ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

ВЫПУСК 3

И. М. ГЕЛЬФАНД и Г. Е. ШИЛОВ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1958

11-5-4

АННОТАЦИЯ

Настоящий выпуск посвящен приложениям теории обобщенных функций к двум классическим задачам анализа: к задаче о разложении по собственным функциям дифференциальных операторов и к задаче Коши для уравнений в частных производных. Выпуск рассчитан в основном на математиков, хотя его могут читать и специалисты в смежных науках. Для его чтения необходимо знакомство с определениями и результатами второго выпуска.

Гельфанд Израиль Моисеевич и *Шилов Георгий Евгеньевич.*
Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений

Редакторы: *М. С. Агранович* и *Л. А. Стебакова.*
Техн. редактор *В. Н. Крючкова.* Корректор *М. М. Шулименко.*

Сдано в набор 17/II 1958 г. Подписано к печати 1/VII 1958 г.
Бумага 84×108/32. Физ. печ. л 8,62. Условн. печ. л. 14,15. Уч.-изд. л. 14,13.
Т-03982. Тираж 8000 экз. Цена книги 9 р. 05 к. Заказ № 2918.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящем, третьем выпуске серии «Обобщенные функции» аппарат обобщенных функций применяется к исследованию следующих проблем теории дифференциальных уравнений с частными производными: проблемы о классах единственности и о классах корректности решения задачи Коши для систем с постоянными (или зависящими только от времени) коэффициентами и проблемы о разложении самосопряженных дифференциальных операторов по собственным функциям.

Авторы предполагают в следующих выпусках рассмотреть краевые задачи для эллиптических уравнений, задачу Коши для уравнений с переменными коэффициентами и для квазилинейных уравнений, а также задачи, связанные с выходом в комплексную область по всем аргументам.

Авторы пользуются случаем поблагодарить участников семинара МГУ по обобщенным функциям и дифференциальным уравнениям, где неоднократно обсуждались различные параграфы этого выпуска, в особенности В. М. Борок, Я. И. Житомирского, Г. Н. Золотарева, А. Г. Костюченко. Авторы благодарны также И. И. Шулишовой, составившей подробные указатели к первым трем выпускам, и М. С. Аграновичу, тщательно отредактировавшему весь текст и своей критикой много способствовавшему его улучшению.

ГЛАВА I

ПРОСТРАНСТВА ТИПА *W*

В этой главе излагается теория основных пространств типа W, которые, как и пространства типа S (выпуск 2, гл. IV), понадобятся нам в гл. II и III настоящей части при изучении задачи Коши. Излагаемые в этой главе результаты были приведены без доказательств в добавлении 2 к гл. IV 2-го выпуска.

Пространства типа W аналогичны пространствам типа S, соответствующим значениям $\alpha < 1$ и $\beta < 1$, но благодаря привлечению произвольных выпуклых функций вместо степенных функций способны точнее улавливать особенности роста (или убывания) на бесконечности.

Так же как и для пространств типа S, изложение для простоты ведется сначала для случая одного независимого переменного. Изменения, которые необходимо произвести при переходе к случаю нескольких независимых переменных, указываются ниже в § 4.

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Пространства W_M. Пусть $\mu(\xi)$ $(0 \leqslant \xi < \infty)$ — возрастающая непрерывная функция, причем $\mu(0) = 0$, $\mu(\infty) = \infty$. Положим для $x \geqslant 0$

$$M(x) = \int_0^x \mu(\xi)\, d\xi. \qquad (1)$$

Функция $M(x)$ — возрастающая выпуклая книзу непрерывная функция, причем $M(0) = 0$, $M(\infty) = \infty$. Поскольку $\mu(\xi)$ возрастает вместе с ξ, возрастает и ее средняя ордината

$\frac{1}{x} M(x)$, так что для любых положительных x_1 и x_2

$$\frac{1}{x_1} M(x_1) \leqslant \frac{1}{x_1+x_2} M(x_1+x_2),$$
$$\frac{1}{x_2} M(x_2) \leqslant \frac{1}{x_1+x_2} M(x_1+x_2).$$

Умножая первое неравенство на x_1, второе на x_2 и складывая, получим основное неравенство (неравенство выпуклости)

$$M(x_1)+M(x_2) \leqslant M(x_1+x_2). \tag{2}$$

В частности, для любого $x \geqslant 0$

$$2M(x) \leqslant M(2x). \tag{3}$$

Определим, далее, для отрицательных x функцию $M(x)$ равенством

$$M(-x) = M(x).$$

Отметим, что поскольку производная $\mu(x)$ функции $M(x)$ при $x \to +\infty$ неограниченно возрастает, сама *функция* $M(x)$ *при* $|x| \to \infty$ *возрастает быстрее любой линейной функции*.

Обозначим через W_M совокупность всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|\varphi^{(q)}(x)| \leqslant C_q e^{-M(ax)} \tag{4}$$

с постоянными C_q и a, которые могут зависеть от функции φ.

Так как функция $M(x)$ возрастает быстрее любой линейной функции, то $e^{-M(ax)}$ убывает быстрее любой экспоненты (т. е. функции вида $e^{-a|x|}$); таким образом, основные функции $\varphi(x)$, принадлежащие пространству W_M, так же как и все их производные, убывают на бесконечности быстрее любой экспоненты.

Очевидно, что W_M есть линейное пространство (с обычными операциями). Введем в это пространство следующее определение сходимости: последовательность $\varphi_\nu(x)$ называется *сходящейся к нулю*, если, во-первых, функции $\varphi_\nu(x)$ и их производные любого порядка сходятся к нулю равномерно на любом конечном отрезке оси x (такая сходимость называется *правильной сходимостью*) и, во-вторых, справедливы оценки

$$|\varphi_\nu^{(q)}(x)| \leqslant C_q e^{-M(ax)}, \tag{5}$$

где постоянные C_q и a не зависят от ν.

Покажем, что пространство W_M может быть представлено как объединение счетно-нормированных пространств.

Обозначим через $W_{M,a}$ совокупность тех функций пространства W_M, для которых справедливы неравенства

$$|\varphi^{(q)}(x)| \leqslant C_q e^{-M(\bar{a}x)},$$

где постоянную $\bar{a}$ можно брать любую, меньшую, чем a. Иначе говоря, $W_{M,a}$ состоит из тех функций $\varphi(x)$, которые при любом $\delta > 0$ удовлетворяют неравенствам

$$|\varphi^{(q)}(x)| \leqslant C_{q\delta} e^{-M[(a-\delta)x]} \qquad (q=0, 1, 2, \ldots).$$

Положим

$$M_p(x) = e^{M\left[a\left(1-\frac{1}{p}\right)x\right]} \quad (p=2, 3, \ldots). \tag{6}$$

Функции $M_p(x)$ образуют возрастающую последовательность $M_p(x) \leqslant M_{p+1}(x)$), и функции $\varphi(x) \in W_{M,a}$ могут быть охарактеризованы как бесконечно дифференцируемые функции, для которых выражение

$$\|\varphi\|_p = \sup_{\substack{x \\ |q| \leqslant p}} M_p(x)\,|\varphi^{(q)}(x)| \tag{7}$$

конечно при любом p. Это показывает, что пространство $W_{M,a}$ совпадает с пространством $K\{M_p\}$, определенным в § 1 гл. II вып. 2, с фиксированной последовательностью весовых функций (6). Поэтому к пространству $W_{M,a}$ можно применить все результаты, относящиеся к общим пространствам $K\{M_p\}$. С нормами (7) оно является полным счетно-нормированным пространством. Проверим, что оно является и совершенным пространством. Условие (P), достаточное для совершенства пространства $K\{M_p\}$ (вып. 2, гл. II, § 2), как мы помним, состоит в том, что для любого номера p можно найти номер $p' > p$, при котором

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{M_p(x)}{M_{p'}(x)} = 0.$$

В нашем случае при любом $p' > p$, в силу неравенства выпуклости,

$$M\left[a\left(1-\frac{1}{p}\right)x\right]+M\left[a\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)x\right]\leqslant M\left[a\left(1-\frac{1}{p'}\right)x\right],$$

и следовательно,

$$\frac{M_p(x)}{M_{p'}(x)}=e^{+M\left[\left(1-\frac{1}{p}\right)ax\right]-M\left[\left(1-\frac{1}{p'}\right)ax\right]}\leqslant e^{-M\left[\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)ax\right]}\to 0,$$

что и требуется.

В соответствии с результатами § 2 гл. II вып. 2 последовательность $\varphi_\nu(x)\in W_{M,a}$ сходится к нулю тогда и только тогда, когда последовательность $\varphi_\nu(x)$ правильно сходится к нулю (т. е. функции $\varphi_\nu^{(q)}(x)$ при любом q равномерно сходятся к нулю на любом отрезке $|x|\leqslant x_0<\infty$) и нормы $\|\varphi_\nu\|_p$ ограничены при любом p.

Объединение пространств $W_{M,a}$ по всем индексам $a=1, \frac{1}{2}, \ldots$, очевидно, совпадает с пространством W_M. Сходимость к нулю в пространстве W_M, описанная выше, есть сходимость к нулю в одном из пространств $W_{M,a}$ и поэтому есть та самая сходимость, которая определяется в W_M как в объединении счетно-нормированных пространств.

Приведем определение ограниченных множеств в пространстве W_M. В соответствии с общим определением ограниченного множества в объединении счетно-нормированных пространств множество $A\subset W_M$ называется *ограниченным*, если оно целиком лежит в одном из $W_{M,a}$ и в нем ограничено. Иными словами множество $A\subset W_M$ ограничено, если для всех функций $\varphi(x)\in A$ справедливы оценки (4) с одними и теми же постоянными C_q и a. В частности, последовательность $\varphi_\nu(x)\in W_M$ является сходящейся к нулю, если она: 1) правильно сходится к нулю, 2) ограничена.

Пример 1. Пусть $M(x)=x^{1/\alpha}$ $(x>0)$, где $\alpha<1$; $\mu(\xi)=\frac{1}{\alpha}\xi^{\frac{1}{\alpha}-1}$. Соответствующее пространство W_M состоит из функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|\varphi^{(q)}(x)|\leqslant C_q e^{-a|x|^{1/\alpha}}$$

при некоторых C_q и A, зависящих от φ. Это пространство, очевидно, совпадает с пространством S_α (§ 1 гл. IV вып. 2).

Пример 2. Положим $\mu(\xi)=\ln(\xi+1)$ $(\xi\geqslant 0)$; тогда для $x\geqslant 0$

$$M(x)=\int_0^x \ln(\xi+1)\,d\xi=(x+1)\ln(x+1)-x.$$

В соответствии с определением пространство W_M состоит из функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|\varphi^{(q)}(x)|\leqslant C_q e^{-a[(|x|+1)\ln(|x|+1)-|x|]}.$$

Впрочем, в данном случае функции $\varphi(x)$ допускают и более простое описание. Оно может быть получено из следующих общих соображений.

Формально говоря, пространство W_M можно было бы строить по любой непрерывной неотрицательной функции $M(x)$ (не интересуясь тем, имеет ли она специальный вид (1); мы позднее используем этот ее специальный вид), согласно определению (4). При этом различным функциям $M_1(x)$ и $M_2(x)$ может отвечать одно и то же пространство $W_{M_1}\equiv W_{M_2}$. Укажем простое достаточное условие для выполнения этого равенства. Допустим, что функции $M_1(x)$ и $M_2(x)$ при достаточно больших $x\geqslant 0$ удовлетворяют неравенству

$$M_1(\gamma_1 x)\leqslant M_2(\gamma_2 x) \qquad (8)$$

с некоторыми положительными постоянными γ_1 и γ_2. Тогда мы можем утверждать, что имеет место включение

$$W_{M_1}\supset W_{M_2}.$$

Действительно, вместо (8) можно написать неравенство, справедливое для всех значений $x\geqslant 0$, если добавить подходящую постоянную:

$$M_1(\gamma_1 x)\leqslant M_2(\gamma_2 x)+\gamma_3.$$

Отсюда, если $\varphi(x)\in W_{M_2}$, мы имеем:

$$|\varphi^{(q)}(x)|\leqslant C_q e^{-M_2(ax)}\leqslant C'_q e^{-M_1(a'x)}, \qquad (9)$$

где $a'=a\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$, $C'_q=C_q e^{\gamma_3}$; таким образом, $\varphi\in W_{M_1}$.

Более того, неравенство (9) показывает, что если последовательность $\varphi_\nu(x)$ стремится к нулю в смысле сходимости W_{M_2}, то она сходится к нулю и в смысле сходимости W_{M_1}, поскольку в неравенствах (9), написанных для функций $\varphi_\nu(x)$, постоянные a' и C'_q можно взять вместе с постоянными a и C_q, не зависящими от ν.

Если, далее, функции $M_1(x)$ и $M_2(x)$ таковы, что при достаточно больших $x \geqslant 0$

$$M_1(\gamma_1 x) \leqslant M_2(\gamma_2 x) \leqslant M_1(\gamma'_1 x), \tag{10}$$

то имеют место оба значения $W_{M_1} \supset W_{M_2}$ и $W_{M_2} \supset W_{M_1}$ и следовательно, по запасу элементов $W_{M_1} \equiv W_{M_2}$; очевидно также, что и сходимость в W_{M_1} совпадает со сходимостью в W_{M_2}. Функции $M_1(x)$ и $M_2(x)$, удовлетворяющие неравенству (10), мы будем называть *эквивалентными*; мы видим, что эквивалентные функции определяют одно и то же пространство.

Функция $(x+1)\ln(x+1) - x$, фигурирующая в примере 2, эквивалентна функции $x \ln x$ (не удовлетворяющей определению (1)); следовательно, соответствующее пространство основных функций $\varphi(x)$ описывается также неравенствами

$$|\varphi^{(q)}(x)| \leqslant C_q e^{-a|x|\ln|x|}$$

и соответствующей сходимостью.

2. Пространства W^Ω. Пусть $\omega(\eta)$ $(0 \leqslant \eta < \infty)$ — возрастающая непрерывная функция, причем $\omega(0) = 0$, $\omega(\infty) = \infty$; положим для $y \geqslant 0$

$$\Omega(y) = \int_0^y \omega(\eta)\, d\eta. \tag{1}$$

Функция $\Omega(y)$ по своим свойствам вполне аналогична функции $M(x)$, введенной в п. 1; в частности, имеют место неравенства выпуклости

$$\Omega(y_1) + \Omega(y_2) \leqslant \Omega(y_1 + y_2), \tag{2}$$

$$2\Omega(y) \leqslant \Omega(2y). \tag{3}$$

Полагаем, далее, по определению

$$\Omega(-y) = \Omega(y).$$

Обозначим через W^Ω совокупность всех целых аналитических функций $\varphi(z)$ $(z = x + iy)$, которые удовлетворяют неравенствам

$$|z^k \varphi(z)| \leqslant C_k e^{\Omega(by)} \tag{4}$$

с постоянными C_k и b, зависящими от функции φ.

Очевидно, что W^Ω есть линейное пространство с обычными операциями. Введем в это пространство следующее определение сходимости: последовательность $\varphi_\nu(z) \in W^\Omega$ называется *сходящейся* к нулю, если, во-первых, функции $\varphi_\nu(z)$ равномерно сходятся к нулю в любой ограниченной области плоскости z (такая сходимость к нулю называется правильной) и, во-вторых, справедливы оценки

$$|z^k \varphi_\nu(z)| \leqslant C_k e^{\Omega(by)},$$

где постоянные C_k и b не зависят от ν.

Покажем, что пространство W^Ω может быть представлено как объединение счетно-нормированных пространств. Обозначим через $W^{\Omega, b}$ совокупность тех функций пространства W^Ω, для которых справедливы неравенства

$$|z^k \varphi(z)| \leqslant C_k e^{\Omega(\bar{b}y)},$$

где в качестве $\bar{b}$ можно взять любую постоянную, бо́льшую b. Иначе говоря, $W^{\Omega, b}$ состоит из тех целых функций $\varphi(z)$, которые при любом $\rho > 0$ удовлетворяют неравенствам

$$|z^k \varphi(z)| \leqslant C_{k\rho} e^{\Omega[(b+\rho)y]}.$$

Положим для пространства $W^{\Omega, b}$

$$\|\varphi\|_{k\rho} = \sup_z |z^k \varphi(z)|\, e^{-\Omega[(b+\rho)y]}. \tag{5}$$

Покажем, что с нормировкой (5) пространство $W^{\Omega, b}$ становится счетно-нормированным полным совершенным пространством.

1) *Нормы* $\|\varphi\|_{k\rho}$ *попарно согласованы.* В самом деле, если последовательность $\varphi_\nu \in W^{\Omega, b}$ фундаментальна по двум нормам $\|\varphi_\nu\|_{k\rho}$ и $\|\varphi_\nu\|_{k_1\rho_1}$ и по одной из них сходится к нулю, то функции $\varphi_\nu(z)$, во всяком случае, сходятся к нулю в каждой точке; отсюда следует, что предел этой последовательности по второй норме есть нуль.

2) *Пространство* $W^{\Omega, b}$ *полно*. Пополнение пространства $W^{\Omega, b}$ по одной из норм $\|\varphi\|_{k\rho}$ состоит из целых аналитических функций с конечным значением $\|\varphi\|_{k\rho}$. Пересечение этих пополнений по всем индексам k и ρ состоит из функций, для которых имеет смысл $\|\varphi\|_{k\rho}$ при любых k и ρ, т. е. совпадает с пространством $W^{\Omega, b}$. Этот факт, согласно теореме п. 2 § 3 гл. I вып. 2, обеспечивает полноту пространства.

3) *Пространство* $W^{\Omega, b}$ *совершенно*. Доказательство аналогичного факта для пространства $\Phi = K\{M_p\}$ (§ 2 гл. 2 вып. 2) основывалось на том условии, что всякая последовательность основных функций $\varphi_\nu(x)$, ограниченная по всем нормам пространства и правильно сходящаяся, т. е. сходящаяся равномерно на каждом конечном промежутке вместе со всеми производными, сходится по топологии пространства Φ.

В нашем случае, как нетрудно проверить, эта предпосылка выполнена. Отсюда следует, что справедлив и результат — пространство $W^{\Omega, b}$ совершенно.

Объединение счетно-нормированных пространств $W^{\Omega, b}$ по всем $b = 1, 2, \ldots$ совпадает, очевидно, с пространством W^Ω. Сходимость к нулю в пространстве W^Ω, описанная выше, есть сходимость к нулю в одном из $W^{\Omega, b}$ и, следовательно, есть та самая сходимость, которая определяется в W^Ω, как в объединении пространств $W^{\Omega, b}$.

Приведем определение ограниченного множества в пространстве W^Ω: в соответствии с общим определением ограниченного множества в объединении счетно-нормированных пространств (вып. 2, гл. I, § 8), множество $A \subset W^\Omega$ называется *ограниченным*, если оно целиком лежит в некотором $W^{\Omega, b}$ и в нем ограничено. Иными словами, множество $A \subset W^\Omega$ ограничено, если для всех функций $\varphi(x) \in A$ справедливы оценки (4) с одними и теми же C_k и b. Таким образом, последовательность $\varphi_\nu \in W^\Omega$ является сходящейся к нулю, если она 1) правильно сходится к нулю, 2) ограничена.

Как и в п. 1, можно показать, что пространства W^{Ω_1} и W^{Ω_2} для эквивалентных функций $\Omega_1(y)$ и $\Omega_2(y)$ совпадают как в смысле запаса элементов, так и в смысле сходимости.

Мы будем использовать в дальнейшем, в частности, следующие примеры пространств W^Ω.

Пример 1. Положим $\omega(\eta) = \frac{1}{1-\beta}\eta^{\frac{1}{1-\beta}-1}$ для $\eta > 0$, $\Omega(y) = y^{\frac{1}{1-\beta}}$ ($\beta < 1$). Пространство W^Ω состоит из целых аналитических функций $\varphi(z)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|z^k\varphi(z)| \leqslant C_k e^{(b|y|)^{\frac{1}{1-\beta}}},$$

и совпадает, следовательно, с пространством S^β (§ 2, гл. IV, вып. 2).

Пример 2. Положим $\omega(\eta) = e^\eta - 1$, для $\eta > 0$, $\Omega(y) = \int_0^y (e^\eta - 1)\,d\eta = e^y - y - 1$. Полученная функция $\Omega(y)$ эквивалентна функции $\Omega_1(y) = e^y$. Поэтому пространство W^Ω может быть в данном случае описано неравенством

$$|z^k\varphi(z)| \leqslant C_k e^{e^{b|y|}}$$

с постоянными C_k и b, зависящими от функции φ, и с соответствующей сходимостью.

3. Пространства W_M^Ω. Пусть $\mu(\xi)$ и $\omega(\eta)$ ($0 \leqslant \xi, \eta < \infty$) — пара возрастающих непрерывных функций; положим для $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$

$$M(x) = \int_0^x \mu(\xi)\,d\xi, \quad \Omega(y) = \int_0^y \omega(\eta)\,d\eta$$

и для $x < 0$, $y < 0$

$$M(x) = M(-x), \quad \Omega(y) = \Omega(-y).$$

Функции $M(x)$ и $\Omega(y)$ — те же самые функции, с которыми мы имели дело в пп. 1 — 2.

Обозначим через W_M^Ω совокупность всех целых аналитических функций $\varphi(z)$ ($z = x + iy$), которые удовлетворяют неравенствам

$$|\varphi(x+iy)| \leqslant Ce^{-M(ax)+\Omega(by)} \qquad (1)$$

с постоянными a, b, C, зависящими от функции φ.

Очевидно, что W_M^Ω есть линейное пространство с обычными операциями. Введем в это пространство следующее определение сходимости: последовательность $\varphi_\nu(z) \in W_M^\Omega$ называется *сходящейся к нулю*, если, во-первых, функции $\varphi_\nu(z)$ равномерно сходятся к нулю в любой ограниченной области плоскости z и, во-вторых, справедливы оценки

$$|\varphi_\nu(z)| \leqslant Ce^{-M(ax)+\Omega(by)}$$

с постоянными C, a, b, не зависящими от ν.

Пространство W_M^Ω также может быть представлено в форме объединения счетно-нормированных пространств. Обозначим через $W_{M,a}^{\Omega,b}$ совокупность тех функций пространства W_M^Ω, для которых справедливы неравенства

$$|\varphi(x+iy)| \leqslant Ce^{-M(\bar{a}x)+\Omega(\bar{b}y)},$$

где $\bar{a}$ — любая постоянная, меньшая a, и $\bar{b}$ — любая постоянная, большая b. Положим для $\varphi \in W_{M,a}^{\Omega,b}$

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_z |\varphi(z)|\, e^{M[(a-\delta)x]-\Omega[(b+\rho)y]}.$$

Очевидно, что эти нормы удовлетворяют требуемым для норм аксиомам. Доказательство того, что с этими нормами пространство $W_{M,a}^{\Omega,b}$ становится (полным счетно-нормированным) совершенным пространством, проводится так же, как для пространства $W^{\Omega,b}$.

Объединение пространств $W_{M,a}^{\Omega,b}$ по всем $a = 1, \frac{1}{2}, \ldots$ и $b = 1, 2, \ldots$ совпадает, очевидно, с пространством W_M^Ω. Сходимость в пространстве W_M^Ω определена так, как она определяется в объединении счетно-нормированных пространств. Таким же образом, как и в пространствах $W_{M,a}$ и $W^{\Omega,b}$, последовательность $\varphi_\nu(x) \in W_M^\Omega$ сходится к нулю тогда и только тогда, когда она: 1) правильно сходится к нулю, 2) ограничена. Множество $A \subset W_M^\Omega$ называется *ограниченным*, если оно целиком лежит в некотором $W_{M,a}^{\Omega,b}$ и в нем ограничено; иными словами, множество $A \subset W_M^\Omega$ ограничено, если для всех функций $\varphi(z) \in A$ справедливы оценки (1) с одними и теми же a, b и C.

Эквивалентные функции $M_1(x)$ и $M_2(x)$, $\Omega_1(y)$ и $\Omega_2(y)$ (см. п. 1) определяют одно и то же пространство $W_{M_1}^{\Omega_1} \equiv W_{M_2}^{\Omega_2}$ в смысле запаса элементов и топологии.

Примеры. Комбинируя рассмотренные выше функции $M_1(x) = x^{1/\alpha}$, $M_2(x) = x \ln x$, $\Omega_1(y) = y^{\frac{1}{1-\beta}}$, $\Omega_2(y) = e^y$ ($\alpha < 1$, $\beta < 1$), мы получаем четыре пространства:

$$W_{M_1}^{\Omega_1},\quad W_{M_1}^{\Omega_2},\quad W_{M_2}^{\Omega_1},\quad W_{M_2}^{\Omega_2}.$$

Пространство $W_{M_1}^{\Omega_1}$ состоит из целых функций $\varphi(x+iy)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|\varphi(x+iy)| \leqslant Ce^{-a|x|^{\frac{1}{\alpha}}+b|y|^{\frac{1}{1-\beta}}},$$

и совпадает, следовательно, с пространством S_α^β (§ 2 гл. IV вып. 2). В остальных случаях получаются новые пространства; основные функции в них определяются неравенствами

$$W_{M_1}^{\Omega_2}:\quad |\varphi(x+iy)| \leqslant Ce^{-a|x|^{\frac{1}{\alpha}}+e^{b|y|}};$$

$$W_{M_2}^{\Omega_1}:\quad |\varphi(x+iy)| \leqslant Ce^{-a|x\ln x|+b|y|^{\frac{1}{1-\beta}}},$$

$$W_{M_2}^{\Omega_2}:\quad |\varphi(x+iy)| \leqslant Ce^{-a|x\ln x|+e^{b|y|}}.$$

Пространство $W_{M,a}^{\Omega,b}$, в котором $M(x) = x^r$, $\Omega(y) = y^s$ ($r > 1$, $s > 1$), будет обозначаться в дальнейшем через $W_{r,a}^{s,b}$. Аналогичный смысл имеет обозначение W_r^s.

4. Вопрос о нетривиальности пространств W_M^Ω. Как и пространства S_α^β, пространства W_M^Ω могут оказаться тривиальными (т. е. состоящими из одной единственной функции $\varphi(x) \equiv 0$). Например, так будет всегда, если

$$\lim_{x\to\infty} [\Omega(bx) - M(ax)] = -\infty \tag{1}$$

при любых a и b. Действительно, пусть выполнено (1) и $\varphi \in W_M^\Omega$. Это означает, что при некоторых a и b

$$|\varphi(z)| = |\varphi(x+iy)| \leqslant Ce^{-M(ax)+\Omega(by)}.$$

Но тогда и

$$|\varphi(\overline{z})| = |\varphi(ix - y)| \leqslant Ce^{-M(ay)+\Omega(bx)};$$

отсюда

$$|\varphi(x)\varphi(iz)| \leqslant C^2 e^{-M(ax)+\Omega(bx)} e^{-M(ay)+\Omega(by)}.$$

В силу условия (1) функция $\varphi(z)\varphi(iz)$ ограничена при достаточно больших $|z|$ и, по теореме Лиувилля, постоянна; так как, кроме того, из (1) следует, что $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x)\varphi(ix) = 0$, то $\varphi(z)\varphi(iz) \equiv 0$, откуда и $\varphi(z) \equiv 0$.

Далее будет указан некоторый класс нетривиальных пространств типа W.

Назовем непрерывную функцию $l(x)$ $(x > 0)$ *медленной функцией*, если для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно большого $x > x_0 = x_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$C'_\varepsilon x^{-\varepsilon} < l(x) < C_\varepsilon x^\varepsilon. \tag{2}$$

Б. Я. Левину принадлежит следующая теорема, являющаяся одним из результатов его теории обобщенной индикатрисы роста целой функции конечного порядка.

Для любого $p > 0$ и любой медленной функции $l(x)$ существует целая аналитическая функция $\varphi(z) \not\equiv 0$, для которой

$$|\varphi(x + iy)| \leqslant Ce^{-l(x)|x|^p + \gamma l(y)|y|^p}$$

с некоторыми постоянными C и γ.

Из этой теоремы вытекает нетривиальность пространства W_M^Ω при $M = \Omega = l(x)x^p$, где $l(x)$ — медленная функция.

Очевидно, что вместе с тем оказывается нетривиальным и любое пространство $W_M^{\Omega_1}$, где $M(x) = l(x)x^p$, $\Omega_1(x) \geqslant l(x)x^p$, поскольку оно содержит внутри себя нетривиальное пространство W_M^Ω.

5. О богатстве запаса функций в пространствах W_M^Ω. Предположим, что данное пространство W_M^Ω нетривиально. Следовательно, при некоторых $a > 0$ и $b > 0$ заведомо имеются и нетривиальные пространства $W_{M,a}^{\Omega,b}$; соответствующие пары (a, b) будем называть «допустимыми». Так как

при $a \leqslant a_0$, $b \geqslant b_0$ мы имеем $-M(a_0x) \leqslant -M(ax)$, $\Omega(b_0y) \leqslant \Omega(by)$, то область допустимых значений a и b вместе со всякими a_0 и b_0 содержит все пары a, b с $a \leqslant a_0$, $b \geqslant b_0$. Далее, заменяя функцию $\varphi(z) \in W_{M,a}^{\Omega,b}$ на $\varphi(\lambda z)$ с положительным λ, мы видим, что вместе со всякой парой (a, b) является допустимой и пара $(\lambda a, \lambda b)$. Таким образом, область допустимых пар (a, b) содержит вместе со всякой парой (a_0, b_0) все пары, удовлетворяющие соотношению $\frac{b}{a} \geqslant \frac{b_0}{a_0}$. Отсюда следует, что полная область всех допустимых пар (a, b) представляет собой в той четверти плоскости a, b, где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, некоторый угол, определяемый неравенством $\operatorname{tg}\frac{b}{a} \geqslant \gamma$ $\left(\text{или неравенством } \operatorname{tg}\frac{b}{a} > \gamma\right)$, где γ зависит от функций $\Omega(y)$ и $M(x)$.

Все нетривиальные пространства типа W достаточно богаты функциями в том смысле, который был указан в § 8 гл. IV вып. 2: если для некоторой локально интегрируемой функции $f(x)$ и любой основной функции $\varphi(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = 0,$$

то $f(x) \equiv 0$ почти всюду.

Доказательство можно провести по той же схеме, что и для пространств типа S (§ 8 гл. IV вып. 2).

Отсюда следует, в силу результата п. 4 § 8 гл. IV вып. 2, что нетривиальное пространство типа W располагается плотно во всяком нормированном пространстве функций $E \supset W$ с нормой по формуле

$$\|\varphi\| = \int_{-\infty}^{\infty} M(x)|\varphi(x)|\,dx.$$

§ 2. ОГРАНИЧЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА W

В этом параграфе мы покажем, что в пространствах типа W, введенных в § 1, определены и непрерывны операции дифференцирования и умножения на x, а также на некоторые целые аналитические функции.

1. Операции в пространстве W_M. (а) Операция дифференцирования. Пусть $\varphi(x) \in W_M$, так что

$$|\varphi^{(q)}(x)| \leqslant C_q e^{-M(ax)}.$$

Тогда для функции $\varphi_1(x) = \varphi'(x)$ выполняются неравенства

$$|\varphi_1^{(q)}(x)| = |\varphi^{(q+1)}(x)| \leqslant C_{q+1} e^{-M(ax)},$$

т. е. $\varphi_1(x)$ также принадлежит к пространству W_M. Очевидно, что любое ограниченное множество в пространстве W_M после дифференцирования перейдет снова в ограниченное множество. Таким образом, операция дифференцирования ограничена в W_M и, следовательно, непрерывна.

(б) Операция умножения на x. Пусть $\varphi(x) \in W_M$, так что $|\varphi^{(q)}(x)| \leqslant C_q e^{-M(ax)}$. Тогда для функции $\varphi_1(x) = x\varphi(x)$ выполняются неравенства

$$|\varphi_1^{(q)}(x)| = |[x\varphi(x)]^{(q)}| \leqslant |x\varphi^{(q)}(x)| + q|\varphi^{(q-1)}(x)| \leqslant$$
$$\leqslant |x| \cdot C_q e^{-M(ax)} + qC_{q-1} e^{-M(ax)}.$$

Для любого $\delta > 0$ имеет место неравенство

$$|x| e^{-M(ax)} \leqslant C_\delta e^{-M[(a-\delta)x]}; \qquad (1)$$

действительно, по неравенству выпуклости (2) п. 1 § 1

$$|x| e^{-M(ax)+M[(a-\delta)x]} \leqslant |x| e^{-M(\delta x)},$$

и полученная величина ограничена в силу экспоненциального убывания $e^{-M(\delta x)}$, что и требуется.

Применяя неравенство (1), получаем:

$$|\varphi_1^{(q)}(x)| \leqslant C_q C_\delta e^{-M[(a-\delta)x]} + qC_{q-1} e^{-M(ax)} \leqslant C'_q e^{-M[(a-\delta)x]},$$

где $C'_q = C_q C_\delta + qC_{q-1}$. Отсюда следует, что функция $\varphi_1(x)$ принадлежит пространству W_M.

Очевидно также, что любое ограниченное множество пространства W_M после дифференцирования перейдет снова в ограниченное множество. Таким образом, операция дифференцирования ограничена в пространстве W_M и, следовательно, непрерывна.

2. Операции в пространстве W^Ω. (а) Операция дифференцирования. Пусть $\varphi(z) \in W^\Omega$, так что

$$|z^k \varphi(z)| \leqslant C_k e^{\Omega(by)}.$$

Положим $\varphi_1(z) = \varphi'(z)$. Тогда

$$|z^k \varphi_1(z)| = |[z^k \varphi(z)]' - kz^{k-1}\varphi(z)| \leqslant$$
$$\leqslant |[z^k \varphi(z)]'| + k|z^{k-1}\varphi(z)|;$$

далее, по формуле Коши, примененной для круга Γ радиуса r с центром в точке $z = x + iy$, $y \geqslant 0$,

$$[z^k \varphi(z)]' = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\xi^k \varphi(\xi)\, d\xi}{(\xi - z)^2},$$

откуда

$$|[z^k \varphi(z)]'| \leqslant \frac{1}{r} \max_\Gamma |\xi^k \varphi(\xi)| \leqslant \frac{1}{r} C_k e^{\Omega(b(y+r))}.$$

Так как функция $\Omega(y)$ монотонно возрастает и при достаточно больших y

$$b(y+r) \leqslant (b+r)y,$$

то при этих значениях y и

$$\Omega[b(y+r)] \leqslant \Omega[(b+r)y];$$

при всех же y заведомо справедливо неравенство

$$\Omega[b(y+r)] \leqslant \Omega[(b+r)y] + C_r.$$

Таким образом, при $y \geqslant 0$

$$|[z^k \varphi(z)]'| \leqslant C_{kr} e^{\Omega[(b+r)y]},$$

где

$$C_{kr} = \frac{1}{r} C_k e^{C_r}.$$

Далее,

$$k|z^{k-1}\varphi(z)| \leqslant kC_{k-1} e^{\Omega(by)} \leqslant kC_{k-1} e^{\Omega[(b+r)y]};$$

в результате мы получаем:

$$|z^k \varphi_1(z)| \leqslant C_{kr} e^{\Omega[(b+r)y]} + kC_{k-1} e^{\Omega[(b+r)y]} \leqslant C'_{kr} e^{\Omega[(b+r)y]};$$

это означает, что $\varphi_1(z)$ принадлежит к пространству W^Ω. Аналогичная выкладка может быть проведена при $y < 0$.

Очевидно, что операция дифференцирования переводит ограниченное множество пространства W^{Ω} снова в ограниченное множество. Таким образом, операция дифференцирования ограничена в пространстве W^{Ω} и, следовательно, непрерывна.

б) Операция умножения на z. Пусть $\varphi(z) \in W^{\Omega}$, так что

$$|z^k \varphi(z)| \leqslant C_k e^{\Omega(by)}.$$

Положим $\varphi_1(z) = z\varphi(z)$. Тогда

$$|z^k \varphi_1(z)| = |z^{k+1}\varphi(z)| \leqslant C_{k+1} e^{\Omega(by)},$$

т. е. $\varphi_1(z)$ также принадлежит к пространству W^{Ω}. Очевидно, что любое ограниченное множество пространства W^{Ω} после умножения на z перейдет снова в ограниченное множество. Таким образом, операция умножения на z ограничена в W^{Ω} и, следовательно, непрерывна.

3. Операции в пространстве W_M^{Ω}. (а) Операция дифференцирования. Пусть $\varphi(z) \in W_M^{\Omega}$, так что

$$|\varphi(z)| \leqslant C e^{-M(ax)+\Omega(by)}.$$

Положим $\varphi_1(z) = \varphi'(z)$; применяя формулу Коши с тем же кругом Γ радиуса r ($< a$), что и выше, находим:

$$|\varphi_1(z)| \leqslant \frac{1}{r} \max_{\Gamma} |\varphi(\zeta)| \leqslant \frac{C}{r} e^{-M[(x-r)a]+\Omega[b(y+r)]}$$

(для простоты принято $x \geqslant r$, $y \geqslant 0$). Так же как и в п. 2 (а), имеет место оценка

$$\Omega[b(y+r)] \leqslant C'_r + \Omega[(b+r)y]$$

и аналогично

$$M[a(x-r)] \geqslant C''_r + M[(a-r)x];$$

поэтому мы получаем, что

$$|\varphi_1(z)| \leqslant C_r e^{-M[(a-r)x]+\Omega[(b+r)y]}.$$

Таким образом, $\varphi_1(z)$ принадлежит к пространству W_M^{Ω}. Так же как и выше, операция дифференцирования ограничена в пространстве W_M^{Ω} и, следовательно, непрерывна.

(б) Операция умножения на z. Пусть $\varphi(z) \in W_M^{\Omega}$, так что

$$|\varphi(z)| \leqslant C e^{-M(ax)+\Omega(by)}.$$

Положим $\varphi_1(z) = z\varphi(z)$. Тогда

$$|\varphi_1(z)| = |z\varphi(z)| \leqslant C|z|\,e^{-M(ax)+\Omega(by)} \leqslant$$
$$\leqslant C|x|\,e^{-M(ax)} + C|y|\,e^{\Omega(by)}.$$

Так же как и в п. 1 (б), справедливо неравенство

$$|x|\,e^{-M(ax)} \leqslant C_\delta e^{-M[(a-\delta)x]},$$

и аналогично

$$|y|\,e^{\Omega(by)} \leqslant C_\rho e^{\Omega[(b+\rho)y]};$$

поэтому

$$|\varphi_1(z)| \leqslant C_{\delta\rho} e^{-\Omega[(a-\delta)x]+\Omega[(b+\rho)y]},$$

откуда следует, что $\varphi_1(z) \in W_M^{\Omega}$. Очевидно, что операция умножения на z ограничена в пространстве W_M^{Ω}, а следовательно, непрерывна.

Приведенные рассуждения показывают фактически, что и в более «тонких» пространствах $W_{M,a}$, $W^{\Omega,b}$, $W_{M,a}^{\Omega,b}$ определены и ограничены, а следовательно, и непрерывны, операции умножения на независимое переменное и дифференцирования.

4. Операции умножения на целые аналитические функции.

Теорема 1. *Пусть целая аналитическая функция $f(z)$ удовлетворяет неравенству*

$$|f(z)| \leqslant C e^{\Omega(b_0 y)}(1+|x|^h). \qquad (1)$$

Утверждается, что функция $f(z)$ является мультипликатором в пространстве W^{Ω} и переводит при этом пространство $W^{\Omega,b}$ в $W^{\Omega,b+b_0}$.

Доказательство. По определению функции $\varphi(z) \in W^{\Omega,b}$ и в силу неравенства (1) мы имеем при любом $\rho > 0$:

$$|z^k f(z)\varphi(z)| \leqslant C_k e^{\Omega[(b+\rho)y]} C e^{\Omega(b_0 y)}(1+|x|^h). \qquad (2)$$

Применяя неравенство выпуклости (2) п. 1 § 1, получаем:

$$|z^k f(z)\varphi(z)| \leqslant C'_k(1+|x|^h)\,e^{\Omega[(b+b_0+\rho)y]}. \qquad (3)$$

Это неравенство справедливо для любого $k=0, 1, 2, \ldots$; заменяя k на $k+h$ *), получаем неравенство

$$|z^k f(z)\varphi(z)| \leqslant C_k'' \frac{(1+|x|^h)}{|x|^h} e^{\Omega[(b+b_0+\rho)y]}. \qquad (4)$$

Соединяя (3) и (4), получаем:

$$|z^k f(z)\varphi(z)| \leqslant e^{\Omega[(b+b_0+\rho)y]} \min\left\{C_k'(1+|x|^h), C_k'' \frac{1+|x|^h}{|x|^h}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant C_k''' e^{\Omega[(b+b_0+\rho)y]},$$

т. е. произведение $f(z)\varphi(z)$ принадлежит $W^{\Omega, b+b_0}$. Из соотношения между постоянными $\left(C_k''' \leqslant 2(C_k'+C_k'')\right)$ видно, что оператор умножения на $f(z)$ ограничен в $W^{\Omega, b}$.

Теорема 2. *Пусть даны функции $M(x)$ и $\Omega(y)$, определяющие пространство W_M^Ω. Утверждается, что целая аналитическая функция $f(z)$, удовлетворяющая неравенству*

$$|f(z)| \leqslant Ce^{M(a_0x)+\Omega(b_0y)}, \qquad (5)$$

определяет ограниченный оператор умножения в пространстве $W_{M,a}^{\Omega,b}$ при $a > a_0$ и переводит при этом пространство $W_{M,a}^{\Omega,b}$ в $W_{M,a-a_0}^{\Omega,b+b_0}$.

Доказательство. По определению функции $\varphi(z) \in W_{M,a}^{\Omega,b}$ и в силу неравенства (5) мы имеем при любых δ и ρ

$$|f(z)\varphi(z)| \leqslant CC_{\delta\rho} e^{M(a_0x)-M[(a-\delta)x]} e^{\Omega(b_0y)+\Omega[(b+\rho)y]}.$$

При этом, в силу неравенства выпуклости (2) п. 1 § 1,

$$M(a_0x) - M[(a-\delta)x] \leqslant -M[(a-a_0-\delta)x],$$
$$\Omega(b_0y) + \Omega[(b+\rho)y] \leqslant \Omega[(b+b_0+\rho)y].$$

В результате мы получаем:

$$|f(z)\varphi(z)| \leqslant C'e^{-M[(a-a_0-\delta)x]+\Omega[(b+b_0+\rho)y]}. \qquad (6)$$

Таким образом, произведение $f(z)\varphi(z)$ принадлежит к пространству $W_{M,a-a_0}^{\Omega,b+b_0}$. Из соотношений между постоянными видно, что этот оператор ограничен в пространстве $W_{M,a}^{\Omega,b}$.

*) Если h не целое, можно взять в этой выкладке ближайшее бо́льшее целое число.

Следующее замечание дополняет доказанные теоремы. *Пусть целая аналитическая функция $f(z)$ при любом $\varepsilon > 0$ удовлетворяет неравенству вида*

$$|f(z)| \leqslant C_\varepsilon e^{\Omega(\varepsilon y)} \qquad (7)$$

или вида

$$|f(z)| \leqslant C_\varepsilon e^{M(\varepsilon x)+\Omega(\varepsilon y)}. \qquad (8)$$

Тогда $f(z)$ является мультипликатором в любом пространстве $W^{\Omega,b}$ или соответственно в $W_{M,a}^{\Omega,b}$.

Доказательство повторяет доказательство теоремы 1 или соответственно теоремы 2 с заменой a_0 и b_0 на ε и выводом, что из неравенства (6) в этом случае вытекает включение $f\varphi \in W_{M,a}^{\Omega,b}$.

Пример. *Функция $f(z) = e^{i\sigma z}$ при любом вещественном σ является мультипликатором в любых пространствах $W^{\Omega,b}$ и $W_{M,a}^{\Omega,b}$.*

Действительно, имеет место неравенство

$$|e^{i\sigma z}| \leqslant e^{|\sigma||y|}.$$

Но для любых выпуклых функций $M(x)$ и $\Omega(y)$ можно при любом $\varepsilon > 0$ написать неравенства

$$|\sigma||y| \leqslant \Omega(\varepsilon y) + C_1,$$
$$|\sigma||y| \leqslant M(\varepsilon x) + \Omega(\varepsilon y) + C_1,$$

откуда для $f(z) = e^{i\sigma z}$ вытекают неравенства (7) и (8); по доказанному, $f(z)$ действительно есть мультипликатор в $W^{\Omega,b}$ или $W_{M,a}^{\Omega,b}$, что и требуется.

§ 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Напомним, что основное пространство Ψ называется двойственным по отношению к некоторому основному пространству Φ, если Ψ состоит из функций $\psi(\sigma)$, являющихся преобразованиями Фурье функций

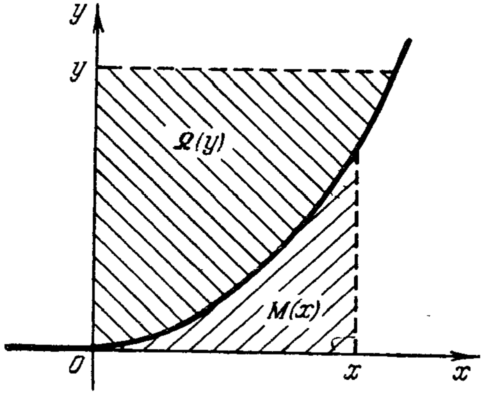
$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{ix\sigma} dx.$$

Мы укажем в этом параграфе для пространств $W_{M,a}$, $W^{\Omega,b}$ и $W_{M,a}^{\Omega,b}$ двойственные пространства. Как и выше, будем обозначать пространство, двойственное к пространству Φ, через $\tilde{\Phi}$.

1. Двойственные функции. Введем предварительно важное понятие функций, двойственных по Юнгу. Пусть функции $M(x)$ и $\Omega(y)$ заданы соответственно формулами (1) п. 1 и (1) п. 2 § 1. Если фигурирующие в этих формулах функции $\mu(\xi)$ и $\omega(\eta)$ взаимно обратны, так что $\mu[\omega(\eta)]=\eta$, $\omega[\mu(\xi)]=\xi$, то соответствующие функции $M(x)$ и $\Omega(y)$ называются *двойственными по Юнгу*. В этом случае имеет место геометрически очевидное неравенство Юнга:

$$xy \leqslant M(x)+\Omega(y) \tag{1}$$

для любых $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$ (см. рисунок). Для каждого x можно найти $y=y(x)$, которое вместе с данным x обратит



неравенство (1) в равенство; очевидно, в качестве этого y следует взять $\mu(x)$.

Вот для примера некоторые пары взаимно двойственных функций:

$$M(x)=\frac{x^p}{p}, \quad \Omega(y)=\frac{y^q}{q}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1; \tag{2}$$

$$M(x)=(x+1)\ln(x+1)-x, \quad \Omega(y)=e^y-y-1. \tag{3}$$

Мы предоставляем читателю проверить их двойственность.

Отметим некоторые свойства двойственных функций, важные для дальнейшего.

Лемма. *Если $M(x)$ двойственна к $\Omega_1(y)$, $M_1(x)$ двойственна к $\Omega(y)$ и $M(x)<M_1(x)$ для достаточно больших x, то $\Omega_1(y)>\Omega(y)$ для достаточно больших y.*

Доказательство. Пусть неравенство $M(x)<M_1(x)$ выполняется для $x>x_0$. Найдем $y=y(x)>y(x_0)$, для которого имеет место равенство

$$xy=M_1(x)+\Omega(y).$$

Для этих же x и y

$$xy \leqslant M(x)+\Omega_1(y).$$

Отсюда

$$M(x)-M_1(x)+\Omega_1(y)-\Omega(y) \geqslant 0,$$

$$0 \leqslant M_1(x)-M(x) \leqslant \Omega_1(y)-\Omega(y)$$

и, значит, для $y>y(x_0)$ имеет место искомое неравенство $\Omega_1(y)>\Omega(y)$.

2. Теоремы двойственности для пространств $W_{M,a}$ и $W^{\Omega,b}$.

Теорема 1. *Пусть $\Omega(y)$ — функция, двойственная по Юнгу к $M(x)$. Тогда*

$$\widetilde{W_{M,a}} \subset W^{\Omega,1/a}. \tag{1}$$

Доказательство. Функция $e^{M(a\xi)}$ возрастает при $|\xi| \to \infty$ быстрее, чем $e^{\lambda\xi}$, при любом $\lambda>0$. Поэтому основные функции $\varphi(x) \in W_{M,a}$ убывают при $|x| \to \infty$ быстрее, чем $e^{-\lambda|x|}$, при любом $\lambda>0$. Следовательно, преобразование Фурье

$$\psi(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{i\sigma x}\, dx$$

функции $\varphi(x) \in W_{M,a}$ можно продолжить на комплексные значения $s=\sigma+i\tau$ по формуле

$$\psi(\sigma+i\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{i(\sigma+i\tau)x}\, dx, \tag{2}$$

причем интеграл будет оставаться абсолютно сходящимся.

Функция $\psi(s)$ дифференцируема при каждом s. Действительно, после формального дифференцирования по s интеграл (2) переходит в интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} ix\varphi(x)\, e^{i(\sigma+i\tau)x}\, dx;$$

но в силу результата п. 1 (б) § 2 функция $x\varphi(x)$ снова принадлежит пространству $W_{M,a}$, так что интеграл остается абсолютно сходящимся; это обеспечивает наличие производной у функции $\psi(s)$ в силу известных правил дифференцирования несобственных интегралов с параметром.

Таким образом, $\psi(s)$ — целая аналитическая функция. Мы имеем далее:

$$(is)^k \psi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(k)}(x)\, e^{ixs}\, dx. \tag{3}$$

Так как $\varphi(x) \in W_{M,a}$, то

$$|s^k\psi(s)| \leqslant C_{k\delta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-M[(a-\delta)x]+|\tau|\cdot|x|}\, dx. \tag{4}$$

Применим, далее, неравенство Юнга (1) п. 1, заменяя в нем x на $\gamma|x|$, y на $\frac{1}{\gamma}|\tau|$, где $\gamma = a - 2\delta$. Показатель в (4) преобразуется следующим образом:

$$-M[(a-\delta)x] + |x||\tau| \leqslant \\ \leqslant -M[(a-\delta)x] + M(\gamma x) + \Omega\left(\frac{1}{\gamma}\tau\right),$$

и мы приходим к оценке

$$|s^k\psi(s)| \leqslant C_{k\delta}\, e^{\Omega\left(\frac{1}{\gamma}\tau\right)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-M[(a-\delta)x]+M[(a-2\delta)x]}\, dx \leqslant C'_{k\delta}\, e^{\Omega\left(\frac{\tau}{\gamma}\right)},$$

поскольку интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-M[(a-\delta)x]-M[(a-2\delta)x]}\, dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} e^{-M(\delta x)}\, dx$$

имеет конечное значение. Величину $\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{a-2\delta}$ можно представить в форме $\frac{1}{a} + \rho$, где ρ сколь угодно мало вместе с δ. Итак, мы получаем, что функция $\psi(s)$ принадлежит пространству $W^{\Omega, 1/a}$, где $\Omega(y)$ — функция, двойственная по Юнгу к $M(x)$. Заметим при этом, что оператор Фурье отображает ограниченное множество $A \subset W_{M,a}$ в ограниченное множество $\widetilde{A} \subset W^{\Omega, 1/a}$, поэтому он *непрерывен*.

Теорема 2. *Пусть $M(x)$ — функция, двойственная по Юнгу к $\Omega(y)$. Тогда*

$$\widetilde{W^{\Omega, b}} \subset W_{M, 1/b}. \tag{5}$$

Доказательство. Функция $\varphi(x+iy) \in W^{\Omega, b}$ стремится к нулю при $|x| \to \infty$ быстрее любой степени $\frac{1}{|x|}$, равномерно в любой полосе $|y| \leqslant y_0$, а функция $e^{i\sigma z}$ остается в этой полосе ограниченной по модулю. Поэтому в выражении преобразования Фурье

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{i\sigma x}\, dx,$$

используя теорему Коши, можно путь интегрирования заменить любой горизонтальной прямой, не меняя результата:

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+iy)\, e^{i(x+iy)\sigma}\, dx. \tag{6}$$

Дифференцируя (6) по σ, получаем:

$$\psi^{(q)}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} (iz)^q\, \varphi(z)\, e^{i\sigma z}\, dx, \tag{7}$$

причем дифференцирование под знаком интеграла законно в силу абсолютной сходимости получающегося интеграла. Из (7) находим:

$$|\psi^{(q)}(\sigma)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |z^q\varphi(z)|\, e^{-\sigma y}\, dx \leqslant e^{-\sigma y} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|z|^{q+2}+|z|^q}{x^2+1}\, |\varphi(z)|\, dx,$$

в силу очевидного неравенства $|z|^q \leqslant \frac{|z|^{q+2}+|z|^q}{x^2+1}$; далее, используя определение $\varphi(z)$, получаем оценку

$$|\psi^{(q)}(\sigma)| \leqslant e^{-\sigma y}[C_{\rho,\, q+2}+C_{\rho q}]\, e^{\Omega[(b+\rho)y]} \leqslant C'_{\rho q} e^{-\sigma y} e^{\Omega[(b+\rho)y]}. \tag{8}$$

До сих пор величина y была произвольной. Выберем теперь знак y так, чтобы иметь $\sigma y = |\sigma||y|$, а его величину так, чтобы неравенство Юнга (1) п. 1, в котором y заменено на $(b+\rho)|y|$, а x на $\frac{|\sigma|}{b+\rho}$, обратилось в равенство

$$|\sigma||y| = M\left(\frac{|\sigma|}{b+\rho}\right)+\Omega[(b+\rho)|y|].$$

Тогда показатель в (8) преобразуется к виду

$$-\sigma y+\Omega[(b+\rho)y] = -|\sigma||y|+\Omega[(b+\rho)|y|] = -M\left(\frac{|\sigma|}{b+\rho}\right).$$

Заменяя $\frac{1}{b+\rho}$ на $\frac{1}{b}-\delta$, где δ сколь угодно мало вместе с ρ, мы получаем неравенство

$$|\psi^{(q)}(\sigma)| \leqslant C_{\delta q} e^{-M\left[\left(\frac{1}{b}-\delta\right)x\right]},$$

т. е. $\psi(\sigma) \in W_{M,\,1/b}$, что и требовалось.

Соединяя теоремы 1 и 2 и учитывая, что $\tilde{\tilde{\varphi}}(x) = \varphi(-x)$, получаем следующий основной результат.

Теорема 3. *Если $M(x)$ и $\Omega(y)$ — функции, взаимно двойственные по Юнгу, то*

$$\widetilde{W_{M,\,a}} = W^{\Omega,\,1/a}, \qquad \widetilde{W^{\Omega,\,b}} = W_{M,\,1/b}. \tag{9}$$

Оператор Фурье, отображающий $W^{\Omega,\,b}$ на $W_{M,\,1/b}$, также является *непрерывным*. Это можно показать непосредственно или можно воспользоваться взаимной однозначностью отображения и теоремой о непрерывности обратного оператора (вып. 2, гл. I, § 7).

Вместе с формулами (9) *справедливы формулы двойственности для пространств W_M и W^Ω:*

$$\widetilde{W_M} = W^\Omega, \qquad \widetilde{W^\Omega} = W_M, \tag{10}$$

причем здесь оператор Фурье также является непрерывным.

В соотношениях (9) и (10) при желании можно под $\sim$ понимать не прямое, а обратное преобразование Фурье, поскольку каждое пространство типа W вместе с $\varphi(x)$ содержит $\varphi(-x)$. Аналогичное обстоятельство имеет место и для соотношений, которые мы установим в следующем пункте.

3. Теоремы двойственности для пространств $W_{M,\,a}^{\Omega,\,b}$.

Теорема 4. *Пусть $\Omega_1(y)$ и $M_1(x)$ — функции, двойственные по Юнгу соответственно к функциям $M(x)$ и $\Omega(y)$. Тогда*

$$\widetilde{W_{M,\,a}^{\Omega,\,b}} = W_{M_1,\,1/b}^{\Omega_1,\,1/a}. \tag{1}$$

Доказательство. В выражении преобразования Фурье функции $\varphi(x) \in W_{M,\,a}^{\Omega,\,b}$

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{i\sigma x}\, dx$$

вследствие аналитичности $\varphi(x+iy)$ и экспоненциального убывания ее на каждой горизонтальной прямой в плоскости z, равномерного в каждой горизонтальной полосе, можно, с одной стороны, перейти на любую горизонтальную прямую, как в теореме 2, с другой стороны, произвести аналитическое продолжение, заменив в обеих частях равенства σ на $s = \sigma + i\tau$, как в теореме 1. В результате мы получим:

$$\psi(\sigma+i\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+iy)\, e^{i(x+iy)(\sigma+i\tau)}\, dx.$$

Оценка по модулю дает:

$$|\psi(\sigma+i\tau)| \leqslant C_{\delta\rho} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-M[(a-\delta)x]+\Omega[(b+\rho)y]}\, e^{-y\sigma - x\tau}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant C_{\delta\rho} e^{-\sigma y+\Omega[(b+\rho)y]} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-M[(a-\delta)x]+|x||\tau|}\, dx.$$

Производя с интегралом те же преобразования, что и в теореме 1, мы заменяем его большей величиной

$$C'_\sigma e^{\Omega_1\left(\frac{1}{a-2\delta}\tau\right)}.$$

Выбирая y и производя с внеинтегральным членом те же преобразования, что в теореме 2, мы заменим его на $e^{-M_1\left(\frac{\sigma}{b+\rho}\right)}$. Полагая $\frac{1}{a-2\delta}=\frac{1}{a}+\rho_1$, $\frac{1}{b+\rho}=\frac{1}{b}-\delta_1$, где δ_1 и ρ_1 бесконечно малы вместе с δ и ρ, мы получаем оценку

$$|\psi(\sigma+i\tau)|\leqslant C'_{\rho_1\delta_1}\, e^{-M_1\left[\left(\frac{1}{b}-\delta\right)\sigma\right]+\Omega_1\left[\left(\frac{1}{a}+\rho_1\right)\tau\right]},$$

где $C'_{\rho_1\delta_1}=C_{\rho\delta}C'_{\delta}$. Таким образом, $\psi(\sigma)\in W^{\Omega_1,\,1/a}_{M_1,\,1/b}$; при этом очевидно, что оператор Фурье $\psi=\tilde{\varphi}$ является ограниченным оператором, переводящим $W^{\Omega,\,b}_{M,\,a}$ в $W^{\Omega_1,\,1/a}_{M_1,\,1/b}$.

Применяя то же рассуждение к пространству $W^{\Omega_1,\,1/a}_{M_1,\,1/b}$, мы найдем, что оно переводится преобразованием Фурье в пространство $W^{\Omega,\,b}_{M,\,a}$. Оба отображения в силу единственности преобразования Фурье взаимно однозначны. Отсюда следует утверждение теоремы.

Вместе с формулой (12) справедлива и формула двойственности для пространства W^{Ω}_{M}:

$$\widetilde{W^{\Omega}_{M}}=W^{\Omega_1}_{M_1}, \tag{2}$$

причем оператор Фурье и здесь остается непрерывным.

Примеры. Полагая

$$M(x)=\frac{x^p}{p},\quad \Omega_1(y)=\frac{y^q}{q},\quad M_1(x)=\frac{x^r}{r},$$
$$\Omega(y)=\frac{y^s}{s}\qquad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1\right)$$

и заменяя для простоты в обозначениях пространств символы функций M, Ω_1, M_1, Ω соответствующими показателями p, q, r, s (как указано в конце п. 3 § 1), получаем формулы

$$\widetilde{W_{p,\,a}}=W^{q,\,1/a},\qquad \widetilde{W_p}=W^q, \tag{3}$$
$$\widetilde{W^{r,\,b}}=W_{s,\,1/b},\qquad \widetilde{W^r}=W_s, \tag{4}$$
$$\widetilde{W^{r,\,b}_{p,\,a}}=W^{q,\,1/a}_{s,\,1/b},\qquad \widetilde{W^r_p}=W^q_s. \tag{5}$$

§ 4. СЛУЧАЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Определения основных пространств. Пусть даны функции $M_1(x_1),\ \ldots,\ M_n(x_n)$ (каждая от одного независимого переменного), удовлетворяющие условиям § 1. Пространство $W_{M_1,\ldots,M_n}=W_M$, по определению, состоит из всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)=\varphi(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, для которых удовлетворяются неравенства

$$|D^q\varphi(x)|\equiv\left|\frac{\partial^{q_1+\ldots+q_n}\varphi(x)}{\partial x_1^{q_1}\ldots\partial x_n^{q_n}}\right|\leqslant C_q e^{-M_1(a_1x_1)-\ldots-M_n(a_nx_n)}. \tag{1}$$

Последовательность $\varphi_\nu(x)\in W_M$ называется сходящейся к нулю, если, во-первых, функции $\varphi_\nu(x)$ и их производные любого порядка сходятся к нулю равномерно в каждой ограниченной области (правильная сходимость) и, во-вторых, в неравенствах (1), написанных для функций $\varphi_\nu(x)$, можно взять постоянные C_q, $a_1,\ \ldots,\ a_n$ не зависящими от ν (ограниченность).

Пусть $\Omega_1(y_1),\ \ldots,\ \Omega_n(y_n)$ — аналогичные функции от переменных y; пространство $W^{\Omega_1,\ldots,\Omega_n}=W^{\Omega}$, по определению, состоит из всех целых аналитических функций n комплексных переменных $z_j=x_j+iy_j$, для которых

$$|z^k\varphi(z)|\equiv\left|z_1^{k_1}\ldots z_n^{k_n}\varphi(z_1,\ \ldots,\ z_n)\right|\leqslant C_k e^{\Omega_1(b_1y_1)+\ldots+\Omega_n(b_ny_n)}. \tag{2}$$

Последовательность $\varphi_\nu(z)\in W^{\Omega}$ называется сходящейся к нулю, если, во-первых, функции $\varphi_\nu(z)$ равномерно сходятся к нулю во всякой ограниченной области n-мерного комплексного пространства (правильная сходимость) и, во-вторых, в неравенствах (2), написанных для функций $\varphi_\nu(z)$, можно взять постоянные C_k, $b_1,\ \ldots,\ b_n$ не зависящими от ν (ограниченность).

Если даны $M_j(x_j)$ и $\Omega_j(y_j)$, то мы можем построить и пространство $W^{\Omega}_{M}=W^{\Omega_1,\ldots,\Omega_n}_{M_1,\ldots,M_n}$; оно состоит из целых аналитических функций $\varphi(z)\equiv\varphi(z_1,\ \ldots,\ z_n)$, для которых

$$|\varphi(z)|\leqslant Ce^{-M_1(a_1x_1)-\ldots-M_n(a_nx_n)+\Omega_1(b_1y_1)+\ldots+\Omega_n(b_ny_n)}. \tag{3}$$

Последовательность функций $\varphi_\nu(z)$ называется сходящейся к нулю, если, во-первых, функции $\varphi_\nu(z)$ равномерно сходятся к нулю в любой ограниченной области n-мерного комплексного пространства (правильная сходимость) и, во-вторых, в неравенствах (3), написанных для функций $\varphi_\nu(z)$ можно взять постоянные $C, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ не зависящими от ν.

Заменяя в приведенных выше неравенствах постоянные a_j на $a_j-\delta_j$, b_j на $b_j+\rho_j$, фиксируя a_j и b_j и требуя выполнения неравенств (1), (2), (3) при всех положительных δ_j и ρ_j, мы получим определения пространств $W_{M,a}$, $W^{\Omega,b}$ и $W_{M,a}^{\Omega,b}$; это (полные счетно-нормированные) совершенные пространства, дающие при объединении соответствующие пространства W_M, W^Ω, W_M^Ω.

2. Операции в основных пространствах. Во всех указанных выше пространствах определены и непрерывны операции дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x_j}$ и умножения на x_j $\left(\text{или } \frac{\partial}{\partial z_j} \text{ и } z_j\right)$; доказательство — такое же, как в § 2; при применении формулы Коши контур интегрирования выбирается в плоскости x_j+iy_j.

Если целая аналитическая функция $f(z)=f(z_1, \ldots, z_n)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(z_1, \ldots, z_n)| \leqslant Ce^{\Omega_1(b_1^0 y_1)+\ldots+\Omega_n(b_n^0 y_n)} \times \\ \times (1+|x_1|^{h_1})\ldots(1+|x_n|^{h_n}),$$

то она является мультипликатором в пространстве W^Ω, причем для любой функции $\varphi \in W^{\Omega,b}$ произведение $f\varphi$ принадлежит пространству $W^{\Omega, b+b^0}$.

Если целая аналитическая функция $f(z)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(z_1, \ldots, z_n)| \leqslant \\ \leqslant Ce^{-M_1(a_1^0 x_1)+\ldots+M_n(a_n^0 x_n)+\Omega_1(b_1^0 y_1)+\ldots+\Omega_n(b_n^0 y_n)},$$

то для всякой функции $\varphi \in W_{M,a}^{\Omega,b}$ с $a_j > a_j^0$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ произведение $f\varphi$ принадлежит пространству $W_{M,a-a^0}^{\Omega,b+b^0}$.

В частности, функция $f(z)=e^{i(\sigma,z)}=e^{i(\sigma_1 z_1+\ldots+\sigma_n z_n)}$ при любых вещественных $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ является мультипликатором в любом пространстве $W_{M,a}^{\Omega,b}$. Все эти утверждения доказываются так же, как в § 2 доказывались аналогичные предложения для одного переменного.

3. Теоремы двойственности. Преобразование Фурье

$$\psi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)=\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, e^{i(x_1\sigma_1+\ldots+x_n\sigma_n)}\, dx_1\ldots dx_n \tag{4}$$

функции $\varphi(x)$ есть ограниченный оператор, переводящий:

пространство $W_{M,a}$ в $W^{\Omega_1, 1/a}$ $\left(\frac{1}{a}=\left(\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right)\right)$,

пространство $W^{\Omega,b}$ в $W_{M_1, 1/b}$ $\left(\frac{1}{b}=\left(\frac{1}{b_1}, \ldots, \frac{1}{b_n}\right)\right)$,

пространство $W_{M,a}^{\Omega,b}$ в $W_{M_1,1/b}^{\Omega_1,1/a}$.

Здесь M_1, Ω_1 — функции, двойственные по Юнгу к Ω и M соответственно. Это утверждение доказывается по методу § 3 с использованием того факта, что после применения к функции $\varphi(x)$ оценки (1) (соответственно (2) или (3)) подынтегральное выражение в (4) преобразуется в произведение n множителей, каждый из которых зависит лишь от одной из координат z_j и одной из координат s_j; поэтому весь интеграл разбивается в произведение n множителей, каждый из которых может быть преобразован по методу § 3.

4. О нетривиальности и о богатстве запаса функций в основных пространствах. Вопрос о нетривиальности пространств W_M^Ω целиком сводится к вопросу о нетривиальности каждого из пространств $W_{M_j}^{\Omega_j}$ с фиксированным j. Если все они нетривиальны и, предположим, $\varphi_j \in W_{M_j}^{\Omega_j}$ — отличная от нуля функция, то произведение $\prod_{j=1}^{n} \varphi_j$ также отлично от нуля и принадлежит к пространству W_M^Ω. Если хотя бы для одного j пространство $W_{M_j}^{\Omega_j}$ тривиально, то оказывается тривиальным и все W_M^Ω, поскольку всякая функция $\varphi(z) \in W_M^\Omega$, рассматриваемая при фиксированных z_k $(k \neq j)$ как функция от z_j, принадлежит к пространству $W_{M_j}^{\Omega_j}$. Отметим, в частности, что пространство W_M^Ω нетривиально, если для каждой пары M_j, Ω_j выполнено достаточное условие нетривиальности, указанное в конце п. 4 § 1. Остальные результаты § 1, касающиеся плотности пространства W_M^Ω в нормированном пространстве E, переносятся на общий случай очевидным образом.

ГЛАВА II

КЛАССЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В этой и следующих главах рассматриваются некоторые приложения теории обобщенных функций к общим теоремам существования и единственности решений уравнений с частными производными.

Мы ограничиваемся здесь задачей Коши для линейных уравнений в основном с коэффициентами, не зависящими от пространственных переменных. Мы не касаемся здесь иных важных задач — граничных, смешанных с общими граничными условиями, и других, поскольку методы обобщенных функций для таких задач еще не разработаны в достаточной мере; но мы надеемся, что методы, построенные для решения и исследования задачи Коши, помогут в дальнейшем и при решении других задач.

Мы будем рассматривать системы вида

$$\frac{\partial u_j(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{m} P_{jk}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u_k(x, t) \quad (j = 1, \ldots, m), \tag{1}$$

где $P_{jk}(s)$ — многочлены с постоянными коэффициентами *).

К этим системам приводятся формально более сложные системы

$$\frac{\partial^{\mu_j} u_j(x, t)}{\partial t^{\mu_j}} = \sum_{k=1}^{m} P_{jk}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u_k(x, t), \tag{2}$$

*) В дополнении к этой главе рассматриваются и различные частные случаи, не подходящие непосредственно под общую схему (1): системы с операторами свертки, в частности, дифференциально-разностные, некоторые системы с переменными коэффициентами.

