''$ однозначно. В силу полной симметрии условия оно и взаимно однозначно. Легко проверить, что это отображение есть изоморфизм, сохраняющий сходимость; этим и завершается доказательство.

В качестве иллюстрации рассмотрим кольцо D_m (K) всех функций $f(t)$ на окружности K ($0 \leqslant t \leqslant 2\pi$) (где 0 и 2π отождествлены), имеющих m непрерывных производных. Очевидно, это кольцо локально изоморфно кольцу D_m (на отрезке) в любой точке t_0' окружности K и любой внутренней точке t_0'' отрезка. Поэтому кольца вычетов $D_m(\text{K})/J(t_0')$ и $D_m/J(t_0'')$ изоморфны. Более того, из доказательства теоремы 1 вытекает, что наименьший идеал $J(t_0') \subset D_m(\text{K})$ состоит из функций с той же самой локальной характеристикой, что и в кольце D_m, т. е. равных при $t = t_0'$ нулю вместе с m первыми производными.

Нетривиальный пример пары локально изоморфных колец доставляют кольца W и V. Пространством максимальных идеалов первого из них служит окружность K ($0 \leqslant t \leqslant 2\pi$) (где 0 и 2π отождествлены), а второго — прямая $-\infty < s < +\infty$, дополненная бесконечно удаленной точкой; мы будем рассматривать здесь V как кольцо функций на максимальных идеалах, т. е. функций $y(s) =$

$$= \lambda + \int_{-\infty}^{\infty} a(t)\, e^{ist}\, dt, \text{ где } |\lambda| + \int_{-\infty}^{\infty} |a(t)|\, dt = \|y\| < \infty \text{ и } y(\infty) = \lambda.$$

Выберем произвольно точку t_0 на окружности $\mathbf{K}$ и точку s_0 на прямой $-\infty < s < +\infty$ и рассмотрим интервалы $U' = \{t \in \mathbf{K}: |t - t_0| \leqslant c < 2\pi\}$, $U'' = \{s: |s - s_0| \leqslant c\}$. Мы покажем, что сужение каждой функции $x(t) \in W$ на интервал U' при замене аргумента $t - t_0$ на $s - s_0$ переходит в сужение некоторой функции из кольца V на интервал U'', и обратно. При доказательстве без ограничения общности можно считать $t_0 = 0$, $s_0 = 0$, что мы и сделаем. Допустим, что взятая функция $x(t) \in W$ допускает на U' разложение

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{int}, \quad \text{где} \quad \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Пусть, далее, функция

$$h(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\tau} a(\tau)\, d\tau \in V$$

равна 1 при $|s| \leqslant c$ и 0 вне некоторого более широкого промежутка (можно, например, взять любую гладкую функцию, обладающую двумя последними свойствами). Проверим, что произведение $h(s)\, x(s)$ также принадлежит кольцу V. Действительно,

$$h(s)\, x(s) = h(s) \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{ins} = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n h(s)\, e^{ins} =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{is(\tau+n)} a_n a(\tau)\, d\tau = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a_n e^{is\tau}\, a(\tau - n)\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\tau} \sum_{-\infty}^{\infty} a_n a(\tau - n)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\tau} b(\tau)\, d\tau,$$

где

$$\int_{-\infty}^{\infty} |b(\tau)|\, d\tau \leqslant \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |a_n|\, |a(\tau - n)|\, d\tau =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n| \int_{-\infty}^{\infty} |a(\tau)|\, d\tau < \infty.$$

Но на отрезке $|s| \leqslant c$ функция $h(s)\, x(s)$ совпадает с $x(s)$; отсюда следует, что $x(s)$ локально принадлежит кольцу V в точке $s = 0$.

Обратно, допустим, что взятая функция $y(s) \in V$ допускает на U'' разложение

$$y(s) = \lambda + \int_{-\infty}^{\infty} a(\tau) e^{is\tau} d\tau, \quad \text{где} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |a(\tau)| d\tau < \infty.$$

Рассмотрим в кольце W идеал I, образованный из всех функций $x(t)$, равных нулю на интервале $|t| \leqslant c < 2\pi$, и кольцо вычетов W/I. В этом кольце имеются функции $e^{it\tau}$ при любом вещественном τ (поскольку они продолжаются на всю окружность К как гладкие периодические функции). Покажем, что нормы этих функций в кольце W/I равномерно ограниченны по τ. В самом деле, при τ целом, $\tau = n$, функция e^{itn} в кольце вычетов W/I есть образ функции e^{itn} в самом кольце W; но в кольце W мы имеем $\|e^{itn}\|_W = 1$, а отсюда следует, что в кольце W/I имеет место неравенство $\|e^{itn}\|_{W/I} \leqslant 1$. Для любого вещественного τ мы можем написать:

$$\tau = n + \alpha,$$

где $0 \leqslant \alpha < 1$; отсюда следует, что

$$\|e^{it\tau}\|_{W/I} \leqslant \|e^{itn}\|_{W/I} \|e^{it\alpha}\|_{W/I} \leqslant \sup_{0 \leqslant \alpha < 1} \|e^{it\alpha}\|_{W/I}.$$

Но элемент $e^{it\alpha} \in W/I$, рассматриваемый как функция от α, непрерывен и поэтому ограничен по норме на интервале $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Следовательно, $\|e^{it\tau}\|_{W/I}$ равномерно ограниченно при всех τ. Так как элемент $e^{it\tau}$ кольца W/I непрерывен по норме как функция от τ и ограничен, то интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\tau} a(\tau) d\tau$ сходится по норме и, следовательно, $\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\tau} a(\tau) d\tau$ представляет элемент кольца W/I. Чтобы получить значения соответствующей функции на максимальном идеале t_0, $|t_0| \leqslant c$, следует вместо t подставить t_0, в результате чего получится численный интеграл

$$\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} e^{it_0\tau} a(\tau) d\tau = y(t_0).$$

Таким образом, всякая функция $y(t) \in V$ локально принадлежит кольцу W в точке $t = 0$. Следовательно, кольца V и W локально изоморфны в произвольных точках $t_0 \in$ К и $s_0 \neq \infty$. Ниже мы укажем строение колец вычетов колец W и V по наименьшим примарным идеалам.

§ 39. Связь между кольцами вычетов двух вложенных одно в другое колец функций

Пусть R' и R'' — регулярные кольца функций с одним и тем же пространством максимальных идеалов $\mathfrak{M}$, причем $R' \subset R''$. Обозначим через J' и J'' наименьшие замкнутые идеалы в этих кольцах, отвечающие фиксированной точке $M_0 \in \mathfrak{M}$. Покажем, что *кольцо вычетов R'/J' допускает естественный гомоморфизм в кольцо вычетов R''/J''.*

Фиксируем класс $X' \in R'/J'$ и пусть $x' \in R'$ — любая функция из этого класса. Так как $R' \subset R''$, то x' можно считать элементом кольца R''; как таковой он определяет и некоторый класс вычетов $X'' \in R''/J''$, который мы и поставим в соответствие взятому классу X'. Необходимо доказать однозначность этого определения. Пусть $y' \in R'$ — другой элемент из того же класса X'. Тогда разность $x' - y'$ принадлежит идеалу J'. В силу теоремы 1 § 36, в R' имеется последовательность функций $h'_\nu(M)$, сходящаяся к нулю по норме кольца R' и такая, что каждая функция $h'_\nu(M)$ совпадает с $x'(M) - y'(M)$ в некоторой окрестности точки M_0. Но эти функции $h'_\nu(M)$, рассматриваемые как элементы кольца R'', также стремятся к нулю (уже по норме кольца R''), в силу соотношения сходимостей во вложенных одно в другое кольцах (теорема 1 § 9). Тем самым функция $x' - y'$ принадлежит и идеалу J'', т. е. x' и y' принадлежат одному и тому же классу кольца вычетов R''/J''.

Построенное отображение $R'/J' \to R''/J''$ есть, очевидно, гомоморфизм. Проверим еще, что если R' плотно в R'', то образ R'/J' плотен в R''/J''. Пусть X'' — некоторый класс из кольца R''/J'' и $x'' \in R''$ — любой элемент этого класса. По условию, имеется последовательность $x'_1, \ldots, x'_\nu, \ldots \subset R'$, сходящаяся к x'' по метрике R''. Рассмотрим соответствующие классы $X'_1, \ldots, X'_\nu, \ldots$ в R'/J' и их образы $X''_1, \ldots$ $\ldots, X''_\nu, \ldots$ в R''/J''. Мы утверждаем, что в кольце R''/J''

справедливо равенство $X'' = \lim_{\nu\to\infty} X''_\nu$. Действительно, согласно определению

$$\|X'' - X''_\nu\| = \inf_{y''_\nu \in X''} \|x'' - y''_\nu\|_{R''} \leqslant \|x'' - x''_\nu\|_{R''} \to 0,$$

что и требуется.

Особенно интересен случай, когда кольцо вычетов R'/J' конечномерно. Тогда его образ в кольце R''/J'' также конечномерен. Если R' плотно в R'', то, так как, по доказанному, образ R'/J' плотен в R''/J'', кольцо вычетов R''/J'' совпадает с этим образом и потому также конечномерно. Этот результат мы сформулируем в виде теоремы:

Теорема 1. *Пусть R' и R'' — регулярные кольца с одним и тем же пространством максимальных идеалов $\mathfrak{M}$, причем $R' \subset R''$ и R' плотно в R''. Если $J' \subset R'$ и $J'' \subset R''$ — наименьшие примарные идеалы, отвечающие одной и той же точке $M_0 \in \mathfrak{M}$, и кольцо вычетов R'/J' конечномерно, то кольцо вычетов R''/J'' как гомоморфный образ кольца R'/J' также конечномерно и имеет размерность не выше чем R'/J'.*

Пусть, например, известно, что некоторое нормированное кольцо R состоит из функций, определенных на замкнутой области G n-мерного пространства, и содержит кольцо $D_m(G)$ всех функций, имеющих в этой области непрерывные частные производные до m-го порядка включительно, как всюду плотное множество. Как мы уже знаем (см. §§ 37 и 38), $D_m(G)$ обладает конечномерным кольцом вычетов $D_m(G)/J(t^0)$ для каждой точки $t^0 \in G$. В силу теоремы 1, кольцо вычетов $R/J(t^0)$ также конечномерно.

В качестве иллюстрации найдем наименьшие идеалы в кольце W. Как мы знаем, множеством максимальных идеалов этого кольца служит окружность $K(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ (с отождествленными точками 0 и 2π). Как известно, каждая периодическая функция $f(t)$ с периодом 2π, обладающая непрерывной производной, принадлежит кольцу W. Таким образом, $W \supset D_1(K)$. Далее, $D_1(K)$ содержит все экспоненты e^{int} ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) и, следовательно, содержится в W как плотное множество. Кольца вычетов $D_1(K)/J(t_0)$ известны: они изоморфны соответствующим кольцам вычетов $D_1/J(t_0)$ (см. § 38), и значит, как мы видели в § 37, каждое из них есть кольцо многочленов первой степени $a_0 + a_1X$, где X есть образ функции $t - t_0$ и $X^2 = 0$. В силу теоремы 1, кольцо вычетов $W/J(t_0)$ есть гомоморфный образ кольца $\{a_0 + a_1X\}$ и поэтому есть либо само это кольцо, либо тело комплексных чисел. Покажем, что первое предположение исключается. Пусть X' — образ элемента X в кольце $W/J(t_0)$. Тогда во всяком случае

$$e^{inX'} = 1 + inX' \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{1}$$

С другой стороны, $e^{inX'}$ есть образ при гомоморфизме $W \to W/J(t_0)$ функции $e^{in(t-t_0)} = e^{int}e^{-int_0}$, которая в кольце W имеет норму 1. Так как при каноническом гомоморфизме в кольцо вычетов нормы не увеличиваются, то мы должны иметь

$$\|1 + inX'\| = \|e^{inX'}\|_{W/J(t_0)} \leqslant 1.$$

Если $\|X'\|_{W/J(t_0)} > 0$, то $\|1 + inX'\| \geqslant n\|X'\| - 1 \to \infty$ при $n \to \infty$ и получается противоречие с (1). Таким образом, $X' = 0$, и *кольцо вычетов по наименьшему идеалу $J(t_0)$ кольца W, соответствующему точке t_0, есть тело комплексных чисел.* Отсюда следует, что *в кольце W всякий наименьший замкнутый примарный идеал совпадает с соответствующим максимальным идеалом.*

Вследствие локального изоморфизма колец V и W получаем, что и в кольце V каждый замкнутый примарный идеал, отвечающий точке $s \neq \infty$, совпадает с максимальным идеалом M_s.

Совершенно аналогичные соображения можно применить и к кольцу абсолютно сходящихся рядов Фурье функций нескольких переменных. В случае, например, функций n переменных $t_1, \ldots, t_n$ множеством максимальных идеалов такого кольца W_n будет служить n-мерный тор K^n $\{0 \leqslant t_j \leqslant 2\pi$ $(j = 1, \ldots, n)\}$ (где 0 и 2π отождествлены). Вместо кольца $D_1(K)$ функций с непрерывной первой производной, участвующего в предыдущем построении, нужно будет взять кольцо $D_1(K^n)$, образованное функциями $x(t_1, \ldots, t_n)$, обладающими непрерывными производными вида $\dfrac{\partial^r x}{\partial t_{j_1} \ldots \partial t_{j_r}}$ $(r \leqslant k)$, где дифференцирование по каждому из аргументов производится не свыше одного раза. Легко проверить, что $D_1(K^n) \subset W_n$. В кольце $D_1(K^n)/J(t^0)$, порождаемом элементами X_j — образами функций $t_j - t_j^0$, имеем $X_j^2 = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$; это позволяет провести без изменения заключительную часть доказательства.

Итак, *в кольце W_n абсолютно сходящихся n-кратных рядов Фурье каждый примарный идеал совпадает с максимальным.* Тот же факт справедлив и в кольце V_n абсолютно сходящихся n-кратных интегралов Фурье, локально изоморфном кольцу W_n.

§ 40. Тауберова теорема Винера

В кольце V абсолютно сходящихся интегралов Фурье есть еще один максимальный идеал, M_∞, в котором, вообще, локальный изоморфизм с кольцом W не имеет места. Покажем непосредственно, что и максимальный идеал M_∞ не содержит ни одного отличного от него замкнутого примарного идеала. Как мы ниже увидим, этот факт эквивалентен тауберовой теореме Винера [10, 11].

Рассмотрим наименьший идеал J, принадлежащий точке M_∞; он образован из всех функций $y(s) \in V$, равных нулю при всех достаточно больших $|s|$. Мы должны доказать, что его замыкание $\bar{J}$

совпадает со всем идеалом M_∞. Так как идеал J, очевидно, инвариантен относительно сдвигов и умножения на $e^{i\tau s}$ с любым τ, то и соответствующее подпространство L' пространства L^1, образованное интегрируемыми функциями $x(t)$, преобразования Фурье которых

$$y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{its} dt$$

составляют идеал J, также инвариантно относительно сдвигов и умножения на функции $e^{i\tau t}$. Если замыкание $\overline{L'}$ этого подпространства L' не совпадает со всем пространством L^1, то имеется ненулевой линейный функционал на L^1, равный нулю на подпространстве $\overline{L'}$. Как и любой линейный функционал на L^1, он имеет вид

$$\langle x, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) x(t) dt, \tag{1}$$

где $f(t)$ — ограниченная измеримая функция. По доказанному, для любой функции $x(t) \in L'$ и любого вещественного h имеем $x(t) e^{iht} \in L'$, так что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) x(t) e^{iht} dt = 0,$$

т. е. преобразование Фурье интегрируемой Функции $f(t)x(t)$ равно нулю. В силу теоремы единственности отсюда следует, что произведение $f(t)x(t)$ равно нулю почти при всех t. Но так как функция $x(t)$ отлична от тождественного нуля и, кроме того, ее можно сдвигать по всей оси с сохранением результата, то, следовательно, $f(t)$ почти всюду равна 0. Но тогда (1) есть нулевой функционал на L^1, в противоречие с предположением. Отсюда $\overline{L'} = L^1$, $\overline{J} = V$, что и утверждалось.

Сама теорема Винера формулируется следующим образом [10, 11]:

Если функция $x_0(t) \in L^1$ имеет преобразование Фурье $x_0^{\sim}(s)$, не обращающееся в нуль ни при каком вещественном значении s, и если $f(t)$ — ограниченная измеримая функция такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_0(t-\tau) f(t) dt \to l \int_{-\infty}^{\infty} x_0(t) dt \quad \textit{при} \quad \tau \to \infty,$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) f(t) dt \to l \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt \quad \textit{при} \quad \tau \to \infty \tag{2}$$

для любой функции $x(t) \in L^1$.

Для доказательства будем рассуждать следующим образом. Пусть I — совокупность всех функций $x(t) \in L^1$, удовлетворяющих условию (2). Если обозначить через f_τ функционал на L^1, определенный (ограниченной измеримой) функцией $f(t+\tau)$, то соотношение (2) может быть записано в форме

$$\lim_{\tau \to \infty} \langle x, f_\tau \rangle = \langle x, l \rangle.$$

Отсюда следует, что I есть замкнутое линейное подпространство в L^1. Ясно также, что I инвариантно относительно операции сдвига $x(t) \to x(t-h)$. Но тогда I есть идеал в кольце V, так как свертка

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-h)\, y(h)\, dh$$

есть предел по норме кольца V линейных комбинаций сдвигов функции $x(t)$. Этот идеал содержит функцию $x_0(t)$, преобразование Фурье которой не обращается в нуль ни при каком s. Но это означает, что он не содержится ни в одном из максимальных идеалов M_s $(s \neq \infty)$. Следовательно, I есть примарный идеал, принадлежащий только максимальному идеалу M_∞. Но тогда, по доказанному выше, $I = M_\infty = L^1$, чем теорема Винера и доказана.

Приведенное доказательство того, что всякий замкнутый примарный идеал, содержащийся в M_∞, совпадает с M_∞, переносится без изменений на случай нескольких переменных (и даже локально бикомпактной группы), а также на случай кольца $V^{\langle\alpha\rangle}$ при единственном условии, чтобы это кольцо было регулярным. При более быстром росте функции $\alpha(t)$, когда пространство максимальных идеалов кольца $V^{\langle\alpha\rangle}$ становится полосой в s-плоскости (кольцо $V^{\langle\alpha\rangle}$ при этом заведомо не регулярно), максимальный идеал M_∞ всегда содержит континуум различных примарных идеалов (ср. теорему 1 § 45). Они были полностью исследованы Б. И. Коренблюмом [27].

§ 41. Примарные идеалы в однородных кольцах функций

Нормированное кольцо R функций $x(t)$ с окружностью K $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ (где 0 и 2π отождествлены) в качестве пространства максимальных идеалов называется *однородным*, если: 1) оно имеет своими образующими функции e^{it} и e^{-it}; 2) вместе со всякой функцией $x(t)$ и все ее сдвиги $x(t+h)$ (где $t+h$ считается приведенным по модулю 2π) принадлежат кольцу R, причем $\|x(t+h)\| = \|x(t)\|$.

Примерами однородных колец являются кольцо $C(K)$ всех непрерывных функций на K, кольцо $D_m(K)$ всех функций на K с m непрерывными производными, кольцо W абсолютно сходящихся рядов Фурье, кольца $W^{\langle\alpha\rangle}$ (§ 19) с условием $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_{-n}} = 1$, обеспечивающим совпадение пространства их максимальных идеалов с окружностью К.

В дальнейшем мы наложим на кольцо R еще одно условие:

3) R содержит кольцо $D_m(K)$ при некотором m *).

При выполнении условия 3) кольцо R регулярно. Мы опишем далее структуру примарных идеалов в этом кольце.

О выполнении условия 3) можно судить по скорости роста чисел $a_n = \|e^{int}\|$ при $n \to \pm\infty$. Именно, условие 3) эквивалентно условию не более чем степенного роста этих чисел:

3') $a_n = O(|n|^p)$ при некотором p.

Действительно, если $R \supset D_m(K)$, то в силу теоремы 1 § 9 существует постоянная C такая, что для всякой $x(t) \in D_m(K)$

$$\|x\|_R \leqslant C\|x\|_{D_m(K)}.$$

В частности, положив $x(t) = e^{int}$, получим:

$$a_n = \|e^{int}\|_R \leqslant C\|e^{int}\|_{D_m(K)} = O(|n|^m),$$

так что условие 3') выполняется при $p = m$. Обратно, если выполнено условие 3') и $f(t)$ — любая функция с непрерывными производными до порядка $m = p+2$ включительно, то можно утверждать, что $f(t)$ входит и в R.

В самом деле, если эту функцию разложить в ряд Фурье

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{int}, \tag{1}$$

то коэффициенты Фурье функции $f^{(p+2)}(t)$, равные по модулю $|n|^{p+2}|b_n|$, во всяком случае будут ограниченны, а тогда

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |b_n| \|e^{int}\| = \sum_{-\infty}^{\infty} |b_n| a_n \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{-\infty}^{\infty} O\left(\frac{1}{|n|^{p+2}}\right) O(|n|^p) = \sum_{-\infty}^{\infty} O\left(\frac{1}{n^2}\right) < \infty,$$

так что ряд (1) сходится по норме кольца R; а отсюда $R \supset D_{p+2}(K)$ что и требуется.

---

*) Можно было бы заменить это условие по форме более, слабым, но в действительности эквивалентным (см. § 9): R содержит кольцо $D_\infty(K)$ всех бесконечно дифференцируемых функций на K.

В силу условия 1) $D_m(K)$ содержится в R как всюду плотное множество, и мы можем применить теорему 1 § 39, утверждающую в данном случае, что кольцо вычетов кольца R по наименьшему замкнутому примарному идеалу $J(t_0)$, соответствующему точке $t_0 \in K$, есть гомоморфный образ кольца вычетов $D_m(K)/J(t_0)$. Это последнее кольцо, как мы знаем (см. §§ 38 и 37), есть кольцо всех многочленов вида $a_0+a_1X+\ldots+a_mX^m$, где X — образ в $D_m(K)/J(t_0)$ функции $t-t_0$ *), $X^{m+1}=0$, а $X^m \neq 0$. Поэтому $R/J(t_0)$ есть кольцо всех многочленов вида

$$a_0+a_1Z+\ldots+a_lZ^l,$$

где Z — образ X при гомоморфизме $D_m(K)/J(t_0) \to R/J(t_0)$ и число $l \leqslant m$ таково, что $Z^l \neq 0$, а $Z^{l+1}=0$ **).

Теорема 1. *Число l, определяющее размерность кольца вычетов $R/J(t_0)$, может быть получено из соотношений*

$$R \subset D_l(K), \quad R \not\subset D_{l+1}(K).$$

Доказательство. Функции $f(t) \in R$, аналитической в окрестности точки t_0 и имеющей в этой окрестности тейлоровское разложение

$$f(t)=f(t_0)+(t-t_0)f'(t_0)+\frac{1}{2!}(t-t_0)^2f''(t_0)+\ldots,$$

отвечает в кольце вычетов $R/J(t_0)$ элемент

$$f(t_0)+Zf'(t_0)+\frac{1}{2!}Z^2f''(t_0)+\ldots+\frac{1}{l!}Z^lf^{(l)}(t_0). \tag{2}$$

Действительно, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n$ есть ряд аналитических функций, равномерно сходящийся в области, содержащей множество максимальных идеалов кольца $R/J(t_0)$ (т. е. точку t_0); поэтому, в силу результатов § 6, ему отвечает ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}Z^n$, сходящийся по норме кольца $R/J(t_0)$; но этот ряд приводится к многочлену (2).

