ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ
ВЫПУСК 4

И. М. ГЕЛЬФАНД и Н. Я. ВИЛЕНКИН

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ОСНАЩЕННЫЕ ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1961

АННОТАЦИЯ

Этот выпуск посвящен двум вопросам: изучению наиболее важного класса линейных топологических пространств — ядерных пространств и оснащенных гильбертовых пространств, и изучению гармонического анализа в евклидовых и бесконечномерных линейных пространствах. Рассматриваются приложения к спектральному анализу линейных операторов, к теории меры в линейных топологических пространствах 2, коммутационным соотношениям в квантовой теории поля, обобщенным случайным процессам и т. д. Гармонический анализ на группе Лоренца и связанные с этим вопросы интегральной геометрии будут изложены в пятом выпуске.

От читателя предполагается знакомство с первыми двумя главами вып. I. Необходимые сведения из второго выпуска кратко изложены в этой книге. Книга рассчитана на студентов-математиков старших курсов, аспирантов и научных работников.

Израиль Моисеевич Гельфанд и Наум Яковлевич Виленкин
Обобщенные функции. Некоторые применения гармонического анализа.
Оснащенные гильбертовы пространства.

Редактор *Ф. В. Широков*
Техн. редактор *Е. А. Ермакова* Корректор *Т. С. Страхова*

Сдано в набор 21/III 1960 г. Подписано к печати 10/X 1960 г. Бумага 84×108/32.
Физ. печ. л. 14,75. Условн. печ. л. 24,19. Уч.-изд. л. 24,25. Тираж 10150 экз.
Т-12847. Цена 1 р. 41 к. Заказ № 1281.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза,
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава II

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ И ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Глава III

ОБОБЩЕННЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Глава IV

МЕРЫ В ЛИНЕЙНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга является четвертым выпуском серии монографий по функциональному анализу, выходящей под общим названием «Обобщенные функции». Не следует, однако, рассматривать ее как непосредственное продолжение предыдущих выпусков. При написании этого выпуска авторы стремились к наибольшей независимости от предыдущих выпусков. Лишь материал, изложенный в первых двух главах выпуска 1, надо рассматривать как необходимый минимум, знание которого требуется от читателя. В связи с этим некоторые вопросы, изложенные в предыдущих выпусках, кратко повторяются здесь.

Предлагаемая читателю книга посвящена двум основным вопросам: дальнейшему развитию теории линейных топологических пространств и построению гармонического анализа в n-мерных евклидовых и бесконечномерных пространствах.

После возникновения теории топологических пространств встал вопрос о выделении класса топологических пространств, определяемого достаточно простыми аксиомами и охватывающего все (или почти все) встречающиеся в приложениях пространства. Точно так же после создания теории линейных топологических пространств стало необходимым выяснить, какой класс пространств является наиболее приемлемым для использования в математическом анализе. Такой класс линейных топологических пространств — ядерные пространства — был выделен французским математиком А. Гротендиком.

Класс ядерных пространств охватывает все или почти все линейные топологические пространства, используемые сейчас в анализе, и обладает рядом весьма важных свойств: для ядерных пространств справедлива теорема о ядре Л. Шварца, в них имеет место теорема о спектральном разложении самосопряженного оператора; в пространствах, сопряженных с ядерными, любая мера цилиндрических множеств счетно-

аддитивна. Изложению этих вопросов посвящены первая и четвертая главы книги. При этом, в связи со спектральным анализом, введено понятие оснащенного гильбертова пространства, которое, по-видимому, окажется весьма полезным и во многих других вопросах математики.

Вторым вопросом, изучаемым в этом выпуске, является гармонический анализ функций в различных пространствах. Гармонический анализ в евклидовом пространстве (интеграл Фурье) был уже частично изложен в предыдущих выпусках. Мы отказались от идеи повторить здесь материал предыдущих выпусков, посвященный интегралу Фурье (возможно, если бы все выпуски писались одновременно, многие вопросы теории интеграла Фурье, например теорема Пэли — Винера для обобщенных функций, нашли бы свое место в данном выпуске). Здесь изложены лишь вопросы гармонического анализа в евклидовом пространстве, оставшиеся неосвещенными в предыдущих выпусках. Именно, здесь рассмотрено преобразование Фурье положительных мер того или иного порядка роста (теория обобщенных положительно определенных функций) и его применения в теории обобщенных случайных процессов. Параллельно рассматривается преобразование Фурье мер в линейных топологических пространствах.

В следующий, пятый, выпуск выделены вопросы гармонического анализа на однородных пространствах (в частности гармонического анализа на группах) и тесно связанные с ними вопросы интегральной геометрии на некоторых пространствах постоянной кривизны. Эта теория, весьма богатая разнообразными результатами (связанная, например, с теорией специальных функций, аналитических функций многих комплексных переменных и т. д.), не могла быть, разумеется, полностью изложена в рамках пятого выпуска. Мы ограничились лишь изложением вопросов гармонического анализа на группе Лоренца. Следует отметить, что гармонический анализ на группе Лоренца и связанных с ней однородных пространствах значительно богаче материалом, чем гармонический анализ в «вырожденном» случае евклидова пространства. Например, в случае евклидова пространства то или иное поведение функции на бесконечности влияет лишь на гладкость ее преобразования Фурье. В случае же группы Лоренца задание поведения функции на бесконечности приводит к некоторым алгебраическим соотношениям между значениями ее преобразования Фурье в различных точках. Однако эти вопросы в настоящее время находятся лишь в начальной стадии изучения.

Материал четвертого выпуска представляет собой единое целое, и, как мы говорили, изложение почти не зависит от предыдущих выпусков. Несмотря на связанность отдельных глав, начинать чтение книги можно как с первой главы, содержащей общую теорию ядерных и оснащенных гильбертовых пространств, так и со второй главы, в которой излагается более элементарная теория положительно определенных обобщенных функций.

Заметим, что в некоторых главах, наряду с общими сведениями, содержатся и более специальные; при первом чтении их можно пропустить.

Авторы приносят глубокую благодарность лицам, оказавшим им помощь в работе над книгой, — Ф. В. Широкову, работа которого вышла далеко за рамки обычной редакторской работы, А. С. Дынину, Б. С. Митягину и В. Б. Лидскому, ценными советами которых авторы пользовались при написании отдельных вопросов первой главы. Особую благодарность выражают они С. А. Виленкиной, взявшей на себя весь труд, связанный с подготовкой рукописи к печати.

И. М. Гельфанд
Н. Я. Виленкин

ГЛАВА I

ТЕОРЕМА О ЯДРЕ. ЯДЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ОСНАЩЕННОЕ ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО

Эта глава посвящена изучению одного класса счетно-нормированных пространств *) — так называемых *ядерных пространств*. Впервые эти пространства возникли в связи с «теоремой о ядре», которая неоднократно будет использована в этой книге. Позднее выяснилось, что ядерные пространства играют существенную роль и во многих других вопросах функционального анализа, а именно, ядерные пространства оказались наиболее естественным классом пространств для изучения спектральных разложений самосопряженных операторов. В связи с рассмотрением спектральных разложений эти пространства были уже введены в выпуске 3 (гл. IV, § 3, п. 1). Однако данное там определение ядерности было не вполне приспособлено для других вопросов. Поэтому в этом выпуске мы будем пользоваться иным определением ядерности пространства, которая в существенных случаях эквивалентна ядерности в смысле, указанном в выпуске 3. Изложение в этой главе не зависит от изложения в выпуске 3.

---

*) Мы предполагаем, что читатель знаком с понятием счетно-нормированного пространства в объеме I и II глав выпуска 2. Впрочем, краткое изложение основных фактов, относящихся к частному случаю таких пространств — счетно-гильбертовым пространствам, дано в начале § 3. Отметим, что на протяжении этого выпуска мы будем считать, что все рассматриваемые счетно-нормированные пространства полны, не оговаривая этого особо.

Кроме того, мы будем, как правило, считать, что согласованные нормы $\|\varphi\|_n$, $1 \leqslant n < \infty$, задающие топологию в счетно-нормированном пространстве Φ, монотонно возрастают, т. е. что для любого элемента φ из Φ выполнены неравенства

$$\|\varphi\|_1 \leqslant \ldots \leqslant \|\varphi\|_n \leqslant \ldots$$

значениями ее преобразования Фурье в различных точках. Однако эти вопросы в настоящее время находятся лишь в начальной стадии изучения.

Материал четвертого выпуска представляет собой единое целое, и, как мы говорили, изложение почти не зависит от предыдущих выпусков. Несмотря на связанность отдельных глав, начинать чтение книги можно как с первой главы, содержащей общую теорию ядерных и оснащенных гильбертовых пространств, так и со второй главы, в которой излагается более элементарная теория положительно определенных обобщенных функций.

Заметим, что в некоторых главах, наряду с общими сведениями, содержатся и более специальные; при первом чтении их можно пропустить.

Авторы приносят глубокую благодарность лицам, оказавшим им помощь в работе над книгой, — Ф. В. Широкову, работа которого вышла далеко за рамки обычной редакторской работы, А. С. Дынину, Б. С. Митягину и В. Б. Лидскому, ценными советами которых авторы пользовались при написании отдельных вопросов первой главы. Особую благодарность выражают они С. А. Виленкиной, взявшей на себя весь труд, связанный с подготовкой рукописи к печати.

И. М. Гельфанд
Н. Я. Виленкин

ГЛАВА I

ТЕОРЕМА О ЯДРЕ. ЯДЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ОСНАЩЕННОЕ ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО

Эта глава посвящена изучению одного класса счетно-нормированных пространств *) — так называемых *ядерных пространств*. Впервые эти пространства возникли в связи с «теоремой о ядре», которая неоднократно будет использована в этой книге. Позднее выяснилось, что ядерные пространства играют существенную роль и во многих других вопросах функционального анализа, а именно, ядерные пространства оказались наиболее естественным классом пространств для изучения спектральных разложений самосопряженных операторов. В связи с рассмотрением спектральных разложений эти пространства были уже введены в выпуске 3 (гл. IV, § 3, п. 1). Однако данное там определение ядерности было не вполне приспособлено для других вопросов. Поэтому в этом выпуске мы будем пользоваться иным определением ядерности пространства, которая в существенных случаях эквивалентна ядерности в смысле, указанном в выпуске 3. Изложение в этой главе не зависит от изложения в выпуске 3.

*) Мы предполагаем, что читатель знаком с понятием счетно-нормированного пространства в объеме I и II глав выпуска 2. Впрочем, краткое изложение основных фактов, относящихся к частному случаю таких пространств — счетно-гильбертовым пространствам, дано в начале § 3. Отметим, что на протяжении этого выпуска мы будем считать, что все рассматриваемые счетно-нормированные пространства полны, не оговаривая этого особо.

Кроме того, мы будем, как правило, считать, что согласованные нормы $\|\varphi\|_n$, $1 \leqslant n < \infty$, задающие топологию в счетно-нормированном пространстве Φ, монотонно возрастают, т. е. что для любого элемента φ из Φ выполнены неравенства

$$\|\varphi\|_1 \leqslant \ldots \leqslant \|\varphi\|_n \leqslant \ldots$$

Чтобы достичь полной независимости изложения, в этой главе приводятся некоторые результаты о спектральном разложении самосопряженных операторов. При этом, однако, здесь основное внимание уделено общим аспектам теории, в отличие от изложения в выпуске 3, где не меньшую роль играли применения этих результатов к конкретным дифференциальным операторам.