и все W_M^Ω, поскольку всякая функция $\varphi(z) \in W_M^\Omega$, рассматриваемая при фиксированных z_k $(k \neq j)$ как функция от z_j, принадлежит к пространству $W_{M_j}^{\Omega_j}$. Отметим, в частности, что пространство W_M^Ω нетривиально, если для каждой пары M_j, Ω_j выполнено достаточное условие нетривиальности, указанное в конце п. 4 § 1. Остальные результаты § 1, касающиеся плотности пространства W_M^Ω в нормированном пространстве E, переносятся на общий случай очевидным образом.

ГЛАВА II

КЛАССЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В этой и следующих главах рассматриваются некоторые приложения теории обобщенных функций к общим теоремам существования и единственности решений уравнений с частными производными.

Мы ограничиваемся здесь задачей Коши для линейных уравнений в основном с коэффициентами, не зависящими от пространственных переменных. Мы не касаемся здесь иных важных задач — граничных, смешанных с общими граничными условиями, и других, поскольку методы обобщенных функций для таких задач еще не разработаны в достаточной мере; но мы надеемся, что методы, построенные для решения и исследования задачи Коши, помогут в дальнейшем и при решении других задач.

Мы будем рассматривать системы вида

$$\frac{\partial u_j(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{m} P_{jk}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u_k(x, t) \quad (j = 1, \ldots, m), \tag{1}$$

где $P_{jk}(s)$ — многочлены с постоянными коэффициентами *).

К этим системам приводятся формально более сложные системы

$$\frac{\partial^{\mu_j} u_j(x, t)}{\partial t^{\mu_j}} = \sum_{k=1}^{m} P_{jk}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u_k(x, t), \tag{2}$$

*) В дополнении к этой главе рассматриваются и различные частные случаи, не подходящие непосредственно под общую схему (1): системы с операторами свертки, в частности, дифференциально-разностные, некоторые системы с переменными коэффициентами.

где порядок многочлена P_{jk} по аргументу $\frac{\partial}{\partial t}$ меньше числа μ_j. К такому типу относится, например, волновое уравнение.

Переход от системы (2) к системе (1) осуществляется путем введения новых неизвестных функций по формулам

$$u_{11}=u_1,\quad u_{12}=\frac{\partial u_1}{\partial t},\ \ldots,\ u_{1\mu_1}=\frac{\partial^{\mu_1-1}u_1}{\partial t^{\mu_1-1}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_{m1}=u_m,\ u_{m2}=\frac{\partial u_m}{\partial t},\ \ldots,\ u_{m,\,\mu_m-1}=\frac{\partial^{\mu_m-1}u_m}{\partial t^{\mu_m-1}}.$$

Задача Коши для системы (1) состоит в разыскании решения, удовлетворяющего начальному условию

$$u_j(x,\ 0)=u_j(x)\quad (j=1,\ \ldots,\ n). \tag{3}$$

Мы будем заниматься построением классов единственности решения задачи Коши и построением классов корректности.

Класс единственности — это (линейное топологическое) пространство (обычных или обобщенных) функций от аргументов x, в котором гарантируется единственность решения задачи Коши при данных начальных условиях, в предположении, что решение существует.

Класс корректности — это совокупность функций (обычных) от аргументов x, в которой гарантируется существование решения при любом выборе начальных условий (также из некоторого фиксированного класса), его единственность и непрерывная зависимость от начальных условий.

Мы используем в этой и следующих главах обобщенные функции в пространствах бесконечно дифференцируемых или аналитических основных функций с определенными условиями поведения на бесконечности, а именно в пространствах типа S или W. (Очевидно, что для краевых задач нужно будет ввести основные пространства, связанные с краевыми условиями.)

Существенную роль играет метод преобразований Фурье. Раньше казалось, что метод преобразований Фурье пригоден только в таких задачах, где имеют дело с интегрируемыми

функциями*). Теория обобщенных функций дает возможность строить преобразования Фурье любых, как угодно быстро растущих функций, и это позволяет использовать преобразования Фурье в полной мере.

Второй существенный прием — применение дифференциальных операторов бесконечного порядка. Решение задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t}=P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,\ t)$$

с начальным условием

$$u(x,\ 0)=u_0(x)$$

формально записывается в виде

$$u(x,\ t)=e^{tP\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)}u_0(x),$$

т. е. в виде результата применения дифференциального оператора бесконечного порядка

$$e^{tP\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^nP^n\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)}{n!};$$

следует дать точное определение этого оператора и выяснить, в каких случаях его можно применять.

Рассмотрим в качестве примера задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2}, \tag{4}$$

где a — комплексная постоянная. Оказывается, что при любом a имеется один и тот же класс единственности решений задачи Коши, состоящий из функций, которые при фиксированном t удовлетворяют неравенству

$$|f(x)|\leqslant C_1e^{C_2x^2}. \tag{5}$$

Но в то время как для уравнения теплопроводности ($a=1$) эта же совокупность функций служит и классом корректности,

*) Или с функциями, становящимися интегрируемыми при умножении на экспоненту e^{-px} (преобразование Лапласа, которое представляет собой видоизменение преобразования Фурье).

для уравнения Шрёдингера ($a = i$) классом корректности будет совокупность достаточно гладких функций (и притом только степенного роста), а для обратного уравнения теплопроводности ($a = -1$) классом корректности будет уже только совокупность аналитических функций с определенным порядком роста.

Этот пример показывает, что вопрос о классах единственности решения задачи Коши — особый вопрос, отдельный от вопроса о классах корректности решения и требующий самостоятельного метода исследования. Поэтому мы выделили вопрос о классах единственности в отдельную главу.

В этой главе мы покажем, что для каждой системы (1) (следовательно, и (2)) имеется класс единственности решений задачи Коши, описываемый неравенствами вида

$$|f(x)| \leqslant Ce^{b|x|^r},$$

где показатель r ($\leqslant \infty$) зависит от самой системы.

Мы воспользуемся известным приемом, принадлежащим, по-видимому, Хольмгрену (1901 г.) и состоящим в том, что из существования решения данного уравнения при любых начальных данных следует единственность решения сопряженного уравнения.

В § 2 этот прием излагается в абстрактной форме. Решение данного уравнения мы, таким образом, будем рассматривать как обобщенную функцию над некоторым основным пространством. Нужно будет подбирать основное пространство в зависимости от уравнения так, чтобы задача Коши для сопряженного уравнения была в этом основном пространстве всегда разрешима.

§ 2. ЗАДАЧА КОШИ В ЛИНЕЙНОМ ТОПОЛОГИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Связь между решениями задачи Коши в данном пространстве и в сопряженном пространстве. Пусть задан линейный непрерывный оператор A_t, непрерывно зависящий от параметра t, действующий в линейном топологическом пространстве Φ и отображающий его в себя при каждом t ($0 \leqslant t \leqslant T$). Сопряженный оператор A_t^* определен в сопряженном пространстве Φ' и переводит его также в себя.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{du(t)}{dt} = -A_t^* u(t), \tag{1}$$

где $u(t)$ — неизвестный элемент пространства Φ'. Абстрактной задачей Коши будем называть задачу о решении этого уравнения с начальным условием

$$u(0) = u_0 \in \Phi'. \tag{2}$$

Оказывается, что решение задачи Коши (1) — (2) тесно связано с решением аналогичной задачи Коши в пространстве Φ, а именно, с решением уравнения

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = A_t \varphi(t), \tag{3}$$

где $\varphi(t) \in \Phi$, при начальном условии

$$\varphi(t_0) = \varphi_0 \in \Phi. \tag{4}$$

Эта связь состоит в следующем.

Мы будем коротко говорить, что задача Коши (3) — (4) *всегда разрешима*, если для каждого момента t_0, $0 \leqslant t_0 \leqslant T$, и каждого элемента φ_0 существует решение $\varphi(t)$, определенное при $0 \leqslant t \leqslant T$, обращающееся в φ_0 при $t = t_0$, и если это решение $\varphi(t)$ линейным и непрерывным образом зависит от φ_0. Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Если задача Коши* (3) — (4) *в основном пространстве* Φ *всегда разрешима, то задача Коши* (1) — (2) *в сопряженном пространстве* Φ' *имеет решение при любом начальном функционале* u_0; *это решение единственно в* Φ' *и непрерывно зависит от функционала* u_0 *в смысле топологии пространства* Φ'.

Прежде чем доказывать эту теорему, выполним некоторые предварительные построения.

Обозначим через $Q_{t_0}^t$ линейный непрерывный оператор в Φ, который переводит вектор φ_0 в решение $\varphi(t)$ задачи Коши (3) — (4). Этот оператор, по условию, определен для любых чисел t_0 и t в промежутке $[0, T]$ и обладает свойствами

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\left[Q_{t_0}^t \varphi(t_0)\right]}{dt} &= A_t Q_{t_0}^t \varphi(t_0), \\ Q_{t_0}^{t_0} \varphi(t_0) &= \varphi(t_0). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Из последнего равенства получаем, что

$$Q_{t_0}^{t_0}=E \quad \text{при любом } t_0. \tag{6}$$

Равенство (5) показывает, что оператор $Q_{t_0}^{t}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dQ_{t_0}^{t}}{dt}=A_t Q_{t_0}^{t}. \tag{7}$$

В частности, мы получаем формулу

$$\left.\frac{dQ_{t_1}^{t}}{dt}\right|_{t=t_1}=A_{t_1}. \tag{8}$$

Для трех произвольных значений t_0, t_1, t_2 в промежутке $[0, T]$ мы можем написать

$$\varphi(t_2)=Q_{t_1}^{t_2}\varphi(t_1)=Q_{t_1}^{t_2}Q_{t_0}^{t_1}\varphi(t_0),$$

а с другой стороны,

$$\varphi(t_2)=Q_{t_0}^{t_2}\varphi(t_0).$$

Сравнивая эти два равенства, мы получаем, что

$$Q_{t_1}^{t_2}Q_{t_0}^{t_1}=Q_{t_0}^{t_2}. \tag{9}$$

Полагая в этой формуле $t_2=t_0$, приходим к равенству

$$Q_{t_1}^{t_0}Q_{t_0}^{t_1}=Q_{t_0}^{t_0}=E. \tag{10}$$

Заменяя здесь t_1 на t и дифференцируя по t, получаем:

$$\frac{dQ_t^{t_0}}{dt}Q_{t_0}^{t}+Q_t^{t_0}\frac{dQ_{t_0}^{t}}{dt}=0;$$

используя (7), находим:

$$\frac{dQ_t^{t_0}}{dt}Q_{t_0}^{t}+Q_t^{t_0}A_t Q_{t_0}^{t}=0,$$

откуда, умножая справа на $Q_t^{t_0}$, приходим к выводу, что

$$\frac{dQ_t^{t_0}}{dt}=-Q_t^{t_0}A_t. \tag{11}$$

Переходя к сопряженным операторам, получаем уравнение

$$\frac{dQ_t^{t_0*}}{dt}=-A_t^*Q_t^{t_0*}. \tag{12}$$

Теперь мы можем непосредственно перейти к доказательству теоремы. Для этого положим $t_0=0$, $u(t)=Q_t^{0*}u_0$; покажем, что функционал $u(t)$ есть решение задачи Коши (1)—(2). Прежде всего, применяя операторное равенство (12) к вектору u_0, мы находим:

$$\frac{du(t)}{dt}=-A_t^*u(t),$$

так что уравнение (1) удовлетворено. С другой стороны, при $t=0$ оператор Q_t^{0*} обращается в $E^*=E$, что приводит к выполнению и начального условия. Заметим, наконец, что функционал $u(t)$ непрерывно зависит от начального элемента u_0 в силу непрерывности оператора Q_t^{0*}. Покажем теперь, что задача Коши (1)—(2) может иметь лишь единственное решение в пространстве Φ'. Для этого достаточно показать, что единственным решением уравнения (1) при начальном условии $u_0=0$ может служить лишь функционал $u(t)\equiv 0$. Чтобы это показать, фиксируем произвольно момент t_0, $0\leqslant t_0\leqslant T$, и применим функционал $u(t)$ к элементу $Q_{t_0}^{t}\varphi_0$, где φ_0 — любой элемент пространства Φ. Дифференцируя результат по t и используя уравнение (1) и равенство (6), находим

$$\frac{d}{dt}\left(u(t),\ Q_{t_0}^{t}\varphi_0\right)=\left(\frac{du(t)}{dt},\ Q_{t_0}^{t}\varphi_0\right)+\left(u(t),\ \frac{dQ_t^{t}}{dt}\varphi_0\right)=$$
$$=\left(-A_t^*u(t),\ Q_{t_0}^{t}\varphi_0\right)+\left(u(t),\ A_tQ_{t_0}^{t}\varphi_0\right)=$$
$$=\left(-A_t^*u(t),\ Q_{t_0}^{t}\varphi_0\right)+\left(A_t^*u(t),\ Q_{t_0}^{t}\varphi_0\right)=0.$$

Отсюда следует, что величина $\left(u(t),\ Q_{t_0}^{t}\varphi_0\right)$ постоянна. Используя начальное условие $u(0)=0$, находим, что эта величина при всех t равна нулю. В частности, при $t=t_0$ мы получаем:

$$(u(t_0),\ \varphi_0)=0.$$

Так как φ_0 — произвольный элемент пространства Φ, то функционал $u(t_0)$ есть нулевой функционал. Поскольку t_0 было произвольно выбрано между 0 и T, мы получаем, что $u(t)\equiv 0$, что и требовалось.

2. Более общая теорема единственности. Если нас интересует только проблема единственности, то мы можем значительно обобщить ситуацию, описанную в п. 1. Мы предположим теперь, что пространство Φ является частью некоторого другого пространства Φ_1, которое в свою очередь содержится в третьем пространстве E:

$$\Phi\subset\Phi_1\subset E.$$

Каждое включение, естественно, предполагается сохраняющим линейные операции, а также сходимость, т. е. из $\varphi_n\to 0$ в Φ следует $\varphi_n\to 0$ в Φ_1 и из $\varphi_n\to 0$ в Φ_1 следует $\varphi_n\to 0$ в E. Предположим далее, что Φ плотно в E. Каждый линейный непрерывный функционал на E является тем самым линейным непрерывным функционалом на Φ и Φ_1. Предположим, кроме того, что оператор A_t может быть распространен с пространства Φ, где он определен с самого начала, на пространство Φ_1. Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Если в пространстве Φ для любых t_0 и t $(0\leqslant t\leqslant t_0\leqslant T)$ определен линейный непрерывный оператор $Q_{t_0}^t$, переводящий пространство Φ в пространство Φ_1 и дающий в применении к любому вектору $\varphi_0\in\Phi$ решение задачи Коши*

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=A_t\varphi(t),\quad \varphi(t_0)=\varphi_0,\quad \varphi(t)\in\Phi_1, \tag{1}$$

то задача Коши

$$\frac{du(t)}{dt}=-\overset{*}{A_t}u(t),\quad u(0)=u_0 \tag{2}$$

*может иметь в интервале $0\leqslant t\leqslant T$ лишь единственное решение**) $u(t)\in E'$.

*) Отметим, что для заключения о единственности решения задачи Коши (2) в интервале $0\leqslant t\leqslant T$ с начальным условием при $t=0$ достаточно предполагать существование оператора $Q_{t_0}^t$ только при $0\leqslant t\leqslant t_0\leqslant T$ (верхний индекс не превосходит нижнего).

Доказательство. Мы можем рассуждать так же, как и в теореме 1. Оператор $Q_{t_0}^t$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dQ_{t_0}^t}{dt}=A_tQ_{t_0}^t.$$

Только это уравнение и используется при доказательстве единственности решения задачи Коши (1)—(2) в конце п. 1, так что мы можем воспользоваться основной идеей этого доказательства. Функционал $u(t)\in E'$, являющийся решением задачи Коши (1)—(2) с начальным условием $u(0)=0$, мы применим к вектору $Q_{t_0}^t\varphi_0\in\Phi_1\subset E$. Таким же образом, как в п. 1, мы покажем, что $(u(t_0),\ \varphi_0)=0$, т. е. функционал $u(t_0)$ обращается в нуль на пространстве Φ. Так как $u(t_0)$ определен по условию на всем E и Φ по условию плотно в E, то $u(t_0)$ есть нулевой функционал в E, что и требуется.

§ 3. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ. ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД

1. Введение. Мы будем рассматривать систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial u_j(x,t)}{\partial t}=\sum_{k=1}^{m}P_{jk}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u_k(x,t)\quad (j=1,2,\ldots,m). \tag{1}$$

Здесь $u_j(x,t)$ — неизвестные функции. Операторы $P_{jk}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ представляют собой многочлены от производных $\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}$ максимального порядка p (по совокупности аргументов); число p называется *порядком системы* (1).

Задача Коши состоит в определении совокупности функций $u_j(x,t)$ $(j=1,2,\ldots,m)$, удовлетворяющей при $t\geqslant 0$ уравнениям (1) и при $t=0$ начальным условиям

$$u_j(x,0)=u_j(x), \tag{2}$$

где $u_j(x)$ — заданные функции. Совокупность $\{u_j(x,t)\}$ называется *решением* задачи (1)—(2).

Часто удобнее записывать задачу Коши (1)—(2) в векторной форме

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t), \tag{3}$$

$$u(x,0) = u(x), \tag{4}$$

где $u(x,t)$ — неизвестная вектор-функция, $u(x,t) = \{u_j(x,t)\}$, а $P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — матрица (m строк, m столбцов) из линейных дифференциальных операторов.

Ставится вопрос о построении класса единственности решения задачи Коши (1)—(2), т. е. об указании такой совокупности функций $\{u(x)\}$, что решение, если оно существует и при каждом $t\,(0 \leqslant t \leqslant T)$ принадлежит этой совокупности, может быть лишь единственным.

Прежде чем проводить доказательство в общей форме, мы проиллюстрируем его основную идею на примере уравнения

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \tag{5}$$

где a — произвольная (комплексная) постоянная.

Неизвестная функция $u(x,t)$ считается (при каждом значении t) обобщенной функцией над некоторым основным пространством Ф. Это основное пространство Ф в соответствии с планом § 1 должно быть подобрано так, чтобы в нем задача Коши для соответствующего уравнения («обратно-сопряженного»)

$$\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} = -\bar{a}\,\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial x^2}$$

была всегда разрешима. Формально это решение записывается в виде

$$\varphi(x,t) = e^{-\bar{a}(t-t_0)\frac{d^2}{dx^2}}\varphi_0(x),$$

и пространство Ф нужно подобрать так, чтобы в нем был определен дифференциальный оператор бесконечного порядка

$$Q_{t_0}^{t} = e^{-\bar{a}(t-t_0)\frac{d^2}{dx^2}}.$$

Кроме того, выгодно подобрать пространство Ф возможно более узким, с тем, чтобы теорема единственности

была получена в возможно более широком классе обобщенных функций. Выберем пространство Ф из числа пространств S_α^β, описанных в гл. IV вып. 2. Пространство S_α^β состоит из функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|x^k\varphi^{(q)}(x)| \leqslant CA^kB^qk^{k\alpha}q^{q\beta}.$$

Функция $f\left(\frac{d}{dx}\right) = e^{-\bar{a}(t-t_0)\frac{d^2}{dx^2}}$ имеет порядок роста 2. Чтобы иметь возможность применить основную теорему § 5 гл. IV вып. 2, нужно рассмотреть пространство S_α^β с $\frac{1}{\beta} > 2$ или $\beta < \frac{1}{2}$. Выберем, далее, возможно меньшее α, при котором S_α^β нетривиально; оно равно $1-\beta$, следовательно, больше $\frac{1}{2}$. Основные функции, входящие в это пространство, имеют при $|x| \to \infty$ экспоненциальное убывание порядка $\frac{1}{\alpha}$, т. е. меньше 2. Единственность решения задачи Коши для уравнения (1) имеет место на основании § 1 в сопряженном пространстве; в частности, она имеет место в совокупности обычных функций $f(x)$, растущих при $|x| \to \infty$ медленнее, чем e^{x^2}:

$$|f(x)| \leqslant Ce^{x^{2-\varepsilon}}.$$

Итак, мы указали класс единственности решения задачи Коши для уравнения (5) *). Заметим, что этот класс не зависит от значения постоянной a; даже в некорректном случае, когда $\operatorname{Re} a < 0$, в указанном классе функций единственность решения задачи Коши сохраняется.

2. Предварительные построения и формулировка основной теоремы. Переходим к исследованию общего случая.

Мы будем применять схему § 2 в следующей форме. Элементами линейных топологических пространств Ф, $Ф_1$, фигурирующих в построениях § 2, будут m-мерные вектор-функции $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, компоненты которых $\varphi_1(x), \ldots$

*) Здесь он указан еще не вполне точно; в действительности, как это будет видно далее, вместо показателя $2-\varepsilon$ можно писать показатель 2. Такое уточнение получается за счет использования пространств $S_{\alpha A}^{\beta B}$ вместо S_α^β.

..., $\varphi_m(x)$ — элементы функциональных пространств, рассмотренных в гл. IV вып. 2 или в гл. 1 настоящего выпуска. Определение векторного пространства, например S_α^β при $n=1$ производится по формуле

$$S_\alpha^\beta = \{\varphi\} = \{(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)\},$$
$$\| x^k \varphi^{(q)}(x) \| \leqslant CA^k B^q k^{k\alpha} q^{q\beta} \quad (k, q = 0, 1, 2, \ldots),$$

где $\| \ \|$ — обычная норма вектора в евклидовом пространстве. Такое векторное основное пространство является просто прямой суммой аналогичных скалярных основных пространств.

Линейные непрерывные функционалы на векторном основном пространстве также можно считать векторами — «обобщенными вектор-функциями» $f = (f_1, \ldots, f_n)$; при этом функционал f действует на основную вектор-функцию $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ по формуле

$$(f, \varphi) = (f_1, \varphi_1) + \ldots + (f_m, \varphi_m).$$

Каждый линейный оператор A на основном векторном пространстве Φ задается матрицей $\| A_{jk} \|$, элементы которой суть обычные линейные операторы в скалярном пространстве Φ. Действие оператора A на основную вектор-функцию $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ производится по обычному правилу

$$A\varphi = \left\| \begin{matrix} A_{11} & \ldots & A_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \ldots & A_{mm} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_m \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \sum A_{1k}\varphi_k \\ \vdots \\ \sum A_{mk}\varphi_k \end{matrix} \right\|.$$

В частности, оператор $\frac{d}{dx}$ задается диагональной матрицей с обычными операторами $\frac{d}{dx}$ по диагонали, оператор умножения на x — диагональной матрицей с множителями x на диагонали.

Оператор A^*, сопряженный к оператору, заданному матрицей $\| A_{jk} \|$, определяется матрицей $\| A_{kj}^* \|$, получающейся из матрицы $\| A_{jk} \|$ заменой операторов A_{jk} сопряженными и транспонированием. Например, если $A = \left\| P_{jk}\left(i \frac{d}{dx}\right) \right\|$, то

$$A^* = \left\| \overline{P}_{kj}\left(i \frac{d}{dx}\right) \right\|.$$

В дальнейшем для простоты мы будем говорить просто «функция» вместо «вектор-функция» и вообще будем, как правило, использовать терминологию скалярного случая; из контекста каждый раз будет ясно, идет речь о скалярном или векторном случае. При первом чтении полезно иметь в виду только скалярный случай, т. е. случай одного уравнения. Некоторые детали рассуждений, относящиеся к общему случаю систем, пропущены, но читателю нетрудно будет их восстановить.

В соответствии с общим планом § 2 мы будем рассматривать неизвестную функцию $u(x, t)$ как обобщенную функцию — функционал над векторным основным пространством Φ, зависящим от параметра t. Задача теперь сводится к построению такого основного пространства $\Phi = \{\varphi(x)\}$, в котором существует решение задачи Коши для системы (в векторной записи)

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \mathrm{P}\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi(x, t) \tag{1}$$

при любых начальных условиях

$$\varphi(x, t_0) = \varphi_0(x) \in \Phi. \tag{2}$$

Через P мы обозначили здесь матрицу, связанную с матрицей P соотношением

$$\mathrm{P}_{jk} = -\overline{P}_{kj} \quad (j, k = 1, 2, \ldots, m).$$

Решение задачи Коши (1)—(2) формально записывается в виде

$$\varphi(x, t) = e^{(t-t_0)\,\mathrm{P}\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)} \varphi_0(x).$$

Матрица

$$e^{(t-t_0)\,\mathrm{P}\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)} = Q_{t_0}^t\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left\| Q_{jk}\left(i \frac{\partial}{\partial x}, t_0, t\right) \right\|$$

составлена из элементов $Q_{jk}\left(i \frac{\partial}{\partial x}, t_0, t\right)$, которые представляют собой целые аналитические функции от $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$;

поэтому мы должны построить пространство Φ с тем расчетом, чтобы в нем были определены соответствующие дифференциальные операторы бесконечного порядка.

Из гл. IV вып. 2 мы знаем, что для этой цели можно использовать пространства $S_{\alpha, A}^{3, B}$, параметры которых следует подобрать в соответствии с ростом функций $Q_{jk}(s, t_0, t)$. Поэтому прежде всего мы должны оценить рост функций $Q_{jk}(s, t_0, t)$.

Будем понимать под нормой матрицы $A = \| a_{jk} \|$ $(j, k = 1, 2, \ldots, m)$ норму соответствующего линейного оператора в m-мерном евклидовом пространстве векторов $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ со скалярным произведением $(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}) = \sum \xi_j^{(1)} \xi_j^{(2)}$. Тогда, как известно *),

$$\max_k \sum_{j=1}^m |a_{jk}|^2 \leqslant \|A\|^2 \leqslant \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m |a_{jk}|^2. \tag{3}$$

Если в качестве матрицы A взять матрицу $\mathrm{P}(s)$ (матрицу системы (1), где $i \dfrac{\partial}{\partial x}$ заменено на s), то для элементов этой матрицы при достаточно больших $|s|$ справедлива оценка

$$|\mathrm{P}_{jk}(s)| \leqslant C |s|^p,$$

поскольку все они являются многочленами от s степени, не превосходящей p. В силу неравенства (3)

$$\|\mathrm{P}(s)\|^2 \leqslant \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m |\mathrm{P}_{jk}(s)|^2 \leqslant C_1^2 |s|^{2p}.$$

Далее, мы имеем:

$$\|Q(s, t_0, t)\| = \|e^{(t-t_0)\mathrm{P}(s)}\| = \left\| \sum_{k=0}^\infty \frac{(t-t_0)^k}{k!} \mathrm{P}^k(s) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^\infty \frac{(t-t_0)^k}{k!} \|\mathrm{P}^k(s)\| \leqslant \sum_{k=0}^\infty \frac{(t-t_0)^k}{k!} \|\mathrm{P}(s)\|^k \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^\infty \frac{(t-t_0)^k}{k!} C_1^k |s|^{pk} \leqslant e^{(t-t_0) C_1 |s|^p}.$$

*) Г. Е. Шилов, Введение в теорию линейных пространств, 2-е изд., Гостехиздат, М., 1956, стр. 149. Читателю всегда будет ясно из контекста, где мы обозначаем через $\| \ \|$ матрицу и где — норму матрицы.

Элементы матрицы $Q(s, t_0, t)$, очевидно, аналитические функции от s. Мы видим, что эти элементы суть *целые аналитические функции порядка роста, не превосходящего p*.

В действительности эти функции могут иметь и меньший порядок роста. В § 6 мы покажем, что существует наименьшее число $p_0 \leqslant p$ — будет указано, как его вычислять, — такое, что справедлива оценка

$$\|Q(s, t_0, t)\| \leqslant C_2 (1 + |s|)^{(m-1)p} e^{b|t-t_0| |s|^{p_0}}. \tag{4}$$

Число p_0 — точный экспоненциальный порядок роста матрицы — называется *приведенным порядком системы*.

Приведенный порядок значительно точнее характеризует свойства системы, чем ее обычный порядок p (максимальный из порядков дифференциальных операторов по x, стоящих в правых частях системы). Обычный порядок может измениться при переходе от неизвестных функций $u_j(x, t)$ к их линейным комбинациям и к линейным комбинациям их производных, а приведенный порядок не меняется при этих преобразованиях. Рассмотрим, например, две системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= u_2, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \end{aligned}\right\} \quad \text{(I)} \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} &= \frac{\partial v_2}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} &= a \frac{\partial v_1}{\partial x}, \end{aligned}\right\} \quad \text{(II)}$$

переходящие друг в друга при замене $u_1 = v_1$, $u_2 = \dfrac{\partial v_2}{\partial x}$. Фактически эти две системы суть разные формы записи одного и того же уравнения 2-го порядка $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Но обычный порядок p у этих систем различен (у первой $p = 2$, у второй $p = 1$), а приведенный порядок, как легко сосчитать, у обеих систем равен 1. Приведенный порядок есть в некотором смысле истинный порядок, и, как показала В. М. Борок, любую систему с (целым) приведенным порядком p_0 можно привести к системе, у которой и обычный порядок будет равен p_0.

Отметим, что для обратно-сопряженных систем с матрицами P и $\mathrm{P} = -\overline{P}$ приведенные порядки, очевидно, совпадают.

4*

Оказывается, что приведенный порядок определяет в конечном счете и класс единственности решения задачи Коши для заданной системы.

Именно, имеет место следующая основная теорема.

Теорема 1. *Если для системы* (1) п. 1 *приведенный порядок* $p_0 > 1$, *то совокупность всех функций* $f(x)$, *удовлетворяющих неравенству*

$$|f(x)| \leqslant Ce^{b_0 x^{p_0'}}, \quad \frac{1}{p_0}+\frac{1}{p_0'}=1, \tag{5}$$

с любыми фиксированными C *и* b_0 *образует класс единственности решения задачи Коши для системы* (1) п. 1; *иными словами, может существовать лишь единственное решение системы* (1) п. 1, *обращающееся при* $t=0$ *в заданную вектор-функцию* $u_0(x)$, *все компоненты которой при* $0 \leqslant t \leqslant T$ *принадлежат классу* (5). *Если* $p_0=1$, *то классом единственности служит совокупность функций* (5) *с любым (фиксированным) значением* p_0'. *Если* $p_0<1$, *то решение задачи Коши* (1)—(2) п. 1 *единственно в классе всех функций* $f(x)$ *без всяких ограничений роста на бесконечности.*

Допустимый интервал времени $0 \leqslant t \leqslant T$ *зависит лишь от постоянных* C *и* b_0 *и не зависит от выбора начальной функции* $u_0(x)$.

Дальнейшее содержание этого параграфа посвящено доказательству этой теоремы.

3. Доказательство основной теоремы. Предположим, что число t изменяется в пределах $t_0 \leqslant t \leqslant t_0+T$, причем $bT<\theta$, где θ — произвольно выбранное число. Тогда, как следует из оценки (4) п. 2, целые функции, входящие в состав матрицы $Q(s, t_0, t)$, имеют порядок роста p_0 с типом, меньшим θ.

Теперь уточним выбор основного пространства Φ.

Для простоты будем временно считать, что аргумент x изменяется не в n-мерном пространстве, а на прямой: $-\infty < x < \infty$.

Напомним, что (скалярное) пространство $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$ состоит из бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих при любых $\delta>0$, $\rho>0$ неравенствам

$$|x^k\varphi^{(q)}(x)| \leqslant C_{\delta\rho}(A+\delta)^k k^{k\alpha}(B+\rho)^q q^{q\beta}.$$

В § 5 гл. IV вып. 2 была доказана следующая теорема: если $f(s)$ есть целая функция порядка роста $\frac{1}{\beta}$ и типа, меньшего $\frac{\beta}{B^{1/\beta}e^2}$, то оператор $f\left(\frac{d}{dx}\right)$ определен и ограничен в пространстве $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$ и переводит это пространство в пространство $S_{\alpha,A}^{\beta,B'}$, где $B'=Be^{\beta}$.

Так как нам теперь известны оценки порядка роста (p_0) и типа ($<\theta$) целых функций $Q_{ij}(s, t_0, t)$, то мы можем воспользоваться этой теоремой для построения векторного пространства $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$, в котором будет действовать оператор $Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}, t_0, t\right)$. Мы найдем, естественно, β и B из уравнений

$$\frac{1}{\beta}=p_0, \quad \frac{\beta}{B^{1/\beta}e^2}=\theta. \tag{1}$$

Числа α и A мы определим из условия нетривиальности пространства $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$. Из уравнений (1) мы имеем:

$$\beta=\frac{1}{p_0}, \quad B=\left(\frac{\beta}{\theta e^2}\right)^{\beta}.$$

Предположим сначала, что $p_0>1$. Тогда $\beta<1$ и для обеспечения нетривиальности пространства $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$ мы можем положить в соответствии с результатами § 8 гл. IV вып. 2:

$$\alpha=1-\beta, \quad A=\frac{\gamma}{B},$$

где γ — некоторое положительное число.

Случай $p_0 \leqslant 1$ мы разберем несколько позднее.

Основные функции, входящие в (скалярное) пространство $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$, характеризуются следующей оценкой убывания при $|x| \to \infty$:

$$|\varphi(x)| \leqslant Ce^{-a|x|^{1/\alpha}}.$$

Показатель $\frac{1}{\alpha}$ можно выразить через приведенный порядок p_0:

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{1-\beta}=\frac{1}{1-\frac{1}{p_0}}=p_0'.$$

Коэффициент a вычисляется по формуле (5) п. 1 § 2 гл. IV вып. 2:

$$a = \frac{\alpha}{eA^{1/\alpha}};$$

он может быть выражен через величину θ:

$$a = \frac{\alpha}{e}\left(\frac{B}{\gamma}\right)^{1/\alpha} = C\theta^{-\beta/\alpha}. \qquad (2)$$

Итак, построение пространства $\Phi = S_{\alpha,A}^{\beta,B}$, в котором действует оператор $Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}, t_0, t\right)$, закончено. Покажем теперь, что для любой основной функции $\varphi(x) \in S_{\alpha,A}^{\beta,B}$ решение задачи Коши

$$\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} = \mathrm{P}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x,t),$$

$$\varphi(x, t_0) = \varphi(x),$$

задается формулой

$$\varphi(x,t) = Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}, t_0, t\right)\varphi(x).$$

Иными словами, мы должны доказать, что для каждой основной функции $\varphi(x)$ в топологии пространства $S_{\alpha,A}^{\beta,Be^{\beta}}$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\left[Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}, t_0, t\right)\varphi(x)\right]}{\Delta t} = \mathrm{P}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}, t_0, t\right)\varphi(x)\right],$$

$$\lim_{t\to t_0} Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}, t_0, t\right)\varphi(x) = \varphi(x).$$

Критерий сходимости последовательности основных функций $\varphi_\nu(x)$ в пространстве $S_{\alpha,A}^{\beta,Be^{\beta}}$, как мы помним из гл. IV вып. 2, состоит в следующем: последовательность $\varphi_\nu(x)$ сходится в этом пространстве к функции $\varphi(x)$, если множество функций $\{\varphi_\nu(x)\}$ ограничено в этом пространстве и если имеет место правильная сходимость $\varphi_\nu(x)\to\varphi(x)$, т. е. на каждом конечном отрезке функции $\varphi_\nu(x)$ равномерно сходятся к $\varphi(x)$ вместе со всеми своими производными. Используем здесь этот критерий.

Для этого заметим прежде всего, что матрицы из целых функций

$$Q(s, t_0, t) = e^{(t-t_0)\mathrm{P}(s)},$$

$$\frac{\Delta Q(s,t_0,t)}{\Delta t} = \frac{e^{\Delta t\mathrm{P}(s)}-1}{\Delta t}e^{(t-t_0)\mathrm{P}(s)}$$

допускают оценки, не зависящие от t, $0\leqslant t\leqslant T$, $bT<\theta$, а именно:

$$\|Q(s,t_0,t)\| \leqslant e^{\theta|s|^p},$$

$$\left\|\frac{\Delta Q(s,t_0,t)}{\Delta t}\right\| \leqslant e^{\theta|s|^p},$$

и поэтому определяют равномерно ограниченные (по t) операторы в пространстве $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$. Отсюда следует, что семейства функций

$$\psi(x,t) = Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}, t_0, t\right)\varphi(x),$$

$$\chi(x,t) = \frac{\Delta Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}, t_0, t\right)}{\Delta t}\varphi(x)$$

ограничены при $0\leqslant t\leqslant T$ в пространстве $\Phi_1 = S_{\alpha,A}^{\beta,B'}$ ($B' = Be^{\beta}$). Мы должны показать, что функции $\psi(x,t)$ при $t\to t_0$ правильно сходятся к $\varphi(x)$, а функции $\chi(x,t)$ при $\Delta t\to 0$ — к $\mathrm{P}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x,t)$.

Функция $\psi(x,t)$ определяется рядом

$$\psi(x,t) = Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}, t_0, t\right)\varphi(x) = e^{(t-t_0)\mathrm{P}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)}\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^k}{k!}\left[\mathrm{P}^k\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)\right],$$

сходящимся абсолютно и равномерно по x, как было показано в скалярном случае в § 5 гл. I вып. 2. Этот ряд сходится также равномерно по параметру t в пределах $t_0\leqslant t\leqslant T$. Поэтому можно перейти к пределу при $t\to t_0$ в каждом члене и просуммировать результаты; мы получим:

$$\lim_{t\to t_0}\psi(x,t) = \mathrm{P}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x) = \varphi(x).$$

Очевидно, что имеет место также и равномерная сходимость рядов, полученных дифференцированием данного по x. Это доказывает искомую правильную сходимость.

Аналогично устанавливается и второе предельное соотношение.

Итак, мы показали, что $Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}, t_0, t\right)$ является оператором, разрешающим в пространстве $\Phi = S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ задачу Коши (1) — (2) п. 2.

Мы используем теперь теорему п. 2 § 2. Как мы помним, эта теорема утверждала: если линейный оператор $Q_{t_0}^t$ переводит пространство Φ в пространство $\Phi_1 \supset \Phi$ и при любом $\varphi \in \Phi$ функция $\psi(t) = Q_{t_0}^t \varphi_0$ есть решение задачи Коши

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = A\varphi(t), \quad \varphi(t) = \varphi_0,$$

то задача Коши

$$\frac{du(t)}{dt} = -A^* u(t), \quad u(0) = u_0$$

может иметь лишь единственное решение в пространстве E', сопряженном к любому пространству E, содержащему в качестве плотных подмножеств пространства Φ и Φ_1.

В нашем случае, как уже говорилось, операторы $Q_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}, t_0, t\right)$ переводят пространство $\Phi = S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ с найденными значениями α, β, A, B в пространство $\Phi_1 = S_{\alpha, A}^{\beta, Be^\beta}$. Это пространство Φ_1 состоит из функций $\varphi(x)$ с тем же порядком убывания на бесконечности, что и у пространства Φ. Поэтому оно в свою очередь заключено в нормированном пространстве E, состоящем из измеримых функций $\varphi(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ с нормой по формуле

$$\|\varphi\|_E = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{a}{2}|x|^{p_0'}} |\varphi(x)|\, dx. \tag{3}$$

Нетривиальное пространство $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$, согласно сказанному в § 8 гл. I вып. 2, достаточно богато функциями и располагается плотно во всяком более широком нормированном

пространстве E с нормой вида (3). Таким образом, предпосылки теоремы п. 2 § 2 выполнены. Применяя ее, мы получаем: задача Коши для системы (1) п. 1 может иметь лишь единственное решение, принадлежащее при всех t, $0 \leqslant t \leqslant T$, $bT < \theta$, к пространству E'.

Пространство E', сопряженное к пространству E, состоит из измеримых функций $f(x)$, удовлетворяющих (почти всюду) неравенству

$$\|f(x)\| < Ce^{\frac{a}{2}|x|^{p_0'}}. \tag{4}$$

Следовательно, *задача Коши* (1) — (2) п. 1 *может иметь при* $0 \leqslant t \leqslant T$, $bT < \theta$ *лишь единственное решение в классе измеримых функций, удовлетворяющих неравенству* (4).

Заметим, что за счет уменьшения допустимого интервала времени $0 \leqslant t \leqslant T$, $bT < \theta$ постоянная $a/2$ в неравенстве (4), связанная с θ равенством (2), может быть взята произвольно большой, в частности, равной заданному b_0.

Мы доказали тем самым теорему 1 для $p_0 > 1$.

Рассмотрим теперь оставшиеся случаи $p_0 = 1$ и $p_0 < 1$.

При $p_0 = 1$ число β, определенное из условия (1), также равно 1. Число α теперь уже нельзя выбрать равным $1 - \beta = 0$, так как пространство S_0^1 тривиально. Мы возьмем в качестве α любое положительное число. Пространство $S_{\alpha, A}^{1, B}$, согласно § 8 гл. IV вып. 2, нетривиально, и мы можем взять его в качестве пространства Φ при доказательстве теоремы.

В результате мы придем к классу единственности решения задачи Коши (1)—(2) п. 1 в форме

$$|f(x)| \leqslant Ce^{b_0|x|^{1/\alpha}},$$

где $\frac{1}{\alpha}$ вместе с α — любое (фиксированное) положительное число.

Наконец, при $p_0 < 1$ имеем $\beta = \frac{1}{p_0} > 1$ и можно взять $\alpha = 0$.

Пространство $S_{0, A}^{\beta, B}$ хотя и нетривиально, но не является достаточно богатым функциями. Поэтому мы в данном случае в качестве пространства Φ возьмем пространство $S_0^{\beta, B}$ —

объединение пространств $S_{0, A}^{\beta, B}$ по индексу A; как было показано в § 8 гл. IV вып. 2, оно уже достаточно богато функциями.

Все функции, входящие в пространство $\Phi = S_0^{\beta, B}$, финитны; поэтому пространство Φ входит в нормированное пространство E с нормой

$$\|\varphi\|_E = \int_{-\infty}^{\infty} E(x)\|\varphi(x)\|\,dx$$

с *любой* весовой функцией $E(x)$. В результате мы получаем, что совокупность функций $f(x)$, удовлетворяющих неравенству

$$|f(x)| \leqslant CE(x),$$

есть класс единственности решений задачи Коши (1)—(2) п. 1. Так как $E(x)$ — произвольная функция, то решение единственно в области всех функций $f(x)$ без всяких ограничений роста. Тем самым для $n=1$ теорема 1 доказана полностью.

В случае, когда имеется $n > 1$ независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ (а не одно переменное x, как мы предполагали), доказательство проходит по той же схеме, с заменой пространства $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ на его n-мерный аналог $S_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, A_1, \ldots, A_n}^{\beta_1, \ldots, \beta_n, B_1, \ldots, B_n}$ (§ 9 гл. IV вып. 2). Функции $Q_{jk}(s, t_0, t) = Q_{jk}(s_1, \ldots, s_n, t_0, t)$ теперь допускают оценку вида

$$|Q_{jk}(s_1, \ldots, s_n, t_0, t)| \leqslant Ce^{\theta_1|s_1|^p + \ldots + \theta_n|s_n|^p} \qquad (5)$$

с приведенным порядком p_0. В соответствии со значением p_0 подбираются, как и выше, числа $\beta_j, B_j, \alpha_j, A_j$, определяющие в совокупности пространство $S_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, A_1, \ldots, A_n}^{\beta_1, \ldots, \beta_n, B_1, \ldots, B_n}$. В результате мы приходим к классу единственности в форме

$$|f(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant Ce^{a_1|x_1|^{p_0'} + \ldots + a_n|x_n|^{p_0'}}, \qquad (6)$$

если $p_0 > 1$, к соответствующему классу, где p_0' заменено на любой показатель r, если $p_0 = 1$, и к классу всех функций без ограничения роста, если $p_0 < 1$. Тем самым теорема 1 доказана полностью.

Отметим новое обстоятельство, возникающее при рассмотрении функций нескольких переменных. Целые функции $Q_{jk}(s_1, \ldots, s_n, t_0, t)$ могут наряду с оценкой (5) допускать также и другую оценку

$$|Q_{jk}(s_1, \ldots, s_n, t_0, t)| \leqslant Ce^{\theta_1|s_1|^{p_1^0} + \ldots + \theta_n|s_n|^{p_n^0}},$$

где числа p_j^0 могут быть меньше или больше приведенного порядка p_0. Если в соответствии с этими значениями p_j^0 подобрать числа $\beta_j, B_j, \alpha_j, A_j$, определяющие пространство $S_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, A_1, \ldots, A_n}^{\beta_1, \ldots, \beta_n, B_1, \ldots, B_n}$, то мы придем к классу единственности в форме

$$|f(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant Ce^{a_1|x_1|^{q_1^0} + \ldots + a_n|x_n|^{q_n^0}} \quad \left(\frac{1}{p_j^0} + \frac{1}{q_j^0} = 1\right).$$

Этот класс, вообще говоря, не содержится в классе единственности, определяемом формулой (6).

Например, для функции

$$Q(s_1, s_2, t_0, t) = e^{(t-t_0)s_1s_2}$$

мы можем написать любую из оценок

$$|e^{(t-t_0)s_1s_2}| \leqslant e^{(t-t_0)|s_1||s_2|} \leqslant e^{(t-t_0)\left(\frac{|s_1|^{r_1}}{r_1} + \frac{|s_2|^{r_2}}{r_2}\right)},$$

где $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 1$. В соответствии с этим для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}$$

каждый из классов функций

$$|f(x_1, x_2)| \leqslant Ce^{b_1|s_1|^{r_1} + b_2|s_2|^{r_2}} \quad \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 1\right)$$

является классом единственности.

4. Обычное решение как обобщенное. Наше исследование должно быть дополнено в одном важном пункте. В предыдущем изложении при рассмотрении задачи Коши

$$\frac{\partial u_j(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{m} P_{jk}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u_k(x, t), \qquad (1)$$

$$u_j(x, 0) = u_j(x) \qquad (2)$$

мы понимали под функциями $u_j(x, t)$ обобщенные функции над некоторым основным пространством Φ. И операции $\frac{\partial}{\partial t}$ и $P_{jk}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$, участвующие в уравнении (1), понимались также в смысле обобщенных функций: иными словами, выполнение системы уравнений для некоторых $u_j(x, t)$ означало, что для любой основной функции $\varphi(x)$

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_j(x, t), \varphi(x)) = \sum_{k=1}^{m}\left(u_k(x, t), \bar{P}_{jk}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)\right),$$

а выполнение начальных условий (2) — что

$$\lim_{t\to 0}(u_j(x, t), \varphi(x)) = (u_j(x, 0), \varphi(x)).$$

Поэтому, прежде чем применять теорему 1 к данному *обычному* решению $u_j(x, t)$ задачи Коши, необходимо проверить, что соответствующая обобщенная функция

$$(u_j(x, t), \varphi(x)) = \int u_j(x, t)\varphi(x)\,dx$$

есть решение задачи Коши (1)—(2) и в смысле обобщенных функций. Этот факт имеет место в общем случае в силу следующей теоремы.

Теорема 2. *Если функции $u_k(x, t)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ дифференцируемы по t, допускают применение дифференциальных операторов $P_{jk}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ (т. е. обладают производными по x до порядка p), обращают систему уравнений (1) в систему тождеств и удовлетворяют неравенствам*

$$|u_k(x, t)| \leqslant Ce^{\frac{a}{2}|x|^{1/\alpha}}, \tag{3}$$

то система функционалов над пространством $\Phi = S_{\alpha, A}^{\beta, B}$, $a = \frac{\alpha}{eA^{1/\alpha}}$,

$$(u_k(x, t), \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} u_k(x, t)\varphi(x)\,dx \tag{4}$$

есть решение задачи Коши для системы (1) в смысле обобщенных функций с начальными функционалами, определенными функциями $u_k(x, 0)$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что выражения (1) в силу условия (3) действительно определяют на пространстве $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ линейные непрерывные функционалы. Более того, поскольку постоянные в оценке (3) не зависят от t, выражения (4) непрерывны равномерно по t в следующем смысле: если последовательность функций $\varphi_\nu(x)$ стремится к функции $\varphi(x)$ по топологии пространства $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$, то предельное соотношение

$$(u_k(x, t), \varphi_\nu(x)) \to (u_k(x, t), \varphi(x))$$

имеет место равномерно по t в интервале $0 \leqslant t \leqslant T$.

Мы должны показать, что для каждой основной функции $\varphi(x)$ выполняются равенства

$$\frac{\partial}{\partial t}\int u_k(x, t)\varphi(x)\,dx = \sum\int u_j(x, t)P_{jk}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)\,dx \tag{5}$$

и предельные соотношения

$$\int [u_k(x, t) - u_k(x, 0)]\,\varphi(x)\,dx \to 0. \tag{6}$$

Заметим, что просто умножить систему (1) на $\varphi(x)$ и интегрировать по частям мы не можем, так как неизвестно, будут ли сходиться получающиеся при этом интегралы. Поэтому мы вынуждены выбрать обходный путь.

Функционал $u_k(x, t)$ может быть продолжен с пространства $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ на пространство $S_{\alpha, A}$. Это последнее, как мы знаем, состоит из бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|\varphi^{(q)}(x)| \leqslant C_q e^{-a_1|x|^{1/\alpha}},$$

где a_1 имеет указанное выше значение $\frac{\alpha}{(A+\delta)^{1/\alpha}e}$.

Пусть задана функция $\varphi(x) \in S_{\alpha, A}$. Как мы знаем из вып. 2, финитные функции образуют плотную систему в этом пространстве. Поэтому можно построить последовательность финитных функций $\varphi_\nu(x)$, сходящуюся к функции $\varphi(x)$ по топологии пространства $S_{\alpha, A}$. В силу непрерывности функционала $u_k(x, t)$ имеет место предельное соотношение

$$(u_k(x, t), \varphi_\nu(x)) \to (u(x, t), \varphi(x)) \tag{7}$$

равномерно по t в интервале $0 \leqslant t \leqslant T$.

Функции $\psi_\nu(x) = P_{jk}\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi_\nu(x)$ также финитны, и в силу непрерывности оператора дифференцирования в пространстве $S_{\alpha, A}$, мы получаем также соотношения

$$\left.\begin{aligned} P_{jk}\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi_\nu(x) \to P_{jk}\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi(x), \\ \left(u(x, t), P_{jk}\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi_\nu(x)\right) \to \left(u(x, t), P_{jk}\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi(x)\right); \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

последнее — равномерно по t.

Умножая равенство

$$\frac{\partial u_k(x, t)}{\partial t} = \sum P_{jk}\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u_j(x, t)$$

на финитную функцию $\varphi_\nu(x)$ и интегрируя по частям, находим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int u_k(x, t) \varphi_\nu(x)\, dx = \sum_j \int u_j(x, t) P_{jk}\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi_\nu(x)\, dx. \tag{9}$$

Отсюда в силу (8) мы можем заключить, что функции, стоящие в левой части равенства (9), имеют при $\nu \to \infty$ предел, равный правой части соотношения (8), и сходятся к нему равномерно по t. Но и сами функции $(u(x, t), \varphi_\nu(x))$, как показывает соотношение (7), имеют при $\nu \to \infty$ предел, равный $(u(x, t), \varphi(x))$. Поэтому в силу теоремы о дифференцировании функциональных последовательностей

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_k(x, t), \varphi(x)) = \left(u_k(x, t), \sum P_{jk}\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi(x)\right),$$

что совпадает с требуемым равенством (5).

Для доказательства соотношения (6) заметим, что оно заведомо выполняется для финитных функций $\varphi(x) \in S_{\alpha, A}$. Так как функционалы $u_k(x, t) - u_k(x, 0)$ в силу оценок (3) ограничены равномерно (по t) и на плотном в основном пространстве множестве (финитных) функций стремятся к нулю, то они стремятся к нулю на каждом элементе $\varphi \in S_{\alpha, A}$, что и требуется. Тем самым теорема 2 полностью доказана.

§ 4. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ. МЕТОД ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ

1. Введение. В этом параграфе мы приведем другое доказательство результатов § 3, основанное на преобразовании Фурье.

Как хорошо известно, еще у авторов прошлого века задача Коши решалась с помощью преобразования Фурье. Но до недавнего времени применимость этого метода ограничивалась теми или иными требованиями относительно поведения преобразуемых функций на бесконечности. В классических работах это были условия типа интегрируемости функций или их степеней. В нашем веке вместо интегрируемости функции стали требовать интегрируемость ее произведения с некоторыми экспонентами $e^{-\lambda x}$ (преобразование Лапласа, которое есть одна из форм преобразования Фурье). Дальше этого классические средства математики не действовали. Поэтому для исследования уравнений с частными производными были применены другие методы, например для гиперболических уравнений — метод характеристик. В области гиперболических уравнений метод характеристик вполне естественен; он дает решение независимо от роста начальных данных на бесконечности. В то же время метод преобразований Фурье в его классической форме дает решение лишь в том случае, когда начальные функции не слишком быстро возрастают.

Но мы, действуя с обобщенными функциями, располагаем возможностью применять преобразование Фурье к любым, как угодно быстро растущим функциям. Это позволяет, так сказать, реабилитировать метод Фурье в применении к решению задачи Коши и дать единое построение, относящееся ко всем типам систем (не только к гиперболическим, где действует метод характеристик).

Метод преобразований Фурье позволяет найти подход и к проблеме о классах корректности решения задачи Коши, о чем мы будем говорить в следующей главе.

2. Основная теорема. Рассмотрим задачу Коши для систем дифференциальных уравнений (в векторной записи)

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x,\ 0)=u_0(x). \tag{2}$$

Как и в § 3, мы ставим себе задачей найти класс единственности решения задачи Коши (1) — (2). Для решения этой задачи мы снова будем рассматривать искомое решение $u(x,\ t)$ как обобщенную (вектор-) функцию над некоторым основным пространством Φ, зависящую непрерывным и дифференцируемым образом от параметра t.

В соответствии с общим методом § 2 единственность решения задачи Коши (1) — (2) в пространстве Φ' будет иметь место, если в основном пространстве Φ для любой начальной основной функции $\varphi_0(x)$ будет иметь решение задача Коши

$$\frac{\partial\varphi(x,\ t)}{\partial t}=\mathrm{P}\left(i\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x,\ t) \tag{3}$$

$$\varphi(x,\ t_0)=\varphi_0(x), \tag{4}$$

где $-\mathrm{P}\left(i\,\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ есть матрица, эрмитово-сопряженная по отношению к матрице $P\left(i\,\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$.

Чтобы найти пространство Φ, обладающее требуемыми свойствами, мы теперь применим к задаче (3) — (4) преобразование Фурье. Система (3) перейдет в систему обыкновенных уравнений с параметром

$$\frac{d\psi(s,\ t)}{dt}=\mathrm{P}(s)\,\psi(s,\ t); \tag{5}$$

начальное условие (4) заменится условием

$$\psi(s,\ t_0)=\psi_0(s), \tag{6}$$

где $\psi_0(s)$ есть основная функция в пространстве $\Psi=\widetilde{\Phi}$ — преобразование Фурье функции $\varphi_0(x)$.

Решение задачи Коши (5) — (6) формально записывается в виде

$$\psi(s,\ t)=e^{(t-t_0)\,\mathrm{P}(s)}\psi_0(s).$$

Матрица $e^{(t-t_0)\,\mathrm{P}(s)}=Q(s,\ t_0,\ t)$ состоит из целых аналитических функций от s. Поэтому мы должны построить пространство Ψ с расчетом, чтобы в нем было определено умножение на соответствующие целые функции.

Рассмотрим вначале случай одного независимого переменного; переход к общему случаю осуществляется так же, как в § 3.

Используем построенные в гл. I пространства типа $W_{M,\,a}^{\Omega,\,b}$, параметры которых будут нами подобраны в соответствии с ростом функции $Q(s,\ t_0,\ t)$. Рост матрицы $Q(s,\ t_0,\ t)$ был указан в § 3; он описывается неравенством

$$\|Q(s,\ t_0,\ t)\|\leqslant C_1(1+|s|)^{(m-1)p}e^{b_0(t-t_0)|s|^{p_0}},$$

где p_0 — приведенный порядок системы. Если t меняется в интервале $t_0\leqslant t\leqslant t_0+T$, причем $2^{p_0}b_0T<\dfrac{1}{p_0}\theta^{p}$, то можно также написать, что

$$\|Q(s,\ t_0,\ t)\|\leqslant C_2e^{2^{-p_0}\theta^{p_0}|s|^{p_0}\frac{1}{p_0}}.$$

Так как $|s|^{p_0}=|\sigma+i\tau|^{p_0}\leqslant 2^{p_0}(|\sigma|^{p_0}+|\tau|^{p_0})$, то окончательно

$$\|Q(s,\ t_0,\ t)\|\leqslant C_2e^{\frac{1}{p_0}\theta^{p_0}(|\sigma|^{p_0}+|\tau|^{p_0})}.$$

Напомним, что пространство $W_{M,\,a}^{\Omega,\,b}$ состоит из целых аналитических функций $\psi(s)$, для которых удовлетворяются неравенства

$$\psi(\sigma+i\tau)\leqslant Ce^{-M(\bar{a}\sigma)+\Omega(\bar{b}\tau)},$$

где M и Ω — некоторые выпуклые (книзу) функции; $\bar{a}$ — любая постоянная, меньшая, чем a; $\bar{b}$ — любая постоянная, большая, чем b. В § 2 гл. I была доказана следующая теорема.

Всякая целая аналитическая функция $f(s)$, удовлетворяющая неравенству

$$|f(\sigma+i\tau)|\leqslant Ce^{M(a_1\sigma)+\Omega(b_1\tau)},$$

определяет (ограниченный и непрерывный) оператор умножения в пространстве $\Psi=W_{M,\,a}^{\Omega,\,b}$ при $a>a_1$ и переводит его в пространство $\Psi_1=W_{M,\,a-a_1}^{\Omega,\,b+b_1}$.

Предположим, что $p_0>1$.

Возьмем $M(\sigma)=\dfrac{1}{p_0}|\sigma|^{p_0}$, $\Omega(\tau)=\dfrac{1}{p_0}|\tau|^{p_0}$; это выпуклые функции, и мы имеем по доказанному:

$$\|Q(s,\ t_0,\ t)\|\leqslant C_2e^{M(\theta\sigma)+\Omega(\theta\tau)}.$$

Применим приведенную выше теорему. При заданном a всегда можно выбрать интервал времени $0 \leqslant t \leqslant T$ настолько малым, чтобы выполнялось неравенство $\theta < a$; для таких значений T матрица $Q(s, t_0, t)$ будет мультипликатором в пространстве $W_{M, a}^{\Omega, b}$ и будет переводить его в пространство $W_{M, a-\theta}^{\Omega, b+\theta}$.

Покажем, что для любой основной функции $\psi_0(s) \in \Psi = W_{M, a}^{\Omega, b}$ формула

$$\psi(s, t) = Q(s, t_0, t)\,\psi_0(s)$$

определяет решение задачи Коши

$$\frac{\partial \psi(s, t)}{\partial t} = \mathrm{P}(s)\,\psi(s, t), \quad \psi(s, t_0) = \psi_0(s),$$

принадлежащее при $0 \leqslant t \leqslant T$ пространству $\Psi_1 = W_{M, a-\theta}^{\Omega, b+\theta}$. Для этого мы должны доказать, что по топологии пространства Ψ_1

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q(s, t_0, t)\,\psi_0(s)}{\Delta t} = \mathrm{P}(s)\,Q(s, t_0, t)\,\psi_0(s), \tag{7}$$

$$\lim_{t \to t_0} Q(s, t_0, t)\,\psi_0(s) = \psi_0(s). \tag{8}$$

В соответствии с определением сходимости в пространстве $W_{M,a}^{\Omega, b}$ (гл. I, § 1) мы должны показать, что функции под знаком lim сходятся к своим пределам правильно (т. е. равномерно в любой ограниченной области в плоскости s) и равномерно ограничены по t (в пространстве Ψ_1). Правильная сходимость в данном случае очевидна из определения функции $Q(s, t_0, t) = e^{(t-t_0)\,\mathrm{P}(s)}$. Ограниченность по t имеет место в силу оценок

$$\|Q(s, t_0, t)\| \leqslant C_2 e^{M(\theta\sigma) + \Omega(\theta\tau)}$$

и

$$\left\|\frac{\Delta Q(s, t_0, t)}{\Delta t}\right\| \leqslant C_3 e^{M(\theta\sigma) + \Omega(\theta\tau)},$$

не зависящих от t.

Таким образом, предельные соотношения (7)—(8) справедливы.

В силу изоморфизма между пространствами Ψ и Φ в пространстве Φ существует оператор, решающий при каждой основной функции $\varphi_0(x)$ задачу Коши (3) — (4):

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \mathrm{P}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t),$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x).$$

Поэтому в пространстве, сопряженном к Φ, согласно § 2 единственно решение задачи Коши

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t),$$

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

Точнее говоря, решение $u(x, t)$ будет единственным, если оно принадлежит при каждом t, $0 \leqslant t \leqslant T$, пространству E', где E — нормированное пространство, содержащее пространства Φ и Φ_1 как плотные подмножества.

Пространство Φ, как двойственное к пространству $\Psi = W_{M, a}^{\Omega, b}$, есть пространство $W_{M_1, 1/b}^{\Omega_1, 1/a}$, где M_1 и Ω_1 — функции, двойственные по Юнгу соответственно по отношению к функциям Ω и M. Так как $\Omega(\sigma) = M(\sigma) = \frac{1}{p_0}|\sigma|^{p_0}$, то $M_1(x) = \Omega_1(x) = \frac{1}{p_0'}|x|^{p_0'}$. Согласно определению пространства $W_{M_1, 1/b}^{\Omega_1, 1/a}$ (гл. I) пространство Φ состоит из функций $\varphi(x)$, которые имеют на оси x убывание, описываемое неравенством

$$\|\varphi(x)\| \leqslant C e^{-\frac{1}{p_0'}\left[\frac{|x|}{b}\right]^{p_0'}}.$$

Аналогично, функции $\varphi(x)$, входящие в пространство $\tilde{\Psi}_1 = \Phi_1 = W_{M_1, 1/(b+\theta)}^{\Omega_1, 1/(a-\theta)}$, убывают на оси x по закону

$$\|\varphi(x)\| \leqslant C e^{-\frac{1}{p_0'}\left[\frac{|x|}{b+\theta}\right]^{p_0'}}.$$

Пространство E задаем с помощью нормы

$$\|\varphi\|_E = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{|x|^{p_0'}}{2p_0'b}} \|\varphi(x)\|\,dx$$

Очевидно, что $\Phi \subset \Phi_1 \subset E$. Так как Φ достаточно богато функциями (гл. I, § 1), то Φ плотно в E. Мы находимся в условиях применимости теоремы 2 из § 2; применяя ее, получаем, что *задача Коши* (1)—(2) *имеет единственное решение в пространстве* E'.

Отсюда следует непосредственно основная теорема о классах единственности.

Теорема. *Задача Коши* (1)—(2) *при достаточно малом* $t \leqslant T$ *имеет единственное решение в классе функций* $f(x)$, *удовлетворяющих неравенству*

$$|f(x)| \leqslant Ce^{b_0|x|^{p_0'}}$$

при любом фиксированном b_0.

Действительно, для заданного b_0 мы можем найти b из условия $\frac{1}{2p_0'b} = b_0$, затем найти a из условия нетривиальности пространства $W_{M,a}^{\Omega,b}$ (гл. I, § 1), где $M(x)=\Omega(x)=\frac{1}{p_0}|x|^{p_0'}$, и, наконец, определить интервал T из условия $2^p b_0 T < \frac{1}{p_0}\theta^{p_0}$, $\theta < a$. Эти величины позволяют нам построить основные пространства Φ, Ψ и провести по приведенной схеме все рассуждение.

Мы доказали теорему единственности в случае $p_0 > 1$. В случае $p_0 \leqslant 1$ доказательство проводится по той же схеме с заменой функций $|\sigma|^{p_0}$, $|\tau|^{p_0}$, определяющих пространство $W_{M,a}^{\Omega,b}$, функциями $|\sigma|^r$, $|\tau|^r$ с произвольным положительным $r > 1$; получаемый в этом случае класс единственности будет определяться неравенством

$$|f(x)| \leqslant Ce^{b_0|x|^{r'}},$$

где r' можно считать любым фиксированным положительным числом.

Замечание. Мы использовали в доказательстве пространства W_M^Ω. Можно было бы использовать и другие пространства; единственным условием, по существу, является требование, чтобы в рассматриваемом пространстве функции $e^{tP(s)}$ определяли ограниченные операторы умножения.

3. Случай гиперболической системы. Метод Фурье уже не дает при $p_0 < 1$ класса единственности из всех функций без ограничения роста (см. § 3). Но зато он позволяет в одном важном случае улучшить результат в § 2 для $p_0 = 1$.

Именно, предположим, что матрица-функция $Q(s, t_0, t) = e^{(t-t_0)P(s)}$ удовлетворяет неравенствам

(а) при всех s $\|Q(s, t_0, t)\| \leqslant C_1 e^{\theta|s|}$ (т. е. $p_0 \leqslant 1$); (1)

(б) при вещественных $s = \sigma$

$$\|Q(\sigma, t_0, t)\| \leqslant C_2(1 + |\sigma|^h), \tag{2}$$

т. е. возрастает не быстрее степенной функции.

Системы уравнений вида (1) п. 2 с такими свойствами разрешающей матрицы $Q(s, t_0, t)$ будем называть в дальнейшем гиперболическими; мы будем говорить о них более подробно в гл. III § 3. Оказывается, что для гиперболических систем, так же как и для систем с $p_0 < 1$, гарантируется *единственность решения задачи Коши в классе всех функций без ограничения роста на бесконечности.*

Для доказательства вспомним теоремы 1′ и 2′ § 7 гл. IV вып. 2. Мы доказали там, что всякая целая функция, удовлетворяющая неравенствам (1) и (2), удовлетворяет также неравенствам

$$\|Q(s, t_0, t)\| \leqslant C_3 e^{\theta|\tau|}(1 + |\sigma|^h).$$

В этом случае в силу теоремы 3″ из того же § 7 гл. IV функция $Q(s, t_0, t)$ является мультипликатором в пространстве $Z = S^0$ целых аналитических функций $\psi(s)$, таких, что

$$\|s^k\psi(s)\| \leqslant C_k e^{b|\tau|}.$$

Отсюда следует, что двойственный оператор $G(x, t_0, t) = F[Q(s, t_0, t)]$ определен в пространстве $K = S_0$ финитных бесконечно дифференцируемых функций и переводит это пространство в себя. К числу функционалов над пространством K принадлежат функционалы типа любой (локально интегрируемой) функции без всяких ограничений роста. Поэтому, повторяя рассуждения по приведенной выше схеме, мы находим, что единственность решения задачи Коши в этом случае обеспечивается в классе всех функций, что и утверждалось.

4. Системы с коэффициентами, зависящими от t. Все перечисленные результаты легко распространяются и на системы с коэффициентами, непрерывно зависящими от t:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P\left(i \frac{\partial}{\partial x}, t\right) u(x, t). \tag{1}$$

Наметим доказательство методом преобразований Фурье *).

Достаточно доказать существование решения задачи Коши для системы в основном пространстве $\Phi = \{\varphi(x)\}$

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \mathrm{P}\left(i \frac{\partial}{\partial x}, t\right) \varphi(x, t).$$

Как и всегда, — P означает матрицу, эрмитово-сопряженную по отношению к матрице P.

После преобразования Фурье мы получим задачу Коши

$$\frac{d\psi(s, t)}{dt} = \mathrm{P}(s, t)\psi(s, t), \tag{2}$$

$$\psi(s, 0) = \psi_0(s), \tag{3}$$

где $\psi_0(s)$ — основная функция в пространстве $\Psi = \widetilde{\Phi}$. Решение этой задачи уже нельзя записать в форме показательной функции, как мы делали раньше. Будем действовать иначе.

В силу классических теорем существования система (2) обладает нормальной фундаментальной матрицей решений

$$Q(s, t_0, t) = \| Q_{jk}(s, t_0, t) \|,$$

отвечающей системе начальных условий

$$Q(s, t_0, t_0) = E \qquad \text{(единичная матрица).}$$

При этом если задан начальный вектор $\psi_0(s)$, то решение системы (2), обращающееся в $\psi_0(s)$ при $t = t_0$, имеет вид

$$\psi(s, t) = Q(s, t_0, t)\psi(s).$$

Поскольку параметры s входят в систему (2) аналитическим образом, $Q_{jk}(s, t_0, t)$ — целые аналитические функции. Оценим их рост.

Как известно, матрица $Q(s, t_0, t)$ может быть построена следующим образом **). Разобьем интервал (t_0, t) на n частей

*) Можно было бы провести доказательство и операторным методом.