---

*) При наложении на локальный изоморфизм $D_m \to D_m(K)$ в точке t_0 канонического отображения $D_m(K) \to D_m(K)/J(t_0)$.

**) Действительно, из последних двух условий, так же как на стр. 230, вытекает, что $a_0+a_1Z+\ldots+a_lZ^l=0$ лишь если $a_0=a_1=\ldots=a_l=0$.

Поскольку $R/J(t_0)$ конечномерно, а все нормы на конечномерном пространстве эквивалентны, существует постоянная C, обладающая свойством

$$\left\| \sum_{k=0}^{l} a_k Z^k \right\|_{R/J(t_0)} \geqslant C \sum_{k=0}^{l} |a_k|$$

для любого элемента $\sum_{k=0}^{l} a_k Z^k \in R/J(t_0)$. Так как при гомоморфизме $R \to R/J(t_0)$ нормы не увеличиваются, то

$$\|f(t)\|_R \geqslant \left\| \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{k!} f^{(k)}(t_0) Z^k \right\|_{R/J(t_0)} \geqslant C \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{k!} |f^{(k)}(t_0)|.$$

Но, поскольку кольцо R и его норма инвариантны относительно вращений окружности (условие 2), постоянную C можно считать не зависящей от выбора точки t_0, а тогда мы имеем:

$$\|f(t)\|_R \geqslant C \max_{t_0 \in K} \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{k!} |f^{(k)}(t_0)| = C \|f(t)\|_{D_l(K)}. \qquad (3)$$

Функции $f(t)$, к которым применимо это рассуждение, расположены всюду плотно в кольце R. Поэтому, после перехода к пределу, неравенство (3) оказывается справедливым для всех функций $f(t) \in R$. В частности, отсюда следует, что *кольцо R содержится в кольце $D_l(K)$*. В более же узком кольце $D_{l+1}(K)$ оно уже не содержится. Действительно, в кольце вычетов $R/J(t_0)$ для образа Z элемента из R, локально совпадающего с $t - t_0$, мы имеем $Z^{l+1} = 0$, и это должно иметь место также в кольце вычетов $R'/J(t_0)$, где R' — любое кольцо, более широкое, чем R; но в кольце $D_{l+1}(K)/J(t_0)$, как мы знаем, $X^{l+1} \neq 0$. Итак, $R \subset D_l(K)$, $R \not\subset D_{l+1}(K)$, что и утверждалось.

Для кольца $W^{\langle\alpha\rangle}$ полученный результат можно сформулировать непосредственно в терминах последовательности (α_n). Именно, *если $R = W^{\langle\alpha\rangle}$, то l есть наименьшее из целых чисел r, для которых*

$$\lim_{|n| \to \infty} \frac{\alpha_n}{|n|^{r+1}} = 0.$$

Для доказательства предположим сначала, что при некотором целом r

$$\lim_{|n| \to \infty} \frac{\alpha_n}{|n|^{r+1}} = 0,$$

и покажем, что $r \geqslant l$. Выберем последовательность $0 < n_1 < n_2 < \ldots$ $\ldots < n_k < \ldots$ так, чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n_k}}{n_k^{r+1}}$ сходился. Построим затем последовательность положительных чисел $p_k \to \infty$ с тем расчетом, чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{\alpha_{n_k}}{n_k^{r+1}}$ также сходился, и положим

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{p_k}{n_k^{r+1}} & \text{для } n = n_k \quad (k = 1, 2, \ldots), \\ 0 & \text{для остальных целых } n. \end{cases}$$

Очевидно, функция $\varphi(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ принадлежит кольцу $W^{\langle\alpha\rangle}$ и имеет не более r непрерывных производных (поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k e^{in_k t}$ расходится). Так как $W^{\langle\alpha\rangle} \subset D_l(\mathrm{K})$, то отсюда и следует, что $r \geqslant l$.

С другой стороны, соотношение

$$\lim_{|n| \to \infty} \frac{\alpha_n}{|n|^{l+1}} = 0$$

заведомо имеет место. Действительно, в противном случае мы имели бы

$$\alpha_n \geqslant C|n|^{l+1} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; C > 0)$$

и, следовательно, для любой $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{int} \in W^{\langle\alpha\rangle}$ было бы справедливо неравенство $\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n| |n|^{l+1} \leqslant \frac{1}{C} \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n| \alpha_n < \infty$, откуда следовало бы, что $W^{\langle\alpha\rangle} \subset D_{l+1}$, в противоречие с теоремой 1. Тем самым наше утверждение полностью доказано.

Как следствие получаем:

Для того чтобы в кольце $W^{\langle\alpha\rangle}$, где

$$\alpha_n \leqslant C(1 + |n|)^q, \tag{4}$$

каждый примарный идеал совпадал с максимальным, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{|n|\to\infty} \frac{\alpha_n}{|n|} = 0.$$

Применяя результаты § 37, можно сформулировать это следствие еще в такой форме.

Пусть последовательность (α_n) *удовлетворяет условию* (4). *Для того чтобы каждую функцию* $f(t) \in W^{\langle\alpha\rangle}$, *обращающуюся в нуль хотя бы в одной точке, можно было аппроксимировать по норме с любой степенью точности функцией* $\varphi(t) \in W^{\langle\alpha\rangle}$, *равной нулю на целом промежутке, заключающем эту точку, необходимо и достаточно, чтобы нижний предел последовательности* $\frac{\alpha_n}{|n|}$ *был равен нулю.*

§ 42. Замечания о любых замкнутых идеалах. Пример Л. Шварца

Как мы видели в § 36, каждый замкнутый идеал кольца $C(S)$ есть пересечение максимальных идеалов. Кроме кольца $C(S)$, известна структура замкнутых идеалов еще в некоторых типах колец. Так, в кольце D_m каждый замкнутый идеал есть пересечение примарных идеалов; это было доказано Г. Е. Шиловым в 1940 г. [57] для одного переменного и Уитни в 1948 г. для нескольких переменных [50]. Имеются и другие примеры колец функций, где описаны все замкнутые идеалы ([60], [65′], [24′]). Но уже для такого сравнительно простого кольца, как W — или локально изоморфное ему кольцо V — структура замкнутых идеалов неизвестна. Поскольку в W нет примарных идеалов, отличных от максимальных (§ 39), естественно было бы ожидать, что, как и в кольце C, здесь каждый замкнутый идеал есть пересечение максимальных идеалов. Однако, как показал Маявэн [33′], для любого числа переменных $n \geqslant 1$ *в кольце* W_n *(или в локально изоморфном ему кольце* V_n*) имеются замкнутые идеалы, не представимые в виде пересечения максимальных.* Мы не будем приводить здесь весьма сложных построений Маявэна; мы приведем простой и поучительный пример, найденный (хронологически ранее) Л. Шварцем [56] и относящийся к случаю $n=3$.

Рассмотрим кольцо V_3, состоящее из абсолютно интегрируемых функций $x(t_1, t_2, t_3) = x(t)$ трех переменных (с присоединенной единицей). Преобразование Фурье $y(s_1, s_2, s_3) = y(s)$ такой функции $x(t)$ выражается формулой

$$y(s_1, s_2, s_3) = \int\int\int x(t_1, t_2, t_3)\, e^{i(t_1s_1+t_2s_2+t_3s_3)}\, dt_1\, dt_2\, dt_3 =$$

$$= \int\int\int x(t)\, e^{i\langle t, s\rangle}\, dt. \qquad (1)$$

Если перейти от функции $x(t)$ к функции $x_h(t) = x(ht)$, где h означает оператор поворота в пространстве точек $t = (t_1, t_2, t_3)$, то функция $y(s)$ перейдет в функцию $y(hs)$. Действительно, после замены $ht = t'$, $t = h^{-1}t'$, $dt = dt'$ имеем:

$$\int\int\int x(ht)\, e^{i\langle t, s\rangle}\, dt = \int\int\int x(t')\, e^{i\langle h^{-1}t', s\rangle}\, dt' =$$

$$= \int\int\int x(t')\, e^{i\langle t', hs\rangle}\, dt' = y(hs).$$

Отсюда следует, что сферически симметричная функция $x(t) = x_0(r)$, где $r = |t|$, переходит в сферически симметричную функцию $y(s) = y_0(\rho)$, где $\rho = |s|$. Найдем явную формулу, связывающую функции $x_0(r)$ и $y_0(\rho)$. Для этого перейдем в равенстве (1) к сферическим координатам, приняв за полярную ось прямую, по которой направлен вектор s, и обозначив полярные углы через ω и φ. Мы получим:

$$y_0(\rho) = \int\int\int x_0(r)\, e^{ir\rho\cos\omega}\, r^2 \sin\omega\, d\omega\, d\varphi\, dr =$$

$$= 2\pi \int_0^\infty x_0(r)\, r^2 \left(\int_0^\pi e^{ir\rho\cos\omega} \sin\omega\, d\omega \right) dr = \frac{4\pi}{\rho} \int_0^\infty x_0(r)\, r \sin r\rho\, dr. \tag{2}$$

Заметим, что $x_0(r)$ в этой формуле может быть любой функцией для которой сходится интеграл

$$\int_0^\infty |x_0(r)|\, r^2\, dr,$$

так как именно к этому интегралу приводится выражение

$$\int\int\int |x(t)|\, dt,$$

если записать его в сферических координатах.

Покажем, что функция $y_0(\rho)$, определяемая при $\rho > 0$ равенством (2), имеет непрерывную производную. Действительно, формальное дифференцирование по ρ приводит к интегралу

$$\int_0^\infty x_0(r)\, r^2 \cos r\rho\, dr,$$

который, по сказанному выше, абсолютно сходится. Поэтому функция $y_0(\rho)$ дифференцируема при $\rho > 0$ и ее производная

$$y_0'(\rho) = \frac{4\pi}{\rho} \int_0^\infty x_0(r) r^2 \cos r\rho \, dr - \frac{4\pi}{\rho^2} \int_0^\infty x_0(r) r \sin r\rho \, dr$$

есть непрерывная функция от ρ.

Рассмотрим функции $y_0(\rho)$ на отрезке $\frac{1}{2} \leqslant \rho \leqslant \frac{3}{2}$. Они образуют, естественно, кольцо с метрикой кольца вычетов кольца V_3 по идеалу, состоящему из функций, равных нулю при $\frac{1}{2} \leqslant \rho \leqslant \frac{3}{2}$. Обозначим это кольцо через R; по доказанному, оно содержится в кольце D_1 функций с непрерывной производной на отрезке $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$. С другой стороны, R содержит все достаточно гладкие функции от ρ; в частности, мы можем найти в R (а следовательно, и в V_3) функцию $y_0(\rho)$, обращающуюся при $\rho = 1$ в нуль вместе с производной и отличную от нуля при $\rho \neq 1$.

Теорема 1. *Замкнутый идеал I, порожденный в кольце V_3 функцией $y_0(\rho)$, не совпадает с пересечением содержащих его максимальных идеалов. В частности, он заведомо не содержит функции $y_1(\rho)$, обращающейся в нуль при $\rho = 1$, но имеющей при $\rho = 1$ отличную от нуля производную.*

Действительно, допустим, что $y_1(\rho)$ входит в идеал I, т. е. является пределом при $\nu \to \infty$ по метрике кольца V_3 произведений $y_0(\rho) y_\nu(s)$. Если бы функции $y_\nu(s)$ были также сферически симметричными, $y_\nu(s) = z_\nu(\rho)$, то на отрезке $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ мы получили бы последовательность функций $y_0(\rho) z_\nu(\rho)$, сходящуюся к функции $y_1(\rho)$ по метрике кольца R. Эта последовательность будет сходиться и по метрике кольца D_1 в силу общей теоремы о соотношении между сходимостями во вложенных одно в другое кольцах (теорема 1 § 9). Но сходимость по метрике кольца D_1 — это равномерная сходимость функций и их первых производных, а у функций $y_0(\rho) z_\nu(\rho)$ вместе с $y_0(\rho)$ производная в точке $\rho = 1$ равна 0, в то время как у предельной функции $y_1(\rho)$ производная отлична от нуля; полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Остается рассмотреть случай, когда функции $y_\nu(s)$ не являются сферически симметричными. В этом случае мы рассмотрим оператор сферического усреднения Q, переводящий каждую функцию в ее сферическое среднее:

$$Qx = \int\int x(r \cos \omega, r \sin \omega \cos \varphi, r \sin \omega \sin \varphi) \sin \omega \, d\omega \, d\varphi.$$

Q — линейный оператор в пространстве V_3, который переводит каждую функцию $x(t)$ в функцию $x_0(r)$ с той же нормой; следовательно, сам оператор Q имеет норму 1. Так как при преобразовании Фурье поворот в пространстве точек t отвечает такому же повороту в пространстве точек s, то Q можно считать заданным и на функциях $y(s_1, s_2, s_3)$. Положим $Qy_\nu(s) = z_\nu(\rho)$. Так как, очевидно, сферически симметричную функцию можно выносить за знак оператора Q, то, применяя к соотношению

$$y_0(\rho) z_\nu(s) \to y_1(\rho)$$

оператор Q, мы получаем:

$$y_0(\rho) z_\nu(\rho) \to Qy_1(\rho) = y_1(\rho).$$

Таким образом, вопрос сводится к случаю сферически симметричных множителей $z_\nu(\rho)$, разобранному выше, и теорема доказана.

Было бы весьма интересно выяснить, чем в кольце V (или W) описывается структура замкнутых идеалов. Как мы уже говорили, этот вопрос остается пока открытым.

Замечание. Кольцо W не впервые оказывается источником контрпримеров к естественным на первый взгляд гипотезам. В свое время была гипотеза, что кольцо, в котором примарные идеалы совпадают с максимальными, вместе со всякой своей функцией $x(t)$ должно содержать и функцию $|x(t)|$; это оказалось неверным именно в кольце W [59′]. Далее, как известно (§ 6), к каждому элементу x нормированного кольца R можно применять функции $f(\zeta)$, аналитические на спектре x; предположение, что для каждого кольца R существует более широкая область функций, которые можно применять ко всем его элементам, было опровергнуто на примере именно кольца W [26′]. Наконец, для кольца W замена независимого переменного $t = \varphi(\tau)$, переводящая всякую функцию из W, снова в функцию из W, вопреки имевшимся ожиданиям, может быть только линейной [30′].

ГЛАВА VII

КОЛЬЦА С РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТЬЮ

В этой главе рассматриваются некоторые вопросы, связанные с кольцами, сходимость по норме в которых отвечает равномерной сходимости функций $x(M)$ на пространстве максимальных идеалов. В § 43 указываются применения к общей теории топологических пространств (классификация бикомпактных расширений пространства S и одновременно симметричных подколец кольца $C(S)$ всех ограниченных непрерывных функций на S). В § 44 рассматриваются произвольные (не обязательно симметричные) подкольца кольца $C(S)$, а в § 45 — замкнутые идеалы в таких подкольцах.

§ 43. Симметричные подкольца кольца $C(S)$ и бикомпактные расширения пространства S

Пусть S — топологическое пространство. *Бикомпактным расширением* пространства S называют всякий бикомпакт (т. е. бикомпактное хаусдорфово пространство) T, содержащий часть, гомеоморфную S, в качестве всюду плотного подмножества.

Не всякое топологическое пространство обладает бикомпактными расширениями. Как известно, всякий бикомпакт T *вполне регулярен*, т. е. для любого множества $A \subset T$ и точки $t_0 \in T$, не являющейся его точкой прикосновения, имеется непрерывная на T функция $x(t)$, равная 0 на A и отличная от нуля в точке t_0. Этим же свойством обладают, естественно, и все подмножества пространства T с топологией, индуцированной из T. Поэтому при рассмотрении вопроса о бикомпактных расширениях можно ограничиться вполне регулярными пространствами, Как показал в 1929 г. А. Н. Тихонов [49], всякое вполне регулярное пространство S обладает бикомпактным расширением. В 1937 г. Э. Чех [54] для любого вполне регулярного пространства S построил бикомпактное расширение βS, максимальное в том смысле, что каждое бикомпактное расширение пространства S получается из βS путем непрерывного отображения, при котором все точки из S остаются на месте.

В настоящем параграфе мы укажем теоретико-кольцевой подход к этим вопросам.

Пусть S — вполне регулярное пространство и $C(S)$ — нормированное кольцо всех ограниченных непрерывных комплексных функций на S с «равномерной нормой»

$$\|x\| = \sup_{t \in S} |x(t)|. \tag{1}$$

Обозначим через $\mathfrak{M}$ пространство максимальных идеалов кольца $C(S)$. В силу теоремы 3 § 8, $C(S)$ изоморфно кольцу всех непрерывных функций на бикомпакте $\mathfrak{M}$. Каждая точка $t_0 \in S$ определяет максимальный идеал M_{t_0} кольца $C(S)$ (образованный из функций $x(t)$, обращающихся при $t = t_0$ в нуль), и различные точки отвечают различным максимальным идеалам. Поэтому S можно считать подмножеством пространства $\mathfrak{M}$. Покажем, что *исходная топология пространства S совпадает с топологией, индуцируемой в S из $\mathfrak{M}$.*

Если $t_0 \in S$ не есть точка прикосновения множества $A \subset S$, то, в силу вполне регулярности пространства S, имеется функция $x_0(t) \in C(S)$, равная 0 на A и 1 при $t = t_0$. Но в таком случае максимальный идеал M_{t_0}, отвечающий точке t_0, не является точкой прикосновения множества $\mathfrak{A}$ максимальных идеалов, отвечающих точкам из A: окрестность $|x_0(M) - 1| < 1$ отделяет M_{t_0} от $\mathfrak{A}$. Обратно, если максимальный идеал M_{t_0} не есть точка прикосновения множества $\mathfrak{A}$ в пространстве $\mathfrak{M}$, то, в силу вполне регулярности бикомпакта $\mathfrak{M}$, имеется непрерывная функция $x(M)$, равная 0 на $\mathfrak{A}$ и 1 при $M = M_{t_0}$; соответствующая функция $x(t) \in S$ равна 0 в точках множества A и 1 в t_0, и, значит, t_0 не есть точка прикосновения для A.

Наконец, *замыкание S в $\mathfrak{M}$ есть всё $\mathfrak{M}$.* Действительно, в противном случае нашлась бы отличная от нуля функция $x(M)$, равная нулю на всех максимальных идеалах, соответствующих точкам из S; но, согласно (1), такая функция должна была бы иметь норму 0, в противоречие с построением.

Итак, $\mathfrak{M}$ *есть бикомпактное расширение пространства* S.

Покажем, что $\mathfrak{M}$ *есть максимальное бикомпактное расширение в смысле Чеха.*

Пусть Q — некоторое бикомпактное расширение пространства S. Рассмотрим кольцо $C(Q)$ всех непрерывных функций на Q. Так как каждая непрерывная функция на Q является непрерывной и на $S \subset Q$ и верхняя грань ее модуля на S совпадает с максимумом модуля на Q, то $C(Q)$, рассматриваемое как кольцо функций на S, есть замкнутое подкольцо кольца $C(S)$. Множество максимальных идеалов кольца $C(Q)$, как мы знаем, совпадает с самим Q (см. стр. 20). Пусть теперь M — точка пространства $\mathfrak{M}$; выбрав из максимального идеала M все функции, содержащиеся в $C(Q)$, мы получим, очевидно, максимальный идеал M' кольца $C(Q)$ и тем самым точку пространства Q. Отображение $M \to M'$ оставляет на месте все точки из S. Проверим, что оно непрерывно. Пусть M' не есть точка прикосновения множества $A' \subset Q$; тогда в кольце $C(Q)$ имеется функция $x(t)$, которая на множестве A' обращается в нуль, а в точке M' равна, например, единице. Рассматривая ее в кольце $C(S)$, мы видим, что прообраз M максимального идеала M' не является точкой прикосновения прообраза A множества A'. Отсюда следует, что из $M \in \overline{A}$ в пространстве $\mathfrak{M}$ следует $M' \in \overline{A'}$ в пространстве Q, т. е. отображение $M \to M'$ непрерывно. Так как образ пространства $\mathfrak{M}$ при отображении $M \to M'$ содержит все S и бикомпактен (как непрерывный образ бикомпактного пространства), то $\mathfrak{M}$ отображается на всё Q. Итак, Q есть непрерывный образ пространства $\mathfrak{M}$, при котором S переходит в себя, что и требовалось.

Вместе с тем мы связали каждое бикомпактное расширение Q пространства S с некоторым подкольцом кольца $C(S)$, а именно с $C(Q)$, рассматриваемым как кольцо функций на S. Естественно поставить вопрос, какими внутренними свойствами выделяются эти подкольца $C(Q)$ среди всех подколец кольца $C(S)$. Ответ на него дается следующей теоремой:

Теорема 1. *Пусть $C(S)$ — кольцо всех ограниченных непрерывных функций на вполне регулярном пространстве S, наделенное равномерной нормой* (1). *Его подкольца вида $C(Q)$, где Q — (произвольное) бикомпактное расширение пространства S, могут быть охарактеризованы как (произвольные) замкнутые подкольца K кольца $C(S)$, удовлетворяющие следующим двум условиям:*

(*) *из $x(t) \in K$ следует $\overline{x(t)} \in K$;*

(**) *для любого множества $A \subset S$ и точки $t_0 \in S$, не входящей в его замыкание $\bar{A}$, имеется функция $x(t) \in K$, равная 0 на A и отличная от 0 при $t = t_0$.*

Доказательство. Если K удовлетворяет условию (*), то, в силу теоремы 3 § 8, оно изоморфно кольцу $C(Q)$ всех непрерывных функций на пространстве Q своих максимальных идеалов. Предположив, что K удовлетворяет также условию (**), мы тогда таким же образом, как и в случае кольца $C(S)$, получим, что Q есть бикомпактное расширение пространства S, отождествленного с порождаемым его точками множеством максимальных идеалов, откуда ясно также, что изоморфизм между K и $C(Q)$ осуществляется отнесением каждой функции из $C(Q)$ ее сужения на S. Обратно, если Q — какое-нибудь бикомпактное расширение пространства S, то подкольцо K кольца $C(S)$, образованное сужениями на S всевозможных функций из $C(Q)$, удовлетворяет условию (*), поскольку $C(Q)$ удовлетворяет этому условию, и условию (**), поскольку Q как бикомпактное хаусдорфово пространство вполне регулярно.

Можно пойти дальше и охарактеризовать в топологических терминах все симметричные замкнутые подкольца кольца $C(S)$, притом не предполагая пространство S регулярным.