Важную роль играет понятие оснащенного гильбертова пространства. Это понятие возникает при рассмотрении ядерных пространств, в которых тем или иным способом введено скалярное произведение. Теория оснащенных гильбертовых пространств изложена в § 4. Там же указаны приложения этой теории к спектральному анализу самосопряженных операторов.

С теорией ядерных пространств связаны также вопросы теории меры в линейных топологических пространствах, излагаемые в главе IV. Мы покажем в этой главе, что ядерность пространства Φ необходима и достаточна для того, чтобы любая мера цилиндрических множеств, заданных в пространстве Φ', сопряженном с пространством Φ, была счетно-аддитивна.

§ 1. БИЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ В СЧЕТНО-НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. ТЕОРЕМА О ЯДРЕ

В этом параграфе будет изучен общий вид *билинейных функционалов* *) *в счетно-нормированных пространствах.* Мы покажем, что *любой билинейный функционал* $B(\varphi, \psi)$, *непрерывный по своим аргументам* φ *и* ψ, *которые пробегают счетно-нормированные пространства* Φ *и* Ψ, *непрерывен по некоторым нормам* $\|\varphi\|_m$ *и* $|\psi|_n$ *в этих пространствах.* Иными словами, мы покажем, что

$$|B(\varphi, \psi)| \leqslant M\|\varphi\|_m |\psi|_n$$

для всех элементов φ и ψ из пространств Φ и Ψ, где числа M, m, n не зависят от φ и ψ.

Применяя этот результат к различным конкретным пространствам, мы получим общий вид билинейных функционалов в этих пространствах. Одним из наиболее важных результатов, получаемых при этом, является описание билинейных функционалов в пространстве K бесконечно дифференцируемых финитных функций. Будет доказано, что эти функционалы имеют вид

$$B(\varphi, \psi) = (F, \varphi(x)\psi(y)),$$

где F — линейный функционал в пространстве K_2 бесконечно дифференцируемых финитных функций от переменных $x = (x_1, \ldots, x_k)$ и $y = (y_1, \ldots, y_l)$. Эта теорема носит название «теоремы о ядре» *) и будет часто использоваться в этой книге.

1. Выпуклые функционалы. Установление общих свойств билинейных функционалов опирается на некоторые теоремы о выпуклых функционалах в счетно-нормированных пространствах.

Вещественный функционал $p(\varphi) \geqslant 0$, заданный на линейном пространстве Φ, называется *выпуклым*, если для любых двух элементов φ и ψ из Φ выполняется соотношение

$$p(\varphi + \psi) \leqslant p(\varphi) + p(\psi),$$

а для любого элемента φ и комплексного числа α выполняется равенство

$$p(\alpha\varphi) = |\alpha|\, p(\varphi).$$

Примером выпуклого функционала может служить норма $\|\varphi\|$ в нормированном пространстве, поскольку в силу определения нормы $\|\varphi + \psi\| \leqslant \|\varphi\| + \|\psi\|$ и $\|\alpha\varphi\| = |\alpha|\,\|\varphi\|$.

Отметим, что в нашем определении не предполагается конечность значений функционала $p(\varphi)$ для всех элементов φ из Φ, т. е. $p(\varphi)$ может принимать значение $+\infty$, причем мы

---

*) Билинейным функционалом называется функционал, линейный по обоим аргументам φ и ψ. В дальнейшем мы столкнемся с функционалами $B(\varphi, \psi)$, линейными по аргументу φ и антилинейными по аргументу ψ, т. е. такими, что

$$B(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2, \psi) = \alpha B(\varphi_1, \psi) + \beta B(\varphi_2, \psi),$$

но

$$B(\varphi, \alpha\psi_1 + \beta\psi_2) = \bar{\alpha} B(\varphi, \psi_1) + \bar{\beta} B(\varphi, \psi_2).$$

Такие функционалы называются *эрмитово-билинейными* или просто *эрмитовыми* функционалами.

*) Точнее — «теоремы о ядре для пространства K», общая теорема о ядре будет доказана в § 3.

полагаем $a \cdot \infty = \infty$, $a \neq 0$ и $\infty + a = \infty + \infty = \infty$. Очевидно, что *множество элементов φ, для которых функционал $p(\varphi)$ принимает конечное значение, образует линейное подпространство**) *в* Φ. Можно было бы избежать использования бесконечных значений для $p(\varphi)$, рассматривая функционал $p(\varphi)$ лишь на этом линейном подпространстве.

С понятием выпуклого функционала связано геометрическое понятие абсолютно выпуклого множества. Множество A в линейном подпространстве Φ называется *абсолютно выпуклым*, если оно содержит, вместе с любыми двумя элементами φ и ψ, все элементы вида $\alpha\varphi + \beta\psi$, где α и β — комплексные числа, такие, что $|\alpha| + |\beta| \leqslant 1$ **).

Чтобы установить связь между понятиями выпуклого функционала и абсолютно выпуклого множества, сопоставим выпуклому функционалу $p(\varphi)$ множество A, состоящее из всех элементов φ, для которых $p(\varphi) \leqslant 1$. Покажем, что *это множество абсолютно выпукло*. В самом деле, пусть φ и ψ — элементы множества A, т. е. пусть $p(\varphi) \leqslant 1$ и $p(\psi) \leqslant 1$. Тогда, если $|\alpha| + |\beta| \leqslant 1$, то

$$p(\alpha\varphi + \beta\psi) \leqslant |\alpha|\, p(\varphi) + |\beta|\, p(\psi) \leqslant |\alpha| + |\beta| \leqslant 1$$

и, значит, $\alpha\varphi + \beta\psi \in A$. Этим абсолютная выпуклость множества A доказана.

Обратно, *если A — любое абсолютно выпуклое множество, то существует такой выпуклый функционал $p(\varphi)$, что A совпадает со множеством элементов φ, для которых* $p(\varphi) \leqslant 1$. Этот функционал определяется равенством

$$p(\varphi) = \frac{1}{q},$$

где q — точная верхняя грань значений $\lambda > 0$, для которых $\lambda\varphi \in A$. Легко видеть, что $p(\varphi) \leqslant 1$ для всех элементов φ из множества A и что $p(\varphi) > 1$, если φ не принадлежит A. Кроме того, из абсолютной выпуклости множества A вытекает, что $p(\varphi)$ — выпуклый функционал.

*) Вообще говоря, незамкнутое.

**) Для вещественных линейных пространств абсолютная выпуклость множества эквивалентна тому, что множество выпукло и центрально-симметрично.

Мы установили, таким образом, взаимно-однозначное соответствие между выпуклыми функционалами $p(\varphi)$ и абсолютно выпуклыми множествами в пространстве Φ.

Отметим, что функционал $p(\varphi)$ конечен на наименьшем линейном подпространстве Ψ в Φ, содержащем множество A. В частности, функционал $p(\varphi)$ конечен во всем пространстве Φ, если для любого элемента φ из Φ можно найти такой элемент $\psi \neq 0$ из A, что φ лежит на прямой, соединяющей ψ с нулевым элементом (т. е. имеет вид $\varphi = \lambda\psi$). Мы будем называть множество A в этом случае *поглощающим*. Отметим, что если A — поглощающее множество, то любой элемент φ пространства Φ принадлежит одному из множеств nA (через nA мы обозначаем множество элементов вида na, $a \in A$).

Назовем функционал $p(\varphi)$ *полунепрерывным снизу*, если для любого элемента φ_0 пространства Φ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность U элемента φ_0, что во всех точках ψ из этой окрестности выполняется неравенство

$$p(\psi) \geqslant p(\varphi_0) - \varepsilon.$$

Докажем, что *если функционал $p(\varphi)$ полунепрерывен снизу, то множество A, состоящее из элементов φ, для которых $p(\varphi) \leqslant 1$, замкнуто*. В самом деле, пусть φ_0 — предельная точка для множества A. Тогда в любой окрестности точки φ_0 есть точки ψ, для которых $p(\psi) \leqslant 1$. Следовательно, в силу полунепрерывности снизу функционала $p(\varphi)$, также и $p(\varphi_0) \leqslant 1$. Таким образом, замкнутость множества A доказана.

Докажем, теперь, что если абсолютно выпуклое множество A замкнуто, то соответствующий ему выпуклый функционал $p(\varphi)$ полунепрерывен снизу. В самом деле, множество A точек ψ, для которых $p(\psi) \leqslant 1$, замкнуто; следовательно, множество точек ψ, для которых $p(\psi) > 1$, открыто. Но тогда открыто и любое множество, задаваемое неравенством $p(\psi) > a$, где a — любое число. Положив $a = p(\varphi_0) - \varepsilon$, мы получим, что множество точек ψ, для которых $p(\psi) > p(\varphi_0) - \varepsilon$, открыто, и, следовательно, содержит окрестность точки φ_0. Тем самым доказана полунепрерывность функционала $p(\varphi)$ в любой точке φ_0.

Таким образом, мы доказали, что *между полунепрерывными снизу выпуклыми функционалами $p(\varphi)$ и* *абсолютно выпуклыми замкнутыми множествами A имеет место взаимно-однозначное соответствие.*

Лемма 1. *Пусть $\{p_\alpha(\varphi)\}$ — некоторое множество полунепрерывных снизу выпуклых функционалов в линейном топологическом пространстве Φ. Тогда функционал $p(\varphi)$, определяемый равенством*

$$p(\varphi) = \sup_\alpha p_\alpha(\varphi),$$

также является полунепрерывным снизу и выпуклым.

Доказательство. Обозначим через A_α абсолютно выпуклые замкнутые множества, соответствующие функционалам $p_\alpha(\varphi)$. Очевидно, что для выполнения неравенства

$$p(\varphi) = \sup_\alpha p_\alpha(\varphi) \leqslant 1$$

необходимо и достаточно, чтобы элемент φ принадлежал пересечению всех множеств A_α. Но пересечение замкнутых абсолютно выпуклых множеств замкнуто и абсолютно выпукло. Таким образом, функционалу $p(\varphi)$ соответствует замкнутое абсолютно выпуклое множество $A = \bigcap_\alpha A_\alpha$, а потому $p(\varphi)$ является полунепрерывным снизу выпуклым функционалом.

В основе изучения выпуклых полунепрерывных снизу функционалов лежит следующая геометрическая теорема.