**) См. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц. Гостехиздат, М., 1953, гл. XIV.

точками деления $t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$ и положим $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Тогда, используя основное свойство матрицы $Q(s, t_0, t)$ (§ 2), мы можем написать

$$Q(s, t_0, t) = Q(s, t_{n-1}, t_n) Q(s, t_{n-2}, t_{n-1}) \ldots Q(s, t_0, t_1).$$

Значение s фиксируем. Используя равенство (7) п. 1 § 2, в котором положено $t_0 = t_i$, можно написать

$$Q(s, t_i, t_{i+1}) = E + \mathrm{P}(s, t_i)\Delta t_i + \varepsilon(\Delta t_i),$$

где $\varepsilon(\Delta t_i) \to 0$ вместе с Δt_i, причем равномерно в интервале $0 \leqslant t \leqslant T$; отсюда выводится, что

$$Q(s, t_0, t) = \prod_{j=0}^{n-1} [E + \mathrm{P}(s, t_i)\Delta t_i] + \varepsilon(\max \Delta t_i).$$

Здесь можно сделать предельный переход, полагая $\max \Delta t_i \to 0$; мы получим, что

$$Q(s, t_0, t) = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \prod_{j=0}^{n-1} [E + \mathrm{P}(s, t_i)\Delta t_i].$$

Это выражение матрицы $Q(s, t_0, t)$ позволяет дать оценку ее роста по s. Так как степени многочленов $\mathrm{P}_{jk}(s, t_i)$ не превосходят p, мы при достаточно большом $|s|$ (не зависящем от $t \leqslant T$) имеем:

$$|\mathrm{P}_{jk}(s, t_i)| \leqslant C' |s|^p,$$

откуда и

$$\|\mathrm{P}(s, t_i)\| \leqslant C |s|^p.$$

Беря $\Delta t_i = \frac{t - t_0}{n}$, мы получаем оценку

$$\left\| \prod_{t_0}^{t} [E + \mathrm{P}(s, t_i)\Delta t_i] \right\| \leqslant \left(1 + C|s|^p \frac{t - t_0}{n}\right)^n \leqslant e^{C|s|^p (t - t_0)}.$$

Чтобы получить оценку, справедливую для всех s, достаточно ввести некоторый дополнительный постоянный множитель C_1, так что для всех

$$\left\| \prod_{t_0}^{t} [E + \mathrm{P}(s, t_i)\Delta t_i] \right\| \leqslant C_1 e^{C|s|^p (t - t_0)}.$$

Полученная оценка не зависит от подразделения интервала (t_0, t). Поэтому можно перейти к пределу, устремляя $\max \Delta t_i$ к нулю; в результате мы получим:

$$\|Q(s, t_0, t)\| \leqslant C_1 e^{C|s|^p (t-t_0)}.$$

Таким образом, целые аналитические функции от s, входящие в состав матрицы $Q(s, t_0, t)$, имеют порядок роста не выше p и тип $\leqslant C(t-t_0)$.

И в этом случае точный порядок роста матрицы $Q(s, t_0, t)$ может быть ниже, чем p; мы, так же как и раньше, обозначим его через p_0 и будем называть *приведенным порядком*. В случае коэффициентов, зависящих от t, мы уже не можем дать метод вычисления p_0. Мы *предполагаем* теперь, что функция $Q(s, t_0, t)$ допускает оценку

$$|Q(s, t_0, t)| \leqslant C_1 (1+|s|^{mp}) e^{C(t-t_0)|s|^{p_0}}$$

(которая заведомо выполнена, если положить $p_0 = p$). Тогда вся схема, описанная для постоянных коэффициентов, проходит без изменения и приводит к тому же результату; в частности, при $p_0 > 1$ *класс единственности решения задачи Коши*

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P\left(i\frac{\partial}{\partial x}, t\right) u(x, t), \qquad (4)$$

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

задается неравенством

$$|f(x)| \leqslant C_1 e^{b_0 |x|^{p_0'}},$$

где p_0 — приведенный порядок системы (4) и $\dfrac{1}{p_0} + \dfrac{1}{p_0'} = 1$.

§ 5. ПРИМЕРЫ

1. Уравнение $u_t = a u_{xx}$. Рассмотрим снова уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

где a — некоторая (комплексная) постоянная. В частности при $a > 0$ получается уравнение теплопроводности, при $a < 0$ — обратное уравнение теплопроводности, при a мнимом — уравнение Шрёдингера из квантовой механики.

Найдем класс единственности решения задачи Коши для этого уравнения. Заменяя $i\dfrac{\partial}{\partial x}$ на s, получим уравнение

$$\frac{dv}{dt} = -as^2 v$$

с разрешающей функцией $Q(s, t_0, t) = e^{-as^2(t-t_0)}$.

Порядок роста p_0 этой функции равен 2.

Число p_0' в данном случае также равно 2. Согласно теореме 1 § 3 в классе функций $f(x)$, удовлетворяющих неравенству

$$|f(x)| \leqslant Ce^{bx^2},$$

может существовать лишь единственное решение уравнения (1).

В данном случае результат теоремы 1 § 3 не может быть улучшен заменой показателя 2 на показатель $2+\varepsilon$, каково бы ни было $\varepsilon > 0$. Действительно, уравнение (1) имеет решение

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} a^m \frac{f^{(m)}(t)}{(2m)!} x^{2m} \qquad (2)$$

при условии, что функция $f(t)$ удовлетворяет неравенствам

$$|f^{(m)}(t)| \leqslant \varepsilon_m^m (2m)!, \quad \varepsilon_m \to 0, \qquad (3)$$

обеспечивающим сходимость ряда (2) при всех значениях x. Положим здесь $\varepsilon_m = m^{\delta-1}$, где $1 > \delta > 0$; тогда $\varepsilon_m^m (2m)!$ будет иметь порядок $m^{m(1+\delta)}$, и в силу теоремы Карлемана — Островского *) будет существовать функция $f(t) \not\equiv 0$, удовлетворяющая неравенствам (3) и обращающаяся в нуль при $t = 0$ вместе со всеми своими производными. Соответствующее решение $u(x, t)$ будет при $t = 0$ тождественно равно нулю, а при $t > 0$ отлично от нуля. Оценим рост этого решения при $|x| \to \infty$. Подставляя оценку (3) в формулу (2), находим:

$$|u(x, t)| \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} a^m \varepsilon_m^m |x|^{2m} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} a^m m^{m(\delta-1)} |x|^{2m} \leqslant Ce^{b|x|^{2/(1-\delta)}}$$

---

*) См. вып. 2, гл. IV, § 7.

(ср. аналогичную оценку в § 2 гл. IV вып. 2). Показатель $\frac{2}{1-\delta}$ при достаточно малом δ становится меньшим чем $2+\varepsilon$ с заданным $\varepsilon>0$. Таким образом, при любом $\varepsilon>0$ в классе функций $f(x)$, удовлетворяющих неравенству

$$|f(x)|\leqslant Ce^{b|x|^{2+\varepsilon}},$$

задача Коши для уравнения (1) имеет уже не единственное решение.

2. Уравнение $u_{tt}=au_{xx}$. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

где a — некоторая (комплексная) постоянная. В частности, при a вещественном получается волновое уравнение, при a мнимом — уравнение Лапласа. Найдем класс единственности решения задачи Коши

$$u(x,0)=u_0(x),\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\bar{u}_0(x).$$

Вводя функции $u_1=u$, $u_2=\frac{\partial u}{\partial t}$, заменяем уравнение (1) системой

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t}&=u_2,\\ \frac{\partial u_2}{\partial t}&=a^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Заменяя далее $i\frac{\partial}{\partial x}$ на s, получаем систему

$$\frac{dv_1}{dt}=v_2,$$

$$\frac{dv_2}{dt}=-a^2s^2v.$$

Фундаментальная матрица решений имеет вид

$$Q(s,t_0,t)=\begin{Vmatrix}\cos as(t-t_0) & \frac{1}{as}\sin as(t-t_0)\\ as\sin as(t-t_0) & \cos as(t-t_0)\end{Vmatrix}.$$

Элементами этой матрицы являются целые функции от s порядка роста $p_0=1$ (отметим, что в данном случае $p_0=1<p=2$). Поэтому в соответствии с результатом теоремы 1 § 3 мы можем утверждать, что единственность решения задачи Коши для уравнения (1) гарантируется в классе функций $f(x)$, удовлетворяющих неравенству

$$|f(x)|\leqslant Ce^{|x|^{\lambda}},$$

где λ — произвольное число.

Если a — вещественная постоянная, то результат можно улучшить. В этом случае при вещественных $s=\sigma$ матрица $Q(s,t_0,t)$ возрастает не быстрее многочлена от s (первой степени). Поэтому в соответствии с определением п. 3 § 4 система (2) гиперболическая, и единственность ее решения гарантируется в классе всех функций без ограничения роста.

3. Уравнение $u_{tt}=\frac{1}{a}u_x$. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial x} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(x,0)=u_0(x),\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\bar{u}_0(x).$$

Это уравнение того же типа, что и в примере 1, но задача Коши имеет теперь совершенно иной смысл. Например, если $a=1$, t — пространственная координата, x — временная, то для получившегося уравнения теплопроводности ставится вопрос о том, чтобы найти температуру $u(x,t)$ по известным для всех значений времени ее значениям в одной точке и известным значениям ее производной в этой же точке.

Найдем класс единственности решения задачи Коши для уравнения (1). Вводя функции $u_1=u$, $u_2=\frac{\partial u}{\partial t}$, заменяем это уравнение системой

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=u_2,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}=\frac{1}{a}\frac{\partial u_1}{\partial x}.$$

Заменяя далее $i\frac{\partial}{\partial x}$ на s, получаем систему

$$\frac{dv_1}{dt} = v_2,$$
$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{s}{ai} v_1.$$

Фундаментальная нормальная матрица имеет вид

$$Q(s, t_0, t) = \begin{Vmatrix} \cos\sqrt{\frac{is}{a}}\,(t-t_0) & \sqrt{\frac{a}{is}}\sin\sqrt{\frac{is}{a}}\,(t-t_0) \\ -\sqrt{\frac{is}{a}}\sin\sqrt{\frac{is}{a}}\,(t-t_0) & \cos\sqrt{\frac{is}{a}}\,(t-t_0) \end{Vmatrix}.$$

Элементы этой матрицы — целые функции порядка $p_0 = \frac{1}{2}$. Поэтому в соответствии с результатом теоремы 1 § 3 мы можем утверждать, что *для уравнения* (1) *гарантируется единственность решения задачи Коши в классе всех функций без ограничений роста.*

В следующем параграфе мы покажем, как можно упростить подсчеты, связанные с построением класса единственности, используя свойства характеристических корней данной системы.

§ 6. СВЯЗЬ ПРИВЕДЕННОГО ПОРЯДКА СИСТЕМЫ С ЕЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ КОРНЯМИ

1. Основное неравенство. Как мы видели, в проблеме построения класса единственности решения задачи Коши для системы

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) \tag{1}$$

существенную роль играет приведенный порядок системы, т. е. порядок роста в s-плоскости целой матрицы-функции

$$Q(s, t) = e^{tP(s)}.$$

В этом параграфе мы сведем вопрос об экспоненциальном порядке роста матрицы $Q(s, t)$ к более простому вопросу о степенном порядке роста характеристических корней матрицы $P(s)$. Обозначим через $\lambda_1(s), \ldots, \lambda_m(s)$ корни характеристического уравнения

$$\det\|P(s) - \lambda E\| = 0. \tag{2}$$

Функции $\lambda_1(s), \ldots, \lambda_m(s)$ называются *характеристическими корнями системы* (1). Они определены для всех комплексных значений s и непрерывны.

Характеристические корни системы (1) естественно возникают при решении следующей задачи: *найти решения системы*

$$\frac{\partial u_j(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{m} P_{jk}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u_k(x, t) \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{3}$$

имеющие вид

$$u_j(x, t) = C_j e^{\lambda t - is_1x_1 - \ldots - is_nx_n} \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{4}$$

с фиксированными значениями $s_1, \ldots, s_n$ *и* λ.

Действительно, подставляя (4) в (3) и сокращая на $e^{\lambda t - is_1x_1 - \ldots - is_nx_n}$, находим:

$$\lambda C_j = \sum_{k=1}^{m} C_k P_{jk}(s) \quad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Эта система имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда

$$\det\|P(s) - \lambda E\| = 0,$$

т. е. при λ, равном одному из характеристических корней матрицы $P(s)$.

Положим теперь

$$\Lambda(s) = \max_k \operatorname{Re}\lambda_k(s). \tag{5}$$

Основной результат этого параграфа состоит в следующем.

Теорема 1. *Для любой матрицы $P(s)$ с m строками и m столбцами, элементами которой являются многочлены от $s = (s_1, \ldots, s_n)$ степени не выше p*, при $t \geqslant 0$ *имеет место оценка*

$$e^{t\Lambda(s)} \leqslant \|e^{tP(s)}\| \leqslant C(1 + |s|)^{(m-1)p} e^{t\Lambda(s)}, \tag{6}$$

где $\|e^{tP(s)}\|$ *означает норму матрицы $e^{tP(s)}$ (т. е. норму соответствующего оператора в m-мерном евклидовом пространстве).*

Доказательство теоремы 1 основано на следующей лемме.

Лемма. *Пусть P — произвольная матрица m-го порядка с комплексными элементами; пусть далее $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — характеристические корни матрицы P и число $\Lambda = \max \operatorname{Re} \lambda_j$. Тогда* при $t \geqslant 0$ *имеет место неравенство*

$$\| e^{tP} \| \leqslant e^{t\Lambda} (1 + 2t \| P \| + \ldots + (2t)^{m-1} \| P \|^{m-1}). \tag{7}$$

Доказательство. Если $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k$ — целая аналитическая функция и P — матрица, то $f(P)$ определяется, как известно, рядом

$$f(P) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P^k.$$

Но матрицу $f(P)$ можно построить и в форме некоторого многочлена $R(P)$. Как известно *), для этого нужно взять многочлен $R(\lambda)$, который в точках $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, отвечающих характеристическим корням матрицы P, принимает значения $f_1 = f(\lambda_1), \ldots, f_m = f(\lambda_m)$, если корни попарно различны, что мы сначала и предположим.

Среди многочисленных форм интерполяционного многочлена $R(\lambda)$ нам будет удобнее всего рассмотреть форму Ньютона:

$$R(\lambda) = b_1 + b_2(\lambda - \lambda_1) + b_3(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) + \ldots \\ \ldots + b_m(\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_{m-1}). \tag{8}$$

Определим коэффициенты $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Полагая последовательно $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} f_1 &= b_1, \\ f_2 &= b_1 + b_2(\lambda_2 - \lambda_1), \\ f_3 &= b_1 + b_2(\lambda_3 - \lambda_1) + b_3(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m &= b_1 + b_2(\lambda_m - \lambda_1) + b_3(\lambda_m - \lambda_1)(\lambda_m - \lambda_2) + \ldots \\ &\ldots + b_m(\lambda_m - \lambda_1) \ldots (\lambda_m - \lambda_{m-1}). \end{aligned} \tag{9}$$

*) Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц. Гостехиздат, М., 1953, стр. 83.

Введем обозначения

$$[f_j] = f_j, \quad [f_{j_1 j_2}] = \frac{[f_{j_2}] - [f_{j_1}]}{\lambda_{j_2} - \lambda_{j_1}},$$

$$[f_{j_1 j_2 j_3}] = \frac{[f_{j_1 j_3}] - [f_{j_1 j_2}]}{\lambda_{j_3} - \lambda_{j_2}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$[f_{j_1 j_2 \ldots j_k}] = \frac{[f_{j_1 \ldots j_{k-2} j_k}] - [f_{j_1 \ldots j_{k-2} j_{k-1}}]}{\lambda_{j_k} - \lambda_{j_{k-1}}}.$$

Тогда из уравнений (9) мы последовательно найдем:

$$b_1 = f_1 = [f_1],$$

$$b_2 = \frac{f_2 - f_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = [f_{12}],$$

$$b_3 = \frac{f_3 - f_1 - [f_{12}](\lambda_3 - \lambda_1)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} = \frac{[f_{13}] - [f_{12}]}{\lambda_3 - \lambda_2} = [f_{123}],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{aligned} b_{k+1} = \{ & f_{k+1} - f_1 - [f_{12}](\lambda_{k+1} - \lambda_1) - \ldots \\ & \ldots - [f_{12\ldots k}](\lambda_{k+1} - \lambda_1) \ldots (\lambda_{k+1} - \lambda_k) \} : \\ & : \{ (\lambda_{k+1} - \lambda_1)(\lambda_{k+1} - \lambda_2) \ldots (\lambda_{k+1} - \lambda_k) \} = \\ = \{ & [f_{1,\,k+1}] - [f_{12}] - [f_{123}](\lambda_{k+1} - \lambda_2) - \\ & - [f_{12\ldots k}](\lambda_{k+1} - \lambda_2) \ldots (\lambda_{k+1} - \lambda_k) \} : \\ & : \{ (\lambda_{k+1} - \lambda_2) \ldots (\lambda_{k+1} - \lambda_k) \} = \\ = \{ & [f_{12,\,k+1}] - [f_{123}] - \ldots \\ & \ldots - [f_{12\ldots k}](\lambda_{k+1} - \lambda_3) \ldots (\lambda_{k+1} - \lambda_k) \} : \\ & : \{ (\lambda_{k+1} - \lambda_3) \ldots (\lambda_{k+1} - \lambda_k) \} = [f_{12\,\ldots\,k,\,k+1}], \end{aligned}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_m = [f_{12\,\ldots\,m}].$$

Эти величины можно оценить с помощью интегрирования в комплексной плоскости. Введем выражения ($k = 1, 2, \ldots, m$)

$$u_k(\lambda) = \int_0^1 \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{k-1}} f^{(k)} [\lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) t_1 + \ldots \\ \ldots + (\lambda_k - \lambda_{k-1}) t_{k-1} + (\lambda - \lambda_k) t_k] \, dt_1 \ldots dt_k.$$

Интегрируя по координате t_k, находим:

$$u_k(\lambda)=\frac{1}{\lambda-\lambda_k}\int_0^1\int_0^{t_1}\ldots\int_0^{t_{k-2}} f^{(k-1)}[\lambda_1+(\lambda_2-\lambda_1)t_1+\ldots$$
$$\ldots+(\lambda_k-\lambda_{k-1})t_{k-1}+(\lambda-\lambda_k)t_k]\Big|_0^{t_{k-1}} dt_1\ldots dt_{k-1}=$$
$$=\frac{1}{\lambda-\lambda_k}\left\{\int_0^1\int_0^{t_1}\ldots\int_0^{t_{k-2}} f^{(k-1)}[\lambda_1+(\lambda_2-\lambda_1)t_1+\ldots\right.$$
$$\ldots+(\lambda-\lambda_{k-1})t_{k-1}]\,dt_1\ldots dt_{k-1}-$$
$$-\int_0^1\int_0^{t_1}\ldots\int_0^{t_{k-2}} f^{(k-1)}[\lambda_1+(\lambda_2-\lambda_1)t_1+\ldots$$
$$\left.\ldots+(\lambda_k-\lambda_{k-1})t_{k-1}]\,dt_1\ldots dt_{k-1}\right\}=\frac{u_{k-1}(\lambda)-u_{k-1}(\lambda_k)}{\lambda-\lambda_k}. \tag{10}$$

Положим далее $u_0(\lambda)=f(\lambda)$. Тогда (10) дает последовательно

$$u_0(\lambda_1)=[f_1],$$
$$u_1(\lambda_2)=\frac{[f_2]-[f_1]}{\lambda_2-\lambda_1}=[f_{12}],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_{m-1}(\lambda_m)=\frac{[f_{12\ldots m-2,\,m}]-[f_{12\ldots m-2,\,m-1}]}{\lambda_m-\lambda_{m-1}}=[f_{12\ldots m}].$$

Итак, число $u_{k-1}(\lambda_k)$ $(k=1, 2, \ldots, m)$ совпадает с коэффициентом b_k искомого интерполяционного многочлена $R(\lambda)$, так что

$$b_k=\int_0^1\int_0^{t_1}\ldots\int_0^{t_{k-2}} f^{(k-1)}[\lambda_1+(\lambda_2-\lambda_1)t_1+\ldots$$
$$\ldots+(\lambda_k-\lambda_{k-1})t_{k-1}]\,dt_1\ldots dt_{k-1}. \tag{11}$$

Покажем, что при всех значениях $t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}$, удовлетворяющих неравенствам $0\leqslant t_{k-1}\leqslant t_{k-2}\leqslant\ldots\leqslant t_1\leqslant 1$, аргумент функции $f^{(k-1)}$ находится в пределах наименьшего выпуклого многоугольника B, содержащего точки $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

В самом деле, мы имеем:

$$\lambda_1+(\lambda_2-\lambda_1)t_1+\ldots+(\lambda_k-\lambda_{k-1})t_{k-1}=$$
$$=\lambda_1(1-t_1)+\lambda_2(t_1-t_2)+\ldots+\lambda_k t_{k-1};$$

коэффициенты при $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ неотрицательны и в сумме дают:

$$1-t_1+t_1-t_2+\ldots+t_{k-2}-t_{k-1}+t_{k-1}=1.$$

Таким образом, аргумент функции $f^{(k-1)}$ совпадает с центром тяжести масс $1-t_1, t_1-t_2, \ldots, t_{k-1}$, расположенных в точках $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ и, следовательно, лежит в пределах указанного многоугольника B.

Пусть M_k означает $\max\limits_B|f^{(k)}(\lambda)|$. Тогда (11) приводит к окончательной оценке

$$|b_k|\leqslant M_{k-1}. \tag{12}$$

В частности, для функции $f(\lambda)=e^{t\lambda}$ при $t\geqslant 0$ мы имеем:

$$M_k=\max_B\left|(e^{t\lambda})^{(k)}\right|=t^k\max_B\left|e^{t\lambda}\right|=t^k e^{t\Lambda},$$

где Λ есть максимальная из вещественных частей характеристических корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$; поэтому для матрицы P

$$\|e^{tP}\|=\|R(P)\|=\|b_1+b_2(P-\lambda_1E)+$$
$$+b_3(P-\lambda_1E)(P-\lambda_2E)+\ldots\|\leqslant$$
$$\leqslant M_0+M_1\|P-\lambda_1E\|+M_2\|P-\lambda_1E\|\|P-\lambda_2E\|+\ldots\leqslant$$
$$\leqslant e^{t\Lambda}[1+t(\|P\|+|\lambda_1|)+t^2(\|P\|+|\lambda_1|)(\|P\|+|\lambda_2|)+\ldots]\leqslant$$
$$\leqslant e^{t\Lambda}[1+2t\|P\|+4t^2\|P\|^2+\ldots+(2t\|P\|)^{m-1}], \tag{13}$$

поскольку любое характеристическое число матрицы не превосходит по модулю ее нормы. Эта оценка получена нами в предположении, что характеристические корни матрицы P различны. По соображениям непрерывности она справедлива и в общем случае, когда среди характеристических корней имеются и равные. Тем самым лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Применим результат леммы к случаю $P=P(s)$. Поскольку квадрат нормы матрицы не превосходит суммы квадратов модулей всех ее элементов, а многочлены, составляющие матрицу $P(s)$, имеют степень, не превосходящую p, мы имеем:

$$\|P\| = \|P(s)\| \leqslant C_1(1+|s|)^p.$$

В результате мы приходим к окончательной оценке

$$\|Q(s, t)\| \leqslant \|e^{tP(s)}\| \leqslant C(1+|s|)^{p(m-1)}e^{t\Lambda(s)}, \qquad t \geqslant 0,$$

которая совпадает с правой частью неравенства (6).

Чтобы получить левую часть неравенства (6), рассмотрим единичный собственный вектор u_j матрицы $Q(s, t)$, отвечающий собственному значению $e^{t\lambda_j(s)}$, для которого $\operatorname{Re}\lambda_j(s) = \Lambda(s)$. Мы имеем:

$$Q(s, t)\,u_j = e^{t\lambda_j(s)}u_j,$$

откуда

$$\|Q(s, t)\| = \sup_{\|u\|=1} \|Q(s, t)\,u\| \geqslant \|Q(s, t)\,u_j\| = e^{t\Lambda(s)},$$

что и требуется.

Теорема 1 очевидным образом сводит оценку роста функции $e^{tP(s)}$ к оценке роста функции $\Lambda(s)$ — максимальной из вещественных частей характеристических корней матрицы $P(s)$.

Будем называть (*точным*) *степенным порядком роста* функции $f(s)$ нижнюю грань чисел ρ, для которых при всех s выполняется неравенство

$$|f(s)| \leqslant C_\rho(1+|s|)^\rho. \tag{14}$$

Из неравенства (6) следует, что (*точный*) *степенной порядок роста функции* $\Lambda(s)$ *есть* (*точный*) *экспоненциальный порядок роста матрицы* $e^{tP(s)}$ *и, следовательно, совпадает с приведенным порядком системы* (1).

Из второго определения характеристических корней, приведенного в начале этого параграфа, ясно, что они не изменяются при переходе от функций $u_j(x, t)$ к их производным и линейным комбинациям. Отсюда следует и инвариантность приведенного порядка системы относительно этих преобразований.

Замечание. Неравенство (6) позволяет переформулировать в терминах функции $\Lambda(s)$ свойства целой функции $e^{tP(s)}$, вытекающие из классической теории роста целых функций — принцип Фрагмена — Линделёфа, теорию индикатрисы и др.

Укажем одно из таких свойств. Известно, что всякая целая функция $f(s)$ порядка роста p_0, имеющая по некоторому направлению экспоненциальное убывание с оценкой

$$|f(s)| \leqslant Ce^{-|s|^{p_1}}, \quad p_1 > p_0,$$

тождественно равна нулю.

Используя этот факт, заключаем, что *не существует матрицы* $P(s) = \|P_{jk}(s)\|$, *у которой функция* $\Lambda(s)$ *по некоторому направлению удовлетворяет неравенству*

$$\Lambda(s) \leqslant -|s|^{p_1}, \quad p_1 > p_0.$$

Действительно, в противном случае функция $e^{tP(s)}$ в силу сказанного выше должна была бы быть тождественно равной нулю, что невозможно.

2. Вычисление числа p_0. После изложенного, естественно, встает вопрос о вычислении степенного порядка роста функции $\Lambda(s)$ непосредственно по матрице $P(s)$. Ответ на этот вопрос дается следующей теоремой:

Теорема. *Разложим характеристический многочлен матрицы* $P(s)$ *по степеням* λ:

$$\det\|P(s) - \lambda E\| = (-\lambda)^m + P_1(s)\lambda^{m-1} + \ldots + P_m(s).$$

Пусть p_j *означает степень многочлена* $P_j(s)$ (*по совокупности переменных* $s_1, \ldots, s_n$). *Тогда степенной порядок роста* p_0 *функции* $\Lambda(s)$ *может быть вычислен по формуле*

$$p_0 = \max_{1 \leqslant j \leqslant m} \frac{p_j}{j}.$$

Таков же степенной порядок роста и функций

$$\bar{\Lambda}(s) = \max_j |\operatorname{Re}\lambda_j(s)|,$$
$$\Pi(s) = \max_j |\operatorname{Im}\lambda_j(s)|,$$
$$M(s) = \max_j |\lambda_j(s)|.$$

Доказательство мы разобьем на несколько этапов.

I. Обозначим временно

$$\max_j \frac{p_j}{j} = q_0.$$

Покажем, что корни $\lambda_j(s)$ характеристического многочлена удовлетворяют неравенству

$$|\lambda_j(s)| \leqslant C(1+\rho)^{q_0} \qquad (\rho = |s|). \tag{1}$$

Допуская противное, мы найдем последовательность точек s_ν, $|s_\nu| \to \infty$ при $\nu \to \infty$, для которой один из корней — для определенности, первый — возрастает так, что

$$|\lambda_1(s_\nu)| > \nu(1+\rho_\nu)^{q_0} \qquad (\rho_\nu = |s_\nu|).$$

Мы имеем:

$$0 = \lambda_1^m(s_\nu)(-1)^m + P_1(s_\nu)\lambda_1^{m-1}(s_\nu) + \ldots + P_m(s_\nu) =$$
$$= \lambda_1^m(s_\nu)\left[(-1)^m + \frac{P_1(s_\nu)}{\lambda_1(s_\nu)} + \ldots + \frac{P_m(s_\nu)}{\lambda_1^m(s_\nu)}\right].$$

Если все отношения в квадратной скобке при $\nu \to \infty$ имеют пределом нуль, то мы получим противоречивое равенство. Следовательно, при некотором j для некоторой подпоследовательности s_{ν_k} — мы, впрочем, можем сохранить и обозначение s_ν — имеет место соотношение

$$\frac{|P_j(s_\nu)|}{|\lambda_1^j(s_\nu)|} > C > 0.$$

Отсюда

$$|P_j(s_\nu)| > C|\lambda_1^j(s_\nu)| > C\nu^j(1+\rho_\nu)^{q_0 j}$$

и, следовательно, степень p_j многочлена $P_j(s)$ больше, чем $q_0 j$:

$$p_j > q_0 j.$$

Но тогда

$$\frac{p_j}{j} > q_0,$$

и подавно

$$\max \frac{p_j}{j} > q_0,$$

что противоречит определению q_0. Таким образом, неравенство (1) установлено. Вместе с ним заведомо выполняются и неравенства

$$\operatorname{Re}\lambda_j(s) \leqslant C(1+\rho)^{q_0}, \quad |\operatorname{Re}\lambda_j(s)| \leqslant C(1+\rho)^{q_0},$$
$$|\operatorname{Im}\lambda(s)| \leqslant C(1+\rho)^{q_0},$$

так что степенные порядки роста функций $\Lambda(s)$, $\overline{\Lambda}(s)$, $\Pi(s)$ и $M(s)$ не превосходят q_0.

II. Дальнейшая наша задача состоит в доказательстве того, что все функции $\Lambda(s)$, $\overline{\Lambda}(s)$, $\Pi(s)$ и $M(s)$ имеют одинаковый степенной рост. Прежде чем переходить к этому этапу, установим следующую лемму.

Лемма. *Вещественная часть $Q_r(\sigma_1, \ldots, \tau_n)$ и мнимая часть $Q_i(\sigma_1, \ldots, \tau_n)$ многочлена $Q(s_1, \ldots, s_n)$ степени k суть многочлены той же степени k по совокупности переменных $\sigma_1, \ldots, \tau_n$; при достаточно большом $\rho \geqslant \rho_0$ они удовлетворяют неравенствам*

$$\left.\begin{aligned} C_1\rho^k &\leqslant \max_{|s|\leqslant\rho} Q_r(s) \leqslant C_2\rho^k, \\ C_3\rho^k &\leqslant \max_{|s|\leqslant\rho} |Q_r(s)| \leqslant C_4\rho^k, \\ C_5\rho^k &\leqslant \max_{|s|\leqslant\rho} |Q_i(s)| \leqslant C_6\rho^k. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Доказательство. Очевидно, что степени многочленов $Q_r(s)$ и $Q_i(s)$ по совокупности переменных σ, τ не превосходят k, так что правые знаки неравенств (2) заведомо справедливы. Далее выделим из многочлена Q группу старших членов степени равной k:

$$Q(s) = Q^0(s) + Q^1(s); \tag{3}$$

здесь $Q^1(s)$ многочлен общей степени не выше $k-1$, а все слагаемые многочлена $Q^0(s)$ имеют степень, в точности равную k. Вместе с разложением (3) имеют место разложения

$$Q_r(s) = Q_r^0(s) + Q_r^1(s),$$
$$Q_i(s) = Q_i^0(s) + Q_i^1(s),$$

где $Q_r^0(s) = \operatorname{Re} Q^0(s)$ — однородный многочлен от переменных $\sigma_1, \ldots, \tau_n$ степени k, $Q_r^1(s) = \operatorname{Re} Q^1(s)$ — многочлен от тех же переменных степени не выше $k-1$; аналогичный смысл имеют символы $Q_i^0(s)$ и $Q_i^1(s)$. Пусть α комплексное число, удовлетворяющее уравнению $\alpha^k = i$. Так как $Q^0(s)$ — однородный многочлен измерения k, то

$$Q^0(\alpha s) = \alpha^k Q^0(s) = iQ^0(s).$$

Таким образом,

$$\max_{|s|\leqslant\rho}|Q_r^0(s)|=\max_{|s|\leqslant\rho}|Q_i^0(s)|.$$

Но, очевидно,

$$\max|Q^0(s)|=C_0\rho^k\leqslant\max|Q_r^0(s)|+\max|Q_i^0(s)|,$$

откуда

$$\max|Q_r^0(s)|=\max|Q_i^0(s)|\geqslant\frac{C_0}{2}\rho^k.$$

Младшие члены $Q_r^1(s)$ и $Q_i^1(s)$ имеют степень не выше $k-1$ и не могут существенно изменить оценок; таким образом, неравенства

$$\max|Q_r^0(s)|\geqslant C_3\rho^k,$$
$$\max|Q_i^0(s)|\geqslant C_5\rho^k$$

заведомо справедливы при достаточно большом ρ. Подберем далее число α так, чтобы удовлетворялось уравнение $\alpha^k=-1$. Тогда мы будем иметь:

$$Q_r^0(\alpha s)=-Q_r^0(s).$$

Это показывает, что множество значений функции $Q_r^0(s)$ в области $|s|\leqslant\rho$ совпадает с множеством значений функции $-Q_r^0(s)$ в этой же области. Поэтому

$$\max_{|s|\leqslant\rho}Q_r^0(s)=\max_{|s|\leqslant\rho}|Q_r^0(s)|\geqslant\frac{C}{2}\rho^k.$$

Младшие члены, входящие в многочлен $Q_r^1(s)$, не могут существенно изменить этой оценки. В результате при достаточно больших $\rho\geqslant\rho_0$ мы получаем:

$$\max_{|s|\leqslant\rho}Q_r^0(s)\geqslant C_1\rho^k,$$

что и требовалось.

III. Теперь мы покажем, что отношение функций $\Lambda^*(\rho)=\max\limits_{s\leqslant\rho}\Lambda(s)$ и $\overline{\Lambda}^*(\rho)=\max\limits_{|s|\leqslant\rho}\overline{\Lambda}(s)$ ограничено сверху и снизу положительными постоянными при $|\rho|\to\infty$. Для этого рассмотрим многочлен

$$P_1(s)=\lambda_1(s)+\ldots+\lambda_m(s),$$

являющийся коэффициентом при λ^{m-1} в разложении $\det\|P(s)-\lambda E\|$ по степеням λ; пусть k означает степень этого многочлена по совокупности переменных $s_1,\ldots,s_n$. Функция $\sum\operatorname{Re}\lambda_j(s)$ является вещественной частью многочлена $P_1(s)$. В силу леммы, при достаточно больших $\rho>\rho_0$ мы имеем:

$$C_1\rho^k\leqslant\max_{|s|\leqslant\rho}\sum\operatorname{Re}\lambda_j(s)\leqslant C_2\rho^k\qquad(\rho=|s|),\tag{4}$$

$$C_2\rho^k\leqslant\max_{|s|\leqslant\rho}\left|\sum\operatorname{Re}\lambda_j(s)\right|\leqslant C_4\rho^k.\tag{5}$$

Очевидно, что

$$\max_{|s|\leqslant\rho}\sum_{j=1}^m\operatorname{Re}\lambda_j(s)\leqslant m\Lambda^*(\rho).\tag{6}$$

Среди величин $\operatorname{Re}\lambda_j(s)$ могут быть отрицательные и положительные, причем в силу неравенства (4) при $\rho>\rho_0$ положительные заведомо имеются. Предположим, что функция $\overline{\Lambda}^*(\rho)$ растет быстрее, чем $\Lambda^*(\rho)$, так что отношение

$$\frac{\overline{\Lambda}^*(\rho)}{\Lambda^*(\rho)}$$

не ограничено сверху при $|\rho|\to\infty$. Это возможно, лишь если среди корней $\lambda_j(s)$ имеется по крайней мере один, вещественная часть которого на некоторой последовательности $s_\nu\to\infty$ уходит в $-\infty$ и причем так, что

$$-\frac{\operatorname{Re}\lambda_j(s_\nu)}{\Lambda^*(\rho_\nu)}=C_\nu\to\infty\qquad(|s_\nu|\leqslant\rho_\nu)\tag{7}$$

Обозначим через $\lambda_1(s)$ корень с отрицательной вещественной частью, большей всех остальных по абсолютной величине; для него заведомо выполняется соотношение (7). Далее мы имеем:

$$-\sum_j\operatorname{Re}\lambda_j(s_\nu)>-\operatorname{Re}\lambda_1(s_\nu)-\sum{}^*\operatorname{Re}\lambda_j(s),$$

где $\sum^*$ распространена на те значения j, для которых $\operatorname{Re}\lambda_j(s)>0$. Далее

$$-\sum\operatorname{Re}\lambda_j(s_\nu)>-\operatorname{Re}\lambda_1(s_\nu)-m\Lambda^*(\rho_\nu)=(C_\nu-m)\Lambda^*(\rho_\nu).$$

В силу неравенства (6) мы получаем:

$$\left\{-\sum \operatorname{Re}\lambda_j(s_\nu)\right\} > \frac{C_\nu - m}{m} \max_{|s| \leqslant \rho_\nu} \sum \operatorname{Re}\lambda_j(s),$$

откуда и

$$\max_{|s| \leqslant \rho_\nu} \left|\sum \operatorname{Re}\lambda_j(s)\right| > \frac{C_\nu - m}{m} \max_{|s| \leqslant \rho_\nu} \sum \operatorname{Re}\lambda_j(s).$$

Очевидно, что полученные неравенства не совместимы с неравенствами (4) — (5). Поэтому отношение

$$\frac{\overline{\Lambda}^*(\rho)}{\Lambda^*(\rho)}$$

ограничено сверху при $\rho \to \infty$. Оно ограничено также и снизу, поскольку, очевидно, $\Lambda^*(\rho) \leqslant \overline{\Lambda}^*(\rho)$. Это доказывает наше утверждение.

IV. Теперь мы убедимся в том, что отношение функций

$$\Pi^*(\rho) = \max_{|s| \leqslant \rho} \Pi(s) \quad \text{и} \quad \overline{\Lambda}^*(\rho) = \max_{|s| \leqslant \rho} \overline{\Lambda}(s)$$

ограничено сверху и снизу положительными постоянными при $\rho \to \infty$. Допустим, что отношение

$$\frac{\Pi^*(\rho)}{\overline{\Lambda}^*(\rho)}$$

не ограничено при $\rho \to \infty$. Если функции $\mu_j(s) = |\operatorname{Im}\lambda_j(s)|$ перенумерованы так, что $\mu_1(s) \geqslant \mu_2(s) \geqslant \ldots \geqslant \mu_m(s)$, то не ограничено и отношение

$$\frac{\max\limits_{|s| \leqslant \rho} \mu_1(s)}{\overline{\Lambda}^*(\rho)} = \frac{\mu_1(s_\rho)}{\overline{\Lambda}^*(\rho)} = C_\rho.$$

Пусть q наибольшее из чисел, для которых $\dfrac{\mu_1(s) \ldots \mu_q(s)}{C_\rho^q [\overline{\Lambda}^*(\rho)]^q}$ ($|s| \leqslant \rho$) не стремится к нулю на бесконечности. Покажем, что при $q < m$

$$\frac{\mu_1(s) \ldots \mu_{q-1}(s)\,\mu_{q+1}(s)}{C_\rho^q [\overline{\Lambda}^*(\rho)]^q} \to 0 \qquad (|s| \leqslant \rho,\ \rho \to \infty).$$

Если бы это было не так, то на некоторой последовательности s_ν, $|s_\nu| \leqslant \rho_\nu \to \infty$, имело бы место неравенство

$$\mu_1(s_\nu) \ldots \mu_{q-1}(s_\nu)\,\mu_{q+1}(s_\nu) \geqslant \\ \geqslant \alpha C_{\rho_\nu}^q [\overline{\Lambda}^*(\rho_\nu)]^q, \qquad \alpha > 0. \tag{8}$$

Так как при любом $|s| \leqslant \rho_\nu$ мы имеем $\mu_j(s) \leqslant \mu_1(s) \leqslant \leqslant \mu_1(s_{\rho_\nu}) = C_{\rho_\nu}\overline{\Lambda}^*(\rho_\nu)$, то из (8) следовало бы, что $\mu_{q+1}(s_\nu) \geqslant \geqslant \alpha C_{\rho_\nu}\overline{\Lambda}^*(\rho_\nu)$; но тогда было бы и

$$\mu_1(s_\nu) \ldots \mu_q(s_\nu)\,\mu_{q+1}(s_\nu) \geqslant \alpha^{q+1} C_{\rho_\nu}^{q+1} [\overline{\Lambda}^*(\rho_\nu)]^{q+1}$$

в противоречие с определением q.

Рассмотрим коэффициент $P_q(s)$ многочлена $\det\|P(s) - \lambda E\|$ и пусть $P_{qr}(s)$ и $P_{qi}(s)$ — его действительная и мнимая части. Коэффициент $P_q(s)$ есть сумма произведений по q корней $\lambda_1(s), \ldots, \lambda_m(s)$. Произведение $\mu_1(s) \ldots \mu_q(s)$ является модулем одного из слагаемых либо в многочлене $P_{qr}(s)$, либо в многочлене $P_{qi}(s)$. По построению указанное произведение при достаточно больших s, $|s| \leqslant \rho$, превосходит величину $\beta \cdot C_\rho^q [\overline{\Lambda}^*(\rho)]^q$, где $\beta > 0$. Каждое из остальных слагаемых в многочленах $P_{qr}(s)$ и $P_{qi}(s)$ получается заменой в данном слагаемом некоторых множителей на множители $\mu_j(s)$ с $j > q$ или на $\operatorname{Re}\lambda_j(s)$ и, следовательно, растет существенно медленнее, чем это слагаемое. Поэтому один из многочленов $P_{qr}(s)$, $P_{qi}(s)$ заведомо растет быстрее второго. Но это противоречит результату леммы п. 2. Поэтому мы приходим к выводу, что отношение $\Pi^*(\rho)/\overline{\Lambda}^*(\rho)$ ограничено сверху. Заменяя многочлен

$$P(s, \lambda) = \lambda^m + P_1(s)\lambda^{m-1} + P_2(s)\lambda^{m-2} + P_3(s)\lambda^{m-3} + \ldots$$

многочленом

$$P'(s, \lambda) = \lambda^m + iP_1(s)\lambda^{m-1} - P_2(s)\lambda^{m-2} - iP_3(s)\lambda^{m-3} + \ldots,$$

корни которого $\lambda'_j(s)$ связаны с корнями исходного многочлена соотношением

$$\lambda'_j(s) = i\lambda_j(s),$$

мы меняем ролями функции $\overline{\Lambda}(s)$ и $\Pi(s)$; отсюда следует, что и отношение $\overline{\Lambda}^*(\rho)/\Pi^*(\rho)$ ограничено сверху. Тем самым наше утверждение полностью доказано.

V. Так как функция $M^*(\rho) = \max\limits_{|s|<\rho} M(s)$ удовлетворяет неравенствам

$$\max\{\Pi^*(\rho), \overline{\Lambda}^*(\rho)\} \leqslant M^*(\rho) \leqslant \Pi^*(\rho) + \overline{\Lambda}^*(\rho),$$

то ясно, что и отношения $M^*(\rho)/\Pi^*(\rho)$, $M^*(\rho)/\overline{\Lambda}^*(\rho)$, а также в силу III и $M^*(\rho)/\Lambda^*(\rho)$ ограничены при $\rho \to \infty$ сверху и снизу положительными постоянными. Таким образом, все четыре функции $\Lambda^*(\rho)$, $\overline{\Lambda}^*(\rho)$, $\Pi^*(\rho)$, $M^*(\rho)$ имеют одинаковый степенной порядок роста, не превосходящий в силу I числа $q_0 = \max\limits_j \frac{p_j}{j}$. Нам остается показать, что этот степенной порядок в точности равен числу q_0; при этом достаточно ограничиться рассмотрением одной из указанных четырех функций, например $M^*(\rho)$.

Допустим, что все корни $\lambda_k(s)$ растут при $|s| \to \infty$ медленнее, чем $|s|^{q_0}$, так что

$$|\lambda_k(s)| = \varepsilon|s|^{q_0}, \qquad \varepsilon \to 0.$$

По теореме Виета коэффициент $P_j(s)$ при λ^j равен сумме произведений по j характеристических корней $\lambda_1(s), \ldots, \lambda_m(s)$; поэтому

$$|P_j(s)| \leqslant \varepsilon_j |s|^{jq_0}, \qquad \varepsilon_j \to 0.$$

Отсюда следует, что степень p_j многочлена $P_j(s)$ *меньше*, чем jq_0, каково бы ни было j. Таким образом,

$$\frac{p_j}{j} < q_0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

откуда и

$$\max \frac{p_j}{j} < q_0$$

в противоречие с определением q_0. Мы видим, что точный степенной порядок роста всех четырех функций $\Lambda(s)$, $\overline{\Lambda}(s)$, $\Pi(s)$, $M(s)$ в точности равен q_0 и, более того, что, например, для $\Lambda(s)$ выполняются неравенства

$\Lambda(s) \leqslant C|s|^{q_0}$ для всех $|s| \geqslant \rho_0$,

$\Lambda(s) \geqslant C_1|s|^{q_0}$ для некоторой последовательности $|s_\nu| \to \infty$. Тем самым теорема полностью доказана.

Следствие 1. *Приведенный порядок всякой системы вида* (1) п. 1 *есть рациональное число со знаменателем, не превосходящим числа уравнений системы. Для одного уравнения*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u$$

приведенный порядок есть целое число, равное порядку l этого уравнения.

Следствие 2. *Если характеристические корни возрастают медленнее любой положительной степени $|s|$, то они постоянны.*

Действительно, в указанном случае $q_0 = 0$ и, следовательно, $p_j = 0$ при любом j. Таким образом, характеристический многочлен имеет коэффициенты, не зависящие от s; но тогда и корни этого многочлена не зависят от s, что и требуется.

3. Подсчет приведенного порядка для систем с высшими производными по t. Рассмотрим систему уравнений с высшими производными по t

$$\frac{\partial^{\mu_j} u_j(x, t)}{\partial t^{\mu_j}} = \sum_{k=1}^{m} P_{jk}\left(\frac{\partial}{\partial t}, i\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, i\frac{\partial}{\partial x_n}\right)u_k(x, t) \tag{1}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m),$$

где порядок многочлена P_{jk} по переменному $\frac{\partial}{\partial t}$ меньше числа μ_j. Как мы уже говорили, такая система приводится к системе первого порядка по t введением новых неизвестных функций по формулам

$$
\begin{aligned}
&u_{11}=u_1,\ u_{12}=\frac{\partial u_1}{\partial t},\ \ldots,\ u_{1\mu_1}=\frac{\partial^{\mu_1-1}u_1}{\partial t^{\mu_1-1}},\\
&u_{21}=u_2,\ u_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial t},\ \ldots,\ u_{2\mu_2}=\frac{\partial^{\mu_2-1}u_2}{\partial t^{\mu_2-1}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&u_{m1}=u_m,\ u_{m2}=\frac{\partial u_m}{\partial t},\ \ldots,\ u_{m\mu_m}=\frac{\partial^{\mu_m-1}u}{\partial t^{\mu_m-1}}.
\end{aligned}
$$

После этой замены система (1) преобразуется к виду

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u_{11}}{\partial t}=u_{12},\\
&\frac{\partial u_{12}}{\partial t}=\quad u_{13},\\
&\ldots\ldots\\
&\frac{\partial u_{1\mu_1}}{\partial t}=\sum P_{1k}\left(\frac{\partial}{\partial t},\ i\frac{\partial}{\partial x_1},\ \ldots,\ i\frac{\partial}{\partial x_n}\right)u_{k1},\\
&\frac{\partial u_{21}}{\partial t}=u_{22}\\
&\ldots\ldots\\
&\frac{\partial u_{2\mu_2}}{\partial t}=\sum P_{2k}\left(\frac{\partial}{\partial t},\ i\frac{\partial}{\partial x_1},\ \ldots,\ i\frac{\partial}{\partial x_n}\right)u_{k1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial u_{m1}}{\partial t}=u_{m2},\\
&\ldots\ldots\\
&\frac{\partial u_{m\mu_m}}{\partial t}=\sum P_{mk}\left(\frac{\partial}{\partial t},\ i\frac{\partial}{\partial x_1},\ \ldots,\ i\frac{\partial}{\partial x_n}\right)u_{k1},
\end{aligned}\right\}\quad (2)
$$

где остается заменить в правых частях производные функций u_{k1} по t соответствующими функциями u_{kl}.

Оказывается, что для вычисления характеристических корней $\lambda_1(s), \ldots, \lambda_m(s)$ системы (2) нет необходимости выписывать полностью полученную систему и строить соответствующий определитель порядка $\mu_1+\ldots+\mu_m$. Покажем, что эти

корни можно определить непосредственно по системе (1), именно как корни уравнения

$$
\begin{vmatrix}
P_{11}(\lambda,\ s)-\lambda^{\mu_1} & P_{12}(\lambda,\ s) & \ldots & P_{1m}(\lambda,\ s)\\
P_{21}(\lambda,\ s) & P_{22}(\lambda,\ s)-\lambda^{\mu_2} & \ldots & P_{2m}(\lambda,\ s)\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
P_{m1}(\lambda,\ s) & P_{m2}(\lambda,\ s) & \ldots & P_{mm}(\lambda,\ s)-\lambda^{\mu_m}
\end{vmatrix}=0. \quad (3)
$$

Для доказательства вспомним, что, как отмечено в п. 1, характеристические корни системы (2) с неизвестными функциями u_{jl} определяются как значения λ, для которых эта система имеет решение

$$
\begin{aligned}
&u_{11}=C_{11}e^{\lambda t-is_1x_1-\ldots-is_nx_n},\\
&u_{12}=C_{12}e^{\lambda t-is_1x_1-\ldots-is_nx_n},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&u_{m\mu_m}=C_{m\mu_m}e^{\lambda t-is_1x_1-\ldots-is_nx_n}.
\end{aligned}
$$

Уравнения для определения λ принимают теперь вид

$$
\left.\begin{aligned}
&\left\{\begin{aligned}
&\lambda C_{11}=C_{12},\\
&\lambda C_{12}=\quad C_{13},\\
&\ldots\ldots\\
&\lambda C_{1\mu_1}=\sum P_{1k}(\lambda,\ s)\,C_{k1},
\end{aligned}\right.\\
&\left\{\begin{aligned}
&\lambda C_{21}=C_{22},\\
&\lambda C_{22}=\quad C_{23},\\
&\ldots\ldots\\
&\lambda C_{2\mu_2}=\sum P_{2k}(\lambda,\ s)\,C_{k1},
\end{aligned}\right.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\left\{\begin{aligned}
&\lambda C_{m1}=C_{m2},\\
&\lambda C_{m2}=\quad C_{m3},\\
&\ldots\ldots\\
&\lambda C_{m\mu_m}=\sum P_{mk}(\lambda,\ s)\,C_{k1}.
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right\}\quad (4)
$$

Перемножая уравнения каждой группы, получаем:

$$\left.\begin{aligned} \lambda^{\mu_1} C_{11} &= \sum_{k=1}^{m} P_{1k}(\lambda, s) C_{k1}, \\ \lambda^{\mu_2} C_{21} &= \sum_{k=1}^{m} P_{2k}(\lambda, s) C_{k1}, \\ &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \lambda^{\mu_m} C_{m1} &= \sum_{k=1}^{m} P_{mk}(\lambda, s) C_{k1}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

откуда ясно, что значения λ, соответствующие ненулевым значениям C_{jk} (и, следовательно, ненулевым значениям C_{j1}) суть корни уравнения (3).

Обратно, всякому корню уравнения (3) соответствует ненулевое решение системы (5) и, следовательно, ненулевое решение системы (4), что и требуется.

В частности, одно уравнение

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = P\left(\frac{\partial}{\partial t}, i\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, i\frac{\partial}{\partial x_n}\right) u, \tag{6}$$

где порядок многочлена P по аргументу $\frac{\partial}{\partial t}$ меньше m, эквивалентно системе

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= u_2, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \quad u_3, \\ &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \frac{\partial u_m}{\partial t} &= P\left(\frac{\partial}{\partial t}, i\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, i\frac{\partial}{\partial x_n}\right) u_1, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где в последнем уравнении нужно заменить производные от u_1 по t на соответствующие u_j. Характеристические корни для системы (7) являются корнями уравнения m-й степени

$$\lambda^m = P(\lambda, s_1, \ldots, s_n).$$

Так, для волнового уравнения (ср. § 5, пример 2)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{8}$$

характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 = -a^2 s^2$$

и корни $\lambda_{1,2} = \pm ias$. Функция $\Lambda(s)$ возрастает, как первая степень s и при вещественном a ограничена на вещественной оси; таким образом, волновое уравнение гиперболично в смысле п. 3 § 4.

Для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial x} \tag{9}$$

мы имеем $\lambda^2 = -\frac{i}{a} s$, $\lambda_{1,2}(s) = \pm\sqrt{-\frac{is}{a}}$, функция $\Lambda(s)$ имеет степенной порядок роста $p_0 = \frac{1}{2}$; таким образом, классом единственности для уравнения (9) служит класс всех функций $f(x)$ без ограничения роста (ср. § 5, пример 3).

Для уравнения

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = \frac{\partial^m u}{\partial x^m}$$

характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^k(s) = (-is)^m.$$

Таким образом, функция $\Lambda(s)$ имеет степенной порядок роста $\frac{m}{k}$. Мы указывали выше, что приведенный порядок p_0 для всякой системы есть число рациональное; теперь мы видим, что *приведенный порядок может быть любым рациональным числом.*

§ 7. ТЕОРЕМА ТИПА ФРАГМЕНА — ЛИНДЕЛЁФА

1. Формулировка теоремы и примеры. Решение уравнения Коши — Римана

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{1}$$

как известно, обладает следующим свойством: если это решение удовлетворяет неравенствам

$$|u(x, t)| \leqslant Ce^{(|t|+|x|)^\gamma} \quad (\gamma < 1) \tag{2}$$

и

$$|u(x, 0)| \leqslant C(1 + |x|^h), \tag{3}$$

Перемножая уравнения каждой группы, получаем:

$$\left.\begin{aligned} \lambda^{\mu_1}C_{11} &= \sum_{k=1}^{m} P_{1k}(\lambda,\ s)\, C_{k1},\\ \lambda^{\mu_2}C_{21} &= \sum_{k=1}^{m} P_{2k}(\lambda,\ s)\, C_{k1},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \lambda^{\mu_m}C_{m1} &= \sum_{k=1}^{m} P_{mk}(\lambda,\ s)\, C_{k1}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

откуда ясно, что значения λ, соответствующие ненулевым значениям C_{jk} (и, следовательно, ненулевым значениям C_{j1}) суть корни уравнения (3).

Обратно, всякому корню уравнения (3) соответствует ненулевое решение системы (5) и, следовательно, ненулевое решение системы (4), что и требуется.

В частности, одно уравнение

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = P\left(\frac{\partial}{\partial t},\ i\frac{\partial}{\partial x_1},\ \ldots,\ i\frac{\partial}{\partial x_n}\right)u, \tag{6}$$

где порядок многочлена P по аргументу $\frac{\partial}{\partial t}$ меньше m, эквивалентно системе

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= u_2,\\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \quad u_3,\\ &\cdots\cdots\\ \frac{\partial u_m}{\partial t} &= P\left(\frac{\partial}{\partial t},\ i\frac{\partial}{\partial x_1},\ \ldots,\ i\frac{\partial}{\partial x_n}\right)u_1, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где в последнем уравнении нужно заменить производные от u_1 по t на соответствующие u_j. Характеристические корни для системы (7) являются корнями уравнения m-й степени

$$\lambda^m = P(\lambda,\ s_1,\ \ldots,\ s_n).$$

Так, для волнового уравнения (ср. § 5, пример 2)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{8}$$

характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 = -a^2s^2$$

и корни $\lambda_{1,2} = \pm ias$. Функция $\Lambda(s)$ возрастает, как первая степень s и при вещественном a ограничена на вещественной оси; таким образом, волновое уравнение гиперболично в смысле п. 3 § 4.

Для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial x} \tag{9}$$

мы имеем $\lambda^2 = -\frac{i}{a}s$, $\lambda_{1,2}(s) = \pm\sqrt{-\frac{is}{a}}$, функция $\Lambda(s)$ имеет степенной порядок роста $p_0 = \frac{1}{2}$; таким образом, классом единственности для уравнения (9) служит класс всех функций $f(x)$ без ограничения роста (ср. § 5, пример 3).

Для уравнения

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = \frac{\partial^m u}{\partial x^m}$$

характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^k(s) = (-is)^m.$$

Таким образом, функция $\Lambda(s)$ имеет степенной порядок роста $\frac{m}{k}$. Мы указывали выше, что приведенный порядок p_0 для всякой системы есть число рациональное; теперь мы видим, что *приведенный порядок может быть любым рациональным числом.*

§ 7. ТЕОРЕМА ТИПА ФРАГМЕНА — ЛИНДЕЛЁФА

1. Формулировка теоремы и примеры. Решение уравнения Коши — Римана

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{1}$$

как известно, обладает следующим свойством: если это решение удовлетворяет неравенствам

$$|u(x,\ t)| \leqslant Ce^{(|t|+|x|)^\gamma} \qquad (\gamma < 1) \tag{2}$$

и

$$|u(x,\ 0)| \leqslant C(1 + |x|^h), \tag{3}$$

то $u(x, t)$ является многочленом относительно комплексного аргумента $x+it$. Действительно, первое неравенство показывает, что функция $u(x, t)$, как функция комплексного аргумента $x+it$, имеет рост γ ниже первого порядка, а второе — что на вещественной оси, т. е. на сторонах угла раствора $\pi < \frac{\pi}{\gamma}$, она возрастает не быстрее многочлена; так как $u(x, t)$ является аналитической функцией от $x+it$, то в силу одного из следствий теоремы Фрагмена — Линделёфа (см. вып. 2, гл. IV, § 7) она есть многочлен степени не выше h.

Решения уравнения

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \tag{4}$$

уже не обладают подобным свойством. Действительно, общее решение уравнения (4) имеет вид $u(x, t) = U(x+t)$, где U — произвольная (дифференцируемая) функция; поэтому частное решение может быть, например, даже ограниченным во всей плоскости, не сводясь при этом к многочлену ни по степеням t, ни по степеням x.

Возникает вопрос, для каких систем уравнений вида

$$\frac{\partial u_j(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{m} P_{jk}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u_k(x, t) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{5}$$

решения обладают свойствами, аналогичными указанному свойству решений уравнения (1). Следующая теорема дает широкий класс таких систем.

Теорема. *Если при всех вещественных* $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ *характеристические корни матрицы* $\|P_{jk}(\sigma)\|$ *вещественны, то любое решение системы* (5), *удовлетворяющее условиям*:

а) *при всех* t *и* x

$$|u_j(x, t)| \leqslant Ce^{a_0|t|^{\gamma}+b_0|x|^h} \text{ *)}, \quad \gamma < 1, \quad h < (2p_0)' \tag{6}$$

(p_0 — приведенный порядок системы, см. п. 2 § 3),

б) $$|u_j(x, 0)| \leqslant C(1+|x|^h), \tag{7}$$

*) В n-мерном случае под $e^{b_0|x|^h}$ подразумевается $e^{b_0|x_1|^h+\ldots+b_0|x_m|^h}$.

состоит из многочленов относительно t:

$$u_j(x, t) = \sum_{k=0}^{r} U_{jk}(x)\, t^k, \quad r \leqslant h+m+n+[1], \tag{8}$$

причем функции $U_{jk}(x)$ *являются решениями систем*

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{m} P_{jk}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) U_{j,q-1}(x) = qU_{jq}(x) \quad (q < r), \\ &\sum_{j=1}^{m} P_{jk}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) U_{jr}(x) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Условие вещественности корней матрицы $P(\sigma)$ особенно просто выглядит для одного уравнения ($m=1$), когда оно означает лишь, что коэффициенты этого уравнения (при операторах $i\frac{\partial}{\partial x}$) вещественны. Этому условию удовлетворяет уравнение (1) и не удовлетворяет уравнение (4).

Следующий пункт содержит доказательство этой теоремы.

2. Доказательство теоремы. Условие (6) п. 1 позволяет рассматривать решения системы (5) как обобщенные функции, зависящие от параметра t в пространстве W_q^q, где $h < q < (2p_0)'$. Напомним, что это пространство состоит из целых аналитических функций $\varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|\varphi(x+iy)| \leqslant Ce^{-|ax|^q+|by|^q}$$

при некоторых (зависящих от φ) постоянных a, b, C (гл. I, § 1).

Совершая над системой (5) п. 1 преобразование Фурье, мы приходим к двойственной системе

$$\frac{dv_j(\sigma, t)}{dt} = \sum_{k=1}^{m} P_{jk}(\sigma)\, v_k(\sigma, t), \tag{1}$$

причем $v_j(\sigma, t)$ является функционалом над двойственным пространством $\widetilde{W_q^q} = W_{q'}^{q'}$ (гл. I, § 3). В пространстве $W_{q'}^{q'}$

является мультипликатором любая целая аналитическая функция, имеющая порядок роста $< q'$. В частности, разрешающая матрица системы (5) п. 1

$$Q(s, t) = e^{tP(s)}$$

имеет, как мы знаем из § 3, порядок роста p_0 — приведенный порядок системы (5). Так как $q < (2p_0)'$, то $2p_0 < q'$ и подавно $p_0 < q'$, так что разрешающая матрица $Q(s, t)$ является мультипликатором в пространстве $W_{q'}^{q'}$. В силу основной теоремы § 4 двойственная система

$$\frac{dv(s, t)}{dt} = P(s)\, v(s, t) \tag{2}$$

при начальном условии

$$v_0(\sigma) = \widetilde{u(x, 0)}$$

имеет в пространстве $[W_{q'}^{q'}]'$ единственное решение

$$v(\sigma, t) = e^{tP(\sigma)} v_0(\sigma).$$

Но, очевидно, решением системы (2) является и обобщенная функция $\widetilde{u(x, t)}$ — преобразование Фурье решения $u(x, t)$ системы (5) п. 1. Поэтому

$$v(\sigma, t) = \widetilde{u(x, t)} = e^{tP(\sigma)} v_0(\sigma).$$

По определению преобразования Фурье для любой вектор-функции $\varphi(x) \in W_q^q$ и $\psi(\sigma) = \widetilde{\varphi(x)} \in W_{q'}^{q'}$ мы имеем:

$$(e^{tP(\sigma)} v_0(\sigma),\ \psi(\sigma)) = (u(x, t),\ \varphi(x)). \tag{3}$$

Обозначим полученную функцию от t через $F_\varphi(t)$.

Поскольку начальная вектор-функция $u(x, 0)$ удовлетворяет неравенству (7) п. 1, можно выбрать (четное) число r так, чтобы частное $U(x)$ от деления вектор-функции $u(x, 0)$ на многочлен $(1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{r/2}$ степени r было бы интегрируемой функцией. При этом r можно положить равным тому из двух целых чисел $h + n + 1$ и $h + n + 2$, которое четно. Отсюда

$$u(x, 0) = (1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{r/2}\, U(x),$$

$$v_0(\sigma) = \widetilde{u(x, 0)} = \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial\sigma_1^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial\sigma_n^2}\right)^{r/2} V(\sigma) = R\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\right) \widetilde{U(x)},$$

где $R\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)$ — дифференциальный оператор r-го порядка. Используя этот факт, преобразуем левую часть равенства (3) по правилам действий с обобщенными (вектор)-функциями:

$$F_\varphi(t) = (e^{tP(\sigma)} v_0(\sigma),\ \psi(\sigma)) = (v_0(\sigma),\ e^{tP^*(\sigma)}\psi(\sigma)) =$$

$$= \left(R\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\right) V(\sigma),\ e^{tP^*(\sigma)}\psi(\sigma)\right) = \left(V(\sigma),\ R\left(-\frac{\partial}{\partial\sigma}\right) e^{tP^*(\sigma)}\psi(\sigma)\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{V(\sigma)} \left\{ \sum_{k=0}^{r} t^k e^{tP^*(\sigma)} P_k(\sigma)\, R_k\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\right) \psi(\sigma) \right\} d\sigma. \tag{4}$$

Покажем, что $F_\varphi(t)$ представляет собой целую аналитическую функцию от (комплексного) t порядка роста меньше 2. Для этого мы покажем, что интеграл (4) абсолютно сходится при всех комплексных t, так же как и интеграл от производной по t подынтегральной функции, и дадим оценку роста.

Обозначим $g_k(\sigma) = P_k(\sigma)\, R_k\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)\psi(\sigma)$. Эта функция вместе с $\psi(\sigma)$ принадлежит пространству $W_{q'}^{q'}$, поэтому справедлива оценка

$$|g_k(\sigma)| \leqslant C_1 e^{-|a_1\sigma|^{q'}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Так как $V(\sigma)$ ограничена и при $t = t_1 + it_2$

$$\|e^{tP^*(\sigma)}\| \leqslant \|e^{t_1 P^*(\sigma)}\| \cdot \|e^{it_2 P^*(\sigma)}\| \leqslant$$

$$\|e^{|t_1| P^*(\sigma) \operatorname{sgn} t_1}\| \cdot \|e^{|t_2| P^*(\sigma)\, i \operatorname{sgn} t_2}\| \leqslant C(1 + |\sigma|)^{2(m-1)p} e^{C|t|(|\sigma|^{p_0} + 1)},$$

то интеграл (4) оценивается при больших $|t|$ следующим образом:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} V(\sigma) \left\{ \sum_{k=0}^{r} t^k e^{tP^*(\sigma)} P_k(\sigma)\, R_k\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\right) \psi(\sigma) \right\} d\sigma \right| \leqslant$$

$$\leqslant B \sum_{k=0}^{r} |t|^k \int_{-\infty}^{\infty} e^{C|t|(1 + |\sigma|^{p_0})} e^{-|a_1\sigma|^{q'}}\, d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant B e^{C|t|} |t|^r \int_{-\infty}^{\infty} e^{C|t||\sigma|^{p} - |a_1\sigma|^{q'}}\, d\sigma. \tag{5}$$

В неравенстве Юнга (гл. I, § 3)

$$|uv| \leqslant \frac{u^{\lambda}}{\lambda} + \frac{v^{\lambda'}}{\lambda'} \quad \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} = 1\right)$$

положим

$$u = C|t|, \quad v = |\sigma|^{p_0};$$

тогда будем иметь:

$$e^{C|t||\sigma|^{p_0}} \leqslant e^{C_1|t|^{\lambda} + C_2|\sigma|^{p_0\lambda'}}.$$

Выберем λ' так, чтобы иметь

$$q' - \varepsilon < p_0\lambda' < q',$$

где ε — некоторая малая величина; тогда для выражения (5) получается оценка сверху

$$Be^{C|t| + C_1|t|^{\lambda}} |t|^r \int_{-\infty}^{\infty} e^{C_2|\sigma|^{p_0\lambda'} - |a_1\sigma|^{q'}} d\sigma,$$

причем последний интеграл заведомо сходится и $F_{\varphi}(t)$ оказывается функцией порядка роста, не превосходящего λ. Оценим величину λ. Так как по условию $(2p_0)' > q$, то $2p_0 < q'$; далее

$$\lambda' > \frac{q' - \varepsilon}{p_0} > \frac{2p_0 - \varepsilon}{p_0} > 2,$$

откуда

$$\lambda < 2.$$

Интеграл от формальной производной подынтегральной функции по t, как легко видеть, также сходится абсолютно. Поэтому $F_{\varphi}(t)$ действительно целая функция комплексного аргумента t, имеющая порядок роста меньше двух.

Исследуем поведение этой функции при вещественных и мнимых значениях t.

Для вещественных t оценка (6) п. 1 показывает, что

$$|F_{\varphi}(t)| = |(u(x, t), \varphi(x))| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t)\varphi(x)| dx \leqslant Ce^{b|t|^{\gamma}}.$$

Чтобы получить оценку $F_{\varphi}(t)$ на мнимой оси, воспользуемся следующим фактом.

Если матрица m-го порядка $P(\sigma)$ при каждом $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ имеет только вещественные характеристические корни, то в каждой ограниченной области изменения переменного σ при вещественном θ имеет место оценка

$$\|e^{i\theta P(\sigma)}\| \leqslant C|\theta|^{m-1}. \tag{6}$$

Доказательство немедленно следует из неравенства

$$\|e^{tP}\| \leqslant e^{t\Lambda}\left(1 + 2t\|P\| + \ldots + (2t\|P\|)^{m-1}\right), \quad \Lambda = \max_j \operatorname{Re}\lambda_j,$$

доказанного нами в § 6, заменой t на $|\theta|$ (θ — вещественно) и P на $iP(\sigma)\operatorname{sgn}\theta$; для матрицы $iP(\sigma)\operatorname{sgn}\theta$ все корни λ_j чисто мнимые.

Применим оценку (6) к равенству (4) при чисто мнимом $t = i\theta$. Поскольку характеристические корни матрицы $P^*(\sigma)$ вещественны вместе с корнями матрицы $P(\sigma)$, мы получаем, что *на мнимой оси функция $F_{\varphi}(t)$ возрастает не быстрее многочлена степени $r_0 = r + m - 1$.*

Итак, функция $F_{\varphi}(t)$ возрастает не быстрее, чем $e^{b|t|^{\gamma}}$, на всех четырех координатных полуосях плоскости t. Но так как $F_{\varphi}(t)$ имеет, по доказанному, порядок роста меньше 2, то в силу замечания к теореме Фрагмена — Линделёфа (вып. 2, гл. IV, § 7), она *в каждой из четвертей t-плоскости имеет порядок роста (не выше)* γ. Но тогда $F_{\varphi}(t)$ есть целая функция порядка $(\leqslant)\gamma$. Она возрастает не быстрее многочлена на мнимой оси, т. е. на сторонах угла раствора $\pi < \frac{\pi}{\gamma}$ и поэтому в силу того же замечания сама есть многочлен от t степени не выше r_0.

Покажем теперь, что и сама функция $u(x, t)$ есть многочлен от t степени не выше r_0. Для этого установим две простые леммы.