Теорема 2. *Пусть $C(S)$ — кольцо всех ограниченных непрерывных функций на топологическом пространстве S, наделенное равномерной нормой* (1). *Его замкнутые подкольца K, удовлетворяющие условию* (*) *теоремы* 1 (*т. е. вместе с каждой своей функцией содержащие и комплексно сопряженную функцию*), — *это подкольца, изоморфные какому-либо кольцу вида $C(Q')$, где Q' может быть произвольным бикомпактным расширением любого непрерывного вполне регулярного образа S' пространства S.*

Доказательство. Пусть S' — любое вполне регулярное пространство, такое, что существует непрерывное отображение φ пространства S на S', и Q' — произвольное бикомпактное расширение этого пространства S'. Каждой функции $f(q') \in C(Q')$ отнесем функцию $f(\varphi(t))$ на S. Так как φ можно рассматривать как непрерывное отображение S в Q', то $f(\varphi(t)) \in C(S)$, и нетрудно проверить, что эти функции $f(\varphi(t))$ образуют замкнутое подкольцо K кольца $C(S)$, изоморфное кольцу $C(Q')$ и удовлетворяющее условию (*). Обратно, пусть K — произвольное замкнутое подкольцо кольца $C(S)$, удовлетворяющее условию (*). В силу теоремы 3 § 8 оно изоморфно кольцу $C(Q')$ всех непрерывных функций на пространстве Q' своих максимальных идеалов. Каждой точке $t \in S$ соответствует максимальный идеал кольца K, а значит, и кольца $C(Q')$, т. е. некоторая точка $t' \in Q'$, причем для каждой функции $x \in K$ и соответствующей ей функции $x' \in C(Q')$ имеем:

$$x(t) = x'(t'). \tag{2}$$

Положим $t' = \varphi(t)$, и пусть $S' = \varphi(S)$. Так как каждая окрестность точки $t_0' = \varphi(t_0) \in S'$ в топологии, индуцированной из $C(Q')$, содержит окрестность вида

$$\{t' \in S' \colon |x_k'(t') - x_k'(t_0')| < \varepsilon \quad (k = 1, \ldots, n)\} =$$
$$= \varphi(\{t \in S \colon |x_k(t) - x_k(t_0)| < \varepsilon \quad (k = 1, \ldots, n)\}),$$

то φ — непрерывное отображение S на S'. Далее, S' плотно в $C(Q')$, ибо каждая функция $x' \in C(Q')$, равная нулю на S', в силу формулы (2) равна нулю на всем Q', а Q' как бикомпактное хаусдорфово пространство вполне регулярно. Тем самым Q' есть бикомпактное расширение пространства S', и теорема 2 полностью доказана.

Для иллюстрации рассмотрим в качестве пространства S прямую $-\infty < t < \infty$ с ее обычной топологией. Существует много различных бикомпактных расширений этого пространства. Минимальное бикомпактное расширение получается добавлением к нему одной бесконечно удаленной точки. Соответствующее подкольцо $K \subset C(S)$ состоит из функций $x(t)$, обладающих пределами при $t \to +\infty$ и $t \to -\infty$, причем

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{t \to -\infty} x(t).$$

Более широкое подкольцо получится, если рассмотреть функции $x(t)$, у которых указанные пределы существуют, но не обязательно совпадают. Соответствующее бикомпактное расширение получается присоединением двух точек: $-\infty$ и $+\infty$.

Одним из симметричных подколец кольца $C(S)$ является кольцо B всех непрерывных почти периодических функций на прямой S. Так как оно отделяет точки прямой, то S можно считать частью пространства $\mathfrak{M}(B)$ максимальных идеалов этого подкольца. Но B не удовлетворяет условию (**) теоремы 1; так, например, в B нет функции, равной 0 для всех $t \leqslant 0$ и отличной от 0 для какого-нибудь $t_0 > 0$. Поэтому пространство $\mathfrak{M}(B)$ не может быть бикомпактным расширением прямой S в ее исходной топологии. Но, в силу теоремы 2, $\mathfrak{M}(B)$ есть бикомпактное расширение прямой S, наделенной некоторой о с л а б л е н н о й топологией. Так как функции e^{ist} являются образующими кольца B, то это есть не что иное, как топология, в которой периодические системы интервалов и пересечения всевозможных конечных наборов таких систем образуют фундаментальную систему окрестностей.

Рассмотрим тот частный случай, когда пространство S само бикомпактно. Тогда любой его непрерывный образ также есть бикомпактное пространство и не имеет иных бикомпактных расширений, кроме себя самого. Поэтому если S бикомпактно, то каждое симметричное замкнутое подкольцо K кольца $C(S)$ изоморфно кольцу $C(Q)$, где Q — некоторый непрерывный образ пространства S. Пространство Q можно построить по подкольцу K следующим образом. Назовем точки t' и t'' эквивалентными, если $x(t') = x(t'')$ для любой функции $x(t) \in K$. Это отношение между точками рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. действительно является отношением эквивалентности, и потому позволяет разбить S на совокупность классов $\tau = \{t\}$ взаимно эквивалентных точек. Рассматривая классы τ как новые «точки» и вводя в совокупность этих точек естественным образом топологию, мы и получаем пространство Q максимальных идеалов кольца K. Отметим, что *отображение* $S \to Q$ *не только непрерывно, но и* (поскольку S бикомпактно) *открыто*.

§ 44. Вопрос о произвольных замкнутых подкольцах кольца $C(S)$

В этом параграфе предполагается, что S — бикомпакт; $C(S)$, как обычно, означает кольцо всех непрерывных функций на S, наделенное равномерной нормой, и K — некоторое его подкольцо, замкнутое относительно равномерной сходимости и отделяющее точки пространства S.

Если подкольцо K симметрично, т. е. вместе со всякой функцией $x(t)$ ему принадлежит и комплексно сопряженная функция $\overline{x(t)}$, то в силу сказанного в конце предыдущего параграфа $K = C(S)$. Таким образом, имеет смысл рассматривать лишь несимметричные подкольца K кольца $C(S)$, отделяющие точки пространства S.

Некоторым образом противоположный класс по отношению к симметричным подкольцам составляют *антисимметричные* подкольца. Кольцо функций K называется *антисимметричным*, если из $x(t) \in K$, $\overline{x(t)} \in K$ следует $x(t) = \text{const}$. Простой пример — подкольцо A кольца $C(S)$ всех непрерывных функций на замкнутом единичном круге S комплексной плоскости, образованное функциями из $C(S)$, аналитическими внутри этого круга.

Мы покажем сейчас, что описание произвольных замкнутых подколец кольца $C(S)$ приводится в принципе к описанию антисимметричных подколец этого кольца.

Пусть K — произвольное замкнутое подкольцо кольца $C(S)$; функции $x(t)$, входящие в K вместе с комплексно сопряженной функцией $\overline{x(t)}$, образуют его наибольшее симметричное подкольцо K' (если K симметрично, то $K' = K$; если K антисимметрично, то K' состоит из одних констант). Отношение «$x(t_1) = x(t_2)$ для любого $x \in K'$» между точками t_1, t_2 пространства S есть отношение эквивалентности, определяющее разбиение пространства S на классы $\tau = \{t\}$ эквивалентных точек (для симметричного K каждая отдельная точка является классом, для антисимметричного K единственным классом будет всё пространство S); при этом каждый класс τ является, очевидно, замкнутым множеством. Обозначим через K_τ совокупность функций $x(t)$ кольца K, рассматриваемых только на классе τ.

Следующая теорема показывает, что всё кольцо K в некотором определенном смысле «склеено» из колец K_τ:

Теорема 1. *Если функция $f(t) \in C(S)$ на каждом классе τ принадлежит кольцу K_τ, то $f(t)$ входит в K.*

Доказательство. Согласно сказанному в конце предыдущего параграфа, пространство максимальных идеалов симметричного кольца K' есть бикомпакт S', являющийся непрерывным образом бикомпакта S и имеющий своими точками классы τ. Выберем число $\varepsilon > 0$ и рассмотрим какой-либо класс τ_0. По условию, функция $f(t)$ на этом классе совпадает с некоторой функцией $x_0(t) \in K$. Так как и $f(t)$ и $x_0(t)$ непрерывны на S, то в S можно найти окрестность U_0 класса τ_0, в пределах которой выполняется неравенство

$$|f(t) - x_0(t)| < \varepsilon.$$

Поскольку отображение $S \to S'$ открыто, в S' существует такая окрестность $V(\tau_0)$ точки τ_0, что любой класс $\tau \in V(\tau_0)$ целиком содержится в U_0. Эти окрестности $V(\tau_0)$, построенные для каждой точки $\tau_0 \in S'$, образуют покрытие бикомпакта S'. Выберем из этого покрытия конечное покрытие $V_1, \ldots, V_n$, никакая собственная часть которого не покрывает всего пространства S'. Соответствующие функции из K обозначим через $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, а окрестности в S — через $U_1, \ldots, U_n$. В силу леммы § 35, в кольце $K' = C(S')$ существуют функции $h_1'(\tau), \ldots, h_n'(\tau)$, обладающие следующими свойствами:

1) $$0 \leqslant h_j'(\tau) \leqslant 1;$$

2) $$h_j'(\tau) = 0 \quad \text{вне} \quad V_j;$$

3) $$h_1'(\tau) + \ldots + h_n'(\tau) \equiv 1.$$

В каждой точке $t \in S$ положим $h_j(t) = h_j'(\tau)$, где τ — класс, содержащий t. Составим разность

$$f(t) - \sum_{j=1}^{n} h_j(t)\, x_j(t) = \sum_{j=1}^{n} h_j(t)\, [f(t) - x_j(t)].$$

В каждой точке t могут быть отличными от нуля лишь те слагаемые этой суммы, для которых $t \in U_j$ (ибо иначе $h_j(t) = 0$). Но для таких слагаемых по построению $|f(t) - x_j(t)| < \varepsilon$. Поэтому всюду на S

$$\left| f(t) - \sum_{j=1}^{n} h_j(t)\, x_j(t) \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} h_j(t)\, |f(t) - x_j(t)| < \varepsilon \sum_{j=1}^{n} h_j(t) = \varepsilon.$$

Так как ε произвольно, то мы видим, что $f(t)$ есть предел последовательности элементов кольца K. Поскольку K замкнуто, заключаем, что $f(t)$ сама входит в K, что и требовалось.

Следующая теорема показывает, что каждое кольцо функций K_τ замкнуто относительно равномерной сходимости.

Теорема 2. *K_{τ_0} есть полное нормированное кольцо с нормой*

$$\|x\| = \max_{t \in \tau_0} |x(t)|. \tag{1}$$

Доказательство. Рассмотрим в K идеал J_{τ_0}, состоящий из всех функций кольца K, равных нулю на классе τ_0. Этот идеал, очевидно, замкнут и принадлежит множеству τ_0, так как для любой точки $t_0 \notin \tau_0$ имеется функция $x(t) \in K'$, принимающая в точке t_0 и некоторой точке $t \in \tau_0$ различные значения. Кольцо вычетов K/J_{τ_0} можно считать состоящим из функций кольца K, рассматриваемых только на τ_0 (см. § 34), т. е. совпадающим с K_{τ_0}. Но известно, что кольцо вычетов полного нормированного кольца по любому замкнутому идеалу полно по своей норме; поэтому достаточно лишь проверить, что норма в K/J_{τ_0} совпадает с величиной (1). Пусть ε — произвольное заданное число > 0, $\tilde{x}(t)$ — элемент из K/J_{τ_0}, $x(t)$ — функция из K, совпадающая на τ_0 с $\tilde{x}(t)$, и U — окрестность класса τ_0 в S, в которой выполняется неравенство

$$\max_{t \in U} |x(t)| < \max_{t \in \tau_0} |x(t)| + \varepsilon.$$

Выберем окрестность V_0 точки τ_0 в S' так же, как и при доказательстве теоремы 1, с тем чтобы любой класс $\tau \in V_0$ целиком содержался в U. Построим функцию $h'(\tau) \in K' = C(S')$, обладающую свойствами

$$1)\ 0 \leqslant h'(\tau) \leqslant 1, \quad 2)\ h'(\tau_0) = 1, \quad 3)\ h'(\tau) = 0 \text{ вне } V_0.$$

Рассмотрим произведение соответствующей функции $h(t) \in K$ на $x(t)$. Так как $h(t)$ обращается вне U в нуль, а на U значения $h(t)$ заключены между 0 и 1, то

$$\max_S |h(t)\,x(t)| = \max_U |h(t)\,x(t)| \leqslant \max_U |x(t)| < \max_{t \in \tau_0} |x(t)| + \varepsilon.$$

Но так как $h(t) = 1$ на τ_0, то $h(t)\,x(t)$ входит в тот же класс вычетов по идеалу J_{τ_0}, что и $x(t)$. Поэтому, согласно определению нормы в кольце вычетов,

$$\|\tilde{x}(t)\|_{K/J_{\tau_0}} \leqslant \|h(t)\,x(t)\|_K = \max_S |h(t)\,x(t)| < \max_{t \in \tau_0} |x(t)| + \varepsilon,$$

откуда, в силу произвольности ε,

$$\|\tilde{x}(t)\|_{K/J_{\tau_0}} \leqslant \max_{t \in \tau_0} |x(t)|. \tag{2}$$

С другой стороны, всякий элемент $y(t)$ класса вычетов, определяемого функцией $\tilde{x}(t)$, имеет в кольце K норму

$$\max_{t \in S} |y(t)| \geqslant \max_{t \in \tau_0} |y(t)| = \max_{t \in \tau_0} |\tilde{x}(t)|.$$

Поэтому

$$\|\tilde{x}(t)\|_{K/J_{\tau_0}} = \inf \|y(t)\|_K \geqslant \max_{\tau \in \tau_0} |x(t)|. \tag{3}$$

Соединяя (2) и (3), получаем:

$$\|\tilde{x}(t)\|_{K/J_{\tau_0}} = \max_{t \in \tau_0} |x(t)|,$$

что и требовалось.

В качестве иллюстрации рассмотрим строение кольца K, полученного путем присоединения к кольцу A, образованному функциями $f(\zeta)$, непрерывными на замкнутом единичном круге S комплексной плоскости и аналитическими внутри этого круга, некоторой совокупности $\mathfrak{F}$ непрерывных вещественных функций, определенных на S. Классы τ, на которые разбивается круг S в соответствии с описанным построением, распадаются на три типа по следующему правилу:

1. Класс τ не обладает внутренними точками и не ограничивает никакой области (в том смысле, что каждая точка $\zeta \notin \tau$ может быть соединена с ∞ линией, проходящей вне τ).

2. Класс τ обладает внутренними точками, но не ограничивает никакой области.

3. Класс τ ограничивает некоторую область.

Для класса τ первого типа кольцо K_τ, поскольку оно содержит все полиномы от ζ и, в силу теоремы 2, замкнуто относительно равномерной сходимости на τ, по известным аппроксимационным теоремам теории функций комплексного переменного [34], есть кольцо всех непрерывных функций на τ.

Для класса τ второго типа кольцо K_τ, в силу тех же причин, есть кольцо всех непрерывных функций на τ, аналитических во внутренних точках этого класса.

Наибольший интерес представляют кольца K_τ, соответствующие классам τ третьего типа. В этом случае, так же как и во втором, кольцо K_τ состоит из функций, непрерывных на τ и аналитических во всех внутренних точках как самого класса τ, так и ограниченной им области; поэтому пространство максимальных идеалов кольца K_τ шире, чем τ.

В силу теоремы 1, кольцо K состоит из всех непрерывных функций, которые на каждом классе τ принадлежат соответствующему кольцу K_τ. Если все классы τ относятся к первому типу, и только в этом случае, кольцо K совпадает с кольцом $C(S)$ (и, значит, все классы в действительности одноточечны).

Если все классы τ относятся к первому или второму типу, то кольцо K состоит из всех непрерывных функций на S, аналитических во внутренних точках классов τ; пространство максимальных идеалов кольца K в этом случае все еще совпадает с кругом S. Наконец, если имеется класс τ_0 третьего типа, то множество максимальных идеалов кольца K заведомо шире S, поскольку каждый максимальный идеал кольца K_{τ_0} определяет гомоморфизм в тело комплексных чисел и тем самым максимальный идеал кольца K. Геометрически говоря, мы должны к кругу S приклеить еще «пленку», натянутую на границу области, ограничиваемой классом τ_0.

Вот два простых примера:

а) $\mathfrak{G}$ есть совокупность всех вещественных функций на S, равных 0 на окружности $|\zeta| = 1$. Классы τ — это отдельные внутренние точки и вся окружность $|\zeta| = 1$; последний класс — третьего типа. Пространство максимальных идеалов кольца K представляет собой совокупность двух кругов, склеенных по окружности; это—двумерное множество, гомеоморфное сфере.

б) $\mathfrak{G}$ есть совокупность всех вещественных функций на S, значение которых в каждой точке зависит только от ее расстояния от начала. Классы τ представляют собой окружности с центром в точке O (включая и саму эту точку); все они (кроме самой точки O) — третьего типа. Пространство максимальных идеалов кольца K получается из S путем присоединения континуума «пленок», натянутых на каждую из указанных окружностей. Таким образом, $\mathfrak{M}(K)$ в этом случае трехмерно (гомеоморфно полушару, опирающемуся на круг S).

Как мы видим, теоремы 1 и 2 в общем случае сводят изучение кольца K к изучению колец K_τ, заданных на меньших множествах. Если кольца K_τ антисимметричны, то это означает, что рассматриваемое кольцо K определенным образом «склеено» из антисимметричных колец. Если среди колец K_τ имеются не антисимметричные, то указанную конструкцию можно повторить и разложить K_τ на еще «меньшие» кольца $K_{\tau\tau'}$. Повторяя эту операцию, если требуется, трансфинитно, мы в конечном счете с необходимостью придем к полному разбиению кольца K на антисимметричные кольца.

Заметим, что вопрос о точном описании характера склейки антисимметричных колец, приводящей к исходному кольцу K (т. е. аналоге теоремы 1), в общем случае (при бесконечном продолжении процесса) остается открытым. Так или иначе, мы вправе в дальнейшем ограничиться вопросом об антисимметричных подкольцах кольца K.

Следующее естественное условие состоит в том, чтобы пространство S было *носителем* — пространством максимальных идеалов рассматриваемого подкольца K. Действительно, если Q есть бикомпакт максимальных идеалов кольца K, то при $Q \neq S$ кольцо K естественно изучать как подкольцо кольца $C(Q)$, а не кольца $C(S)$.

Далее, описание структуры подколец кольца $C(S)$ естественно строить в зависимости от топологических инвариантов пространства S, в первую очередь от его размерности. Так, *если пространство S нульмерно, то любое замкнутое подкольцо K кольца $C(S)$, имеющее S своим пространством максимальных идеалов, как и в симметричном случае, совпадает со всем кольцом $C(S)$.* Действительно, если S нульмерно, то для каждых двух его различных точек t', t'' пространство S можно разбить на два замкнутых множества без общих точек так, чтобы первое из них, F', содержало точку t', а второе, F'', — точку t''. Тогда, согласно доказательству теоремы 2 § 14 о разложении кольца в прямую сумму идеалов, в K имеется функция $e(t;\, t',\, t'')$, принимающая на F' значение 0, а на F'' — значение 1. Подкольцо вещественных функций, порожденное функциями $e(t;\, t',\, t'')$, где t' и $t''\,(\neq t')$ пробегают всё S, удовлетворяет условиям теоремы 1′ § 7 и поэтому содержит все непрерывные вещественные функции на S. Но тогда K содержит все вообще непрерывные функции на S, т. е. $K = C(S)$, что и требовалось.

Случай носителя размерности > 0 исследован не полностью. Предположим, что имеется функция $z(t) \in K$, которая в различных точках множества S принимает различные значения. С помощью этой функции S гомеоморфно отображается на некоторое замкнутое ограниченное множество F точек комплексной плоскости. Для каждой точки λ_0, не принадлежащей F, в кольце K имеется функция $(z - \lambda_0)^{-1}$; отсюда следует, что в K имеются все рациональные функции от z с полюсами, не принадлежащими множеству F. Предположим, что F имеет плоскую меру 0. Тогда, в силу теоремы Гартогса и Розенталя [34, 13], каждая непрерывная функция на F есть предел равномерно сходящейся последовательности рациональных функций с полюсами вне F; таким образом, и в этом случае $K = C(F) = C(S)$.

Недавно Хелсон и Куигли [53] заметили, что это рассуждение может быть обобщено следующим образом. Допустим, что в кольце K имеется система функций $z_1(t), \ldots$ $\ldots, z_n(t), \ldots$, разделяющая точки пространства S, и множество значений каждой из этих функций имеет плоскую меру 0; оказывается, что и в этом случае $K=C(S)$. Действительно, в силу предыдущего рассуждения, кольцу K принадлежат все функции вида $f(z_1(t))$, $g(z_2(t))$ и т. д., где f, g, ... — произвольные непрерывные функции на множестве значений соответствующей функции $z_1(t)$, $z_2(t)$ и т. д. Ограничиваясь только вещественными функциями, видим, что в K имеется «достаточное множество» их: для любой пары различных точек t', $t'' \in S$ найдется вещественная функция вида $f(z_j(t))$, принимающая в t' и t'' различные значения. Но тогда, по теореме 1' § 7, K содержит все вещественные непрерывные функции и, следовательно, совпадает с $C(S)$. Условия этой теоремы выполняются, например, для случая, когда множеством максимальных идеалов кольца K служит дифференцируемая кривая $\{z_1(t), \ldots, z_n(t)\}$ n-мерного комплексного пространства.

Вермер [9] установил, что $K=C(S)$, если K имеет две образующие и в соответствующем двумерном комплексном пространстве множество S есть кривая, гомеоморфная окружности, не ограничивающая куска аналитической поверхности.

Таким образом, для одномерных носителей указанного специального вида можно доказать, что $K=C(S)$; в общем случае вопрос остается открытым.

Вполне вероятно, что для одномерного S всегда $K=C(S)$.

Кольцо $A(G)$ функций, аналитических внутри плоской области G и непрерывных на $\overline{G}$ (где $\overline{G}$ — замыкание G на римановой сфере), дает пример антисимметричного кольца с двумерным носителем $S=\overline{G}$. Любое его подкольцо с тем же носителем — например, подкольцо функций, имеющих в заданной внутренней точке производную, равную нулю, — очевидно, также антисимметрично.

Заметим, что носитель $\overline{G}$ такого кольца не всегда умещается на евклидовой плоскости. Например, если G получается путем удаления из полной комплексной плоскости (римановой сферы) ограниченного замкнутого множества плоской меры нуль, не разделяющего плоскости, то $S=\overline{G}$ есть вся риманова сфера [24].

Неизвестно, имеются ли антисимметричные кольца с двумерными носителями, гомеоморфными тору или более сложным замкнутым поверхностям.

Недавно Гоффман и Зингер [24] предложили следующий способ построения антисимметричных колец с носителями любой размерности $\geqslant 2$. Пусть G — плоская область и Q — бикомпакт; рассмотрим кольцо R, состоящее из всех непрерывных функций $f(\zeta, q)$ ($\zeta \in G$, $q \in Q$), определенных на топологическом произведении $T = \overline{G} \times Q$ и аналитических по ζ при каждом фиксированном q. Носителем кольца R, как легко проверить, является пространство T. Вещественные функции, входящие в R, постоянны по ζ при каждом фиксированном q. Рассмотрим теперь подкольцо $R_1 \subset R$, составленное из функций $f(\zeta, q) \in R$, постоянных по q при некотором фиксированном $\zeta = \zeta_1$. Носителем его будет множество T, в котором все точки (ζ_1, q) отождествлены. Очевидно, что в кольце R_1 уже нет вещественных функций, кроме констант.