Теорема 1. *Пусть A — замкнутое абсолютно выпуклое множество в счетно-нормированном пространстве Φ. Если A — поглощающее множество (т. е. если любой элемент φ пространства Φ лежит на прямой, проходящей через нулевой элемент и отличный от нуля элемент множества A), то A содержит некоторую окрестность нуля пространства Φ.*

Доказательство. Обозначим через nA множество элементов вида na, где $a \in A$. Из абсолютной выпуклости A вытекает, что с ростом n множества nA не убывают

$$A \subset 2A \subset \ldots \subset nA \subset \ldots$$

При этом, поскольку множество A поглощающее, любой элемент φ пространства Φ принадлежит множеству nA, начиная с некоторого n. Поэтому $\Phi = \bigcup_{n=1}^{\infty} nA$. Но счетно-нормированное пространство не может являться счетной суммой нигде не плотных множеств *). Следовательно, хотя бы одно из множеств nA плотно в некоторой области пространства Φ и, поскольку оно замкнуто, содержит некоторый шар $S(\varphi_0, r_0)$, задаваемый неравенством $\|\varphi - \varphi_0\|_k \leqslant r_0$. Но тогда множество A содержит шар S_0, задаваемый неравенством $\|\varphi - \varphi_1\|_k \leqslant r_1$, где $\varphi_1 = \varphi_0/n$, $r_1 = r_0/n$. Так как абсолютно выпуклое множество содержит вместе с любыми двумя элементами их полуразность, то все элементы вида $\frac{\varphi - \varphi_1}{2}$,

*) В самом деле, пусть $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$ — возрастающая последовательность нигде не плотных множеств в счетно-нормированном пространстве Φ. Поскольку множество A_1 нигде не плотно, найдется шар $S(\varphi_1, r_1)$, задаваемый неравенством $\|\varphi - \varphi_1\|_{p_1} \leqslant r_1$, $r_1 \leqslant 1$, который не содержит ни одной точки множества A_1. Далее найдется шар $S(\varphi_2, r_2)$, задаваемый неравенством $\|\varphi - \varphi_2\|_{p_2} \leqslant r_2$, $r_2 < 1/2$, $p_2 > p_1$, лежащий в шаре $S_1(\varphi_1, r_1)$ и не содержащий точек множества A_2. Продолжая этот процесс, мы получим вложенную систему шаров

$$S_1(\varphi_1, r_1) \supset S_2(\varphi_2, r_2) \supset \ldots \supset S_k(\varphi_k, r_k) \supset \ldots,$$

задаваемых неравенствами $\|\varphi - \varphi_k\|_{p_k} \leqslant r_k$, $r_k \leqslant 1/k$, $p_{k+1} > p_k$ и таких, что $S_k(\varphi_k, r_k)$ не содержит точек из множества A_k. Легко видеть, что центры $\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots$ этих шаров образуют фундаментальную последовательность в Φ (т. е. что $\lim_{k, l \to \infty} \|\varphi_k - \varphi_l\|_n = 0$ для любого n). Так как мы рассматриваем лишь полные счетно-нормированные пространства, то последовательность $\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots$ имеет предельную точку φ. Очевидно, что эта точка φ принадлежит всем шарам $S_k(\varphi_k, r_k)$ и поэтому не принадлежит ни одному из множеств A_k. Но это означает, что мы нашли точку пространства Φ, не принадлежащую сумме $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Следовательно, $\Phi \neq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

Отметим, что теорема 1 и все выводы, которые мы сделаем из нее, справедливы для всех локально выпуклых линейных топологических пространств, которые нельзя разложить в счетную сумму нигде не плотных множеств (линейное топологическое пространство называется *локально выпуклым*, если можно указать полную систему окрестностей нуля, состоящую из абсолютно выпуклых множеств).

Линейные топологические пространства, в которых выполняется теорема 1, называются *бочечными пространствами*. Таким образом, эту теорему можно сформулировать, сказав, что *всякое счетно-нормированное пространство бочечно.*

где $\varphi \in S_0$, $\varphi_1 = \varphi_0/n$ принадлежат множеству A. Но эти элементы образуют шар S_1, задаваемый неравенством $\|\varphi\|_k \leqslant \leqslant r_1/2$. Тем самым доказано, что множество A содержит окрестность нуля. Теорема доказана.

Отметим, что мы уже встречались с теоремой 1 в выпуске 2 (см. гл. I, § 3, п. 4).

Теорема 1 эквивалентна следующей теореме о выпуклых функционалах в счетно-нормированных пространствах.

Теорема 1′. *Пусть $p(\varphi)$ — выпуклый полунепрерывный снизу функционал в счетно-нормированном пространстве Φ, принимающий конечное значение в каждой точке этого пространства. Тогда функционал $p(\varphi)$ ограничен в некоторой окрестности нуля пространства Φ.*

Доказательство. Рассмотрим множество A, состоящее из таких точек φ, что $p(\varphi) \leqslant 1$. В силу выпуклости и полунепрерывности снизу функционала $p(\varphi)$ это множество абсолютно выпукло и замкнуто. Из того, что функционал $p(\varphi)$ принимает конечные значения во всем пространстве Φ, вытекает, что множество A поглощающее (т. е. что любой элемент φ из Φ может быть представлен в виде $\lambda\psi$, где $\psi \in A$). Следовательно, по теореме 1 в A найдется окрестность нуля U, в которой, по определению A, имеем $p(\varphi) \leqslant 1$. Теорема доказана.

Для описания билинейных функционалов нам понадобится следующее обобщение теоремы 1′.

Теорема 2. *Пусть $p_1(\varphi), \ldots, p_n(\varphi), \ldots$ — последовательность выпуклых полунепрерывных снизу функционалов в счетно-нормированном пространстве Φ. Пусть далее*

$$p_1(\varphi) \geqslant p_2(\varphi) \geqslant \ldots \geqslant p_n(\varphi) \geqslant \ldots,$$

причем в каждой точке φ, начиная с некоторого номера $n(\varphi)$, $p_n(\varphi)$ принимает конечное значение. Тогда найдутся такие числа n_0, m, M, не зависящие от φ, что при $n \geqslant n_0$ функционалы $p_n(\varphi)$ конечны во всем пространстве и, более того, во всех точках φ выполняется неравенство

$$p_n(\varphi) \leqslant M\|\varphi\|_m.$$

Доказательство. Обозначим через A_n множество точек из пространства Φ, в которых выполняется неравенство $p_n(\varphi) \leqslant 1$. Каждое из множеств A_n абсолютно выпукло и замкнуто. При этом каждый из элементов φ пространства Φ принадлежит хотя бы одному из множеств вида kA_n. Именно, если $p_n(\varphi)$ имеет конечное значение и $p_n(\varphi) \leqslant k$, то φ принадлежит множеству kA_n. Итак, имеет место равенство $\Phi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} kA_n$. Так как пространство Φ не может быть разложено в счетную сумму нигде не плотных множеств, то хотя бы одно из множеств kA_{n_0} плотно в некоторой области пространства Φ. Тогда и множество A_{n_0} плотно в некоторой области из Φ. Из замкнутости множества A_{n_0} вытекает, что оно содержит некоторую сферу $S_m(\varphi_0, r)$ в Φ, задаваемую неравенством $\|\varphi - \varphi_0\|_m \leqslant r$. Поэтому, в силу абсолютной выпуклости A_n, оно содержит и сферу $S_m(r/2)$: $\|\varphi\|_m \leqslant r/2$. Иными словами, мы показали, что из неравенства $\|\varphi\|_m \leqslant r/2$ вытекает неравенство $p_{n_0}(\varphi) \leqslant 1$. Поскольку при $n \geqslant n_0$ мы имеем $p_n(\varphi) \leqslant p_{n_0}(\varphi)$, то при всех значениях $n \geqslant n_0$ и всех φ выполняется неравенство

$$p_n(\varphi) \leqslant M\|\varphi\|_m,$$

где положено $M = \frac{2}{r}$. Теорема доказана.

2. Билинейные функционалы. Перейдем теперь к описанию билинейных функционалов в счетно-нормированных пространствах. Известно, что *любой линейный функционал F в счетно-нормированном пространстве Φ имеет конечный порядок, т. е. непрерывен относительно одной из норм $\|\varphi\|_n$.* В самом деле, в силу непрерывности функционала F найдется такая окрестность U, задаваемая неравенством $\|\varphi\|_n \leqslant \delta$, в которой выполнено неравенство $|(F, \varphi)| \leqslant 1$. Но тогда при $\|\varphi\|_n \leqslant \varepsilon\delta$ имеет место неравенство $|(F, \varphi)| \leqslant \varepsilon$, т. е. функционал F непрерывен по норме $\|\varphi\|_n$.

Мы докажем сейчас аналогичное утверждение для билинейных функционалов. Назовем билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$, где φ и ψ пробегают счетно-нормированные пространства Φ и Ψ, *непрерывным по каждому из аргументов*, если при фиксированном φ функционал $B(\varphi, \psi)$ непрерывен по ψ, а при фиксированном ψ он непрерывен по φ. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $B(\varphi, \psi)$ — билинейный функционал в счетно-нормированных пространствах Φ и Ψ, непрерывный по каждому из переменных φ и ψ. Тогда в пространствах Φ и Ψ найдутся такие нормы $\|\varphi\|_n$ и $|\psi|_m$, что функционал $B(\varphi, \psi)$ непрерывен по совокупности переменных φ и ψ относительно этих норм. Иными словами, существуют нормы $\|\varphi\|_n$ и $|\psi|_m$, такие, что для всех элементов φ и ψ выполняется неравенство* *)

$$|B(\varphi, \psi)| \leqslant M \|\varphi\|_n |\psi|_m, \tag{1}$$

где M не зависит от φ и ψ.

Доказательство. Введем для каждого n функционал $p_n(\psi)$ в пространстве Ψ, определяемый равенством

$$p_n(\psi) = \sup_{\|\varphi\|_n \leqslant 1} |B(\varphi, \psi)|. \tag{2}$$

Эти функционалы могут принимать как конечные, так и бесконечные значения. Однако для каждой точки ψ_0 найдется такое n (зависящее от ψ_0), что $p_n(\psi_0)$ принимает конечное значение. В самом деле, $B(\varphi, \psi_0)$ является при фиксированном значении ψ_0 непрерывным линейным функционалом в пространстве Φ. Но любой непрерывный функционал в счетно-нормированном пространстве непрерывен относительно некоторой нормы $\|\varphi\|_n$, и, значит, найдется такое n, что $B(\varphi, \psi_0)$ ограничено в сфере $\|\varphi\|_n \leqslant 1$, т. е. в силу (2) значение $p_n(\psi_0)$ конечно.

Покажем теперь, что функционалы $p_n(\psi)$ монотонно убывают, выпуклы и полунепрерывны снизу. Монотонное убывание

$$p_1(\psi) \geqslant \ldots \geqslant p_n(\psi) \geqslant \ldots$$

функционалов p_n в каждой точке ψ вытекает из того, что для норм $\|\varphi\|_n$ выполняются неравенства

$$\|\varphi\|_1 \leqslant \|\varphi\|_2 \leqslant \ldots \leqslant \|\varphi\|_n \leqslant \ldots$$

Поэтому множество $\|\varphi\|_n \leqslant 1$ содержит множество $\|\varphi\|_{n+1} \leqslant 1$ и, следовательно,

$$p_n(\psi) = \sup_{\|\varphi\|_n \leqslant 1} |B(\varphi, \psi)| \geqslant \sup_{\|\varphi\|_{n+1} \leqslant 1} |B(\varphi, \psi)| = p_{n+1}(\psi).$$

*) Через $\|\varphi\|_n$ мы обозначаем нормы в пространстве Φ, а через $|\psi|_m$ — нормы в пространстве Ψ.