Лемма 1. *Если последовательность $R_{\nu}(t)$ ($\nu = 1, 2, \ldots, -\infty < t < \infty$) полиномов степени $\leqslant r$ сходится при каждом значении t к некоторой функции $R(t)$, то функция $R(t)$ сама есть полином степени $\leqslant r$.*

Доказательство. Пусть

$$R_{\nu}(t) = a_{0\nu} + a_{1\nu}t + \ldots + a_{r\nu}t^r.$$

Полагая $t=0$, убеждаемся, что $a_{0\nu}$ имеют предел a_0. Следовательно, полиномы

$$a_{1\nu}+\ldots+a_{r\nu}t^{r-1}$$

имеют предел при всех t $\left(\text{равный } \frac{R(t)-a_0}{t} \text{ при } t=0\right)$. Отсюда получаем, что $a_{1\nu}$ имеют предел a_1 и т. д., каждая последовательность $a_{i\nu}$ имеет предел a_i. Положим

$$R_0(t)=a_0+a_1t+\ldots+a_rt^r.$$

Очевидно, $R_\nu(t)\to R_0(t)$ при всех t. Значит, $R(t)\equiv R_0(t)$, т. е. $R(t)$ — полином степени $\leqslant r$, что и утверждалось.

Лемма 2. *Вместе с вектор-функцией $u(x, t)$ неравенству* п. 1 *удовлетворяет и вектор-функция $u(x-x_0, t)$ при любом вещественном x_0, возможно, с некоторыми новыми постоянными C, a_0 и b_0.*

Доказательство. Геометрически очевидно, что для любого $b>0$ можно найти такое $c>0$, что при любом вещественном ξ будет удовлетворяться неравенство

$$b|\xi-1|^\gamma\leqslant b|\xi|^\gamma+c.$$

Заменяя ξ на $\dfrac{x_j}{x_j^0}$, находим:

$$b|x_j-x_j^0|^\gamma\leqslant b|x_j|^\gamma+c|x_j^0|^\gamma,$$

откуда, суммируя по j, получаем:

$$b\sum_{j=1}^n|x_j-x_j^0|^\gamma\leqslant b\sum_{j=1}^n|x_j|^\gamma+c\sum_{j=1}^n|x_j^0|^\gamma,$$

что и дает нужное неравенство.

Переходим к доказательству того, что $u_j(x, t)$ есть полином от t. Рассмотрим четную вещественную неотрицательную функцию $\psi_0(\sigma)\in W_{q'}^{q'}$, отличную от нуля. Свертка $\psi_1(\sigma)=\int\psi_0(\sigma-\xi)\psi_0(\xi)\,d\xi$ также принадлежит пространству $W_{q'}^{q'}$ (см. замечание в конце § 6 гл. IV вып. 2); вспомним также, что $W_q^q=S_{1/q}^{1-1/q}$. Соответствующие преобразования Фурье $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ принадлежат пространству W_q^q; при этом $\varphi_0(x)$ — вещественная функция, а $\varphi_1(x)=\varphi_0^2(x)$ — неотрицательная, причем $\varphi_1(0)=\varphi_0^2(0)=\left(\int\psi_0(\sigma)\,d\sigma\right)^2>0$.

Построим функции

$$\varphi_\nu(x, x_0)=\frac{\varphi_1[\nu(x-x_0)]}{\int\varphi_1[\nu(x-x_0)]\,dx}\qquad(\nu=2, 3, \ldots).$$

Эти функции также принадлежат пространству W_q^q и обладают следующими свойствами:

(а) $\varphi_\nu(x, x_0)\geqslant 0$,

(б) $\int\varphi_\nu(x, x_0)\,dx=1$,

а поскольку

$$\int\varphi_1[\nu(x-x_0)]\,dx=\frac{1}{\nu}\int\varphi_1(x)\,dx=\frac{1}{C_1\nu},$$

имеет место также и свойство

(в) $|\varphi_\nu(x, 0)|\leqslant C_1\nu|\varphi_1(\nu x)|\leqslant C_2\nu e^{-a(\nu x)^{1/\alpha}}$.

Покажем, что при любом фиксированном t имеет место соотношение

$$\lim_{\nu\to\infty}\int u(x, t)\,\varphi_\nu(x, x_0)\,dx=u(x_0, t). \tag{7}$$

Сначала рассмотрим случай $x_0=0$. Здесь мы имеем:

$$\left|u(0, t)-\int u(x, t)\,\varphi_\nu(x, 0)\,dx\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int|u(0, t)-u(x, t)|\,\varphi_\nu(x, 0)\,dx.$$

Поскольку функция $u(x, t)$ непрерывна по x при $x=0$, для выбранного $\varepsilon>0$ и достаточно малого $\delta>0$

$$\int\limits_{|x|<\delta}|u(0, t)-u(x, t)|\,\varphi_\nu(x, 0)\,dx\leqslant\varepsilon\int\limits_{|x|\leqslant\delta}\varphi_\nu(x, 0)\,dx\leqslant\varepsilon. \tag{8}$$

Интеграл по внешности шара $|x| < \delta$ оценим следующим образом:

$$\int\limits_{|x| \geqslant \delta} |u(0, t) - u(x, t)| \varphi_\nu(x, 0)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant 2C_3 \int\limits_{|x| \geqslant \delta} e^{b_0 |x|^\gamma} \nu e^{-a(\nu x)^{1/\alpha}}\, dx \leqslant C_4 \int\limits_{|\xi| \geqslant \nu\delta} e^{b_0 \left|\frac{\xi}{\nu}\right|^\gamma - a|\xi|^{1/\alpha}}\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C_4 \int\limits_{|\xi| \geqslant \nu\delta} e^{b_1 |\xi|^\gamma - a_1 |\xi|^{1/\alpha}}\, d\xi \leqslant \varepsilon \qquad (9)$$

при достаточно большом ν.

Неравенства (8) — (9) показывают, что при $x_0 = 0$ соотношение (7) справедливо. Для перехода к любому значению x_0 используем лемму 2. Мы имеем:

$$\int u(x, t) \varphi_\nu(x, x_0)\, dx = \int u(x, t) \varphi_\nu(x - x_0, 0)\, dx =$$

$$= \int u(\xi + x_0, t) \varphi_\nu(\xi, 0)\, d\xi,$$

что по лемме 2 и в силу только что доказанного имеет предел $u(x_0, t)$. Таким образом, предельное соотношение (7) установлено.

Функции $U_\nu(t) = \int u(x, t) \varphi_\nu(x, x_0)\, dx$, как мы видели, являются многочленами от t степени не выше r_0. Применяя лемму 1, мы получаем, что и $u(x_0, t)$ есть многочлен от t степени не выше r_0:

$$u(x_0, t) = \sum_{k=0}^{r_0} U_k(x_0) t^k,$$

или, что то же самое,

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{r_0} U_k(x) t^k. \qquad (10)$$

Вектор-функция $u(x, t)$ как решение системы (5) п. 1 дифференцируема по x, точнее, допускает применение дифференциального оператора $P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)$. Нам нужно теперь показать, что каждый коэффициент $U_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, r_0)$ обладает тем же свойством. Мы используем следующую лемму.

Лемма 3. *Если вектор-функция* $u(x, t) = \sum_{k=0}^{r_0} U_k(x) t^k$ *дифференцируема некоторое число раз по* x *при каждом фиксированном* t, *то каждый коэффициент* $u_k(x)$ *дифференцируем по* x *такое же число раз.*

Доказательство. Полагая последовательно $t = 0, 1, 2, \ldots, r_0$, получаем систему уравнений относительно $U_k(x)$:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= U_0(x), \\ u(x, 1) &= U_0(x) + U_1(x) + \ldots + U_{r_0}(x), \\ u(x, 2) &= U_0(x) + 2U_1(x) + \ldots + 2^{r_0} U_{r_0}(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u(x, r_0) &= U_0(x) + r_0 U_1(x) + \ldots + r_0^{r_0} U_{r_0}(x). \end{aligned}$$

Поскольку определитель этой системы — определитель Вандермонда — отличен от нуля, систему можно разрешить относительно функций $U_0(x), U_1(x), \ldots, U_{r_0}(x)$. При этом решения будут линейно выражены (с постоянными коэффициентами) через функции $u(x, 0), u(x, 1), \ldots, u(x, r_0)$ и, следовательно, будут столько же раз дифференцируемы по x, сколько эти последние. Тем самым лемма доказана.

Теперь, подставляя выражение (8) в уравнения (5) п. 1 и дифференцируя по x почленно, что допустимо в силу леммы 3, мы приходим к равенству

$$\sum_{k=0}^{r_0} k U_k(x) t^{k-1} = \sum_{k=0}^{r_0} t^k P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) U_k(x),$$

откуда

$$k U_k(x) = P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) U_{k-1}(x);$$

в частности,

$$P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) U_{r_0}(x) = 0,$$

$$P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) U_{r_0 - 1}(x) = r_0 U_{r_0}(x), \ldots$$

Таким образом, теорема полностью доказана.

Полагая в формуле (8) п. 1 $t=0$, находим $u(x, 0)=U_0(x)$ (в векторной записи) и из (9) следует $P^r\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x, 0)=0$. Таким образом, начальные данные рассматриваемого решения сами являются решением некоторой системы по аргументам x. Вспоминая результаты п. 4.2° § 2 гл. III вып. 2, мы можем усилить полученную теорему следующим образом: *если детерминант системы* (1) *обращается в нуль лишь в ограниченной области пространства σ, то в полученном решении функции $U_k(x)$ — целые функции порядка роста $\leqslant 1$; если детерминант обращается в нуль только при $\sigma=0$, то функции $U_k(x)$ — многочлены; если детерминант вообще не обращается в нуль, то $u(x, t)\equiv 0$.*

ДОБАВЛЕНИЯ К ГЛАВЕ II

В следующих далее добавлениях рассмотрены некоторые случаи применения методов § 1 к уравнениям и системам, не подходящим непосредственно под общую схему.

В добавлении 1 рассмотрены системы с операторами свертки; в частности, в этот класс входят дифференциально-разностные системы.

В добавлениях 2 и 3 рассмотрены некоторые частные случаи систем с коэффициентами, зависящими от пространственных координат.

ДОБАВЛЕНИЕ 1

УРАВНЕНИЯ В СВЕРТКАХ

Рассмотрим систему уравнений вида

$$\frac{\partial\varphi_j(x, t)}{\partial t}=\sum_{k=1}^{m} f_{jk*}\varphi_k(x, t) \qquad (j=1, 2, \ldots, m). \qquad (1)$$

Здесь, как и раньше, функции $\varphi_j(x, t)$ при каждом фиксированном t $(0\leqslant t\leqslant T)$ принадлежат к некоторому основному пространству Φ. Выражения f_{jk} означают функционалы-свертыватели в пространстве Φ; для простоты примем, что f_{jk} не зависят от t. Будем предполагать, что *преобразования Фурье свертывателей f_{jk} суть функционалы на пространстве $\tilde{\Phi}$ типа целых аналитических функций.* В частности, в силу теоремы п. 2 § 2 гл. III вып. 2 это всегда имеет место, если функционалы f_{jk} сосредоточены в ограниченной области пространства R.

Частными случаями систем вида (1) являются:

дифференциальные системы, когда функционалы f_{jk} представляют собой производные от δ-функций;

разностные системы, когда функционалы f_{jk} представляют собой сдвиги δ-функций;

системы интегральных уравнений с ядрами, зависящими от разности аргументов, когда функционалы f_{jk} представляют собой регулярные функционалы, сосредоточенные в конечной области.

К системе (1), как всегда, присоединяются начальные условия

$$\varphi_j(x, 0)=\varphi_j(x)\in\Phi. \qquad (2)$$

Снова будем считать временно, что x — точка на прямой.

Нашей задачей является установление классов единственности задачи Коши (1) — (2).

Рассмотрим формально-двойственную систему

$$\frac{d\psi_j(s, t)}{dt}=\sum_{k=1}^{m}\widetilde{f_{jk}}(s)\,\psi_k(s, t), \qquad (3)$$

полученную заменой в системе (1) оператора f_{jk*} на оператор умножения на целую аналитическую функцию $\widetilde{f_{jk}}(s)$. Это система обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами, являющимися аналитическими функциями от s. Ее можно записать в векторной форме

$$\frac{d\psi(s, t)}{dt}=A(s)\,\psi(s, t), \qquad (4)$$

где $A(s)$ — оператор, определяемый матрицей $\|\widetilde{f_{jk}}(s)\|$. Матрица

$$Q(s, t_0, t)=e^{(t-t_0)A(s)} \qquad (5)$$

определяет нормальную фундаментальную систему решений для системы уравнений (4). Элементы этой матрицы — целые аналитические функции от s. Если оператор $Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}, t_0, t\right)$ определен в пространстве Φ (переводит Φ в себя или в некоторое более широкое пространство Φ_1), то, как и в § 3, он будет искомым разрешающим оператором для задачи Коши (1) — (2). Поэтому нужно выяснить, в каких случаях оператор $Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}, t_0, t\right)$ определен в пространстве Φ. Для этого оценим рост функций $Q_{ij}(s, t_0, t)$, входящих в матрицу $Q(s, t_0, t)$.

Рассмотрим вначале случай, когда функционалы f_{jk} сосредоточены в конечной области. Тогда целые функции $\widetilde{f_{jk}}(s)$ допускают следующую оценку (вып. 2, гл. III, § 2, п. 2):

$$|\widetilde{f_{jk}}(\sigma + i\tau)| \leqslant C(1 + |\sigma|^h)\, e^{b_0|\tau|}, \tag{6}$$

где h — число, зависящее от функционала f_{jk}, а $\{|x| \leqslant b_0\}$ — наименьший куб, в котором сосредоточен функционал f_{jk}. Используя неравенство Юнга (гл. I, § 3)

$$\xi\eta \leqslant \frac{\xi^p}{p} + \frac{\eta^r}{r} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1\right),$$

мы можем, далее, оценку (6) преобразовать к виду

$$|\widetilde{f_{jk}}(\sigma + i\tau)| \leqslant C_1\left[(1 + |\sigma|)^{hp} + e^{b_0 r|\tau|}\right].$$

Отсюда и норма матрицы $\widetilde{f(s)} = \|\widetilde{f_{jk}}(s)\|$ удовлетворяет неравенству

$$\|\widetilde{f(s)}\| \leqslant C_2\left[(1 + |\sigma|)^{hp} + e^{b_0 r|\tau|}\right].$$

Поэтому

$$\|Q(s, t_0, t)\| \leqslant e^{(t-t_0)\|\widetilde{f}(s)\|} \leqslant e^{C_2(t-t_0)(1+|\sigma|)^{hp}} \cdot e^{C_2(t-t_0)\, e^{b_0 r|\tau|}}.$$

В качестве основного пространства Φ мы выберем теперь одно из (векторных) пространств $W_{M,a}^{\Omega,b}$ (гл. I, § 1). Напомним, что такое пространство состоит из векторов, компоненты которых — целые аналитические функции $\varphi(x + iy)$, удовлетворяющие неравенствам

$$|\varphi(x + iy)| \leqslant Ce^{-M[(a-\delta)x] + \Omega[(b+\rho)y]}$$

с выпуклыми функциями $M(x)$ и $\Omega(y)$. Двойственное пространство $\widetilde{\Phi} = \Psi$, как показано в § 3 гл. I, представляет собою пространство того же типа

$$\widetilde{W_{M,a}^{\Omega,b}} = W_{M_1, 1/b}^{\Omega_1, 1/a},$$

где M_1 и Ω_1 — функции, двойственные по Юнгу соответственно к функциям Ω и M. Положим $M_1(\sigma) = \frac{\sigma^q}{q}$, где q — любое число, большее hp, и $\Omega_1(\tau) = e^\tau - \tau - 1$. Тогда, по доказанному в § 2 гл. I, функции, входящие в состав матрицы $Q(s, t_0, t)$, будут мультипликаторами в пространстве $W_{M_1, 1/b}^{\Omega_1, 1/a}$ и будут переводить его в пространство $W_{M_1, 1/b}^{\Omega_1, 1/a + b_0 r}$. Это показывает, в свою очередь, что операторы, входящие в состав матрицы $Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}, t_0, t\right)$, определены и ограничены в пространстве $\Phi = W_{M,a}^{\Omega,b}$ и переводят его в пространство $\Phi_1 = W_{M,a'}^{\Omega,b}$, $\frac{1}{a'} = \frac{1}{a} + b_0 r$. В данном случае функция $M(x)$, двойственная к функции $\Omega_1(\tau)$, равна

$$M(x) = (x + 1)\ln(x + 1) - x$$

и эквивалентна функции $x \ln x$.

Таким образом, компоненты векторов, принадлежащих пространству Φ, имеют на оси x убывание, характеризуемое формулой

$$|\varphi(x)| \leqslant C_\delta e^{-(a'-\delta)|x|\ln|x|}, \quad \frac{1}{a'} = \frac{1}{a} + b_0 r.$$

Число a можно взять как угодно большим, число r — как угодно близким к 1; поэтому коэффициент в круглых скобках в показателе может быть сделан как угодно близким к $\frac{1}{b_0}$; обозначим этот коэффициент через $\frac{1}{b_0} - \delta'$.

В качестве пространства E мы возьмем совокупность функций $\varphi(x)$ с нормой, определенной по формуле

$$\|\varphi\|_E = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{b_0+\delta}|x|\ln|x|}\|\varphi(x)\|\,dx$$

с произвольно фиксированным $\delta > 0$. Тогда при достаточно малом δ' пространства Φ и Φ_1 будут целиком заключены в пространстве E.

Применяя теорему § 4, приходим к следующему результату.

Если решение системы

$$\frac{\partial u_j(x, t)}{\partial t} = -\sum_{k=1}^{m} f_{kj} * u_k(x, t) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \qquad (7)$$

есть система функционалов на пространстве Φ, *принадлежащих при всех* t, $0 \leqslant t \leqslant T$, *к пространству* E', *то это решение однозначно определяется своими начальными значениями*

$$u_j(x, 0) = u_j(x) \in E'. \qquad (8)$$

Так же, как и в § 3, можно доказать, что всякое классическое решение системы (7) в виде совокупности функций $u_j(x, t)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|u_j(x, t)| \leqslant Ce^{\left(\frac{1}{b_0}-\delta'\right)|x|\ln|x|},$$

определяет и обобщенное решение в пространстве E'. Поэтому *класс функций* $u(x)$, *удовлетворяющих неравенству*

$$|u(x)| \leqslant Ce^{\left(\frac{1}{b_0}-\delta'\right)|x|\ln|x|}, \qquad (9)$$

при любом фиксированном δ' есть класс единственности решения задачи Коши для системы уравнений в свертках вида (7).

В частности, рассмотрим разностную систему, отвечающую сверткам с функционалами $f_{jk} = \delta(x - x_{jk})$. Число b_0, определяющее максимальный из отрезков, на котором сосредоточены функционалы f_{jk}, в данном случае совпадает с числом $H = \max|x_{jk}|$ (максимальный сдвиг). Поэтому для разностной системы коэффициент $\frac{1}{b_0} - \delta'$ в показателе формулы (9), определяющей класс единственности решения задачи Коши, может быть заменен на $\frac{1}{H} - \delta'$. То же имеет место для *дифференциально-разностной* системы, определяемой свертками с функционалами $\delta^{(q)}(x - x_{jk})$.

В некоторых случаях можно рассматривать уравнения в свертках, когда функционалы f_{jk} не сосредоточены в конечной области. Пусть, например, функционал f_{jk} есть функционал типа целой аналитической функции, входящей в пространство S_α^β, $\alpha + \beta = 1$. Тогда $\widetilde{f_{jk}}(s)$ есть целая аналитическая функция, которая входит в пространство S_β^α и удовлетворяет, следовательно, неравенству

$$|\widetilde{f_{jk}}(\sigma + i\tau)| \leqslant Ce^{-a_0|\sigma|^{1/\beta}+b_0|\tau|^{1/(1-\alpha)}} \leqslant Ce^{b_0|\tau|^{1/(1-\alpha)}}.$$

Рассуждая, как и выше, найдем, что матрица $Q(s, t_0, t)$ удовлетворяет неравенству

$$\|Q(s, t_0, t)\| \leqslant C_1 e^{C(t-t_0)\, e^{b_0|\tau|^{1/(1-\alpha)}}}.$$

Такая матрица $Q(s, t_0, t)$ определяет оператор умножения в пространстве Ω, где $\Omega(\tau) = e^{b|\tau|^{1/(1-\alpha)}}$. Двойственным к такому пространству является пространство W_M, где функция $M(x)$ эквивалентна функции $|x|\ln^{1-\alpha}|x|$. Поэтому, рассуждая так же, как и выше, найдем, что *классом единственности решения соответствующей задачи Коши является класс функций* $u(x)$, *удовлетворяющих неравенству*

$$|u(x)| \leqslant Ce^{|x|\ln^{1-\alpha}|x|}.$$

ДОБАВЛЕНИЕ 2

УРАВНЕНИЯ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ x

1. Общая схема. Пусть дано континуальное семейство вложенных друг в друга нормированных пространств Φ_λ $(a < \lambda < b < \infty)$, так что $\Phi_\lambda \supset \Phi_\mu$ при $\lambda < \mu$, с пересечением $\Phi = \bigcap \Phi_\lambda$. Пусть далее задан линейный оператор A, переводящий каждое пространство Φ_μ в любое более широкое Φ_λ $(\lambda < \mu)$ и обладающий при этом нормой

$$\|A\|_\mu^\lambda \leqslant \frac{C}{\mu - \lambda}.$$

Покажем, что оператор $Q = e^{(t-t_0)A}$ при достаточно малых $t - t_0$ есть ограниченный оператор, переводящий каждое пространство Φ_μ в любое более широкое Φ_λ. Для доказательства разделим точками $\xi_0 = \lambda$, $\xi_1, \ldots, \xi_n = \mu$ отрезок $\lambda \leqslant \xi \leqslant \mu$ на n равных частей длиной по $\frac{\mu - \lambda}{n}$.

Оператор A^n можно представить в виде произведения n операторов A, каждый из которых переводит пространство $\Phi_{\xi_{j+1}}$ в Φ_{ξ_j}. Мы получим, в частности,

$$\|A^n\|_\mu^\lambda \leqslant \prod_{j=1}^{n-1} \|A_{\xi_{j+1}}^{\xi_j}\| \leqslant \left(\frac{Cn}{\mu-\lambda}\right)^n = C_1^n n^n.$$

Поэтому ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!} \|A^n\|_\mu^\lambda \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} C_1^n \frac{n^n}{n!} (t-t_0)^n$$

сходится при $t-t_0 < \frac{1}{C_1 e}$. Это означает, что при указанных значениях t существует оператор $Q = e^{(t-t_0)A}$, который переводит пространство Φ_μ в пространство Φ_λ, что и утверждалось.

Найденный оператор $Q = Q_{t_0}^t$ позволяет построить решение задачи Коши для уравнения

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = A\varphi(t)$$

с начальным условием $\varphi(t_0) = \varphi_0$. Решение $\varphi(t) = Q_{t_0}^t \varphi(t_0)$ принадлежит к пространству Φ_λ, если $\varphi(t_0) \in \Phi_\mu$, $\lambda < \mu$ и $t - t_0$ достаточно мало.

2. Системы с операторами свертки. Рассмотрим систему уравнений в свертках вида

$$\frac{\partial\varphi_j(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk}(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(x-\xi, t)\, d\rho_{jk}(\xi), \qquad (1)$$

где функции $\rho_{jk}(\xi)$ имеют ограниченное изменение на $(-\infty, \infty)$, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu|x|} |d\rho_{jk}(\xi)| = C_\mu < \infty \qquad (2)$$

по крайней мере для некоторого интервала значений μ, $0 \leqslant \mu_1 < \mu < \mu_2$.

Относительно функций $a_{jk}(x)$ мы будем предполагать, что они удовлетворяют неравенствам

$$|a_{jk}(x)| \leqslant a|x| + b.$$

Обозначим через Φ_λ $(\mu_1 \leqslant \lambda \leqslant \mu_2)$ нормированное пространство функций $\varphi(x)$ с нормой по формуле

$$\|\varphi\|_\lambda = \sup_x |\varphi(x)|\, e^{\lambda|x|}.$$

(В векторном случае вместо $|\varphi(x)|$ справа надо поставить норму вектора $\varphi(x)$ в евклидовом пространстве.) Очевидно, что при $\lambda < \mu$ мы имеем $\Phi_\lambda \supset \Phi_\mu$.

Покажем, что операторы, стоящие в правой части системы (1), удовлетворяют условиям п. 1. Если $\varphi(x)$ принадлежит Φ_μ и

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-\xi)\, d\rho(\xi), \qquad (3)$$

где $\rho(\xi)$ — функция с ограниченным изменением, удовлетворяющая неравенству типа (2), то

$$\|\psi(x)\|_\mu = \sup |\psi(x)|\, e^{\mu|x|} = \sup e^{\mu|x|} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-\xi)\, d\rho(\xi) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_x e^{\mu|x|} \int_{-\infty}^{\infty} \|\varphi\|_\mu e^{-\mu|x-\xi|} |d\rho(\xi)| =$$

$$= \|\varphi\|_\mu \sup_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu|x| - \mu|x-\xi|} |d\rho(\xi)| \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi\|_\mu \sup_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu|\xi|} |d\rho(\xi)| = C_\mu \|\varphi\|_\mu.$$

Таким образом, оператор (3) переводит пространство Φ_μ в себя и имеет при этом норму, не превосходящую C_μ.

Пусть теперь $\psi(x) \in \Phi_\mu$ и

$$\psi_a(x) = a(x)\psi(x),$$

где функция $a(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|a(x)| \leqslant a|x| + b. \qquad (4)$$

8 Зак. 2918. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов

Очевидно, что функция $\psi_a(x)$ принадлежит любому пространству Φ_λ при $\lambda < \mu$ (и, вообще говоря, не принадлежит самому Φ_μ). При этом мы имеем:

$$\|\psi_a(x)\|_\lambda = \sup |a(x)\psi(x)| e^{\lambda|x|} \leqslant$$
$$\leqslant \sup |a(x)| e^{(\lambda-\mu)|x|} \cdot \sup |\psi(x)| e^{\mu|x|}.$$

Оценим первый множитель в правой части. В силу условия (4)

$$|a(x)| e^{(\lambda-\mu)|x|} \leqslant a|x| e^{(\lambda-\mu)|x|} + be^{(\lambda-\mu)|x|}.$$

С помощью дифференцирования легко получаем, что максимум первого слагаемого не превосходит $\frac{a}{e(\mu-\lambda)}$; очевидно, что второе слагаемое не превосходит b. Таким образом,

$$\|\psi_a(x)\|_\lambda \leqslant \left[\frac{a}{e(\mu-\lambda)} + b\right] \|\psi(x)\|_\mu,$$

откуда следует, что оператор умножения на функцию $a(x)$, как оператор, действующий из пространства Φ_μ в Φ_λ, имеет норму, не превосходящую

$$\frac{a}{e(\mu-\lambda)} + b \leqslant \frac{a_1}{\mu-\lambda} \quad \text{при } \mu-\lambda < C.$$

В итоге каждый элемент матрицы системы (1) есть оператор, действующий из пространства Φ_μ в Φ_λ, $\lambda < \mu$, с нормой, не превосходящей $\frac{a_1}{\mu-\lambda}$.

Систему (1) можно записать в векторном виде

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = A\varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ — вектор с координатами $\varphi_j(x, t)$, A — оператор в m-мерном векторном пространстве, определяемый матрицей системы (1). Этот оператор, очевидно, действует из векторного пространства Φ_μ в любое Φ_λ ($\lambda < \mu$) с нормой, не превосходящей $\frac{C}{\mu-\lambda}$.

По доказанному в п. 1, задача Коши для системы (1) с начальными условиями в пространстве Φ_μ всегда имеет решение

$$\varphi(t) = e^{(t-t_0)A}\varphi(t_0)$$

в любом пространстве $\Phi_\lambda \supset \Phi_\mu$. В силу основной теоремы в § 2, задача Коши для обратно-сопряженной системы

$$\frac{\partial u_j(x, t)}{\partial t} = -\sum_{k=1}^{m} \bar{a}_{kj}(x) \int u_k(x-\xi)\, d\bar{\rho}_{jk}(\xi) \tag{5}$$

может иметь лишь единственное решение в пространстве, сопряженном к любому Φ_λ. В частности, классом единственности решения задачи Коши для системы (5) является совокупность функций $f(x)$, удовлетворяющих неравенству

$$|f(x)| \leqslant Ce^{\lambda|x|} \tag{6}$$

при любом фиксированном λ, $\mu_1 < \lambda < \mu_2$.

Система (1) превращается в чисто разностную систему в том случае, когда $\rho_{jk}(\xi)$ — ступенчатые функции. Таким образом, для разностных систем (1) с коэффициентами, возрастающими не быстрее первой степени аргумента, класс функций $f(x)$, выделяемых неравенством (6), есть класс единственности решения задачи Коши.

Тот же результат мы получим, если вместо основного пространства Φ_λ из функций $\varphi(x)$ вещественного аргумента, экспоненциально убывающих на оси x, мы возьмем основное пространство Φ_λ из целых аналитических функций порядка роста $h > 1$, с нормами по формуле

$$\|\varphi\|_\lambda = \sup |\varphi(x+iy)| e^{\lambda|x|+\lambda'|y|^h} \quad \left(\lambda' = -\frac{1}{\lambda}\right) \tag{7}$$

(в векторном случае снова вместо $|\varphi(x+iy)|$ справа надо поставить норму вектора φ в евклидовом пространстве). При этом в качестве коэффициентов $a(x)$ можно брать линейные функции от $z = x+iy$.

Доказательство проходит по той же схеме, что и в разобранном случае. Необходимо только дать оценку величины

$$A = \sup |y| e^{\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\lambda}\right)|y|^h}.$$

Эта оценка также легко получается дифференцированием, именно

$$A \leqslant \frac{C}{(\mu-\lambda)^{1/h}} \leqslant \frac{C_1}{\mu-\lambda} \quad \text{при } \mu-\lambda \leqslant C_0,$$

что нам и требуется. Этот второй вариант мы используем в следующем пункте.

3. Системы Ковалевской. Система дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial u_j(x,t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{m} \left\{ i a_{jk}(x) \frac{\partial u_k(x,t)}{\partial x} + b_{jk}(x) u_k(x,t) \right\} \qquad (1)$$

называется системой Ковалевской. Мы покажем, что *если функции $a_{jk}(x)$ и $b_{jk}(x)$ являются преобразованиями Фурье экспоненциально убывающих мер, т. е. если имеют место формулы*

$$a_{jk}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma x}\, d\rho_{jk}(\sigma), \quad b_{jk}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma x}\, d\overset{*}{\rho}_{jk}(\sigma), \qquad (2)$$

причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu|\sigma|}\, |d\rho_{jk}(\sigma)| < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu|\sigma|}\, |d\overset{*}{\rho}_{jk}(\sigma)| < \infty \quad (|\mu| \leqslant \mu_1), \qquad (3)$$

то класс функций $f(x)$, удовлетворяющих неравенству

$$|f(x)| \leqslant C e^{|x|^p},$$

при любом фиксированном p есть класс единственности решения задачи Коши для системы (1).

Замечание. Для представимости функций $a_{jk}(x)$ и $b_{jk}(x)$ в виде (2)—(3) *необходимо*, чтобы они аналитически продолжались в полосу $|\operatorname{Im} z| \leqslant \mu_1$ и притом оставались ограниченными в этой полосе; *достаточно*, чтобы при аналитическом продолжении в полосу получились функции, имеющие абсолютно интегрируемую при $-\infty < x < \infty$ мажоранту; в этом случае интеграл Стильтьеса даже приводится к (несобственному) интегралу Римана.

В качестве основного пространства Φ мы возьмем пространство функций $\varphi(x)$, аналитически продолжающихся в полосу $|\operatorname{Im} z| \leqslant \lambda$ (λ зависит от функции φ) и удовлетворяющих оценкам убывания

$$|\varphi(x+iy)| \leqslant C e^{-a|x|^p} \quad (p > 1),$$

где постоянная C ограничена в полосе $|y| \leqslant \lambda$. Это пространство совпадает с пространством $S^1_{1/p}$ (вып. 2, гл. IV, § 1).

Рассмотрим двойственное пространство $\Psi = \Phi$. Как было показано в гл. IV вып. 2, пространство $\Psi = S_1^{1/p}$ состоит из целых аналитических функций $\psi(\sigma + i\tau)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|\psi(\sigma + i\tau)| \leqslant C e^{-a'|\sigma| + b'|\tau|^{p'}},$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ и постоянная a' зависит от функции ψ.

Применим преобразование Фурье к системе с неизвестными основными функциями

$$\frac{\partial \varphi_j(x,t)}{\partial t} = -\sum_{k=1}^{m} \left\{ i \frac{\partial}{\partial x} \left[\overline{a}_{kj}(x) \varphi_k(x,t) \right] + \overline{b}_{kj}(x) \varphi_k(x,t) \right\}. \qquad (1')$$

Эта система получается из системы (1) как обратно-сопряженная в смысле § 2.

Произведение $a_{kj}(x)\varphi_k(x,t)$ после преобразования Фурье переходит в свертку $\tilde{\overline{a}}_{kj}(\sigma) * \psi_k(\sigma,t)$. Поскольку преобразование Фурье функции $a_{jk}(x)$, по условию, есть мера, мы можем записать полученное выражение в форме

$$\tilde{\overline{a}}_{kj}(\sigma) * \psi_k(\sigma, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(\sigma - \xi, t)\, d\tau_{kj}(\xi),$$

где $\tau_{kj}(\sigma)$ — функция с ограниченным изменением при $-\infty < \sigma < \infty$. Таким образом, система (1′) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \psi_j(\sigma,t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{m} \left\{ \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(\sigma - \xi, t)\, d\rho_{jk}(\xi) + \int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(\sigma - \xi, t)\, d\hat{\rho}_{jk}(\xi) \right\}. \qquad (4)$$

Как было показано в п. 2, для этой системы имеется оператор $Q^t_{t_0}$, решающий задачу Коши.

Поэтому в силу общей теоремы § 2 двойственный оператор $\widetilde{Q_{t_0}^t} = G_{t_0}^t$ решает соответствующую задачу Коши в пространстве Φ.

Задача Коши для системы

$$\frac{\partial u_j(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{m} \left\{a_{jk}(x)\, i \frac{\partial}{\partial x} u_k(x, t) + b_{jk}(x)\, u_k(x, t)\right\} \qquad (1)$$

имеет, следовательно, единственное решение в пространстве Φ'. В частности, если рассмотреть класс функций $f(x)$, удовлетворяющих неравенству

$$|f(x)| < Ce^{|x|^{p_1}}$$

при некотором $p_1 < p$, то, поскольку такие функции определяют на пространстве Φ линейные непрерывные функционалы, этот класс есть класс единственности решения задачи Коши для системы (1). Число p_1 можно считать, разумеется, произвольным вместе с числом p.

Тем самым наша теорема доказана.

ДОБАВЛЕНИЕ 3

СИСТЕМЫ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ОПЕРАТОРАМИ

Дифференциальный оператор $L(D) = \sum\limits_{|q| \leqslant p_1} a_q(x) D^q$ называется *эллиптическим*, если группа его старших членов $L_0(D) = \sum\limits_{|q| = p_1} a_q(x) D^q$ обладает тем свойством, что для любого фиксированного x функция $L_0(\sigma) = \sum\limits_{|q| = p_1} a_q(x) \sigma^q$ при всех вещественных значениях σ неотрицательна и обращается в нуль только при $\sigma = 0$. Все коэффициенты $a_q(x)$ предполагаются непрерывными функциями во всем пространстве, ограниченными вместе с производными первого порядка.

Рассмотрим систему уравнений вида

$$\frac{\partial u_j(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{m} P_{jk}(L, t)\, u_k(x, t) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \qquad (1)$$

где P_{jk} — многочлены с коэффициентами — непрерывными функциями от t при $0 \leqslant t \leqslant T$. К этой системе присоединяются начальные данные

$$u_j(x, 0) = u_j(x) \quad (j = 1, 2, \ldots, m). \qquad (2)$$

Теорема. *Если разрешающая матрица $Q(s, t_0, t)$ системы, обратно-сопряженной к* (1)

$$\frac{\partial \psi_j(s, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{P}_{jk}(s, t)\, \psi_k(s, t), \qquad (3)$$

допускает в плоскости $s = \sigma + i\tau$ оценку

$$\|Q(s, t_0, t)\| \leqslant C_1 e^{b(t - t_0)|s|}, \qquad (4)$$

то класс функций $f(x)$, удовлетворяющих неравенству

$$|f(x)| \leqslant Ce^{b_1 |x|^{p_1'}} \quad \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1'} = 1\right), \qquad (5)$$

есть класс единственности для решения задачи Коши (1) — (2).

Если коэффициенты многочленов $\mathrm{P}_{jk}(s, t) = \mathrm{P}_{jk}(s)$ постоянны, то для выполнения неравенства (4) достаточно, чтобы характеристические корни $\lambda_j(s)$ матрицы $\mathrm{P}(s)$ удовлетворяли неравенствам

$$\Lambda(s) = \max_j \operatorname{Re} \lambda_j(s) \leqslant C(1 + |s|). \qquad (6)$$

Прежде чем переходить к доказательству теоремы, приведем некоторые свойства решений задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu \qquad (7)$$

с эллиптическим оператором L. Нам придется использовать здесь следующие результаты С. Д. Эйдельмана.

Уравнение (7) *всегда имеет решение, если начальная функция $u(x, 0)$ удовлетворяет условию*

$$|u(x, 0)| \leqslant C_1 e^{-a|x|^{p_1'}} \quad \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1'} = 1\right) \qquad (8)$$

с некоторыми C_1 *и* a. *Решение* $u(x, t)$ *в свою очередь при каждом фиксированном* $t \geqslant 0$ *удовлетворяет неравенству*

$$|u(x, t)| \leqslant C_1' e^{-a'|x|^{p_1'}}. \tag{9}$$

При $t > 0$ $u(x, t)$ *есть бесконечно дифференцируемая функция от* t, *и ее последовательные производные по* t *удовлетворяют неравенствам*

$$\left|\frac{\partial^q u(x, t)}{\partial t^q}\right| \leqslant CB^q q!\, e^{-a'|x|^{p_1'}} \quad (q = 0, 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Дифференцируя обе части уравнения (7) по t, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = L\frac{\partial u(x, t)}{\partial t},$$

т. е. функция $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ есть также решение уравнения (7); далее $L\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = L(Lu)$, так что к функции $u(x, t)$ можно применить оператор L дважды. Повторяя этот прием, мы убеждаемся, что к функциям $u(x, t)$ — решениям уравнения (7) — можно неограниченно применять оператор L. В силу неравенства (10) будет выполнено неравенство

$$|L^q u(x, t)| \leqslant CB^q q!\, e^{-a'|x|^{p_1'}}.$$

Переходим к доказательству теоремы. Введем основное пространство Φ из функций $\varphi(x)$, определенных при всех вещественных x, допускающих неограниченное применение оператора L и удовлетворяющих при этом неравенству

$$\|L^q \varphi(x)\| \leqslant B^q q!\, e^{-a|x|^{p_1'}}.$$

Такие функции, как следует из сказанного выше, существуют; например, поставленным условиям удовлетворяют решения уравнения (7) с начальным условием (8), рассматриваемые при $t > 0$. Можно утверждать также, что пространство Φ *достаточно богато функциями*: если для

некоторой локально интегрируемой функции $f(x)$ при всех $\varphi \in \Phi$ существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$$

и равен нулю для каждой $\varphi \in \Phi$, то $f(x) \equiv 0$ почти всюду. Для доказательства рассмотрим решение $u(x, t)$ задачи Коши (7) — (8) с финитной начальной функцией $u_0(x)$. Поскольку при каждом $t > 0$, по доказанному, $u(x, t)$ принадлежит пространству Φ, мы имеем по условию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)u(x, t)\,dx = 0. \tag{11}$$

Функция $u(x, t)$ удовлетворяет неравенству (9), где C_1' не зависит от t. Поэтому если в свою очередь $f(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\|f(x)\| \leqslant A_1 e^{A|x|^{p_1'}}, \quad A < a',$$

то в интеграле (11) можно перейти к пределу при $t \to 0$, и мы получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)u_0(x)\,dx = 0.$$

Так как $u_0(x)$ может быть любой финитной функцией, то $f(x) \equiv 0$ почти всюду, что и требуется.

Построенное основное пространство аналогично пространству $S_{\alpha, A}^{1, B}$, где $\alpha = \frac{1}{p_1'}$, а оператор L заменяет оператор $\frac{\partial}{\partial x}$. Обозначим поэтому пространство Φ через $LS_{\alpha, A}^{1, B}$. В пространстве $LS_{\alpha, A}^{1, B}$ справедлива основная теорема § 5 гл. IV вып. 2, которая в данном случае формулируется так:

Если $f(s)$ *есть целая функция порядка* 1 *и типа, меньшего* $\frac{1}{Be^2}$, *то оператор* $f(L)$ *определен и ограничен в пространстве* $\Phi = LS_{\alpha, A}^{1, B}$ *и переводит это пространство в пространство* $\Phi_1 = LS_{\alpha, A}^{1, Be}$.

Доказательство проходит буквально по схеме доказательства теоремы § 5 гл. IV вып. 2 с заменой всюду $\frac{\partial}{\partial x}$ на L и) β на 1).

По условию, разрешающая матрица $Q(s, t_0, t)$ системы

$$\frac{\partial \psi_j(s, t)}{\partial t} = \sum P_{jk}(s, t)\, \psi_k(s, t)$$

имеет первый порядок роста с типом, не превосходящим $b(t - t_0)$. Если заменить аргумент s на оператор L, то в силу приведенной теоремы при достаточно малом $t - t_0$ получится оператор, определенный в пространстве $LS_{\alpha, A}^{1, B}$ и переводящий его в пространство $LS_{\alpha, A}^{1, B_3}$. В то же время этот оператор $Q(L, t_0, t)$ есть разрешающий оператор для задачи Коши (1) — (2), что можно доказать с помощью такой же выкладки, как в § 3.

Итак, задача Коши (1) — (2) обладает разрешающим оператором, переводящим основное пространство $LS_{\alpha, A}^{1, B}$ в $LS_{\alpha, A}^{1, Be}$.

Введем теперь пространство E, состоящее из измеримых функций $\varphi(x)$ с нормой по формуле

$$\|\varphi\|_E = \int_{-\infty}^{\infty} e^{a|x|^{p_1'}} \|\varphi(x)\|\, dx.$$

При $a < A$ пространство $LS_{\alpha, A}^{1, B}$ (а также $LS_{\alpha, A}^{1, Be}$) есть часть пространства E, причем, по доказанному, *плотная* часть этого пространства.

Мы находимся снова в условиях теоремы 2 § 2: у нас имеется цепь пространств $\Phi \subset \Phi_1 \subset E$ такая, что Φ плотно в E, оператор $Q(L, t_0, t)$ действует из Φ в Φ_1 и решение задачи Коши (1) — (2) существует при любых начальных функциях $\varphi_j(x, t_0) \in \Phi$ и принадлежит к Φ_1.

Применяя эту теорему, получаем: задача Коши для обратно-сопряженной системы

$$\frac{\partial u_j(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{m} P_{kj}(L, t)\, u_k(x, t)$$

может иметь лишь единственное решение, принадлежащее при всех t, $0 \leqslant t \leqslant T$, пространству E', в частности, удовлетворяющее неравенствам вида

$$|u_k(x, t)| \leqslant C_1 e^{b|x|^{p_1'}},$$

что и утверждалось.

Примером эллиптического оператора является оператор

$$Lu = \Delta u + q(x)\, u,$$

где Δ — оператор Лапласа, а $q(x)$ — непрерывная функция, ограниченная во всем пространстве вместе со своими первыми производными. Число p_1 здесь равно 2. Из наших результатов вытекает, в частности, что классом единственности решения задачи Коши для любого уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\, \Delta u + q(x)\, u,$$

где α — любая (комплексная) постоянная, служит класс функций $f(x)$, удовлетворяющих неравенству

$$|f(x)| \leqslant Ce^{b|x|^2}.$$

ГЛАВА III

КЛАССЫ КОРРЕКТНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается система уравнений

$$\frac{\partial u_j(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{m} P_{jk}\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u_k(x, t) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u_j(x, 0) = u_j(x). \quad (2)$$

В главе 2 мы указали для каждой такой системы класс единственности решения задачи Коши. Вопрос о существовании решения остался открытым.

В этой главе мы укажем для каждой системы (1) естественный класс начальных условий, обеспечивающих существование решения задачи (1)—(2) и непрерывную зависимость его от начальных функций. Поскольку все рассмотрения будут проходить в пределах класса единственности, указанного в главе II, найденное решение будет и единственным решением.

Метод, который мы используем в этой главе, — это метод преобразований Фурье обобщенных функций.

Система (1) рассматривается как система с неизвестными *обобщенными функциями* $u_j(x, t)$ — функционалами над основным пространством Φ (отвечающим классу единственности решения задачи Коши). После применения преобразования Фурье система (1) переходит в систему обыкновенных уравнений

$$\frac{\partial v_j(s, t)}{\partial t} = \sum P_{jk}(s) v_k(s, t) \quad (3)$$

с начальным условием

$$v_j(s, 0) = v_j(s) = \widetilde{u_j(x)}, \quad (4)$$

где $v_j(s, t)$ — функционал на пространстве $\Psi = \widetilde{\Phi}$. Доказывается (см. ниже, теорема 1), что *решение этой задачи Коши* (единственное в рассматриваемом классе) *имеет в векторных обозначениях вид*

$$v(s, t) = Q(s, t) \cdot v(s, 0), \quad (5)$$

где

$$Q(s, t) = e^{tP(s)}$$

есть разрешающая матрица-функция системы (3).

В силу теоремы о преобразовании Фурье произведения (вып. 2, гл. III, § 3) обратное преобразование Фурье приводит к формуле

$$u(x, t) = G(x, t) * u(x, 0), \quad (6)$$

где $G(x, t)$ есть *матрица-функция Грина*, обратное преобразование Фурье матрицы-функции $Q(s, t)$; ее k-й столбец задает решение задачи Коши (1)—(2) при начальных условиях $u_j(x, 0) = 0$ для $j \neq k$, $u_k(x, 0) = \delta(x)$.

Формула (6) приводит, вообще говоря, к обобщенной функции; мы же имеем целью выяснить, когда искомое решение есть обычная функция.

Этой цели можно достичь, выяснив более детально свойства матрицы-функции $G(x, t)$ и наложив соответствующие условия на начальную функцию $u(x, 0)$. Чем лучше с функциональной точки зрения ведет себя матрица $G(x, t)$, тем меньше условий мы можем налагать на функцию $u(x, 0)$. Так, если матрица $G(x, t)$ состоит из обычных функций, мы можем не налагать на функции $u(x, 0)$ никаких условий гладкости и следить лишь за тем, чтобы рост функций $u(x, 0)$ при $|x| \to \infty$ был не слишком большим — для обеспечения сходимости интеграла, задающего свертку (6). Если матрица $G(x, t)$ состоит из обобщенных функций, являющихся производными некоторого, например h-го, порядка от обычных функций, то для обеспечения существования свертки (6) в форме обычной функции мы должны требовать от начальных функций $u(x, 0)$ наличия производных до порядка h. Наконец, если матрица $G(x, t)$ состоит из обобщенных функций «бесконечного порядка», не являющихся производными конечного порядка от обычных функций, то от начальных функций $u(x, 0)$ мы вынуждены требовать бесконечной дифференцируемости или даже аналитичности. Указанные возможные свойства матрицы Грина $G(x, t)$ определяются, конечно, устройством разрешающей матрицы $Q(s, t)$ и именно, ее поведением в комплексной плоскости изменения параметра s. В свою очередь, как мы видели в гл. II, поведение матрицы $Q(s, t)$ существенным образом определяется поведением характеристических корней $\lambda_j(s)$ матрицы $P(s)$. В соответствии с этим мы выделяем три основных класса систем:

1°. Параболические системы. Они характеризуются тем, что функция $\Lambda(s) = \max_j \operatorname{Re} \lambda_j(s)$ удовлетворяет при вещественных $s = \sigma$ оценке

$$\Lambda(\sigma) < -C|\sigma|^h + C_1$$

с некоторыми $C > 0$, $h > 0$. Оказывается, что в этом случае элементы матрицы $G(x, t)$ — обычные функции, экспоненциально убывающие при $|x| \to \infty$; поэтому решение параболической системы (1) существует при любых (локально суммируемых) начальных данных $u(x, 0)$ без ограничения гладкости, которые могут иметь соответствующий экспоненциальный рост при $|x| \to \infty$. Количественное выражение этого роста зависит от приведенного порядка системы p_0, от показателя параболичности h и еще от одной характеристики функции $\Lambda(s)$, называемой *родом* системы и описываемой ниже, в § 2. Свертка (6) превращается в этом случае в аналог интеграла Пуассона для уравнения теплопроводности.

2°. Системы, корректные по Петровскому. Они характеризуются тем, что функция $\Lambda(s) = \max_j \operatorname{Re} \lambda_j(s)$ ограничена при вещественных $s = \sigma$:

$$\Lambda(\sigma) \leqslant C.$$

В этом случае элементы матрицы $G(x, t)$ — обобщенные функции, являющиеся производными некоторого фиксированного порядка l от обычных функций. Поэтому решение корректной системы существует при начальных функциях $u(x, 0)$, имеющих производные порядка, определяемого числом l.

Рост этих функций при $|x| \to \infty$ зависит от системы (1); это могут быть функции любого роста (гиперболические системы), некоторого экспоненциального роста (регулярные системы) или даже только степенного роста (системы типа Шрёдингера), что определяется также поведением функции $\Lambda(s)$.

3°. Некорректные системы. Они характеризуются тем, что функция $\Lambda(s)$ фактически возрастает на вещественной оси. Свертка (6) приводится к обычной функции в этом случае, лишь если начальные функции имеют бесконечный порядок гладкости. Если удовлетворяется неравенство

$$\Lambda(\sigma) \leqslant C|\sigma|^h + C_1$$

и $h < 1$, то начальные функции должны быть бесконечно дифференцируемыми с некоторыми условиями на рост производных; в общем же случае, когда

$$\Lambda(\sigma) \leqslant C|\sigma|^{p_0} + C_1,$$

начальные функции должны быть аналитическими, определенного порядка роста при $|z| = |x + iy| \to \infty$.

Теперь возвратимся к формулировке нашей основной теоремы. Рассматривается система уравнений (в векторной записи)

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) \tag{7}$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x). \tag{8}$$

Функции $u(x, t)$ считаются обобщенными функциями над некоторым основным пространством Φ, выбранным с тем расчетом, чтобы в пространстве Φ' (обобщенных функций) решение задачи Коши существовало и было единственным. Как строить такие пространства — было указано в гл. II § 3 и 4. После перехода к преобразованиям Фурье мы получаем эквивалентную задачу

$$\frac{dv(s, t)}{dt} = P(s)\, v(s, t), \tag{9}$$

$$v(s, 0) = v_0(s), \tag{10}$$

где $v(s, t)$ — обобщенная функция над двойственным пространством $\Psi = \widetilde{\Phi}$.

Теорема 1. *Решение задачи Коши* (9)—(10) *имеет вид* (в векторных обозначениях)

$$v(s,t)=Q(s,t)\cdot v(s,0), \tag{11}$$

где

$$Q(s,t)=e^{tP(s)}$$

есть разрешающая матрица-функция системы (9).

Доказательство. Как мы показали в гл. II, сопряженный оператор умножения на функцию

$$e^{tP^*(s)}$$

определен и ограничен в пространстве Ψ (при $0\leqslant t\leqslant T$) и переводит это пространство в некоторое более широкое пространство Ψ_1; то же можно сказать об операторе

$$P^*(s)\,e^{tP^*(s)},$$

получающемся формальным дифференцированием данного по t. Поэтому операторы

$$e^{tP(s)} \quad \text{и} \quad P(s)\,e^{tP(s)}$$

определены и ограничены в пространстве Ψ_1' и переводят его в Ψ'.

При $\Delta t\to 0$ оператор $\dfrac{\Delta e^{tP^*(s)}}{\Delta t}=\dfrac{e^{(t+\Delta t)P^*(s)}-e^{tP^*(s)}}{\Delta t}$ стремится (на каждой основной функции $\psi(s)$) к оператору $P^*(s)e^{tP^*(s)}$, поскольку функции

$$\frac{e^{(t+\Delta t)P^*(s)}-e^{tP^*(s)}}{\Delta t}\psi(s)=P^*(s)\,e^{(t+\theta\Delta t)P^*(s)}\psi(s)$$

ограничены по топологии пространства Ψ_1 и правильно сходятся к $P^*(s)e^{tP^*(s)}\psi(s)$. Поэтому для сопряженного оператора в пространстве Φ_1' имеет место соотношение

$$\frac{e^{(t+\Delta t)P(s)}-e^{tP(s)}}{\Delta t}\to P(s)\,e^{tP(s)}$$

на каждой обобщенной функции $v_0(s)$. Отсюда следует, что выражение

$$v(s,t)=e^{tP(s)}v_0(s)$$

определяет решение уравнения (11). Далее, при $t\to 0$ оператор $e^{tP^*(s)}$ стремится на каждой основной функции $\psi(s)$

к единичному оператору (в силу ограниченности в Ψ и правильной сходимости функций $e^{tP^*(s)}\psi(s)$ при $t\to 0$). Отсюда следует, что сопряженный оператор $e^{tP(s)}$ на каждой обобщенной функции $v_0(s)$ стремится к единичному, иными словами, при $t\to 0$ по топологии Ψ'

$$e^{tP(s)}v_0(s)\to v_0(s).$$

Таким образом, для решения (11) заведомо удовлетворено начальное условие. Теорема доказана.

Подчеркнем, что элементы матрицы $Q(s,t)$ суть *операторы умножения, действующие в пространстве* $\Psi'=\widetilde{\Phi}'$.

В соответствии со сказанным выше обобщенная функция

$$u(x,t)=G(x,t)*u_0(x)$$

есть решение системы (7) с начальным условием (8). Это решение непрерывно зависит от начальной функции $u_0(x)$ в следующем смысле: если начальная функция $u_0(x)$ зависит от параметра λ и при $\lambda\to 0$ стремится к нулю, как функционал в основном пространстве Φ, то решение $u(x,t)$, которое также зависит от параметра λ, при каждом фиксированном $t>0$ также стремится к нулю в пространстве функционалов над основным пространством Φ.

Доказательство получается путем перехода к преобразованию Фурье. Решение двойственной системы

$$v(s,t)=e^{tP(s)}v_0(s)$$

в данном случае также зависит от параметра λ. В силу непрерывности преобразования Фурье из $u_0(x)\to 0$ следует $v_0(s)\to 0$ (в пространстве Ψ'); далее из свойств мультипликатора $e^{tP(s)}$ следует, что при $\lambda\to 0$ и $e^{tP(s)}v_0(s)=v(s,t)\to 0$ в пространстве Ψ'; применяя обратное преобразование Фурье, находим, что и $u(x,t)\to 0$ в пространстве Φ', что и требовалось.

Отметим далее следующее важное обстоятельство. Если мы показали, что решение системы (1), записанное в форме (6),

$$u(x,t)=G(x,t)*u(x,0)$$

есть обычная функция, то это еще не означает, что $u(x,t)$ есть и решение системы (1) в обычном смысле, поскольку функция $u(x,t)$ может не иметь в обычном смысле производных ни по x, ни по t. Эта функция *является решением системы* (1) *в смысле обобщенных функций*: иначе говоря, для любой основной функции $\varphi(x)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int u(x,\,t)\,\varphi(x)\,dx=\int u(x,\,t)\,P^*\left(i\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)\,dx. \qquad (12)$$

Если функция $u(x, t)$ обладает достаточной гладкостью, так что в левой части равенства (12) можно ввести символ $\frac{\partial}{\partial t}$ под знак $\int$, а в правой — интегрированием по частям перенести дифференциальный оператор на функцию $u(x, t)$, то $u(x, t)$ будет решением системы (1) и в обычном смысле.

Достаточная гладкость функции $u(x, t)$ по x может быть обеспечена наложением дальнейших ограничений гладкости на начальную функцию $u(x, 0)$. Что касается гладкости функции $u(x, t)$ по t, то она определяется всецело свойствами функции $G(x, t)$, и, по-видимому, не существует общего метода ее проверки.

Точно так же обстоит дело с выполнением начального условия. Для построенного решения $u(x, t)$ удовлетворение начального условия означает, что $u(x, 0)=\lim\limits_{t\to 0} u(x, t)$ в смысле обобщенных функций, т. е. что для любой основной функции $\varphi(x)$

$$\lim_{t\to\infty}\int u(x,\,t)\,\varphi(x)\,dx=\int u(x,\,0)\,\varphi(x)\,dx. \qquad (13)$$

Представляется вполне вероятным, что равенство (13) само по себе есть наиболее правильное выражение факта выполнения начального условия.

§ 2. ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

1. Определение и примеры. Система порядка p с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u_j(x,\,t)}{\partial t}=\sum_{k=1}^{m}P_{jk}\left(i\,\frac{\partial}{\partial x}\right)u_k(x,\,t) \qquad (1)$$

называется *параболической*, если функция $\Lambda(s)=\max\limits_j \operatorname{Re}\lambda_j(s)$ при вещественных значениях $s=\sigma$ удовлетворяет неравенству

$$\Lambda(\sigma)\leqslant -C\,|\sigma|^h+C_1,\quad C>0,\quad h>0. \qquad (2)$$

Число h называется *показателем параболичности* системы (1).

Примеры. 1°. Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

здесь

$$\lambda(s)=-s^2,\quad \Lambda(\sigma)=\lambda(\sigma)=-\sigma^2,\quad C=1,\quad h=2.$$

2°. Уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+i\left(i\,\frac{\partial}{\partial x}\right)^p u,\quad p>2; \qquad (3)$$

здесь

$$\lambda(s)=-s^2+is^p,\quad \Lambda(\sigma)=\operatorname{Re}\lambda(\sigma)=-\sigma^2,\quad h=2.$$

3°. Системы, параболические по Петровскому. Разобьем матрицу $P(s)$ системы (1) на слагаемые $\hat{P}(s)$ и $R(s)$ так, чтобы первое содержало только члены старшего измерения p, второе — члены меньшего измерения.

Рассмотрим характеристические корни матрицы $\hat{P}(s)$; обозначим их через $\hat{\lambda}_1(s), \ldots, \hat{\lambda}_m(s)$. Система (1) называется *параболической по Петровскому*, если при $|\sigma|=1$ величины $\operatorname{Re}\hat{\lambda}_j(\sigma)$ ограничены фиксированной отрицательной постоянной $-\omega$. Покажем, что *всякая система, параболическая по Петровскому, будет параболической и в нашем смысле, причем показатель параболичности h совпадает с порядком p самой системы и с ее приведенным порядком p_0.*

Действительно, пусть характеристические корни $\hat{\lambda}_1(s), \ldots, \hat{\lambda}_m(s)$ матрицы $\hat{P}(s)$ при $|\sigma|=1$ удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re}\hat{\lambda}_j(\sigma)<-\omega.$$

Обозначим $\xi=\frac{\sigma}{|\sigma|}$, $\gamma_j(\sigma)=\frac{\hat{\lambda}_j(\sigma)}{|\sigma|^p}$. Если из всех элементов определителя $\det\|P(\sigma)-\lambda E\|$ вынести $|\sigma|^p$ и произвести сокращение, то мы получим уравнение вида

$$\det\|\hat{P}(\xi)+\varepsilon(\sigma)-\gamma E\|=0,\quad \gamma=\frac{\lambda}{|\sigma|^p},$$

где $\varepsilon(\sigma)\to 0$, когда $|\sigma|\to\infty$. Корни этого уравнения при $|\sigma|\to\infty$ и фиксированном $\frac{\sigma}{|\sigma|}=\xi$ стремятся к корням уравнения

$$\det\|\hat{P}(\xi)-\gamma E\|=0$$

и притом равномерно по ξ в области $|\xi|=1$ (в противном случае получилось бы противоречие с теоремой о непрерывной зависимости корней уравнения с единичным старшим коэффициентом от коэффициентов). Таким образом, для достаточно больших $|\sigma|\geqslant\sigma_0$

$$\left|\frac{\lambda_j(\sigma)}{|\sigma|^p}-\hat{\lambda}_j(\xi)\right|<\frac{\omega}{2},$$

а так как $\operatorname{Re}\hat{\lambda}_j(\xi)<-\omega$, то

$$\operatorname{Re}\lambda_j(\sigma)<|\sigma|^p\operatorname{Re}\hat{\lambda}_j(\xi)+\frac{\omega}{2}|\sigma|^p<-\frac{\omega}{2}|\sigma|^p.$$

Отсюда для всех σ заведомо

$$\Lambda(\sigma)=\max_j\operatorname{Re}\lambda_j(\sigma)<-\frac{\omega}{2}|\sigma|^p+C.$$

Таким образом, система (1) в этом случае действительно параболическая, с показателем параболичности p.

В силу замечания, сделанного в конце п. 1 § 5 гл. III, функция $\Lambda(s)$ имеет при комплексных s степенной порядок роста, не меньший, чем степенной порядок убывания ее при вещественных $s=\sigma$. Степенной порядок роста при комплексных s для функции $\Lambda(s)$ есть число p_0; таким образом, мы имеем $p\leqslant p_0$. Но с другой стороны, всегда $p_0\leqslant p$, как было показано в § 3 гл. II. Поэтому в рассматриваемом случае

$$h=p=p_0,$$

что и утверждалось.

Заметим далее, что уравнение теплопроводности (пример 1) — параболическое по Петровскому, а параболическое уравнение (3) не принадлежит к числу параболических по Петровскому.

2. Разрешающая матрица. В соответствии с общим методом, описанным в § 1, будем решать задачу Коши для системы (1) п. 1 с помощью преобразования Фурье. При этом преобразовании эта система переходит в обыкновенную систему

$$\frac{dv(s,t)}{dt}=P(s)v(s,t) \tag{1}$$

с разрешающей матрицей

$$Q(s,t)=e^{tP(s)}.$$

Выпишем для параболической системы оценки разрешающей матрицы $Q(s,t)$.

Прежде всего имеет место оценка (гл. II, § 3, п. 2)

$$\|Q(s,t)\|\leqslant C(1+|s|)^{p(m-1)}e^{bt|s|^{p_0}}, \tag{2}$$

как и для всякой разрешающей матрицы системы с приведенным порядком p_0.

Далее, используя условие параболичности и неравенство (6) п. 1 § 6 гл. II, мы находим, что для вещественных $s=\sigma$

$$\|Q(\sigma,t)\|\leqslant C_1(1+|\sigma|)^{p(m-1)}e^{-at|\sigma|^h}. \tag{3}$$

З а м е ч а н и е. Обратно, если выполнено неравенство (3), то в силу того же основного соотношения (6) п. 1 § 6 гл. II, мы получим, что

$$\Lambda(\sigma)\leqslant -C|\sigma|^h+C_1,$$

т. е. что рассматриваемая система — параболическая. Таким образом, неравенство (3) может служить определением параболической системы.

Все дальнейшие построения будут основаны только на неравенствах (2) и (3). Это дает возможность включить в рассмотрение также и системы с переменными коэффициентами (зависящими от t), а также и любые системы (например, в свертках), которые после преобразования Фурье переходят в системы вида

$$\frac{dv(s,t)}{dt}=P(s,t)v(s,t)$$

с разрешающей матрицей $Q(s,t)$, удовлетворяющей неравенствам (2) — (3).

Все такие системы в дальнейшем также будем называть *параболическими.*

3. Род параболической системы.

Л е м м а. *Число p_0 для параболической системы заведомо больше* 1.

Для доказательства рассмотрим сумму всех характеристических корней $\lambda_1(s)+\ldots+\lambda_m(s)$ матрицы $P(s)$. Эта сумма как один из коэффициентов характеристического многочлена $\det\|P(s)-\lambda E\|$ сама есть некоторый многочлен от $s_1, \ldots, s_n$. Его вещественная часть $R(s_1, \ldots, s_n)$ есть многочлен от $\sigma_1, \tau_1, \ldots, \sigma_n, \tau_n$. Если допустить, что $p_0 \leqslant 1$, то это означает, что многочлен $R(s_1, \ldots, s_n)$ возрастает при $|s| \to \infty$ не быстрее, чем $|s|$, и имеет, следовательно, степень не выше первой. При вещественных $s=\sigma$ он является, следовательно, линейной функцией аргументов $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$:

$$R(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \sigma_k.$$

Но линейная функция не может стремиться к $-\infty$, когда $|\sigma| \to \infty$. Поэтому рассматриваемая система не может быть параболической, что и доказывает наше утверждение.

Применим к функциям $Q(s, t)$ при заданном $t>0$ теорему 1 § 7 гл. IV вып. 2. Мы получаем, что существует область H_μ, определяемая неравенством

$$|\tau| \leqslant K(1+|\sigma|)^\mu, \quad \mu \geqslant 1-(p_0-h), \tag{1}$$

в которой

$$\|Q(\sigma+i\tau, t)\| \leqslant Ce^{-a't|\sigma|^h}, \tag{2}$$

где постоянная a' как угодно мало отличается от a *).

Верхняя грань чисел μ, удовлетворяющих неравенствам (1)—(2), является важнейшей характеристикой параболической системы; мы будем называть ее *родом системы*.

Мы не знаем, достигается ли верхняя грань в классе всех допустимых чисел μ. Дальнейшие построения производятся, для простоты, в предположении, что эта верхняя грань достигается, так что в неравенстве (1) можно считать μ родом системы. Если в действительности это не имеет места, то в качестве числа μ в дальнейших построениях можно взять любое число, меньшее рода системы, с соответствующим очевидным изменением всех формулировок.

*) В формулировке указанной теоремы отсутствовал параметр t. Но постоянную a' можно было взять в форме $a(1-\varepsilon)$ при любом $\varepsilon>0$, и нетрудно проследить, что при наличии t от коэффициента at можно таким же образом перейти к $at(1-\varepsilon)=a't$: область H_μ не зависит от параметра t, как это видно из ее построения.

Мы увидим в дальнейшем, что *класс корректности задачи Коши для параболической системы* (1) п. 1 *определяется родом системы*. Именно, он состоит из функций $f(x)$, имеющих при $|x| \to \infty$ экспоненциальное возрастание с порядком $\leqslant p_1 = \frac{p_0}{p_0-\mu}$ для систем с положительным родом ($\mu>0$) или с порядком $\leqslant p_2 = \frac{h}{h-\mu}$ для систем с неположительным родом ($\mu \leqslant 0$). Отметим, что допускаемый порядок роста в первом случае — для систем с положительным родом — есть число, большее единицы, а во втором случае — для систем с неположительным родом — число, меньшее или равное 1.

О роде параболической системы с постоянными коэффициентами можно судить по ее характеристическим корням. Именно, в силу основного неравенства (6) п. 1 § 6 гл. II, связывающего рост функции $Q(s, t)$ с ростом функции $\Lambda(s) = \max_j \operatorname{Re}\lambda_j(s)$, род параболической системы может быть определен также и как наибольший показатель μ, такой, что в области

$$|\tau| \leqslant K(1+|\sigma|)^\mu$$

функция $\Lambda(s)$ удовлетворяет оценке

$$\Lambda(s) \leqslant -C|\sigma|^h + C_1.$$

Замечание. Как уже говорилось,

$$\mu \geqslant 1-(p_0-h).$$

Число μ может быть в действительности больше, чем $1-(p_0-h)$.

Пример. Предположим, что характеристические корни матрицы $P(s, t)$ имеют вид

$$\lambda_1(s) = is^6 - s^4, \quad \lambda_2(s) = is^4 - s^2. \tag{3}$$

В этом случае $p_0=6$, $h=2$ и теорема 1 § 7 гл. IV вып. 2 дает $\mu \geqslant -3$. Но на самом деле степенное убывание функции $\Lambda(s) = \max\operatorname{Re}\{\lambda_1(s), \lambda_2(s)\}$ происходит в области $|\tau| \leqslant K(1+|\sigma|)^{-1}$ (с показателем -1, а не -3). Действительно, для вещественных частей корней λ_1 и λ_2 мы легко можем получить разложения

$$\operatorname{Re}\lambda_1(s) = -6\tau\sigma^5 - \sigma^4 + \ldots,$$

$$\operatorname{Re}\lambda_2(s) = -4\tau\sigma^3 - \sigma^2 + \ldots,$$

где многоточием заменены слагаемые, содержащие σ в меньшей степени.

В области $|\tau| \leqslant K(1+|\sigma|)^{-1}$ с достаточно малым $K>0$ первое выражение не превосходит $-C_1\sigma^4$, второе не превосходит $-C_2\sigma^2$. Отсюда следует, что $\Lambda(s)$ в указанной области не превосходит $-C_2\sigma^2+C_3$. Поэтому в качестве μ можно взять -1.

Как показала В. М. Борок, для систем с одним пространственным переменным можно построить простые формулы для вычисления всех характеристик системы. Именно, в этом случае каждый корень уравнения $\det\|P(s)-\lambda E\|=0$ допускает в окрестности бесконечно удаленной точки разложение в ряд Ньютона — Пюизе *)

$$\lambda(s)=\alpha_0 s^{k_0}+\alpha_1 s^{k_1}+\ldots+\alpha_p s^{k_p}+\ldots,$$

где $\alpha_0\neq 0$, $k_0>k_1>\ldots$ — рациональные показатели (которые можно найти при помощи многоугольника Ньютона). Среди коэффициентов α_q заведомо имеются такие, у которых $\operatorname{Re}\alpha_q\neq 0$; предположим, что $\operatorname{Re}\alpha_0=\operatorname{Re}\alpha_1=\ldots=\operatorname{Re}\alpha_{p-1}=0$, $\operatorname{Re}\alpha_p\neq 0$. Оказывается, что показатели $k_0, k_1, \ldots, k_{p-1}$ — целые положительные числа, а k_p — целое положительное четное число. Далее имеют место формулы:

$$\begin{aligned} p_0&=\max k_0 && \text{(по всем корням)},\\ h&=\min k_p && \text{(по всем корням)},\\ \mu&=\min\{k_p-k_0+1\} && \text{(по всем корням)}. \end{aligned}$$

В частности, все три характеристики — приведенный порядок p_0, показатель параболичности h и род μ — являются в случае одного пространственного переменного целыми числами (и, более того, h — четное число).