Если Q нульмерно, то $T = \overline{G} \times Q$ двумерно, и при достаточно сложной структуре бикомпакта Q носитель кольца R_1 уже не вкладывается даже в риманову сферу. Если Q одномерно, то носитель кольца R_1 трехмерен; например, когда G — круг, а Q — отрезок, R_1 представляет собой антисимметричное кольцо с носителем, гомеоморфным трехмерному шару. Увеличивая размерность Q, можно строить антисимметричные кольца с носителями любой размерности $\geqslant 2$.

Другим примером антисимметричного кольца является кольцо $A_2(G_2)$ аналитических функций двух комплексных переменных, определенных в двумерной комплексной (четырехмерной вещественной) области G_2. Склеивая аналогично предыдущему кольца $A_2(G_2)$, можно получить новую серию антисимметричных колец с носителями размерности $\geqslant 4$.

Было бы интересно выяснить, всякое ли антисимметричное кольцо может быть получено аналогичной конструкцией из колец $A(G)$, $A_2(G_2)$, ...

§ 45. Идеалы в кольцах с равномерной сходимостью

Как мы уже знаем из § 36, каждый замкнутый идеал в кольце $C(S)$ всех непрерывных функций на бикомпакте S есть пересечение максимальных идеалов. В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о структуре замкнутых идеалов в других кольцах с равномерной сходимостью.

Пусть K — произвольное подкольцо кольца $C(S)$, замкнутое относительно равномерной сходимости. Произведем разбиение пространства S на классы, как в § 44; в пределах каждого класса τ сохраняет постоянное значение каждая функция $x(t)$, входящая в K вместе с $\overline{x(t)}$. При этом разбиении появляется семейство колец K_τ, каждое из которых состоит из функций кольца K, рассматриваемых только на классе τ. Каждому идеалу $J \subset K$ отвечает идеал $J_\tau \subset K_\tau$, образованный сужениями функций из J на τ. Мы утверждаем прежде всего, что *замкнутому в $C(S)$ идеалу J отвечает идеал J_τ, замкнутый относительно равномерной сходимости на* τ. Пусть дана последовательность функций $x_n(t) \in J_\tau$, сходящаяся равномерно на τ к некоторой функции $x(t)$. Без ограничения общности можно считать, что выполнены неравенства

$$\max_{t \in \tau} |x_{n+1}(t) - x_n(t)| < \frac{1}{2^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

По условию, функцию $x_n(t)$ можно продолжить с класса τ на всё S так, что получится функция из идеала J. Как в доказательстве теоремы 2 § 44, можно найти в кольце K функцию $h_n(t)$, равную 1 на классе τ и такую, что

$$\max_{t \in S} |h_n(t)[x_{n+1}(t) - x_n(t)]| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Ряд

$$x_1(t) + \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t)[x_{n+1}(t) - x_n(t)]$$

сходится в кольце K, и его сумма вместе со всеми слагаемыми входит в идеал J. Но на множестве τ его сумма равна, очевидно, $x(t)$; таким образом, $x(t)$ входит в идеал J_τ, что мы и утверждали.

Далее, мы утверждаем, что замкнутый идеал $J \subset K$ есть «склейка» идеалов J_τ в том же смысле, в каком кольцо K есть «склейка» колец K_τ: *всякая функция $x(t) \in C(S)$, принадлежащая на каждом классе τ идеалу J_τ, принадлежит идеалу J*. Чтобы убедиться в этом, достаточно обратиться к доказательству теоремы 1 § 44. Оно показывает, что функция $x(t)$ есть предел сумм функций вида $x_k(t)h_k(t)$, где $x_k(t)$ — произвольное продолжение на всё S функции $\tilde{x}_k(t)$, определенной на некотором классе τ и принадлежащей на этом классе идеалу J_τ. Но в качестве этого продолжения всегда можно взять функцию, входящую в идеал J. Отсюда $x(t)$ есть предел функций из идеала J, и так как J замкнут, то $x(t) \in J$, что и требовалось.

Таким образом, вопрос об идеалах в любых кольцах с равномерной сходимостью сводится к вопросу об идеалах в антисимметричных кольцах.

Мы рассмотрим здесь в качестве примера антисимметричное кольцо A, снова обозначая через S замкнутый единичный круг в комплексной плоскости.

Каждый максимальный идеал этого кольца образован всеми функциями $f(\zeta) \in A$, обращающимися в нуль в некоторой точке ζ_0, $|\zeta_0| \leqslant 1$. Для максимального идеала M_{ζ_0}, отвечающего внутренней точке ζ_0 круга S, можно указать все содержащиеся в нем примарные идеалы. Именно, примарным идеалом является при каждом n совокупность функций $f(\zeta) \in A$, обращающихся в нуль в точке ζ_0 вместе со всеми своими производными до n-го порядка включительно, и легко проверить, что иных примарных идеалов, принадлежащих максимальному идеалу M_{ζ_0}, не существует*).

Сложнее обстоит дело с примарными идеалами кольца A, соответствующими граничным точкам круга S. Оказывается, что для граничной точки ζ_0 идеалы, порождаемые функциями $\zeta-\zeta_0$, $(\zeta-\zeta_0)^2, \ldots, (\zeta-\zeta_0)^n, \ldots$, совпадают с максимальным идеалом M_{ζ_0}. Более того, Т. Карлеман в 1926 г. доказал следующую теорему [26]:

---

*) Достаточно показать, что вместе со всякой функцией $(\zeta-\zeta_0)^n \varphi_0(\zeta)$, где $\varphi_0(\zeta_0) \neq 0$, примарному идеалу J, содержащемуся в M_{ζ_0}, принадлежит и функция $(\zeta-\zeta_0)^n$. Для каждой точки $\zeta \neq \zeta_0$ круга S можно указать функцию $\varphi \in J$, которая в некоторой окре стности этой точки не обращается в нуль. Добавляя к этим окрестностям еще окрестность точки ζ_0, в которой не обращается в нуль функция $\varphi_0(\zeta)$, мы получаем покрытие круга S, из которого можно выбрать конечное покрытие; пусть $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — соответствующие функции; по построению, все они, кроме φ_0, принадлежат идеалу J. Идеал, порожденный этими функциями, не содержится ни в одном максимальном и поэтому совпадает со всем кольцом A; следовательно, для некоторых $f_0, f_1, \ldots, f_m$ имеет место равенство

$$f_0\varphi_0 + f_1\varphi_1 + \ldots + f_m\varphi_m \equiv 1.$$

Умножим это равенство на $(\zeta-\zeta_0)^n$. Тогда все слагаемые слева будут входить в идеал J, справа же будет стоять функция $(\zeta-\zeta_0)^n$, которая тем самым также входит в идеал J.

Пусть функция $u(\zeta) \in A$ *обращается в нуль на* S *лишь в точке* $\zeta = 1$ *и не имеет логарифмического вычета* *). *Для любой другой функции* $v(\zeta) \in A$, *равной нулю при* $\zeta = 1$, *существует последовательность полиномов* $P_n(\zeta)$ *такая, что функции* $u(\zeta) P_n(\zeta)$ *равномерно на* S *сходятся к функции* $v(\zeta)$.

В терминах теории колец это означает, что *в кольце* A *идеал, порожденный функцией* $u(\zeta)$, *равной нулю при* $\zeta = 1$ *и не имеющей логарифмического вычета* (таковы, в частности, функции $\zeta - 1$, $(\zeta - 1)^2, \ldots$), *совпадает с максимальным идеалом, отвечающим точке* $\zeta = 1$.

Оказывается, что при более сильном убывании функции $u(\zeta)$ при $\zeta \to 1$ обнаруживаются нетривиальные примарные идеалы, порожденные функцией $u(\zeta)$. Следующая общая теорема содержит как частный случай теорему Карлемана:

Теорема 1. *Функции* $u_\alpha(\zeta) = (\zeta - 1) \exp \frac{\alpha}{\zeta - 1}$ $(0 \leqslant \alpha < \infty)$ *принадлежат кольцу* A *и обращаются в нуль лишь в точке* $\zeta = 1$. *Они порождают различные замкнутые идеалы кольца* A. *При этом каждая функция* $u(\zeta) \in A$, *обращающаяся в нуль на* S *лишь в точке* $\zeta = 1$, *порождает идеал, совпадающий с одним из этих идеалов.*

Доказательство. При любом вещественном γ вещественная часть функции $\frac{\gamma}{\zeta - 1}$ принимает на окружности диаметра d, касающейся прямой $\xi = 1$ слева в точке $\zeta = 1$, постоянное значение $-\frac{\gamma}{d}$. Поэтому $\left| \exp \frac{\alpha}{\zeta - 1} \right|$ для $\gamma = \alpha > 0$ на единичном круге ограничен:

$$\left| \exp \frac{\alpha}{\zeta - 1} \right| = \exp\left(-\frac{\alpha}{d}\right) \leqslant \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Так как функция $\exp \frac{\alpha}{\zeta - 1}$ всюду, кроме точки $\zeta = 1$, аналитична и не обращается в нуль, то произведение $(\zeta - 1) \exp \frac{\alpha}{\zeta - 1} = u_\alpha(\zeta)$ принадлежит кольцу A и обращается в нуль только при $\zeta = 1$.

---

*) Иными словами, гармоническая функция $\ln |u(\zeta)|$ определяется на круге $|\zeta| \leqslant 1$ по своим граничным значениям формулой Пуассона.

Допустим, что идеал, порожденный функцией $u_\beta(\zeta)$, совпадает с идеалом, порожденным функцией $u_\alpha(\zeta)$, где $\alpha<\beta$. В таком случае существует последовательность функций $f_n(\zeta)\in A$ такая, что $\max\limits_{|\zeta|\leqslant 1}|f_n(\zeta)\,u_\beta(\zeta)-u_\alpha(\zeta)|\to 0$ при $n\to\infty$. В частности, в каждой точке $\zeta\neq 1$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\zeta)=\exp\frac{\alpha-\beta}{\zeta-1}. \tag{1}$$

Для заданного $\varepsilon>0$ найдем номер N такой, чтобы при $n>N$ имело место неравенство

$$\left|(\zeta-1)\,f_n(\zeta)\exp\frac{\beta}{\zeta-1}-(\zeta-1)\exp\frac{\alpha}{\zeta-1}\right|<\varepsilon$$

для всех $|\zeta|\leqslant 1$. Отсюда для $\zeta\neq 1$ последовательно получаем:

$$\left|(\zeta-1)\exp\frac{\alpha}{\zeta-1}\cdot\left[f_n(\zeta)\exp\frac{\beta-\alpha}{\zeta-1}-1\right]\right|<\varepsilon,$$

$$\left|f_n(\zeta)\exp\frac{\beta-\alpha}{\zeta-1}-1\right|<\frac{\varepsilon}{|\zeta-1|}\left|\exp\left(-\frac{\alpha}{\zeta-1}\right)\right|,$$

$$\left|f_n(\zeta)\exp\frac{\beta-\alpha}{\zeta-1}\right|<\frac{\varepsilon}{|\zeta-1|}\left|\exp\left(-\frac{\alpha}{\zeta-1}\right)\right|+1<$$

$$<\frac{2+\varepsilon\left|\exp\left(-\frac{\alpha}{\zeta-1}\right)\right|}{|\zeta-1|},$$

$$|(\zeta-1)f_n(\zeta)|<\left|\exp\frac{\alpha-\beta}{\zeta-1}\right|\left\{2+\varepsilon\left|\exp\left(-\frac{\alpha}{\zeta-1}\right)\right|\right\}.$$

Если, в частности, $|\zeta|=1$, то, как мы уже видели,

$$\left|\exp\frac{\alpha-\beta}{\zeta-1}\right|=\exp\frac{\beta-\alpha}{2},\qquad \left|\exp\left(-\frac{\alpha}{\zeta-1}\right)\right|=\exp\frac{\alpha}{2}.$$

Поэтому для $|\zeta|=1$, $\zeta\neq 1$ получаем:

$$|(\zeta-1)f_n(\zeta)|\leqslant\exp\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot\left(2+\varepsilon\exp\frac{\alpha}{2}\right)\leqslant\text{const}.$$

Так как функция $(\zeta-1)f_n(\zeta)$ непрерывна, то это неравенство справедливо и при $\zeta=1$, а в силу принципа максимума — и при $|\zeta|<1$. Поэтому для всех ζ с $|\zeta|\leqslant 1$ имеем:

$$|f_n(\zeta)|\leqslant\frac{\text{const}}{|\zeta-1|}, \qquad \varlimsup_{n\to\infty}|f_n(\zeta)|\leqslant\frac{\text{const}}{|\zeta-1|}.$$

Но это последнее неравенство противоречит предельному соотношению (1), что и доказывает первую часть теоремы.

Для доказательства второй части рассмотрим, следуя Карлеману, для заданной функции $u(\zeta)\in A$, равной нулю на S лишь в точке $\zeta=1$, гармоническую функцию $f(\zeta)=$ $=-\ln|u(\zeta)|$. В некоторой окрестности точки $\zeta=1$ имеем $|u(\zeta)|<1$ и $f(\zeta)>0$; поэтому при достаточно большом $r<1$ и достаточно малом $\varepsilon>0$ второе слагаемое в правой части равенства

$$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}f(re^{i\theta})\,d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}f(re^{i\theta})\,d\theta$$

положительно. В неравенстве

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}f(re^{i\theta})\,d\theta<f(0)$$

можно перейти к пределу при $r\to 1$ и затем при $\varepsilon\to 0$, что дает существование несобственного интеграла $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\,d\theta$ и неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\,d\theta\leqslant f(0).$$

Обозначая через α разность между правой и левой частями полученного неравенства, очевидно, имеем:

$$\alpha=\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}f(re^{i\theta})\,d\theta.$$

Для $r < R < 1$ по формуле Пуассона

$$f(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\varphi) + r^2} f(Re^{i\theta})\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\varphi) + r^2} f(Re^{i\theta})\,d\theta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\varphi) + r^2} f(Re^{i\theta})\,d\theta. \qquad (2)$$

Так как при фиксированном r и $R \to 1$ ядро Пуассона ограниченно, то первое слагаемое суммы (2), а следовательно и второе, имеет предел при $R \to 1$, $\varepsilon \to 0$. Легко проверить, что предел второго слагаемого равен

$$\alpha\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\varphi + r^2}.$$

Таким образом, мы получаем:

$$f(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta-\varphi) + r^2} f(e^{i\theta})\,d\theta + \\ + \alpha\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\varphi + r^2}.$$

Для функции $u(\zeta)$ мы имеем соответственно:

$$u(\zeta) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta} f(e^{i\theta})\,d\theta + iC\right)\exp\left(-\alpha\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right) = \\ = u_1(\zeta)\,u_2(\zeta),$$

где $u_1(\zeta)$ — функция без логарифмического вычета, а

$$u_2(\zeta) = \exp\left(\alpha\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right) = C_1\exp\frac{2\alpha}{\zeta-1}.$$

В силу теоремы Карлемана, существует последовательность полиномов $P_n(\zeta)$ такая, что функции $u_1(\zeta)P_n(\zeta)$ равномерно сходятся к $\zeta - 1$. Тем самым последовательность $u_1(\zeta)P_n(\zeta)u_2(\zeta)$ равномерно сходится к $u_{2\alpha}(\zeta)$. Таким образом, идеал, порожденный функцией $u(\zeta)$, содержит $u_{2\alpha}(\zeta)$.

Но и обратно, можно образовать очевидным путем последовательность полиномов вида $(\zeta-1)Q_n(\zeta)$, равномерно сходящуюся к $u_1(\zeta)$; тем самым функции $Q_n(\zeta)u_{2\alpha}(\zeta)$ будут равномерно сходиться к $u_1(\zeta)u_2(\zeta)=u(\zeta)$, т. е. $u(\zeta)$ будет входить в идеал, порожденный функцией $u_{2\alpha}(\zeta)$. Итак, идеалы, порожденные функциями $u(\zeta)$ и $u_{2\alpha}(\zeta)$, совпадают, что и требовалось.

Доказанная теорема дает представление об устройстве примарных идеалов кольца A.

Недавно В. Рудин [46] дал полное описание замкнутых идеалов кольца A. Приводим формулировку его результата.

Пусть даны: 1) произведение Блашке

$$B(\zeta)=\zeta^m\prod_n \frac{a_n-\zeta}{1-\bar{a}_n\zeta}\frac{|a_n|}{a_n}$$

$$\left(0<|a_n|<1,\ \sum_n(1-|a_n|)<\infty\right);$$

2) мера μ, сосредоточенная на множестве E, лежащем на окружности $|\zeta|=1$, включающем в себя все предельные точки последовательности a_n и имеющем лебегову меру 0. Положим

$$M(\zeta)=B(\zeta)\exp\left\{-\int\limits_{|z|=1}\frac{z+\zeta}{z-\zeta}\,d\mu(z)\right\};$$

$M(\zeta)$ есть ограниченная функция, предельные радиальные значения которой при $|\zeta|\to 1$ равны почти всюду 1. Множество $I(B,\mu)$ всех функций $f(\zeta)\in A$, обращающихся в нуль на E и имеющих ограниченное отношение $\frac{f(\zeta)}{M(\zeta)}$, есть замкнутый идеал кольца A. Утверждается, что всякий замкнутый идеал в A есть идеал вида $I(B,\mu)$.

Кроме того, Рудин показал, что всякий замкнутый идеал J кольца A — главный (т. е. порождается одной функцией $f(\zeta)$) и что идеал $I(B,\mu)$ есть пересечение примарных идеалов тогда и только тогда, когда мера μ дискретна.

ИСТОРИКО-ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

К главе I

Основы общей теории коммутативных нормированных колец, изложению которых посвящена гл. I, принадлежат Гельфанду [14, 17]. Теорема 2 § 4 впервые была опубликована (без доказательства) Мазуром [32]. Теорема 1′ § 7 принадлежит Стоуну ([48], стр. 466 и след.). Результаты § 8 принадлежат в основном Райкову [40, 44, 21]; впервые нормированные кольца с инволюцией, как коммутативные, так и некоммутативные, при некоторых специальных предположениях рассматривались Гельфандом и Наймарком [19], которым принадлежит, в частности, теорема 1; доказательство этой теоремы проведено по Аренсу [1].

К главе II

Результаты § 9 принадлежат Гельфанду [14, 17]; приложение их к кольцам бесконечно дифференцируемых функций — Шилову [21, 61]. Результаты §§ 10—12 принадлежат Шилову [59, 21]. Случай А теоремы 1 § 13 принадлежит Шилову [64], пункт Б — Аренсу и Кальдерону [2], общая формулировка теоремы — Шилову [65]; впервые построение операционного исчисления в топологических линейных кольцах осуществил Валлбрук [7]. Результаты § 14 в случае симметричного кольца были установлены Гельфандом [17], а на общий случай распространены Шиловым [64]. Абстрактная форма теоремы Бёрлинга [4, 5], приведенная в § 15, принадлежит Гельфанду.

К главе III

Результаты главы III принадлежат в основном Гельфанду [15, 18]. Предложения, сформулированные как следствия 1 и 2 теоремы 1 § 17, впервые были получены Винером и Питтом [12].

К главе IV

Теорема 2 § 20 принадлежит Гельфанду и Райкову [20]; свойства свертки на локально бикомпактных группах впервые рассматривал А. Вейль [8]. Результаты § 21 принадлежат Гельфанду и Райкову [20]. В той же заметке [20] установлены также теоремы 3 и 4 § 22; доказательство теоремы 3, приводимое в § 22, как и вывод топологических свойств группы характеров в § 23, принадлежат Райкову [40, 41, 43]. Построение инвариантного интеграла на группе характеров, изложенное в § 24, основано на той же идее, что и доказательство «абстрактной теоремы Планшереля» в книге Люмиса [31], но, в отличие от последнего, не опирается на теорему о представлении положительно определенных функций. Результаты § 25 принадлежат А. Вейлю [8] и М. Крейну [28]; доказательства — Райкову. Доказательство понтрягинского закона двойственности локально бикомпактных групп, изложенное в § 26, принадлежит Райкову [41]. Результаты § 27 принадлежат А. Вейлю [8] и Райкову [40].

К главе V

Теорема 1 § 29 содержится как частный случай в результатах § 21. Теорема 2 § 29 принадлежит Гельфанду [16]; доказательство ее, напечатанное мелким шрифтом, — Райкову [39]. Предложения, сформулированные как следствия 1 и 2 теоремы 2, впервые были получены Камероном [25] и Питтом [38]. Теорема 3 § 29 принадлежит Гельфанду [16]. Конструкция сингулярных максимальных идеалов кольца $V^{(b)}$, изложенная в § 31, принадлежит Райкову [21]. Теоремы 1 — 1′ § 32 принадлежат Д. А. Райкову; несколько ранее В. Рудиным [46′] было доказано существование совершенных множеств с независимыми точками на любой «I-группе», т. е. коммутативной локально бикомпактной группе, каждая окрестность нуля которой содержит элемент бесконечного порядка; доказательство теорем 1—1′ основано на той же идее, но получено независимо. Теоремы 2 и 3 § 32 принадлежат Шрейдеру [66]; недавно Хьюитт [53′] перенес их на произвольные «I-группы». Теорема 4 § 32 принадлежит Винеру и Питту [12]. § 33 представляет собой реферат работы Шрейдера [66].

К главе VI

Результаты главы VI, за исключением оговоренных в тексте, принадлежат Шилову [58, 60]. Гельфандом [18′] был предложен иной подход к исследованию примарных идеалов, основанный на изучении поведения резольвенты $(x - \lambda e)^{-1}$ при приближении к спектральному значению $\lambda = \lambda_0$.

К главе VII

Результаты § 43 принадлежат Гельфанду и Шилову [22]. Результаты § 44—45, за исключением оговоренных в тексте, принадлежат Шилову [62, 63].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Arens R., On a theorem of Gelfand and Neumark. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **32** (1946), 237—239.

[1′] Arens R., Inverse-producing extensions of normed algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **88** (1958), 536—548.

[2] Arens R. and Calderon A. P., Analytic functions of several Banach algebra elements. Ann. Math. (2) **62** (1955), 204—216.

[3] Banach S., Sur la mesure de Haar (приложение к книге S. Saks, Théorie de l'intégrale, Monografje Matematyczne, т. II, Warszawa, 1933). [Русский перевод: С. Банах, О мере Хаара. Успехи матем. наук, вып. II (1936), 161—167, и С. Банах, Мера Хаара. Приложение I к книге С. Сакс, Теория интеграла. Москва, 1949.]

[4] Beurling A., Sur les intégrales de Fourier absolument convergentes et leur application à une transformation fonctionnelle. Congrès de Mathématiques à Helsingfors, 1938.

[5] Beurling A., Un théorème sur les fonctions bornées et uniformement continues sur l'axe réel. Acta math. **77** (1945), 127—136.

[6] Bochner S., Vorlesungen über Fourier'sche Integrale. Leipzig, 1932.

[7] Waelbroeck L., Le calcul symbolique dans les algèbres commutatives. J. math. pures et appl. **33** (1954), 147—186.