Далее, функционалы $p_n(\psi)$ выпуклы. Действительно, при фиксированном φ функционал $|B(\varphi, \psi)|$ является выпуклым, и, значит, функционал

$$p_n(\psi) = \sup_{\|\varphi\|_n \leqslant 1} |B(\varphi, \psi)|$$

также является выпуклым как верхняя грань выпуклых функционалов. Точно так же доказывается, что функционалы $p_n(\psi)$ полунепрерывны снизу (функционал $|B(\varphi, \psi)|$, φ фиксировано, непрерывен и тем более полунепрерывен снизу).

Применим теперь к функционалам $p_n(\psi)$ теорему 2. Мы получим, что $p_n(\psi) \leqslant M |\psi|_m$, где m и M — некоторые числа, не зависящие от ψ, и n больше или равно некоторого n_0. В силу определения функционалов $p_n(\psi)$ это означает, что

$$\sup_{\|\varphi\|_n \leqslant 1} |B(\varphi, \psi)| \leqslant M |\psi|_m$$

и потому

$$|B(\varphi, \psi)| \leqslant M \|\varphi\|_n |\psi|_m.$$

Тем самым наша теорема доказана.

Рассмотрим теперь операторы, отображающие счетно-нормированное пространство Φ в пространство Ψ', сопряженное счетно-нормированному пространству Ψ. Каждому такому оператору A можно сопоставить билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$, где $\varphi \in \Phi$ и $\psi \in \Psi$, положив

$$B(\varphi, \psi) = (A\varphi, \psi)$$

(напомним, что $A\varphi \in \Psi'$ и, значит, $(A\varphi, \psi)$ определено). Поэтому из теоремы 3 можно получить теорему об операторах указанного типа. Предположим для этого, что оператор A непрерывен относительно топологии пространства Φ и слабой топологии пространства Ψ'. Иными словами, предположим, что для любых элементов $\psi_1, \ldots, \psi_n$ пространства Ψ найдется такая окрестность нуля U пространства Φ, что $|(A\varphi, \psi_k)| \leqslant 1$, $1 \leqslant k \leqslant n$, для всех элементов φ из U *). Тогда, как легко

*) Окрестности в пространстве Ψ' при слабой топологизации задаются неравенствами

$$|(F, \psi_k)| \leqslant 1, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

где $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — фиксированные элементы пространства Ψ.

видеть, билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$ будет непрерывен по каждому из аргументов φ и ψ. Применим к билинейному функционалу $B(\varphi, \psi)$ теорему 3. Мы получим, что для всех элементов φ из Φ и всех элементов ψ из Ψ выполняется неравенство вида

$$|(A\varphi, \psi)| = |B(\varphi, \psi)| \leqslant M\|\varphi\|_n |\psi|_m,$$

где M, m, n — некоторые числа, не зависящие от φ и ψ. Принимая во внимание определение норм в пространстве Ψ', сопряженном счетно-нормированному пространству Ψ, мы получаем, что

$$|A\varphi|_{-m} \leqslant M\|\varphi\|_n$$

(через $|F|_{-m}$ *) мы обозначили норму в пространстве Ψ', определяемую равенством $|F|_{-m} = \sup\limits_{|\psi|_m \leqslant 1} |(F, \psi)|$). Таким образом, мы доказали, что

$$\sup_{\|\varphi\|_n \leqslant 1} |A\varphi|_{-m} \leqslant M.$$

Но это означает, что оператор A непрерывен не только относительно топологии пространства Φ и слабой топологии пространства Ψ', но и относительно топологий в этих пространствах, задаваемых нормами $\|\varphi\|_n$ и $|\psi|_{-m}$. Итак, имеет место

Теорема 3'. *Пусть Φ и Ψ — счетно-нормированные пространства и A — линейный оператор, отображающий пространство Φ в пространство Ψ', сопряженное с Ψ. Если оператор A непрерывен относительно топологии пространства Φ и слабой топологии пространства Ψ', то он непрерывен и относительно некоторых норм $\|\varphi\|_n$ и $|F|_{-m}$ в этих пространствах.*

Мы получили теорему 3' как следствие из теоремы 3. Обратно, теорема 3 является следствием теоремы 3'. Это вытекает из следующего легко доказываемого утверждения. *Если $B(\varphi, \psi)$ — билинейный функционал в пространствах Φ и Ψ, непрерывный по каждому аргументу φ и ψ, то равенство*

$$(A\varphi, \psi) = B(\varphi, \psi)$$

определяет оператор A, отображающий пространство Φ в Ψ' и непрерывный относительно топологии пространства Φ и слабой топологии пространства Ψ'. Отметим, что наряду с оператором A билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$ определяет также *сопряженный* с ним оператор A', задаваемый равенством $(A'\psi, \varphi) = B(\varphi, \psi)$.

*) По соображениям, которые выяснятся ниже, мы обозначаем нормы в пространстве, сопряженном счетно-нормированному пространству Φ, через $\|F\|_{-m}$.

3. Строение билинейных функционалов в конкретных пространствах (теорема о ядре). Целью этого пункта является описание билинейных функционалов в конкретных линейных топологических пространствах, в первую очередь в пространстве K бесконечно дифференцируемых финитных функций и пространстве S бесконечно дифференцируемых функций, быстро убывающих при $|x| \to \infty$ вместе с производными любого порядка *). Выяснение строения билинейных функционалов в пространстве K и составляет содержание так называемой «теоремы о ядре» Л. Шварца.

Начнем решение поставленной задачи с доказательства леммы о билинейных функционалах в гильбертовом пространстве функций. Ради простоты изложения мы будем проводить все рассуждения для функций одного переменного, указывая иногда изменения в формулировках теорем, возникающие при переходе к функциям многих переменных.

Обозначим через $H(a)$ гильбертово пространство всех функций $\varphi(x)$, заданных на отрезке $|x| \leqslant a$ и имеющих интегрируемый квадрат модуля на этом отрезке. Скалярное произведение в пространстве $H(a)$ определим формулой

$$(\varphi, \psi) = \int_{-a}^{a} \varphi(x)\overline{\psi(x)}\,dx.$$

*) Пространства K и S были введены в выпуске 1. В добавлении к этому параграфу мы повторяем определение этих пространств и указываем их основные свойства. Напомним лишь здесь, что функция $\varphi(x)$ называется *быстро убывающей*, если

$$\lim_{|x| \to \infty} |x^k \varphi(x)| = 0$$

при всех k.

Обозначим через $\|\varphi\|$ норму в $H(a)$, т. е. положим

$$\|\varphi\| = \left[\int_{-a}^{a} |\varphi(x)|^2\, dx\right]^{1/2}.$$

Лемма 1. *Пусть $B(\varphi, \psi)$ — непрерывный билинейный функционал в пространстве $H(a)$, такой, что*

$$\left.\begin{aligned} |B(\varphi', \psi')| &\leqslant M\|\varphi\|\,\|\psi\|, \\ |B(\varphi, \psi')| &\leqslant M\|\varphi\|\,\|\psi\|, \\ |B(\varphi', \psi)| &\leqslant M\|\varphi\|\,\|\psi\|, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, равно как и их производные $\varphi'(x)$ и $\psi'(x)$, принадлежат пространству $H(a)$. Тогда функционал $B(\varphi, \psi)$ имеет вид

$$B(\varphi, \psi) = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} F(x, y)\,\varphi(x)\,\psi(y)\,dx\,dy, \tag{4}$$

где $F(x, y)$ — функция с интегрируемым квадратом модуля.

Доказательство. Выберем в пространстве $H(a)$ ортогональный нормированный базис, состоящий из функций $\chi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{\frac{\pi i n x}{a}}$, $-\infty < n < \infty$. Функции

$$\overline{\chi_m(x)}\,\overline{\chi_n(y)} \equiv \frac{1}{2a} e^{-\frac{\pi i (mx+ny)}{a}}$$

образуют ортогональный нормированный базис в пространстве $H_2(a)$ функций $\varphi(x, y)$, $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant a$, с интегрируемым квадратом модуля.

Для построения ядра $F(x, y)$ рассмотрим ряд

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} B(\chi_m, \chi_n)\,\overline{\chi_m(x)}\,\overline{\chi_n(y)}. \tag{5}$$

Покажем, что этот ряд сходится в среднем. Для этого достаточно показать, что сходится ряд

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |B(\chi_m, \chi_n)|^2. \tag{6}$$

Но по неравенствам (3) мы имеем

$$|B(\chi'_m, \chi'_n)| \leqslant M\|\chi_m\|\,\|\chi_n\|$$

и

$$|B(\chi_m, \chi'_n)| \leqslant M\|\chi_m\|\,\|\chi_n\|.$$

Так как $\chi'_n(x) = \frac{\pi i n}{a}\chi_n(x)$, а $\|\chi_n\| = 1$, то

$$|B(\chi_m, \chi_n)| \leqslant \frac{M_1}{|m|\,|n|}, \qquad m \neq 0,\ n \neq 0,$$

$$|B(1, \chi_n)| \leqslant \frac{M_1}{|n|}, \qquad n \neq 0,$$

$$|B(\chi_m, 1)| \leqslant \frac{M_1}{|m|}, \qquad m \neq 0,$$

где $M_1 = \frac{a}{\pi} M$. Поэтому ряд (6) мажорируется рядом

$$|B(1, 1)|^2 + 4M_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + 4M_1\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^2 n^2}. \tag{7}$$

Так как ряд (7) сходится, то сходится и ряд (6), а потому ряд (5) сходится в среднем.

Обозначим сумму ряда (5) через $F(x, y)$, т. е. положим

$$F(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} B(\chi_m, \chi_n)\,\overline{\chi_m(x)}\,\overline{\chi_n(y)}. \tag{8}$$

Поскольку эта функция является суммой сходящегося в среднем ряда Фурье, она имеет интегрируемый квадрат модуля, т. е. интеграл

$$\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} |F(x, y)|^2\,dx\,dy$$

сходится. Следовательно, выражение

$$\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} F(x, y)\,\varphi(x)\,\psi(y)\,dx\,dy$$

задает непрерывный билинейный функционал в пространстве $H(a)$. Покажем, что этот функционал совпадает с функционалом $B(\varphi, \psi)$. Поскольку эти функционалы непрерывны, достаточно показать, что они совпадают для элементов ортогонального нормированного базиса $\chi_n(x)$ в пространстве $H(a)$, т. е. что

$$B(\chi_m, \chi_n) = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} F(x, y)\chi_m(x)\chi_n(y)\,dx\,dy. \tag{9}$$

Но равенство (9) немедленно вытекает из того, что по формуле (8) числа $B(\chi_m, \chi_n)$ являются коэффициентами Фурье функции $F(x, y)$ относительно ортогонального нормированного базиса $\overline{\chi_m(x)}\,\overline{\chi_n(y)}$ в пространстве $H_2(a)$ функций $\varphi(x, y)$, $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant a$, имеющих интегрируемый квадрат модуля. Лемма доказана.