4. Основная теорема для системы с положительным родом.

Теорема 1. *Если начальные функции $\{u_j(x,0)\}=u_0(x)$ параболической системы*

$$\frac{\partial u_j(x,t)}{\partial t}=\sum_{k=1}^{m} P_{jk}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u_k(x,t) \qquad (j=1,\ldots,m) \tag{1}$$

положительного рода $\mu>0$ входят в класс функций K_{p_1,b_0}, удовлетворяющих неравенству

$$|f(x)|\leqslant Ce^{b_0|x|^{p_1}}, \quad где \quad p_1=\frac{p_0}{p_0-\mu}, \tag{2}$$

то при достаточно малом $t>0$ решения этой системы принадлежат классу K_{p_1,b_1}, где b_1 — любое число, большее b_0.

*) Н. Г. Чеботарев, Теория алгебраических функций, Гостехиздат, М.—Л., 1948, гл. VI.

Доказательство проведем сначала в предположении, что число независимых переменных $n=1$. Так как $p_1=\frac{p_0}{p_0-\mu}\leqslant\frac{p_0}{p_0-1}$ *), то класс K_{p_1,b_1} содержится в классе единственности решения задачи Коши для системы (1) при достаточно малом T. В пределах класса единственности, как мы знаем из § 1, решение задачи Коши для системы (1) записывается в виде свертки

$$u(x,t)=G(x,t)*u(x,0), \tag{3}$$

где $G(x,t)$ — матрица Грина — есть обратное преобразование Фурье матрицы $Q(s,t)$ — разрешающей матрицы обыкновенной системы

$$\frac{dv_j(s,t)}{dt}=\sum_{k=1}^{m}P_{jk}(s)v_k(s,t) \qquad (j=1,\ldots,m). \tag{4}$$

Свертка (3) в общем случае приводит от обычных функций $u(x,0)$ к обобщенным функциям $u(x,t)$. Мы должны показать, что эта свертка переводит класс K_{p_1,b_0} в класс K_{p_1,b_1}, т. е. что обычные функции, входящие в класс K_{p_1,b_0}, она переводит *снова в обычные функции*, входящие в класс K_{p_1,b_1}.

Для этого построим матрицу-функцию $G(x,t)$. Мы знаем, что ее преобразованием Фурье является матрица-функция $Q(s,t)$ — разрешающая матрица обыкновенной системы (4). Поэтому естественно начать с анализа поведения матрицы $Q(s,t)$. Нам известны для этой матрицы оценки (2) и (3) п. 2 и дано, что $\mu>0$. Используем теперь при заданном $t>0$ теорему 2 § 7 гл. IV вып. 2. В силу этой теоремы матрица $Q(s,t)$ удовлетворяет неравенству

$$\|Q(s,t)\|\leqslant C'e^{-at|\sigma|^h+b't|\tau|^{p_0/\mu}}, \tag{5}$$

причем постоянная b' не превосходит $B_1(a+b)$, где B_1 зависит только от области H_μ и, следовательно, не зависит от t.

Будем считать, что время t изменяется в пределах от 0 до T. Тогда неравенство (5) показывает, что элементы матрицы $Q(s,t)$ входят в пространство $W^{\frac{p_0}{\mu},\theta}$ всех целых

*) Неравенство $\mu\leqslant 1$ было фактически установлено в § 7 гл. IV вып. 2.

функций $\varphi(s)$, удовлетворяющих неравенству

$$|s^k \varphi(\sigma + i\tau)| \leqslant C_k e^{\frac{\mu}{p_0}|\bar{\theta}\tau|^{p_0/\mu}},$$

где $\bar{\theta} > \theta$ любое и $\frac{\mu}{p_0}\theta^{p_0/\mu} = b'T$ (гл. II, § 3) *).

По теореме о преобразовании Фурье пространства $W^{\frac{p_0}{\mu},\theta}$ (гл. I, § 3) элементы матрицы $G(x, t)$ принадлежат к двойственному пространству

$$\widetilde{W^{\frac{p_0}{\mu},\theta}} = W_{\left(\frac{p_0}{\mu}\right)',\frac{1}{\theta}},$$

где $\left(\frac{p_0}{\mu}\right)'$ определяется из уравнения

$$\frac{1}{\left(\frac{p_0}{\mu}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{p_0}{\mu}\right)'} = 1,$$

так что

$$\left(\frac{p_0}{\mu}\right)' = \frac{p_0}{p_0 - \mu} = p_1.$$

Как мы помним (гл. I, § 1), функции $\varphi(x)$, входящие в пространство $W_{p,a}$, удовлетворяют неравенству

$$|\varphi(x)| \leqslant Ce^{-\frac{1}{p}|\bar{a}x|^p}, \quad \bar{a} < a \text{ любое.}$$

Таким образом, в нашем случае

$$\|G(x, t)\| \leqslant Ce^{-\frac{1}{p_1}\left|\frac{x}{\bar{\theta}}\right|^{p_1}}, \quad \bar{\theta} > \theta \text{ любое.} \tag{6}$$

Подчеркнем, что эта оценка выполняется при всех t, входящих в промежуток $0 \leqslant t \leqslant T$, где $\frac{\mu}{p_0}\theta^{p_0/\mu} = b'T$.

*) В действительности элементы матрицы $Q(s, t)$ входят и в меньшее пространство $W_{h,\theta'}^{p_0/\mu,\theta}$, но мы не можем здесь фиксировать θ' независимо от значения t в интервале $(0, T)$. Используемые здесь обозначения пространств введены в конце § 3 гл. I.

Итак, $G(x, t)$ есть обычная функция, притом экспоненциально убывающая. Мы рассмотрим вначале обычную свертку

$$G(x, t) * u(x, 0) = \int G(\xi - x, t)\, u_0(\xi)\, d\xi = \\ = \int G(\xi, t)\, u_0(x - \xi)\, d\xi \tag{7}$$

и покажем, что при достаточно малом T эта свертка существует и принадлежит к заданному классу K_{p_1, b_1}, где $p_1 = \frac{p_0}{p_0 - \mu}$, $b_1 > b_0$. Затем мы проверим, что эта обычная свертка совпадает со сверткой в смысле обобщенных функций, фигурирующей в формуле (3); этим теорема будет доказана.

Установим вначале следующую лемму.

Лемма. *Для любых $\gamma > \beta > 0$ можно найти такое $\alpha > 0$, что при всех x и ξ будет иметь место неравенство*

$$-\alpha|\xi|^\lambda + \beta|x - \xi|^\lambda \leqslant \gamma|x|^\lambda. \tag{8}$$

Действительно, положим $\rho = \frac{x}{\xi}$; тогда неравенство (8) станет эквивалентно неравенству

$$\gamma|\rho|^\lambda - \beta|1 - \rho|^\lambda \geqslant -\alpha. \tag{9}$$

Но так как для $\gamma > \beta$ непрерывная функция $\gamma|\rho|^\lambda - \beta|1-\rho|^\lambda$, очевидно, неограниченно возрастает при $|\rho| \to \infty$, то она ограничена снизу; таким образом, неравенство (9) при некотором $\alpha > 0$ удовлетворяется, а вместе с тем удовлетворяется и (8).

Переходим к доказательству теоремы 1. В интеграле

$$\int G(\xi, t)\, u_0(x - \xi)\, d\xi \tag{10}$$

подынтегральная функция (по доказанному для функции $G(\xi, t)$ и по предположению для функции $u_0(x - \xi)$) имеет мажоранту

$$e^{-\frac{1}{p_1}|\bar{\theta}^{-1}\xi|^{p_1} + b_0|x-\xi|^{p_1}}.$$

В силу леммы можно выбрать $\frac{1}{2p_1}\bar{\theta}^{-p_1}$ настолько большим, чтобы удовлетворялось неравенство

$$-\frac{1}{2p_1}\bar{\theta}^{-p_1}|\xi|^{p_1}+b_0|x-\xi|^{p_1}\leqslant b_1|x|^{p_1},$$

или, что то же,

$$e^{-\frac{1}{p_1}\bar{\theta}^{-p_1}|\xi|^{p_1}+b_0|x-\xi|^{p_1}}\leqslant e^{-\frac{1}{2p_1}\bar{\theta}^{-p_1}|\xi|^{p_1}}\cdot e^{b_1|x|^{p_1}}.$$

В результате при указанном выборе θ интеграл (10) оказывается сходящимся и удовлетворяющим оценке

$$\left|\int G(\xi, t)\,u_0(x-\xi)\,d\xi\right|\leqslant e^{b_1|x|^{p_1}}\int e^{-\frac{1}{2p_1}\bar{\theta}^{-p_1}|\xi|^{p_1}}\,d\xi=Ce^{b_1|x|^{p_1}}. \qquad (11)$$

Выбор числа $\frac{1}{2p_1}\bar{\theta}^{-p_1}$ определяет и выбор интервала $0\leqslant t\leqslant T$, в котором меняется t, в силу равенства $\frac{\mu}{p_0}\theta^{p_0/\mu}=b'T$ и условия $\bar{\theta}>\theta$ любое. Число $\bar{\theta}^{-p_1}$ при стремлении b_1 к b будет неограниченно возрастать; вместе с этим неограниченно уменьшается допустимый интервал времени T.

Мы доказали, что при достаточно малом T свертка (7) существует в обычном смысле. Теперь покажем, что свертка (3), понимаемая в смысле обобщенных функций, совпадает со сверткой (7).

Свертка (3) действует на основные функции $\varphi(x)$ по формуле

$$(u, \varphi)=(G*u_0, \varphi)=(u_0, G*\varphi)=\left(u_0(x), \int G(\xi, t)\,\varphi(x+\xi)\,d\xi\right)=$$
$$=\int u_0(x)\left\{\int G(\xi, t)\,\varphi(x+\xi)\,d\xi\right\}dx. \qquad (12)$$

Свертка (7) действует на те же основные функции по формуле

$$(G(x, t)*u_0(x), \varphi(x))=\int\left\{\int G(x, t)\,u_0(\eta-x)\,dx\right\}\varphi(\eta)\,d\eta. \qquad (13)$$

Интеграл (12) переходит в интеграл (13) при замене ξ на $\eta-x$ и перемене порядка интегрирования. Перемена порядка интегрирования в данном случае, согласно теореме

Фубини, законна, поскольку двойной интеграл

$$\int\int|G(x, t)\,u_0(\eta-x)\,\varphi(\eta)|\,dx\,d\eta$$

на основании оценки (11) является сходящимся.

Таким образом, решение

$$u(x, t)=G(x, t)*u_0(x)=\int G(\xi-x)\,u_0(\xi)\,d\xi$$

есть обычная функция; она принадлежит, по доказанному, к классу K_{p_1, b_1} с произвольно малым b_1-b, что мы и утверждали.

Укажем, какие изменения в доказательстве следует произвести при переходе к случаю n пространственных переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Всюду, где были использованы теоремы из § 7 гл. IV вып. 2, следует использовать их n-мерные аналоги (§ 9 гл. IV вып. 2).

В формулировке леммы следует считать ξ и x n-мерными векторами. При доказательстве вместо деления искомого неравенства на ξ следует делить на $|\xi|$ и проверять выполнение неравенства

$$\gamma|\rho|^{\lambda}+\beta|e-\rho|^{\lambda}\geqslant-\alpha,$$

где ρ — произвольный вектор, e — единичный вектор. Постоянная $-\alpha$ в правой части не будет зависеть от выбора единичного вектора e, так как при $|\rho|\to\infty$ левая часть неограниченно возрастает равномерно по e.

Остальные рассуждения не зависят от числа пространственных переменных.

В частности, для систем, параболических по Петровскому (п. 1, пример 3°), которые обладают родом 1 ($h=p_0=p$) мы получаем следующую теорему.

Если начальные функции $u_j(x, 0)$ системы порядка p, параболической по Петровскому, удовлетворяют неравенству

$$|u_j(x, 0)|\leqslant Ce^{b|x|^{p'}} \qquad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right),$$

то система обладает решением $u(x, t)$, удовлетворяющим при любом $\delta>0$ и достаточно малых $t\leqslant T$ неравенству

$$|u(x, t)|\leqslant C_1e^{(b+\delta)|x|^{p'}}.$$

Эта теорема, в частности, применима к уравнению теплопроводности (пример 1):

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

при этом $p=2$, $p'=2$, и мы получаем, что *для всякой функции $u(x)$, удовлетворяющей неравенству*

$$|u(x)|<Ce^{bx^2},$$

уравнение теплопроводности обладает решением $u(x, t)$, удовлетворяющим при любом $\varepsilon>0$ для достаточно малых t неравенству

$$|u(x, t)|\leqslant C_1 e^{(b+\varepsilon)x^2}.$$

На самом деле эти результаты справедливы и для систем более общего вида — с коэффициентами, зависящими от пространственных координат. Система

$$\frac{\partial u}{\partial t}=P\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right)u \tag{14}$$

называется параболической по Петровскому, если при замене аргументов x и t на любые постоянные параметры ξ, τ, система оказывается параболической по Петровскому в том смысле, который был указан в начале этого параграфа. Для такой системы, в предположении, что ее коэффициенты непрерывны и ограничены во всем пространстве вместе со всеми производными до порядка p — порядка системы, — С. Д. Эйдельман показал, что задача Коши, отвечающая начальному условию

$$u(x, 0)=u_0(x)$$

имеет решение, единственное в классе функций

$$|u(x, t)|\leqslant Ce^{a|x|^{p'}}.$$

Это решение записывается в форме интеграла Пуассона

$$u(x, t)=\int_R G(x, \xi, t)\,u_0(\xi)\,d\xi,$$

причем ядро этого интеграла удовлетворяет условию

$$|G(x, \xi, t)|\leqslant Ce^{+Mt}t^{-n/p}e^{-\frac{b|x-\xi|^{p'}}{t^{1/(p-1)}}}\qquad\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right).$$

Здесь M есть постоянная, которая ограничивает сверху абсолютные значения коэффициентов уравнения (14) и тех их производных, о которых шла речь выше.

5. Случай системы с неположительным родом. Переходим к случаю, когда род системы (1) не положителен: $\mu\leqslant 0$. Здесь имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Если начальные функции $\{u_j(x, 0)\}=u_0(x)$ параболической системы в случае $\mu\leqslant 0$ входят в класс $K_{p_1,0}$ функций $f(x)$, удовлетворяющих при любом $\varepsilon>0$ неравенству*

$$|f(x)|\leqslant C_\varepsilon e^{\varepsilon|x|^{p_1}},\qquad p_1=\frac{h}{h-\mu}, \tag{1}$$

то для достаточно малого $T>0$ решения этой системы при $t\leqslant T$ также принадлежат этому классу.

Доказательство, как и в предыдущем пункте, можно проводить для случая $n=1$. Разрешающая матрица $Q(s, t)$, как функция переменного $s=\sigma+i\tau$ в области H_μ, определенной неравенством

$$|\tau|\leqslant K(1+|\sigma|)^\mu,\quad \mu\leqslant 0,$$

удовлетворяет неравенству

$$\|Q(s, t)\|\leqslant Ce^{-a't|\sigma|^h}.$$

Далее, при фиксированном $t>0$ мы применим теорему 4 § 7 гл. IV вып. 2. В силу этой теоремы справедлива следующая оценка для матрицы из производных функций $Q_{ij}(s, t)$ на оси $s=\sigma$:

$$\|Q^{(q)}(\sigma, t)\|\leqslant CB^q q^{q\left(1-\frac{\mu}{h}\right)}e^{-a''t|\sigma|^h}. \tag{2}$$

Неравенство (2) показывает, что элементы матрицы $Q(\sigma, t)$ принадлежат к основному пространству $S^{\beta, B}$ (вып. 2, гл. IV, § 1) бесконечно дифференцируемых функций, удовлетворяющих неравенству

$$|\sigma^k\psi^{(q)}(\sigma)|\leqslant C_k\bar{B}^q q^{q\beta}\left(k, q=0, 1, 2, \ldots;\ \beta=1-\frac{\mu}{h}\geqslant 1, \bar{B}>B\right).$$

По теореме о преобразовании Фурье пространства $S^{\beta, B}$ (вып. 2, гл. IV, § 6) элементы матрицы $G(x, t)$ принадлежат к пространству $S_{\beta, B}$; следовательно,

$$\|G(x, t)\|\leqslant Ce^{-a|x|^{p_1}},\qquad p_1=\frac{1}{\beta}=\frac{h}{h-\mu}.$$

Так как $p_1 = \frac{h}{h-\mu} \leqslant 1 < \frac{p_0}{p_0 - 1}$, то класс $K_{p_1, 0}$ (1) содержится в классе единственности решения задачи Коши для рассматриваемой системы. В пределах класса единственности, как мы знаем из § 1, решение задачи Коши для этой системы записывается в виде свертки

$$u(x, t) = G(x, t) * u(x, 0). \tag{3}$$

Мы должны показать, так же как и в теореме 1, что эта свертка переводит класс $K_{p_1, 0}$ в себя. Рассмотрим обычную свертку

$$G(x, t) * u(x, 0) = \int G(\xi, t)\, u_0(x-\xi)\, d\xi. \tag{4}$$

По доказанному относительно матрицы $G(x, t)$ и по предположению относительно начальных данных $u_0(x)$ подынтегральная функция при любом $\delta > 0$ обладает мажорантой

$$e^{-a|\xi - x|^{p_1} + \delta|\xi|^{p_1}}.$$

Воспользуемся далее леммой:

Лемма. *Для любых $\alpha > 0$ и $\gamma > 0$ можно найти такое $\beta > 0$, что при всех x и ξ будет иметь место неравенство*

$$-\alpha|\xi - x|^{\lambda} + \beta|\xi|^{\lambda} \leqslant \gamma|x|^{\lambda}. \tag{5}$$

Для доказательства положим $\frac{x}{\xi} = \rho$; тогда требуемое неравенство (5) станет эквивалентным неравенству

$$\gamma|\rho|^{\lambda} + \alpha|1-\rho|^{\lambda} \geqslant \beta. \tag{6}$$

Но левая часть действительно ограничена снизу при всех ρ положительной постоянной. Поэтому нужное число β существует, и лемма доказана.

В силу леммы, при заданных a и ε можно найти $\delta > 0$ так, что будет иметь место неравенство

$$-\frac{a}{2}|\xi|^{p_1} + \delta|\xi - x|^{p_1} \leqslant \varepsilon|x|^{p_1},$$

из которого следует, что

$$e^{-a|\xi|^{p_1} + \delta|\xi - x|^{p_1}} \leqslant e^{\varepsilon|x|^{p_1}} \cdot e^{-\frac{a}{2}|\xi|^{p_1}}.$$

Это показывает, что интеграл

$$u(x, t) = \int G(x-\xi, t)\, u_0(\xi)\, d\xi \tag{7}$$

является при любом $t > 0$ сходящимся и результат удовлетворяет неравенству

$$|u(x, t)| \leqslant C'_{\varepsilon} e^{\varepsilon|x|^{p_1}},$$

каково бы ни было заданное $\varepsilon > 0$.

Итак, результат свертки (7) принадлежит при любом $t > 0$ классу $K_{p_1, 0}$.

Наконец, совпадение свертки (3) со сверткой (7) в смысле обобщенных функций доказывается так же, как и в теореме 1. Теорема доказана.

Примеры. 1°. Рассмотрим уравнение порядка $p > 2$ (см. п. 1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^p u. \tag{8}$$

Для этого уравнения характеристический корень $\lambda(s)$ имеет вид

$$\lambda(s) = -s^2 + is^p, \quad \Lambda(\sigma) = \operatorname{Re}\lambda(\sigma) = -\sigma^2.$$

Таким образом,

$$p_0 = p, \quad h = 2.$$

Род μ уравнения (8) определяется по теореме 1 § 7 гл. IV вып. 2:

$$\mu = 1 - (p_0 - h) = 3 - p \leqslant 0.$$

Отсюда

$$p_1 = \frac{h}{h-\mu} = \frac{2}{p-1}.$$

Применяя теорему 2, получаем: если начальная функция $u_0(x)$ при любом $\varepsilon > 0$ удовлетворяет неравенству

$$|u_0(x)| \leqslant C_{\varepsilon} e^{\varepsilon|x|^{\frac{2}{p-1}}},$$

то решение $u(x, t)$ уравнения (8) при любом $t > 0$ удовлетворяет аналогичному неравенству.

2°. Рассмотрим систему уравнений с характеристическими корнями

$$\lambda_1(s) = is^6 - s^4, \quad \lambda_2(s) = is^4 - s^2.$$

В данном случае $p_0 = 6$, $h = 2$; род системы, как мы видели в примере в п. 3, равен -1. Отсюда $p_1 = \frac{h}{h-\mu} = \frac{2}{3}$. В силу теоремы 2 мы имеем: если начальная функция $u_0(x)$ при любом $\varepsilon > 0$ удовлетворяет неравенству

$$|u_0(x)| \leqslant C_\varepsilon e^{\varepsilon |x|^{2/3}},$$

то существует решение $u(x, t)$, которое при каждом $\varepsilon > 0$ также удовлетворяет такому неравенству:

$$|u(x, t)| \leqslant C'_\varepsilon e^{\varepsilon |x|^{2/3}}.$$

§ 3. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

1. Определение и примеры. Система с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u_j(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{m} P_{jk}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u_k(x, t) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \qquad (1)$$

называется *гиперболической*, если функция $\Lambda(s) = \max \operatorname{Re} \lambda_j(s)$ обладает следующими свойствами:

(а) Степенной порядок роста $\Lambda(s)$ не превосходит 1:

$$\Lambda(s) \leqslant a|s| + b.$$

(б) При вещественных значениях $s = \sigma$ функция $\Lambda(s)$ ограничена:

$$\Lambda(\sigma) \leqslant C.$$

Мы докажем в этом параграфе, что *для гиперболических систем — и только для них — задача Коши имеет решение при любых достаточно гладких начальных данных, без всяких ограничений на их рост на бесконечности.*

Примеры. 1°. Уравнение первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial x}$$

имеет функцию

$$\Lambda(s) = \operatorname{Re} \lambda(s) = \operatorname{Re}(-ias)$$

со степенным порядком роста 1. При вещественных $s = \sigma$

$$\Lambda(\sigma) = \operatorname{Re}(-ia\sigma) = \sigma \cdot \operatorname{Im} a,$$

и $\Lambda(\sigma)$ ограничена только при вещественных a. Таким образом, уравнение (1) является гиперболическим только при вещественных значениях a.

2°. Волновое уравнение в одномерном случае

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(a — вещественная постоянная).

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2(s) = -a^2 s^2$$

и имеет корни

$$\lambda_{1,2}(s) = \pm ias.$$

Очевидно, что условия гиперболичности (а) и (б) выполнены. То же справедливо для волнового уравнения в n-мерном пространстве.

3°. Системы, гиперболические по Петровскому. Система (1) называется гиперболической по Петровскому, если ее порядок p равен 1, характеристические корни матрицы $P(s)$ при вещественных $s = \sigma$, $|\sigma| = 1$, чисто мнимы, а сама матрица приводится к диагональной форме при всех вещественных σ, причем модуль детерминанта матрицы преобразования превосходит положительную постоянную.

Для таких систем И. Г. Петровский доказал корректность задачи Коши в классе достаточно гладких функций любого роста. В силу основной теоремы этого параграфа системы, гиперболические по Петровскому, будут гиперболическими и в нашем смысле. При этом системы, гиперболические по Петровскому, далеко не исчерпывают всех гиперболических систем: условию Петровского не удовлетворяют системы, у которых жорданова структура матрицы $P(\sigma)$ меняется при изменении σ. Например, система с матрицей

$$P(s) = \left\| \begin{matrix} 1 & as+1 \\ bs & 1 \end{matrix} \right\| \qquad (ab < 0)$$

имеет характеристические корни

$$\lambda_{1,2}(s) = 1 \pm \sqrt{bs(as+1)},$$

различные при $s \neq 0$, $s \neq -\frac{1}{a}$; в обоих исключительных случаях $s=0$, $s=-\frac{1}{a}$ корни совпадают и матрица $P(s)$ не приводится к диагональной форме, так что система заведомо не гиперболична по Петровскому. Но, с другой стороны, вещественные части этих корней ограничены сверху при вещественных $s=\sigma$, а при комплексных s возрастают не быстрее $C|s|$; таким образом, система гиперболична в нашем смысле.

4°. Уравнения, гиперболические по Гордингу. Уравнение

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \tag{2}$$

называется гиперболическим по Гордингу, если многочлен в правой части имеет порядок $\leqslant m$ по всем аргументам, $< m$ по аргументу $\frac{\partial}{\partial t}$ и если вещественные части корней уравнения $\lambda^m = L(\lambda, i\sigma_1, \ldots, i\sigma_n)$ ограничены при всех вещественных σ. Покажем, что система уравнений, получающаяся из (2) заменой $u_1 = u$, $u_2 = \frac{\partial u}{\partial t}, \ldots, u_m = \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}$, является гиперболической в нашем смысле. Действительно, как мы указали в § 6 гл. II, характеристические корни $\lambda_1(s), \ldots, \lambda_m(s)$ системы, получающейся после такой замены, совпадают с корнями уравнения $\lambda^m = L(\lambda, is_1, \ldots, is_n)$. Так как степень правой части по условию $\leqslant m$ по совокупности всех аргументов и $< m$ по аргументу λ, то $|\lambda_j(s)| \leqslant C|s|$ при достаточно больших $|s|$. Далее, по условию, $\operatorname{Re}\lambda_j(\sigma)$ ограничены; таким образом, для получившейся системы выполнены условия гиперболичности, что и утверждалось.

2. Разрешающая матрица гиперболической системы. В соответствии с общим методом § 1 применим к системе (1) п. 1 преобразование Фурье. Она перейдет в обыкновенную систему

$$\frac{dv(s, t)}{dt} = P(s)\, v(s, t). \tag{1}$$

Оценим ее разрешающую матрицу

$$Q(s, t) = e^{tP(s)}.$$

Так как вещественные части характеристических корней матрицы $P(s)$ имеют степенной порядок роста (не выше) 1, то, во-первых,

$$\|Q(s, t)\| \leqslant C(1+|s|)^{p(m-1)} e^{bt|s|}, \tag{2}$$

как и для всякой системы с приведенным порядком $\leqslant 1$. Далее, в силу ограниченности функции $\Lambda(s)$ при $s=\sigma$,

$$\|Q(\sigma, t)\| \leqslant C_1(1+|\sigma|)^{p(m-1)}. \tag{3}$$

Итак, функция $Q(s, t)$ имеет порядок роста 1 с типом bt и при вещественных $s=\sigma$ возрастает не быстрее многочлена. Назовем *показателем корректности* гиперболической системы наименьшее целое (неотрицательное) число h, для которого имеет место неравенство

$$\|Q(\sigma, t)\| \leqslant C(1+|\sigma|)^h; \tag{4}$$

как мы видим, $h \leqslant p(m-1)$. Мы покажем, что число h определяет порядок гладкости, которым должны обладать начальные функции, чтобы задача Коши допускала корректное решение.

Замечание. Обратно, если выполнены неравенства (2)—(3), то в силу основного соотношения (6) п. 1 § 6 гл. II

$$\Lambda(s) \leqslant C_1|s| + C_2, \qquad \Lambda(\sigma) \leqslant C,$$

т. е. система — гиперболическая. Таким образом, неравенства (2)—(3) могут служить определением гиперболической системы. Так как дальнейшие построения будут основаны только на неравенствах (2)—(3), то это дает возможность включить в рассмотрение также и системы с переменными коэффициентами (зависящими от t) и вообще любые системы, которые после преобразования Фурье переходят в обыкновенные системы с разрешающей матрицей $Q(s, t)$, удовлетворяющей неравенствам (2)—(3). Все такие системы мы будем по-прежнему называть *гиперболическими*.

3. Основная теорема. Установим следующую основную теорему о решениях гиперболической системы.

Теорема 1. *Если начальные функции $u_j(x, 0)$ $(j=1, 2, \ldots, m)$ гиперболической системы*

$$\frac{\partial u_j(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{m} P_{jk}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u_k(x, t) \qquad (j=1, \ldots, m) \tag{1}$$

с показателем корректности h обладают непрерывными производными до порядка $h+n+k$ (n — число независимых переменных, k — любое неотрицательное целое), *то система обладает непрерывным решением $u(x, t)$, имеющим производные по x до порядка k.*

Это решение непрерывно зависит от начальных функций $u_j(x, 0)$ в следующем смысле: если функции $u_{j\nu}(x, 0)$ при $\nu \to \infty$ равномерно на каждом шаре $|x| \leqslant r$ сходятся к функциям $u_j(x, 0)$ вместе с производными до порядка $h+n+k$, то решения $u_{j\nu}(x, t)$ сходятся к решению $u_j(x, t)$ равномерно на каждом шаре $|x| \leqslant r$ с производными по x до порядка k.

Отметим, что в формулировке этой теоремы не налагается никаких ограничений на рост функций $u(x, 0)$ и их производных при $|x| \to \infty$.

Доказательство. Мы знаем, что классом единственности для гиперболических систем служит класс обобщенных функций над основным пространством K финитных бесконечно дифференцируемых функций. Решение задачи Коши для системы (1) в пределах этого класса записывается по формуле

$$u(x, t) = G(x, t) * u(x, 0), \tag{2}$$

где $G(x, t)$ есть преобразование Фурье матрицы $Q(s, t)$. Мы должны показать, что функции $u(x, 0)$, имеющие производные до порядка $h+n+k$, переводятся этой сверткой в функции с производными до порядка k. Для этого рассмотрим матрицу-функцию $Q(s, t)$. Как мы видели, ее элементы суть целые аналитические функции (не выше чем) первого порядка роста с типом $\leqslant bt$, возрастающие при вещественных $s=\sigma$ не быстрее многочлена степени h. Применим теперь теорему п. 5 § 4 гл. III вып. 2; эта теорема утверждала, что преобразование Фурье целой функции $y(s)$ первого порядка роста и типа $\leqslant \theta$, возрастающей при вещественных $s=\sigma$ не быстрее многочлена степени h, есть обобщенная функция (функционал на пространстве K), сосредоточенная в области $|x| \leqslant \theta$ и представимая в виде *)

$$F^{-1}g(s) = R\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x),$$

*) F — символ преобразования Фурье.

где $f(x)$ — непрерывная функция, обращающаяся в нуль вне области $|x| \leqslant bt+\varepsilon$, а R — некоторый фиксированный многочлен порядка не выше $h+n$. В нашем случае для любого $\theta > 0$ мы найдем T так, чтобы иметь $bT \leqslant \theta$; тогда при $0 \leqslant t \leqslant T$ мы будем иметь:

$$F^{-1}Q(\sigma, t) = G(x, t) = R\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x, t),$$

где $f(x, t)$ — непрерывная функция, обращающаяся в нуль вне области $|x| \leqslant \theta+\varepsilon$. Отсюда

$$u(x, t) = G(x, t) * u(x, 0) = R\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x, t) * u(x, 0) = \\ = f(x, t) * R\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, 0).$$

Если $u(x, 0)$ имеет производные до порядка $h+n+k$, то функция $R\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, 0)$ имеет производные до порядка k, а интеграл

$$u(x, t) = f(x, t) * R\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, 0) = \\ = \int f(x-\xi, t)\, R\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right) u(\xi, 0)\, d\xi \tag{3}$$

сходится в обычном смысле, поскольку он фактически берется по ограниченной области $|\xi| \leqslant \theta+\varepsilon$. Итак, существование решения при указанных условиях мы доказали. Из формулы (3) очевидна и непрерывная зависимость решения от начальных условий.

4. Случай $p_0 < 1$. Мы утверждаем, что $Q(s, t)$ при $p_0 < 1$ представляет собой матрицу из многочленов от s.

Действительно, в этом случае элемент $Q_{ij}(s, t)$ матрицы $Q(s, t)$ есть целая функция порядка роста ниже 1, которая при вещественных $s=\sigma$ возрастает не быстрее, чем многочлен степени h. Согласно теореме Фрагмена — Линделёфа *) $Q_{ij}(s, t)$ есть многочлен от $s_1, s_2, \ldots, s_n$ степени не выше h.

Таким образом, если $p_0 < 1$, то $p_0 = 0$. Матрица Грина $G(x, t) = F^{-1}Q(\sigma, t)$ состоит в этом случае, следовательно, из элементов вида $P_{jk}(D, t)\,\delta(x)$ с дифференциальными операторами P, степени которых не превосходят числа h.

*) С тем обобщением на n переменных, которое дано в § 9 гл. IV п. 2.

Формула свертки (3) п. 3 преобразуется к виду

$$u(x, t) = P(D, t)\,\delta(x) * u_0(x) = P(D, t)\,u_0(x), \qquad (1)$$

так что решение задачи Коши для рассматриваемой системы получается здесь в результате дифференцирования начальных функций.

В качестве примера годится любая матрица $P(s)$ с постоянными характеристическими корнями. Такой является, в частности, всякая матрица вида

$$P(s) = \begin{Vmatrix} \sqrt{p(s)\,q(s)} & p(s) \\ -q(s) & -\sqrt{p(s)\,q(s)} \end{Vmatrix}, \qquad (2)$$

где многочлены $p(s)$ и $q(s)$ таковы, что их произведение есть квадрат многочлена. Оба характеристических корня этой матрицы при любом s равны нулю.

Отметим разницу в свойствах решений вида (3) п. 3 и (1) этого пункта. Структура формулы (3) п. 3 показывает, что начальное возмущение, если оно локализовано в конечной области, распространяется с конечной скоростью, не превосходящей числа b. Формула же (1) настоящего пункта показывает, что для соответствующих систем начальное возмущение, локализованное в конечной области, остается в этой области все время.

5. Обратная теорема. В заключение покажем, что гиперболические системы полностью характеризуются своим классом корректности.

Теорема 2. *Пусть известно, что система с постоянными коэффициентами*

$$\frac{\partial u_j(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{m} P_{jk}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u_k(x, t) \qquad (1)$$

корректна в классе всех достаточно гладких функций; иными словами, она имеет решение для любых начальных функций $u_0(x)$, обладающих производными до порядка h, и каждому ряду $u_0(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} u_{0\nu}(x)$, сходящемуся равномерно в любой ограниченной области вместе с производными до порядка h отвечает ряд решений $u(x, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu(x, t)$, сходящийся при каждом x и t к соответствующему решению системы (1). *Тогда система* (1) — *гиперболическая.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(x) \neq 0$, обращающуюся в нуль при $|x| > \frac{1}{2}$ и обладающую производными до порядка h. Решение задачи Коши для системы (1) с начальной функцией $\varphi(x)$ имеет вид

$$\varphi(x, t) = G(x, t) * \varphi(x),$$

где $G(x, t)$ — матрица Грина системы (1). Пусть теперь $p_\nu > 0$ — произвольная последовательность чисел и x_ν — последовательность точек, отстоящих друг от друга не менее чем на 1. По условию, решение задачи Коши с начальной функцией $u_0(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu \varphi(x + x_\nu)$ имеет вид

$$u(x, t) = \sum p_\nu [G(x, t) * \varphi(x + x_\nu)] = \\ = \sum p_\nu (G(\xi, t), \ \varphi(x + \xi + x_\nu)),$$

причем ряд сходится при каждом x. Полагая $x = 0$, получаем, что ряд

$$\sum p_\nu (G(\xi, t), \ \varphi(\xi + x_\nu))$$

сходится при любом выборе p_ν. Отсюда следует, что функция

$$p(\eta)(G(x, t), \ \varphi(x + \eta))$$

ограничена при любом выборе функции $p(\eta)$. Но это возможно только при условии, что при достаточно больших $|\eta|$ функция

$$(G(x, t), \ \varphi(x + \eta))$$

обращается в нуль. Переходя к преобразованиям Фурье, получаем, что *функция $Q(s, t)\,\psi(s)$ есть целая функция 1-го порядка роста и конечного типа, какова бы ни была функция $\psi(\sigma)$ — преобразование Фурье первоначальной функции $\varphi(x)$.*

Покажем теперь, что и сама функция $Q(s, t)$ имеет первый порядок роста.

Функция $\psi(s)$ как преобразование Фурье финитной функции $\varphi(x)$ есть функция 1-го порядка роста конечного типа; при этом можно эту функцию задать так, чтобы для заданного значения аргумента θ_j, $\theta_j \neq 0, \pi$ величина

$$|\psi(\sigma_1, \ldots \sigma_{j-1}, r_j e^{i\theta_j}, \sigma_{j+1}, \ldots, \sigma_n)|$$

стремилась при $r \to \infty$ к пределу $+\infty$.

Например, можно положить

$$\psi(s) = \sum_j \left(\frac{\sin ks_j}{ks_j}\right)^{h+2}, \qquad k(h+2) < \frac{1}{2}.$$

Если бы функция $Q(s, t)$ росла быстрее, чем с первым порядком роста и конечным типом, то нашелся бы луч в плоскости переменного s_j с аргументом θ_j, $0 < \theta_j < \pi$, на котором $|Q(r_j e^{i\theta_j}, t)|$ возрастала бы быстрее, чем e^{Cr_j} при любом C. Но тогда вдоль этого луча произведение $Q\psi$ возрастало бы еще быстрее, и функция $Q\psi$ не была бы функцией первого порядка конечного типа. Поэтому мы делаем вывод, что *функция $Q(s, t)$ при любом t есть целая функция первого порядка и конечного типа.*

Можно утверждать далее, что при вещественных $s = \sigma$ функция $Q(\sigma, t)$ возрастает не быстрее многочлена от σ. Действительно, функция $(G(x, t), \varphi(x+\eta)) = \varphi(\eta, t)$ ограничена и непрерывна на том интервале, где она отлична от нуля (в силу предположения о корректности решения), следовательно, ее преобразование Фурье $Q(\sigma, t)\psi(\sigma)$ стремится к нулю, когда $|\sigma| \to \infty$. Но функцию $\psi(\sigma)$ можно задать так, чтобы выполнялось неравенство

$$|\psi(\sigma)| \geqslant \frac{C}{(1+|\sigma|)^{h+2}},$$

положив, например,

$$\psi(\sigma) = \sum_j \left[\frac{\sin^{h+2} k\sigma_j}{\sigma_j^{h+2}} + \frac{\sin^{h+2} k\left(\frac{\pi}{2} - \sigma_j\right)}{\left(\frac{\pi}{2} - \sigma_j\right)^{h+2}}\right],$$

где k подобрано так, чтобы иметь $k(h+2) < \frac{1}{2}$ $\left(\text{для обеспечения типа} < \frac{1}{2}\right)$. Тогда функция $\psi(\sigma)$ будет преобразованием Фурье функции $\varphi(x)$, отличной от нуля только в промежутке $|x| < \frac{1}{2}$ и обладающей производными до порядка h. Так как $\lim\limits_{|\sigma| \to \infty} Q(\sigma, t)\psi(\sigma) = 0$, то $\|Q(\sigma, t)\|$ возрастает при $|\sigma| \to \infty$ медленнее, чем $|\sigma|^{h+2}$, что и требовалось. Мы видим, что выполняются оба условия, определяющие гиперболичность системы (1). Итак, в указанных предположениях система (1) гиперболична. Теорема доказана.

§ 4. СИСТЕМЫ, КОРРЕКТНЫЕ ПО ПЕТРОВСКОМУ

1. Определение и примеры. Система с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u_j(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{m} P_{jk}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u_k(x, t) \tag{1}$$

называется *корректной по Петровскому*, если функция $\Lambda(s) = \operatorname{Re}\lambda_j(s)$ ограничена сверху при вещественных значениях $s = \sigma$:

$$\Lambda(\sigma) \leqslant C.$$

Примеры. 1°. Всякая параболическая система (§ 2).

2°. Всякая гиперболическая система (§ 3).

3°. Уравнение звука в вязком газе

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2\frac{\partial^3 u}{\partial t\, \partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Характеристическое уравнение в данном случае имеет вид

$$\lambda^2 = -2\lambda s^2 - s^2;$$

его корни

$$\lambda_{1,2}(s) = -s^2 \pm \sqrt{s^4 - s^2}$$

ограничены сверху при вещественных значениях $s = \sigma$. Таким образом, уравнение (2) действительно корректно по Петровскому. Это уравнение не принадлежит к числу параболических уравнений (так как один из корней остается положительным при достаточно больших $s = \sigma$) и не принадлежит к числу гиперболических уравнений (так как не выполняется оценка $\operatorname{Re}\lambda(s) \leqslant C|s|$).

4°. Уравнение Шрёдингера

$$\frac{\partial u}{\partial t}=i\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (3)$$

Здесь $\lambda(s)=-is^2$ и $\Lambda(s)=2\sigma\tau$ обращается в нуль на вещественной оси; таким образом, уравнение принадлежит к числу корректных по Петровскому. Оно также не гиперболично и не параболично.

2. Разрешающая матрица. Применяя к уравнениям (1) преобразование Фурье, получим систему

$$\frac{dv(s,t)}{dt}=P(s)v(s,t) \qquad (4)$$

с разрешающей матрицей

$$Q(s,t)=e^{tP(s)}.$$

Если p_0 — приведенный порядок системы, то, как мы знаем, имеет место оценка

$$\|Q(s,t)\|\leqslant C(1+|s|)^{p(m-1)}e^{bt|s|^{p_0}}. \qquad (5)$$

Если $p_0\leqslant 1$, то система (1) — гиперболическая. Будем считать в этом параграфе, что $p_0>1$, так что система (1) не является гиперболической.

Условие корректности по Петровскому приводит к оценке

$$\|Q(\sigma,t)\|\leqslant C_1(1+|\sigma|)^{p(m-1)}.$$

Назовем *показателем корректности системы* (1) наименьшее число h, для которого

$$\|Q(\sigma,t)\|\leqslant C_1(1+|\sigma|)^h. \qquad (6)$$

Будем считать, что наименьшее среди чисел h существует; в противном случае можно пользоваться фиксированным h, сколь угодно близким к их нижней грани.

Как мы видим, $h\leqslant p(m-1)$. Мы покажем, что число h так же, как и для гиперболических систем, определяет порядок гладкости, которым должны обладать начальные данные для обеспечения корректности задачи Коши.

Замечание. Неравенство (6), как и в прежних случаях, может служить определением системы, корректной по Петровскому. Поэтому можно включить в рассмотрение также

системы с переменными коэффициентами и любые другие системы, которые после преобразования Фурье переходят в системы вида

$$\frac{dv(s,t)}{dt}=P(s,t)v(s,t)$$

с разрешающей матрицей $Q(s,t)$, удовлетворяющей неравенствам (4)—(5). Все такие системы будем в дальнейшем также называть *корректными по Петровскому.*

3. Роль условия корректности по Петровскому. В дальнейшем будет показано, что для системы, корректной по Петровскому, обеспечивается существование решения для всяких достаточно гладких начальных функций (с ростом, не превышающим некоторого заданного) и непрерывная зависимость этого решения от изменения начальной функции.

В этом пункте мы покажем, что условие корректности по Петровскому необходимо для справедливости подобных утверждений.

Теорема. *Пусть известно, что система уравнений*

$$\frac{\partial u_j(x,t)}{\partial t}=\sum P_{jk}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u_k(x,t) \qquad (1)$$

имеет интегрируемое при $-\infty<x<\infty$ решение $u(x,t)$ для любой начальной финитной функции $u_0(x)$, обладающей производными до некоторого порядка h, причем это решение непрерывно меняется при изменении начальной функции, т. е. из условия

$$\lim_{\nu\to\infty}D^q u_{0\nu}(x)=D^q u_0(x) \qquad (|q|\leqslant h)$$

вытекает

$$\lim_{\nu\to\infty}u_\nu(x,t)=u(x,t)$$

при каждом x и t. Тогда система (1) *корректна по Петровскому.*

Доказательство. Решение задачи Коши для финитной функции $u_0(x)$ имеет вид

$$u(x,t)=G(x,t)*u_0(x),$$

где $G(x,t)$ — матрица Грина системы (1).

Заменим функцию $u_0(x)$ на $\varepsilon u_0(x)$, где $\varepsilon > 0$; тогда, по условию, при $\varepsilon \to 0$ решение $\varepsilon u(x, t)$ стремится к нулю при любых x и t. Отсюда следует, что функция $u(x, t)$ конечна при любых x и t. Далее, заменяя $u_0(x)$ на $u_0(x+\varepsilon)$ и устремляя снова ε к нулю, получаем, что решение $u(x, t)$ непрерывно по x при любых x и t.

Применяя к обеим частям равенства (1) преобразование Фурье, находим, что

$$v(\sigma, t) = Q(\sigma, t)\, v_0(\sigma),$$

причем $v(\sigma, t)$ — ограниченная функция (как образ Фурье интегрируемой функции). Если взять в качестве $v_0(\sigma)$ функцию, ограниченную снизу выражением $\frac{C}{(1+|\sigma|)^h}$ (см. конец § 3), то мы получим, что $Q(\sigma, t)$ возрастает не быстрее $|\sigma|^h$. Таким образом, условие корректности по Петровскому выполнено, что и требовалось.

Замечание. Можно вместо интегрируемости самой функции $u(x, t)$ требовать интегрируемость отношения $\frac{u(x, t)}{(1+|x|)^k}$ при некотором k. Неизвестно, сохраняется ли утверждение в предположении, что $u(x, t)$ принадлежит классу единственности системы (1).

4. Род системы, корректной по Петровскому. Применим к $Q(s, t)$ — разрешающей матрице-функции системы (4) п. 1 при заданном $t > 0$ теорему 1 § 7 гл. IV вып. 2. В силу этой теоремы существует область H_μ, определяемая неравенством

$$|\tau| \leqslant K(1+|\sigma|)^\mu, \quad \mu \geqslant 1 - p_0, \tag{1}$$

в которой

$$\|Q(s, t)\| \leqslant C(1+|\sigma|)^h. \tag{2}$$

Верхнюю грань допустимых чисел μ мы будем называть родом системы. Мы увидим в дальнейшем, что род системы вместе с показателем корректности h определяет класс корректности задачи Коши для рассматриваемой системы.

Как и для параболических систем, мы будем предполагать, что верхняя грань в классе всех допустимых чисел μ достигается, так что в неравенстве (1) μ можно считать родом системы. Если в действительности это не имеет места, то, как и ранее, в качестве числа μ в дальнейших построениях можно взять любое число, меньшее рода системы, и соответственно изменить окончательные формулировки.

О роде системы с постоянными коэффициентами можно судить по ее характеристическим корням. Именно, в силу основного неравенства (6) п. 1 § 5 гл. III, связывающего рост функции $Q(s, t)$ с ростом функции $\Lambda(s) = \max \operatorname{Re} \lambda_j(s)$, род системы может быть определен и как наибольший показатель μ такой, что в области

$$|\tau| \leqslant K(1+|\sigma|)^\mu$$

функция $\Lambda(s)$ остается ограниченной.

Примеры. 1°. Для уравнения звука (2) п. 1 характеристические корни имеют вид

$$\lambda_{1,2}(s) = -s^2 \pm \sqrt{s^4 - s^2};$$

легко проверить, что их вещественные части ограничены в любом угле $|\tau| \leqslant k|\sigma|$, $0 < k < 1$; таким образом, в данном случае род уравнения равен 1.

2°. Для уравнения Шрёдингера (3) п. 1 характеристический корень равен

$$\lambda(s) = -is^2, \quad \Lambda(s) = \operatorname{Re}\lambda(s) = 2\sigma\tau$$

и величина $\Lambda(s)$ ограничена в области

$$|\tau| \leqslant K(1+|\sigma|)^{-1};$$

таким образом, в данном случае род уравнения равен -1.

Как показала В. М. Борок, для корректных по Петровскому систем с одним пространственным переменным, так же как и в параболическом случае (п. 3 § 2), можно построить простые формулы для вычисления всех характеристик системы. Все корни уравнения $\det\|P(s) - \lambda E\| = 0$ по их разложениям в ряд Ньютона — Пюизе в окрестности бесконечно удаленной точки

$$\lambda(s) = \alpha_0 s^{k_0} + \alpha_1 s^{k_1} + \ldots + \alpha_p s^{k_p} + \ldots$$

можно разделить на три типа:

(1) $k_0 \leqslant 0$,

(2) $k_0 > k_1 > \ldots > k_m > 0$, $k_{m+1} \leqslant 0$,

$$\operatorname{Re}\alpha_0 = \ldots = \operatorname{Re}\alpha_m = 0,$$

(3) $k_0 > k_1 > \ldots > k_m > 0$, $k_{m+1} \leqslant 0$,

$$\operatorname{Re}\alpha_0 = \ldots = \operatorname{Re}\alpha_{p-1} = 0, \quad \operatorname{Re}\alpha_p \neq 0, \quad p \leqslant m.$$

Оказывается, что для корней типа (2) показатели $k_0, \ldots, k_m$ и для корней типа (3) показатели $k_0, \ldots, k_p$ — целые числа. Имеют место формулы

$$p_0 = \max(k_0, 0) \quad \text{(по всем корням)}.$$

Если $p_0 = 0$, то система сводится к системе обыкновенных уравнений (так что производные по x будут отсутствовать). Пусть $p_0 > 0$; тогда

$$\mu = \min\{-k_0 + 1,\ k_p - k_0 + 1,\ 1\} \quad \text{(по всем корням)}.$$

5. Основная теорема для систем с положительным родом. Сформулируем теперь основную теорему о классе корректности для системы с положительным родом:

Теорема 2. *Если начальные функции $u_j(x, 0)$ системы*

$$\frac{\partial u_j(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{m} P_{jk}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u_k(x, t) \qquad (j = 1, \ldots, m), \tag{1}$$

корректной по Петровскому, положительного рода μ и с показателем корректности h удовлетворяют неравенствам

$$|u_j^{(q)}(x, 0)| \leqslant C_1 e^{b|x|^{p_1}}, \quad p_1 = \frac{p_0}{p_0 - \mu}, \quad q \leqslant h + n + 1,$$

то система обладает решением $u(x, t)$, удовлетворяющим при достаточно малом t неравенству

$$|u_j(x, t)| \leqslant C_2 e^{b'|x|^{p_1}}$$

при любом $b' > b$.

Пример. Как мы видели выше, уравнение звука в вязком газе

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2\frac{\partial^3 u}{\partial t\,\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2}$$

принадлежит к типу уравнений, корректных по Петровскому, с родом $\mu = 1$. Характеристические корни

$$\lambda_{1,2}(s) = -s^2 \pm \sqrt{s^4 - s^2}$$

ограничены на вещественной оси, поэтому показатель корректности $h = 0$. Далее, приведенный порядок p_0 уравнения (2), определяемый ростом корней в s-плоскости, равен, очевидно, 2. Теорема 2 утверждает, что *для начальных функций* $u(x, 0)$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}$, *удовлетворяющих вместе с производными до второго порядка неравенствам вида*

$$|u(x)| \leqslant Ce^{b|x|^2},$$

имеется решение, удовлетворяющее при достаточно малом t неравенствам

$$|u(x, t)| \leqslant C_2' e^{b'x^2}, \quad \left|\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right| \leqslant C_2'' e^{b'x^2}$$

с любой постоянной $b' > b$.

Доказательство теоремы 2 требует некоторых предварительных построений. Мы проведем его вначале для простоты в случае одного измерения ($n = 1$).

1°. *Если функция $Q(\sigma)$ возрастает при $|\sigma| \to \infty$ не быстрее, чем $(1 + |\sigma|)^h$, то эту функцию можно представить как преобразование Фурье интегрируемой в квадрате функции $f(x)$, к которой применен* (*фиксированный*) *дифференциальный оператор $P(D)$ порядка $h + 1$* (например, $\left(1 + \frac{d}{dx}\right)^{h+1}$).

Действительно, если записать

$$Q(\sigma) = (1 - i\sigma)^{h+1} R(\sigma),$$

то $R(\sigma)$ будет интегрируема в квадрате и, по теореме Планшереля *), будет иметь интегрируемое в квадрате (обратное) преобразование Фурье $f(x)$:

$$\widetilde{f(x)} = R(\sigma).$$

Умножая обе части равенства на $(1 - i\sigma)^{h+1}$, получаем:

$$Q(\sigma) = (1 - i\sigma)^{h+1}\widetilde{f(x)} = F\left[\left(1 + \frac{d}{dx}\right)^{h+1} f(x)\right],$$

что и требовалось.

2°. *Пусть $u(x)$ — финитная функция, обладающая непрерывными производными до порядка $h + 1$. Пусть, далее, $G(x)$ — обобщенная функция* (основное пространство мы подберем позднее), *представимая в форме*

$$G(x) = P\left(\frac{d}{dx}\right) f(x),$$

где $P\left(\frac{d}{dx}\right)$ — дифференциальный оператор порядка $h + 1$, а $f(x)$ — интегрируемая в квадрате функция. Утвер-

*) См., например, Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье. Гостехиздат, М. — Л., 1948, раздел III.

ждается, что свертка $G(x)*u(x)$ может быть записана в форме

$$G*u=\int f(\xi)\,P\left(\frac{d}{dx}\right)u(x-\xi)\,d\xi. \tag{3}$$

Действительно, для любой финитной основной функции $\varphi(x)$ мы имеем, по определению свертки

$$\begin{aligned}(G*u,\ \varphi)&=(u,\ G*\varphi)=\left(u,\ P\left(\frac{d}{dx}\right)f*\varphi\right)=\\&=\left(u,\ f*P\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi\right)=\left(u,\ \int f(\xi)\,P\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x+\xi)\,d\xi\right)=\\&=\int u(x)\left\{\int f(\xi)\,P\left(\frac{d}{d\xi}\right)\varphi(x+\xi)\,d\xi\right\}dx.\end{aligned}$$

Оба интеграла фактически берутся по конечной области. Переставляя их и полагая $x+\xi=\eta$, мы находим:

$$\begin{aligned}(G*u,\ \varphi)&=\int f(\xi)\left\{\int u(\eta-\xi)\,P\left(\frac{d}{d\eta}\right)\varphi(\eta)\,d\eta\right\}d\xi=\\&=\int f(\xi)\left\{\int P\left(-\frac{d}{d\eta}\right)u(\eta-\xi)\,\varphi(\eta)\,d\eta\right\}d\xi=\\&=\int\left\{\int f(\xi)\,P\left(\frac{d}{d\xi}\right)u(\eta-\xi)\,d\xi\right\}\varphi(\eta)\,d\eta=\\&=\left(\int f(\xi)\,P\left(\frac{d}{d\xi}\right)u(x-\xi)\,d\xi,\ \varphi(x)\right).\end{aligned}$$

Этот результат есть в то же время результат применения к основной функции $\varphi(x)$ функционала, стоящего в правой части равенства (3). Утверждение доказано.

3°. Обозначим через $L=L(h_0,\,l)$ совокупность функций $u(x)$, обращающихся в нуль при $|x|\geqslant 1$ и имеющих непрерывные производные до порядка h_0, удовлетворяющие неравенствам

$$|u^{(q)}(x)|\leqslant l \quad \textit{при} \quad q\leqslant h_0.$$

Пусть далее $Q(s)$ — целая аналитическая функция от $s=\sigma+i\tau$, удовлетворяющая неравенству

$$|Q(\sigma+i\tau)|\leqslant C\,(1+|\sigma|)^h\,e^{\Omega(b\tau)}, \tag{4}$$

где $\Omega(\tau)$ — выпуклая книзу функция, определяющая пространство W^{Ω} (гл. I, § 1), и пусть $G(x)$ — обобщенная

функция, преобразование Фурье которой совпадает с $Q(s)$.

Утверждается, что при $h_0\geqslant h+2$ свертка

$$\hat{u}(x)=G(x)*u(x)$$

удовлетворяет неравенству

$$|\hat{u}(x)|\leqslant C'le^{-M(ax)}, \tag{5}$$

где $M(x)$ — функция, двойственная по Юнгу к функции $\Omega(\tau)$ (гл. I, § 3), и a — любое число, меньшее $\frac{1}{b}$.

Доказательство. Функция $G*u$ есть обратное преобразование Фурье от произведения Qv, где $v(\sigma)=\widetilde{u(x)}$. Если $u(x)$ принадлежит L, то $v(s)$ — целая аналитическая функция, удовлетворяющая неравенствам

$$|s^q v(s)|\leqslant 2le^{|\tau|} \quad \text{при} \quad q\leqslant h_0.$$

Произведение Qv удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned}|Q(s)\,v(s)|&\leqslant 2Cl\,(1+|\sigma|)^h\,e^{\Omega(b\tau)}e^{|\tau|}\min\left\{1,\ \frac{1}{|s|^{h_0}}\right\}\leqslant\\&\leqslant C_1l\,(1+|\sigma|)^{h-h_0}\,e^{\Omega(b\tau)}e^{|\tau|}\leqslant C_1'l\,(1+\sigma^2)^{-1}\,e^{\Omega(b'\tau)}\end{aligned}$$

при любом $b'>b$. Вычисляя преобразование Фурье от функции Qv с помощью интегрирования по прямым $\operatorname{Im}s=\tau$, мы находим:

$$\begin{aligned}|G(x)*u(x)|&=\frac{1}{2\pi}\left|\int Q(s)\,v(s)\,e^{-isx}\,d\sigma\right|\leqslant\\&\leqslant C_2'le^{\Omega(b'\tau)}e^{\tau x}\int\frac{d\sigma}{1+\sigma^2}\leqslant C_3le^{\Omega(b'\tau)+\tau x}.\end{aligned}$$

Выберем теперь τ, при заданном x, противоположным по знаку x и так, чтобы неравенство Юнга для функции $\Omega(b'x)$ и двойственной по Юнгу функции $M\left(\frac{1}{b'}x\right)$ обратилось в равенство

$$-x\tau=\Omega(b'\tau)+M\left(\frac{x}{b'}\right).$$

Тогда мы получаем:

$$|\hat{u}(x)|=|G(x)*\varphi(x)|\leqslant C_3le^{-M\left(\frac{x}{b'}\right)}.$$

Так как b' — любое число, большее b, то $\frac{1}{b'}$ — любое число, меньшее $\frac{1}{b}$, что и требовалось.

4°. Применим результат 3° к оценке решения задачи Коши для корректной по Петровскому системы

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t) \tag{1}$$

с финитной начальной функцией $u(x)$. Искомое решение, как мы знаем, представляется в виде свертки

$$u(x,t) = G(x,t) * u(x),$$

где $G(x,t)$ есть (обратное) преобразование Фурье функции $Q(s,t)$ — разрешающей матрицы-функции системы

$$\frac{dv(s,t)}{dt} = P(s)\,v(s,t). \tag{6}$$

По условию система (1) корректна по Петровскому; это значит, что $Q(s,t)$, целая функция порядка роста p_0, растет при вещественных $s=\sigma$ не быстрее $|\sigma|^h$ с некоторым h. Так как, далее, род системы μ положителен, то мы можем применить теорему 2′ п. 4 § 7 гл. IV вып. 2, которая приводит нас к оценке

$$\|Q(s,t)\| \leqslant C(1+|\sigma|)^h e^{b't|\tau|^{p_0/\mu}} \leqslant C(1+|\sigma|)^h e^{\theta|\tau|^{p_0/\mu}}, \tag{7}$$

где $\theta = b'T$, $t \leqslant T$. Эта оценка совпадает с оценкой (4) из 3°, если положить $\Omega(\tau) = \frac{\tau^{p_0/\mu}}{p_0/\mu}$ и определить b из уравнения

$$\Omega(b\tau) = \frac{b^{p_0/\mu}\tau^{p_0/\mu}}{p_0/\mu} = \theta\tau^{p_0/\mu}.$$

Очевидно, мы получим:

$$b = \left(\frac{p_0}{\mu}\theta\right)^{\mu/p_0} = cT^{\mu/p_0}.$$

Двойственная по Юнгу функция $M(x)$ в этом случае равна $\frac{x^{p_1}}{p_1}$, где $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_0/\mu} = 1$; отсюда $p_1 = \frac{p_0}{p_0-\mu}$. Поэтому окончательное неравенство (5) из 3° приобретает вид

$$|\hat{u}(x)| \leqslant Cle^{-\frac{a^{p_1}|x|^{p_1}}{p_1}},$$

где a — любое число, меньшее $\frac{1}{b} = c_1 T^{-\mu/p_0}$. Таким образом, *при любом* $\delta > 0$ *имеет место неравенство*

$$|\hat{u}(x)| \leqslant C_\delta l e^{-c_2 T^{-p_2}|x|^{p_1}(1-\delta)} \qquad \left(p_2 = \mu\frac{p_1}{p_0}\right). \tag{8}$$

Это неравенство, в частности, имеет место для решения задачи Коши для системы (1), *если начальная функция обращается в нуль при* $|x| \geqslant 1$ *и имеет непрерывные производные до порядка* $h_0 \geqslant h+2$, *ограниченные числом* l.

5°. Пусть теперь начальная вектор-функция $u(x)$ удовлетворяет условиям теоремы:

$$|u_j^{(q)}(x)| \leqslant Ce^{b_0|x|^{p_1}}, \quad p_1 = \frac{p_0}{p_0-\mu}, \quad q \leqslant h_0.$$

Покажем, что *существует решение* $u(x,t)$, *обращающееся в* $u(x)$ *при* $t=0$ *и удовлетворяющее неравенству*

$$|u_j(x,t)| \leqslant C'e^{b_1|x|^{p_1}}$$

при заданном $b_1 > b_0$ *и достаточно малом* $t \leqslant T$.

Идея доказательства состоит в следующем. Мы представим начальную функцию $u(x)$ в виде ряда финитных функции

$$u(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} u_\nu(x-\nu),$$

где $u_\nu(x)$ обращается в нуль при $|x| \geqslant 1$. Для каждой из функций $u_\nu(x)$ соответствующее решение $u_\nu(x,t)$ можно написать в форме свертки

$$u_\nu(x,t) = G(x,t) * u_\nu(x-\nu).$$

Применяя результат 3°, мы покажем, что ряд

$$u(x,t) = \sum_{-\infty}^{\infty} u_\nu(x,t)$$

сходится и представляет собой искомое решение.

Переходим к детальному описанию этого построения.

Пусть $e(x)$ — функция, обращающаяся в нуль при $|x| \geqslant \frac{3}{4}$, в единицу при $|x| \leqslant \frac{1}{4}$, всюду заключенная между нулем и единицей, обладающая непрерывными производными до порядка h_0 и такая, что

$$\sum_{-\infty}^{\infty} e(x-\nu) \equiv 1. \tag{9}$$

Умножая равенство (9) на функцию $u(x)$, находим

$$u(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} u(x)\, e(x-\nu) = \sum_{-\infty}^{\infty} u_\nu(x-\nu),$$

где $u_\nu(x) = u(x+\nu)\, e(x)$ — функция, обладающая непрерывными производными до порядка h_0 и обращающаяся в нуль вне отрезка $|x| \leqslant \frac{3}{4}$.

Пусть $K_\nu(u)$ означает наибольшую из абсолютных величин функции $u(x)$ и ее производных до порядка h_0 в промежутке $-\nu - \frac{3}{4} \leqslant x \leqslant -\nu + \frac{3}{4}$. Тогда, очевидно, при любом $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$K_\nu(u) \leqslant Ce^{b_0\left(|\nu|+\frac{3}{4}\right)^{p_1}} \leqslant C_\varepsilon e^{(b_0+\varepsilon)|\nu|^{p_1}}.$$

Пусть, далее, число K означает наибольшую из абсолютных величин функции $e(x)$ и ее производных до порядка h_0. Тогда для функции $u_\nu(x) = u(x+\nu)\, e(x)$, как легко вывести из формулы Лейбница, выражения $|u_\nu^{(q)}(x)|$ ограничены при $q \leqslant h_0$ величиной

$$CKK_\nu(u) \leqslant C'_\varepsilon e^{(b_0+\varepsilon)|\nu|^{p_1}}.$$

Решение задачи Коши с начальной функцией $u_\nu(x)$ в силу результата 4° оценивается следующим образом:

$$|u_\nu(x, t)| = |G(x, t) * u_\nu(x)| \leqslant$$
$$\leqslant C_{\varepsilon\delta} e^{(b_0+\varepsilon)|\nu|^{p_1}} e^{-c_2(1-\delta)T^{-p_2}|x|^{p_1}}.$$

Построим теперь функцию

$$u(x, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} u_\nu(x-\nu, t). \tag{10}$$

Так как, по доказанному, справедлива оценка

$$|u_\nu(x-\nu, t)| \leqslant C_{\varepsilon\delta} e^{(b_0+\varepsilon)|\nu|^{p_1} - c_2(1-\delta)T^{-p_2}|x-\nu|^{p_1}}, \tag{11}$$

то *при достаточно малом T, таком, что $c_2(1-\delta)T^{-p_2} > b_0+\varepsilon$, ряд* (10) *сходится при каждом x абсолютно и равномерно на каждом конечном промежутке оси x и представляет, следовательно, непрерывную функцию.*

Нам остается показать, что эта функция есть искомое решение задачи Коши.

6°. Покажем, что *при достаточно малом T частные суммы ряда* (10)

$$S_N(x, t) = \sum_{-N}^{N} u_\nu(x-\nu, t)$$

обладают мажорантой, не зависящей от N:

$$|S_N(x, t)| \leqslant C_{\varepsilon\delta} e^{(b_0+3\varepsilon)|x|^{p_1}}. \tag{12}$$

Произведем следующее преобразование в показателе правой части неравенства (11)

$$(b_0+\varepsilon)|\nu|^{p_1} - c_2(1-\delta)T^{-p_2}|x-\nu|^{p_1} = (b_0+3\varepsilon)|x|^{p_1} +$$
$$+\left[(b_0+\varepsilon)|\nu|^{p_1} - (b_0+3\varepsilon)|x|^{p_1} - c_2(1-\delta)T^{-p_2}|x-\nu|^{p_1}\right].$$

Если мы покажем, что для достаточно малых T выполняется неравенство

$$(b_0+\varepsilon)|\nu|^{p_1} - (b_0+3\varepsilon)|x|^{p_1} - c_2(1-\delta)T^{-p_2}|x-\nu|^{p_1} \leqslant$$
$$\leqslant -\varepsilon|\nu|^{p_1}, \tag{13}$$

то, очевидно, неравенство (12) будет доказано. Неравенство (13) эквивалентно неравенству

$$(b_0+2\varepsilon)|\nu|^{p_1} \leqslant (b_0+3\varepsilon)|x|^{p_1} + c_2(1-\delta)T^{-p_2}|x-\nu|^{p_1}$$

или, с заменой $\xi = \frac{\nu}{x}$, неравенству

$$(b_0+2\varepsilon)|\xi|^{p_1} \leqslant b_0+3\varepsilon + c_2(1-\delta)T^{-p_2}|1-\xi|^{p_1}. \tag{14}$$

Так как коэффициент $c_2(1-\delta)T^{-p_2}$ неограниченно возрастает при $T \to 0$, то очевидно, что неравенство (14) действительно выполняется при достаточно малом T. Вместе с ним выполняется и неравенство (13), а следовательно, и (12). Таким образом, *функции* $S_N(x, t)$, *а с ними и предельная функция* $u(x, t)$ *обладает мажорантой* $e^{(b_0+3\varepsilon)|x|^{p_1}}$.

7°. Рассмотрим пространство W_{p_1, b_1} бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих неравенствам (с произвольным пока b_1)

$$|\varphi^{(q)}(x)| \leqslant C_{\delta q} e^{-\frac{1}{p_1}[(b_1-\delta)|x|]^{p_1}} \qquad (\delta > 0 \text{ любое}).$$

В силу оценки (7) и теоремы 1 из п. 4 § 2 гл. I, матрица $Q(s, t)$ является ограниченным оператором умножения в двойственном пространстве $W^{p_1', 1/b_1}$ (гл. I, § 3), и следовательно, $G(x, t)$ является свертывателем в пространстве W_{p_1, b_1}. Число $\frac{1}{p_1} b_1^{p_1}$ теперь мы возьмем бо́льшим, чем b, а ε — настолько малым, чтобы иметь $b + 3\varepsilon < \frac{1}{p_1} b_1^{p_1}$. Тогда функции $S_N(x, t)$ и $u(x, t)$, фигурировавшие в 6°, определяют на пространстве W_{p_1, b_1} линейные непрерывные функционалы и ряд (10) сходится в смысле обобщенных функций на пространстве W_{p_1, b_1}. В силу непрерывности оператора свертки

$$G * u = G * \sum_{-\infty}^{\infty} u_\nu(x - \nu) = \sum_{-\infty}^{\infty} G * u_\nu(x - \nu) =$$
$$= \sum_{-\infty}^{\infty} u_\nu(x - \nu, t) = u(x, t);$$

(равенство имеет смысл в пространстве W'_{p_1, b_1}). Таким образом, *решение задачи Коши для системы* (1) *с начальной функцией* $u(x)$ *совпадает с функцией* $u(x, t)$. Тем самым теорема 1 доказана, пока еще для случая одного независимого переменного.