[8] Weil A., L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications. Paris, 1940. [Русский перевод: А. Вейль, Интегрирование в топологических группах и его применения. Москва, 1950.]

[9] Wermer J., Function rings and Riemann surfaces. Ann. Math. (2) **67** (1958), 45—71.

[10] Wiener N., Tauberian theorems. Ann. Math. **33** (1932), 1—100.

[11] Wiener N., The Fourier Integral and certain of its applications. Cambridge, 1933.

[12] Wiener N. and Pitt H. R., On absolutely convergent Fourier — Stieltjes transforms. Duke Math. J. **4** (1938), 420—436.

[13] Hartogs F. und Rosenthal A., Über Folgen analytischer Funktionen. Math. Ann. **104** (1931), 606—610.

[14] Гельфанд И. М., О нормированных кольцах. Докл. АН СССР **23** (1939), 430—432.

[15] Гельфанд И. М., Об абсолютно сходящихся тригонометрических рядах и интегралах. Докл. АН СССР 25 (1939), 571—574.
[16] Гельфанд И. М., О кольце почти периодических функций. Докл. АН СССР 25 (1939), 575—577.
[17] Gelfand I., Normierte Ringe. Матем. сб. 9 (51) (1941), 3—23.
[18] Gelfand I., Über absolut convergente trigonometrische Reihen und Integrale. Матем. сб. 9 (51) (1941), 51—65.
[18′] Gelfand I., Ideale und primäre Ideale in normierten Ringen. Матем. сб. 9 (51) (1941), 41—47.
[19] Gelfand I. and Neumark M., On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space. Матем. сб. 12 (54) (1943), 197—213.
[20] Гельфанд И. М. и Райков Д. А., К теории характеров коммутативных топологических групп. Докл. АН СССР 28 (1940), 195—198.
[21] Гельфанд И. М., Райков Д. А. и Шилов Г. Е., Коммутативные нормированные кольца. Успехи матем. наук 1, вып. 2 (12) (1946), 48—146.
[22] Gelfand I. und Šilov G., Über verschiedene Methoden der Einführung der Topologie in die Menge der maximalen Ideale eines normierten Ringes. Матем. сб. 9 (51) (1941), 25—38.
[23] Herglotz G., Über Potenzreihen mit positivem, reelem Teil in Einheitskreis. Leipzig. Berichte 63 (1911), 501—511.
[24] Гоффман К. и Зингер И. М., О некоторых задачах Гельфанда. Успехи матем. наук 14, вып. 3 (87) (1959), 99—114.
[24′] Грушин В. В., О строении замкнутых идеалов в кольце двояко-периодических векторно-гладких функций. Вестник МГУ, сер. матем., мех., астр., № 3 (1960).
[25] Cameron R. H., Analytic functions of absolutely convergent generalised trigonometric sums. Duke Math. J. 3 (1937), 682—688.
[26] Carleman T., Les fonctions quasi-analytiques. Paris, 1926.
[26′] Katznelson W., Sur les fonctions opérant sur l'algèbre des séries de Fourier absolument convergents. Compt. rend. Paris 247 (1958), 404—406.
[27] Коренблюм Б. И., Обобщение тауберовой теоремы Винера и гармонический анализ быстро растущих функций. Тр. Моск. матем. о-ва 7 (1958), 121—148.
[28] Крейн М. Г., Об одном обобщении теоремы Планшереля на случай интегралов Фурье на коммутативной топологической группе. Докл. АН СССР 30 (1941), 482—486.
[29] Крейн М. Г., Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов. Успехи матем. наук 13, вып. 5 (83) (1958), 3—120.
[30] Lévy P., Sur la convergence absolue des séries de Fourier. Compositio math. 1 (1934), 1—14.
[30′] Лейбензон З. Л., О кольце функций с абсолютно сходящимся рядом Фурье. Успехи матем. наук 9, вып. 3 (61) (1954), 157—162.

[31] Loomis L. H., An introduction to abstract harmonic analysis. New York, 1953. [Русский перевод: Л. Люмис, Введение в абстрактный гармонический анализ. Москва, 1956.]
[32] Mazur S., Sur les anneaux linéaires. Compt. rend. Paris 207 (1938), 1025.
[33] Markoff A., On mean values and exterior densities. Матем. сб. 4 (46) (1938), 165—191.
[33′] Malliavin P., Sur l'impossibilité de la synthèse spectrale sur la droit. Compt. rend. Paris 248 (1959), 2155—2157.
[34] Мергелян С. Н., Равномерные приближения функций комплексного переменного. Успехи матем. наук 7, вып. 2 (48) (1952), 31—122.
[34′] Митягин Б. С., Максимальные идеалы некоторых нормированных колец. Сибирск. матем. журн. 1 (1960).
[35] Moore E. H. and Smith H. L., A general theory of limits. Amer. J. Math. 44 (1922), 102—121.
[36] Наймарк М. А., Нормированные кольца. Москва, 1956.
[37] Paley R. and Wiener N., Fourier transforms in the complex domain. New York, 1934.
[38] Pitt H. R., A theorem on absolutely convergent trigonometrical series. J. Math. and Phys. 16 (1938), 191—195.
[39] Райков Д. А., Положительно определенные функции на дискретных коммутативных группах. Докл. АН СССР 27 (1940), 325—329.
[40] Райков Д. А., Положительно определенные функции на коммутативных группах с инвариантной мерой. Докл. АН СССР 28 (1940), 296—300.
[41] Райков Д. А., Обобщенный закон двойственности для коммутативных групп с инвариантной мерой. Докл. АН СССР 30 (1941), 583—585.
[42] Райков Д. А., Новое доказательство единственности меры Хаара. Докл. АН СССР 34 (1942), 231—233.
[43] Райков Д. А., Гармонический анализ на коммутативных группах с мерой Хаара и теория характеров. Тр. МИАН 14 (1945).
[44] Райков Д. А., К теории нормированных колец с инволюцией. Докл. АН СССР 54 (1946), 391—394.
[45] Riesz F., Über Sätze von Stone und Bochner. Acta Univ. Szeged 6 (1933), 184—198.
[46] Rudin W., Les idéaux fermés dans un anneau de fonctions analytiques. Compt. rend. Paris 244 (1957), 997—998.
[46′] Rudin W., Independent perfect sets in groups. Michigan Math. J. 5 (1958), 159—161.
[47] Sierpiński W., Sur la question de la mesurabilité de la base de M. Hamel. Fundam. math. 1 (1920), 105—111.
[48] Stone M., Applications of the theory of Boolean Rings to General Topology. Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), 375—481.
[49] Tychonoff A., Über die topologische Erweiterungen von Räumen. Math. Ann. 102 (1929), 544—561.
[50] Whitney H., On ideals of differential functions. Amer. J. Math. 70 (1948), 635—658.

[51] Haar A., Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen. Ann. Math. **34** (1933), 147—169.
[52] Hamel G., Eine Basis aller Zahlen und die unstettigen Lösungen der Funktionalgleichung: $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Math. Ann. **60** (1905), 459—462.
[53] Helson H. and Quigley F., Existence of maximal ideals in algebras of continuous functions. Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 115—119.
[53′] Hewitt E., The asymmetry of certain algebras of Fourier—Stieltjes transforms. Michigan Math. J. **5** (1958), 149—158.
[54] Čech E., On bicompact spaces. Ann. Math. **38** (1937), 823—844.
[55] Шатуновский С. О., Введение в анализ. Одесса, 192
[56] Schwartz L., Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes non compacts. Compt. rend. Paris **227** (1948), 424—426.
[57] Шилов Г. Е., О некоторых нормированных кольцах. Сб. научн. студ. работ МГУ **18** (1940), 5—25.
[58] Шилов Г. Е., К теории идеалов в нормированных кольцах функций. Докл. АН СССР **27** (1940), 900—903.
[59] Шилов Г. Е., О расширении максимальных идеалов. Докл. АН СССР **29** (1940), 83—85.
[59′] Шилов Г. Е. О коэффициентах Фурье иекоторого класса непрерывных функций. Докл. АН СССР **35** (1942), 3—8.
[60] Шилов Г. Е., О регулярных нормированных кольцах. Тр. МИАН **21** (1947).
[60′] Шилов Г. Е., О нормированных кольцах с одной образующей. Матем. сб. **21** (63) (1947), 25—37.
[61] Шилов Г. Е., Об одном свойстве колец функций. Докл. АН СССР **58** (1947), 985—988.
[62] Шилов Г. Е., Об одном граничном свойстве аналитических функций. Уч. зап. МГУ, сер. матем. **146**, вып. 3 (1949), 126—128.
[63] Шилов Г. Е., О кольцах функций с равномерной сходимостью. Укр. матем. ж. **4** (1951), 404—411.
[64] Шилов Г. Е., О разложении коммутативного нормированного кольца в прямую сумму идеалов. Матем. сб. **32** (1953), 353—364.
[65] Шилов Г. Е., Об аналитических функциях в нормированном кольце. Успехи матем. наук. **15**, вып. 3 (93) (1960).
[65′] Шноль Э. Э., Строение идеалов в кольцах R_α. Матем. сб. **27** (69) (1950), 143—146.
[66] Шрейдер Ю. А., Строение максимальных идеалов в кольцах мер со сверткой. Матем. сб. **27** (69) (1950), 297—318.

ПРИЛОЖЕНИЕ

И. М. Гельфанд и М. А. Наймарк

НОРМИРОВАННЫЕ КОЛЬЦА С ИНВОЛЮЦИЕЙ И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ*)

В статье рассматриваются (вообще некоммутативные) кольца, в которых аксиоматически введена операция инволюции (*-операция). При помощи положительных функционалов изучаются представления таких колец операторами в гильбертовом пространстве. Полученные результаты применяются к теории представлений локально бикомпактных групп.

Теория коммутативных нормированных колец, изложенная в статьях (¹) и (⁵), оказалась удобным аппаратом при решении различных вопросов анализа. Она также с успехом была применена в теории коммутативных топологических групп.

Для применения аналогичных методов к некоммутативным группам оказалось необходимым разработать теорию некоммутативных нормированных колец.

Так как в групповом кольце можно естественным образом ввести операцию инволюции, то в первую очередь возникла задача рассмотрения колец, в которых задана операция инволюции (*-операция).

Один класс таких колец (так называемых *-колец) был рассмотрен авторами в статье (²). При этом оказалось, что в теории колец с инволюцией важную роль играют положи-

*) Изв. АН СССР, сер. матем., 12 (1948), 445—480. Статья перепечатывается с небольшими исправлениями редакционного характера; содержавшийся в оригинале параграф, посвященный обобщенной лемме Шура и по существу далекий от основной темы статьи, здесь опущен.

18*

тельные функционалы, т. е. функционалы, удовлетворяющие условию $f(x^*x) \geqslant 0$.

Положительные функционалы на групповом кольце и связанные с ними положительно определенные функции на группе были применены И. М. Гельфандом и Д. А. Райковым в ([4]) при доказательстве существования и полноты системы неприводимых представлений локально бикомпактной группы.

Настоящая статья посвящена общей теории колец с инволюцией и их представлений в связи с теорией положительных функционалов.

Некоторые методы, здесь изложенные, особенно в § 5, являются, по существу, перенесением на случай произвольного кольца с инволюцией методов статьи ([4]) *).

§ 1. Кольца с инволюцией и их представления

Совокупность R элементов $x, y, \ldots$ называется *нормированным кольцом*, если:

1° R является кольцом, т. е. введены операции сложения и умножения, удовлетворяющие обычным алгебраическим условиям. Мы предположим также, что в R есть единица e.

2° R есть линейное векторное пространство с умножением на комплексные числа, перестановочным с операцией умножения элементов в кольце R.

3° В R введена норма, т. е. каждому элементу x поставлено в соответствие число $|x|$ так, что при этом

$$|x+y| \leqslant |x|+|y|, \quad |xy| \leqslant |x| \cdot |y|,$$

$$|x| \geqslant 0 \text{ и равно нулю лишь при } x=0,$$

$$|\lambda x| = |\lambda|\,|x|, \quad |e| = 1.$$

4° Кольцо полно, т. е. из

$$\lim_{m, n \to \infty} |x_n - x_m| = 0$$

следует существование x такого, что

$$\lim_{n \to \infty} |x_n - x| = 0.$$

---

*) Д. А. Райкову, прочитавшему статью и сделавшему ряд ценных критических замечаний, мы выражаем здесь свою благодарность.

Определение 1. Нормированное кольцо R называется *кольцом с инволюцией*, если в нем введена операция, ставящая в соответствие каждому элементу x элемент x^* так, что при этом выполнены следующие условия:

a) $(\lambda x + \mu y)^* = \bar{\lambda} x^* + \bar{\mu} y^*$;

b) $x^{**} = x$;

c) $(xy)^* = y^* x^*$;

d) $|x^*| = |x|$.

В дальнейшем мы будем рассматривать только кольца с инволюцией и не будем это каждый раз оговаривать.

Элемент x называется *эрмитовским*, если $x^* = x$.

Всякий элемент x можно представить в виде $x = x_1 + ix_2$, где x_1, x_2 — эрмитовские элементы. Действительно, достаточно положить

$$x_1 = \frac{x + x^*}{2},$$

$$x_2 = \frac{x - x^*}{2i}.$$

Элемент x^*x всегда эрмитовский, ибо

$$(x^*x)^* = x^*x^{**} = x^*x.$$

В частности, так как $e^* = e^*e$, то $e = e^*$, т. е. e — эрмитовский элемент.

Некоторые результаты этой статьи остаются справедливыми, если оставить лишь алгебраические из перечисленных аксиом, т. е. аксиомы 1°, 2° и a), b), c).

Типичным примером кольца с инволюцией является кольцо K всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве. При этом под $*$-операцией мы будем понимать операцию перехода от оператора к эрмитовски-сопряженному.

В связи с этим естественно рассматривать гомоморфные отображения кольца с инволюцией в кольцо K и притом гомоморфизмы, сохраняющие $*$-операцию. Такое отображение мы будем называть **представлением кольца**. Иными словами, мы вводим следующее

Определение 2. Будем говорить, что *задано представление кольца R*, если каждому элементу $a \in R$ поставлен в соответствие оператор $A \in K$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$

(коротко мы это будем обозначать так: $a \to A$ либо $A(a)$), причем выполнены следующие условия:

1° Если $a \to A$, $b \to B$, то $ab \to AB$ и $\lambda a + \mu b \to \lambda A + \mu B$;

2° если $a \to A$, то $a^* \to A^*$;

3° $e \to E$.

Определение 3. Представление называется *циклическим*, если в пространстве существует вектор ξ_0 такой, что векторы $A\xi_0$ (A—операторы, отвечающие элементам из R) всюду плотны в $\mathfrak{H}$. Сам вектор ξ_0 называется *циклическим*.

Пусть заданы два представления, одно из которых ставит в соответствие элементам a операторы $A(a)$ в пространстве $\mathfrak{H}$ и другое, ставящее в соответствие элементам a операторы $A'(a)$ в пространстве $\mathfrak{H}'$. Будем говорить, что эти *представления эквивалентны*, если между $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}'$ можно установить такое унитарное соответствие, при котором оператору $A(a)$ соответствует оператор $A'(a)$.

Подпространство $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}$ называется *инвариантным*, если каждый вектор из $\mathfrak{H}_1$ переводится всеми операторами $A(a)$ снова в векторы из $\mathfrak{H}_1$.

Рассматривая все операторы представления только как операторы в $\mathfrak{H}_1$, мы получим представление кольца R в пространстве $\mathfrak{H}_1$. Это представление мы будем называть *частью* исходного представления $\mathfrak{H}$.

Если $\mathfrak{H}_1$ *инвариантно, то его ортогональное дополнение также инвариантно*. Действительно, пусть ξ ортогонально к $\mathfrak{H}_1$, т. е. $(\xi, \eta) = 0$ для всех $\eta \in \mathfrak{H}_1$. Тогда

$$(A(a)\xi, \eta) = (\xi, A^*(a)\eta) = 0,$$

так как $\mathfrak{H}_1$ инвариантно относительно операторов, являющихся образами элементов из R, а $A^*(a)$ является образом элемента a^*.

Если нам задано представление кольца R в пространстве $\mathfrak{H}$, то пространство можно разложить в прямую сумму инвариантных подпространств, в каждой из которых представление циклично. Действительно, пусть $\xi_0 \neq 0$ — какой-либо фиксированный вектор из $\mathfrak{H}$. Рассмотрим совокупность всех векторов $A(a)\xi_0$, где a пробегает всё R. Замыкание этого множества образует инвариантное подпространство $\mathfrak{H}_1$ пространства $\mathfrak{H}$, в котором представление циклично. Ортогональное дополнение этого подпространства также инвариантно.

В нем проделаем то же и т. д. Пользуясь трансфинитной индукцией, мы и произведем требуемое разложение.

Определение 4. Представление называется *неприводимым*, если в $\mathfrak{H}$ не существует подпространства $\neq \mathfrak{H}$ и 0, инвариантного относительно всех операторов $A(a)$.

Если представление неприводимо, то ясно, что всякий вектор $\xi \neq 0$ будет циклическим. Очевидно, что обратное предложение также верно.

Теорема 1. *Для того чтобы представление было неприводимым, необходимо и достаточно, чтобы всякий ограниченный оператор B, перестановочный с операторами $A(a)$, был кратным единице.*

Доказательство необходимости. Пусть B перестановочен со всеми $A(a)$. Предположим сначала, что B — эрмитов. Тогда любая функция от B также перестановочна с $A(a)$. В частности, $E(\lambda)$ — проекционные операторы, дающие спектральное разложение B, также перестановочны с $A(a)$. Но это означает, что отвечающие им подпространства инвариантны относительно $A(a)$. Ввиду неприводимости представления это значит, что каждое из этих подпространств либо нулевое, либо всё пространство. Таким образом, $E(\lambda)$ для каждого λ есть либо 0, либо E. Так как $(E(\lambda)\xi, \xi)$ монотонно растет с увеличением λ, то отсюда следует, что существует такое λ_0, что $E(\lambda) = E$ при $\lambda > \lambda_0$ и $E(\lambda) = 0$ при $\lambda < \lambda_0$. Отсюда следует, что

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE(\lambda) = \lambda_0 E.$$

Если B — произвольный ограниченный оператор, то B^* также перестановочен со всеми $A(a)$. Действительно,

$$B^* A(a) = (A^*(a) B)^* = (BA^*(a))^* = A(a) B^*.$$

Поэтому эрмитовы операторы $\frac{B + B^*}{2}$ и $\frac{B - B^*}{2i}$ кратны единице, а следовательно, и B кратен единице.

Доказательство достаточности. Предположим противное, т. е. что представление приводимо. Тогда существует инвариантное подпространство $\mathfrak{H}_1$, отличное от 0 и всего пространства. Обозначим отвечающий этому подпространству проекционный оператор через E_1. Тогда E_1 перестановочен со всеми $A(a)$ (так как $\mathfrak{H}_1$ инвариантно относительно $A(a)$). Но E_1 не кратно E, так как $\mathfrak{H}_1$ отлично от нуля и всего пространства. Мы пришли к противоречию, следовательно, теорема доказана.

§ 2. Положительные функционалы и их связь с представлениями колец

Определение 5. *Положительным линейным функционалом* называется функция $f(x)$, ставящая в соответствие каждому $x \in R$ комплексное число $f(x)$ и такая, что:

1° $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$;

2° $f(x^*x) \geqslant 0$ для любого x.

Функция $f(x)$ называется *вещественным линейным функционалом*, если:

1° $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$;

2° $f(x)$ непрерывна;

3° $f(x^*) = \overline{f(x)}$ для всякого x.

Очевидно, что если $f(x)$ — положительный функционал, то $f(e) \geqslant 0$, ибо $e^*e = e$.

Всякий непрерывный линейный функционал $f(x)$ можно представить в виде $f = f_1 + if_2$, где f_1 и f_2 — вещественные функционалы. Для этого достаточно положить

$$f_1(x) = \frac{1}{2}[f(x) + \overline{f(x^*)}] \quad \text{и} \quad f_2(x) = \frac{1}{2i}[f(x) - \overline{f(x^*)}].$$

Легко проверить, что f_1 и f_2 — вещественные линейные функционалы.

Ниже мы покажем, что всякий положительный функционал является вещественным функционалом, а значит, и линейная комбинация положительных функционалов с вещественными коэффициентами есть вещественный линейный функционал. Обратное, вообще говоря, неверно. Позже мы приведем пример этого.

В дальнейшем мы часто будем пользоваться следующим неравенством:

Пусть $f(x)$ — положительный функционал. Тогда для любых x и y имеет место

$$|f(y^*x)|^2 \leqslant f(y^*y)\, f(x^*x). \qquad (1)$$

Доказательство этого неравенства в точности совпадает с обычным доказательством неравенства Коши-Буняковского.

Теорема 1. *Всякий положительный линейный функционал f есть вещественный линейный функционал, удовлетворяющий неравенству*

$$|f(x)| \leqslant f(e)\,|x|. \tag{2}$$

Доказательство. Предположим сначала, что $|x| < 1$ и $x^* = x$. Положим

$$y = (e-x)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= e - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3!}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}x^3 - \ldots;$$

этот ряд сходится, так как $|x| < 1$. В силу условия d) определения 1 § 1, инволюция непрерывна; поэтому $y^* = y$; кроме того,

$$yy^* = y^2 = e - x,$$

что легко доказать возведением в квадрат степенного ряда. Поэтому

$$f(e-x) = f(y^*y) \geqslant 0,$$

т. е. $f(x)$ вещественно и, кроме того, $f(x) \leqslant f(e)$.

Аналогично получаем $f(x) \geqslant -f(e)$.

Легко освободиться от требования $|x| < 1$. Мы получим тогда: если $x^* = x$, то $f(x)$ вещественно и

$$|f(x)| \leqslant f(e)\,|x|.$$

Отсюда следует, что $f(x^*) = \overline{f(x)}$ для любого x. Действительно,

$$f(x) = f\left(\frac{x+x^*}{2}\right) + if\left(\frac{x-x^*}{2i}\right),$$

$$f(x^*) = f\left(\frac{x+x^*}{2}\right) - if\left(\frac{x-x^*}{2i}\right);$$

$f\left(\frac{x+x^*}{2}\right)$ и $f\left(\frac{x-x^*}{2i}\right)$, в силу доказанного выше, вещественны; поэтому $f(x^*) = \overline{f(x)}$. Нам осталось показать, что $f(x)$ — непрерывная функция от x. Для этого достаточно доказать неравенство (2) для любого $x \in R$. Это неравенство уже доказано нами для эрмитовских элементов x, в частности для элементов вида x^*x. Таким образом,

$$f(x^*x) \leqslant f(e)\,|x^*x|,$$

следовательно,

$$f(x^*x) \leqslant f(e)\,|x|^2. \tag{3}$$

С другой стороны, полагая в неравенстве (1) $y = e$, получаем:

$$|f(x)|^2 \leqslant f(e)\,f(x^*x),$$

следовательно, в силу (3),

$$|f(x)|^2 \leqslant f(e)^2\,|x|^2.$$

Тем самым неравенство (2) доказано для всех элементов $x \in R$.

Приведем теперь пример кольца и вещественного функционала на нем, не представимого как линейная комбинация положительных функционалов.