Для функций n переменных имеет место аналогичное утверждение, причем вместо неравенств (3) надо потребовать выполнения неравенств

$$|B(\varphi^{(j)}, \psi^{(k)})| \leqslant M\|\varphi\|\,\|\psi\|,$$
$$0 \leqslant |j| \leqslant n,$$
$$0 \leqslant |k| \leqslant n.$$

Обобщим теперь полученный результат на билинейные функционалы в гильбертовом пространстве $H^{(m)}(a)$ функций $\varphi(x)$ на отрезке $|x| \leqslant a$ с интегрируемыми в квадрате производными до m-го порядка включительно. Скалярное произведение в $H^{(m)}(a)$ задается формулой

$$(\varphi, \psi)_m = \sum_{k=0}^{m}\int_{-a}^{a} \varphi^{(k)}(x)\overline{\psi^{(k)}(x)}\,dx.$$

Обозначим $\sqrt{(\varphi, \varphi)_m}$ через $\|\varphi\|_m$. Имеет место следующая лемма.

Лемма 1′. *Пусть $B(\varphi, \psi)$ — непрерывный по каждому аргументу билинейный функционал в пространстве $H^{(m)}(a)$, такой, что*

$$|B(\varphi', \psi')| \leqslant M\|\varphi\|_m\|\psi\|_m,$$
$$|B(\varphi, \psi')| \leqslant M\|\varphi\|_m\|\psi\|_m,$$
$$|B(\varphi', \psi)| \leqslant M\|\varphi\|_m\|\psi\|_m,$$

если функции $\varphi'(x)$ и $\psi'(x)$ принадлежат пространству $H^{(m)}(a)$. Тогда функционал $B(\varphi, \psi)$ может быть представлен в виде

$$B(\varphi, \psi) = \sum_{k,\,l=0}^{m}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} \frac{\partial^{k+l}F(x, y)}{\partial x^k\,\partial y^l}\varphi^{(k)}(x)\psi^{(l)}(y)\,dx\,dy,$$

где $F(x, y)$ — такая функция, что ее производные $\dfrac{\partial^{k+l}F(x, y)}{\partial x^k\,\partial y^l}$ имеют при $0 \leqslant k, l \leqslant m$ интегрируемый квадрат модуля на квадрате $-a \leqslant x \leqslant a$, $-a \leqslant y \leqslant a$.

Эта лемма доказывается так же, как и лемма 1. Надо лишь выбрать ядро в виде

$$F(x, y) = \sum_{j,\,k=0}^{\infty} B(\chi_j, \chi_k)\frac{\overline{\chi_j(x)}\,\overline{\chi_k(y)}}{\|\chi_j\|_m^2\|\chi_k\|_m^2}.$$

Аналогичная лемма справедлива и для функций многих переменных.

Перейдем теперь к основной цели этого пункта — к описанию всех билинейных функционалов в пространстве $K(a)$ бесконечно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль вне отрезка $|x| \leqslant a$. Это пространство счетно-нормировано, причем нормы в нем задаются формулами

$$\|\varphi\|_m = \sup_{0 \leqslant k \leqslant m}\max_{|x| \leqslant a}|\varphi^{(k)}(x)|.$$

Нам удобнее заменить эту систему норм системой норм $|\varphi|_m$, задаваемых скалярными произведениями

$$(\varphi, \psi)_m = \sum_{k=0}^{m}\int_{-a}^{a}\varphi^{(k)}(x)\overline{\psi^{(k)}(x)}\,dx.$$

Эта система норм эквивалентна исходной. В самом деле, очевидно, что

$$(\varphi, \varphi)_m = \sum_{k=0}^{m}\int_{-a}^{a}|\varphi^{(k)}(x)|^2\,dx \leqslant 2a(m+1)\|\varphi\|_m^2.$$

С другой стороны, при $|x| \leqslant a$ мы имеем

$$|\varphi^{(k)}(x)| = |\varphi^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(-a)| = \left| \int_{-a}^{x} \varphi^{(k+1)}(\xi)\, d\xi \right| \leqslant \int_{-a}^{x} |\varphi^{(k+1)}(\xi)|\, d\xi.$$

Применяя неравенство Буняковского—Шварца, мы приходим к соотношению

$$|\varphi^{(k)}(x)|^2 \leqslant 2a \int_{-a}^{x} |\varphi^{(k+1)}(\xi)|^2\, d\xi \leqslant 2a \int_{-a}^{a} |\varphi^{(k+1)}(\xi)|^2\, d\xi.$$

Из этого соотношения, справедливого при всех x на отрезке $|x| \leqslant a$ и всех k, вытекает, что

$$\|\varphi\|_m^2 = \sup_{0 \leqslant k \leqslant m} \max_{|x| \leqslant a} |\varphi^{(k)}(x)| \leqslant \leqslant 2a \sum_{k=0}^{m} \int_{-a}^{a} |\varphi^{(k+1)}(\xi)|^2\, d\xi \leqslant 2a(\varphi, \varphi)_{m+1},$$

т. е. $\|\varphi\|_m^2 \leqslant 2a(\varphi, \varphi)_{m+1}$.

Итак,

$$(\varphi, \varphi)_m \leqslant 2a(m+1)\|\varphi\|_m^2$$

и

$$\|\varphi\|_m^2 \leqslant 2a(\varphi, \varphi)_{m+1}.$$

Эти неравенства и показывают, что топологии, задаваемые системами норм $\|\varphi\|_m$ и $|\varphi|_m = \sqrt{(\varphi, \varphi)_m}$, совпадают.

Обозначим через $H^{(m)}(a)$ пополнение пространства $K(a)$ относительно нормы $|\varphi|_m = \sqrt{(\varphi, \varphi)_m}$. Это пополнение является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)_m = \sum_{k=0}^{m} \int_{-a}^{a} \varphi^{(k)}(x) \overline{\psi^{(k)}(x)}\, dx.$$

При этом нетрудно видеть, что если не только $\varphi(x)$, но и $\varphi'(x)$ принадлежит пространству $H^{(m)}(a)$, то имеет место неравенство

$$|\varphi'|_m \leqslant |\varphi|_{m+1}. \tag{10}$$

В самом деле,

$$(\varphi', \varphi')_m = \sum_{k=0}^{m} \int_{-a}^{a} |\varphi^{(k+1)}(x)|^2\, dx \leqslant \leqslant \sum_{k=0}^{m+1} \int_{-a}^{a} |\varphi^{(k)}(x)|^2\, dx = (\varphi, \varphi)_{m+1}$$

и потому

$$|\varphi'|_m \leqslant |\varphi|_{m+1}.$$

Рассмотрим теперь билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$ в пространстве $K(a)$. По теореме 3 из п. 2 этот функционал непрерывен относительно некоторых норм $|\varphi|_m$ и $|\psi|_n$ в $K(a)$. Не теряя общности, мы можем считать, что $m = n$. Поэтому функционал $B(\varphi, \psi)$ удовлетворяет неравенству

$$|B(\varphi, \psi)| \leqslant M|\varphi|_m |\psi|_m.$$

Отсюда следует, что функционал $B(\varphi, \psi)$ можно распространить по непрерывности на гильбертово пространство $H^{(m)}(a)$. При этом, если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из этого пространства таковы, что их производные $\varphi'(x)$ и $\psi'(x)$ также принадлежат $H^{(m)}(a)$, то по формуле (10) имеет место неравенство

$$|B(\varphi', \psi')| \leqslant M|\varphi'|_m |\psi'|_m \leqslant M|\varphi|_{m+1} |\psi|_{m+1},$$

а также неравенства

$$|B(\varphi', \psi)| \leqslant M|\varphi|_{m+1} |\psi|_{m+1}$$

и

$$|B(\varphi, \psi')| \leqslant M|\varphi|_{m+1} |\psi|_{m+1}.$$

Мы можем поэтому применить лемму 1'. Согласно этой лемме функционал $B(\varphi, \psi)$ имеет вид

$$B(\varphi, \psi) = \sum_{k, l=0}^{m+1} \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} F(x, y) \varphi^{(k)}(x) \psi^{(l)}(y)\, dx\, dy, \tag{11}$$

где $F(x, y)$ — такая функция, что ее производные $\dfrac{\partial^{k+l} F(x, y)}{\partial x^k \partial y^l}$ имеют при $0 \leqslant k, l \leqslant m+1$ интегрируемый квадрат модуля. Итак, мы доказали следующее утверждение.

Лемма 2. *Любой непрерывный по каждому аргументу билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$ в пространстве $K(a)$ бесконечно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль вне отрезка $|x| \leqslant a$, может быть записан формулой вида* (11), *где $F(x, y)$ — такая функция, что все ее производные $\frac{\partial^{k+l} F(x, y)}{\partial x^k \partial y^l}$ имеют при $0 \leqslant k, l \leqslant m+1$ интегрируемый квадрат модуля.*

Заметим теперь, что если все производные $\frac{\partial^{k+l} F(x, y)}{\partial x^k \partial y^l}$ при $0 \leqslant k, l \leqslant m+1$ имеют интегрируемый квадрат модуля, то равенство

$$(F, \varphi) = \sum_{k, l=0}^{m+1} \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} F(x, y) \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} \varphi(x, y)\, dx\, dy \tag{11'}$$

определяет непрерывный линейный функционал F в пространстве $K_2(a)$ бесконечно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль вне квадрата $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant a$. Поэтому лемма 2 может быть сформулирована следующим образом:

Теорема 4. *Пусть $B(\varphi, \psi)$ — непрерывный по каждому аргументу билинейный функционал в пространстве $K(a)$ бесконечно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль вне отрезка $|x| \leqslant a$. Тогда функционал $B(\varphi, \psi)$ может быть записан в виде*

$$B(\varphi, \psi) = (F, \varphi(x)\psi(y)),$$

где F — линейный функционал в пространстве $K_2(a)$ бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x, y)$, обращающихся в нуль вне квадрата $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant a$.

Теперь уже легко найти общий вид билинейных функционалов в пространстве K всех бесконечно дифференцируемых финитных функций. В самом деле, пусть $B(\varphi, \psi)$ — билинейный функционал в пространстве K. Тогда при любом значении a он определяет билинейный функционал $B_a(\varphi, \psi)$ в подпространстве $K(a)$ функций, равных нулю вне отрезка $|x| \leqslant a$. По теореме 4 найдутся такие линейные функционалы F_a в пространствах $K_2(a)$ бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x, y)$, равных нулю вне квадрата $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant a$, что при $\varphi(x) \in K(a)$, $\psi(x) \in K(a)$ выполняется равенство

$$B(\varphi, \psi) = B_a(\varphi, \psi) = (F_a, \varphi(x)\psi(y)).$$

Функционалы F_a согласованы друг с другом в том смысле, что

$$(F_b, \chi(x, y)) = (F_c, \chi(x, y)), \tag{12}$$

если функция $\chi(x, y)$ принадлежит пространству $K_2(a)$, $b \geqslant a$, $c \geqslant a$. В самом деле, пусть $b \geqslant a$ и $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — функции из пространства $K(a)$. Тогда имеет место равенство

$$(F_b, \varphi(x)\psi(y)) = B_b(\varphi, \psi) = B(\varphi, \psi).$$

Поскольку правая часть этого равенства не зависит от b, то мы получаем, что $(F_b, \varphi(x)\psi(y)) = (F_c, \varphi(x)\psi(y))$ при $b \geqslant a$, $c \geqslant a$. Тем самым равенство (12) доказано для функций вида $\chi(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$. Поскольку линейные комбинации таких функций всюду плотны в подпространстве $K_2(a)$, то равенство (12) имеет место для всех функций $\chi(x, y)$ из этого подпространства.