Замечание. Окончательная формула для решения задачи Коши в данном случае, как следует из (10) и (3), имеет

следующий вид:

$$u(x, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, t) P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u_\nu(x - \nu - \xi)\, d\xi =$$
$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, t) P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x - \xi)\, e(x - \xi - \nu)\, d\xi.$$

Если бы здесь можно было переставить знаки $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty}$, то мы получили бы более простую формулу

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, t) P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x - \xi)\, d\xi,$$

законность которой в данном случае неясна, поскольку ничего не известно об экспоненциальном убывании функции $f(\xi, t)$ при $|\xi| \to \infty$.

8°. Укажем изменения в доказательстве, которые следует произвести для перехода к случаю n независимых переменных. Матрица $Q(s, t)$ в этом случае удовлетворяет неравенству

$$\|Q(s, t)\| = \|Q(s_1, \ldots, s_n, t)\| \leqslant$$
$$\leqslant C(1 + |\sigma|)^h e^{\Omega(b\tau_1) + \ldots + \Omega(b\tau_n)} \quad (\Omega(\tau) = \tau^p).$$

Утверждение 1° остается верным, если заменить оператор $\left(1 + \frac{d}{dx}\right)^{h+1}$ на оператор

$$\left(1 + \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{h+1} \left(1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\right) \ldots \left(1 + \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

порядка $h + n$. В 2° от функции $u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$ нужно соответственно потребовать наличия непрерывных производных до порядка $h + n$.

В 3° функция $u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$ должна иметь производные, ограниченные числом l до порядка $h_0 \geqslant h + n + 1$.

В 4° вместо теоремы 2' § 7 гл. IV вып. 2 следует использовать ее n-мерный аналог из § 9 той же главы. В 5° индекс ν следует считать комплексом $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$, $-\infty < \nu_j < \infty$. Функция $e(x) = e(x_1, \ldots, x_n)$ строится в форме произведения $e(x_1)\cdot\ldots\cdot e(x_n)$, где $e(x_j)$ — функция, которая была рассмотрена в 5° (функция одного переменного x_j). Построенная функция $e(x)$ обращается в нуль вне шара радиуса $\frac{3}{4}\sqrt{n}$ и удовлетворяет условию

$$\sum_\nu e(x-\nu) = \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_n} e_1(x_1-\nu_1)\ldots e_n(x_n-\nu_n) \equiv$$

$$\equiv \prod_{j=1}^{n} \sum_{\nu_j=-\infty}^{\infty} e_j(x_j-\nu_j) \equiv 1.$$

В остальном доказательство сохраняется.

6. Случай системы с неположительным родом. Рассмотрим теперь случай $\mu \leqslant 0$. Мы покажем, что в этом случае решение задачи Коши будет корректным при условии *степенного* роста начальных функций и их производных до некоторого порядка.

Пусть задана корректная по Петровскому система

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x, t) \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = u(x). \tag{2}$$

Согласно теореме 4′ § 7 гл. IV вып. 2 производные разрешающей матрицы $Q(s, t)$ в случае $\mu \leqslant 0$ допускают оценку вида

$$\|D^q Q(\sigma, t)\| \leqslant C_q(1+|\sigma|^{r_q}),$$

причем заведомо $r_q \leqslant h-\mu|q|$ (h — показатель корректности).

Точная формулировка теоремы следующая.

Теорема 3. *Для любого $l>0$ задача Коши* (1)—(2) *корректна в классе функций $u(x)$, имеющих степенной рост порядка не выше $l-(n+1)$ вместе с производными до порядка r_l+n+1:*

$$|D^q u(x)| \leqslant C(1+|x|)^{l-(n+1)} \qquad (|q| \leqslant r_l+n+1).$$

Решение задачи Коши (1) — (2) *есть функция $u(x, t)$, также степенного роста, порядка $\leqslant l$.*

Доказательство распадается на несколько этапов; вначале мы рассмотрим случай одного независимого переменного x ($n=1$).

1°. Как и в доказательстве теоремы 2, введем совокупность $L=L(h_0, l)$ функций $u(x)$, обращающихся в нуль при $|x|\geqslant 1$ и имеющих непрерывные производные до порядка h_0, удовлетворяющие неравенствам

$$|u^{(q)}(x)| \leqslant l \quad \textit{при} \quad q \leqslant h_0.$$

Пусть $Q(\sigma)$ — функция, обладающая производными до порядка k, удовлетворяющая неравенствам

$$|Q^{(q)}(\sigma)| \leqslant C(1+|\sigma|)^r \qquad (q=0, 1, \ldots, k).$$

Пусть, далее, $G(x)$ — обобщенная функция, преобразование Фурье которой совпадает с $Q(\sigma)$.

Утверждается, что при $h_0 \geqslant r+2$ свертка

$$\hat{u}(x) = G(x) * u(x)$$

удовлетворяет неравенству

$$|\hat{u}(x)| \leqslant C'l\frac{1}{(1+|x|)^k}.$$

Для доказательства заметим, что функция $\hat{u}(x)$ есть (обратное) преобразование Фурье от функции $Q(\sigma)\cdot v(\sigma)$, где $v(\sigma)$ есть преобразование Фурье функции $u(x)$; эта функция $v(\sigma)$ удовлетворяет неравенству

$$|\sigma^r v^{(q)}(\sigma)| = \left|\int [x^q u(x)]^r\,dx\right| \leqslant C_1 l$$

$$(q=0, 1, \ldots, k;\ r=0, 1, \ldots, h_0)$$

и, следовательно,

$$|v^{(q)}(\sigma)| \leqslant \frac{C_2 l}{(1+|\sigma|)^{h_0}} \qquad (q=0, 1, \ldots, k).$$

Далее, произведение $Q(\sigma)v(\sigma)$ удовлетворяет неравенствам

$$|[Q(\sigma)v(\sigma)]^k| \leqslant \sum C_k^q |Q^{(q)}(\sigma)v^{(k-q)}(\sigma)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum C_k^q\cdot C(1+|\sigma|)^r\cdot\frac{C_2 l}{(1+|\sigma|)^{h_0}} \leqslant C_3 l(1+|\sigma|)^{r-h_0}.$$

Отсюда следует, что при $h_0 \geqslant r+2$

$$|x^k[G(x)*u(x)]| \leqslant \int |[Q(\sigma)v(\sigma)^{(k)}]|\,d\sigma \leqslant \leqslant C_3 l \int \frac{d\sigma}{(1+|\sigma|)^2} C_4 l.$$

Таким образом, при $h_0 \geqslant r+2$

$$|\hat{u}(x)| \leqslant \frac{C'l}{(1+|x|)^k},$$

что и требовалось.

2°. Полученный результат можно применить к оценке решения задачи Коши для корректной по Петровскому системы

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x, t) \qquad (1)$$

с финитной начальной функцией $u(x)$. Искомое решение есть свертка

$$u(x, t) = G(x, t) * u(x),$$

где $G(x, t)$ — матрица Грина системы (1). Ее преобразование Фурье есть разрешающая матрица $Q(s, t)$ для системы

$$\frac{dv(s, t)}{dt} = P(s)v(s, t). \qquad (3)$$

Так как система (1) корректна по Петровскому, то матрица-функция $Q(s, t)$ при вещественных $s=\sigma$ растет не быстрее $|\sigma|^h$ с некоторым h.

Род системы (1) по условию неположителен. Применим теорему 4′ п. 6 § 7 гл. IV вып. 2; она приводит к оценке

$$\|Q^{(q)}(\sigma, t)\| \leqslant C_q(1+|\sigma|)^{h-\mu q} \qquad (q=0, 1, \ldots).$$

Пусть r_k — наименьшее из чисел, при которых справедливо неравенство

$$\|Q^{(q)}(\sigma, t)\| \leqslant C(1+|\sigma|)^{r_k} \qquad (q=0, 1, \ldots, k).$$

Предположим далее, что начальная функция $u(x)$ обращается в нуль при $|x| \geqslant 1$ и имеет непрерывные производные до порядка h_0, не превосходящие по абсолютной величине числа l. Тогда, по доказанному, *если $h_0 \geqslant r_k+2$, то для решения $u(x, t)$ выполняется оценка*

$$|u_j(x, t)| \leqslant C'l \frac{1}{(1+|x|)^k}.$$

3°. Пусть теперь начальная функция $u(x)$ удовлетворяет условиям теоремы:

$$|u_j^{(q)}(x)| \leqslant C(1+|x|)^{l-2} \qquad (q=0, 1, \ldots, r_l+2). \qquad (4)$$

Покажем, что *существует решение задачи Коши* (1) — (2), *имеющее также степенной рост при* $|x| \to \infty$. Для простоты снова предположим, что мы имеем дело с одним уравнением.

Рассмотрим функцию $e(x)$, описанную в предыдущем пункте (см. 5° п. 5): она обращается в нуль при $|x| \geqslant \frac{3}{4}$, в единицу при $|x| \leqslant \frac{1}{4}$, всюду заключена между нулем и единицей, имеет непрерывные производные до порядка $h_0 = r_l+1$ и удовлетворяет соотношению

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e(x-\nu) \equiv 1.$$

Так же как и при доказательстве теоремы 2, мы имеем:

$$u(x) = \sum u(x)e(x-\nu) = \sum u_\nu(x-\nu),$$

где $u_\nu(x) = u(x+\nu)e(x)$ обладает непрерывными производными до порядка h_0 и обращается в нуль вне отрезка $|x| \leqslant \frac{3}{4}$. Оценим производные у функции $u_\nu(x)$. По формуле Лейбница

$$|u_\nu^{(q)}(x)| \leqslant \sum C_q^s |u^{(s)}(x+\nu)| K \leqslant C_1\left(1+|\nu|+\frac{3}{4}\right)^{l-2}$$
$$(q=0, 1, \ldots, r_l+1).$$

Отсюда, по доказанному, следует, что решение $u_\nu(x, t)$ задачи Коши с начальной функцией $u_\nu(x)$ допускает оценку

$$|u_\nu(x, t)| \leqslant C' \frac{\left(|\nu|+\frac{7}{4}\right)^{l-2}}{(1+|x|)^l}.$$

Построим функцию

$$u(x, t) = \sum u_\nu(x-\nu, t). \qquad (5)$$

По доказанному,

$$|u_\nu(x-\nu, t)| \leqslant C' \frac{\left(|\nu|+\frac{7}{4}\right)^{l-2}}{(1+|x-\nu|)^l}. \tag{6}$$

Ряд из таких слагаемых сходится при каждом x абсолютно и равномерно на каждом конечном промежутке и представляет, следовательно, непрерывную функцию.

Нам остается показать, что $u(x, t)$ и есть искомое решение.

Оценим члены ряда (5) с тем, чтобы найти общую мажоранту его частных сумм.

Имеет место неравенство

$$|\nu| \leqslant |\nu - x| + |x|,$$

следствием которого являются неравенства

$$1+|\nu| \leqslant 1+|x|+|x-\nu| \leqslant (1+|x|)(1+|x-\nu|)$$

и

$$\frac{1}{1+|x-\nu|} \leqslant \frac{1+|x|}{1+|\nu|}. \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6), находим:

$$|u_\nu(x-\nu, t)| \leqslant C' \frac{\left(\frac{7}{4}+|\nu|\right)^{l-2}(1+|x|)^l}{(1+|\nu|)^l} \leqslant C'' \frac{(1+|x|)^l}{1+\nu^2}. \tag{8}$$

Оценка (8) показывает, что частные суммы ряда (5) и его полная сумма имеют мажоранту

$$C''(1+|x|)^l.$$

Таким образом, функция $u(x, t)$ имеет степенной рост и определяет, следовательно, регулярный функционал в пространстве S; при этом ряд (5) сходится по топологии этого пространства.

Так как все производные элементов матрицы $Q(\sigma, t)$ имеют при $|\sigma| \to \infty$ рост не выше степенного, то эта матрица определяет ограниченный оператор умножения в пространстве S; матрица $G(x, t)$, ее преобразование Фурье, является в пространстве S свертывателем. В силу непрерывности оператора свертки

$$G * u = G * \sum u_\nu(x) = \sum G(x, t) * u_\nu(x) = \sum u_\nu(x, t) = u(x, t).$$

Таким образом, свертка $G * u$ совпадает с функцией $u(x, t)$,

Итак, теорема 3 доказана, пока для случая одного независимого переменного.

Укажем изменения в доказательстве, которые необходимо произвести при переходе к случаю нескольких переменных.

В 1° (и дальше) следует вместо неравенства $h_0 \geqslant r+2$ потребовать выполнения неравенства $h_0 \geqslant r+n+1$.

В 2° вместо теоремы 4′ § 7 гл. IV вып. 2 следует использовать ее n-мерный аналог (§ 9 той же главы); он приведет к оценке

$$\|D^q Q(\sigma, t)\| \leqslant C_q (1+|\sigma|)^{h-\mu|q|}.$$

В 3° следует рассмотреть функцию $e(x_1, \ldots, x_n) = e(x_1) \ldots e(x_n)$, как при доказательстве теоремы 2. Вместо условия (4) следует предположить, что начальная функция $u(x)$ удовлетворяет неравенствам

$$|D^q u_j(x)| \leqslant C(1+|x|)^{l-(n+1)}, \qquad |q| \leqslant r_l + n + 1.$$

Решение $u(x, t)$ по-прежнему будет иметь степенной рост порядка $\leqslant l$.

Итак, теорема 3 полностью доказана.

В качестве примера рассмотрим уравнение Шрёдингера

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = i\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}.$$

Мы имеем $Q(\sigma, t) = e^{-i\sigma^2 t}$, $r_q = q$, $n = 1$; для любого $l > 0$ задача Коши корректна в классе функций $u(x)$, имеющих степенной рост порядка (не выше) $l-2$ вместе с производными до порядка $l+2$.

7. Обратная теорема. В связи с тем, что полученная теорема дает значительно меньший класс корректности, чем в предыдущих случаях, — степенной вместо экспоненциального, — естественно, встает вопрос о том, является ли этот результат наилучшим возможным. Оказывается, что дело обстоит именно так: при $\mu \leqslant 0$, если класс корректности содержит все достаточно гладкие функции некоторого роста, то этот рост, вообще говоря, не выше степенного.

Точно этот факт выражается следующей теоремой (мы ограничиваемся случаем $n = 1$):

Теорема 4. *Предположим, что разрешающая матрица $Q(\sigma, t)$ удовлетворяет оценкам*

$$\|Q^{(q)}(\sigma, t)\| \leqslant C_q (1+|\sigma|)^{r_q}, \tag{1}$$

причем числа r_q нельзя уменьшить и

$$r_0 \leqslant r_1 \leqslant \ldots \leqslant r_k \leqslant \ldots \tag{2}$$

Пусть, далее, задача Коши для рассматриваемой системы корректна в классе всех функций, имеющих на оси $-\infty < x < \infty$ степенной рост порядка не выше l вместе с производными до порядка m. Тогда $m \geqslant r_{l-2} - 2$.

Прежде чем переходить к доказательству, рассмотрим для примера уравнение Шрёдингера

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Здесь двойственное уравнение имеет вид

$$\frac{dv}{dt} = -is^2 v$$

и функция $Q(s, t) = e^{-is^2 t}$ ограничена на вещественной оси. Далее, легко проверить, что

$$\|Q^{(q)}(\sigma, t)\| \leqslant C_q (1+|\sigma|)^q, \qquad q = 0, 1, \ldots$$

Таким образом, в данном случае $r_q = q$. Теорема 4 утверждает, что если задача Коши для уравнения Шрёдингера корректна в классе всех функций степенного порядка роста $\leqslant l$ с производными до порядка m, то $m \geqslant l-4$. Иными словами, в классе всех функций степенного порядка $\leqslant l$ вместе с производными до порядка $\leqslant l-3$ задача Коши заведомо некорректна, каково бы ни было l. Полезно сопоставить этот результат с установленным в конце предыдущего пункта: в классе всех функций степенного порядка роста $\leqslant l$ вместе с производными до порядка $l+4$ задача Коши для уравнения Шрёдингера заведомо корректна.

Неизвестно, корректна или некорректна задача Коши для уравнения Шрёдингера при $l-4 < m < l+4$.

Переходим к доказательству теоремы 4.

Доказательство. Из предположения о корректности задачи Коши в классе функций со степенным ростом l, в частности, вытекает следующее: если дана произвольная функция $u(x)$, обращающаяся в нуль при $|x| \geqslant 1$, обладающая непрерывными производными до порядка m и, кроме того, дана любая монотонная последовательность точек $x_\nu \to \infty$ с $|x_{\nu+1} - x_\nu| \geqslant 2$, то решение задачи Коши с начальной функцией

$$u(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} |x_\nu|^l u(x + x_\nu)$$

пишется по формуле

$$u(x, t) = \sum_1^\infty |x_\nu|^l u(x + x_\nu, t) = \\ = \sum_1^\infty |x_\nu|^l (G(\xi, t), u(x - \xi + x_\nu)),$$

причем этот ряд сходится при каждом x. В частности, при $x = 0$ должен сходиться ряд

$$\sum_1^\infty |x_\nu|^l (G(\xi, t), u(x_\nu - \xi)).$$

Отсюда следует, что для любой функции $u(x)$ указанного вида выражение $\eta^l (G(\xi, t), u(\eta - \xi))$ должно стремиться к нулю при $\eta \to \infty$; в частности, должно иметь место неравенство

$$|\eta^{l-2} (G(\xi, t), u(\eta - \xi))| \leqslant \frac{C}{1+\eta^2}.$$

Переходя к преобразованию Фурье, получаем:

$$\frac{\partial^{l-2}}{\partial \sigma^{l-2}} (Q(\sigma, t) \cdot v(\sigma)) \leqslant C \tag{3}$$

для любой функции $v(\sigma)$, являющейся преобразованием Фурье функций $u(x)$ указанного вида. Функции $v(\sigma)$ аналитически продолжаются в плоскость $s = \sigma + i\tau$ как целые функции порядка 1 и типа 1; с другой стороны, всякая целая функция порядка 1 и типа 1, если она остается абсолютно интегрируемой после умножения на $1, \sigma, \ldots, \sigma^m$, есть преобразование Фурье функции $u(x)$ рассматриваемого класса.

Этими свойствами, например, обладает функция

$$v_0(\sigma) = \frac{\sin^{m+2} \dfrac{i+\sigma}{m+2}}{(i+\sigma)^{m+2}}.$$

Она является, таким образом, преобразованием Фурье некоторой функции $u_0(x)$, обращающейся в нуль при $|x| \geqslant 1$ и обладающей непрерывными производными до порядка m. По доказанному, мы имеем:

$$\left| \frac{\partial^{l-2}}{\partial \sigma^{l-2}} (Q(\sigma, t) \cdot v_0(\sigma)) \right| \leqslant C. \tag{4}$$

Но, с другой стороны,

$$\frac{\partial^{l-2}}{\partial \sigma^{l-2}} (Qv_0) = Q^{(l-2)} v_0 + C_1 Q^{(l-3)} v_0' + \ldots$$

В первом слагаемом первый множитель возрастает со степенным порядком r_{l-2}, второй убывает со степенным порядком $m+2$.

В общем получается степенной порядок роста $r_{l-2}-(m+2)$. Следующие слагаемые имеют меньший порядок роста. Но неравенство (3) показывает, что получающееся выражение в действительности ограничено. Отсюда вытекает, что $r_{l-2} \leqslant m+2$; таким образом, $m \geqslant r_{l-2}-2$, что и утверждалось.

§ 5. О РЕШЕНИЯХ НЕКОРРЕКТНЫХ СИСТЕМ

1. Введение. Система уравнений

$$\frac{\partial u_j(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{m} P_{jk}\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u_k(x, t) \tag{1}$$

называется *некорректной*, если функция $\Lambda(s) = \max\limits_j \operatorname{Re} \lambda_j(s)$ фактически имеет при вещественных $s=\sigma$ степенной рост: хотя бы для одной последовательности $\sigma_n \to \infty$

$$\Lambda(\sigma_n) \geqslant C |\sigma_n|^{\rho}, \qquad C > 0, \quad \rho > 0. \tag{2}$$

В этом случае матрица-функция $Q(\sigma, t)$ имеет на оси σ рост выше любой степени $|\sigma|$. Как мы видели в § 4, задача Коши для системы (1) не является в этом случае корректной для начальных функций, имеющих конечный порядок гладкости. Можно рассчитывать на то, что удастся получить решение (в виде функции), непрерывно зависящее от начальных условий, лишь если потребовать от начальных функций

гладкости бесконечного порядка. Здесь существенную роль будет играть оценка функции $\Lambda(\sigma)$ сверху. Именно, если выполняется неравенство

$$\Lambda(\sigma) < C|\sigma|^h + C_1$$

с $h<1$, то решение будет существовать для бесконечно дифференцируемых начальных условий с некоторыми ограничениями на рост производных, тем более жесткими, чем больше h; когда h становится равным 1 и более, указанные ограничения приводят к требованию аналитичности начальных функций, и дальнейший рост h приводит к все более сильным ограничениям на порядок роста начальных функций в плоскости $x+iy$.

2. Условно корректные системы. Система уравнений (1) п. 1 называется условно корректной, если функция $\Lambda(s) = \max\limits_j \operatorname{Re} \lambda_j(\sigma)$ удовлетворяет неравенству

$$\Lambda(\sigma) \leqslant C|\sigma|^h + C_1, \qquad h < 1.$$

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ia \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 = as;$$

его корни

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{as}.$$

Функция $\Lambda(s)$ на вещественной оси ($s=\sigma$) растет как $\sqrt{|\sigma|}$, по крайней мере, на одной из полуосей. Поэтому уравнение принадлежит к числу условно корректных.

Как и ранее, мы должны проанализировать вопрос о том, когда свертка

$$G(x, t) * u_0(x)$$

приводит к обычной функции. Здесь $G(x, t)$ есть обратное преобразование Фурье матрицы-функции $Q(s, t)$ — разрешающей матрицы системы, двойственной к системе (1) п. 1. Выясним свойства функции $G(x, t)$.

Ограничимся снова случаем одного независимого переменного.

В силу теоремы 1 § 7 гл. IV вып. 2, существует область H, определяемая неравенством

$$|\tau| \leqslant K(1+|\sigma|)^{\mu},$$

в которой выполняется неравенство

$$\Lambda(s) \leqslant C_2 |\sigma|^h + C_3.$$

В области H функция $Q(s, t)$ удовлетворяет неравенству

$$\|Q(s, t)\| \leqslant C_4 e^{b|s|^h}.$$

Нас будет интересовать наибольшее возможное значение μ. Если $h < p_0$, то μ не может превосходить 1; действительно, в противном случае на каждом луче s-плоскости, выходящем из начала координат, кроме луча $\sigma = 0$, функция $\Lambda(s)$ имела бы степенной рост порядка (не выше) h, а функция $Q(s, t)$ имела бы экспоненциальный рост порядка (не выше) h, что невозможно для целой функции порядка p_0.

Для условно корректных систем с положительным родом $\mu > 0$ имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Для условно корректной системы*

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) \tag{1}$$

с заданными параметрами h, $\mu > 0$, p_0 *и* $p_1 = \frac{p_0}{p_0 - \mu}$ *задача Коши с начальными данными*

$$u(x, 0) = u(x) \tag{2}$$

разрешима для всякой функции $u(x)$, *удовлетворяющей условиям*

$$\left.\begin{gathered} |u^{(q)}(x)| \leqslant CA^q q^{q\alpha_1} e^{a|x|^{\bar p}} \\ \left(1 < \alpha_1 < \frac{1}{h};\ q = 0, 1, 2, \ldots;\ \bar p < p_1\right). \end{gathered}\right\} \tag{3}$$

Доказательство. В пространстве $S_\beta^{\alpha_1}$ $\left(\beta > 1 - \frac{\mu}{p_0}\right)$ можно построить функцию $e(x)$, равную 0 при $|x| > \frac{3}{4}$ и 1

при $|x| < \frac{1}{4}$, всюду заключенную между 0 и 1 и удовлетворяющую условию

$$\sum_{-\infty}^{\infty} e(x - \nu) \equiv 1.$$

Можно написать разложение начальной функции $u(x)$ на финитные функции

$$u(x) = \sum u(x) e(x - \nu) = \sum_{-\infty}^{\infty} u_\nu(x - \nu),$$

где $u_\nu(x) = u(x + \nu) e(x)$. Оценим рост q-й производной функции $u_\nu(x)$:

$$|u_\nu^{(q)}(x)| \leqslant \sum C_q^j |u^{(j)}(x+\nu) e^{(q-j)}(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=0}^{q} C_q^j \cdot C \cdot A^j j^{j\alpha_1} e^{q(1+|\nu|)^{\bar p}} C' A_1^{q-j} (q-j)^{(q-j)\alpha_1} \leqslant$$
$$\leqslant C'' A_2^q q^{q\alpha_1} e^{a(1+|\nu|)^{\bar p}}.$$

Таким образом, функция $u_\nu(x)$ принадлежит к пространству $S_{0,1}^{\alpha_1}$. Решение задачи Коши для начальной функции $u_\nu(x)$ пишется, как всегда, по формуле $u_\nu(x, t) = G(x, t) * u_\nu(x)$, где $G(x, t)$ — матрица Грина системы (1). Мы покажем, что $u_\nu(x, t)$ есть настоящая функция и что сходится ряд

$$u(x, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} u_\nu(x - \nu, t),$$

который и будет представлять собой искомое решение задачи Коши.

Для доказательства рассмотрим отдельно выражение

$$G(x, t) * \varphi(x), \quad \varphi(x) \in S_{0,1}^{\alpha_1}.$$

Эта свертка имеет смысл, так как $G(x, t)$ — свертыватель в пространстве $S_\beta^{\alpha_1} \supset S_0^{\alpha_1}$ $\left(\text{поскольку разрешающая матрица } Q(\sigma, t) \text{ — мультипликатор в пространстве } S_{\alpha_1}^{\beta},\ \beta = \frac{1}{p_1}\right)$, и результатом является функция, принадлежащая пространству $S_\beta^{\alpha_1}$. Оценим ее. Свертыватель $G(x, t)$, как ограниченный оператор, переводит всякое ограниченное множество в пространстве $S_\beta^{\alpha_1}$ снова в ограниченное множество. В частности, совокупность функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|\varphi^{(q)}(x)| \leqslant CB^q q^{q\alpha_1}$$

и обращающихся в нуль вне фиксированного отрезка, ограничена в $S_\beta^{\alpha_1}$, поэтому все функции

$$\psi(x) = G(x, t) * \varphi(x)$$

удовлетворяют неравенствам

$$|\psi(x)| \leqslant C_1 e^{-b|x|^{p_1}}$$

с фиксированными C_1 и b. При этом постоянную C_1 можно считать пропорциональной постоянной C. Если положить $\varphi(x) = u_\nu(x)$, то постоянная B фиксирована ($= A_2$), постоянная C равна $C'' e^{\alpha(1+|\nu|)^{\bar{p}}}$, и мы получаем оценку

$$|G(x, t) * u_\nu(x)| \leqslant C_2 e^{\alpha(1+|\nu|)^{\bar{p}}} e^{-b|x|^{p_1}}.$$

Далее,

$$|G(x, t) * u_\nu(x-\nu)| \leqslant C_2 e^{\alpha(1+|\nu|)^{\bar{p}} - b|x-\nu|^{p_1}}. \qquad (4)$$

Очевидно, что ряд с членами (4) сходится абсолютно и равномерно на каждом конечном отрезке.

Так же, как и в § 4, легко проверяется, что частные суммы этого ряда имеют общую мажоранту вида

$$Ce^{a_1|x|^{p_1}}.$$

Следовательно, ряд сходится и в смысле обобщенных функций над пространством $S_\beta^{\alpha_1}$. Отсюда в силу непрерывности оператора свертки

$$G(x, t) * u(x) = G(x, t) * \sum u_\nu(x-\nu) = \\ = \sum G(x, t) * u_\nu(x-\nu) = u(x, t).$$

Итак, искомое решение $G(x, t) * u(x)$ есть обычная функция $u(x, t)$, что и утверждалось.

Пусть теперь $\mu \leqslant 0$. В этом случае матрица $Q(\sigma, t)$ согласно § 7 гл. IV вып. 2 удовлетворяет неравенствам

$$\|Q^{(q)}(\sigma, t)\| \leqslant Cq^{q\left(1-\frac{\mu}{h}\right)} e^{b|\sigma|^h} \quad (q = 0, 1, 2, \ldots).$$

Дальнейшее построение проходит по схеме предыдущего, с заменой всюду p_1 на h. В итоге мы приходим к теореме:

Теорема 2. *В условно корректном случае при $h < 1$, $\mu \leqslant 0$ классом корректности задачи Коши* (1) — (2) *является класс функций $u(x)$, удовлетворяющих неравенствам вида*

$$|u^{(q)}(x)| \leqslant CA^q q^{\alpha_1 q} e^{b|x|^{h/(h-\mu)}} \quad (q = 0, 1, 2, \ldots).$$

Можно отнести уравнение Шрёдингера к условно корректному случаю, считая $p_0 = 2$, $-1 < \mu < 0$, $h = 1 + \mu$; тогда класс корректности состоит из бесконечно дифференцируемых функций, удовлетворяющих неравенствам

$$|u^{(q)}(x)| \leqslant CA^q q^{\frac{q}{1+\mu}} e^{b|x|^{1+\mu}}.$$

Получается система классов корректности, не вложенных один в другой.

3. Корректность в области аналитических функций.

В этом пункте мы выясним вопрос о классе корректности задачи Коши для системы

$$\frac{\partial u_j(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^m P_{jk}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u_k(x, t) \quad (j = 1, \ldots, m) \qquad (1)$$

без всяких специальных предположений о росте функций $Q(s, t)$ при вещественных $s = \sigma$. Естественно, что класс корректности будет весьма узким; оказывается, что в общем случае он содержит лишь целые аналитические функции, рост которых не превышает фиксированных пределов.

Мы начнем с некоторых предложений, обобщающих теоремы § 4 гл. III вып. 2 на случай функций $f(z)$ любого конечного порядка роста.

Ограничимся случаем одного независимого переменного.

Пусть $f(z)$ — целая аналитическая функция порядка роста $\leqslant \rho$ и типа $\leqslant b^\rho$; это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ удовлетворяются неравенства

$$|f(z)| \leqslant C_\varepsilon e^{|(b+\varepsilon)|z||^\rho}.$$

Обозначим через $З_{\rho, b}$ совокупность всех целых функций порядка ρ и типа b^{ρ}. Эта совокупность, очевидно, линейна. Введем в нее следующее понятие предельного перехода: функции $f_{\nu}(z) \in З_{\rho, b}$, по определению, стремятся к нулю при $\nu \to \infty$, если они равномерно сходятся к нулю в каждой конечной области и, кроме того, допускают общую мажоранту вида

$$Ce^{(b\,|z|)^{\rho}}.$$

Функция $f(z) \in З_{\rho, b}$ определяет по формуле

$$(f, \varphi) = \int \overline{f(x)}\, \varphi(x)\, dx$$

линейный непрерывный функционал на пространстве K финитных бесконечно дифференцируемых функций. Найдем преобразование Фурье $\widetilde{f} = F(f)$ функционала f. Функционал $\widetilde{f}$ определен на пространстве Z, двойственном к K. Как и в § 4 гл. III вып. 2, результат можно получить, применяя оператор F к каждому члену ряда Тейлора

$$f(z) = \Sigma a_{\nu} z^{\nu}, \tag{2}$$

так что для любой $\psi(s) \in Z$

$$(F(f), \psi) = (\Sigma a_{\nu} F(z^{\nu}), \psi) = \left(\Sigma a_{\nu} \left(-i \frac{\partial}{\partial \sigma}\right)^{\nu} \delta(\sigma), \psi(\sigma)\right) = \\ = \Sigma (-i)\, a_{\nu} \frac{\partial^{\nu} \varphi(0)}{\partial \sigma^{\nu}}. \tag{3}$$

Ряд заведомо сходится для любой $\psi(s) \in Z$. Но можно утверждать, что *он сходится и для любой целой аналитической функции порядка роста* ρ' *и типа меньше* $\left(\frac{1}{b_1}\right)^{\rho'}$ $\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = 1;\ b_1 \text{ будет определено далее}\right)$. Действительно, для любой такой функции

$$g(s) = \sum \frac{s^{\nu} g^{(\nu)}(0)}{\nu!} \tag{4}$$

значения производных в нулевой точке удовлетворяют неравенствам

$$|g^{(\nu)}(0)| \leqslant C\nu! \frac{1}{b_1^{\nu}} \left(\frac{e\rho'}{\nu}\right)^{\nu/\rho'}, \tag{5}$$

в то время как тейлоровские коэффициенты самой функции $f(s)$ удовлетворяют неравенствам

$$|a_{\nu}| \leqslant AB^{\nu} \left(\frac{e\rho}{\nu}\right)^{\nu/\rho}. \tag{6}$$

Поэтому ряд (3) мажорируется рядом

$$AC \sum \left(\frac{b}{b_1}\right)^{\nu} \left(\frac{e\rho}{\nu}\right)^{\nu/\rho} \left(\frac{e\rho'}{\nu}\right)^{\nu/\rho'} \nu! = AC \sum \frac{e^{\nu}\nu!}{\nu^{\nu}} \left(\frac{b}{b_1}\right)^{\nu} \left(\rho^{1/\rho} \rho'^{1/\rho'}\right)^{\nu}.$$

Этот ряд сходится при условии

$$b_1 > b\rho^{1/\rho} \rho'^{1/\rho'},$$

что дает нам оценку величины b_1. Таким образом, $F(f)$ есть функционал на пространстве $З_{\rho_1, b_1}$.

Этот функционал будет и непрерывным функционалом на пространстве $З_{\rho_1, b_1}$. Действительно, если последовательность функций $\psi_{\nu} \in З_{\rho_1, b_1}$ сходится к нулю в указанном выше смысле, то постоянная C в неравенстве (6) зависит от ν и при $\nu \to \infty$ стремится к нулю, откуда и $(F(f), \psi_{\nu}) \to 0$.

Предположим, что последовательность функций $f_{\nu}(z) \in З_{\rho, b}$ стремится к нулю по сходимости пространства $З_{\rho, b}$. Мы утверждаем, что тогда последовательность функционалов $F(f_{\nu})$ стремится к нулю в смысле сходимости пространства $З'_{\rho_1, b_1}$, т. е. для любой функции $\psi(s) \in З_{\rho_1, b_1}$

$$\lim_{\nu \to \infty} (F(f_{\nu}), \psi) = 0.$$

Действительно, в указанных предположениях постоянная A в неравенстве (6) зависит от ν и при $\nu \to \infty$ стремится к нулю; отсюда и $(F(f_{\nu}), \psi) \to 0$, что и требуется.

Отметим далее очевидную формулу

$$(F(zf(z)), \psi(s)) = (F(f), i\psi'(s)),$$

откуда вообще вытекает для любого многочлена

$$(F(P(z) f(z)), \psi(s)) = \left(F(f), P\left(i \frac{\partial}{\partial s}\right) \psi(s)\right). \tag{7}$$

Теорема 3. *Если разрешающая матрица* $Q(s, t)$ *имеет порядок роста* $\leqslant p_0$ (> 1) *и тип* $\leqslant b^{p_0}$, *то задача Коши для системы* (1) *имеет при достаточно малых* t *решение для любой начальной функции* $u(x)$, *которая* *может быть продолжена на всю комплексную плоскость $z = x + iy$ так, что при этом получается целая аналитическая функция порядка роста p_0' с типом $b_1^{p'}$.*

Доказательство. Обратное преобразование Фурье $G(x, t)$ матрицы $Q(s, t)$, по доказанному, есть функционал, который может быть распространен на все функции порядка p_0' с типом $b_1^{p'}$. В частности, имеет смысл выражение

$$(G(\xi, t), u(x-\xi)).$$

Покажем, что эта функция от x и t является (классическим) решением системы (1).

При $t = 0$, как обычно, получаем:

$$(G(\xi, 0), u(x-\xi)) = (\delta(\xi), u(x-\xi)) = u(x).$$

Дифференцирование по t функции $Q(s, t)$ есть непрерывная операция в пространстве $\mathfrak{Z}_{p, b}$. Отсюда следует, в соответствии со сказанным выше, что дифференцирование по t функционала $G(x, t)$ есть непрерывная операция в пространстве $\mathfrak{Z}'_{p_1, b_1}$, так что

$$\frac{\partial}{\partial t}(G(\xi, t), u(x-\xi)) = \left(\frac{\partial G(\xi, t)}{\partial t}, u(x-\xi)\right).$$

Далее мы имеем, используя (7):

$$\left(\frac{\partial G(\xi, t)}{\partial t}, u(x-\xi)\right) = \left(F^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial t} Q(s, t)\right), u(x-\xi)\right) =$$
$$= (F^{-1}(P(s) Q(s, t)), u(x-\xi)) =$$
$$= \left(P\left(i\frac{\partial}{\partial \xi}\right) F^{-1}(Q(s, t)), u(x-\xi)\right) =$$
$$= \left(P\left(i\frac{\partial}{\partial \xi}\right) G(\xi, t), u(x-\xi)\right) = \left(G(\xi, t), P\left(-i\frac{\partial}{\partial \xi}\right) u(x-\xi)\right) =$$
$$= P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)(G(\xi, t), u(x-\xi)).$$

Таким образом, $u(x, t) = (G(\xi, t), u(x-\xi))$ действительно есть искомое решение задачи Коши. Теорема доказана.

Можно было бы без труда перенести ее и на случай n независимых переменных.

Следующий пример показывает, что условие теоремы 3 в общем случае не может быть ослаблено.

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

с финитной начальной функцией $u_0(x)$, равной нулю вне отрезка $(-a, a)$. Решение этого уравнения

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-a}^{a} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} u_0(\xi)\, d\xi \tag{8}$$

является, как видно из формулы (8), при любом $t > 0$ целой аналитической функцией от x 2-го порядка роста и типа, как угодно близкого к $\frac{1}{4t}$ (при достаточно малом a). Для определенности положим $t = 1$; рассмотрим обратное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{9}$$

с начальным условием $v(x, 0) = u(x, 1)$. Очевидно, что при $0 \leqslant t \leqslant 1$ решением этого уравнения будет $v(x, t) = u(x, 1-t)$. При $t \to 1$ будем иметь $v(x, t) \to u_0(x)$. *При $t > 1$ решение уравнения* (9) *уже не будет функцией*; в противном случае мы снова решали бы прямое уравнение, начиная с того значения $\tau_0 > 1$, для которого решение уравнения (9) есть функция, приняв ее за начальную функцию; функция $u_0(x)$ была бы решением прямого уравнения теплопроводности, и следовательно, была бы аналитической функцией, что противоречит ее финитности. Итак, задача Коши для уравнения (9) с начальной функцией $u(x, 1)$ уже не имеет решения в виде функции для $t > 1$.

ГЛАВА IV

РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ОБОБЩЕННЫМ СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема о разложении по собственным элементам возникает в самых различных областях математики. Задача о приведении поверхности 2-го порядка к главным осям, или, что то же, задача о приведении квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием есть одна из простейших форм этой проблемы.

Уже на этом этапе с квадратичной формой $A(x, x)$ и метрикой естественно связывается симметричный линейный оператор по формуле

$$A(x, x) = (Ax, x);$$

векторы главных направлений на поверхности $A(x, x) = 1$ совпадают с собственными векторами оператора A, т. е. с n попарно ортогональными векторами e_i, действие оператора A на которые выражается особенно простыми формулами:

$$Ae_j = \lambda_j e_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Числа λ_j называются собственными значениями оператора A. Если $f = \sum_{j=1}^{n} f_j e_j$ — разложение заданного вектора f по базису из векторов e_j, то действие оператора A на вектор f описывается формулой

$$Af = A\left(\sum_{j=1}^{n} f_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} f_j \lambda_j e_j, \tag{1}$$

а значение квадратичной формы $A(f, f) = (Af, f)$ — формулой

$$A(f, f) = \sum_{j=1}^{n} f_j \lambda_j^2. \tag{2}$$

Теорема о существовании полного ортогонального базиса из таких собственных векторов для всякого симметричного оператора A в n-мерном евклидовом пространстве есть один из центральных результатов линейной алгебры.

Ближайшим бесконечномерным аналогом n-мерных квадратичных форм являются интегральные формы вида

$$\int_a^b \int_a^b K(x, s) f(x) f(s)\, dx\, ds,$$

отвечающие в механике системам с бесконечным числом степеней свободы. (Пример: неоднородная струна.) Приведение этих форм к каноническому виду связано с построением полной системы собственных функций для интегрального симметричного оператора

$$A\varphi(x) = \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds,$$

где $K(x, s) = K(s, x)$. Такое построение было фактически проведено Гильбертом в 1906 г.

Для каждого интегрального оператора указанного вида с квадратично интегрируемым в области $a \leqslant s,\ x \leqslant b$ ядром $K(x, s)$ существует полная ортогональная система собственных функций — т. е. функций $e_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots,)$, удовлетворяющих условиям

$$\int_a^b K(x, s)\, e_j(s)\, ds = \lambda_j e_j(x), \qquad \int_a^b e_i(s)\, e_j(s)\, ds = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Если $f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j e_j(x)$ — разложение заданной функции по системе собственных функций $e_j(x)$, то действие оператора A на функцию f можно записать формулой

$$Af = A\left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j e_j(x)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \lambda_j e_j(x), \tag{3}$$

а значение квадратичной формы $(Af,\ f)$ — формулой

$$(Af,\ f) \equiv \int_a^b K(x,\ s) f(x) f(s)\, ds = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \lambda_j^2. \qquad (4)$$

Числа λ_j по-прежнему называются собственными значениями оператора A.

Впоследствии Ф. Рисс дал абстрактную формулировку теоремы Гильберта, которая вместе с тем указала и границы для применимости его метода. Оказалось, что метод применим лишь к очень узкому классу самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, которые называются вполне непрерывными; это такие операторы, которые переводят ограниченное множество в компактное; их можно характеризовать еще тем, что они являются пределами (по норме) операторов, отображающих все пространство в конечномерное подпространство.

Метод разделения переменных в линейных дифференциальных уравнениях с частными производными также приводит к проблеме о собственных значениях и собственных векторах, на этот раз для дифференциального оператора, не являющегося ограниченным. Если в хороших случаях — в конечной области с правильными коэффициентами — решение этой задачи приводится через функцию Грина к интегральному уравнению с симметричным ядром, то в задачах более общего типа такое сведе́ние становится невозможным. Здесь проблему о разложении нужно изучать самостоятельно. Заметим, что именно к таким проблемам приводят основные задачи квантовой механики. Таким образом, на очередь встает задача о построении полной системы собственных функций для общего самосопряженного оператора.

Хорошо известно, что самые простые не вполне непрерывные самосопряженные операторы в функциональном гильбертовом пространстве, такие, как умножение на x или дифференцирование, не имеют собственных векторов.

Полезно разобраться в причинах отсутствия у этих операторов собственных функций.

Рассмотрим, например, самосопряженный оператор умножения на x в пространстве $L_2(a,\ b)$ функций, суммируемых с квадратом на отрезке $[a,\ b]$. Предположим, что для некоторой функции $y(x)$ выполняется соотношение

$$xy(x) = \lambda y(x). \qquad (5)$$

Это означает, что $(x-\lambda)\, y(x) = 0$, откуда вытекает, что функция $y(x)$ должна обращаться в нуль при $x \neq \lambda$ и отличной от нуля может быть лишь в одной точке $x=\lambda$. Но в пространстве $L_2(a,\ b)$ нет ненулевого вектора, обладающего такими свойствами.

Рассмотрим теперь) самосопряженный оператор $i\frac{d}{dx}$ в пространстве $L_2(-\infty,\ \infty$. Собственные функции этого оператора должны удовлетворять уравнению

$$i\,\frac{dy}{dx} = \lambda y. \qquad (6)$$

Но решениями этого уравнения являются только функции вида

$$y = Ce^{i\lambda x},$$

которые снова не принадлежат к рассматриваемому пространству.

Стремясь остаться в пределах данного гильбертова пространства H, исследователи стали искать других, хотя бы более слабых формулировок теоремы о разложении по собственным функциям. Первая подобная формулировка, по существу, была указана Д. Гильбертом в 1911 г. для случая самосопряженного ограниченного оператора A. (Таким оператором, в частности, является оператор умножения на x в пространстве $L_2(a,\ b)$.)

А именно, пусть A — ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H:

$$(Ax,\ y) = (x,\ Ay)$$

для любых x, y из H. Оказывается, что для каждого интервала $\Delta = (\alpha,\ \beta)$ вещественной оси можно указать максимальное инвариантное относительно оператора A подпространство H_Δ, в котором форма $(Ax,\ x)$ заключена в границах $(\alpha,\ \beta)$, когда $\|x\| = 1$. Отсюда следует, что оператор A в подпространстве H_Δ совершает преобразование, отличающееся от преобразования умножения на α по норме не более чем на $\beta-\alpha$. Оператор проектирования на подпространство H_Δ обозначают через $E(\Delta)$; $E(\Delta_{-\infty}^{\lambda})$, где $\Delta_{-\infty}^{\lambda}$ — интервал $(-\infty,\ \lambda)$ обозначают через E_λ. Совокупность операторов $E(\Delta)$ называют спектральным семейством оператора A. Если, в частности, A — вполне непрерывный оператор, например интегральный оператор, рассмотренный выше, то $E(\Delta)$ есть оператор проектирования на подпространство, натянутое на собственные векторы с собственными значениями, лежащими в интервале Δ. В общем случае отрезок $[-\|A\|, \|A\|]$ вещественной оси для любого $\varepsilon > 0$ можно разложить в сумму конечного числа $N \leqslant 2\frac{\|A\|}{\varepsilon}$ интервалов Δ_j $(j = 1, 2, \ldots, N)$ длины $< \varepsilon$; вместе с этим пространство H разлагается в ортогональную сумму подпространств H_{Δ_j}, в каждом из которых оператор A совершает преобразование, отличающееся от преобразования умножения на λ_j по норме не больше чем на ε. Отсюда следует, что оператор A отличается по норме меньше чем на ε от оператора

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j E(\Delta_j).$$

При $\varepsilon \to 0$ эта сумма стремится к пределу, который обозначается через $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE_\lambda$ *)

$$A = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE_\lambda. \tag{7}$$

Равенство (7) имеет следующий точный смысл:

$$(Af, g) = \int \lambda d(E_\lambda f, g) \quad \text{для любых } f, g \in H. \tag{8}$$

Это и есть «спектральное разложение» оператора, заменяющее разложение по собственным векторам для конечномерного или вполне непрерывного оператора A.

Полагая $f = g$, получаем разложение квадратичной формы (Af, f):

$$(Af, f) = \int \lambda d(E_\lambda f, f) \tag{9}$$

— формула, обобщающая формулы (2) и (4).

*) Фактически интегрирование производится по интервалу $[-\|A\|, \|A\|]$.

В дальнейшем фон-Нейман перенес результаты Гильберта на наиболее важный случай неограниченного самосопряженного оператора A, определенного на некотором плотном в H множестве H_A. Напомним определение (неограниченного) самосопряженного оператора. Билинейная форма (Af, g), вообще говоря, не является при фиксированном g линейным непрерывным функционалом относительно f. Если при некотором g она является таким функционалом, то $(Af, g) = (f, g_1)$ при некотором g_1 из H. Тем самым на таких g определен некоторый оператор, переводящий g в g_1; он называется *сопряженным к* A и обозначается через A^*. Таким образом,

$$(Af, g) = (f, A^*g).$$

Если оператор A^* определен на области определения оператора A и совпадает с ним на ней, то оператор A называется *симметричным*. Если, кроме того, области определения операторов A и A^* совпадают, то оператор A называется самосопряженным. Для самосопряженных операторов оказалось возможным построить инвариантные подпространства H_Δ с указанными свойствами; но роль отрезка $[-\|A\|, \|A\|]$ теперь стала играть вся вещественная ось.

В случае неограниченных операторов различие между симметричными и самосопряженными операторами существенно. Так, например, оператор $i\frac{d}{dx}$, определенный на отрезке $[a, b]$ на функциях $y(x)$, равных нулю в точках a и b (и интегрируемых в квадрате вместе с производной), является симметричным, но не является самосопряженным. При таких краевых условиях у этого оператора нет ни одной собственной функции. Если же заменить краевое условие $y(a) = y(b) = 0$ более общим условием периодичности: $y(a) = y(b)$, то оператор $i\frac{d}{dx}$ уже будет самосопряженным, и у него есть полная система собственных функций.

Вопрос о том, когда данный симметричный оператор, если он не самосопряжен, может быть расширен до самосопряженного, — как обстоит дело в рассмотренном примере, — имеет большое значение. Приведем здесь два достаточных условия, каждое из которых обеспечивает возможность такого расширения *):

1) Оператор A — *вещественный*; это означает, что он переводит вещественные функции — в вещественные, а комплексно-сопряженные — в комплексно-сопряженные.

*) Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, ИЛ., М., 1954.

2) Оператор A — *полуограниченный*; это означает, что для всех f из области определения A справедливо неравенство

$$(Af, f) \geqslant \alpha (f, f) \quad \text{(полуограниченность снизу).}$$

Наибольшее допустимое значение числа α называют точной нижней гранью оператора A. Оказывается, что полуограниченный симметричный оператор можно расширить до самосопряженного, который будет также полуограничен и будет иметь ту же точную нижнюю грань.

Все эти блестящие результаты, однако, дают лишь некоторую замену спектрального разложения, обусловленную желанием не выходить за пределы первоначального гильбертова пространства.

Действительно, как показывают разобранные выше примеры операторов умножения на x и дифференцирования (на всей прямой), не выходя за пределы гильбертова пространства, вообще говоря, нельзя получить настоящих собственных функций. Применение же приведенных выше общих результатов, например, к дифференциальным операторам, несмотря на кажущуюся законченность абстрактной формулировки, приводит к ряду трудностей.

Но есть и другая возможность. Она подсказывается теми же примерами операторов умножения на x и дифференцирования. В этих примерах ведь есть собственные функции, но только за пределами исходного гильбертова пространства; для оператора умножения на x это дельта-функция $\delta(x-\lambda)$, для оператора дифференцирования — функция $e^{i\lambda x}$. Их можно построить и на основе рассмотрения самого исходного гильбертова пространства как функционалы над некоторым основным пространством — подпространством гильбертова пространства, — хотя бы над пространством K финитных бесконечно дифференцируемых функций.

Можно указать даже элементарную процедуру, которая приведет от спектральной функции E_λ к искомым обобщенным собственным функциям.

Мы указали, что в пространстве, на которое проектирует оператор $E(\Delta)$, отвечающий интервалу $\Delta = (\alpha, \beta)$, квадратичная форма (Ax, x) при $|x| \leqslant 1$ заключена в границах

$$\alpha \leqslant (Ax, x) \leqslant \beta.$$

Оператор A переводит пространство H_Δ в себя. Введем оператор $A - \alpha E$, который также, конечно, переводит пространство H_Δ в себя, и оценим его норму. Так как для симметричных операторов норму можно находить как верхнюю грань значений абсолютной величины квадратичной формы, то в данном случае

$$\|A - \alpha E\| = \sup_{(x,x)=1} ((A-\alpha E)x, x) = \sup_{(x,x)=1} ((Ax, x) - \alpha(x, x)) = \beta - \alpha.$$

Поэтому для любого единичного вектора $x \in H_\Delta$

$$\|(A-\alpha E)x\| \leqslant \beta - \alpha.$$

Отсюда

$$Ax = \alpha x + \varepsilon, \qquad \|\varepsilon\| \leqslant \beta - \alpha.$$

Мы видим, что каждый вектор пространства H_Δ есть «почти» собственный вектор, отвечающий собственному значению α с ошибкой, не превосходящей $\beta - \alpha$. Чем меньше длина интервала (α, β), тем менее уклоняется оператор Ax для $x \in H_\Delta$ от вектора αx. Ясно, что всякий истинный собственный вектор с собственным значением α лежит в пересечении всех пространств H_Δ при Δ, стягивающемся к точке α.

Но в гильбертовом пространстве пересечение этих подпространств может не иметь ни одного общего элемента, кроме нуля. В таком случае и не будет истинного собственного вектора с собственным значением α.

Мы можем, тем не менее, употребить этот прием для построения собственного вектора в более широком пространстве. Если фиксировать вектор e, то можно образовать вектор $E(\Delta)e = (E_\beta - E_\alpha)e$, заведомо лежащий в подпространстве $H(\Delta)$; мы нормируем его, разделив на некоторое число $\sigma(\Delta)$, и затем устремим число β к α.

Операция, которая будет происходить с векторами $e_\lambda = E_\lambda e$, будет совпадать с операцией его дифференцирования по параметру λ (при $\lambda = \alpha$) по некоторой мере σ_λ. Разумеется, нужно прежде всего выяснить, в каких пространствах возможна такая операция. Поэтому мы начинаем наше изложение с проблемы дифференцирования абстрактных функций, зависящих от параметра λ. Оказывается, что эта операция возможна, — но только не в нормированных или гильбертовых пространствах, а в пространствах обобщенных функций. Таким образом, пространства обобщенных функций оказываются наиболее удобными для спектрального разложения дифференциальных операторов.

Далее мы покажем, что полученные обобщенные собственные функции $\chi_\lambda = \frac{dE_\lambda e}{d\sigma_\lambda}$ образуют полную систему, и выясним их природу. Во многих случаях, например для уравнения Штурма — Лиувилля, для эллиптических уравнений, это будут обычные функции; мы получим на этом пути известные спектральные разложения, найденные Ф. Броудером, Г. Вейлем, Л. Гордингом, К. Кодаира, М. Г. Крейном, Ф. Маутнером, и новые разложения. Наконец, мы изучим асимптотическое поведение полученных собственных функций; при этом выяснится, что для большого числа операторов, именно тех, которые допускают обращение в интегральной форме, почти все из этих собственных функций будут ограниченными, как классические собственные функции $y_1 = \sin \lambda x$, $y_2 = \cos \lambda x$ для оператора y''. Для неэллиптических дифференциальных операторов собственные функции уже оказываются, вообще говоря, обобщенными функциями.

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛА С СИЛЬНО ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИЕЙ

1. Функционалы в нормированном пространстве. Рассмотрим полное нормированное пространство Φ и сопряженное пространство Φ' линейных непрерывных функционалов — также полное нормированное пространство.

Функционал f_λ, зависящий от параметра λ, изменяющегося в промежутке $a \leqslant \lambda \leqslant b$, имеет, по определению, *сильно ограниченную вариацию*, если для любого разбиения интервала $a \leqslant \lambda \leqslant b$ на части

$$a = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n = b$$

имеет место неравенство

$$\sum \|f_{\lambda_{j+1}} - f_{\lambda_j}\| < C, \tag{1}$$

где C — постоянная.

Если фиксировать элемент φ основного пространства Φ, то функционалу f_λ отвечает числовая функция от λ, равная

(f_λ, φ). Эта функция обладает ограниченным изменением в обычном смысле, поскольку

$$\sum |(f_{\lambda_{j+1}}, \varphi) - (f_{\lambda_j}, \varphi)| = \\ = \sum |(f_{\lambda_{j+1}} - f_{\lambda_j}, \varphi)| \leqslant \sum \|f_{\lambda_{j+1}} - f_{\lambda_j}\| \cdot \|\varphi\|. \tag{2}$$

Известно, что всякая функция с ограниченным изменением имеет почти всюду производную *). В частности, и функция (f_λ, φ) имеет производную по λ всюду, кроме, возможно, множества значений λ меры нуль. Это исключительное множество меры нуль зависит, вообще говоря, от взятого основного элемента φ. Возникает вопрос, можно ли исключительное множество меры нуль выбрать одним и тем же для всех элементов φ; положительный ответ на этот вопрос дал бы возможность утверждать существование почти при всех λ функционала g_λ, являющегося слабой производной по λ от функционала f_λ:

$$g_\lambda = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{f_{\lambda+\Delta\lambda} - f_\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{df_\lambda}{d\lambda}. \tag{3}$$

Оказывается, что этот факт действительно имеет место в предположении *сепарабельности* пространства Φ, т. е. наличия счетного всюду плотного множества $\{\varphi_\nu\}$. Соответствующая теорема имеет место не только для обычной меры Лебега, но и для любой вполне аддитивной меры на отрезке $a \leqslant \lambda \leqslant b$.

Теорема 1. *Если нормированное пространство Φ сепарабельно, то всякий линейный непрерывный функционал f_λ, определенный на Φ при $a \leqslant \lambda \leqslant b$ и имеющий сильно ограниченную вариацию по λ, слабо дифференцируем почти всюду по любой неотрицательной вполне аддитивной мере μ, определенной на борелевских подмножествах отрезка $[a, b]$.*

Доказательство. Обозначим через $\mu(\Delta_\alpha^\beta)$ значение меры μ на полуоткрытом интервале $\alpha \leqslant \lambda < \beta$. Проверим сначала, что функция $\|f_\lambda\|$ удовлетворяет почти всюду условию Липшица

$$\|f_{\lambda+h} - f_\lambda\| \leqslant c_\lambda \mu(\Delta_\lambda^{\lambda+h}). \tag{4}$$

*) И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной. Гостехиздат, М. — Л., 1950, стр. 193.

Если бы неравенство (4) не выполнялось, то нашлось бы множество P положительной меры $\mu(P)=\gamma>0$, такое, что для произвольного N и любого $\lambda\in P$ можно было бы указать последовательность $\lambda_N^{(m)}\to\lambda$, для которой

$$\|f_{\lambda_N^{(m)}}-f_\lambda\|>N\mu(\Delta_\lambda^{\lambda_N^{(m)}}).$$

По теореме Витали *), из системы интервалов $\Delta_\lambda^{\lambda_N^{(m)}}$, покрывающей множество P, можно выделить конечное число взаимно не пересекающихся интервалов, покрывающих в совокупности множество Q с $\mu(Q)>\frac{\gamma}{2}$. Если $(\lambda_j,\ \lambda'_j)$ — эти интервалы $(j=1,\ 2,\ \ldots)$, то

$$\sum\|f_{\lambda'_j}-f_{\lambda_j}\|>N\sum\mu(\Delta_{\lambda_j}^{\lambda'_j})>N\frac{\gamma}{2};$$

но это противоречит предположению о сильной ограниченности вариации f_λ.

Для любого $\varphi\in\Phi$ числовая функция $(f_\lambda,\ \varphi)$ имеет ограниченное изменение; действительно,

$$\sum|(f_{\lambda_{j+1}},\ \varphi)-(f_{\lambda_j},\ \varphi)|\leqslant\|\varphi\|\sum\|f_{\lambda_{j+1}}-f_{\lambda_j}\|\leqslant C\|\varphi\|,$$

и следовательно, $(f_\lambda,\ \varphi)$ почти всюду имеет производную по мере μ. В частности, это верно для элементов φ_ν счетного всюду плотного множества.

Рассмотрим множество Q полной μ-меры, на котором функция $\|f_\lambda\|$ удовлетворяет условию Липшица и все функции $(f_\lambda,\ \varphi_\nu)$ $(\nu=1,\ 2,\ \ldots)$ имеют производные; мы утверждаем, что на этом множестве Q все функции $(f_\lambda,\ \varphi)$ имеют производные. Действительно, для $\lambda\in Q$, с одной стороны,

$$\frac{\|f_{\lambda+h}-f_\lambda\|}{\mu(\Delta_\lambda^{\lambda+h})}<C_\lambda;$$

с другой стороны, для любого h отношение

$$\frac{(f_{\lambda+h},\ \varphi_\nu)-(f_\lambda,\ \varphi_\nu)}{\mu(\Delta_\lambda^{\lambda+h})}$$

имеет предел.

*) В цитированной книге И. П. Натансона дано ее доказательство для меры Лебега (стр. 75). Оно переносится на нужный нам более общий случай неотрицательной вполне аддитивной меры.

422—Б

Таким образом, система функционалов

$$\frac{f_{\lambda+h}-f_\lambda}{\mu(\Delta_\lambda^{\lambda+h})}$$

при данном $\lambda\in Q$ ограничена по норме и сходится на элементах счетного всюду плотного множества $\{\varphi_\nu\}$.

Но если последовательность линейных непрерывных функционалов ограничена по норме и сходится на всюду плотном множестве, то, как известно, она сходится на каждом элементе пространства Φ.

Итак, функционал f_λ имеет при $\lambda\in Q$ слабую производную χ_λ по мере μ, что и требовалось доказать.

2. Функционалы в счетно-нормированном пространстве. Напомним вначале известные из гл. I вып. 2 (§ 3 и 4) факты о структуре (полного) счетно-нормированного пространства Φ. Такое пространство есть пересечение последовательности полных нормированных пространств

$$\Phi_1\supset\Phi_2\supset\ldots\supset\Phi_\nu\supset\ldots\supset\Phi$$

с возрастающими нормами

$$\|\varphi\|_1\leqslant\|\varphi\|_2\leqslant\ldots\leqslant\|\varphi\|_\nu\leqslant\ldots,$$

согласованными в том смысле, что если последовательность $\{\varphi_\nu\}$ фундаментальна по норме $\|\ \|_{k+m}$ и по норме $\|\ \|_k$ стремится к нулю, то она стремится к нулю и по норме $\|\ \|_{k+m}$. При этом пространство Φ_p представляет собой пополнение пространства Φ по норме $\|\ \|_p$.

Всякий линейный непрерывный функционал на нормированном пространстве Φ_p есть тем самым линейный непрерывный функционал на пространстве Φ. Мы доказали в гл. I вып. 2, что верно и обратное: каждый линейный непрерывный функционал на пространстве Φ продолжается на некоторое пространство Φ_p и принадлежит, таким образом, к пространству Φ'_p. Совокупность Φ' всех линейных непрерывных функционалов, следовательно, есть объединение всех пространств Φ'_p:

$$\Phi'_1\subset\Phi'_2\subset\ldots\subset\Phi'_p\subset\ldots\subset\Phi'=\bigcup_{p=1}^{\infty}\Phi'_p.$$

Наименьший номер p, при котором функционал $f \in \Phi'$ входит в пространство Φ'_p, называется *порядком* функционала f. В каждом из пространств Φ'_p, $\Phi'_{p+1}, \ldots$ функционал f имеет некоторую норму; эти нормы идут в убывающем порядке

$$\|f\|_p \geqslant \|f\|_{p+1} \geqslant \ldots$$

Можно формально присоединить к этой цепи неравенств и первые члены $\|f\|_1, \ldots, \|f\|_{p-1}$, считая их равными бесконечности.

Функционал f, определенный в счетно-нормированном пространстве Φ, имеет, по определению, *сильно ограниченную вариацию*, если существует номер p, такой, что функционал f принадлежит пространству Φ'_p и имеет сильно ограниченную вариацию по норме этого пространства, так что

$$\sum \|f_{\lambda_{j+1}} - f_{\lambda_j}\|_p < C.$$

Применяя теорему п. 1, получаем:

Теорема. *Если счетно-нормированное пространство Φ сепарабельно, то линейный непрерывный функционал f_λ с сильно ограниченной вариацией по λ слабо дифференцируем почти всюду по любой неотрицательной вполне аддитивной мере μ. Его слабая производная*

$$y_\lambda = \frac{df_\lambda}{d\mu}$$

есть функционал, принадлежащий к тому пространству Φ'_p, по норме которого функционал f_λ имеет сильно ограниченную вариацию.

§ 3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛА СО СЛАБО ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИЕЙ

1. Общие соображения. Рассмотрим линейный непрерывный функционал f_λ, определенный в линейном топологическом пространстве Φ, зависящий от параметра λ, $a \leqslant \lambda \leqslant b$. Каждому элементу φ пространства Φ этот функционал сопоставляет числовую функцию от λ, равную (f_λ, φ). Мы скажем, что функционал f_λ имеет на (a, b) *слабо ограниченную вариацию*, если эта функция при любом $\varphi \in \Phi$ имеет ограниченную вариацию в обычном смысле, т. е. при любом разбиении

422—Б

отрезка $a \leqslant \lambda \leqslant b$ точками деления $a = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n = b$ справедливо неравенство

$$\sum |(f_{\lambda_{j+1}}, \varphi) - (f_{\lambda_j}, \varphi)| = \sum |(f_{\lambda_{j+1}} - f_{\lambda_j}, \varphi)| \leqslant C_\varphi \quad (1)$$

с постоянной C_φ, зависящей только от основного элемента φ.

Примеры. 1°. Рассмотрим в каком-либо из функциональных пространств на прямой $-\infty < x < \infty$, состоящих из интегрируемых функций, функционал, определяемый функцией $\theta(x-\lambda)$, равной 0 при $x < \lambda$ и 1 при $x > \lambda$:

$$(\theta(x-\lambda), \varphi(x)) = \int_\lambda^\infty \varphi(x)\,dx.$$

Мы имеем:

$$\sum |(\theta(x-\lambda_{j+1}) - \theta(x-\lambda_j), \varphi)| =$$

$$= \sum \left| \int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}} \varphi(x)\,dx \right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|\,dx,$$

так что условие (1) ограниченности сумм выполнено.

2°. В гильбертовом пространстве рассмотрим спектральное семейство операторов E_λ и фиксированный вектор e. Покажем, что функционал $(E_\lambda e, \varphi)$ также имеет слабо ограниченную вариацию.

Пусть $\{\lambda_j\}$ — разбиение оси λ на конечное число интервалов Δ_j и $E(\Delta_j) = E_{\lambda_{j+1}} - E_{\lambda_j}$ — соответствующие проектирующие операторы ($j = 1, 2, \ldots$). Пусть, далее, $e_j = E(\Delta_j)e$, $\varphi_j = E(\Delta_j)\varphi$. Тогда

$$(E(\Delta_j)e, \varphi) = (E(\Delta_j)e, E(\Delta_j)\varphi) = (e_j, \varphi_j),$$

$$|(e_j, \varphi_j)| \leqslant \|e_j\| \cdot \|\varphi_j\| \leqslant \frac{1}{2}(\|e_j\|^2 + \|\varphi_j\|^2),$$

$$\sum |((E_{\lambda_{j+1}} - E_{\lambda_j})e, \varphi)| =$$

$$= \sum |(E(\Delta_j)e, \varphi)| \leqslant \frac{1}{2}\sum(\|e_j\|^2 + \|\varphi_j\|^2) = \frac{1}{2}(\|e\|^2 + \|\varphi\|^2),$$

что и требовалось.

Можно дать определение функционала слабо ограниченной вариации и несколько в иной форме. Из основного неравенства (1) следует, что при любом выборе чисел ε_j, $|\varepsilon_j|=1$,

$$\left|\sum \varepsilon_j (f_{\lambda_{j+1}}-f_{\lambda_j},\ \varphi)\right| \leqslant C_\varphi,$$

или, что то же,

$$\left|\left(\sum \varepsilon_j (f_{\lambda_{j+1}}-f_{\lambda_j}),\ \varphi\right)\right| \leqslant C_\varphi.$$

Это последнее неравенство означает, что семейство всех функционалов вида

$$\sum \varepsilon_j (f_{\lambda_{j+1}}-f_{\lambda_j}) \qquad (|\varepsilon_j|=1) \tag{2}$$

есть ограниченное множество в пространстве Φ' (слабо ограниченное, а следовательно, и сильно ограниченное; см. вып. 2, гл. I, § 5).

Обратно, если все суммы вида (2) образуют в пространстве Φ' ограниченное множество, то это означает, что при любом выборе чисел ε_j ($|\varepsilon_j|=1$) и элемента φ имеет место неравенство

$$\left|\left(\sum \varepsilon_j (f_{\lambda_{j+1}}-f_{\lambda_j}),\ \varphi\right)\right| \leqslant C_\varphi.$$

Определив ε_j из условия

$$\left(\varepsilon_j (f_{\lambda_{j+1}}-f_{\lambda_j}),\ \varphi\right) = \left|(f_{\lambda_{j+1}}-f_{\lambda_j},\ \varphi)\right|,$$

приходим к неравенству (2).

Итак, мы можем заключить: *функционал f_λ имеет слабо ограниченное изменение тогда и только тогда, когда все функционалы вида* (2) *образуют ограниченное множество в пространстве Φ'.*

Так же, как и в случае функционала сильно ограниченной вариации (§ 1), встает вопрос о возможности дифференцирования функционала слабо ограниченной вариации.

Этот вопрос существенен не только с общей точки зрения. Дифференцирование функционала, соответствующего функции $\theta(x-\lambda)$ (пример 1°), как мы знаем, приводит к дельта-функции, которая является обобщенной функцией. Дифференцирование функционала $(E_\lambda e,\ \varphi)$ могло бы привести к собственным векторам оператора A, соответствующего спектральному семейству E_λ.

Но эти же примеры показывают, что, вообще говоря, в рамках нормированных пространств (в частности, гильбертовых) нельзя ожидать положительного ответа на вопрос

о существовании производной у любого функционала со слабо ограниченной вариацией. Действительно, функция $\theta(x-\lambda)$ есть элемент гильбертова пространства (интегрируемых в квадрате функций на отрезке), но ее производная $\delta(x-\lambda)$ уже не принадлежит к этому пространству.

Ответ будет положительным, если данный функционал со слабо ограниченной вариацией имеет и сильно ограниченную вариацию. Однако, в нормированных пространствах этот факт, вообще говоря, не имеет места. В частности, он не имеет места для таких функционалов, как $\theta(x-\lambda)$ и $E_\lambda e$.

Но если мы будем рассматривать функционалы не в нормированных, а в счетно-нормированных пространствах, то уже вполне возможен случай, когда функционалы со слабо ограниченной вариацией имеют и сильно ограниченную вариацию.