Пусть кольцом R является совокупность комплексных функций $x(z)$, аналитических при $|z| < 1$ и непрерывных в круге $|z| \leqslant 1$. Мы положим $|x| = \max\limits_{|z| \leqslant 1} |x(z)|$. Сумму и произведение определим как сумму и произведение функций; x^* определим равенством $x^*(z) = \overline{x(\bar{z})}$. В § 5 будет показано, что всякий положительный функционал в этом кольце имеет вид

$$f(x) = \int\limits_{-1}^{+1} x(t)\,d\sigma(t),$$

где $\sigma(t)$ — монотонная функция, заданная на отрезке $[-1, +1]$ вещественной оси t.

Рассмотрим теперь следующий вещественный функционал:

$$f_1(x) = \frac{x(z_0) + \overline{x(\bar{z}_0)}}{2},$$

где z_0 — фиксированное невещественное число такое, что $|z_0| \leqslant 1$. Тогда, как нетрудно убедиться, не существует комплексной функции ограниченной вариации $\sigma_1(t)$ такой, что

$$\frac{x(z_0) + \overline{x(\bar{z}_0)}}{2} = \int\limits_{-1}^{+1} x(t)\,d\sigma_1(t).$$

В самом деле, предположим, что существует $\sigma_1(t)$ такая, что

$$\int_{-1}^{+1} x(t)\,d\sigma_1(t) = \frac{x(z_0)+x(\bar{z}_0)}{2}$$

для любой функции, аналитической в единичном круге. Положим $x_n(z) = \frac{e^{inz}}{n}$ и подставим вместо $x(z)$. Тогда при $n \to \infty$ левая часть равенства будет стремиться к нулю, а правая по модулю — к ∞, т. е. мы пришли к противоречию. Это значит, что $f_1(x)$ не представим как линейная комбинация положительных функционалов.

Каждое представление кольца R доставляет нам множество положительных функционалов. В самом деле, пусть ξ_0 — некоторый вектор из пространства $\mathfrak{H}$. Положим

$$f(a) = (A(a)\xi_0, \xi_0). \tag{4}$$

Тогда $f(a)$ — положительный функционал. Действительно,

$$f(a^*a) = (A(a^*a)\xi_0, \xi_0) =$$
$$= (A^*(a)A(a)\xi_0, \xi_0) = (A(a)\xi_0, A(a)\xi_0) \geqslant 0.$$

В частности,

Теорема 2. *Всякое представление кольца R с инволюцией непрерывно. Более того, при этом $|A| \leqslant |a|$.*

Доказательство. Применяя неравенство (3) к положительному функционалу $f(a) = (A(a)\xi_0, \xi_0)$, получаем:

$$(A(a^*a)\xi_0, \xi_0) \leqslant (\xi_0, \xi_0)|a|^2,$$

т. е.

$$|A(a)\xi_0|^2 \leqslant |a|^2 |\xi_0|^2.$$

Так как ξ_0 — произвольный вектор, то это неравенство означает, что $|A| \leqslant |a|$.

Наша ближайшая цель — дать описание представлений с помощью положительных функционалов. Это лучше всего делать для циклических представлений.

Пусть заданы два циклических представления кольца R: в пространствах $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}'$. Обозначим операторы, отвечающие элементу a, соответственно через $A(a)$ и $A'(a)$. Пусть ξ_0 и ξ_0' — циклические векторы соответствующих представлений. Положим

$$f(a) = (A(a)\xi_0, \xi_0) \text{ и } f'(a) = (A'(a)\xi_0', \xi_0').$$

Покажем, что если $f(a) = f'(a)$ *для любого* a, то представления эквивалентны.

Соответствие между векторами в пространствах $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}'$ мы установим следующим образом. Пусть $\xi = A\xi_0$. Поставим ему в соответствие вектор $\xi' = A'\xi'_0$. Мы докажем, что это соответствие изометрично. Отсюда будет следовать его взаимная однозначность. Для того чтобы доказать изометричность, покажем, что скалярные произведения соответствующих векторов совпадают между собой. Пусть

$$\xi_1 = A_1\xi_0, \qquad \xi'_1 = A'_1\xi'_0,$$
$$\xi_2 = A_2\xi_0, \qquad \xi'_2 = A'_2\xi'_0.$$

Тогда

$$(\xi_1, \ \xi_2) = (A_1\xi_0, \ A_2\xi_0) = (A_2^*A_1\xi_0, \ \xi_0) = f(a_2^*a_1),$$
$$(\xi'_1, \ \xi'_2) = (A'_1\xi'_0, \ A'_2\xi'_0) = (A'^*_2A'_1\xi'_0, \ \xi'_0) = f'(a_2^*a_1).$$

Так как $f(x) \equiv f'(x)$, то мы видим, что $(\xi_1, \ \xi_2) = (\xi'_1, \ \xi'_2)$, т. е. для элементов вида $A\xi_0$ (соответственно $A'\xi'_0$) изометричность доказана.

Так как оба представления цикличны, то множество таких элементов плотно в $\mathfrak{H}$ (соответственно $\mathfrak{H}'$). Мы можем поэтому по непрерывности продолжить это соответствие на всё $\mathfrak{H}$ (соответственно $\mathfrak{H}'$).

Мы видим, что циклическое представление с точностью до эквивалентности однозначно определяется положительным функционалом (4). Возникает вопрос: для всякого ли положительного функционала существует представление, при котором этот функционал может быть записан в виде (4)? Мы покажем, что на этот вопрос можно ответить утвердительно.

Пусть нам задан положительный функционал $f(x)$ в R. Введем с его помощью в R скалярное произведение следующим образом. Положим

$$(x, \ y) = f(y^*x).$$

Будем считать x эквивалентным нулю, если

$$(x, \ x) = f(x^*x) = 0.$$

Два элемента мы будем называть *эквивалентными*, если их разность эквивалентна нулю.

Совокупность элементов, эквивалентных нулю, образует левый идеал в R. В самом деле, пусть $x \sim 0$ и y — произвольный элемент. Тогда

$$f((yx)^*yx) = f(x^*y^*yx) = f(zx),$$

где $z = x^*y^*y$. В силу неравенства (1), имеем:

$$|f(zx)| \leqslant \sqrt{f(x^*x)}\sqrt{f(zz^*)}$$

и, следовательно, $f(zx) = 0$, т. е. $yx \sim 0$. Если $x_1 \sim 0$ и $x_2 \sim 0$, то $x_1 + x_2 \sim 0$, так как

$$f((x_1 + x_2)^*(x_1 + x_2)) = \\ = f(x_1^*x_1) + f(x_2^*x_1) + f(x_1^*x_2) + f(x_2^*x_2).$$

Первое и четвертое слагаемые правой части равны нулю по определению, равенство нулю второго и третьего можно вывести опять-таки из неравенства (1).

Проверим, что выполнены аксиомы скалярного произведения.

1° $(x, y) = \overline{(y, x)}$. Действительно, в силу того, что положительный функционал вещественен, имеем:

$$f(y^*x) = \overline{f((y^*x)^*)} = \overline{f(x^*y)}.$$

2° $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$. Очевидно.

3° $(x, x) \geqslant 0$. Очевидно. То, что $(x, x) = 0$ лишь при $x \sim 0$, следует из определения эквивалентных нулю элементов.

Полученное пространство обозначим через $\tilde{\mathfrak{H}}$. Оно, вообще говоря, не полно. Его пополнение обозначим через $\mathfrak{H}$. Представление будем строить в этом пространстве следующим образом: элементу a поставим в соответствие оператор A в $\mathfrak{H}$ по формуле $Ax = ax$. При этом нужно лишь проверить, что если $x_1 \sim x_2$, то $Ax_1 \sim Ax_2$. Это ясно, так как если $x_1 - x_2 \sim 0$, то $a(x_1 - x_2) \sim 0$ в силу того, что множество эквивалентных нулю элементов образует идеал.

Покажем, что оператор A ограничен и, более того, что

$$|A| \leqslant |a|. \tag{5}$$

По определению, $(Ax, Ax) = f(x^*a^*ax)$. Положим

$$f_1(y) = f(x^*yx),$$

считая x фиксированным; $f_1(y)$ — также положительный функционал. В самом деле,

$$f_1(y^*y) = f(x^*y^*yx) = f((yx)^*\,yx) \geqslant 0.$$

Поэтому, в силу неравенства (2),

$$f_1(a^*a) \leqslant f_1(e)\,|a^*a| \leqslant |f_1(e)|\,|a|^2,$$

т. е.

$$f(x^*a^*ax) \leqslant f(x^*x)\,|a|^2$$

или

$$(Ax,\ Ax) \leqslant (x,\ x)\,|a|^2;$$

таким образом,

$$|A|^2 = \sup_{(x,\,x)=1} (Ax,\ Ax) \leqslant |a|^2,$$

т. е. неравенство (5) доказано. Мы доказали, что оператор A, определенный на $\tilde{\mathfrak{H}}$, ограничен, поэтому можно доопределить его на замыкании $\mathfrak{H}$ множества $\tilde{\mathfrak{H}}$. Норма оператора A после его продолжения по-прежнему не будет превосходить $|a|$.

Покажем, что отображение $a \to A$ есть представление кольца R. Во-первых, очевидно, что если $a \to A$, $b \to B$, то $\lambda a + \mu b \to \lambda A + \mu B$ и $ab \to AB$.

Покажем, что если $a \to A$, то a^* переходит в A^*, иными словами, что $(ax,\ y) = (x,\ a^*y)$. Но это действительно так, ибо $(ax,\ y) = f(y^*ax)$, а

$$(x,\ a^*y) = f((a^*y)^*\,x) = f(y^*ax) = (ax,\ y).$$

Покажем, что полученное представление циклическое. В качестве вектора ξ_0 возьмем элемент $x = e$. Тогда множество векторов $A\xi_0$ есть в данном случае множество всех a, т. е. всё $\tilde{\mathfrak{H}}$, и, следовательно, плотно в $\mathfrak{H}$. Цикличность доказана.

Далее, очевидно, что при таком выборе ξ_0 мы имеем, по определению скалярного произведения,

$$(A\xi_0,\ \xi_0) = (a,\ e) = f(e^*a) = f(a).$$

Таким образом, мы построили представление кольца по наперед заданному положительному линейному функционалу f. Полученные нами результаты соединим в виде теоремы:

Теорема 3. *Каждому циклическому представлению кольца R с циклическим вектором ξ_0 отвечает положительный линейный функционал*

$$f(a)=(A(a)\xi_0,\ \xi_0),\tag{6}$$

где $A(a)$ — оператор, отвечающий элементу a. Функционалом $f(x)$ представление определяется однозначно с точностью до эквивалентности.

Обратно, всякому положительному линейному функционалу $f(a)$ отвечает циклическое представление, такое, что $f(a)$ определяется формулой (6).

Если нам задано представление $a\to A$ в пространстве $\mathfrak{H}$, то каждому элементу $\xi\in\mathfrak{H}$ отвечает положительный функционал $f(a)=(A(a)\xi,\ \xi)$.

Если мы заменим вектор ξ вектором $\lambda\xi$, $|\lambda|=1$, то $f(a)$ от этого не изменится.

Вообще говоря, непропорциональные векторы могут давать один и тот же функционал $f(a)$. Однако имеет место

Теорема 4. *Пусть нам задано неприводимое представление кольца R. Положим $(A\xi_1,\ \xi_1)=f_1(a)$ и $(A\xi_2,\ \xi_2)=$ $=f_2(a)$.*

Если $f_1(a)\equiv f_2(a)$, то $\xi_1=\lambda\xi_2$, где $|\lambda|=1$.

Доказательство. Так как представление неприводимо и $\xi_1\neq 0$, то множество векторов $A\xi_1$ всюду плотно в $\mathfrak{H}$.

Зададим оператор U следующим образом: если $\xi=A\xi_1$, то положим $U\xi=A\xi_2$. Докажем, что так построенный оператор сохраняет длины векторов. В самом деле,

$$(U\xi,\ U\xi)=(A\xi_2,\ A\xi_2)=(A^*A\xi_2,\ \xi_2)=$$
$$=(A^*A\xi_1,\ \xi_1)=(A\xi_1,\ A\xi_1)=(\xi,\ \xi),$$

откуда следует, что оператор U определен однозначно. Действительно, если $A'\xi_1=A''\xi_1$, то $\xi=(A'-A'')\xi_1=0$, и поэтому $U\xi=0$, т. е. $A'\xi_2=A''\xi_2$. Ограниченный оператор U доопределим по непрерывности на всем $\mathfrak{H}$.

Покажем, что оператор U перестановочен со всеми операторами A представления. В самом деле, пусть A_0 — оператор представления и пусть вектор ξ имеет вид $\xi=A\xi_1$. Тогда $A_0\xi=A_0A\xi_1$, т. е., по определению U, имеем $UA_0\xi=$ $=A_0A\xi_2$. Но

$$A_0U\xi=A_0UA\xi_1=A_0A\xi_2.$$

Таким образом, для векторов вида $\xi = A\xi_1$ имеем $A_0U\xi = UA_0\xi$. Ввиду того что эти элементы всюду плотны, получаем $A_0U = UA_0$. Таким образом, U перестановочен со всеми операторами неприводимого представления, и, следовательно, в силу теоремы 1 § 1, $U = \lambda E$. Но это означает, что

$$\xi_2 = U\xi_1 = \lambda\xi_1.$$

§ 3. Включение кольца с инволюцией в кольцо операторов

Пусть нам задано кольцо R с инволюцией. Может оказаться, что кольцо можно упростить, оставив тот же запас положительных функционалов или, что то же самое, тот же запас представлений.

Например, в § 2 мы упоминали о кольце аналитических функций, заданных в круге. Всякий положительный функционал в этом кольце задается формулой

$$f(x) = \int_{-1}^{+1} x(t)\, d\sigma(t),$$

где $\sigma(t)$ — монотонная функция. Но тот же запас положительных функционалов имеется и в кольце всех непрерывных функций на отрезке $[-1, +1]$.

Более точно мы поставим вопрос следующим образом.

Заменить норму $|x|$ в кольце R возможно меньшей нормой $|x|_1$, при которой остался бы тот же запас положительных функционалов в R (т. е. то же множество циклических представлений). При этом новая норма должна быть такова, что

$$\left.\begin{array}{l} |e|_1 = 1, \quad |x+y|_1 \leqslant |x|_1 + |y|_1, \quad |\lambda x|_1 = |\lambda|\,|x|_1, \\ \qquad |xy|_1 \leqslant |x|_1\,|y|_1, \quad |x^*|_1 = |x|_1, \quad |x|_1 \geqslant 0. \end{array}\right\} \quad (1)$$

В новой норме могут оказаться элементы $x \neq 0$, для которых $|x|_1 = 0$. В этом случае мы объявим их эквивалентными нулю и перейдем таким образом к новому кольцу.

Далее, может оказаться, что в новой норме кольцо R не полно. Мы можем его тогда пополнить. Мы увидим также, что после введения новой нормы кольцо R станет изоморфным кольцу операторов в гильбертовом пространстве, а норма перейдет в норму операторов в гильбертовом пространстве.

Лемма 1. *Пусть в R введено множество норм $|x|_\alpha$, каждая из которых удовлетворяет условиям* (1). *Пусть в каждой из этих норм R может быть изоморфно, с сохранением инволюции и нормы, отображено в кольцо операторов в гильбертовом пространстве. Пусть, далее, для каждого x $\sup\limits_\alpha |x|_\alpha < +\infty$. Тогда в норме $|x|_1 = \sup\limits_\alpha |x|_\alpha$ кольцо R может быть изоморфно, с сохранением нормы и инволюции, отображено в кольцо операторов в гильбертовом пространстве.*

Доказательство. Пусть при норме $|x|_\alpha$ кольцо реализуется как кольцо операторов в пространстве $\mathfrak{H}_\alpha$.

Рассмотрим пространство $\mathfrak{H}$, являющееся ортогональной прямой суммой пространств $\mathfrak{H}_\alpha$. Если через ξ^α обозначить векторы в $\mathfrak{H}_\alpha$, то векторами в $\mathfrak{H}$ будут $\xi = \{\xi^\alpha\}$, где $\{\xi^\alpha\}$ отлично от нуля не более чем для счетного множества значений α и

$$\sum_\alpha |\xi_\alpha|^2 = |\xi|^2 < +\infty.$$

Скалярное произведение определяется формулой

$$(\xi, \eta) = \sum_\alpha (\xi_\alpha, \eta_\alpha).$$

Каждому a отвечает, по условию, в $\mathfrak{H}_\alpha$ оператор $X_a^{(\alpha)}$, причем $|X_a^{(\alpha)}| = |a|_\alpha$. В пространстве $\mathfrak{H}$ элементу a отвечает оператор X_a, определяемый следующим образом:

$$X_a \{\xi_\alpha\} = \{X_a^{(\alpha)} \xi_\alpha\}.$$

Оператор X_a ограничен. Действительно,

$$|X_a \xi|^2 = \sum_\alpha |X_a^{(\alpha)} \xi_\alpha|^2 \leqslant \sum |X_a^{(\alpha)}|^2 |\xi_\alpha|^2 \leqslant \sup_\alpha |X_a^{(\alpha)}|^2 \sum |\xi_\alpha|^2.$$

Легко видеть, что $\sup\limits_\alpha |X_a^{(\alpha)}| = |X_a| = |a|_1$. Мы реализовали, таким образом, кольцо R с нормой $|a|_1$ в виде кольца операторов в гильбертовом пространстве.

Лемма 2. *Пусть в кольце R введена норма $|x|_0$, удовлетворяющая условиям* (1), *и пусть дано представ-*

ление $a \to X_a$ *кольца* R, *непрерывное в этой норме* *). *Тогда* $|X_a| \leqslant |a|_0$.

Доказательство. Так как это представление непрерывно, то мы можем продолжить его на пополнение R_0 кольца R. Мы получим тогда представление полного кольца R_0. Для него, согласно теореме 2 § 2, имеет место неравенство $|X_a| \leqslant |a|_0$. Лемма доказана.

Теорема 1. *В кольце* R *можно ввести норму* $|x|_1$, *удовлетворяющую следующим условиям*:

1° $|x|_1$ *удовлетворяет условиям* (1).

2° *Всякое представление кольца* R *есть представление, непрерывное в норме* $|x|_1$.

3° *Если какая-либо другая норма* $|x|_2$ *также удовлетворяет условиям* 1° *и* 2°, *то* $|x|_1 \leqslant |x|_2$ *для всякого* x.

4° *Кольцо* R *с нормой* $|x|_1$ *можно изоморфно, с сохранением инволюции и нормы, отобразить на кольцо операторов в гильбертовом пространстве.*

Ясно, что условиями 1°, 2°, 3° норма $|x|_1$ определяется однозначно.

Доказательство. Рассмотрим множество всех циклических представлений данного кольца **) и обозначим каждое циклическое представление знаком α. Пусть элементу a при этом представлении отвечает оператор $X_a^{(\alpha)}$. В силу теоремы 2 § 2, $|X_a^{(\alpha)}| \leqslant |a|$. Положим

$$|a|_\alpha = |X_a^{(\alpha)}|;$$

$|a|_\alpha$ будет нормой, удовлетворяющей условиям (1) этого параграфа. Положим теперь $|a|_1 = \sup\limits_{\alpha} |a|$. При этом мы будем иметь $|a|_1 \leqslant |a|$, так как $|a|_\alpha \leqslant |a|$.

Согласно лемме 1, кольцо R с нормой $|a|_1$ удовлетворяет условиям (1) и может быть реализовано как кольцо операторов в некотором гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$.

*) Когда мы говорим, что представление $a \to X_a$ непрерывно в норме $|x|_0$, удовлетворяющей условиям (1), то мы требуем также, чтобы из $|a|_0 = 0$ следовало $X_a = 0$, т. е. элементы, эквивалентные нулю в этой норме, переходили бы в 0.

**) Мы берем лишь циклические представления, так как каждое разлагается на циклические.

Всякое циклическое представление кольца R непрерывно в норме $|a|_1$. Действительно, пусть дано циклическое представление $a \to X_a^{(\alpha)}$. Тогда

$$|X_a^{(\alpha)}| = |a|_\alpha \leqslant \sup_\alpha |a|_\alpha = |a|_1.$$

Всякое представление разлагается в прямую сумму циклических и поэтому также непрерывно в этой норме.

Таким образом, показано, что $|a|_1$ удовлетворяет условиям 1°, 2° и 4°. Покажем, что выполнено также и условие 3°. Пусть дана норма $|x|_2$, удовлетворяющая условиям (1) и в которой все представления R непрерывны. Тогда, в силу леммы 2, имеем:

$$|X_a^{(\alpha)}| \leqslant |a|_2,$$

т. е. $|a|_\alpha \leqslant |a|_2$. Следовательно, и

$$|a|_1 = \sup_\alpha |a|_\alpha \leqslant |a|_2.$$

Теорема полностью доказана.

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$|x|_1 = \sup \sqrt{f(x^*x)}, \tag{2}$$

где sup *распространяется по всем положительным функционалам f, для которых $f(e) = 1$.*

Доказательство. Каждое циклическое представление описывается (§ 2) некоторым положительным линейным функционалом f. Найдем норму оператора X_a, отвечающего элементу a в этом представлении. Мы имеем:

$$(X_a x,\ X_a x) = f((ax)^*\, ax) = f(x^* a^* a x), \qquad (x,\ x) = f(x^* x).$$

Введем функционал $f_x(y) = f(x^* y x)$, считая x фиксированным. $f_x(y)$ — положительный функционал, причем

$$f_x(e) = f(x^* x), \qquad |X_a|^2 = \sup (X_a x,\ X_a x),$$

где sup распространяется по всем x, для которых $(x, x) = 1$; таким образом,

$$|X_a|^2 = \sup f_x(a^* a),$$

где sup распространяется по всем x, для которых $f_x(e) = 1$.

Следовательно, $|X_a|^2 \leqslant \sup f(a^*a)$, где sup распространяется по всем положительным функционалам f, для которых $f(e)=1$.

Если обозначить это представление индексом α, то

$$|a|_\alpha^2 \leqslant \sup f(a^*a)$$

при условии $f(e)=1$ и f — положительный линейный функционал. Следовательно,

$$|a|_1^2 = \sup_\alpha |a|_\alpha^2 \leqslant \sup_{f(e)=1} f(a^*a).$$

С другой стороны,

$$f(a^*a) = (X_a e, X_a e).$$

Поэтому, если $f(e)=1$, то

$$f(a^*a) \leqslant |X_a|^2 = |a|_\alpha^2 \leqslant \sup_\alpha |a|_\alpha^2 = |a|_1^2$$

и, следовательно,

$$\sup_{f(l)=1} f(a^*a) \leqslant |a|_1^2.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Все рассуждения этого параграфа остаются в силе, если в исходном кольце вовсе не было нормы, т. е. если оно определялось лишь аксиомами 1°, 2° и a), b), c), d). При этом нужно лишь дополнительно требовать следующего: для всякого x

$$\sup f(x^*x) < +\infty,$$

где sup распространяется по всем положительным f, для которых $f(e)=1$.