Но любой согласованной последовательности линейных функционалов F_a в пространствах $K_2(a)$ соответствует линейный функционал F в пространстве K_2. Он определяется равенством

$$(F, \varphi(x, y)) = (F_a, \varphi(x, y)),$$

где a выбрано так, что $\varphi(x, y)$ обращается в нуль вне квадрата $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant a$. Из согласованности функционалов F_a вытекает, что значение F не зависит от a. Тем самым функционал F однозначно определен для всех функций $\varphi(x, y)$ из пространства K_2.

Из непрерывности и линейности всех функционалов F_a вытекает, что функционал F непрерывен и линеен. При этом для любых функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из пространства K имеет место равенство

$$B(\varphi, \psi) = (F, \varphi(x)\psi(y)).$$

В самом деле, найдется такое значение a, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ обращаются в нуль вне отрезка $|x| \leqslant a$. Тогда мы имеем

$$B(\varphi, \psi) = B_a(\varphi, \psi) = (F_a, \varphi(x)\psi(y)) = (F, \varphi(x)\psi(y)).$$

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 5 (теорема о ядре). *Каждый билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$ в пространстве K всех финитных бесконечно дифференцируемых функций, непрерывный по каждому из аргументов φ и ψ, имеет вид*

$$B(\varphi, \psi) = (F, \varphi(x)\psi(y)),$$

где F — непрерывный линейный функционал в пространстве K_2 бесконечно дифференцируемых финитных функций двух переменных.

Разумеется, эта теорема без труда обобщается на случай, когда $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ — функции нескольких переменных.

Теорема, аналогичная теореме 5, справедлива и для пространства S бесконечно дифференцируемых функций, быстро стремящихся к нулю при $|x| \to \infty$ вместе со всеми производными. Эта теорема формулируется следующим образом.

Теорема 6. *Непрерывный по каждому аргументу билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$ в пространстве S имеет вид*

$$B(\varphi, \psi) = (F, \varphi(x)\psi(y)),$$

где F — линейный функционал в пространстве S_2 функций, быстро стремящихся к нулю вместе со всеми производными при $x^2 + y^2 \to \infty$.

Эта теорема доказывается почти так же, как и теорема 5, с некоторыми видоизменениями при построении ядра $F(x, y)$. Мы опускаем доказательство теоремы 6, имея в виду, что в § 3 будет доказана теорема, частными случаями которой являются теоремы 5 и 6.

Укажем теперь общий вид билинейных функционалов в пространстве S. В выпуске 2 (гл. II, § 4, п. 3) было дано описание линейных функционалов в пространстве S. Применяя это описание к функционалу F в S_2, задающему билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 7. *Любой непрерывный по каждому аргументу билинейный функционал в пространстве S имеет вид*

$$B(\varphi, \psi) = \int F(x, y)\varphi^{(m)}(x)\psi^{(m)}(y)\,dx\,dy,$$

где $F(x, y)$ — непрерывная функция степенного роста *).

Для пространства $K(a)$ можно получить аналогичную формулу для билинейных функционалов, более простую, чем формула (11). Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 8. *Любой непрерывный по каждому аргументу билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$ в пространстве $K(a)$ имеет вид*

$$B(\varphi, \psi) = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} F(x, y)\varphi^{(m)}(x)\psi^{(m)}(y)\,dx\,dy,$$

где $F(x, y)$ — непрерывная функция, заданная в квадрате $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant a$.

В заключение отметим, что теоремы, аналогичные теоремам о ядре, справедливы и для полилинейных функционалов. Например, для пространства K соответствующая теорема формулируется следующим образом.

Теорема 5'. *Пусть $B(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ — непрерывный по каждому аргументу полилинейный функционал в пространстве K. Тогда найдется линейный функционал F в пространстве K_m бесконечно дифференцируемых финитных функций от m переменных, такой, что*

$$B(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) = (F, \varphi_1(x_1) \ldots \varphi_m(x_m)).$$

ДОБАВЛЕНИЕ К § 1

ПРОСТРАНСТВА K, S и Z

На протяжении этого выпуска мы будем, как правило, иметь дело лишь с пространствами K, S и Z. Другие пространства основных функций будут встречаться лишь эпизодически. Для того чтобы избавить читателя от необходимости обращаться каждый раз по поводу определения этих пространств к предыдущим выпускам книги, здесь дается краткое изложение основных сведений, касающихся пространств K, S и Z.

---

*) Мы говорим, что функция $F(x, y)$ имеет степенной рост, если найдется такое p, что

$$\lim_{x^2+y^2 \to \infty} F(x, y)(x^2 + y^2)^{-p} = 0.$$

Пространством K называется пространство, состоящее из бесконечно дифференцируемых финитных функций $\varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных. Последовательность функций $\{\varphi_m(x)\}$ из пространства K называется сходящейся к нулю, если существует такое a, что все функции $\varphi_m(x)$ обращаются в нуль при $|x| \geqslant a$ *) и если для любого q последовательность функций $\{\varphi_m^{(q)}(x)\}$ равномерно сходится к нулю.

Это определение можно сформулировать иначе. Обозначим через $K(a)$ подпространство в K, состоящее из всех функций $\varphi(x)$, которые обращаются в нуль при $|x| \geqslant a$. Последовательность $\{\varphi_m(x)\}$ сходится к нулю в пространстве $K(a)$, если при любом q последовательность функций $\{\varphi_m^{(q)}(x)\}$ равномерно сходится к нулю. Если $a < b$, то $K(a) \subset K(b)$. Пространство K является объединением всех пространств $K(a)$. При этом последовательность $\{\varphi_m(x)\}$ функций из K сходится к нулю тогда и только тогда, когда все функции $\varphi_m(x)$ принадлежат одному и тому же подпространству $K(a)$ и сходятся к нулю относительно топологии этого подпространства.

Топологию в пространстве K можно задать также, указав систему окрестностей нуля в K. Заметим сначала, что в подпространствах $K(a)$ топология может быть задана при помощи системы норм

$$\|\varphi(x)\|_m = \sup_{|q| \leqslant m} \max_{|x| \leqslant a} |\varphi^{(q)}(x)|.$$

Назовем абсолютно выпуклое множество U в K окрестностью нуля, если для любого a множество $U \cap K(a)$ является окрестностью нуля в $K(a)$. Это означает следующее: найдутся такие числа m и ε, зависящие от a, что $\varphi(x) \in U$, когда $\varphi(x) \in K(a)$ и

$$\sup_{|q| \leqslant m} \max_{|x| \leqslant a} |\varphi^{(q)}(x)| < \varepsilon.$$

Нетрудно показать, что топология, задаваемая этой (несчетной)

---

*) Мы сохраняем обозначения предыдущих выпусков: например через $|x|$ обозначена величина $(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$, а через $|q|$ — сумма $q_1 + q_2 + \ldots + q_n$.

системой окрестностей нуля, приводит к тому же понятию сходимости, которое мы ввели выше.

Другим пространством, которое будет рассматриваться ниже, является пространство S. Оно состоит из всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, быстро убывающих при $|x| \to \infty$ вместе с производными любого порядка. Это означает, что для любых r и q выполняется соотношение

$$\lim_{|x| \to \infty} |(1 + |x|^2)^r \varphi^{(q)}(x)| = 0.$$

Последовательность функций $\{\varphi_m(x)\}$ из пространства S называется сходящейся к нулю, если для любых r и q

$$\lim_{m \to \infty} \max_x |(1 + |x|^2)^r \varphi_m^{(q)}(x)| = 0.$$

Топологию в пространстве S можно задать, указав следующую систему окрестностей нуля. Окрестность $U(r, k, \varepsilon)$ определяется натуральными числами r и k и числом $\varepsilon > 0$ и состоит из всех функций $\varphi(x)$ пространства S, для которых при $|q| \leqslant k$ выполняется неравенство

$$\max_x |(1 + |x|^2)^r \varphi^{(q)}(x)| < \varepsilon.$$

Каждая функция пространства K, очевидно, принадлежит пространству S. При этом функции из пространства K образуют всюду плотное множество в топологии пространства S. Действительно, пусть $\varphi(x)$ — любая функция из пространства S; возьмем произвольную функцию $\alpha(x)$ из пространства K, такую, что $\alpha(0) = 1$. Тогда все функции $\alpha\left(\frac{x}{m}\right) \varphi(x)$ принадлежат пространству K, и, как легко видеть, при $m \to \infty$ последовательность этих функций сходится к функции $\varphi(x)$ в топологии пространства S.

Вложение пространства K в пространство S непрерывно, поскольку неравенства

$$\max_x |(1 + |x|^2)^r \varphi^{(q)}(x)| < \varepsilon, \quad |q| < k,$$

задающие окрестность нуля в S, задают и окрестность нуля в K. Действительно, в каждом из подпространств $K(a)$ топологии, индуцируемые топологиями пространств K и S, совпадают. Отсюда легко следует, что $K(a)$ является замкнутым подпространством не только в пространстве K, но и в пространстве S.

Введем теперь пространство Z. Оно состоит из целых аналитических функций $\varphi(z)=\varphi(z_1, \ldots, z_n)$, таких, что для любого r выполняются неравенства *)

$$|z^r\varphi(z)| \leqslant Ce^{a|y|}, \quad z=x+iy, \tag{13}$$

где постоянная a зависит от $\varphi(z)$, а постоянная C зависит от $\varphi(z)$ и r. В дальнейшем мы будем называть целые аналитические функции, удовлетворяющие неравенству вида

$$|\varphi(z)| \leqslant Ce^{a|z|},$$

функциями экспоненциального типа. Из неравенства (13) вытекает, что функции из пространства Z являются функциями экспоненциального типа, быстро убывающими на вещественной оси. Можно показать, что если функция $\varphi(z)$ принадлежит пространству Z, то для любых r и q имеет место соотношение

$$|z^r\varphi^{(q)}(z)| \leqslant C_1e^{a|y|},$$

где C_1 зависит от r и q.

Последовательность функций $\{\varphi_m(z)\}$ из пространства Z называется сходящейся к нулю, если все функции $\varphi_m(z)$ удовлетворяют неравенствам вида

$$|z^r\varphi_m(z)| < Ce^{a|y|},$$

где постоянная a не зависит от m, и при любых q и r выполняется равенство

$$\lim_{m\to\infty}\max_x |(1+|x|^2)^r\varphi_m^{(q)}(x)|=0.$$

Совокупность функций $\varphi(z)$ из пространства Z, удовлетворяющих неравенствам вида (13) с фиксированным значением a, образует замкнутое линейное подпространство $Z(a)$ в Z. Таким образом, пространство Z является объединением подпространств $Z(a)$, причем последовательность $\{\varphi_m(z)\}$ сходится к нулю в Z, если все функции $\varphi_m(z)$ принадлежат одному и тому же подпространству $Z(a)$ и сходятся к нулю в этом подпространстве.

Заметим теперь, что, рассматривая функции $\varphi(z)$ из пространства Z при вещественных значениях аргумента, мы получаем бесконечно дифференцируемые функции, быстро убывающие при $|x|\to\infty$ вместе с производными любого порядка [см. неравенство (13)]. Этим определяется непрерывное вложение пространства Z в пространство S. На каждом из подпространств $Z(a)$ указанное вложение сохраняет топологию. Иными словами, топологии в подпространствах $Z(a)$, индуцируемые топологиями пространств Z и S, совпадают.