В дальнейшем будем называть счетно-нормированное пространство Φ *ядерным*, или *N-пространством*, если в нем всякий линейный непрерывный функционал f_λ со слабо ограниченной вариацией по λ имеет и сильно ограниченную вариацию*). *Во всяком сепарабельном, в частности, во всяком совершенном N-пространстве***), в силу теоремы п. 2 § 2, *функционал f_λ со слабо ограниченной вариацией имеет слабую производную почти везде по всякой неотрицательной вполне аддитивной мере.*

2. Случай пространства $K\{M_p\}$. Покажем, что при некоторых условиях таким пространством является пространство $\Phi=K\{M_p\}$ (вып. 2, гл. II, § 1). Напомним, что это пространство состоит из всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, для которых непрерывны и ограничены в пространстве R все произведения***) $M_p(x)\,|D^q\varphi(x)|$; здесь $1\leqslant M_0(x)\leqslant \ldots \leqslant M_p(x)\leqslant \ldots$ — заданная последовательность функций. Предполагается, что $M_p(x)$ могут при данном x обращаться в бесконечность только одновременно

*) Несколько ниже будет дано второе, эквивалентное, определение этого класса пространств.

**) Неясно, независимы ли свойства совершенства и ядерности пространства.

***) $$D^q = \frac{\partial^{|q|}}{\partial x_1^{q_1}\ldots\partial x_n^{q_n}},\quad |q| = q_1+\ldots+q_n\leqslant p.$$

для всех p и что везде, где эти функции конечны, они непрерывны. Будем предполагать, что выполнены условия (P) и (N). Условие (P) состоит в том, что для каждого p существует $p' > p$ такое, что

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{M_p(x)}{M_{p'}(x)} = 0;$$

при выполнении условия (P) пространство $K\{M_p\}$ совершенно, т. е. его ограниченные множества компактны (вып. 2, гл. II, § 2). Условие (N) состоит в том, что для каждого p существует такое $p' > p$, что

$$\frac{M_p(x)}{M_{p'}(x)} = m_{pp'}(x)$$

есть суммируемая функция от x. В пространстве $\Phi = K\{M_p\}$ с условием (N), как мы видели в гл. II вып. 2 (§ 4, п. 2) можно ввести две эквивалентные системы норм

$$\|\varphi\|'_p = \sup_{|q|\leqslant p} {}_x\, M_p(x)\,|D^q\varphi(x)|, \qquad \text{(a)}$$

и

$$\|\varphi\|'_p = \sup_{|q|\leqslant p} \int_{-\infty}^{\infty} M_p(x)\,|D^q\varphi(x)|\,dx. \qquad \text{(b)}$$

Обозначим через Φ_p выполнение пространства Φ по норме (a) и через Φ^p — его пополнение по норме (b). В соответствии с общей теорией сопряженное пространство Φ' можно представить как объединение сопряженных пространств Φ'_p и одновременно как объединение сопряженных пространств $\Phi^{p'}$.

Итак, пусть дан функционал $f_\lambda \in \Phi'$, имеющий слабо ограниченную вариацию при $a \leqslant \lambda \leqslant b$. Это означает, как мы видели в п. 1, что все функционалы вида $\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j (f_{\lambda_{j+1}} - f_{\lambda_j})$ при любом выборе точек λ_j и чисел ε_j, $|\varepsilon_j| = 1$, образуют в Φ' ограниченное множество. Но в таком случае все эти функционалы принадлежат при некотором p к пространству $\Phi^{p'}$ и образуют в $\Phi^{p'}$ ограниченное множество. Кроме того, и сами функционалы f_λ образуют ограниченное множество, так что без ограничения общности можно считать, что f_λ принадлежит к $\Phi^{p'}$ и ограничены в нем по норме.

В вып. 2 (гл. II, § 4, п. 2) найден общий вид линейного непрерывного функционала на пространстве Φ^p. Согласно полученной там формуле

$$(f_\lambda, \varphi) = \sum_{|q|\leqslant p} \int M_p(x) f_\lambda^q(x)\, D^q\varphi(x)\, dx, \qquad (1)$$

где $f_\lambda^q(x)$ при каждом λ и каждом q есть измеримая и ограниченная функция в пространстве R. При этом

$$\|f_\lambda\|_{\Phi^{p'}} = \sum_{|q|\leqslant p} \sup_x |f_\lambda^q(x)|,$$

где при вычислении sup пренебрегают множествами меры нуль. Далее мы имеем:

$$\left(\sum_j \varepsilon_j (f_{\lambda_{j+1}} - f_{\lambda_j}),\ \varphi\right) = \\ = \sum_q \int M_p(x) \left\{ \sum_j \varepsilon_j \left(f^q_{\lambda_{j+1}}(x) - f^q_{\lambda_j}(x)\right) \right\} D^q\varphi\, dx.$$

Поскольку нормы всех этих функционалов ограничены,

$$\sum_{|q|\leqslant p} \sup_x \left| \sum_j \varepsilon_j \left(f^q_{\lambda_{j+1}}(x) - f^q_{\lambda_j}(x)\right) \right| \leqslant C.$$

При каждом фиксированном x множители ε_j, $|\varepsilon_j| = 1$, можно выбрать произвольно, поэтому

$$\sum_{|q|\leqslant p} \sup_x \sum_j \left| f^q_{\lambda_{j+1}}(x) - f^q_{\lambda_j}(x) \right| \leqslant C. \qquad (2)$$

Оценим теперь норму функционала $f_{\lambda_{j+1}} - f_{\lambda_j}$ в пространстве $\Phi'_{p'}$, где p' подобрано для p из условия (N). Имеем для $\varphi \in \Phi_{p'}$:

$$|(f_{\lambda_{j+1}} - f_{\lambda_j},\ \varphi)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|q|\leqslant p} \int M_p(x) \left| f^q_{\lambda_{j+1}}(x) - f^q_{\lambda_j}(x) \right| \cdot |D^q\varphi(x)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|q|\leqslant p} \int m_{pp'}(x) \left| f^q_{\lambda_{j+1}}(x) - f^q_{\lambda_j}(x) \right| \cdot M_{p'} |D^q\varphi(x)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x,\ |\leqslant} M_{p'}(x) |D^q\varphi(x)| \cdot \sum_{|q|\leqslant p} \int m_{pp'} \left| f^q_{\lambda_{j+1}}(x) - f^q_{\lambda_j}(x) \right| dx$$

и, следовательно,

$$\|f_{\lambda_{j+1}}-f_{\lambda_j}\|_{\Phi'_{p'}} \leqslant \sum_{|q|\leqslant p} \int m_{pp'}(x)\left|f^q_{\lambda_{j+1}}(x)-f^q_{\lambda_j}(x)\right| dx;$$

применяя (2), находим, далее,

$$\sum_j \|f_{\lambda_{j+1}}-f_{\lambda_j}\|_{\Phi'_{p'}} \leqslant \sum_{|q|\leqslant p} \int m_{pp'}(x) \sum_j \left|f^q_{\lambda_{j+1}}(x)-f^q_{\lambda_j}(x)\right| dx \leqslant$$
$$\leqslant C\int m_{pp'}(x)\,dx = C_{pp'},$$

откуда и

$$\sup \sum_j \|f_{\lambda_{j+1}}-f_{\lambda_j}\|_{\Phi'_{p'}} \leqslant C_{pp'}, \qquad (3)$$

что и требовалось.

Вспоминая, что совершенное пространство Φ сепарабельно и используя теорему § 1, получаем, что *в пространстве* $\Phi = K\{M_p\}$, *удовлетворяющем условиям* (N) *и* (P), *всякий функционал* f_λ $(a \leqslant \lambda \leqslant b)$ *со слабо ограниченной вариацией имеет производную по любой неотрицательной вполне аддитивной мере* $\mu(\lambda)$ *почти всюду на* $[a, b]$; *эта производная* $\frac{df_\lambda}{d\mu(\lambda)}$ *есть функционал, принадлежащий к тому пространству* Φ'_p, *в котором ограничены выражения*

$$\sum_{j=0}^{n} \|f_{\lambda_{j+1}}-f_{\lambda_j}\|_{p'}.$$

Напомним, что пространство $\Phi_{p'}$ в данном случае состоит из функций $\varphi(x)$, обладающих непрерывными производными до порядка p', с конечной нормой

$$\|\varphi\|_{p'} = \sup_{\substack{x\\ |q|\leqslant p'}} M_{p'}(x)\left|D^q\varphi(x)\right|.$$

Мы приведем в заключение также другое определение ядерного пространства; хотя оно нам и не понадобится, но оно проще формулируется. Именно, назовем ряд из функционалов $f_1+f_2+\ldots+f_k+\ldots$ *безусловно сходящимся*, если для любой основной функции φ сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(f_j, \varphi)|.$$

Этот же ряд называется *абсолютно сходящимся по норме* $\|\ \|_k$, если сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_k.$$

Определение ядерного пространства может быть дано в следующей форме: это такое пространство, в котором каждый безусловно сходящийся ряд из функционалов сходится абсолютно по некоторой норме.

Доказательство эквивалентности двух приведенных определений мы предоставляем читателю.

§ 4. ТЕОРЕМЫ О СУЩЕСТВОВАНИИ И О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

В этом параграфе мы покажем, что спектральное семейство E_λ, определенное в данном гильбертовом пространстве H может быть продифференцировано по параметру λ по некоторой мере σ; результат этого дифференцирования $\chi_\lambda = \frac{dE_\lambda e}{d\sigma}$ при фиксированном λ есть некоторая обобщенная функция, и совокупность всех полученных при этом обобщенных функций χ_λ составляет в определенном смысле полную систему.

1. Общая схема. Рассмотрим некоторое совершенное пространство Φ, т. е. полное счетно-нормированное пространство, в котором каждое ограниченное множество компактно.

Предположим, что (кроме исходной топологии) в этом пространстве задана евклидова метрика, т. е. каждой паре элементов φ, ψ сопоставлено число (φ, ψ)*) (скалярное произведение) со следующими свойствами:

1°. $(\varphi_1+\varphi_2, \psi) = (\varphi_1, \psi)+(\varphi_2, \psi)$;

2°. $(\varphi, \psi) = \overline{(\psi, \varphi)}$;

3°. $(\alpha\varphi, \psi) = \alpha(\varphi, \psi)$;

4°. $(\varphi, \varphi) > 0$ при $\varphi \neq 0$.

Кроме того, мы предположим, что выполнено условие

5°. Если $\varphi_\nu \to \varphi$ по топологии пространства Φ, то $(\varphi_\nu, \psi) \to (\varphi, \psi)$.

*) Не путать с обозначением (f, φ) для применения функционала f к элементу φ.

Имея эту форму, можно сопоставить каждому элементу $\varphi \in \Phi$ линейный непрерывный функционал f_φ по формуле

$$(f_\varphi, \psi) = (\varphi, \psi).$$

Отображение $\varphi \to f_\varphi$, очевидно, линейно. Различные элементы пространства Φ оно переводит в различные элементы пространства Φ'; действительно, если $f_{\varphi_1} = f_{\varphi_2}$, то $f_{\varphi_1 - \varphi_2} = 0$ и, следовательно, $(\varphi_1 - \varphi_2, \psi) = 0$ для любого $\psi \in \Phi$; полагая $\psi = (\varphi_1 - \varphi_2)$, находим $(\varphi_1 - \varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2) = 0$, откуда, по условию 4°, $\varphi_1 = \varphi_2$. Наконец, это отображение *непрерывно*: если $\varphi_\nu \to \varphi_0$, то, по условию 5°, $(\varphi_\nu, \psi) \to (\varphi_0, \psi)$ для любого $\psi \in \Phi$ и, следовательно, $f_{\varphi_\nu} \to f_{\varphi_0}$ (слабо, а в силу совершенства пространства Φ, и сильно).

Пополнение пространства Φ по скалярному произведению (φ, ψ) есть некоторое полное гильбертово пространство H. Покажем, что отображение $\varphi \to f_\varphi$ продолжается с Φ на H. Действительно, каждый элемент $h \in H$ определяет на Φ линейный непрерывный по топологии H функционал (h, ψ); проверим, что он непрерывен и по топологии пространства Φ. Пусть $\varphi_\nu \to h$ по топологии H. Тогда $(\varphi_\nu, \psi) \to (h, \psi)$; функционал h оказывается слабым пределом линейных непрерывных функционалов и, по теореме из гл. I вып. 2 (§ 5, п. 6), сам является непрерывным функционалом. Таким образом, каждому $h \in H$ можно сопоставить функционал $f_h \in \Phi'$ так, что $(f_h, \varphi) = (h, \varphi)$. По соображениям, аналогичным приведенным выше, отображение $h \to f_h$ взаимно однозначно и непрерывно. Отождествляя функционалы f_h с соответствующими элементами h, мы получаем включения

$$\Phi \subset H \subset \Phi'.$$

Примеры. 1°. Пусть Φ — одно из совершенных пространств функций $\varphi(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, интегрируемых в квадрате, например, пространство $K\{M_p\}$, удовлетворяющее условию (P) (см. п. 2 § 3), и пусть

$$(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\overline{\psi(x)}\,dx. \qquad (1)$$

В этом случае пространство H есть гильбертово пространство всех функций, интегрируемых в квадрате на всей оси. Отображение $\varphi \to f_\varphi$ есть тождественное отображение.

2°. Пусть Φ — одно из аналогичных пространств функций $\varphi(x_1, x_2)$ и

$$(\varphi, \psi) = \int\int \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\overline{\partial\psi}}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\overline{\partial\psi}}{\partial x_2}\right) dx_1\,dx_2. \qquad (2)$$

По формуле Грина, с учетом убывания основных функций и их производных на бесконечности,

$$\int\int \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\overline{\partial\psi}}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\overline{\partial\psi}}{\partial x_2}\right) dx_1\,dx_2 = \\ = \int\int \overline{\psi}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\right) dx_1\,dx_2.$$

В этом случае пространство H есть гильбертово пространство со скалярным произведением (2); отображение $\varphi \to f_\varphi$ есть результат применения к функции φ оператора Лапласа.

3°. Если A — любой симметричный положительно определенный дифференциальный оператор, то мы можем положить

$$(\varphi, \psi) = \int \overline{\psi} \cdot A\varphi\,dx.$$

Отображение $\varphi \to f_\varphi$ есть применение к элементу φ оператора A.

2. Существование собственных функционалов. Теперь мы можем перейти к основным теоремам.

Как уже указывалось, задача состоит в установлении существования производной по некоторой мере данного спектрального семейства E_λ.

Эту меру мы определим следующим образом. Пусть e — нормированный вектор пространства H; обозначим через $H(e)$ подпространство, порожденное векторами $e_\lambda = E_\lambda e$. Ближайшие построения будут происходить в этом подпространстве. Введем функцию $\sigma(\lambda) = (E_\lambda e, e)$. В силу известных свойств спектрального семейства это монотонная функция от λ, которая изменяется в пределах от 0 до 1, когда λ меняется от $-\infty$ до $+\infty$. Известным образом она порождает меру Стильтьеса на прямой $-\infty < \lambda < \infty$: мерой множества P считается интеграл $\sigma_\lambda(P) = \int_P d\sigma(\lambda)$.

Сформулируем теперь и докажем первую из наших основных теорем.

Теорема 1. *Пусть в гильбертовом пространстве H, полученном при пополнении совершенного N-пространства по скалярному произведению (φ, ψ), задано спектральное семейство проекционных операторов $E_\lambda = E(\Delta^{\lambda}_{-\infty})$; пусть, далее, e — фиксированный вектор и $\sigma(\lambda) = (E_\lambda e, e)$. Утверждается, что почти всюду по мере σ_λ существует производная*

$$\frac{dE_\lambda e}{d\sigma_\lambda} = \chi_\lambda,$$

которая представляет собой линейный непрерывный функционал в пространстве Φ, действующий по формуле

$$(\chi_\lambda, \varphi) = \frac{d(E_\lambda e, \varphi)}{d\sigma_\lambda}. \qquad (1)$$

Доказательство. Функция $E_\lambda e = e_\lambda$, рассматриваемая как абстрактная функция со значениями в Φ', имеет слабо ограниченную вариацию; действительно, для каждой $\varphi \in \Phi$ билинейная форма $(e_\lambda, \varphi) = (E_\lambda e, \varphi)$ векторов e_λ и φ может быть представлена в виде линейной комбинации четырех квадратичных форм, каждая из которых является монотонной функцией от λ:

$$(E_\lambda e, \varphi) = \frac{1}{4}\{(E_\lambda(e+\varphi), e+\varphi) + i(E_\lambda(e+i\varphi), e+i\varphi) - \\ -(E_\lambda(e-\varphi), e-\varphi) - i(E_\lambda(e-i\varphi), e-i\varphi)\}.$$

Так как Φ — ядерное пространство, то отсюда следует, что функционал $E_\lambda e$ имеет сильно ограниченную вариацию.

По доказанному в § 2, существуют (почти при всех λ по мере σ_λ) функционалы

$$\chi_\lambda = \frac{dE_\lambda e}{d\sigma_\lambda},$$

действующие по формуле

$$(\chi_\lambda, \varphi) = \frac{d(E_\lambda e, \varphi)}{d\sigma_\lambda}.$$

Тем самым теорема 1 доказана.

3. Полнота системы собственных функционалов. Переходим к выяснению вопроса об ортогональности и полноте полученной системы обобщенных функций χ_λ.

Об ортогональности в обычном смысле, конечно, здесь говорить нельзя, так как выражения (χ_λ, χ_μ) не определены. Так обстоит дело и в классическом анализе, например, в теории интеграла Фурье, где нельзя говорить об ортогональности функций $e^{i\lambda x}$ на всей оси; заменителем условий ортогональности в теории интеграла Фурье служит равенство Парсеваля

$$\int |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int |\tilde{f}(\sigma)|^2\,d\sigma. \qquad (1)$$

Это равенство геометрически представляет собой аналог теоремы Пифагора: — квадрат длины вектора f есть сумма квадратов его составляющих Фурье, — и поэтому может служить некоторой характеристикой ортогональности составляющих.

Полнота системы обобщенных функций $\chi_\lambda(x)$ означает, что каждую функцию $\varphi(x)$ можно собрать из этих обобщенных функций путем интегрирования по параметру λ, так же, как в теории интеграла Фурье любая функция $\varphi(x)$ собирается из экспонент $e^{i\lambda x}$ интегрированием по λ. В нашем случае этот факт получается как результат общей теоремы о восстановлении абсолютно непрерывной функции по ее производной. В связи с этим напомним, что вполне аддитивная функция множества $f(P)$ называется *абсолютно непрерывной относительно меры* $\sigma(P)$, если $f(P) = 0$ на всяком множестве, имеющем σ-меру, равную нулю. Всякая абсолютно непрерывная относительно меры $\sigma(P)$ функция $f(P)$ представима в виде «неопределенного интеграла»

$$f(P) = \int_P \chi\,d\sigma; \qquad (2)$$

функция χ называется *производной* функции f по мере σ *).

Теперь мы можем сформулировать и доказать вторую основную теорему.

*) См., например, С. Сакс, Теория интеграла. ИЛ, М., 1949, гл. I.

Теорема 2. *Совокупность функционалов χ_λ, построенных в теореме 1, ортогональна и полна в том смысле, что для всякой основной функции $\varphi \in H(e)$ имеют место соотношения*

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{(\chi_\lambda, \varphi)} \chi_\lambda \, d\sigma(\lambda), \tag{3}$$

$$\|\varphi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |(\chi_\lambda, \varphi)|^2 \, d\sigma(\lambda). \tag{4}$$

В частности, если $(\chi_\lambda, \varphi) = 0$ для всех λ, то $\varphi = 0$.

Доказательство. Мы используем так называемое каноническое представление пространства $H(e)$, порожденного векторами $e_\lambda = E_\lambda e$ в виде пространства функций. А именно, мы сопоставим вектору e функцию $e(\lambda) \equiv 1$, вектору $E(\Delta) e$ — характеристическую функцию интервала Δ и распространим это соответствие, используя линейные комбинации и предельный переход, с одной стороны, на все векторы пространства $H(e)$, с другой — на все функции пространства L^2_σ, т. е. на все функции $f(\lambda)$, интегрируемые в квадрате по мере σ_λ. Это сопоставление осуществляется по формуле

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \, dE_\lambda e \quad (f(\lambda) \in L^2_\sigma, f \in H(e)), \tag{5}$$

причем можно показать, что для любого $g \in H(e)$

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \overline{g(\lambda)} \, d\sigma(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \, d(E_\lambda e, g). \tag{6}$$

Из этих формул видно, что определяемое ими соответствие между $H(e)$ и L^2_σ является изоморфизмом.

Покажем теперь, что функционалы χ_λ образуют полную систему. Из неравенства

$$\left|\left(\int_P dE_\lambda e, \varphi\right)\right|^2 \leqslant \left(\int_P dE_\lambda e, \int_P dE_\lambda e\right)(\varphi, \varphi),$$

где P — произвольное σ-измеримое множество, следует, что функция множества $\left(\int_P dE_\lambda e, \varphi\right) = \int_P d(E_\lambda e, \varphi)$ абсолютно непрерывна по мере $\sigma(P) = \int_P d(E_\lambda e, e)$: если $\sigma(P) = 0$, т. е. $\int_P d(E_\lambda e, e) = 0$, то и $\int_P d(E_\lambda e, \varphi) = 0$. Действительно,

$$\left(\int_P dE_\lambda e, \int_P dE_\lambda e\right) = \int_P d\left(E_\lambda e, \int_P dE_\lambda e\right) =$$
$$= \int_P d\left(\int_P d(E_\lambda e, E_\lambda e)\right) = \int_P d\left(\int_P d(E_\lambda e, e)\right) = 0,$$

откуда и $\left(\int_P dE_\lambda e, \varphi\right) = 0$. Поэтому, согласно сказанному выше (см. формулы (1) п. 2 и (3)), для любых $f, \varphi \in H(e)$

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \, d(E_\lambda e, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) (\chi_\lambda, \varphi) \, d\sigma(\lambda).$$

Но, с другой стороны, по (6) для $\varphi \in H(e)$

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \overline{\varphi(\lambda)} \, d\sigma(\lambda);$$

так как $f(\lambda) \in L^2_\sigma$ произвольна, то почти всюду по мере σ

$$(\chi_\lambda, \varphi) = \overline{\varphi(\lambda)}, \text{ т. е. } (\varphi, \chi_\lambda) = \varphi(\lambda). \tag{7}$$

Можно сказать, что $\varphi(\lambda)$ есть «коэффициент Фурье» в разложении основного элемента φ по функционалам χ_λ.

Формула (5) теперь может быть записана, если заменить f на φ, в виде

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{(\chi_\lambda, \varphi)} \, dE_\lambda e = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{(\chi_\lambda, \varphi)} \chi_\lambda \, d\sigma(\lambda),$$

что совпадает с требуемым равенством (3). Формулы (6) и (7) приводят к равенству Парсеваля

$$(\varphi, \psi)=\int_{-\infty}^{\infty}(\chi_\lambda, \varphi)\overline{(\chi_\lambda, \psi)}\,d\sigma(\lambda);$$

в частности, при $\varphi=\psi$ мы получаем:

$$\|\varphi\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|(\chi_\lambda, \varphi)|^2\,d\sigma(\lambda),$$

что совпадает с требуемым равенством (4). Тем самым теорема полностью доказана.

Замечание 1. Пространство H всегда может быть разложено в ортогональную сумму пространств $H(e_\alpha)$, где индекс α пробегает некоторое множество значений. В пространстве $H(e_\alpha)$ теорема 2 приводит к существованию полной системы функционалов $\chi_\lambda^{(\alpha)}$. Складывая равенства типа (4) по всем индексам α, получаем для любого $\varphi\in\Phi$ равенство Парсеваля

$$\|\varphi\|^2=\sum_\alpha\int_{-\infty}^{\infty}|(\chi_\lambda^{(\alpha)}, \varphi)|^2\,d\sigma_\alpha(\lambda). \qquad (8)$$

Для вектора φ таким же образом получим представление

$$\varphi=\sum_\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\overline{(\chi_\lambda^{(\alpha)}, \varphi)}\,\chi_\lambda^{(\alpha)}\,d\sigma_\alpha(\lambda). \qquad (9)$$

Замечание 2. Так как в каноническом представлении вектору $E(\Delta)e$ отвечает характеристическая функция интервала Δ, то векторы $E(\Delta)e$ могут быть восстановлены по функционалам χ_λ с помощью интегрирования:

$$E(\Delta)e=\int_\Delta \chi_\lambda\,d\sigma(\lambda).$$

Мы видим, в частности, что хотя сами функционалы χ_λ — элементы пространства Φ', интегралы от них по параметру λ по любым множествам положительной меры σ_λ дают «конкретные» элементы гильбертова пространства H, даже элементы вида $E(\Delta)e$.

§ 5. СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

1. Основная теорема. Мы применим общие теоремы § 4 к доказательству существования и полноты системы обобщенных собственных векторов у самосопряженных операторов.

Как и в § 4, будем предполагать, что в совершенном ядерном пространстве Φ задано скалярное произведение (φ, ψ), непрерывное по топологии пространства Φ; пополнение пространства Φ по этому скалярному произведению есть гильбертово пространство, которое мы обозначаем через H. Каждый элемент $g\in H$ порождает линейный функционал $f_\varphi=(g, \varphi)$, определенный на всех функциях $\varphi\in\Phi$, и имеет место цепь включений

$$\Phi\subset H\subset\Phi',$$

где Φ' есть пространство, сопряженное к Φ.

Предположим теперь, что в пространстве Φ задан линейный оператор A, переводящий Φ в себя и симметричный относительно формы (φ, ψ), так что

$$(A\varphi, \psi)=(\varphi, A\psi). \qquad (1)$$

Этот оператор автоматически будет непрерывным в пространстве Φ. Действительно, если $\varphi_\nu\to\varphi$, то для любого ψ $(A\varphi_\nu, \psi)=(\varphi_\nu, A\psi)\to(\varphi, A\psi)=(A\varphi, \psi)$, т. е. последовательность $A\varphi_\nu$ слабо, а в силу совершенства Φ и сильно, сходится к элементу $A\varphi$, что и означает непрерывность оператора A.

Рассмотрим сопряженный оператор A^*, непрерывный и ограниченный в пространстве Φ'. Поскольку $\Phi'\supset\Phi$, оператор A^* определен также и в пространстве Φ; мы можем утверждать, что здесь он совпадает с оператором A. Действительно, для $\varphi\in\Phi$ и любого $\psi\in\Phi$ мы имеем:

$$(A^*\varphi, \psi)=(\varphi, A\psi)=(A\varphi, \psi),$$

так что $A^*\varphi$ совпадает с элементом $A\varphi$.

Оператор A^* тем самым является расширением оператора A на пространство Φ^*; поэтому в дальнейшем у оператора A^* мы не будем писать знака *. Оператор A, таким образом, является симметричным.

Функционал $\chi_\lambda \in \Phi'$ мы будем называть *собственным функционалом* для оператора A с собственным значением λ, если выполняется равенство

$$A\chi_\lambda = \lambda\chi_\lambda.$$

Теорема 1. *Если симметричный линейный оператор A, действующий в пространстве Φ, может быть расширен в пространстве H до самосопряженного оператора, то он допускает в пространстве Φ' полную систему собственных функционалов χ_λ.*

Доказательство. По предположению и в силу основной спектральной теоремы для самосопряженных операторов *), оператор A обладает спектральным семейством $E_\lambda = E(\Delta_{-\infty}^{\lambda})$. Выберем произвольно вектор $e \in H$ и рассмотрим подпространство $H(e)$, порожденное векторами $e_\lambda = E_\lambda e$. По теореме 2 § 4, существует полная система функционалов

$$\chi_\lambda = \frac{dE_\lambda e}{d(E_\lambda e, e)}.$$

Проверим, что χ_λ являются собственными функционалами для оператора A. Обозначим через Δ интервал $[\alpha, \beta]$, содержащий точку λ, и через $E(\Delta)$ оператор $E_\beta - E_\alpha$. Пусть интервал Δ стягивается к точке λ. Для любого $\varphi \in \Phi$ мы имеем: почти всюду по мере σ

$$(A\chi_\lambda, \varphi) = (\chi_\lambda, A_\varphi) = \lim\left(\frac{E(\Delta)e}{\sigma(\Delta)}, A\varphi\right) =$$
$$= \lim\frac{1}{\sigma(\Delta)}\left(E(\Delta)e, \int_{-\infty}^{\infty}\lambda\, dE_\lambda\varphi\right) =$$
$$= \lim\frac{1}{(\sigma\Delta)}\left(e, \int_{-\infty}^{\infty}\lambda\, dE(\Delta)E_\lambda\varphi\right) = \lim\frac{1}{\sigma(\Delta)}\left(e, \int_{\Delta}\lambda\, dE_\lambda\varphi\right) =$$
$$= \lim\frac{1}{\sigma(\Delta)}\left(\int_{\Delta}\lambda\, dE_\lambda e, \varphi\right) = \lim\left(\int_{\Delta}\frac{\lambda\, dE_\lambda e}{\sigma(\Delta)}, \varphi\right) = (\lambda\chi_\lambda, \varphi),$$

*) См., например, Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь. Лекции по функциональному анализу. ИЛ, М., 1954, гл. VIII, § 2,

откуда

$$A\chi_\lambda = \lambda\chi_\lambda,$$

что и требовалось.

Как и ранее, пространство H можно разложить в ортогональную сумму пространств $H(e_\alpha)$. Применяя доказанную теорему для каждого $H(e_\alpha)$ и объединяя результаты, получаем существование полной (во всем Φ') системы $\chi_\lambda^{(\alpha)}$ собственных функционалов оператора A в пространстве Φ'.

2. Дифференциальный оператор во всем пространстве.

Пример 1. Пусть A — линейный дифференциальный оператор

$$A\varphi \equiv \sum a_n(x) D^k\varphi(x) \tag{1}$$

с вещественными бесконечно дифференцируемыми во всем пространстве R_n коэффициентами, симметричный относительно скалярного произведения

$$(\varphi, \psi) = \int \overline{\varphi(x)}\psi(x)\, dx; \tag{2}$$

это последнее означает, что для любых двух финитных функций φ и ψ

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi). \tag{3}$$

Подберем совершенное N-пространство Φ из бесконечно дифференцируемых функций (например, типа $K\{M_p\}$), так, чтобы оператор A переводил это пространство в себя и оставался симметричным (т. е. чтобы сохранялось равенство (3)). Будем считать также, что пространство Φ плотно располагается в пространстве $L_2(R_n)$ всех интегрируемых в квадрате функций $\varphi(x)$.

Тогда, как известно *), оператор A может быть расширен до самосопряженного оператора в пространстве L_2. Условия теоремы 1, таким образом, выполнены. Применяя ее, получаем:

Теорема 2. *Дифференциальный оператор A, удовлетворяющий перечисленным условиям, обладает полной*

*) Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу. ИЛ, М., 1954, стр. 354.

системой обобщенных собственных функций $\chi_\lambda(x)$, *принадлежащих пространству* Φ'.

Если мы знаем общий вид линейных непрерывных функционалов на пространстве Φ, то мы можем тем самым описать и общий вид обобщенных собственных функций оператора A.

Предположим, например, что пространство Φ есть пространство S функций $\varphi(x)$, убывающих вместе со всеми производными быстрее любой степени $\frac{1}{|x|}$. В частности, можно положить $\Phi = S$, если коэффициенты оператора A имеют рост не выше степенного, так же, как и все их производные. Линейные непрерывные функционалы на пространстве S фиксированного порядка p, как мы помним, являются производными порядка p от непрерывных функций, возрастающих не быстрее $|x|^p$. Мы приходим к следующему выводу: *если оператор* A, *удовлетворяющий перечисленным выше условиям, действует в пространстве* S, *то он обладает полной системой обобщенных собственных функций, каждая из которых есть производная порядка* p *от непрерывной функции, возрастающей не быстрее* $|x|^p$ (p фиксировано).

3. Дифференциальный оператор в области с границей.

Пример 2. В первом примере рассматривался оператор A, действующий на функциях $\varphi(x)$, определенных во всем пространстве R_n. Теперь рассмотрим оператор A, определенный на функциях φ, сосредоточенных в области с границей.

Пусть A — линейный дифференциальный оператор

$$A\varphi \equiv \sum a_n(x) D^k \varphi(x) \tag{1}$$

с вещественными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами в области G пространства R_n, симметричный относительно скалярного произведения

$$(\varphi, \psi) = \int_G \overline{\varphi(x)}\psi(x)\,dx. \tag{2}$$

Точнее, предположим, что для любых двух финитных функций φ, ψ, определенных (и бесконечно дифференцируемых) в области G и обращающихся в нуль в окрестности ее границы Γ, имеет место соотношение

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi).$$

Оператор A может быть расширен до самосопряженного оператора в пространстве $L_2(G)$. При этом область его определения Ω_A есть некоторая совокупность функций $\varphi(x) \in L_2(G)$, удовлетворяющая определенным *граничным условиям*. Условие самосопряженности оператора означает, что всякая функция $\psi(x) \in L_2(G)$, для которой выражение $(\psi(x), A\varphi(x))$ есть ограниченный функционал от $\varphi(x)$ на $L_2(G)$, принадлежит к области определения оператора A и удовлетворяет, в частности, граничным условиям, характеризующим область определения этого оператора.

Мы будем предполагать, что оператор A уже задан самосопряженным. В соответствии с теоремой 1 он обладает полной системой обобщенных собственных функций — функционалов на совершенном ядерном пространстве Φ, содержащем все финитные бесконечно дифференцируемые функции, и таком, что A переводит его в себя.

Возникает вопрос, в каком смысле эти обобщенные собственные функции удовлетворяют граничным условиям, участвующим в определении оператора A.

Так как обобщенные функции $\chi_\lambda(x)$ не принадлежат, вообще говоря, пространству $L_2(G)$, то рассматривать выражение $(\chi_\lambda(x), A\varphi(x))$ и доказывать, что оно представляет собой ограниченный функционал от $\varphi(x)$, мы не можем. Поэтому мы поступим иначе. Пусть вся граница области G находится в конечной части пространства; тогда будет иметь место

Теорема 3. *Если обобщенная собственная функция* $\chi_\lambda(x)$ *оператора* A *порядка* p *в действительности есть обычная функция, обладающая обычными производными до порядка* p, *то произведение* $g_\lambda = \chi_\lambda(x)e(x)$, *где* $e(x)$ — *финитная бесконечно дифференцируемая функция, равная* 1 *в окрестности границы области* G, *принадлежит к области определения оператора* A.

Доказательство. Мы покажем, что функционал от φ

$$(g_\lambda, A\varphi)$$

ограничен в пространстве $L_2(G)$.

Если истолковать g_λ как обобщенную функцию, а φ — как основную, то в силу симметрии оператора A имеет место равенство

$$(g_\lambda, A\varphi) = (Ag_\lambda, \varphi).$$

Но оператор A, понимаемый как оператор над обобщенной функцией, вообще говоря, не сводится к обычному применению операции $\sum a_k(x) D^k$, если даже $g_\lambda(x)$ и имеет все требующиеся для этого производные. Рассмотрим этот вопрос в общем виде, именно, выясним, что означает применение оператора A к данной обобщенной функции, которая соответствует обычной функции $f(x)$, обладающей производными до порядка p. Если φ — финитная основная функция, то по формуле Грина

$$(f, A\varphi) = \int_G f \cdot A\varphi \cdot dx = \int_G A_1 f \cdot \varphi \cdot dx + \int_\Gamma L[f, \varphi]\, d\sigma = (Af, \varphi), \qquad (3)$$

где $A_1 f$ есть результат обычного применения дифференциального оператора A к функции f, а L — билинейная форма, возникающая в результате интегрирования по частям. Как мы видим, выражения Af и $A_1 f$, вообще говоря, различны, они отличаются на слагаемое, зависящее от граничных значений f.

Покажем, однако, что для обобщенной собственной функции эти выражения совпадают.

Если $f = \chi_\lambda$ есть собственная функция оператора A, то

$$(f, A\varphi) = (Af, \varphi) = \lambda(\chi_\lambda, \varphi) = \lambda \int_G \chi_\lambda(x)\varphi(x)\, dx. \qquad (4)$$

Сравнивая выражения (3) и (4), мы видим, что

$$\int_\Gamma L[f, \varphi]\, d\sigma = \int_G [\lambda\chi_\lambda(x) - A_1 f]\,\varphi\, dx. \qquad (5)$$

Но функционал в левой части сингулярен, а функционал в правой части регулярен; отсюда мы сейчас выведем, что оба они равны нулю. Действительно, если φ выбрана так, что она обращается в нуль вдоль границы, то мы получаем:

$$\int_G [\lambda\chi_\lambda(x) - A_1\chi_\lambda]\,\varphi\, dx = 0$$

и так как в остальном φ произвольна, то всюду вне Γ

$$\lambda\chi_\lambda(x) - A_1\chi_\lambda = 0.$$

Отсюда следует, что и *для любой* φ правая часть равенства (5) равна нулю; поэтому для любой φ и левая часть равна нулю. Итак, функция $\chi_\lambda(x)$ удовлетворяет уравнению

$$A_1\chi_\lambda(x) = \lambda\chi_\lambda(x),$$

т. е. она является собственной функцией оператора A в обычном смысле. Далее, для любой основной функции

$$\int_\Gamma L[\chi_\lambda, \varphi]\, d\sigma = 0,$$

откуда и

$$\int_\Gamma L[\chi_\lambda e, \varphi]\, d\sigma = 0,$$

так как χ_λ и $\chi_\lambda e$ в окрестности границы совпадают. Отсюда

$$(e(x)\chi_\lambda(x), A\varphi) = \int_G A_1 e(x)\chi_\lambda(x) \cdot \varphi(x)\, dx;$$

этот функционал от φ является, следовательно, ограниченным; он остается ограниченным и на всем пространстве H, так как функция $A_1 e(x)\chi_\lambda(x)$ финитна вместе с $e(x)\chi_\lambda(x)$. Поэтому $e(x)\chi_\lambda(x)$ принадлежит к области определения оператора A и, в частности, удовлетворяет граничным условиям. Этим теорема доказана.

Так как функция $e(x)$ в окрестности границы есть единица, то мы заключаем, что при сделанных предположениях сама $\chi_\lambda(x)$ удовлетворяет граничным условиям.

Дадим теперь следующее общее определение.

Определение. Функционал f называется решением уравнения $Bf = 0$, удовлетворяющим граничным условиям, если для всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, принадлежащих области определения самосопряженного оператора B, выполняется равенство

$$(f,\ B\varphi)=0.$$

Покажем теперь, что обобщенные собственные функции χ_λ самосопряженного оператора A удовлетворяют граничным условиям в смысле этого определения (с $B=A-\lambda E$). Пусть $\varphi(x)$ принадлежит области определения оператора A. Мы имеем:

$$(AE(\Delta)\,e,\ \varphi)=\int_\Delta \lambda\, d\,(E_\lambda e,\ \varphi),$$

причем функция $E(\Delta)\,e$ удовлетворяет граничным условиям. Поэтому

$$(E(\Delta)\,e,\ A\varphi)=\int_\Delta \lambda\, d\,(E_\lambda e,\ \varphi)=\int_\Delta \lambda\,(\chi_\lambda,\ \varphi)\,d\sigma(\lambda),$$

следовательно,

$$\left(\frac{dE_\lambda e}{d\sigma},\ A\varphi\right)=(\chi_\lambda,\ A\varphi)=\lambda\,(\chi_\lambda,\ \varphi),$$

отсюда

$$(\chi_\lambda,\ (A-\lambda E)\,\varphi)=0,$$

что и утверждалось.

4. Оператор Штурма—Лиувилля. Пример 3. Рассмотрим оператор

$$Ay=-y''+q(x)\,y \qquad (0\leqslant x<\infty,\ \operatorname{Im} q(x)=0) \tag{1}$$

с бесконечно дифференцируемым коэффициентом $q(x)$. При определенных условиях, налагаемых на область его определения (и на коэффициент $q(x)$), в частности при граничном условии

$$y'(0)=\theta y(0) \qquad (\theta \text{ вещественно}), \tag{2}$$

он является самосопряженным *).

*) См. М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы. Гостехиздат, М., 1954.

В силу теоремы 1 существует *полная система обобщенных собственных функций* $\chi_\lambda(x)$, каждая из которых есть решение уравнения

$$-y''+q(x)\,y=\lambda y. \tag{3}$$

Заметим, что в рассматриваемом случае эти обобщенные функции являются обычными бесконечно дифференцируемыми функциями, так как обыкновенное дифференциальное уравнение без особенностей не имеет иных решений в обобщенных функциях, кроме классических решений (вып. 1, гл. I).

Как мы видели в примере 2, такие собственные функции в обычном смысле удовлетворяют граничным условиям, налагаемым на область определения оператора.

Теперь сформулируем для данного случая теорему о полноте системы собственных функций (теорема 2 § 4).

Теорема 4. *Пусть e_α — система порождающих векторов пространства H, отвечающих оператору $A=-y''+q(x)\,y$, и $\sigma_\alpha(\lambda)$ — соответствующие монотонные функции; $\sigma_\alpha(\lambda)=(E_\lambda e_\alpha,\ e_\alpha)$. Собственная функция $\chi_\alpha(\lambda)$, полученная дифференцированием $E_\lambda e_\alpha$ по мере σ_α есть решение уравнения* (3) *и поэтому лишь численным множителем $b_\alpha(\lambda)$ может отличаться от того (единственного) классического решения $y(x,\ \lambda)$, которое задается начальными условиями $y(0,\ \lambda)=1,\ y'(0,\ \lambda)=0$*:

$$\chi_\alpha(\lambda)=b_\alpha(\lambda)\,y(x,\ \lambda).$$

Формула разложения для финитной функции $\varphi(x)$ принимает теперь вид

$$\varphi(x)=\sum_\alpha\int_0^\infty\left[\overline{\int_0^a b_\alpha(\lambda)\,y(\xi,\ \lambda)\,\varphi(\xi)\,d\xi}\right]y(x,\ \lambda)\,b_\alpha(\lambda)\,d\sigma_\alpha(\lambda)=$$
$$=\int_0^\infty y(x,\ \lambda)\left[\int_0^a y(\xi,\ \lambda)\,\overline{\varphi(\xi)}\,d\xi\right]\sum_\alpha b_\alpha^2(\lambda)\,d\sigma_\alpha(\lambda). \tag{4}$$

Обозначим $\sum b_\alpha^2(\lambda)\,d\sigma_\alpha(\lambda)$ через $d\sigma(\lambda)$; $\sigma(\lambda)$ называется спектральной функцией нашей задачи. Функция

$$F(\lambda)=\int_0^a y(\xi,\ \lambda)\,\overline{\varphi(\xi)}\,d\xi=(\chi_\lambda,\ \varphi) \tag{5}$$

называется преобразованием Фурье — Штурма — Лиувилля от функции $\varphi(x)$; равенство (4) показывает, что функция $\varphi(x)$ воспроизводится по своему преобразованию Фурье — Штурма — Лиувилля по формуле обращения

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y(x, \lambda) F(\lambda)\, d\sigma(\lambda). \tag{6}$$

Равенство Парсеваля принимает вид

$$\|\varphi\|^2 = \int_0^a |\varphi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda). \tag{7}$$

Оно выведено нами для финитной функции $\varphi(x)$.

Функция $F(\lambda)$ есть элемент гильбертова пространства L^2_σ всех функций, интегрируемых в квадрате по мере σ. Формулы (5) и (6) показывают, что соответствие между функциями $\varphi(x)$ и $F(\lambda)$ может быть распространено до соответствия между всеми функциями $\varphi(x)$ пространства $L^2(0, \infty)$, с одной стороны, и всеми функциями $F(\lambda)$ пространства L^2_σ, с другой стороны; это соответствие сохраняет линейные соотношения и норму и является, следовательно, изоморфизмом.

Замечание. Аналогичная теорема справедлива, разумеется, и для случая самосопряженного оператора n-го порядка

$$Ay \equiv y^{(n)}(x) + a_1(x) y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) y(x)$$

с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами $a_j(x)$.

5. Общая система собственных функционалов у пары самосопряженных операторов. Следующее предложение представляет собой аналог теоремы об общем каноническом базисе двух квадратичных форм.

Пример 4. Пусть A и B — самосопряженные операторы, определенные в совершенном ядерном пространстве Φ; пусть, далее, оператор B является положительно определенным относительно скалярного произведения (φ, ψ), т. е. $(B\varphi, \varphi) > 0$ при $\varphi \neq 0$, и обратим в пространстве H.

Покажем, что *существует полная система обобщенных функций χ_λ, удовлетворяющих условиям*

$$A\chi_\lambda = \lambda B\chi_\lambda. \tag{1}$$

Оператор $B^{-1}A$ самосопряжен относительно скалярного произведения $(B\varphi, \psi)$, так как

$$(B(B^{-1}A\varphi), \psi) = (A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi) = (B\varphi, B^{-1}A\psi).$$

В силу классической спектральной теоремы он обладает спектральной функцией E_λ. Дифференцируя эту функцию по мере σ_λ, где $\sigma_\lambda(P) = \int_P d(E_\lambda e, e)$, мы получаем согласно теоремам § 4 полное семейство функционалов

$$\chi_\lambda = \frac{dE_\lambda e}{d\sigma_\lambda} \in \Phi'.$$

Покажем, что эти функционалы удовлетворяют уравнению (1).

Действительно, из равенства

$$B^{-1}AE(\Delta) = \int_\lambda^{\lambda'} \mu\, dE_\mu \qquad (\Delta = (\lambda, \lambda'))$$

мы получаем:

$$AE(\Delta) = B\int_\lambda^{\lambda'} \mu\, dE_\mu = \int_\lambda^{\lambda'} \mu\, d(BE_\mu),$$

откуда

$$\frac{AE(\Delta)e}{\sigma(\Delta)} = \frac{1}{\sigma(\Delta)} \int_\lambda^{\lambda'} \mu\, d(BE_\mu).$$

Переходя к пределу, получаем уравнение (1), что и требовалось.

В качестве примера рассмотрим уравнение, которое изучали С. Л. Соболев и Р. А. Александрян:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Ставится задача о нахождении функции $u(x, y, t)$, удовлетворяющей уравнению (2) и принимающей на гладкой границе Γ конечной области G заданные значения; кроме того, задается функция $f(x, y)$, равная $u(x, y, 0)$.

После разделения переменных искомая задача сводится к разысканию решений уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \lambda\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = 0, \tag{3}$$

которые на Γ принимают заданные значения. Оператор $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, как известно, является положительно определенным. Оба оператора $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ и Δ, определенные на функциях $\varphi(x)$, равных нулю на Γ, будут самосопряженными. Применяя доказанную выше теорему, получаем, что справедлива

Теорема 5. *Решения уравнения* (2), *принимающие на границе заданные значения, образуют полную систему обобщенных собственных функций.*

6. Переход к случаю коэффициентов конечного порядка гладкости. Условие бесконечной дифференцируемости коэффициентов (необходимое для того, чтобы дифференциальный оператор A переводил в себя основное пространство Φ, состоящее, как обычно, из бесконечно дифференцируемых функций) представляется слишком стеснительным в проблемах дифференциальных уравнений.

Следующее простое соображение позволит ослабить это условие. Ясно, что спектральное семейство E_λ и полная система функционалов χ_λ существуют и для оператора A, не обязательно переводящего Φ в себя; достаточно, чтобы оператор A был определен на плотном множестве $L_A \subset \Phi$, отображал его в гильбертово пространство H и допускал бы при этом самосопряженное расширение.

Но равенство $A\chi_\lambda = \lambda\chi_\lambda$, вообще говоря, уже перестает при этом иметь смысл, поскольку оператор A уже не определен на пространстве Φ'.

Есть важный случай, когда это равенство сохраняет смысл. Предположим, что оператор A переводит пространство Φ не просто в H, но в некоторое из нормированных пространств $\Phi_p \subset H$. Тогда сопряженный оператор A^* переводит Φ'_p в Φ'. Как мы заметили выше, оператор A^* является расширением A и поэтому знак * можно опустить; таким образом, наше предположение приводит к выводу, что оператор A определен на пространстве Φ'_p. Предположим, далее, что функционалы $\chi_\lambda = \frac{dE_\lambda e}{d\sigma_\lambda}$ также принадлежат к пространству Φ'_p. Тогда выражение $A\chi_\lambda$ имеет смысл и, как было доказано, имеет место равенство $A\chi_\lambda = \lambda\chi_\lambda$, что и требуется. Соображения такого рода применяются для линейных дифференциальных операторов.

Именно, мы можем предположить, что индекс p, определяющий порядок функционала, есть максимальное число непрерывных производных, имеющихся у функций, входящих в пространство Φ_p. (Это, во всяком случае, имеет место в рассмотренных нами основных пространствах K, S, $K\{M_p\}$.)

Если это предположение выполнено, то оператор умножения на функцию $a(x)$, имеющую непрерывные производные до порядка p, очевидно, переводит пространство Φ в Φ_p *), поэтому и линейный дифференциальный оператор

$$A = \sum a_k D^k$$

с коэффициентами $a_k(x)$, имеющими непрерывные производные до порядка p, переводит пространство Φ в Φ_p.

Это замечание позволяет заменить в предыдущих примерах условие бесконечной дифференцируемости коэффициентов уравнения условием достаточной гладкости, т. е. наличия производных только до некоторого порядка. Но пока еще остается неизвестным, каким должен быть этот порядок, поскольку он зависит еще и от индекса p, при котором $\|f\|_p$ имеет ограниченную вариацию.

В дальнейшем мы увидим, что в случае обычного скалярного произведения $(\varphi, \psi) = \int \varphi\overline{\psi}\,dx$ достаточным условием является наличие у коэффициентов лишь производных первого порядка; кроме того, мы во многих случаях сумеем показать, что обобщенные собственные функции в действительности являются обычными функциями, и укажем границы их роста на бесконечности.

§ 6. СТРУКТУРА ОБОБЩЕННЫХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

1. Основная теорема. Мы изучим в этом параграфе структуру обобщенных функций $\chi_\lambda = \frac{dE_\lambda e}{d\sigma_\lambda}$ в предположении, что операторы E_λ действуют в обычном гильбертовом

*) Предполагается, что поведение коэффициентов на бесконечности не препятствует этому умножению.

пространстве H функций $\varphi(x)$ $(x \in R_n)$ со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi) = \int \varphi(x) \overline{\psi(x)}\, dx. \qquad (1)$$

Основное пространство Φ будем предполагать, как всегда, совершенным. Предположение о ядерности пространства Φ здесь не будет использовано.

Некоторые предположения мы сделаем также относительно конкретного вида первых двух норм $\|\varphi\|_0$ и $\|\varphi\|_1$ в пространстве Φ. Именно, мы будем предполагать, что

1°. $\|\varphi\|_0^2 = \int |\varphi(x)|^2 M_0(x)\, dx$, где функция $\dfrac{1}{M_0(x)}$ интегрируема в квадрате;

2°. $\|\varphi\|_1 = \max [|D\varphi(x)| \cdot M_1(x)]$, где функция $\dfrac{\sqrt{|x_1 \ldots x_n|}}{M_1(x)}$ интегрируема в квадрате, а $D = \dfrac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}$.

Первое предположение приводит к выводу, что все основные функции $\varphi(x)$ интегрируемы в квадрате; второе, — что функции $D\varphi(x)$ остаются интегрируемыми в квадрате, будучи умножены на $\sqrt{|x_1 \ldots x_n|}$. Поскольку остальные нормы остаются произвольными, в эту схему укладывается весьма большое количество задач с операторами, симметричными относительно обычного скалярного произведения (1).

Обозначим через Φ_0 и Φ_1 пополнения пространства Φ по нормам $\|\varphi\|_0$ и $\|\varphi\|_1$.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Если самосопряженный оператор A действует в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением* (1), *то функционалы $\chi_\lambda = \dfrac{dE_\lambda e}{d\sigma_\lambda}$ определены и непрерывны на пространстве* Φ_1.

Для доказательства достаточно показать, в соответствии с п. 2 § 2, что равномерно ограничены величины

$$\sum \|E_{\lambda_{j+1}} e - E_{\lambda_j} e\|_{\Phi_1'}.$$

Положим $E(\Delta_j) = E_{\lambda_{j+1}} - E_{\lambda_j}$; операторы $E(\Delta_j)$ взаимно ортогональны при различных j и для любого вектора e, $\|e\| = 1$,

$$\sum_j (E(\Delta_j) e,\ E(\Delta_j) e) = (e,\ e) = 1.$$

Функционал $E(\Delta_j) e$ действует по формуле

$$(E(\Delta_j) e,\ \varphi) = \int E(\Delta_j) e(x) \overline{\varphi(x)}\, dx. \qquad (2)$$

Имея в виду дальнейшее интегрирование (2) по частям, введем функцию

$$G_{\Delta_j}(x) \equiv G_{\Delta_j}(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^{x_1} \ldots \int_0^{x_n} E(\Delta_j)\, e(\xi)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n. \qquad (3)$$

Функция $E(\Delta_j) e(x)$ получается из функции $G_{\Delta_j}(x)$ дифференцированием:

$$E(\Delta_j) e(x) = DG_{\Delta_j}(x), \qquad D = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}. \qquad (4)$$

Применяя неравенство Буняковского, можно получить оценку роста функции $G_{\Delta_j}(x)$:

$$|G_{\Delta_j}(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant \sqrt{|x_1 \ldots x_n|} \sqrt{\int_0^{x_1} \ldots \int_0^{x_n} |E(\Delta_j) e(\xi)|^2 d\xi} \leqslant \sqrt{|x_1 \ldots x_n|}, \qquad (5)$$

в предположении, что вектор $e(x)$ является нормированным.

Покажем, что имеет место равенство

$$\int E(\Delta_j) e(x) \overline{\varphi(x)}\, dx = (-1)^n \int G_{\Delta_j} e(x) \overline{D\varphi(x)}\, dx. \qquad (6)$$

Справедливость этого равенства легко проверяется интегрированием по частям в случае финитной функции $\varphi(x)$ (нужно только интегрирование по частям вести по области, вне и на границе которой $\varphi(x)$ обращается в нуль; тогда внеинтегральные члены исчезают). Если же $\varphi(x)$ — любая основная функция, то всегда можно образовать последовательность финитных основных функций $\varphi_\nu(x)$, сходящуюся к $\varphi(x)$ по топологии пространства Φ (вып. 2, гл. II, § 4). Последовательность $D\varphi_\nu$ сходится к $D\varphi$ также по топологии пространства Φ. Как и раньше, мы предполагаем, что сходимость по топологии Φ влечет сходимость по метрике H. Поэтому в равенстве

$$\int E(\Delta_j)\, e(x)\, \overline{\varphi_\nu(x)}\, dx = (-1)^n \int G_{\Delta_j} e(x)\, \overline{D\varphi_\nu(x)}\, dx$$

можно перейти к пределу при $\nu \to \infty$, что и приводит к равенству (6).

Итак,

$$(E(\Delta_j)\, e,\ \varphi) = (-1)^n \int G_{\Delta_j} e(x)\, \overline{D\varphi(x)}\, dx.$$

Отсюда

$$|(E(\Delta_j)\, e,\ \varphi)| \leqslant \int |G_{\Delta_j} e(x)\, D\varphi(x)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int \frac{|G_{\Delta_j} e(x)\, M_1(x)\, D\varphi(x)|}{M_1(x)}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \sup_x M_1(x)\, |D\varphi(x)| \cdot \int \frac{|G_{\Delta_j} e(x)|}{M_1(x)}\, dx.$$

Таким образом,

$$\|E_{\Delta_j} e\|_{\Phi_1'} \leqslant \int \frac{|G_{\Delta_j} e(x)|}{M_1(x)}\, dx,$$

и следовательно,

$$\sum \|E_{\Delta_j} e\|_{\Phi_1'} \leqslant \int \frac{\sum |G_{\Delta_j} e(x)|}{M_1(x)}\, dx.$$

Мы имеем при этом ($|\varepsilon_j(x)| = 1$):

$$\sum |G_{\Delta_j} e(x)| = \int_0^x \sum_j \varepsilon_j(\xi)\, E(\Delta_j)\, e(\xi)\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{|x_1 \ldots x_n|} \sqrt{\int_0^x \Big|\sum_j \varepsilon_j(\xi)\, E(\Delta_j)\, e(\xi)\Big|^2 d\xi} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{|x_1 \ldots x_n|} \sqrt{\int_R \Big|\sum_j \varepsilon_j(\xi)\, E(\Delta_j)\, e(\xi)\Big|^2 d\xi} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{|x_1 \ldots x_n|}\ \times$$

$$\times \sqrt{\int_R \Big[\sum_j \varepsilon_j(x)\, E(\Delta_j)\, e(\xi)\Big] \Big[\sum_k \overline{\varepsilon_k(x)\, E(\Delta_k)\, e(\xi)}\Big]\, d\xi} =$$

$$= \sqrt{|x_1 \ldots x_n|} \sqrt{\int_R \sum_{j,k} \varepsilon_j(\xi)\, \overline{\varepsilon_k(\xi)}\, E(\Delta_j)\, e(\xi)\, \overline{E(\Delta_k)\, e(\xi)}\, d\xi} =$$

$$= \sqrt{|x_1 \ldots x_n|} \sqrt{\sum_{j,k} \varepsilon_j(\xi)\, \overline{\varepsilon_k(\xi)} \int_R E(\Delta_j)\, e(\xi)\, \overline{E(\Delta_k)\, e(\xi)}\, d\xi} =$$

$$= \sqrt{|x_1 \ldots x_n|} \sqrt{\sum_j (E(\Delta_j)\, e,\ E(\Delta_j)\, e)} = \sqrt{|x_1 \ldots x_n|},$$

так как вектор e предположен нормированным.

В результате мы получаем:

$$\sum \|E_{\Delta_j} e\|_{\Phi_1'} \leqslant \int \frac{\sqrt{|x_1 \ldots x_n|}}{M_1(x)}\, dx = C < \infty, \tag{7}$$

что и требуется.

Общий вид линейного непрерывного функционала на пространстве Φ_1 нам известен (вып. 2, гл. II, § 4); он дается формулой

$$(f,\ \varphi) = \int M_1(x)\, f(x)\, D\varphi(x)\, dx, \tag{8}$$

где $f(x)$ — ограниченная измеримая функция. Иными словами, f есть результат применения оператора $D = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}$ к функции $g(x) = M_1(x)\, f(x)$. Эта последняя функция в силу ограниченности $f(x)$ возрастает не быстрее, чем $CM_1(x)$.

В качестве $M_1(x)$ можно взять любую функцию, лишь бы условие 2° выполнялось. Годится, например, функция $M_1(x) = (1 + |x|)^{\frac{3}{2}n + \varepsilon}$. Таким образом, мы пришли к следующей теореме.

Теорема 2. *Обобщенные собственные функции $\chi_\lambda(x)$ любого самосопряженного оператора A, действующего в пространстве L_2, являются производными* $\left(\text{вида } \frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}\right)$ *от измеримых функций, возрастающих не быстрее* $(1 + |x|)^{\frac{3}{2}n + \varepsilon}$.

2. Случай дифференциального оператора. В предыдущем параграфе мы рассмотрели вопрос о разложении по собственным функциям дифференциальных операторов. При этом в пп. 2—5 мы предполагали коэффициенты оператора бесконечно дифференцируемыми функциями, с той целью, чтобы оператор A переводил основное пространство Φ в себя, т. е. чтобы из $\varphi \in \Phi$ следовало, что и $A\varphi \in \Phi$. Теорема 1 настоящего параграфа позволяет освободиться от этого ограничения.

Действительно, пусть коэффициенты $a_j(x)$ дифференциального оператора A имеют непрерывные производные $D = \dfrac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}$ и удовлетворяют неравенству

$$|Da_j(x)| \leqslant M(x), \tag{1}$$

где $M(x)$ — монотонная функция.

Рассмотрим пространство функций Φ_1, в котором нормы определены равенствами 1° и 2°. Будем считать функции $M_0(x)$ и $M_1(x)$ такими, что

$$\frac{M(x)\sqrt{|x_1 \ldots x_n|}}{M_1(x)} \quad \text{и} \quad \frac{M(x)}{M_0(x)} \quad \text{интегрируемы.} \tag{2}$$

Принимая во внимание сказанное в конце предыдущего параграфа, мы заключаем, что $\dfrac{d(E_\lambda e, A\varphi)}{d\sigma_\lambda} = (\chi_\lambda, A\varphi)$ существует и имеет место равенство

$$(\chi_\lambda, A\varphi) = \lambda(\chi_\lambda, \varphi).$$

Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Всякий самосопряженный дифференциальный оператор, коэффициенты которого имеют непрерывную производную, имеет полную систему обобщенных собственных функций, сосредоточенных на* Φ_1.

Теорема 2 дает некоторую возможность судить о поведении собственных функционалов (следовательно, и собственных функций), если оператор задан во всем пространстве. Если же оператор A задается на функциях, определенных в конечной области G, то, повторяя доказательство теоремы 1, убеждаемся, что собственные функционалы $\chi_\lambda(x)$ являются производными от *ограниченных* непрерывных функций $f_\lambda(x)$. Следует отметить, что оператор A может быть и сингулярным, т. е. в случае дифференциального оператора коэффициенты оператора A могут иметь особенности.

Всякое обобщенное решение $\chi_\lambda = \dfrac{dE_\lambda e}{d\sigma_\lambda}$ уравнения Штурма — Лиувилля является обычным решением (см. § 5), т. е. функцией $y(x, \lambda)$, имеющей две непрерывные производные, которая удовлетворяет уравнению

$$-y'' + q(x)y = \lambda y.$$

Для любой финитной функции $\varphi(x)$ имеет место равенство

$$(\chi_\lambda, \varphi) = \int_a^b f_\lambda(x)\varphi'(x)\,dx = \int_a^b y(x, \lambda)\varphi(x)\,dx, \tag{3}$$

где $f_\lambda(x)$ — ограниченная функция. Из равенства (3) заключаем, что

$$\left|\int_0^x y(\xi, \lambda)\,d\xi\right| < C; \tag{4}$$

следовательно, справедлива

Теорема 4. *Какова бы ни была особенность коэффициента $q(x)$ уравнения Штурма — Лиувилля, заданного на конечном интервале, собственные функции $y(x, \lambda)$ удовлетворяют неравенству (4), т. е. имеют суммируемую особенность.*

Замечание. Аналогичная теорема имеет место и для любого уравнения $2n$-го порядка

$$y^{2n} + q_1(x)y^{(2n-1)} + \ldots + q_{2n}(x)y = \lambda y,$$

заданного в конечном интервале $[a, b]$.

§ 7. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ *)

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= Y_1(y_1, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dt} &= Y_n(y_1, \ldots, y_n), \end{aligned} \tag{1}$$

*) См. В. В. Немыцкий и В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, 2-е изд., Гостехиздат, М.—Л., 1949.

или, короче,

$$\frac{dy}{dt} = Y(y), \tag{1'}$$

где точка $y = (y_1, \ldots, y_n)$ принадлежит бесконечно дифференцируемому многообразию $\mathfrak{M}$, а функции $Y_1, \ldots, Y_n$ таковы, что обеспечивается существование и единственность решения системы (1) при любых начальных значениях $y^0 = (y_1^0, \ldots, y_n^0)$ на многообразии $\mathfrak{M}$.

Систему (1) можно интерпретировать физически, как закон движения точек на многообразии $\mathfrak{M}$. Для каждого y_0 и каждого t мы можем построить точку y_t как решение системы (1) с начальным условием $y(0) = y_0$, рассматриваемое в момент t, или как результат движения точки y_0 за время от 0 до t.

Таким образом, определяется преобразование многообразия $\mathfrak{M}$ в себя:

$$Q_t y_0 = y_t.$$

Эти преобразования образуют, очевидно, группу:

$$Q_{t+s} = Q_t \cdot Q_s.$$

Можно применять операцию Q_t не только к отдельным точкам, но и к целой области G, понимая под $Q_t G$ геометрическое место всех точек, в которое перейдет область G за время от 0 до t.

Мы предположим, что система (1) обладает «интегральным инвариантом», т. е. что существует непрерывная функция $F(x) > 0$ такая, что объем, задаваемый формой $F(x)\,dy_1, \ldots, dy_n$,

$$V(G) = \int_G F(y_1, \ldots, y_n)\,dy_1 \ldots dy_n \geqslant 0, \tag{2}$$

не меняется при движении системы:

$$V[G_t] = V[G]. \tag{3}$$

В динамических системах механики таким инвариантом обычно бывает так называемый фазовый объем системы.

Интегральный инвариант $F[G]$ можно принять за меру области G. Формула (2) показывает, что эта мера неотрицательна и вполне аддитивна, равенство (3) — что она инвариантна относительно движений системы.

Очень часто динамическую систему изучают при помощи тех или иных пространств функций, заданных на многообразии $\mathfrak{M}$. Рассмотрим, например, пространство $L_2(\mathfrak{M})$ всех функций $\varphi(x)$, интегрируемых в квадрате по мере μ, определяемой интегральным инвариантом системы. Движения динамической системы, естественно, порождают преобразования Q^t функций пространства $L_2(\mathfrak{M})$ по формуле

$$Q^t \varphi(x) = \varphi(Q_t x).$$

Тем самым в пространстве $L_2(\mathfrak{M})$ функций, интегрируемых в квадрате по мере μ, определено семейство операторов Q^t. В силу того, что в $L_2(\mathfrak{M})$ $\int \varphi^2(Q_t y) F(y)\,dy = \int \varphi^2(y) F(y)\,dy$, это семейство образует однопараметрическую группу унитарных операторов.

Как и всякая однопараметрическая группа унитарных операторов, согласно теореме Стона *), эта группа порождается некоторым фиксированным эрмитовым оператором A, так что

$$Q^t = e^{itA},$$

или, что то же,

$$Q^t \varphi = \int e^{it\lambda}\,dE_\lambda \varphi,$$

где E_λ — спектральное семейство оператора A.

Оператор A называется оператором бесконечно малого сдвига и вычисляется по общей формуле

$$iA\varphi = \lim_{t\to 0} \frac{Q^t\varphi - \varphi}{t}.$$

В нашем случае, как легко проверить, оператор A будет дифференциальным оператором первого порядка, а именно:

$$iA\varphi = \lim_{t\to 0} \frac{Q^t\varphi(y) - \varphi(y)}{t} = \frac{d}{dt}\varphi(Q_t y)\Big|_{t=0} = \sum \frac{\partial\varphi}{\partial y_{t,i}} \frac{dy_{t,i}}{dt}\Big|_{t=0} = \sum Y_i \frac{\partial\varphi}{\partial y_i},$$

*) См. Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу. ИЛ, М., 1954, стр. 408.

т. е. A есть дифференциальный оператор первого порядка

$$iA = \sum_{i=1}^{n} Y_i(y_1, \ldots, y_n) \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

Предположим далее, что существует совершенное ядерное пространство Φ, образованное из функций $\varphi(x) \in L_2(\mathfrak{M})$ и плотное в последнем пространстве. Тогда мы можем применить основную теорему § 4. В силу этой теоремы спектральному семейству E_λ оператора A отвечает полная система производных

$$\chi_\lambda = \frac{dE_\lambda e}{d\sigma_\lambda} \quad \left(\sigma_\lambda(P) = \int_P d(E_\lambda e, e)\right),$$

которые представляют собой функционалы на пространстве Φ.

Для обобщенных функций на пространстве Φ, естественно, определены операции «сдвига», именно

$$(Q^t f, \varphi) = (f(Q_t x), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(Q_t^{-1} x)).$$

Когда операцию сдвига Q^t применяют к функции $\chi_\lambda(x)$, эта функция воспроизводится с численным множителем $e^{it\lambda}$; действительно, мы имеем:

$$(Q^t \chi_\lambda(x), \varphi) = (\chi_\lambda(x), \varphi(Q_t^{-1} x)) = \lim_{\sigma(\Delta) \to 0} \left(\frac{E(\Delta) e}{\sigma(\Delta)}, \varphi(Q_t^{-1} x)\right) =$$

$$= \lim \left(\frac{Q_t E(\Delta) e}{\sigma(\Delta)}, \varphi(x)\right) = \lim \left(\frac{1}{\sigma(\Delta)} \int_\lambda^{\lambda+\Delta\lambda} e^{it\xi}\, dE_\xi e, \varphi(x)\right) =$$

$$= (e^{it\lambda} \chi_\lambda(x), \varphi(x)),$$

что и утверждалось.

Таким образом, *обобщенные функции $\chi_\lambda(x)$ являются собственными функциями операторов движения Q^t*. Для почти всех точек спектра λ существуют функционалы (χ_λ, φ), заданные на $D_{(1)}$ $\left(\text{пространство функций, имеющих производную } \frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}\right)$, такие, что

$$(\chi_\lambda, Q^t \varphi) = e^{it\lambda} (\chi_\lambda, \varphi).$$

При $\lambda = 0$ это был бы так называемый инвариантный функционал, аналог инвариантной меры «инвариантное распределение». Известен ряд динамических систем со счетно-кратным лебеговским спектром *). Для таких систем мы можем утверждать, что для почти каждого λ существует счетное число инвариантных функционалов $(\chi_\lambda^{(n)}, \varphi)$. Отметим, что задача о существовании производной $\frac{dE_\lambda e}{d\sigma_\lambda}$ в точке $\lambda = 0$ не решена. Если бы она была сделана, то мы бы получили, например, что для динамической системы со счетно-кратным лебеговским спектром, кроме инвариантной меры, существует счетное число инвариантных функционалов, определенных на один раз дифференцируемых функциях.

И. М. Гельфанд и С. В. Фомин показали, что, в частности, такими динамическими системами являются системы, естественным образом построенные на пространствах постоянной отрицательной кривизны.