Замечание 2. Совокупность I элементов, для которых $|x|_1=0$ (мы называем их эквивалентными нулю), образует двусторонний идеал. Эти элементы x характеризуются тем, что при любом представлении они переходят в 0 или, иначе, что любой положительный функционал обращается на них в 0.

Докажем, что I — действительно идеал.

Пусть $|x|_1=0$, y — произвольный элемент. Тогда

$$|xy|_1 \leqslant |x|_1 |y|_1 = 0,$$

аналогично $|yx|_1=0$. Далее, если $|x|_1=0$ и $|y|_1=0$, то

$$|\lambda x + \mu y|_1 \leqslant |\lambda|\,|x|_1 + |\mu|\,|y|_1 = 0.$$

Мы доказали, что I — идеал. При изучении представлений либо положительных функционалов мы можем заменить R кольцом вычетов по этому идеалу. Обозначим это кольцо вычетов через R'. Мы будем называть его *приведенным кольцом*.

Замечание 3. Всякое представление кольца R непрерывно в норме $|x|_1$ и поэтому является непрерывным представлением кольца R'. Но непрерывное представление R' может быть расширено до представления пополнения R'. Пополнение R' мы обозначим через $\overline{R}$.

Итак, *всякое представление кольца R есть также представление кольца $\overline{R}$ и обратно.*

Аналогично *всякий положительный линейный функционал на R может быть перенесен на $\overline{R}$ и обратно.*

§ 4. Неразложимые функционалы и неприводимые представления

В конечномерном случае всякое представление разлагается на неприводимые. В общем случае a priori неясно существование таких представлений. Мы, не касаясь вопроса о разложении представлений на неприводимые, докажем в этом параграфе существование неприводимых представлений. Очень удобно это сделать в терминах положительных функционалов.

Определение 1. Будем говорить, что положительный функционал f_1 *подчинен функционалу* f ($f_1 \ll f$), если существует такое $\lambda > 0$, что $\lambda f - f_1$ — положительный функционал.

Построим циклическое представление $a \to X_a$ (X_a — операторы в пространстве $\mathfrak{H}$), отвечающее функционалу f:

$$f(a) = (X_a\xi_0, \xi_0),$$

где ξ_0 — циклический вектор. Пусть B — ограниченный положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, перестановочный со всеми операторами представления. Положим

$$f_1(a) = (X_a B\xi_0, \xi_0).$$

В частности, оператору $B = E$ отвечает сам функционал f. Мы утверждаем, что $f_1(a)$ — *положительный функционал и подчинен функционалу* $f(a)$.

В самом деле, $f_1(a)$ положителен. Действительно,

$$f_1(a^*a) = (X_a^* X_a B\xi_0,\ \xi_0) = (X_a B\xi_0,\ X_a\xi_0) = (BX_a\xi_0,\ X_a\xi_0) \geqslant 0,$$

так как B — положительно определенный оператор. Далее, f_1 подчинен f. Действительно, B ограничен. Следовательно, существует λ такое, что $(B\xi, \xi) \leqslant \lambda(\xi, \xi)$, т. е.

$$\lambda(\xi, \xi) - (B\xi, \xi) \geqslant 0.$$

Полагая $\xi = X_a\xi_0$, получаем:

$$\lambda(X_a^* X_a\xi_0,\ \xi_0) - (X_a^* X_a B\xi_0,\ \xi_0) \geqslant 0,$$

т. е. $\lambda f - f$ — положительный функционал; это же означает, что f_1 подчинен f.

Обратно, пусть f_1 — положительный функционал, подчиненный функционалу f. По функционалу f построим циклическое представление (§ 2). *Тогда функционалу f_1 отвечает положительно определенный оператор B, перестановочный со всеми операторами представления.*

Докажем это. Мы знаем, что пространство $\mathfrak{H}$ получается пополнением пространства $\tilde{\mathfrak{H}}$, составленного из классов эквивалентных элементов кольца R, причем скалярное произведение в $\tilde{\mathfrak{H}}$ задается формулой

$$(x, y) = f(y^*x),$$

элементы же x, для которых $(x, x) = 0$, т. е. $f(x^*x) = 0$, считаются эквивалентными нулю.

Рассмотрим в пространстве $\tilde{\mathfrak{H}}$ эрмитовскую форму $f_1(y^*x)$. Мы докажем, что f_1 есть однозначно определенная, непрерывная в $\tilde{\mathfrak{H}}$ эрмитовская билинейная форма. f_1 подчинено f. Это значит, что существует такое λ, что $\lambda f - f_1$ — положительный функционал. Таким образом, имеем:

$$\lambda f(x^*x) - f_1(x^*x) \geqslant 0,$$

следовательно,

$$0 \leqslant f_1(x^*x) \leqslant \lambda f(x^*x).$$

Это доказывает, что равенство $f(x^*x) = 0$ влечет $f_1(x^*x) = 0$. а значит, например, в силу неравенства

$$|f_1(y^*x)|^2 \leqslant f_1(x^*x) f_1(y^*y),$$

и равенство нулю выражения $f_1(y^*x)$.

Мы показали, что $f_1(y^*x)$ однозначно определена, т. е. $f_1(y^*x)=0$ для $x\sim 0$. f_1 — ограниченная билинейная форма. Действительно,

$$0\leqslant f_1(x^*x)\leqslant\lambda f(x^*x).$$

Следовательно,

$$|f_1(y^*x)|^2\leqslant f_1(x^*x)f_1(y^*y)\leqslant\lambda^2 f(x^*x)f(y^*y)=\lambda^2(x,x)(y,y).$$

В силу ее ограниченности, мы можем продолжить эту билинейную форму на пополнение $\tilde{\mathfrak{H}}$, т. е. на пространство $\mathfrak{H}$. Но ограниченной билинейной форме в $\mathfrak{H}$ отвечает ограниченный оператор B. Следовательно, существует оператор B такой, что

$$f_1(y^*x)=(Bx,\ y).$$

Докажем, что оператор B перестановочен со всеми операторами X_a представления. Для этого достаточно доказать, что

$$\left(BX_ax,\ y\right)=\left(Bx,\ X_a^*y\right).$$

Но это действительно так, ибо

$$(BX_ax,\ y)=(Bax,\ y)=f_1(y^*ax),$$

а

$$\left(Bx,X_a^*y\right)=(Bx,\ a^*y)=f_1((a^*y)^*x)=f_1(y^*ax).$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ — положительный функционал, $a\to X_a$ — отвечающее ему циклическое представление, ξ_0 — соответствующий циклический вектор, т. е.*

$$f(a)=(X_a\xi_0,\ \xi_0).$$

Тогда каждому положительному функционалу f_1, подчиненному функционалу f, отвечает положительно определенный оператор B, перестановочный со всеми X_a, причем

$$f_1(a)=(X_aB\xi_0,\ \xi_0).$$

Обратно, каждому ограниченному положительно определенному оператору B, перестановочному со всеми операторами X_a, отвечает положительный функционал, подчиненный функционалу f.

В частности, самому $f(x)$ отвечает единичный оператор. Рассмотрим теперь линейные комбинации положительных функционалов, подчиненных функционалу $f(x)$. Мы назовем их функционалами, подчиненными положительному функционалу $f(x)$. Им отвечают произвольные ограниченные операторы, перестановочные с операторами X_a представления.

Действительно, любой оператор, перестановочный с операторами X_a, можно представить как линейную комбинацию положительных. Таким образом:

В совокупность функционалов, подчиненных положительному функционалу f, мы можем ввести операцию умножения так, что она станет изоморфной кольцу операторов, перестановочных с операторами X_a представления, порожденного функционалом $f(x)$. Сам f играет при этом роль единицы кольца.

Мы превратили совокупность C_f функционалов, подчиненных функционалу f, в кольцо с инволюцией. При этом:

1° Функционалу f отвечает единица кольца.

2° Операция $*$ определена так: $f^*(x) = \overline{f(x^*)}$.

3° Умножение связано с операцией $*$ обычным требованием:

$$(f_1 f_2)^* = f_2^* f_1^*.$$

Определение 2. Положительный функционал f называется *неразложимым*, если всякий подчиненный ему функционал f_1 кратен ему, т. е. $f_1(x) = \lambda f(x)$.

Теорема 2. *Пусть f — положительный функционал. Для того чтобы отвечающее ему представление было неприводимым, необходимо и достаточно, чтобы f был неразложимым.*

Доказательство. Всякому функционалу f_1, подчиненному функционалу f, отвечает оператор, перестановочный со всеми операторами X_a представления. При этом самому функционалу f отвечает единичный оператор. Неприводимость представления эквивалентна тому, что всякий оператор B, перестановочный с операторами представления, кратен единице (теорема 1 § 1), т. е. тому, что всякий функционал f_1, подчиненный функционалу f, является кратным f.

Перейдем теперь к доказательству существования неприводимых представлений. В силу только что доказанной теоремы, для этого достаточно показать существование неразложимых положительных функционалов.

Совокупность положительных функционалов $f(x)$ таких, что $f(e) \leqslant 1$, образует выпуклое множество. В самом деле, если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ положительны и $f_1(e) \leqslant 1$, $f_2(e) \leqslant 1$, то

$$f(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) \qquad (\alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0,\ \alpha + \beta = 1)$$

удовлетворяет тем же условиям. Поэтому существование неразложимых положительных функционалов непосредственно следует из теоремы М. Крейна и Д. Мильмана ([6]). Более того, пусть x — элемент кольца такой, что $|x|_1 \neq 0$. Тогда существует положительный функционал f такой, что

$$f(x^* x) \neq 0, \qquad f(e) = 1.$$

С другой стороны, по той же теореме М. Крейна и Д. Мильмана, совокупность всех положительных функционалов f, удовлетворяющих условию $f(e) \leqslant 1$, есть наименьшее слабо замкнутое выпуклое множество, содержащее все неразложимые положительные функционалы, удовлетворяющие условию $f(e) \leqslant 1$. Поэтому существует также неразложимый функционал f_0, удовлетворяющий условиям:

$$f_0(e) \leqslant 1, \qquad f_0(x^* x) \neq 0.$$

Таким образом, доказана

Теорема 3. *Пусть x — элемент кольца $\bar{R}$ такой, что $|x|_1 \neq 0$. Тогда существует неразложимый положительный функционал f_0, удовлетворяющий условиям*:

$$f_0(e) \leqslant 1, \qquad f_0(x^* x) \neq 0. \tag{1}$$

Согласно теореме 2 этого параграфа и теореме 3 § 2, эту теорему можно сформулировать следующим образом:

Теорема 4. *Пусть x_0 — элемент кольца $\bar{R}$ такой, что $|x_0|_1 \neq 0$. Тогда существует неприводимое представление $a \to X_a$ кольца $\bar{R}$ такое, что оператор X_{x_0} в этом представлении, соответствующий элементу x_0, отличен от нуля.*

Действительно, условия (1) можно переписать в виде

$$|\xi_0| \leqslant 1, \qquad |X_{x_0} \xi_0|^2 \neq 0.$$

Последнее неравенство означает, что $X_{x_0} \neq 0$.

§ 5. Случай коммутативных колец

Вся картина становится особенно простой в том случае, когда R — коммутативное кольцо.

Лемма 1. *Если R коммутативно, то кольцо $\overline{R}$ изоморфно кольцу всех непрерывных функций $x(M)$ на некотором бикомпактном пространстве; при этом*

$$x^*(M) = \overline{x(M)}.$$

Доказательство. Кольцо $\overline{R}$ есть $*$-кольцо, т. е.

$$|x^*x|_1 = |x|_1 |x^*|_1. \tag{1}$$

В самом деле, $|x|_1 = \sup\limits_f \sqrt{f(x^*x)}$, где f — положительный функционал и $f(e) = 1$. Согласно неравенству (2) § 2, мы имеем:

$$\sup_f \sqrt{f(x^*x)} \leqslant \sqrt{|xx^*|_1};$$

итак, $|x|_1^2 \leqslant |xx^*|_1$. С другой стороны, всегда

$$|xx^*|_1 \leqslant |x|_1 |x^*|_1 = |x|_1^2,$$

так что

$$|xx^*|_1 = |x|_1^2 = |x|_1 \, |x^*|_1.$$

Согласно лемме 1 в ([2]), коммутативное кольцо, в которое введены инволюция и норма, удовлетворяющая условию (1), изоморфно кольцу всех непрерывных функций на бикомпактном множестве $\mathfrak{M}_1$. Это множество $\mathfrak{M}_1$ есть множество максимальных идеалов кольца $\overline{R}$.

Определение. Максимальный идеал M кольца R называется *симметричным*, если для любого $x \in R$ имеет место $x^*(M) = \overline{x(M)}$. Если M — максимальный идеал, то через M^* мы обозначим максимальный идеал такой, что $x^*(M^*) = \overline{x(M)}$. Легко показать, что для всякого M существует M^*. Симметричный максимальный идеал — такой, для которого $M^* = M$.

Можно доказать, что множество симметричных максимальных идеалов кольца R образует замкнутое подмножество в множестве всех максимальных идеалов кольца R.

Теорема 1. *$\bar{R}$ изоморфно кольцу всех непрерывных функций на множестве $\mathfrak{M}_1$ симметричных максимальных идеалов кольца R.*

Доказательство. Для того чтобы доказать теорему, достаточно доказать, в силу леммы 1, что множество максимальных идеалов кольца $\bar{R}$ гомеоморфно множеству симметричных максимальных идеалов кольца R.

Каждому максимальному идеалу кольца $\bar{R}$ отвечает симметричный максимальный идеал кольца R.

Действительно, пусть нам задан гомоморфизм кольца $\bar{R}$ в тело комплексных чисел. Этот гомоморфизм есть одновременно гомоморфизм кольца R', являющегося частью $\bar{R}$. Но R' есть кольцо вычетов кольца R. Поэтому этот гомоморфизм есть одновременно гомоморфизм самого R в тело комплексных чисел.

Таким образом, этим определен максимальный идеал кольца R. Этот максимальный идеал симметричен, так как все максимальные идеалы кольца $\bar{R}$ симметричны. Непрерывность соответствия между идеалами вытекает непосредственно из определения топологии в множестве максимальных идеалов [см. ([1]) § 7].

Обратно, пусть M — симметричный максимальный идеал кольца R. Рассмотрим функционал

$$f(x) = x(M).$$

Этот функционал положителен. Действительно,

$$f(x^*x) = x^*(M)\,x(M) = |x(M)|^2 \geqslant 0, \qquad f(e) = e(M) = 1.$$

Поэтому этот функционал равен нулю для элементов, для которых $|x|_1 = 0$. Кроме того, этот функционал непрерывен по норме $|x|_1$ и может быть перенесен поэтому на $\bar{R}$.

Таким образом, между симметричными максимальными идеалами M кольца R и максимальными идеалами $\bar{M}$ кольца $\bar{R}$ можно установить взаимно однозначное и непрерывное соответствие. При этом, если обозначать одной и той же буквой x элемент из R и отвечающий ему элемент из $\bar{R}$, то имеет место

Теорема 2. *Всякий положительный линейный функционал $f(x)$ на коммутативном кольце R может быть* *представлен, и притом единственным образом, в виде*

$$f(x)=\int x(M)\,d\sigma(\Delta), \tag{2}$$

где $\sigma(\Delta)$ — положительная вполне аддитивная функция множества на множестве $\mathfrak{M}_1$ симметричных максимальных идеалов кольца R.

Доказательство. Всякий положительный функционал на R можно распространить на $\overline{R}$ (замечание 3 в § 3). Он превращается тогда в положительный функционал на совокупности непрерывных функций на бикомпактном множестве $\mathfrak{M}_1$. Такой функционал записывается формулой (2), где $\sigma(\Delta)$ — положительная вполне аддитивная функция множества. Функция множества $\sigma(\Delta)$ при этом определяется однозначно.

Обратно, если $\sigma(\Delta)$ — положительная функция множества на множестве симметричных максимальных идеалов, то $f(x)$, задаваемый формулой (2), будет положительным функционалом. Действительно,

$$f(x^*x)=\int x^*(M)\,x(M)\,d\sigma(\Delta)=\int |x(M)|^2\,d\sigma(\Delta)\geqslant 0.$$

Теорема доказана.

Из формулы (2) следует, что всякий неразложимый положительный функционал имеет вид $f(x)=x(M_0)$, где M_0 — фиксированный симметричный максимальный идеал.

Доказанная нами теорема означает, собственно говоря, что каждый функционал разлагается, и притом однозначно, на положительные неразложимые далее функционалы. При этом от R мы потребовали коммутативности. Это условие является существенным, как это видно из следующей теоремы:

Теорема 3. *Пусть всякий положительный функционал, заданный на кольце R, разлагается единственным образом по неразложимым далее положительным функционалам. Тогда приведенное кольцо $\overline{R}$ коммутативно (т. е. $xy-yx$ есть элемент, эквивалентный нулю в R).*

Доказательство. Рассмотрим какое-либо неприводимое представление $a\to X_a$, где X_a — оператор в пространстве $\mathfrak{H}$. Докажем, что $\mathfrak{H}$ одномерно. Предположим противное. Тогда в $\mathfrak{H}$ существуют по крайней мере два линейно независимых вектора ξ_1 и ξ_2. Положим

$$f_1(a)=(X_a\xi_1,\ \xi_1),\qquad f_2(a)=(X_a\xi_2,\ \xi_2),$$

$$f_1'(a)=\frac{1}{2}(X_a(\xi_1+\xi_2),\quad \xi_1+\xi_2),$$

$$f_2'(a)=\frac{1}{2}(X_a(\xi_1-\xi_2),\quad \xi_1-\xi_2),$$

и пусть

$$\varphi(a)=f_1(a)+f_2(a)=f_1'(a)+f_2'(a).$$

$\varphi(a)$ — положительный функционал. По теореме 2 § 4 функционалы $f_1(a)$, $f_2(a)$, $f_1'(a)$, $f_2'(a)$ неразложимы. Поэтому $f(a)$ разлагается двумя способами на неразложимые функционалы. Эти способы различны. Действительно, векторы ξ_1, ξ_2, $\xi_1+\xi_2$, $\xi_1-\xi_2$ не пропорциональны, а с другой стороны, согласно теореме 4 § 2, в случае неприводимого представления функционалом вида $(X_a\xi,\ \xi)$ вектор ξ определяется с точностью до множителя однозначно.

Итак, всякое неприводимое представление R одномерно, т. е. коммутативно. Так как всякий элемент, переходящий при всех неприводимых представлениях в нуль, эквивалентен нулю, то $xy-yx$ эквивалентен нулю, т. е. приведенное кольцо коммутативно.

Пример. Обозначим через R_0' совокупность функций, заданных на полупрямой $0\leqslant u<\infty$, таких, что

$$\|f\|=\int_0^\infty |f(u)|\operatorname{sh}2u\,du<+\infty.$$

Определим в R_0' умножение $f=f_1\times f_2$, где $f(u)$ определяется формулой

$$f(u)=\int_0^\infty\int_{|u-t|}^{u+t} f_1(s)f_2(t)\,ds\,dt.$$

Обозначим, далее, через R_0 совокупность всех элементов вида $\lambda e+f$, где e — формально присоединенная единица, а $f\in R_0'$.

Можно проверить, что R_0 превращается при этом в нормированное кольцо.

Определим операцию $*$, положив

$$f^*(u)=\overline{f(u)}, \qquad (\lambda e+f)^*=\bar{\lambda}e+f^*.$$

Легко проверить, что мы получаем при этом коммутативное кольцо с инволюцией. Найдем максимальные идеалы этого кольца. Рассуждения при этом совершенно аналогичны тем, которые проводятся в ([5]).

Так же как и там, мы приходим к тому, что максимальные идеалы определяются гомоморфизмом

$$f \to \int_0^\infty f(s)\psi(s)\,ds,$$

где $\psi(s)$ определяется из соотношения

$$\psi(s)\psi(t)=\int_{|t-s|}^{t+s}\psi(u)\,du.$$

Решениями этого уравнения служат функции

$$\psi(s)=\frac{2\sin\rho s}{\rho},$$

где ρ — произвольное комплексное число. Для того чтобы гомоморфизм был определен для всех элементов из R_0, необходимо и достаточно, чтобы $\rho=\rho_1+i\rho_2$, где $|\rho_2|\leqslant 2$.

Итак, каждый максимальный идеал кольца определяется числом $\rho=\rho_1+i\rho_2$, где $|\rho_2|\leqslant 2$. При этом ρ и $-\rho$ определяют один и тот же максимальный идеал.

Пусть M — максимальный идеал, определяемый числом ρ. Тогда максимальный идеал M^* определяется числом $\bar{\rho}$. Следовательно, симметричные максимальные идеалы определяются из условия $\rho=\bar{\rho}$ либо $\rho=-\bar{\rho}$; таким образом, симметричные максимальные идеалы будут либо при ρ вещественном, либо при чисто мнимом. Соответствующие гомоморфизмы задаются формулами:

$$f \to \int_0^\infty f(s)\frac{2\sin\rho s}{\rho}\,d\rho,$$

где ρ вещественно, и

$$f \to \int_0^\infty f(s)\frac{2\operatorname{sh}\rho s}{\rho}\,d\rho,$$

где $0\leqslant\rho\leqslant 2$.

§ 6. Групповые кольца

Как частный случай изучавшихся ранее колец мы рассмотрим так называемые групповые кольца. Это даст нам возможность получить некоторые результаты, относящиеся к представлениям групп.

Пусть G — локально бикомпактная группа. Для простоты изложения мы будем предполагать, что правая и левая инвариантные меры Хаара на G совпадают между собой.

Рассмотрим кольцо R', элементами которого служат абсолютно интегрируемые функции $x(g)$ на группе.

Умножение задается формулой

$$x_1 \times x_2 = \int x_1(gg_1^{-1}) x_2(g_1)\, dg_1.$$

Инволюция определяется равенством

$$x^*(g) = \overline{x(g^{-1})}.$$

Норма $|x|$ элемента x полагается равной

$$|x| = \int |x(g)|\, dg.$$

К этому кольцу добавим формально единицу (если группа недискретна), так что окончательно элементы кольца изображаются символом $\lambda e + x$, где e — формально присоединенная единица. При этом умножение, естественно, задается формулой

$$(\lambda_1 e + x_1)(\lambda_2 e + x_2) = \lambda_1\lambda_2 e + (\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1 + \lambda_1\lambda_2 x_1 x_2),$$

а инволюция и норма распространяются так: мы полагаем

$$|\lambda e + x| = |\lambda| + |x|, \qquad (\lambda e + x)^* = \bar{\lambda} e + x^*.$$

Полученное кольцо обозначим через R и назовем *групповым кольцом группы G.*

Теорема 1. *Каждому представлению $a + \lambda e \to X_a + \lambda E$ группового кольца отвечает непрерывное унитарное представление $g \to T_g$ группы. Обратно, каждому измеримому унитарному представлению группы отвечает представление $a \to X_a$ группового кольца. Эти представления связаны между собой формулами*

$$X_a = \int a(g)\, T_g\, dg.$$

Докажем теорему для циклического представления. Такое представление, как мы знаем (§ 2), может быть реализовано следующим образом: пространство $\mathfrak{H}$ получается пополнением пространства $\tilde{\mathfrak{H}}$, векторами в котором служат элементы $x, y, \ldots$ из R (рассматриваемые с точностью до эквивалентности). Скалярное произведение задается формулой

$$f(y^*x) = (x, y),$$

где f — некоторый положительный функционал. Элементу a отвечает оператор X_a: $X_a x = ax$. Мы доказали, что при этом $|X_a| \leqslant |a|$. Элементу g_0 группы G мы поставим в соответствие оператор $T_{g_0}x = y$, где функция $y(g) = x(g_0^{-1}g)$.