*) Здесь под z^r, как обычно, мы понимаем $z_1^{r_1}\ldots z_n^{r_n}$, а под $a|y|$ — сумму $a_1|y_1|+\ldots+a_n|y_n|$.

Пространство S переходит в себя при преобразовании Фурье, переводящем функцию $\varphi(x)$ в функцию $\tilde{\varphi}(\lambda)$

$$\tilde{\varphi}(\lambda)=\int\varphi(x)e^{i(x,\lambda)}\,dx, \quad (x,\lambda)=x_1\lambda_1+\ldots+x_n\lambda_n.$$

При этом отображении пространство K отображается на пространство Z, причем подпространство $K(a)$ отображается на подпространство $Z(a)$. Поскольку функции из пространства K всюду плотны в S, то и функции из пространства Z также всюду плотны в S. Впрочем, в этом легко убедиться непосредственно. В самом деле, пусть $\alpha(z)$ — любая функция из пространства Z, такая, что $\int\alpha(x)\,dx=1$. Тогда для любой функции $\varphi(z)$ из S имеет место равенство $\varphi(x)=\lim\limits_{m\to\infty}\varphi_m(x)$, где положено

$$\varphi_m(x)=\varphi*\alpha_m(x), \quad \alpha_m(x)=m^n\alpha\left(\frac{x}{m}\right).$$

Но нетрудно убедиться в том, что функции $\varphi_m(x)$ принадлежат пространству Z *).

Рассмотрим теперь линейные функционалы в пространствах K, S, Z (обобщенные функции в этих пространствах).

*) Через $\varphi*\alpha(x)$, где $\varphi(x)\in S$, $\alpha(x)\in S$, мы обозначаем свертку функций $\varphi(x)$ и $\alpha(x)$, определяемую формулой

$$\varphi*\alpha(x)=\int\varphi(y)\alpha(x-y)\,dy.$$

Так как функции из пространства Z могут рассматриваться и как функции из S, то тем самым определена и свертка для функций из пространства Z. Можно показать, что свертка двух функций из пространства Z принадлежит тому же пространству. Утверждение о принадлежности функций $\varphi_m(x)$ пространству Z означает, что существуют функции $\varphi_m(z)$ в Z, совпадающие с функциями $\varphi_m(x)$ при вещественных значениях аргументов.

Эти линейные функционалы образуют линейные пространства, которые обозначаются соответственно через K', S', Z'. Пространства K', S', Z' мы будем рассматривать как линейные топологические пространства. Последовательность линейных функционалов $\{F_m\}$ называется сходящейся к нулю, если

$$\lim_{m \to \infty} (F_m, \varphi) = 0$$

для любой основной функции φ.

Так как пространство K непрерывно и взаимно-однозначно отображается на всюду плотное подмножество пространства S, то каждый линейный функционал в S задает линейный функционал в K, причем различным функционалам в S соответствуют различные функционалы в K. Этим определяется непрерывное вложение пространства S' в пространство K'. Можно показать, что элементы пространства S' образуют всюду плотное множество в K'. Точно так же элементы пространства S' образуют всюду плотное множество и в пространстве Z'.

Примером линейных функционалов в пространстве K являются функционалы вида

$$(f, \varphi) = \int \overline{f(x)}\, \varphi(x)\, dx,$$

где $f(x)$ — произвольная непрерывная функция. Такой функционал называют *регулярным функционалом*, соответствующим функции $f(x)$. В частности, каждой функции $\psi(x)$ из K соответствует функционал F_ψ в K, имеющий вид

$$(F_\psi, \varphi) = \int \overline{\psi(x)}\, \varphi(x)\, dx.$$

Покажем, что функционалы вида F_ψ, $\psi(x) \in K$, всюду плотны в K'. С этой целью выберем в пространстве K положительные функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ такие, что $\int \alpha(x)\, dx = 1$ и $\beta(0) = 1$. Положим

$$\alpha_m(x) = m^n \alpha\left(\frac{x}{m}\right) \text{ и } \beta_m(x) = \beta(mx), \quad x = (x_1, \ldots, x_n).$$

Сопоставим каждому линейному функционалу F в K последовательность линейных функционалов F_m, задаваемых равенствами

$$(F_m, \varphi) = \int \overline{\psi_m(x)}\, \varphi(x)\, dx,$$

где положено

$$f_m(x) = (F(y), \alpha_m(x-y)), \quad \psi_m(x) = f_m(x)\, \beta_m(x).$$

Очевидно, что функции $f_m(x)$ бесконечно дифференцируемы и потому функции $\psi_m(x) = f_m(x)\, \beta_m(x)$ принадлежат пространству K. Нетрудно показать, что для любой функции $\varphi(x)$ из K выполняется равенство

$$\lim_{m \to \infty} (F_m, \varphi) = (F, \varphi).$$

Тем самым доказано, что функционалы вида F_ψ, $\psi(x) \in K$, всюду плотны в K'.

Нам понадобятся в дальнейшем преобразования Фурье не только для основных, но и для обобщенных функций. Пусть F — обобщенная функция (линейный функционал) в любом пространстве Φ основных функций и $\widetilde{\Phi}$ — пространство, состоящее из преобразований Фурье функций пространства Φ (например, $\widetilde{K} = Z$, $\widetilde{Z} = K$, $\widetilde{S} = S$). Преобразованием Фурье обобщенной функции F называется обобщенная функция $\widetilde{F}$ в $\widetilde{\Phi}$, задаваемая равенством *)

$$(\widetilde{F}, \widetilde{\varphi}) = (2\pi)^n (F, \varphi).$$

Для регулярных обобщенных функций F_ψ, $\psi \in \Phi$, справедлива формула $\widetilde{F}_\psi = F_{\widetilde{\psi}}$, показывающая, что данное нами определение преобразования Фурье обобщенных функций согласуется с определением преобразования Фурье для основных функций.

В заключение укажем общий вид линейных функционалов в пространствах K, S и Z.

Всякий линейный функционал в пространстве S имеет вид

$$(F, \varphi) = \int f(x)\, \varphi^{(m)}(x)\, dx,$$

где $f(x)$ — непрерывная функция, такая, что при некотором r интеграл

$$\int (1 + |x|^2)^{-r} f(x)\, dx$$

сходится (такие функции называются функциями степенного роста).

*) n — число переменных.

В каждом из пространств $K(a)$ линейные функционалы задаются формулами вида

$$(F, \varphi) = \int_{|x| \leqslant a} f(x) \varphi^{(m)}(x)\, dx,$$

где $f(x)$ — непрерывная функция. Так как пространство K является объединением подпространств $K(a)$, то каждый линейный функционал F в пространстве K задает последовательность линейных функционалов F_a в подпространствах $K(a)$: $(F, \varphi) = (F_a, \varphi)$, если $\varphi(x) \in K(a)$. Эти функционалы согласованы друг с другом в том смысле, что $(F_a, \varphi) = (F_b, \varphi)$, если $a < b$ и $\varphi(x) \in K(a)$. Обратно, любой набор согласованных линейных функционалов F_a в пространствах $K(a)$ определяет линейный функционал F в K, такой, что $(F, \varphi) = (F_a, \varphi)$ при $\varphi(x) \in K(a)$ (непрерывность функционала F сразу вытекает из определения топологии в K). Всякий линейный функционал в пространстве Z является преобразованием Фурье линейного функционала в пространстве K.

§ 2. ОПЕРАТОРЫ ТИПА ГИЛЬБЕРТА — ШМИДТА И ЯДЕРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В предыдущем параграфе мы доказали важную теорему о ядре для пространства K. Там было указано, что аналогичная теорема справедлива и для пространства S. Можно было бы без труда умножить число аналогичных теорем *). В следующем параграфе мы укажем широкий класс пространств, называемых ядерными пространствами, для которых верны аналоги теоремы о ядре. Определение ядерных пространств связано с некоторыми классами операторов в гильбертовом пространстве, которые мы рассмотрим в этом параграфе. Из этих классов два — вполне непрерывные операторы и операторы типа Гильберта — Шмидта, несомненно, хорошо знакомы читателю. Однако, ради большей независимости изложения, мы напомним основные свойства этих операторов.

*) Аналогичная теорема справедлива, например, для пространства $\mathfrak{Z}$ целых аналитических функций, топология в котором задается нормами

$$\|\varphi(z)\|_n = \sup_{|z|=n} |\varphi(z)|.$$

Третий класс операторов — класс ядерных операторов — приобрел за последние годы значение в различных вопросах. Мы даем его описание в п. 3. Наконец, в п. 4 указывается аффинное определение понятия ядерного оператора, что дает, в частности, возможность обобщить это определение на банаховы пространства. Отметим, что в банаховых пространствах ядерные операторы утрачивают ряд важных свойств.

Все рассматриваемые ниже классы операторов возникают при пополнении пространства *вырожденных операторов* *) по той или иной норме. Именно, как будет показано (см. теорему 1), каждый вырожденный оператор A можно записать в виде $A = UT$, где U — изометрический оператор, а T — положительно определенный оператор **). Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения оператора T. Пространство вполне непрерывных операторов получается из пространства вырожденных операторов пополнением по норме $\|A\| = \max\limits_k \lambda_k$, пространство операторов типа Гильберта — Шмидта — пополнением по норме $\|A\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^2}$, а пространство ядерных операторов — пополнением по норме $\|A\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k$.

Нормы $\|A\|$, $\|A\|_1$, $\|A\|_2$ изометрически инвариантны: для операторов A, UA и AU, где U — изометрический оператор, эти нормы совпадают.

Можно дать описание всех функций $f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ от собственных значений оператора T, таких, что равенство

$$\|A\| = f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad A = UT$$

определяет изометрически инвариантную норму в пространстве вырожденных операторов. Именно $f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ должна быть положительной однородной функцией первой степени, симметричной относительно переменных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и притом такой, что после ее четного продолжения на все значения переменных получается выпуклая функция в n-мерном пространстве. Рассматриваемые нами функции $\max \lambda_k$, $\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^2}$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k$ удовлетворяют этим условиям.

*) Оператор A называется *вырожденным*, если он отображает все пространство на конечномерное подпространство.

**) Оператор A мы называем *положительно определенным*, если $(Af, f) \geqslant 0$, *и строго положительно определенным*, если $(Af, f) > 0$, $f \neq 0$.

1. Вполне непрерывные операторы. Линейный оператор A, отображающий гильбертово пространство H_1 в гильбертово пространство H_2, называется *вполне непрерывным*, если он переводит любое ограниченное множество в множество с компактным замыканием. Это определение равносильно следующему: оператор A вполне непрерывен, если он переводит каждую слабо сходящуюся последовательность элементов в сильно сходящуюся последовательность *).

Отметим следующие свойства вполне непрерывных операторов:

1) Если A — вполне непрерывный оператор, отображающий пространство H_1 в пространство H_2, то и сопряженный **) с ним оператор A^*, отображающий H_2 в H_1, также вполне непрерывен.

2) Произведение AB непрерывного линейного оператора A и вполне непрерывного оператора B вполне непрерывно. Аналогичное утверждение справедливо и для случая, когда вполне непрерывным является первый множитель.