§ 8. ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В предыдущем изложении мы иногда встречались с тем фактом, что для некоторых уравнений каждое решение в обобщенных функциях есть обычное решение. Так обстояло дело для обыкновенных линейных уравнений n-го порядка, и систем таких уравнений (с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами) (вып. I, гл. VII), для уравнения Лапласа (вып. 2, гл. III), для уравнения Штурма — Лиувилля с коэффициентами, обладающими непрерывной производной (§ 6). В этом параграфе будет показано, что всякое обобщенное решение эллиптического уравнения с достаточно гладкими коэффициентами является обычным решением.

Сначала уточним постановку задачи.

Пусть

$$P\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = \sum_{|q| \leqslant r} a_q(x) D^q u = 0 \qquad (1)$$

есть линейное дифференциальное уравнение порядка r, коэффициенты которого $a_q(x)$ обладают непрерывными производными до порядка $k \geqslant r$. Вообще говоря, мы не можем подставлять в левую часть вместо u любую обобщенную функцию, поскольку любые обобщенные функции мы можем умножать лишь на бесконечно дифференцируемые функции.

*) Спектр называется лебеговским, если каждая спектральная мера $\sigma_\alpha(\lambda)$ абсолютно непрерывна и все они эквивалентны обычной мере Лебега.

Но оказывается, что левая часть имеет смысл для тех обобщенных функций, которые являются при некотором достаточно малом m производными порядка m от непрерывных функций

$$u = D^m F \tag{2}$$

(обобщенная функция порядка m).

А именно, мы определяем в этом случае $P\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ и по формуле

$$\left(P\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u, \varphi\right) = \sum_{|q| \leqslant r} \left(a_q(x) D^q u, \varphi\right) =$$
$$= \sum_{|q| \leqslant r} \left(D^q \cdot D^m F, a_q(x)\varphi\right) =$$
$$= \sum_{|q| \leqslant r} \left(F, (-1)^{q+m} D^{q+m} a_q(x)\varphi\right) =$$
$$= \int F(x) \left[\sum_{|q| \leqslant r} (-1)^{q+m} D^{q+m} \left(a_q(x)\varphi(x)\right)\right] dx. \tag{3}$$

Последнее выражение имеет смысл при $r + m \leqslant k$; что мы и будем предполагать в дальнейшем выполненным. Если полученное выражение обращается в нуль при любой основной функции, то мы говорим, что обобщенная функция $u = D^m F$ есть *решение уравнения* (1). Заметим, что в этом случае выражение (3) обращается в нуль не только для бесконечно дифференцируемой, но и для любой функции $\varphi(x)$, финитной и обладающей непрерывными производными до порядка $r + m$.

Если обобщенная функция $u = D^m F$ есть решение уравнения (1) и в окрестности некоторой точки x_0 совпадает с обычной функцией $f(x)$, имеющей производные до порядка r, то в этой окрестности $u = u(x) = f(x)$ является решением уравнения (1) в обычном смысле. Действительно, если функция $\varphi(x)$ вне указанной окрестности равна нулю, то интегрированием по частям в интеграле (3) можно перевести все дифференциальные операции на первый множитель, что дает

$$\int \left[\sum_{|q| \leqslant r} a_q(x) D^q u(x) D^q u(x)\right] \varphi(x)\, dx = 0;$$

и так как $\varphi(x)$ произвольна, то всюду в указанной окрестности

$$\sum_{|q| \leqslant r} a_q(x) D^q u(x) \equiv 0.$$

Таким образом, если мы хотим доказать, что уравнение (1) не имеет иных решений (в классе обобщенных функций вида (2)), кроме обычных функций, нам достаточно показать, что решение (2) в окрестности каждой точки x_0 совпадает с обычной функцией, имеющей производные до порядка r.

Это и будет проделано для симметричных эллиптических уравнений (1). Приведем теперь определение симметричного эллиптического уравнения. Пусть, во-первых, оператор

$$P\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{|q| \leqslant r} a_q(x) D_0^q$$

симметричен; это означает, что для любых основных функций φ и ψ

$$(P\varphi, \psi) = \int \left[\sum a_q(x) D^q \varphi\right] \psi \cdot dx =$$
$$= \int \varphi \left[\sum (-1)^{|q|} D^q \left(a_q(x)\psi(x)\right)\right] dx =$$
$$= \int \varphi \left[\sum a_q(x) D^q \psi\right] dx,$$

или, что то же, для любой ψ

$$P\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi = \sum a_q(x) D^q \psi(x) = \sum (-1)^{|q|} D^q \left[a_q(x)\psi(x)\right].$$

Тот факт, что $u(x) = D^m F(x)$ есть решение уравнения (1), записывается в этом случае равенством

$$\int F(x) D^m P\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi(x)\, dx = 0 \tag{4}$$

для любой основной функции $\varphi(x)$; очевидно, что предельный переход обеспечивает выполнение (4) и для любой функции $\varphi(x)$, имеющей непрерывные производные до порядка $r+m$.

Пусть далее

$$P\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)=P_0\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)+P_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

есть разложение оператора P на главную часть P_0, содержащую лишь производные наивысшего порядка r и группу членов P_1 с производными меньшего порядка. Будем предполагать, что однородная форма, получающаяся заменой в операторе P_0 оператора $\frac{\partial}{\partial x_j}$ на аргумент α_j при всех вещественных значениях $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $\sum \alpha_j^2 \neq 0$, и любом x отлична от нуля (для операторов с вещественными коэффициентами — знакоопределена).

Тогда уравнение (1) называется симметричным эллиптическим (или просто эллиптическим) уравнением.

Теорема. *Если коэффициенты $a_q(x)$ эллиптического уравнения* (1) *порядка r имеют непрерывные производные до порядка $k \geqslant r$, то всякое решение $u(x)$ этого уравнения, являющееся обобщенной функцией порядка $m \leqslant k-r$, есть в действительности обычная функция, обладающая производными до порядка k, которая является тем самым обычным решением уравнения* (1).

Доказательство. Как мы уже говорили, достаточно показать, что у каждой точки x_0 имеется окрестность $U(x_0)$, в которой обобщенная функция $u(x)$ совпадает с некоторой обычной функцией $f(x)$, имеющей производные до порядка k.

В дальнейшем будут использованы существование и свойства фундаментального решения уравнения (1).

Определение фундаментального решения. Для дифференциального оператора $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ с постоянными коэффициентами мы ввели это понятие еще в вып. I гл. III § 2. Мы называли там фундаментальным решением обобщенную функцию $E(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)E(x)=\delta(x). \tag{5}$$

Если $g(x)$ — любая обобщенная функция (для определенности — финитная), то решение уравнения с правой частью $g(x)$

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)=g(x)$$

записывалось в виде свертки

$$u(x)=E(x)*g(x). \tag{6}$$

Для уравнений с переменными коэффициентами уже нет смысла определять фундаментальное решение формулой (5), поскольку нельзя больше пользоваться формулой свертки. Поэтому определение фундаментального решения имеет более сложный вид. Пусть коэффициенты $a_q(x)$ эллиптического уравнения (1) имеют по-прежнему производные до порядка r. Как показал Я. Б. Лопатинский, всегда существует функция $e(x, y)$, определенная при $|x-x_0|<\delta$, $|y-x_0|<\delta$, обладающая следующими свойствами:

1°. По каждому из переменных x и y функция $e(x, y)$ при $x \neq y$ имеет непрерывные производные до порядка k и удовлетворяет уравнению $Pe=0$.

2°. Если $f(y)$ непрерывно дифференцируема до порядка $q \geqslant 1$ и обращается в нуль при $|y-x_0| \geqslant \delta$, то при $|x-x_0| \leqslant \delta$ функция

$$\varphi(x)=\int e(x, y)f(y)\,dy$$

имеет непрерывные производные до порядка $q+k$ и удовлетворяет уравнению

$$L\varphi=f.$$

На основании свойства 2° можно было бы формально написать:

$$L_x e(x, y)=\delta(x-y).$$

Поэтому функцию $e(x, y)$, удовлетворяющую перечисленным требованиям, мы также будем называть фундаментальным решением эллиптического уравнения.

Возвращаясь к доказательству нашей теоремы, обозначим через $\alpha(t)$ $(-\infty<t<\infty)$ бесконечно дифференцируемую функцию, равную нулю при $|t|>\delta$ и единице в некоторой окрестности нуля. Пусть $g(x)$ — некоторая функция, равная нулю при $|x-x_0| \geqslant \delta$ и имеющая непрерывные производные до порядка m.

Рассмотрим функцию

$$h(x)=\int e(x,\ y)\,\alpha(x-y)\,g(y)\,dy=$$
$$=\int e(x,\ y)\,[\alpha(x-y)-1]\,g(y)\,dy+\int e(x,\ y)\,g(y)\,dy.$$

Эта функция имеет непрерывные производные, во всяком случае, до порядка $k+m$. Действительно, первый из интегралов в правой части обладает этим свойством в силу свойства 1° фундаментального решения (особенность исключена!); второй из интегралов — в силу свойства 2° фундаментального решения. Применим к функции $h(x)$ оператор $D^m P\left(x,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)$. Так как, по свойству 2°,

$$P\left(x,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)\int e(x,\ y)\,g(y)\,dy=g(x),$$

то

$$D^m P\left(x,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)h(x)=$$
$$=\int D_x^m P\left(x,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)e(x,\ y)\,[\alpha(x,\ y)-1]\,g(y)\,dy+D^m g(x).$$

Так как функция $h(x)$ имеет производные до порядка $k+m\geqslant r+m$, то имеет место равенство (4)

$$\int F(x)\,D^m P\left(x,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)h(x)\,dx=0.$$

Следовательно,

$$0=\int F(x)\,D^m P\left(x,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)h(x)\,dx=$$
$$=\int F(x)\left\{\int D_x^m P\left(x,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)e(x,\ y)\,[\alpha(x,\ y)-1]\,g(y)\,dy\right\}dx+$$
$$+\int F(x)\,D^m g(x)\,dx=\int\left[\int F(y)\,D_y^m P\left(y,\ \frac{\partial}{\partial y}\right)e(y,\ x)\times\right.$$
$$\left.\times[\alpha(y,\ x)-1]\,dy\right]g(x)\,dx+\int F(x)\,D^m g(x)\,dx.$$

Отсюда следует, что

$$\int F(x)\,D^m g(x)\,dx=\int f(x)\,g(x)\,dx, \tag{7}$$

где

$$f(x)=-\int F(y)\,D_y^m P\left(y,\ \frac{\partial}{\partial y}\right)e(y,\ x)\,[\alpha(y,\ x)-1]\,dy$$

непрерывна и имеет вместе с ядром $e(y,\ x)$ непрерывные производные до порядка k.

Но равенство (7) и означает, что решение $u=D^m F(x)$ есть (в окрестности точки x_0) обычная функция $f(x)$, обладающая непрерывными производными до порядка k. Теорема доказана.

Следствие. Если коэффициенты оператора $P\left(x,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)$ бесконечно дифференцируемы, то каждое решение этого уравнения, являющееся обобщенной функцией в пространстве K, есть обычная бесконечно дифференцируемая функция и тем самым — обычное бесконечно дифференцируемое решение. Для доказательства достаточно вспомнить, что каждая обобщенная функция в пространстве K локально имеет конечный порядок, и затем применить доказанную теорему.

Собственные функции оператора $A=P\left(x,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)$ являются решениями уравнения

$$P\left(x,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)\chi_\lambda(x)-\lambda\chi_\lambda(x)=0.$$

В § 6 мы видели, что у каждого вещественного самосопряженного оператора существует полная система обобщенных собственных функций $\chi_\lambda(x)$, которые являются первыми производными от непрерывных функций.

Применяя только что доказанную теорему, получаем:

Теорема 2. *Всякий симметричный эллиптический оператор порядка r в n-мерном пространстве R_n, коэффициенты которого имеют непрерывные производные до порядка r, имеет полную систему собственных функций.*

Все рассуждения настоящего параграфа базировались на существовании фундаментального решения с указанными свойствами. Существование таких решений доказано Я. Б. Лопатинским также и для систем эллиптических уравнений в смысле И. Г. Петровского. Поэтому теоремы 1 и 2 настоящего параграфа справедливы и для симметричных эллиптических систем в смысле И. Г. Петровского.

§ 9. АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе мы рассмотрим поведение собственных функций $\chi_\lambda(x)$ при $|x| \to \infty$.

Ранее мы уже получили некоторые результаты в этом направлении.

Так, мы видели, что первые интегралы от собственных функций уравнения Штурма — Лиувилля растут не быстрее $|x|^{\frac{3}{2}+\varepsilon}$ и получили аналогичные результаты для любых эллиптических операторов.

Во многих случаях можно дать более определенные характеристики поведения собственных функций на бесконечности, именно, для класса операторов, которые мы будем называть операторами Карлемана, мы покажем, что почти все собственные функции $\chi_\lambda(x)$ ограничены по x.

1. Операторы Карлемана. Приведем определение операторов Карлемана.

Самосопряженный оператор A, действующий в гильбертовом пространстве $L_2(R_n)$, как известно, для всех невещественных λ обладает резольвентой — оператором $(A-\lambda E)^{-1}$, имеющим конечную норму. Оператор A называется *карлемановским*, если существует хотя бы одно значение λ, при котором оператор $(A-\lambda E)^{-1}$ представляется как интегральный оператор

$$(A-\lambda E)^{-1}\varphi(x) = \int_{R_n} K(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi,$$

причем ядро $K(x, \xi)$ удовлетворяет условию

$$\int_{R_n} |K(x, \xi)|^2\,d\xi < C \tag{1}$$

с постоянной C, не зависящей от x.

Для собственных функций операторов Карлемана имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если A есть оператор Карлемана, то почти все по мере $\sigma_\lambda = (E_\lambda e, e)$ собственные функции оператора A*

$$\chi_\lambda(x) = \frac{dE_\lambda e}{d\sigma_\lambda},$$

ограничены по x.

Доказательство. Обозначим через L_1 пространство суммируемых функций, определенных во всем пространстве R_n. Известно *), что всякий линейный непрерывный функционал (f, φ), заданный в L_1, имеет вид

$$(f, \varphi) = \int_R l(x)\varphi(x)\,dx, \tag{2}$$

где $l(x)$ — ограниченная измеримая функция. Норма функционала (1) равна $\operatorname{vrai}\max|l(x)|$.

Если мы покажем, что множество функций $E_\lambda e(x)$ порождает семейство непрерывных линейных функционалов в L_1, имеющее сильно ограниченную вариацию, т. е. такое, что

$$\sum \max_x |E_{\lambda_{j+1}}e(x) - E_{\lambda_j}e(x)| < M \tag{3}$$

(константа M не зависит от x и разбиения), то на основании теоремы 1 § 2 для почти всех λ по мере σ будет существовать производная $\frac{dE_\lambda e(x)}{d\sigma}$, являющаяся функционалом над L_1. Отсюда и будет следовать утверждение теоремы.

Для доказательства неравенства (3) обозначим $(A-\lambda_0 E) \times E_\lambda e(x)$ через $G_\lambda(x)$, и пусть $|\varepsilon_j| = 1$. Пусть, далее, $E_{\lambda_{j+1}}e(x) - E_{\lambda_j}e(x) = f(x, \lambda_{j+1}) - f(x, \lambda_j)$. Воспользовавшись тем, что оператор A карлемановского типа, т. е. выполнено условие (1), мы можем при любых ε_j написать равенства

$$\sum_j \varepsilon_j[f(x, \lambda_{j+1}) - f(x, \lambda_j)] =$$
$$= \sum \varepsilon_j \int K(x, y)[G_{\lambda_{j+1}}(y) - G_{\lambda_j}(y)]\,dy =$$
$$= \int K(x, y)\Big[\sum \varepsilon_j |G_{\lambda_{j+1}}(y) - G_{\lambda_j}(y)|\,dy.$$

*) Л. А. Люстерник и В. И. Соболев, Элементы функционального анализа. Гостехиздат, М. — Л., 1951, § 22.

В силу неравенства Коши — Буняковского

$$\left|\sum \varepsilon_j [f(x,\ \lambda_{j+1}) - f(x,\ \lambda_j)]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} K^2(x,\ y)\, dy} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \left|\sum \varepsilon_j [G_{\lambda_{j+1}}(y) - G_{\lambda_j}(y)]\right|^2 dy. \tag{4}$$

Так как при $i \neq j$ векторы $E_{\lambda_{i+1}} e(x) - E_{\lambda_i} e(x)$ и $E_{\lambda_{j+1}} e(x) - E_{\lambda_j} e(x)$, а вместе с ними и векторы $G_{\lambda_{i+1}}(x) - G_{\lambda_i}(x)$ и $G_{\lambda_{j+1}}(x) - G_{\lambda_j}(x)$ ортогональны, то неравенство (4) дает:

$$\sum \varepsilon_j (f(x,\ \lambda_{j+1}) - f(x,\ \lambda_j)) \leqslant C \sqrt{\int_{\lambda} (\lambda - \lambda_0)^2\, d\sigma(\lambda)} \leqslant CC_1\ ^{*}). \tag{5}$$

Поскольку ε_j могут быть выражены произвольно, неравенство (2) доказано. Попутно мы доказали, что производная $\frac{dE_\lambda e(x)}{d\sigma_\lambda}$ есть обычная функция.

Замечание 1. Вместо требования существования резольвенты с условием (1) можно было бы потребовать, чтобы при некотором m оператор $(A - \lambda_0 E)^{-m}$ был интегральным с ядром, удовлетворяющим тому же условию. Такие операторы мы будем называть *обобщенными карлемановскими*. Доказательство теоремы 1 для обобщенных карлемановских операторов проходит по той же схеме, с заменой

$$G_\lambda(x) = (A - \lambda_0 E) E_\lambda e(x)$$

на

$$G_\lambda^{(m)}(x) = (A - \lambda_0 E)^m E_\lambda e(x).$$

Замечание 2. Если известно, что ядро $K(x,\ y)$ резольвенты оператора A удовлетворяет неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} K^2(x,\ y)\, dy \leqslant M(|\,x\,|),$$

где $|\,x\,| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ и $M(|\,x\,|)$ — монотонная функция от $|\,x\,|$, то аналогично показывается, что собственные функции растут не быстрее $CM(|\,x\,|)$ (C — некоторая константа).

*) Интеграл в правой части неравенства (5) существует, так как $e(x)$ принадлежит области определения оператора A.

Замечание 3. Собственные функции $\frac{dE_\lambda e(x)}{d\sigma_\lambda}$, вообще говоря, не будут равномерно ограничены по λ. Однако можно показать, что для любого числа N найдется множество S_N меры, меньшей $\frac{1}{N}$, и такое, что если из спектра оператора A выбросить множество S_N, то на оставшейся части собственные функции будут ограничены равномерно и по λ.

В качестве примера рассмотрим стационарное уравнение Шрёдингера во всем пространстве

$$-\Delta u + q(x)\, u = \lambda u,\quad x = (x_1,\ x_2,\ x_3),\quad q(x) > C_0 > -\infty.$$

При $-\lambda_0 + C_0 = a > 0$ резольвента оператора $-\Delta + q$ есть интегральный оператор с ядром $K(x,\ y,\ \lambda_0)$, для которого выполнено условие [ ] *)

$$K(x,\ y,\ \lambda_0) < \frac{e^{-\sqrt{a}\, r}}{r},\qquad r = |\,x - y\,|.$$

Из этого неравенства следует, что оператор $-\Delta + q(x$ карлемановского типа. Отсюда вытекает

Теорема 2. *Если $q(x) > C_0 > -\infty$, то по мере σ_λ, отвечающей функции $\sigma(\lambda) = (E_\lambda e,\ e)$, почти все собственные функции $\chi_\lambda(x) = \frac{dE_\lambda e}{d\sigma_\lambda}$ уравнения Шрёдингера $-\Delta u + qu = \lambda u$ ограничены по x.*

2. Эллиптические операторы. В предыдущем пункте было показано, что у карлемановских операторов собственные функции ограничены по x.

Напомним, что оператор A мы назвали карлемановским, если при некотором λ существует резольвента $(A - \lambda E)^{-1}$, которая является оператором интегрального типа:

$$(A - \lambda E)^{-1} \varphi(x) = \int_R K(x,\ \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi,$$

*) Отметим, что ядро резольвенты оператора $Lu = -\Delta u + au$ равно точно $\frac{e^{-\sqrt{a}\, r}}{r}$, в чем легко убедиться непосредственной проверкой.

причем ядро $K(x, \xi)$ таково, что

$$\int_R |K(x, \xi)|^2 d\xi < C, \tag{1}$$

где C не зависит от x.

Если некоторая итерация резольвенты есть оператор интегрального типа

$$(A - \lambda E)^{-m}\varphi(x) = \int_R K(x, \xi)\varphi(\xi)\, d\xi,$$

удовлетворяющий тому же условию (1), то, как было указано в замечании 1 к п. 1, теорема об ограниченности собственных функций остается справедливой; оператор A мы назвали в этом случае обобщенным карлемановским.

Возникает вопрос, какие из дифференциальных операторов обладают этими свойствами.

В этом параграфе мы укажем один важный широкий класс операторов, именно эллиптических полуограниченных дифференциальных операторов, которые заведомо будут обобщенными карлемановскими.

Прежде чем давать точные формулировки и доказательства, скажем несколько слов о тех соображениях, которые приводят к дальнейшим построениям.

Рассмотрим равенство

$$\int_0^\infty e^{-at}\, dt = \frac{1}{a},$$

имеющее место при $a > 0$.

Если формально вместо числа a подставить в этом равенстве оператор B, то мы получим равенство

$$\int_0^\infty e^{-Bt}\, dt = B^{-1}$$

или, применяя операторы e^{-Bt} и B^{-1} к фиксированному элементу $\varphi_0(x)$,

$$\int_0^\infty e^{-Bt}\varphi_0(x)\, dt = B^{-1}\varphi_0(x).$$

Вектор $e^{-Bt}\varphi_0(x) = \varphi(t, x)$ есть решение (опять-таки, формальное) задачи Коши

$$\frac{\partial\varphi(t, x)}{\partial t} = -B\varphi(t, x),$$

$$\varphi(0, x) = \varphi_0(x).$$

Эти эвристические соображения приводят к мысли о возможности построения резольвенты $(A - \lambda E)^{-1}$ с помощью решения задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial\varphi(t, x)}{\partial t} = -(A - \lambda E)\varphi(t, x)$$

путем интегрирования этого решения по t от 0 до ∞. Так как решение задачи Коши во многих случаях записывается в форме интеграла типа Пуассона

$$\varphi(x, t) = \int_R K(x, \xi, t)\varphi(\xi, 0)\, d\xi,$$

то в результате интегрирования по t мы получим некоторый интегральный оператор; останется исследовать свойства ядра этого оператора и выяснить, в частности, когда выполняется карлемановское условие.

Теперь мы переходим к точным формулировкам.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор вида

$$Au = P_r\left(\frac{\partial}{\partial x}, x\right)u + R_{r-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}, x\right)u. \tag{2}$$

Здесь $P_r\left(\frac{\partial}{\partial x}, x\right)$ означает однородный многочлен относительно $\frac{\partial}{\partial x_j}$ порядка r, с вещественными коэффициентами, ограниченными во всем n-мерном пространстве вместе с производными до порядка r; $R_{r-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}, x\right)$ означает многочлен относительно $\frac{\partial}{\partial x_j}$ порядка не выше $r - 1$, коэффициенты которого ограничены во всем пространстве вместе с производными первого порядка.

Оператор A предполагается симметричным и эллиптическим в том смысле, который мы разъяснили в начале предыдущего параграфа.

Кроме того, мы будем предполагать, что оператор A полуограничен снизу, т. е. для всех f из своей области определения он удовлетворяет неравенству

$$(Af, f) \geqslant C(f, f)$$

с фиксированной постоянной C. Условие полуограниченности снизу во многих случаях есть следствие условия эллиптичности; но поскольку соответствующей общей теоремы нет, мы вынуждены это условие налагать дополнительно.

Рассмотрим интересующую нас задачу Коши

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -(A - \lambda E)\, u(x, t), \\ &u(x, 0) = \varphi_0(x). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Прежде всего мы произведем в этом уравнении замену неизвестной функции по формуле

$$u(x, t) = e^{\lambda t} v(x, t),$$

после чего уравнение преобразуется к более простому виду

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = -Av(x, t) \tag{4}$$

с новым начальным условием

$$v(x, 0) = \psi_0(x).$$

Уравнение (4) есть параболическое уравнение в смысле Петровского.

Мы указали в гл. III, § 2,4, что решение задачи Коши для параболического уравнения (4) с теми условиями на коэффициенты, которые были сформулированы выше, записывается в форме интеграла Пуассона

$$v(x, t) = \int_R G(x, \xi, t)\, \psi_0(\xi)\, d\xi,$$

причем ядро $G(x, \xi, t)$ удовлетворяет условию

$$|G(x, \xi, t)| \leqslant C \frac{e^{Mt}}{t^{n/r}} e^{-\frac{b|x-\xi|^{r'}}{t^{1/(r-1)}}} \qquad \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1\right), \tag{5}$$

где M — некоторая постоянная.

Для $u(x, t)$ мы получаем выражение

$$u(x, t) = e^{\lambda t} \int G(x, \xi, t)\, \psi_0(\xi)\, d\xi = \int G_1(x, \xi, t)\, \psi_0(\xi)\, d\xi,$$

где $G_\lambda(x, \xi, t) = e^{\lambda t} G(x, \xi, t)$ удовлетворяет неравенству

$$|G_\lambda(x, \xi, t)| \leqslant C \frac{e^{(M+\lambda)t}}{t^{n/r}} e^{-\frac{b|x-\xi|^{r'}}{t^{1/(r-1)}}}. \tag{6}$$

Если взять $\lambda < -M$, то для функции $G_\lambda(x, \xi, t)$ интеграл по t от 0 до ∞ будет заведомо сходиться. (Заметим, что при $t = 0$ правая часть (6) обращается в нуль.)

Итак, мы можем построить выражение

$$\int_R \left\{ \int_0^\infty G_\lambda(x, \xi, t)\, dt \right\} \psi_0(\xi)\, d\xi.$$

Покажем теперь, что этот интегральный оператор (над функциями $\psi_0(\xi)$) совпадает с оператором $(A - \lambda E)^{-1}$.

Мы воспользуемся при этом следующим результатом спектральной теории эллиптических дифференциальных операторов, принадлежащим Ф. Броудеру и Л. Гордингу.

Оператор A, как симметричный и полуограниченный снизу, может быть расширен до самосопряженного, который будет также полуограничен снизу (см. введение к гл. IV), так что, сохраняя прежнее обозначение A для расширенного оператора, мы имеем:

$$(A\varphi, \varphi) \geqslant C_0(\varphi, \varphi)$$

для всех φ из области определения оператора A.

Как и всякий самосопряженный оператор, A обладает спектральным разложением

$$A = \int_S \eta\, dE_\eta,$$

причем спектр S оператора A располагается на полупрямой $C_0 \leqslant \eta < \infty$. Известно, что резольвента $(A - \lambda E)^{-1}$ любого самосопряженного оператора существует по крайней мере для всех невещественных λ. Оказывается, что для эллиптического дифференциального оператора A резольвента везде, где она существует, в частности, при всех $\lambda < C_0$ представляется в форме интегрального оператора

$$(A-\lambda E)^{-1}\varphi = R_\lambda \varphi = \int\limits_{R_n} k(x, y, \lambda)\varphi(y)\,dy, \tag{7}$$

где функция $k(x, y, \lambda)$ выражается через так называемое спектральное ядро $\psi(x, y, \lambda)$ и спектральную меру $\tau(\eta)$ по формуле

$$k(x, y, \lambda) = \int\limits_{\eta\in S} \frac{\psi(x, y, \eta)}{\eta - x}\,d\tau(\eta)$$

(S — спектр оператора A).

Ядро $\psi(x, y, \lambda)$ при каждом фиксированном η по x имеет производные до порядка r и удовлетворяет (в обычном смысле) уравнению

$$A_x\psi(x, y, \eta) = \eta\psi(x, y, \eta) \tag{8}$$

и для любой функции $\varphi(x)$ из области определения оператора A функция от η

$$\int\limits_{R_n} \psi(x, y, \eta)\varphi(y)\,dy$$

абсолютно интегрируема по мере $\sigma(\eta)$ и имеет место равенство

$$f(x) = \int\limits_S \left\{\int\limits_{R_n} \psi(x, y, \eta) f(y)\,dy\right\} d\tau(\eta). \tag{9}$$

Можно сказать, что в ядре $\psi(x, y, \eta)$ собраны все собственные функции, отвечающие одному и тому же η.

Покажем теперь, что в рассматриваемом нами случае ядро $\psi(x, \xi, \lambda)$ связано с функцией $G_\lambda(x, \xi, \lambda)$ формулой

$$\psi(x, \xi, \lambda) = \int\limits_0^\infty G_\lambda(x, \xi, t)\,dt.$$

Для этого образуем функцию

$$v(x, t) = \int\limits_S e^{(\lambda-\eta)t}\left\{\int\limits_{R_n} \psi(x, y, \eta)\varphi(y)\,dy\right\} d\sigma(\eta),$$

где $\lambda < C_0$.

В силу (9)

$$v(x, 0) = \varphi(x).$$

Далее,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \int\limits_S (\lambda-\eta)\,e^{(\lambda-\eta)t}\left\{\int\limits_{R_n} \psi(x, y, \eta)\varphi(y)\,dy\right\} d\sigma(\eta) =$$

$$= \lambda\int\limits_S e^{(\lambda-\eta)t}\left\{\int\limits_{R_n} \psi(x, y, \eta)\varphi(y)\,dy\right\} d\sigma(\eta) -$$

$$- \int\limits_S e^{(\lambda-\eta)t}\left\{\int\limits_{R_n} \eta\psi(x, y, \eta)\varphi(y)\,dy\right\} d\sigma(\eta) = -(A-\lambda E)\,v,$$

так как

$$\eta\psi(x, y, \eta) = A_x\psi(x, y, \eta)$$

и оператор A_x, действующий по координате x, может быть вынесен за знаки обоих интегралов.

Следовательно, функция $v(x, t)$ есть решение задачи Коши для уравнения (3) с начальным условием $v(x, 0) = \varphi(x)$, поэтому в силу единственности решения задачи Коши можно написать:

$$\int\limits_S e^{(\lambda-\eta)t}\left\{\int\limits_{R_n} \psi(x, \xi, \eta)\varphi(\xi)\,d\xi\right\} d\sigma(\eta) = \int\limits_{R_n} G_\lambda(x, \xi, t)\,\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Интегрируя по t в пределах от 0 до ∞ и имея в виду, что $\int\limits_0^\infty G_\lambda(x, \xi, t)\,dt$ абсолютно сходится, получаем:

$$\int\limits_{R_n}\left\{\int\limits_S \frac{\psi(x, \xi, \eta)}{\lambda-\eta}\,e^{(\lambda-\eta)t}\Big|_0^\infty \varphi(\xi)\,d\xi\right\} d\sigma(\eta) =$$

$$= \int\limits_{R_n}\int\limits_0^\infty G_\lambda(x, \xi, t)\,\varphi(\xi)\,dt\,d\xi,$$

или, поскольку $\varphi(\xi)$ произвольна,

$$K(x, \xi, \lambda_0) = \int_{\lambda} \frac{\psi(x, \xi, \eta)}{\eta - \lambda} d\sigma(\eta) = \int_0^{\infty} G_{\lambda}(x, \xi, t)\, dt, \qquad (10)$$

что мы и утверждали.

Заметим, что ядро интегрального оператора, которым является резольвента $(A - \lambda E)^{-1}$ любого полуограниченного самосопряженного расширения оператора A, определено формулой (10) *однозначно.* Из этого следует единственность резольвенты и, следовательно, единственность самосопряженного расширения самого оператора A (поскольку резольвента отображает все пространство на область определения оператора A). Если бы исходный оператор был не самосопряженным, то он обладал бы по крайней мере двумя различными самосопряженными полуограниченными расширениями. Мы получаем несколько неожиданный вывод: *всякий симметричный эллиптический полуограниченный оператор с теми условиями на коэффициенты, о которых было сказано выше, является самосопряженным.*

Теперь нам остается показать, что ядро

$$K(x, \xi, \lambda) = \int_0^{\infty} G_{\lambda}(x, \xi, t)\, dt$$

резольвенты оператора A (или некоторой ее итерации) удовлетворяет неравенству

$$\int_{R_n} |K(x, \xi, \lambda)|^2 d\xi < C,$$

где C не зависит от x.

При интегрировании функции $|K(x, \xi, \lambda)|^2$ по ξ мы рассмотрим вначале область, где $|\xi - x| \geqslant 1$. Покажем, что в этой области для $K(x, \xi, \lambda)$ справедлива оценка

$$|K(x, \xi, \lambda)| \leqslant C_1 e^{-B|\xi - x|}. \qquad (11)$$

Воспользуемся оценкой (6):

$$|G_{\lambda}(x, \xi, t)| \leqslant C \frac{e^{-at}}{t^{n/r}} e^{-\frac{b|x-\xi|^{r'}}{t^{1/(r-1)}}},$$

$$a = -M - \lambda > 0.$$

Обозначим $x - \xi$ через y и разобьем интеграл (10) на два слагаемых следующим образом:

$$J = \int_0^{\infty} G_{\lambda}(x, \xi, t)\, dt = \int_0^1 + \int_1^{\infty} = J_1 + J_2.$$

При этом

$$|J_1| \leqslant \int_0^1 |G_{\lambda}(x, \xi, t)|\, dt \leqslant C \int_0^1 \frac{e^{-at}}{t^{n/r}} e^{-\frac{b|y|^{r'}}{t^{1/(r-1)}}} dt =$$

$$= C \int_0^1 t^{-\frac{n}{r}} e^{-\frac{(b-\varepsilon)|y|^{r'}}{t^{1/(r-1)}} - \frac{\varepsilon |y|^{r'}}{t^{1/(r-1)}}} dt \leqslant$$

$$\leqslant C e^{-(b-\varepsilon)|y|^{r'}} \int_0^1 t^{-\frac{n}{r}} e^{-\frac{\varepsilon |y|^{r'}}{t^{1/(r-1)}}} dt \leqslant$$

$$\leqslant C e^{-(b-\varepsilon)|y|^{r'}} \int_0^1 t^{-\frac{n}{r}} e^{-\frac{\varepsilon}{t^{1/(r-1)}}} dt =$$

$$= C_1 e^{-(b-\varepsilon)|y|^{r'}}. \qquad (12)$$

Далее,

$$|J_2| \leqslant \int_1^{\infty} |G_{\lambda}(x, \xi, t)|\, dt \leqslant C \int_1^{\infty} \frac{e^{-at}}{t^{n/r}} e^{-\frac{b|y|^{r'}}{t^{1/(r-1)}}} dt \leqslant$$

$$\leqslant C \int_1^{|y|} e^{-at} e^{-\frac{b|y|^{r'}}{t^{1/(r-1)}}} dt + C \int_{|y|}^{\infty} e^{-at} e^{-\frac{b|y|^{r'}}{t^{1/(r-1)}}} dt;$$

заменяя в первом из интегралов t на бо́льшую величину $|y|$ и используя тот факт, что $r' - \frac{1}{r-1} = 1$, получаем, наконец:

$$|J_2| \leqslant Ce^{-b|y|^{r'}} \int_0^\infty e^{-at} dt + C \int_{|y|}^\infty e^{-at} dt =$$

$$= \frac{C}{a} e^{-b|y|^{r'}} + \frac{C}{a} e^{-a|y|}. \quad (13)$$

Из (12) и (13) следует, что при $|\xi - x| = |y| \geqslant 1$ оценка (11) справедлива.

Из этой оценки следует, что

$$\int_{|x-\xi| \geqslant 1} |K(x, \xi, \lambda)|^2 d\xi \leqslant C_1, \quad \int_{|x-\xi| \geqslant 1} e^{-B|\xi - x|} d\xi = C_2, \quad (14)$$

где C_2 не зависит от x.

Теперь рассмотрим ядро $K(x, \xi, \lambda)$ в области $|x - \xi| \leqslant 1$. Мы покажем, что в этой области оно удовлетворяет неравенству

$$|K(x, \xi, \lambda)| \leqslant \frac{C_3}{|x-\xi|^s}, \quad s < n. \quad (15)$$

Для доказательства снова воспользуемся оценкой (6) и положим $x - \xi = y$:

$$|G_\lambda(x, \xi, t)| \leqslant C \frac{e^{-at}}{t^{n/r}} e^{-\frac{b|y|^{r'}}{t^{1/(r-1)}}}.$$

Заменим здесь e^{-at} на большую величину $At^{-\beta}$ $(\beta > 0)$; тогда мы получим:

$$|G_\lambda(x, \xi, t)| \leqslant \frac{C'}{t^{\beta + \frac{n}{r}}} e^{-\frac{b|y|^{r'}}{t^{1/(r-1)}}}.$$

Для обеспечения сходимости последующего интеграла по t в пределах от 0 до ∞ будем предполагать, что $\beta > 1 - \frac{n}{r}$.

Дальнейшая подстановка

$$\tau = \frac{|y|^{r'}}{t^{(1/r-1)}}, \quad t = \frac{|y|^{r'(r-1)}}{\tau^{r-1}} = \frac{|y|^r}{\tau^{r-1}}, \quad dt = -(r-1)\frac{|y|^r}{\tau^r} d\tau$$

приводит к неравенству

$$|K(x, \xi, \lambda)| \leqslant \int_0^\infty |G_\lambda(x, \xi, t)| dt \leqslant$$

$$\leqslant C'' \int_0^\infty e^{-b\tau} |y|^r \left(\frac{|y|^r}{\tau^{r-1}}\right)^{-\frac{n}{r} - \beta} \frac{d\tau}{\tau^r} = C'' |y|^{(1-\beta)r - n} \int_0^\infty e^{-b\tau} \frac{d\tau}{\tau^\alpha},$$

где через α обозначено выражение $r - \left(\frac{n}{r} + \beta\right)(r-1)$.

Выберем β так, чтобы удовлетворялось неравенство $1 - \frac{n}{r} < \beta < 1$. Мы видим, что оценка (15) справедлива, что и утверждалось.

Итак, ядро $K(x, \xi, \lambda)$ удовлетворяет неравенствам

$$|K(x, \xi, \lambda)| \leqslant \frac{C_3}{|x-\xi|^s} \quad (s < n) \quad \text{при} \quad |x - \xi| \leqslant 1, \quad (16)$$

$$|K(x, \xi, \lambda)| \leqslant C_1 e^{-B|x-\xi|} \quad \text{при} \quad |x - \xi| \geqslant 1. \quad (17)$$

Оценки (16) и (17) можно объединить в одну оценку, справедливую при всех x и ξ:

$$|K(x, \xi, \lambda)| \leqslant \frac{C}{|x-\xi|^s} e^{-B|x-\xi|}. \quad (18)$$

Если $s < \frac{n}{2}$ $\left(\text{т. е. } r > \frac{n}{2}\right)$, то, очевидно, интеграл

$$\int |K^2(x, \xi, \lambda)| d\xi$$

существует и не превосходит постоянной, не зависящей от x. Таким образом, оператор A в этом случае является карлемановским.

17 Зак. 2918. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов

Пусть $s \geqslant \frac{n}{2}$. В этом случае нам придется рассмотреть итерации ядра $K(x, \xi, \lambda)$.

Положим $K(x, \xi, \lambda) = K_1(x, \xi)$ и построим итерированное ядро

$$K_2(x, \xi) = \int K_1(x, \eta) K_1(\eta, \xi)\, d\eta.$$

Мы имеем при этом

$$|K_2(x, \xi)| \leqslant \int |K_1(x, \eta) K_1(\eta, \xi)|\, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant C \int \frac{e^{-B|x-\eta| - B|\eta-\xi|}}{|x-\eta|^s\, |\eta-\xi|^s}\, d\eta.$$

Положим здесь $\eta - \xi = \tau$, $\eta = \xi + \tau$, $d\eta = d\tau$, $x - \eta = (x - \xi) - \tau$ и $x - \xi = z$; тогда

$$|K_2(x, \xi)| \leqslant C \int \frac{e^{-B|z-\tau| - B|\tau|}}{|z-\tau|^s\, |\tau|^s}\, d\tau.$$

Мы используем далее неравенство

$$|z - \tau| + \frac{1}{2}|\tau| \geqslant \frac{1}{3}|z|, \tag{19}$$

имеющее место при любых τ и z. Для доказательства его справедливости заменим его эквивалентным неравенством

$$|e - \sigma| + \frac{1}{2}|\sigma| \geqslant \frac{1}{3}, \tag{20}$$

где $\sigma = \frac{\tau}{|z|}$, и $e = \frac{z}{|z|}$ — единичный вектор. Неравенство (20) могло бы нарушаться, лишь если бы оба слагаемые в левой части были бы меньше $\frac{1}{3}$; но мы имели бы тогда $|\sigma| < \frac{2}{3}$, $|e - \sigma| < \frac{1}{3}$, что, очевидно, невозможно.

Из неравенства (19) следует оценка

$$|K_2(x, \xi)| \leqslant C e^{-\frac{B}{3}|z|} \int \frac{e^{-\frac{B}{2}|\tau|}\, d\tau}{|z-\tau|^s\, |\tau|^s}. \tag{21}$$

Последний интеграл ограничен при $|z| \geqslant 2$, так как при этом

$$\int \frac{e^{-\frac{B}{2}|\tau|}\, d\tau}{|z-\tau|^s\, |\tau|^s} = \int\limits_{|\tau| \leqslant 1} + \int\limits_{|\tau| \geqslant 1} \leqslant \int\limits_{|\tau| \leqslant 1} e^{-\frac{B}{2}|\tau|} |\tau|^{-s}\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_{|\tau| \geqslant 1} e^{-\frac{B}{2}|\tau|} |z-\tau|^{-s}\, d\tau \leqslant C' + C''.$$

При $|z| \leqslant 2$ преобразуем интеграл в (21) следующим образом:

$$\int \frac{e^{-\frac{B}{2}|\tau|}}{|z-\tau|^s\, |\tau|^s} \leqslant \int\limits_{|z-\tau| \leqslant \frac{|z|}{2}} \frac{d\tau}{|z-\tau|^s\, |\tau|^s} +$$

$$+ \int\limits_{\substack{\frac{|z|}{2} \leqslant |z-\tau| \\ |\tau| \leqslant 2|z|}} \frac{d\tau}{|z-\tau|^s\, |\tau|^s} + \int\limits_{|\tau| \geqslant 2|z|} \frac{e^{-\frac{B}{2}|\tau|}\, d\tau}{|z-\tau|^s\, |\tau|^s}. \tag{22}$$

В знаменателе первого слагаемого заменим $|\tau|$ на меньшую величину $\frac{1}{2}|z|$, вынесем за знак интеграла $\frac{2^s}{|z|^s}$ и затем, после замены $z - \tau = \sigma$, вычислим получившийся интеграл в сферических координатах:

$$\int\limits_{|z-\tau| \leqslant \frac{|z|}{2}} \frac{d\tau}{|z-\tau|^s\, |\tau|^s} = \frac{2^s}{|z|^s} \int\limits_{\Omega} \int\limits_0^{\frac{1}{2}|z|} \frac{|\sigma|^{n-1}\, d\sigma\, d\omega}{|\sigma|^s} =$$

$$= \frac{2^s}{|z|^s} \frac{\Omega \cdot 2^{s-n}}{|z|^{s-n}\, (n-s)} = \frac{c_1}{|z|^{2s-n}}.$$

В знаменателе второго слагаемого в (22) заменим $|z - \tau|$ на меньшую величину $\frac{1}{2}|z|$, вынесем за знак интеграла $\frac{2^s}{|z|^s}$ и затем, увеличив область интегрирования до полного шара

$|\tau| \leqslant 2|z|$, вычислим получившийся интеграл в сферических координатах:

$$\int\limits_{\substack{|z-\tau|\geqslant \frac{1}{2}|z| \\ |\tau|\leqslant 2|z|}} \frac{d\tau}{|z-\tau|^s|\tau|^s} \leqslant \frac{2^s}{|z|^s} \int\limits_{|\tau|\leqslant 2|z|} \frac{d\tau}{|\tau|^s} =$$

$$= \frac{2^s}{|z|^s} \int\limits_{\Omega} \int\limits_0^{2|z|} \frac{|\tau|^{n-1}\, d|\tau|\, d\omega}{|\tau|^s} =$$

$$= \frac{2^s}{|z|^s} \cdot \Omega \cdot \frac{2^{n-s}}{n-s} \frac{1}{|z|^{s-n}} = \frac{c_2}{|z|^{2s-n}}.$$

Наконец, в знаменателе третьего слагаемого в (22) заменим $|\tau - z|$ на меньшую величину $\frac{1}{2}|\tau|$ и вычислим интеграл также в сферических координатах:

$$\int\limits_{|\tau|\geqslant 2|z|} \frac{e^{-\frac{B}{2}|\tau|}\, d\tau}{|z-\tau|^s|\tau|^s} \leqslant 2^s \int\limits_{\Omega} \int\limits_{2|z|}^{\infty} \frac{e^{-\frac{B}{2}|\tau|}\, d|\tau|\, d\omega \cdot |\tau|^{n-1}}{|\tau|^{2s}} \leqslant$$

$$\leqslant 2^s\Omega \int\limits_{2|z|}^{4} \frac{d|\tau|}{|\tau|^{2s-n+1}} + 2^s\Omega \int\limits_4^{\infty} e^{-\frac{B}{2}|\tau|} |\tau|^{n-1-2s}\, d|\tau| = c_3 + \frac{c_4}{|z|^{2s-n}}.$$

В результате для интеграла (21) мы получаем оценку вида

$$\int \frac{e^{-\frac{B}{2}|\tau|}\, d\tau}{|z-\tau|^s|\tau|^s} \leqslant c_3 + \frac{c_5}{|z|^{2s-n}},$$

а для всего ядра $K_2(x, \xi)$ — неравенство вида

$$|K_2(x, \xi)| \leqslant \frac{C_1}{|x-\xi|^{2s-n}} \cdot e^{-\frac{B}{2}|x-\xi|}.$$

Таким образом, после итерации показатель s заменился на $s_1 = 2s - n$. Очевидно, что $n - s_1 = 2(n - s)$, так что новый показатель s_1 удален от числа n вдвое далее, чем прежний показатель s. Продолжая итерирование, мы придем в конце концов к показателю, обеспечивающему интегрируемость квадрата соответствующего ядра (с оценкой, не зависящей от x). Можно получить, если угодно, после нескольких итераций и ядро, ограниченное при $x = \xi$.

Мы видим, что во всех случаях рассматриваемый оператор представляет собой либо карлемановский, либо обобщенный карлемановский оператор. Таким образом, учитывая результаты п. 1, мы приходим к теореме:

Теорема 3. *Линейный дифференциальный оператор*

$$Au = P_r\left(\frac{\partial}{\partial x}\, x\right) u + R_{r-1}\left(\frac{\partial}{\partial x},\, x\right) u$$

с теми условиями на коэффициенты, о которых было сказано выше (стр. 249), *эллиптический и полуограниченный снизу, всегда самосопряжен и допускает полную систему собственных функций, из которых почти все* (*по спектральной мере* $\sigma_\alpha(\lambda)$, § 4) *ограничены по* x.

Замечание. Приведенные выше рассуждения проходят без изменения и для некоторых систем уравнений, называемых сильно эллиптическими (по Вишику), поскольку для таких систем остаются справедливыми все результаты теории Ф. Броудера и Л. Гординга.

---

18 Зак. 2918. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов

ПРИМЕЧАНИЯ И ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

К гл. I

Пространства типа W были введены и исследованы Б. Л. Гуревичем [41]. Они представляют собой обобщение (с заменой степенных функций на произвольные выпуклые) и усовершенствование (в определениях и доказательствах) основных пространств K_p, Z^p, Z_p^p, введенных авторами ранее в [38].

Несколько более общая схема пространств (с теорией двойственности) была предложена Л. Хормандером в [13].

Теорема Б. Я. Левина о существовании целой функции с заданной обобщенной индикатрисой роста: [52], гл. 2.

К гл. II

§§ 1—5. Метод Хольмгрена, см. [11]. Первые общие теоремы о классах единственности решения задачи Коши для систем эволюционного типа с постоянными или зависящими только от t коэффициентами были установлены И. Г. Петровским [56]. Именно, И. Г. Петровский показал, что класс всех ограниченных при $-\infty < x_j < \infty$ и непрерывных функций является классом единственности для любой такой системы. Эта теорема была обобщена на класс всех функций степенного роста В. Э. Лянце [55] и, с использованием теории распределений (функционалов на пространстве S), Л. Шварцем [21]. Построение классов единственности, состоящих из экспоненциально растущих функций, для любых систем Петровского было произведено авторами: в [38] — методом преобразований Фурье экспоненциально растущих функций, и в [39]—операторным методом, с использованием операторов $e^{tP\left(\frac{d}{dx}\right)}$ в пространствах S_α^β; отметим, что в статье [38] было впервые введено понятие приведенного порядка системы (как порядка роста разрешающей матрицы $e^{tP(s)}$).

Характеристика классов единственности приводится здесь в улучшенном виде по сравнению с [38] и [39] (показатель $p_0' - \varepsilon$ заменен на p_0'); это улучшение было предложено независимо

К. И. Бабенко [26], Б. Л. Гуревичем [41] и С. Д. Эйдельманом [64]. Г. Н. Золотарев [43] показал, что для любой эволюционной системы класс функций с экспоненциальным порядком роста $\leqslant p_0' + \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$ уже не является классом единственности.

Ранее классы единственности решения задачи Коши для частных типов уравнений (уравнение теплопроводности и близкие к нему) были указаны Е. Хольмгреном [12], и А. Н. Тихоновым [58], для общего параболического уравнения — О. А. Ладыженской [51], для общей параболической системы — С. Д. Эйдельманом [62]. Для уравнения теплопроводности С. Тэклинд [22] и для системы, параболической по Петровскому, Г. Н. Золотарев [42] получили необходимые и достаточные условия того, чтобы класс функций, описываемый неравенством $|f(x)| \leqslant Ce^{\Phi(x)}$, был классом единственности решения задачи Коши.

Первоначальное определение гиперболической системы и доказательство разрешимости для таких систем задачи Коши при любых достаточно гладких начальных данных принадлежит И. Г. Петровскому [56]. Л. Гординг [6] предложил несколько более широкое определение, дающее возможность доказать и обратную теорему (всякая система, для которой задача Коши разрешима при любых достаточно гладких начальных данных — гиперболическая). См. по этому поводу гл. III, § 3. Аналогичные теоремы были доказаны затем Шварцем [21] методом теории распределений. Иной подход к теоремам единственности, основанный на применении преобразования Лапласа по t (и пригодный, по-видимому, только для случая одного пространственного переменного) указан Э. Хилле (см. [10] и приведенную там литературу).

К § 6. Сведение изучения роста функций $e^{tP(s)}$ в комплексной плоскости к изучению роста вещественных частей характеристических корней матрицы $P(s)$ с помощью неравенства (6), было предложено Г. Е. Шиловым [59]. Оценка коэффициентов в интерполяционной форме Ньютона с помощью интегрирования в комплексной плоскости взята из книги А. О. Гельфонда [40]. Формула для вычисления приведенного порядка найдена В. М. Борок [31]. В этой же работе В. М. Борок показала, что всякая система с целым приведенным порядком p_0 приводится к системе $\frac{\partial u}{\partial t} = P_0\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u$, у которой порядок дифференциального оператора p_0 не превосходит p_0 (в частности, для гиперболических систем равен 1); система же с дробным приведенным порядком $p_0 = \frac{p}{q}$ приводится к системе вида $\frac{\partial^n u}{\partial t^n} = P_0\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u$, где $n \leqslant q$, а порядок оператора P_0 не превосходит p.

К § 7. Основной результат этого параграфа принадлежит Г. Е. Шилову [60]. Здесь он приведен в улучшенной форме ($h < 1$ заменено на $h < (2p_0)'$), найденной в дипломной работе И. И. Шулишовой.

Заключительное замечание высказано Ю. А. Дементьевым.

Результаты добавления 1 принадлежат Б. Л. Гуревичу [41].

Результаты добавления 2 принадлежат А. Г. Костюченко и Г. Е. Шилову; публикуются здесь впервые.

Результаты добавления 3 принадлежат А. Г. Костюченко [45]; здесь они приведены в более полной формулировке. Теорема Эйдельмана о решении задачи Коши для систем с эллиптическими операторами: [63].

К гл. III

Первые общие теоремы о классах корректности задачи Коши для систем эволюционного типа с постоянными или зависящими только от t коэффициентами были найдены И. Г. Петровским [56]. Именно, он показал, что «условие A» (см. стр. 126 этого выпуска) необходимо и достаточно, чтобы класс функций, ограниченных при $-\infty < x_j < \infty$ вместе с некоторым числом производных, был классом корректности задачи Коши для системы вида $\frac{\partial u}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u$. Классы корректности, состоящие из функций экспоненциального типа, в специальных случаях были указаны: Е. Хольмгреном [12] и А. Н. Тихоновым [58] — для уравнения теплопроводности, С. Тэклиндом [22] — для уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^{2p} u}{\partial x^{2p}}$, О. А. Ладыженской [51] — для общего параболического уравнения, С. Д. Эйдельманом [62] — для параболических (по Петровскому) систем. Общее построение классов корректности для любых систем эволюционного типа было произведено Г. Е. Шиловым [59]; подробное изложение публикуется здесь впервые.

§ 2. Системы, параболические по Петровскому — см. [56]. Общее определение параболических систем — см. Шилов [59].

Вычисление характеристик системы с одним пространственным переменным — см. В. М. Борок [32]. Системы, параболические по Петровскому, с коэффициентами, зависящими от пространственных переменных — см. Эйдельман [63].

Так как фундаментальное решение параболической системы — бесконечно дифференцируемая функция (по x), то и каждое решение (в классе корректности) бесконечно дифференцируемо (по x), хотя бы начальная функция была бы только локально суммируемой. Как показала В. М. Борок [30], этим свойством обладают только параболические системы.

§ 3. Системы, гиперболические по Петровскому — см. [56], по Л. Гордингу—см. [6].

§ 4. Системы, корректные по Петровскому, у самого И. Г. Петровского назывались системами «с условием A». В работе С. А. Гальперна [34] был введен класс систем, занимающих в классе систем, корректных по Петровскому, такое же положение, какое образуют гиперболические по Петровскому системы в классе всех гиперболических систем. Системы с положительным родом (равным p_0) были введены авторами в [38] под названием «регулярных систем»; затем А. Г. Костюченко и Г. Е. Шилов доказали для этих систем теорему существования решения задачи Коши в классе функций порядка роста $\exp \varepsilon |x|^{p_0'}$ с любым $\varepsilon > 0$ [48]. Это доказательство послужило основой доказательства общих теорем существования, приведенных в этом параграфе. С. Д. Эйдельман указал в [64], что к числу регулярных систем принадлежат некоторые системы физики и механики (например, уравнение распространения звука в вязком газе, приведенное у нас на стр. 155). Формулы для вычисления характеристик систем с одним пространственным переменным были найдены В. М. Борок [32]. Теорема 4 была получена А. Г. Костюченко и Г. Е. Шиловым; публикуется впервые.

§ 5. Один из классов корректности для систем, названных нами условно корректными, состоящий из бесконечно дифференцируемых функций экспоненциального роста, был указан В. Э. Лянце [55].

Ф. Джон [14] подошел к условно корректным системам с другой стороны: он дал описание систем, обладающих хотя бы одним решением с финитной (ненулевой) начальной функцией.

Результаты п. 3 (корректность в аналитической области) принадлежит А. Г. Костюченко (см. [59]); подробное изложение публикуется впервые. В дальнейшем вопросом о разрешимости систем с целыми функциями в качестве начальных данных занимался Л. Эреипрейс [5].

К гл. IV

История проблемы о разложениях по собственным функциям изложена во введении к этой главе. Приведение интегральных квадратичных форм к каноническому виду и одновременно доказательство полноты системы функций Штурма — Лиувилля в регулярном случае (теорема Стеклова) — Д. Гильберт [9]. Собственные функции произвольного вполне непрерывного оператора — Ф. Рисс [19]. Спектральное разложение (неограниченного) самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве — фон Нейман [17]. Расширения симметричных операторов, в частности, полуограниченных (теория Неймана, Фридрихса, Крейна и др.) [49] и «Лекции по функциональному анализу» Ф. Рисса и Б. Секефальви-Надя. Разложение по собственным функциям обыкновенного дифференциального оператора 2-го порядка на полупрямой—Г. Вейль [24] (новое изложение дано Е. Титчмаршем [23] и Б. М. Левитаном [53]; то же для дифференциального оператора n-го порядка — М. Г. Крейн [50] и К. Кодаира [15]. А. Я. Повзнер построил разложение по собственным функциям для оператора в частных производных $-\Delta u + q(x)$, заданного во всем пространстве [57]. Ф. Маутнер [16] доказал теорему о разложении для общих самосопряженных операторов, резольвента которых есть интегральный оператор с ядром Т. Карлемана; Ф. Броудер [1] и Л. Гординг [7] — [8] показали, что таковыми являются все эллиптические операторы, и тем самым установили теорему о разложении для всех эллиптических операторов.

§ 2. Дифференцирование функционала сильно ограниченной вариации в банаховом пространстве впервые рассматривал И. М. Гельфанд [35] и, независимо, Н. Дэнфорд [4] и Б. Петтис [18].

§§ 3—5. Результаты этих параграфов принадлежат И. М. Гельфанду и А. Г. Костюченко [36]. Ф. Броудер [2] перенес основную теорему на случай симметричных максимальных операторов; см. также А. Г. Костюченко [44], где распространены на этот случай и теоремы о структуре обобщенных собственных функций. После появления заметки [36] Ю. М. Березанский [27] предложил иной подход для получения разложений по собственным функциям в пространстве $L_2(R_n)$; как указал в своем сообщении на III Всесоюзном математическом съезде Л. Гординг (июнь 1956 г.), им были также получены разложения по обобщенным собственным функциям для дифференциальных самосопряженных операторов в $L_2(R_n)$. Ю. М. Березанский показал далее, что первообразные от собственных функций растут (в n-мерном пространстве) не быстрее $|x|^{\frac{5}{2}n+1+\varepsilon}$. А. Г. Костюченко затем улучшил этот результат до оценки $|x|^{\frac{n}{2}}$ [44].

В другой работе [28] Ю. М. Березанский обобщил на разложения по собственным функциям теорему Бохнера о представлении положительно определенных функций.

Задача С. Л. Соболева, которой занимался Р. А. Александрян: [25].

Результаты § 6 принадлежат А. Г. Костюченко [44], § 7 — И. М. Гельфанду и А. Г. Костюченко [36]. Теорема И. М. Гельфанда и С. В. Фомина о динамических системах на пространствах постоянной отрицательной кривизны — [37].

§ 8. Построение и исследование фундаментального решения для общего эллиптического уравнения и эллиптической системы — Я. Б. Лопатинский [54]. Первые теоремы о свойствах регулярности решений эллиптических уравнений были даны С. Н. Бернштейном [29] и получили впоследствии многочисленные обобщения. Л. Шварц [20] показал, что всякое решение эллиптического уравнения с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, предполагаемое заранее только обобщенной функцией, является обычной бесконечно дифференцируемой функцией.

Приведенная здесь теорема, принадлежащая А. Г. Костюченко [44], является развитием метода Шварца на случай уравнений с коэффициентами только конечного порядка гладкости.

§ 9. Результаты этого параграфа принадлежат А. Г. Костюченко [46] — [47]. Ранее, для уравнения $-y'' + q(x)y = \lambda y$ с $q(x) \geqslant -C$, Э. Э. Шноль [61] показал, что почти все собственные функции растут не быстрее $C|x|^{1/2+\varepsilon}$. На возможность представления резольвенты самосопряженного оператора в форме интегрального оператора указывали: Т. Карлеман [3], А. Я. Повзнер [57] (для эллиптических операторов второго порядка), Ф. Броудер [1], Л. Гординг [7] (для общих эллиптических операторов). Сильно эллиптические системы — М. И. Вишик [33].

БИБЛИОГРАФИЯ

[1] Browder F., The eigenfunction expansion theorem for the general self-adjoint singular elliptic partial differential operator, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **40**, № 6 (1954), 454—467.

[2] Browder F., Eigenfunction expansions for formally self-adjoint partial differential operators, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **42** (1956), № 10, 769—773; № 11, 870—873.

[3] Carleman T., Sur la théorie mathematique de l'équation de Schroedinger, Arkiv för Math. Ast. och. Fysik, **24**, № 11 (1934), 1—7.

[4] Dunford N., Uniformity in linear spaces, Trans. Amer. Math. Soc., **44** (1938), 305—356.

[5] Ehrenpreis L., Cauchy's problem for linear differential equations with constant coefficients, Proc. Nat. Acad. Sci USA, **42**, № 9 (1956), 642—646.

[6] Gårding L., Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients, Acta Math., **85**, № 1—2 (1951), 1—62.

[7] Gårding L., Eigenfunction expansions connected with elliptic differential operators, 2 Skand. Mat. kongr. Lund. 1953 (1954) 44—55.

[8] Gårding L., Applications on the theory of direct integrals of Hilbert space to some integral and differential operators. Public lecture published by the Institute for Fluid Dynamics and Appl. Math. of the University of Maryland (1954).

[9] Hilbert D., Gründzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig und Berlin, 1921.

[10] Hille E., Some aspects of Cauchy's problem, Proc. Intern. Congr. Math., 1954, Amsterdam **3** (1956), 109—116.

[11] Holmgren E., Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen, Öfversigt Kongl. Vetens.-Akad. Förh., **58** (1901), 91—103.

[12] Holmgren E., Sur les solutions quasianalytiques de l'équation de la chaleur, Arkiv för math., **18** (1924).

[13] Hörmander L., La transformation de Legendre et le théorème de Paley — Wiener, C. R. Acad. Sci., **240**, № 4 (1955), 392—395.

[14] John F., Non-admissible data for differential equations with constant coefficients, Comm. pure and appl. Math., **10**, № 3 (1957), 391—398.

[15] Kodaira K., On ordinary differential equations of any even order and the corresponding eigenfunction expansions, Amer. J. Math., **74** (1950), 502—544.

[16] Mautner F., On eigenfunction expansions, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **39**, № 1 (1953) (русск. перевод в Успехах матем. наук **10**, № 4 (1955), 127—132).

[17] Neumann J. von, Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, Math. Ann., **102** (1929), 49—131.

[18] Pettis B. J., A note on regular Banach spaces, Bull. Amer. Math. Soc., **44** (1938), 420—428.

[19] Riesz F., Über lineare Funktionalgleichungen, Acta. Math., **41** (1917), 71—98 (русск. перевод в Успехах матем. наук, № 1 (1936), 175—199).

[20] Schwartz L., Théorie des distributions, t. 1 et 2, Paris, 1950, 1951.

[21] Schwartz L., Les équations d'évolution liées au produit de composition, Ann. de l'Inst. Fourier, Grenoble, **2** (1950), 19—49.

[22] Täcklind S., Sur les classes quasianalytiques des solutions des équations aux dérivées partielles du type parabolique, Nord Acta Regial Sosietatis Scientiarum Upsaliensis (4), № 10 (1937).

[23] Titshmarch E., Eigenfunctions expansions associated with second-order diferential equations. Oxford, 1946.

[24] Weil H., Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen, Göttingen Nachrichten (1909), 37—64; 442—467; Math. Ann., **68** (1910), 220—269.

[25] Александрян Р. А., О проблеме Дирихле для уравнения струны, ДАН СССР, **73**, № 5 (1950), 869—872.

[26] Бабенко К. И., Об одной новой проблеме квазианалитичности и о преобразовании Фурье целых функций, Труды Моск. матем. об-ва, **5** (1956), 523—542.

[27] Березанский Ю. М., О разложении по собственным функциям общих самосопряженных дифференциальных операторов, ДАН СССР, **103**, № 3 (1956), 379—382.

[28] Березанский Ю. М., Обобщение теоремы Бохнера на разложения по собственным функциям уравнений в частных производных, ДАН СССР, **110**, № 6 (1956), 893—896.

[29] Бернштейн С. Н., Sur l'analycité des solutions des équations aux dérivées partielles elliptiques, Leupzig, Teubner, 1904; см. также Успехи матем. наук, № 8 (1941), 82—99.

[30] Борок В. М., Об одном характеристическом свойстве параболических систем, ДАН СССР, **110**, № 6 (1956), 903—905.

[31] Борок В. М., Приведение системы линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами к каноническому виду, ДАН СССР, **115**, № 1 (1957), 13—16.

[32] Борок В. М., О системах линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, Диссертация, Москва, 1957.

[33] Вишик М. И., О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений, Матем. сб. **29** (1951), 615—676.

[34] Гальперн С. А., О корректной постановке задачи Коши для совместных систем линейных уравнений в частных производных, Матем. сб., **7**, № 1 (1940), **111—141**.

[35] Гельфанд И. М., Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren, Матем. сб., **4** (1938), 235—286.

[36] Гельфанд И. М. и Костюченко А. Г., О разложении по собственным функциям дифференциальных и других операторов, ДАН СССР, **103**, № 3 (1955), 349—352.

[37] Гельфанд И. М. и Фомин С. В., Геодезические потоки на многообразиях постоянной отрицательной кривизны, Успехи матем. наук, **7**, № 1 (1952), 118—137.

[38] Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е., Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши, Успехи матем. наук, **8**, № 6 (1953), 3—54.

[39] Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е., О новом методе в теоремах единственности решения задачи Коши, ДАН СССР, **102**, № 6 (1955), 1065—1068.

[40] Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, Гостехиздат, М.—Л., 1952.

[41] Гуревич Б. Л., Новые типы пространств основных и обобщенных функций и проблема Коши для операторных уравнений, Диссертация, Харьков, 1956.

[42] Золотарев Г. Н., Необходимые и достаточные условия единственности решения задачи Коши для параболических систем, Изв. Мин-ва высш. обр. СССР, сер. матем., **1**, 1958.

[43] Золотарев Г. Н., О точных оценках для классов единственности решения задачи Коши для систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Диссертация. Москва, 1958.

[44] Костюченко А. Г., О собственных функциях самосопряженных операторов, Диссертация, МГУ, 1957.

[45] Костюченко А. Г., О теореме единственности решения задачи Коши и смешанной задачи для некоторых типов систем, линейных уравнений в частных производных, ДАН СССР, **103**, № 1 (1955), 13—16.

[46] Костюченко А. Г., О поведении собственных функций самосопряженных операторов, ДАН СССР, **114**, № 2 (1957), 249—252.

[47] Костюченко А. Г., О некоторых спектральных свойствах эллиптических операторов, ДАН СССР, **115**, № 1 (1957), 34—37.

[48] Костюченко А. Г. и Шилов Г. Е., О решении задачи Коши для регулярных систем линейных уравнений в частных производных, Успехи матем. наук, **9**, № 3 (1954), 141—148.

[49] Красносельский М. А. и Крейн М. Г., Основные теоремы о расширении эрмитовых операторов и некоторые их применения к теории ортогональных полиномов и проблеме моментов, Успехи матем. наук, **2**, № 3 (1947), 60—106.

[50] Крейн М. Г., Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные произведения, ДАН СССР, **53**, № 1 (1946), 3—6.

[51] Ладыженская О. А., О единственности решения задачи Коши для линейного параболического уравнения, Матем. сб., **27**, № 2 (1950), 175—184.

[52] Левин Б. Я., Распределение корней целых функций, Гостехиздат, М., 1956.

[53] Левитан Б. М., Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, Гостехиздат, М.—Л. 1950.

[54] Лопатинский Я. Б., Фундаментальные решения системы дифференциальных уравнений эллиптического типа, Укр. матем. журнал, **3**, № 3 (1951), 290—316.

[55] Лянце В. Э., О задаче Коши в области функций действительного переменного, Укр. матем. журнал, **1**, № 4 (1949), 42—63.

[56] Петровский И. Г., О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций, Бюлл. МГУ, секция А, **I**, вып. 7 (1938).

[57] Повзнер А. Я., О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора $-\Delta u + cu$, Матем. сб., **32**, № 1 (1953), 109—156.

[58] Тихонов А. Н., Теоремы единственности для уравнения теплопроводности, Матем. сб., **42**, № 2 (1935), 199—216.

[59] Шилов Г. Е., Об условиях корректности задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, Успехи матем. иаук, **10**, № 4 (1955), 89—100.

[60] Шилов Г. Е., Об одной теореме типа Фрагмена—Линделёфа для системы линейных уравнений с частными производными. Труды Моск. матем. об-ва, **5** (1956), 353—366.

[61] Шноль Э. Э., О поведении собственных функций, ДАН СССР, **94**, № 3 (1954), 389—392.

[62] Эйдельман С. Д., Оценки решений параболических систем и некоторые их приложения, Матем. сб., **33**, № 3 (1953), 359—382.

[63] Эйдельман С. Д., О фундаментальных решениях параболических систем, Матем. сб., **33**, № 1 (1956), 51—92.

[64] Эйдельман С. Д., О регулярных и параболических системах дифференциальных уравнений в частных производных, Успехи матем. наук, **12**, № 1 (1957), 254—257.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ ВЫПУСКОВ 1, 2, 4

ВЫПУСК 1

Обобщенные функции и действия над ними

ВЫПУСК 2

Пространства основных и обобщенных функций

ВЫПУСК 4

Некоторые применения гармонического анализа