Докажем, что этот оператор унитарный. Заметим, что имеет место следующее равенство для элементов из R:

$$(T_{g_0}y)^* T_{g_0}x = y^*x.$$

Действительно,

$$y^*x = \int \overline{y(g_1g^{-1})}\, x(g_1)\, dg.$$

Поэтому скалярные произведения при применении T_{g_0} не меняются. Так как, сверх того, оператор T_g отображает наше множество функций на себя, то ясно, что продолженный на всё $\mathfrak{H}$ оператор T_{g_0} будет унитарным. Покажем, что представление $g \to T_g$ группы G непрерывно. Заметим для этого, что функционал f (как и всякий положительный функционал) непрерывен; с другой стороны,

$$|T_{g_0}x - x| = \int |T_{g_0}x - x|\, dg \to 0 \quad \text{при } g_0 \to e,$$

следовательно,

$$f((T_{g_0}x - x)^* (T_g x - x)) \to 0 \quad \text{при} \quad g_0 \to e.$$

Это означает, что

$$(T_{g_0}x - x,\ T_{g_0}x - x) \to 0 \quad \text{при} \quad g_0 \to e.$$

Этим доказана непрерывность в единице группы, а следовательно и в любой другой точке.

Нам осталось показать, что порожденное представлением $g \to T_g$ представление кольца будет тем, из которого мы исходили.

Пусть $a(g)$ — абсолютно интегрируемая функция. При представлении кольца R ей отвечает оператор $Ax = a \times x$. Наша цель — доказать, что

$$Ax = \int a(g)\, T_g x\, dg,$$

или в скалярных произведениях:

$$(Ax,\ y) = \int a(g)(T_g x,\ y)\, dg,$$

т. е.

$$f(y^* a x) = \int a(g) f(y^* T_g x)\, dg.$$

Ввиду непрерывности функционала f и операции T_g мы можем правую часть равенства переписать так:

$$f\left(y^* \int a(g) T_g x\, dg\right) = f(y^* a x).$$

Наше утверждение доказано.

Мы доказали, что всякому представлению группового кольца отвечает представление группы. Легко показать обратное. В самом деле, пусть дано унитарное представление группы: $g \to T_g$.

Предположим, что функция T_g слабо непрерывна, т. е. $(T_g \xi,\ \eta)$ — непрерывная функция от g для всяких ξ и η. Положим

$$A = \int a(g)\, T_g\, dg.$$

Этот оператор существует, если только функция $a(g)$ интегрируема. Мы получаем представление группового кольца. Легко видеть, что ему, обратно, отвечает представление T_g, если только представление циклично *).

Сделаем еще одно замечание по поводу доказательства теоремы. При построении T_g мы использовали не представление расширенного кольца R, а лишь представление исходного

*) В случае сепарабельного пространства $\mathfrak{H}$ этот результат можно усилить. Именно, из предыдущих рассуждений следует, что если функция $(T_g \xi,\ \eta)$ измерима для всех $\xi,\ \eta \in \mathfrak{H}$, то почти всюду на G представление $g \to T_g$ совпадает с некоторым непрерывным представлением.

кольца R' без присоединенной единицы. Поэтому так как пространство $\mathfrak{H}$ строилось путем пополнения пространства $\tilde{\mathfrak{H}}$, составленного из элементов кольца R, то нужно показать, что нерасширенное кольцо R' приведет нас к тому же самому пространству $\mathfrak{H}$. Для этого докажем, что элемент e есть предел в смысле введенного скалярного произведения элементов x кольца R'.

Отнесем каждой окрестности V единицы группы G функцию $e_V(g)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$e_V(g) \geqslant 0; \qquad e_V(g) = 0, \text{ если } g \notin V;$$

$$e_V(g^{-1}) = e_V(g); \qquad \int e_V(g)\,dg = 1.$$

Такую систему функций назовем *единичной системой*. Легко показать, что единичная система обладает следующим свойством:

$$|x \times e_V - x| \to 0 \quad \text{при} \quad V \to e$$

(предел понимается по частично упорядоченной системе окрестностей, заданной в смысле их естественного упорядочения). Имеем:

$$f(e_V x) \to f(x) \quad \text{для любого } x \in R,$$

т. е. $(e_V, x) \to (e, x)$ для любого x. Так как, кроме того,

$$(e_V, e_V) = f(e_V e_V) \leqslant f(e) |e_V e_V| = f(e),$$

т. е. длины векторов e_V ограниченны, то e_V слабо сходятся. Обозначим этот слабый предел через ξ_0. Мы будем иметь

$$(\xi_0, x) = (e, x) \quad \text{для любого} \quad x \in R.$$

В частности,

$$(e_V, \xi_0) = (e_V, e) = f(e_V),$$

и потому $f(e_V)$ имеет предел. Таким образом отщепляется вектор $\xi_0 - e$, ортогональный ко всем элементам x. Он для представления не существен, так как в этом одномерном пространстве каждый элемент x дает нам нулевой оператор.

Отбрасывая это одномерное пространство, мы получаем требуемый результат. Для того чтобы не было этого «паразитического» одномерного подпространства, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{V \to e} f(e_V) = f(e).$$

Применяя теорему 4 § 4 к групповому кольцу R и пользуясь только что доказанной теоремой 1, мы получим основной результат И. М. Гельфанда и Д. А. Райкова в ([4]) о полноте системы неприводимых представлений локально бикомпактной группы.

Пользуясь выражением (6) § 2 для положительного функционала и теоремой 1 этого параграфа, получаем, что всякий положительный функционал в групповом кольце R определяется формулой

$$f(\lambda e + a) = \lambda C + \int a(g)(T_g \xi, \xi)\, dg,$$

где $g \to T_g$ — непрерывное унитарное представление группы G, а функция $\varphi(g) = (T_g \xi, \xi)$ является непрерывной положительно определенной функцией на группе G [см. ([4])].

Обратно, всякой ограниченной измеримой положительно определенной функции $\varphi(g)$ отвечает положительный функционал в групповом кольце, определенный формулой

$$f(a) = \int a(g)\, \varphi(g)\, dg.$$

Отсюда, в частности, следует, что всякая ограниченная измеримая положительно определенная функция почти всюду на G совпадает с некоторой непрерывной положительно определенной функцией [см. ([4])].

Положительно определенные функции послужили отправным пунктом в ([4]) при построении унитарных представлений локально бикомпактной группы.

§ 7. Пример несимметричного группового кольца

Как известно, групповое кольцо компактной или коммутативной группы симметрично [см. ([7])]. Оказывается, однако, что для локально компактной группы это, вообще говоря, уже неверно.

Приведем пример локально компактной группы, групповое кольцо которой несимметрично.

Пусть G — группа комплексных матриц второго порядка с определителем, равным единице. Обозначим через $\mathfrak{H}$ ее подгруппу, состоящую из унитарных матриц.

Двусторонним смежным классом группы G по подгруппе $\mathfrak{H}$ называется, как известно, совокупность элементов вида h_1gh_2, где g фиксирован, а h_1 и h_2 пробегают всё $\mathfrak{H}$. Так как подгруппа $\mathfrak{H}$ компактна, то множество элементов вида h_1gh_2 имеет конечную меру, как только множество элементов g имеет конечную меру.

Рассмотрим совокупность R_0' функций $f(g)$, суммируемых и постоянных на двусторонних смежных классах G по $\mathfrak{H}$. Совокупность R_0 элементов вида $\lambda e+f$, $f\in R_0'$, образует подкольцо группового кольца R. Действительно, пусть $f_1(g)$ и $f_2(g)$ принадлежат R_0'. Надо доказать, что функция $f=f_1\times f_2$ также принадлежит R, т. е. постоянна на двусторонних смежных классах G по $\mathfrak{H}$. Но

$$f(gh)=\int f_1(ghg_1^{-1})f_2(g_1)\,dg_1=$$

$$=\int f_1(gg_2^{-1})f_2(g_2h)\,dg_2=\int f_1(gg_2^{-1})f_2(g_2)\,dg_2=f(g)$$

и аналогично $f(hg)=f(g)$ для всех $h\in\mathfrak{H}$.

Кольцо R_0 коммутативно. Действительно, мера Хаара на G инвариантна относительно преобразования $g\to g^{-1}$, и потому, если f_1 и $f_2\in R_0'$, имеем:

$$\int f_1(hg^{-1})f_2(g)\,dg=\int f_1(g^{-1})f_2(gh)\,dg=$$

$$=\int f_1(g^{-1})f_2(hg)\,dg=\int f_2(hg^{-1})f_1(g)\,dg$$

для всех $h\in\mathfrak{H}$.

Для того чтобы доказать, что групповое кольцо несимметрично, докажем сначала, что R_0 несимметрично.

Займемся поэтому более детально кольцом R_0. Каждая матрица g может быть представлена в виде $g=ha$, где h — унитарная, а a — положительно определенная эрмитова матрица. Всякая эрмитова матрица может быть записана в виде $a=h_1\delta h_1^{-1}$, где h_1 — унитарная, а δ — диагональная матрица.

Ввиду унимодулярности группы δ имеет вид

$$\delta = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \lambda > 0.$$

Таким образом, в каждом классе G по $\mathfrak{H}$ имеется диагональная матрица $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$, причем легко видеть, что в каждом классе вместе с матрицей $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ имеется также матрица $\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ и сверх этого никаких других диагональных матриц нет.

Итак, каждый двусторонний класс характеризуется числом λ, причем λ и λ^{-1} определяют один и тот же класс. Нам удобнее вместо λ рассматривать $t = \ln \lambda$. Тогда t и $-t$ определяют один и тот же класс.

Таким образом, функции из R_0, т. е. постоянные на двусторонних классах, мы можем рассматривать как четные функции от t.

Найдем теперь закон умножения и норму в R_0. Для этого заметим, что пространство левых смежных классов G по $\mathfrak{H}$ есть совокупность положительно определенных матриц с определителем, равным единице. Преобразования левых классов сводятся при этом к преобразованию соответствующих квадратичных форм.

Можно показать, далее, что эта группа преобразований есть группа преобразований трехмерного пространства Лобачевского; при этом точкам пространства Лобачевского взаимно однозначно соответствуют левые смежные классы. Двусторонний смежный класс есть совокупность левых классов; поэтому ему отвечает множество точек в пространстве Лобачевского. Для того чтобы найти это множество, заметим следующее: элементы нашей группы мы можем рассматривать как преобразования левых смежных классов, состоящие в умножении каждого из классов справа на данный элемент g группы. При этом элементы из $\mathfrak{H}$, и только они, оставляют единичный класс инвариантным.

Таким образом, подгруппа $\mathfrak{H}$ состоит из движений пространства Лобачевского, оставляющих на месте фиксированную точку пространства.

Так как двусторонний смежный класс получается из левого умножением справа на все элементы из $\mathfrak{H}$, то в пространстве

Лобачевского ему соответствует сфера с центром в фиксированной точке.

Таким образом, функции на группе, постоянной на двусторонних классах, отвечает функция в пространстве Лобачевского, постоянная на сферах с фиксированным центром. При этом интеграл функции по группе лишь постоянным множителем отличается от интеграла функции, соответствующей ей в пространстве Лобачевского. Следовательно, норма такой функции равна $\int |f(\bar{g})|\, d\bar{g}$, где $d\bar{g}$ — элемент объема в пространстве Лобачевского. Если обозначить через t радиус сферы, то норма такой функции равна $\int\limits_0^\infty |f(t)|\,\varphi(t)\,dt$, где $\varphi(t)$ — площадь поверхности сферы.

Перейдем теперь к вычислению закона умножения функций $f(t)$, отвечающего свертке функций на группе. Для того чтобы не вычислять произведения непосредственно, воспользуемся следующими соображениями.

Максимальные идеалы коммутативного кольца задаются гомоморфизмами

$$f \to \int\limits_0^\infty f(t)\,\alpha_\rho(t)\,\varphi(t)\,dt,$$

где $\alpha_\rho(t)$ — так называемые сферические функции данной группы. В работе ([3]) эти функции вычислены. Они равны $\frac{2\sin\rho t}{\rho\,\mathrm{sh}\,2t}$. При этом каждому ρ отвечает свой гомоморфизм, т. е. свой максимальный идеал. При гомоморфизме произведение функций переходит в произведение чисел. Поэтому, если $f = f_1 \times f_2$, то

$$\int f(u)\,\alpha_\rho(u)\,\varphi(u)\,du = \int f_1(u)\,\alpha_\rho(u)\,du \cdot \int f_2(u)\,\alpha_\rho(u)\,du.$$

Для того чтобы выразить f через f_1 и f_2, положим

$$\left.\begin{aligned} \tilde{f}_1(u) = f_1(u)\frac{\varphi(u)}{\mathrm{sh}\,2u}, \quad \tilde{f}_2(u) = f_2(u)\frac{\varphi(u)}{\mathrm{sh}\,2u}, \\ \tilde{f}(u) = f(u)\frac{\varphi(u)}{\mathrm{sh}\,2u}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Тогда гомоморфизм задается формулой

$$f \to \int_0^\infty \tilde{f}(u)\, \frac{2 \sin \rho u}{\rho}\, du.$$

Мы сумеем удовлетворить условию (1), если положим

$$\tilde{f}(u) = \int_0^\infty \left(\int_{|t-u|}^{t+u} \tilde{f}_1(s)\tilde{f}_2(t)\, ds \right) dt.$$

Действительно, обозначим

$$\int_0^\infty \left(\int_{|t-u|}^{t+u} \tilde{f}_1(s)\tilde{f}_2(t)\, ds \right) dt$$

через $g(u)$. Тогда

$$\int_0^\infty g(u) \frac{2 \sin \rho u}{\rho}\, du =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \left(\int_{|t-u|}^{t+u} \tilde{f}_1(s)\tilde{f}_2(t)\, ds \right) dt \right) \frac{2 \sin \rho u}{\rho}\, du =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \tilde{f}_1(s) \left(\int_{|s-t|}^{s+t} \frac{2 \sin \rho u}{\rho}\, du \right) ds \right) \tilde{f}_2(t)\, dt =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \tilde{f}_1(s) \frac{4 \sin \rho s \sin \rho t}{\rho^2}\, ds \right) \tilde{f}_2(t)\, dt =$$

$$= \int_0^\infty \tilde{f}_1(s) \frac{2 \sin \rho s}{\rho}\, ds \int_0^\infty \tilde{f}_2(t) \frac{2 \sin \rho t}{\rho}\, dt,$$

т. е.

$$\int_0^\infty g(u) \frac{2 \sin \rho u}{\rho}\, du = \int_0^\infty \tilde{f}(u) \frac{2 \sin \rho u}{\rho}\, du.$$

В силу полноты системы функций $\sin \rho u$, отсюда следует, что $g(u) = \tilde{f}(u)$. Найдем теперь все максимальные идеалы нашего кольца. Будем для этого в дальнейшем элементы кольца отмечать функциями $\tilde{f}(u)$. Через функцию $\tilde{f}$ норма выражается формулой

$$\int_0^\infty |\tilde{f}(u)| \operatorname{sh} 2u \, du,$$

так как

$$\int_0^\infty |f(u)| \varphi(u) \, du = \int_0^\infty \frac{|f(u)|}{\operatorname{sh} 2u} \varphi(u) \cdot \operatorname{sh} 2u \, du =$$

$$= \int_0^\infty |\tilde{f}(u)| \operatorname{sh} 2u \, du.$$

Поэтому введенное здесь кольцо изоморфно кольцу, рассмотренному в § 5. В том же параграфе были рассмотрены максимальные идеалы кольца R_0. Они задавались формулой

$$\int_0^\infty \tilde{f}(u) \frac{2 \sin \rho u}{\rho} \, du,$$

где ρ — комплексное число $\rho = \rho_1 + i\rho_2$, причем $|\rho_2| \leqslant 2$.

Примечание. Отсюда следует, между прочим, что остальные сферические функции, отвечающие данной группе, задаются формулой $\frac{2 \operatorname{sh} \rho u}{\rho \operatorname{sh} 2u}$, $0 \leqslant \rho \leqslant 2$.

Так как переходу от элемента f к f^* отвечает замена $\tilde{f}(u)$ на $\bar{\tilde{f}}(u)$, то ясно, что в кольце есть несимметричные максимальные идеалы и, следовательно, кольцо несимметрично.

Покажем теперь, что групповое кольцо R_0 несимметрично. Для этого заметим, что если элемент $f + \lambda e$ принадлежит подкольцу R_0 и имеет обратный, то этот обратный также принадлежит R_0.

Действительно, пусть элемент $\varphi + e$ кольца R есть обратный элемента $f + e \in R_0$. Докажем, что $\varphi + e \in R_0$, т. е. что функция $\varphi(g)$ постоянна на двусторонних смежных классах по $\mathfrak{H}$. Мы имеем:

$$(f+e)\times(\varphi+e)=e.$$

Отсюда

$$\varphi=-f-f\times\varphi,$$

т. е.

$$\varphi(g)=-f(g)-\int f\left(gg_1^{-1}\right)\varphi(g_1)\,dg_1.$$

Но тогда при $h\in\mathfrak{H}$

$$\varphi(hg)=-f(hg)-\int f\left(hgg_1^{-1}\right)\varphi(g_1)\,dg_1=$$
$$=-f(g)-\int f\left(gg_1^{-1}\right)\varphi(g_1)\,dg_1=\varphi(g),$$

ибо $f\in R_0'$. Таким образом, функция $\varphi(g)$ инвариантна при левом сдвиге на $h\in\mathfrak{H}$. Аналогично, пользуясь равенством

$$(\varphi+e)\times(f+e)=e,$$

докажем ее инвариантность при правом сдвиге. Следовательно,

$$\varphi\in R_0',\quad \varphi+e\in R_0.$$

Пусть теперь $x\in R_0$ и $(e+x^*x)^{-1}$ не существует в R_0'. Такой элемент x найдется, так как R_0 несимметрично. Но тогда $(e+x^*x)^{-1}$ не существует также и в R. Несимметричность группового кольца R доказана.

В работе ([9]) показано, что в коммутативных локально бикомпактных группах имеет место теорема Бёрлинга. Приведенный выше пример показывает, что в некоммутативных локально бикомпактных группах эта теорема, вообще говоря, не имеет места.

Пусть R — нормированное кольцо с инволюцией. Будем говорить, что в R имеет место обобщенная теорема Бёрлинга, если для всякого линейного функционала $f(x)$ в кольце R существует неразложимый положительный функционал, который является слабой предельной точкой функционалов $f(xa)$, $a\in R$.

Теорема. *Для того чтобы в кольце R имела место обобщенная теорема Бёрлинга, необходимо и достаточно, чтобы R было симметричным кольцом.*

Доказательство необходимости. Пусть R — несимметричное кольцо. Тогда существует элемент x_0 такой, что $(e+x_0^*x_0)^{-1}$ не существует. Следовательно, $e+x_0^*x_0$ принадлежит хотя бы одному максимальному правому идеалу I_r кольца R. Так как $e \notin I_r$, то существует линейный функционал $f(x)$ такой, что $f(e)=1$, $f(x)=0$ для всех $x \in I_r$. Так как при $x \in I_r$, $a \in R$ также $xa \in I_r$, то $f(xa)=0$ для всех $x \in I_r$. Поэтому и всякая слабая предельная точка $f_0(x)$ функционалов $f_a(x)=f(xa)$ обращается в нуль на I_r. По предположению, теорема Бёрлинга имеет место, т. е. среди этих предельных точек есть положительный нормированный неразложимый функционал $f_0(x)$. Следовательно, и этот функционал обращается в нуль на I_r. В частности,

$$f_0(e+x_0^*x_0)=0,$$

т. е.

$$1+f(x_0^*x_0)=0,$$

что невозможно, ибо $f(x_0^*x_0) \geqslant 0$.

Доказательство достаточности. Пусть $f(x)$ — некоторый линейный функционал. Обозначим через I_r совокупность всех элементов $x \in R$ таких, что $f(xa)=0$ для всех $a \in R$. Очевидно, I_r — правый идеал в кольце R; согласно ([7]) (см. также ([2])), существует положительный функционал $f_1(x)$ такой, что

$$f_1(e)=1, \quad f_1(xx^*)=0 \quad \text{для} \quad x \in I_r. \tag{2}$$

Совокупность всех функционалов, удовлетворяющих этим условиям, есть слабо замкнутое ограниченное выпуклое множество в сопряженном к R пространстве. Согласно теореме Крейна — Мильмана ([6]), это выпуклое множество содержит хотя бы одну крайнюю точку f_0; f_0 есть неразложимый положительный функционал, удовлетворяющий условиям (2). Отсюда следует, что $f_0(x)=0$ для всех $x \in I_r$, т. е. $f_0(x)$ есть слабая предельная точка функционалов $f_0(xa)$.

Нетрудно показать, что если теорема Бёрлинга в формулировке (9) имеет место в группе, то в групповом кольце имеет место обобщенная теорема Бёрлинга. Интересно выяснить, имеет ли место обратное.

Из сказанного выше следует, что *в унимодулярной группе второго порядка теорема Бёрлинга не имеет места*. Рассуждения, аналогичные рассуждениям этого параграфа, показывают, что *в любой комплексной полупростой группе Ли теорема Бёрлинга также не имеет места*. Это связано с наличием так называемой дополнительной серии представлений этих групп. (Ср. примечание на стр. 312.)

Примечание. Некоторые из результатов этой работы были независимо получены I. E. Segal'ом (см. Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), 73—88).

ЛИТЕРАТУРА

(1) Gelfand I., Normierte Ringe. Матем. сб. 9 (51) : 1 (1941), 3—66

(2) Gelfand I. and Neumark M., On the imbedding of normed. rings into the ring of operators in Hilbert space, Матем. сб. **12** (54) : 2 (1943), 197—217.

(3) Гельфанд И. М. н Наймарк М. А., Уннтарные представлення группы Лоренца. Изв. АН СССР, сер. матем., **11** (1947), 411—504.

(4) Гельфанд И. М. н Райков Д. А., Неприводимые унитарные представления локально бикомпактных групп. Матем. сб. **13** (55) : 2—3 (1943), 301—316.

(5) Гельфанд И. М., Райков Д. А. н Шилов Г. Е., Коммутативные нормированные кольца. Успехи матем. наук **1**, вып. 2 (12) (1946), 48—146.

(6) Krein M. and Milman D., On extreme points of regular convex sets. Studia math. **IX** (I) (1940), 133—138.

(7) Райков Д. А., К теории нормированных колец с инволюцией. Докл. АН СССР **54**, 5 (1946), 391—394.

(8) Neumann J., Über adjungierte Funktionaloperatoren, Ann. Math. **33** (1932), 294—310.

(9) Godement, Extension à un groupe abélien quelconque des théorèmes taubériens N. Wiener et d'un théorème de A. Beurling, Compt. rend. Acad. Sci. Paris (1946), 16—18.