3) Линейная комбинация вполне непрерывных операторов является вполне непрерывным оператором.

Свойства 2) и 3) очевидны. Доказательство свойства 1) приведено в книге Н. И. Ахиезера и И. М. Глазмана «Теория линейных операторов» (М. — Л., 1950, гл. II, п. 27).

*) Последовательность элементов $h_1, \ldots, h_n, \ldots$ из гильбертова пространства H называется сильно сходящейся к элементу h, если

$$\lim_{n\to\infty} \|h_n - h\| = 0.$$

Последовательность $h_1, \ldots, h_n, \ldots$ называется слабо сходящейся к h, если

$$\lim_{n\to\infty} (h_n, g) = (h, g)$$

для любого элемента g из H.

**) Пусть A — линейный оператор, отображающий гильбертово пространство H_1 в гильбертово пространство H_2. *Сопряженным* с A называется оператор A^*, отображающий H_2 в H_1 и такой, что

$$(Af, g) = (f, A^*g)$$

для всех элементов f из H_1 и g из H_2. Точнее было бы писать $(Af, g)_2$ и $(f, A^*g)_1$, где $(Af, g)_2$ — скалярное произведение в H_2, а $(f, A^*g)_1$ — скалярное произведение в H_1. Однако мы надеемся, что читатель в каждом случае легко установит, в каком из пространств берется скалярное произведение.

Если рассматривать линейные операторы, действующие в некотором гильбертовом пространстве H, то свойства 1)—3) можно кратко сформулировать, сказав, что *вполне непрерывные операторы образуют идеал в кольце с инволюцией, состоящем из всех непрерывных операторов.*

Можно показать, что *множество вполне непрерывных операторов замкнуто в множестве всех непрерывных операторов относительно (операторной) нормы*

$$\|A\| = \sup_{\|f\|=1} \|Af\|$$

*и, следовательно, полно относительно этой нормы**).

Особенно простую структуру имеют *самосопряженные вполне непрерывные операторы* т. е. такие вполне непрерывные операторы A, что $(Af, g) = (f, Ag)$ для всех элементов f и g из H. *Если A — вполне непрерывный самосопряженный оператор, то в пространстве H можно выбрать ортогональный нормированный базис $e_1, \ldots, e_n, \ldots$, состоящий из собственных векторов этого оператора, $Ae_n = \lambda_n e_n$. При этом собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$, соответствующие векторам $e_1, \ldots, e_n, \ldots$, вещественны и стремятся к нулю при $n \to \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.*

Обратно, *всякий оператор A, задаваемый в некотором ортогональном нормированном базисе $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ формулами $Ae_n = \lambda_n e_n$, где λ_n — вещественные числа и $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, самосопряжен и вполне непрерывен***).

Если оператор A положительно определен (т. е. если $(Af, f) \geqslant 0$ для всех векторов f из H), то все его собственные значения положительны или равны нулю.

Мы покажем теперь, что любой (вообще говоря, не самосопряженный) вполне непрерывный оператор отличается от положительно определенного вполне непрерывного оператора лишь изометрическим множителем, т. е. оператором U, таким, что $\|Uf\| = \|f\|$. Иными словами, имеет место следующая теорема:

*) Это утверждение доказано в главе II, п. 28 цитированной книги Н. И. Ахиезера и И. М. Глазмана.

**) См. главу V, п. 55 цитированной книги Н. И. Ахиезера и И. М. Глазмана.

Теорема 1. *Пусть A — вполне непрерывный оператор отображающий H_1 в H_2. Тогда он имеет вид $A = UT$, где T — положительно определенный вполне непрерывный оператор, отображающий H_1 в H_1, а U — изометрический оператор, отображающий область значений оператора T в пространство H_2.*

Доказательство. Рассмотрим оператор $B = A^*A$. Так как A отображает H_1 в H_2, а A^* отображает H_2 в H_1, то оператор B переводит H_1 в себя. Этот оператор вполне непрерывен как произведение двух вполне непрерывных операторов A^* и A и положительно определен. В самом деле, для любого вектора f из H_1 выполняется неравенство

$$(Bf, f) = (A^*Af, f) = (Af, Af) \geqslant 0.$$

Следовательно, как указывалось выше, оператор B имеет вид $Be_n = \lambda_n e_n$, где $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ — ортогональный нормированный базис в пространстве H_1, $\lambda_n \geqslant 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Введем теперь новый оператор $T = B^{1/2}$, определяемый равенствами $Te_n = \sqrt{\lambda_n} e_n$. Очевидно, что $T^2 = B$. Кроме того, ясно, что оператор T вполне непрерывен и положительно определен.

Сравним $\|Af\|$ и $\|Tf\|$. Мы имеем

$$\|Af\|^2 = (Af, Af) = (A^*Af, f) = (T^2f, f).$$

Но оператор T положительно определен и, следовательно, самосопряжен. Поэтому

$$(T^2f, f) = (Tf, Tf) = \|Tf\|^2.$$

Таким образом, операторы A и T *метрически равны*, т. е.

$$\|Af\| = \|Tf\|$$

для любого элемента f из H_1. Теперь для каждого элемента g вида $g = Tf$, $f \in H_1$, определим оператор U равенством

$$Ug = Af.$$

Оператор U изометричен, поскольку $g = Tf$, а $\|Af\| = \|Tf\|$. При этом очевидно, что $Af = Ug = U(Tf)$ и потому $A = UT$. Тем самым наша теорема доказана *).

Отметим, что оператор U задан на множестве элементов вида Tf, т. е. на области значений оператора T. В силу изометричности мы можем распространить его на замыкание этой области значений. Нетрудно убедиться, что это замыкание является подпространством в H_1, натянутым на векторы e_n, соответствующие ненулевым собственным значениям λ_n оператора T.

Теорема 1 позволяет дать геометрическое описание вполне непрерывных операторов (вообще говоря, несамосопряженных). Пусть $A = UT$ — вполне непрерывный оператор, $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ — ортогональные собственные векторы положительного определенного оператора T и $\lambda_n \geqslant 0$ — соответствующие собственные значения. Рассмотрим в пространстве H_1 сферу $\|x\| = 1$. Оператор T переводит эту сферу в эллипсоид, главные оси которого направлены по векторам $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ Длины главных полуосей этого эллипсоида равны $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ Оператор же U изометрически отображает этот эллипсоид в пространство H_2. В результате получается эллипсоид в пространстве H_2, главные оси которого направлены по векторам $h_n = Ue_n$, а полуоси равны λ_n. При этом длины полуосей этого эллипсоида стремятся к нулю, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

Обратно, любой оператор A, переводящий сферу $\|x\| = 1$ в эллипсоид, главные полуоси которого стремятся к нулю, является вполне непрерывным.

Простейшим вполне непрерывным оператором является оператор P вида

$$Pf = \lambda (f, e) h,$$

где e и h — фиксированные векторы единичной длины, λ — фиксированное число. Этот оператор переводит все пространство H в одномерное пространство. Покажем, что любой вполне непрерывный оператор может быть аппроксимирован

*) Аналогичное утверждение имеет место не только для вполне непрерывных, но и для любых ограниченных (и даже для широкого класса неограниченных) операторов. Однако для наших целей достаточно утверждения, сформулированного в тексте.

суммой таких операторов. Более точно: покажем, что *любой вполне непрерывный оператор A может быть представлен в виде суммы ряда*

$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (f, e_n) h_n, \qquad (1)$$

где e_n (соответственно h_n) — векторы ортогонального нормированного базиса в пространстве H_1 (соответственно в H_2), а $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ — положительные числа, стремящиеся к нулю при $n \to \infty$. Обратно, всякий ряд вида (1), *в котором e_n, h_n, λ_n обладают указанными свойствами, задает вполне непрерывный оператор.*

Разложение (1) может быть получено следующим образом. Представим оператор A в виде $A = UT$ и обозначим через e_n собственные векторы оператора T, $Te_n = \lambda_n e_n$, а через h_n — векторы Ue_n. Разлагая любой вектор f по собственным векторам e_n оператора T, мы получим, что

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n) e_n$$

и, значит,

$$Af = UTf = U\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (f, e_n) e_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (f, e_n) h_n.$$

Покажем, что ряд (1) сходится по операторной норме. Это значит, что операторы A_k, определяемые формулой

$$A_k f = \sum_{n=1}^{k} \lambda_k (f, e_k) h_k,$$

сходятся по норме операторов к оператору A. Пусть $\|f\| = 1$. Тогда, так как векторы $\{h_n\}$ ортогональны и нормированы, то

$$\|(A - A_k) f\|^2 = \sum_{n=k+1}^{\infty} \lambda_n^2 |(f, e_n)|^2 \leqslant \Lambda_k^2 \sum_{n=k+1}^{\infty} |(f, e_n)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \Lambda_k^2 \|f\|^2 = \Lambda_k^2,$$

где через Λ_k обозначено наибольшее из чисел $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_{k+n}, \ldots$ Из этого неравенства вытекает, что

$$\|A - A_k\| = \sup_{\|f\|=1} \|(A - A_k) f\| \leqslant \Lambda_k$$

и, поскольку $\lim\limits_{k \to \infty} \Lambda_k = 0$, что $\lim\limits_{k \to \infty} \|A - A_k\| = 0$. Поэтому операторы A_k сходятся к оператору A по норме операторов.

Покажем теперь, что справедливо и обратное утверждение, а именно: *любой оператор вида*

$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (f, e_n) h_n, \qquad (1)$$

где $\{e_n\}$ и $\{h_n\}$ — ортогональные нормированные системы векторов в пространствах H_1 и H_2, а $\lambda_n \geqslant 0$ и $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = 0$, вполне непрерывен. Для доказательства достаточно заметить, что из соотношения $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = 0$ вытекает соотношение $\lim\limits_{k \to \infty} \|A - A_k\| = 0$, где положено

$$A_k f = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n (f, e_n) h_n.$$

Так как все операторы A_k отображают пространство H_1 на конечномерные подпространства в H_2, то они вполне непрерывны. Следовательно, вполне непрерывен и оператор A, являющийся пределом этих операторов по операторной норме.

Очевидно, что *для оператора A вида* (1) *числа λ_n всегда являются собственными значениями положительно определенного оператора T, входящего в разложение $A = UT$, векторы e_n — собственными векторами оператора T, а векторы h_n — векторами вида $h_n = Ue_n$.*

Отметим, что попутно мы доказали следующее утверждение:

Любой вполне непрерывный оператор A является пределом сходящейся к нему последовательности вырожденных операторов A_k (т. е. операторов, отображающих пространство H_1 на конечномерные подпространства в H_2). Мы показали, таким образом, что *пространство вполне непрерывных операторов совпадает с пополнением множества вырожденных операторов по норме $\|A\|$.*

2. Операторы типа Гильберта — Шмидта. Для многих вопросов анализа требование стремления к нулю собственных значений λ_n оператора T, входящего в разложение $A = UT$ вполне непрерывного оператора A, является слишком слабым, Мы будем рассматривать в дальнейшем операторы, для которых на эти собственные значения налагаются более жесткие требования быстроты убывания. Одним из наиболее часто используемых классов операторов является класс операторов типа Гильберта — Шмидта.

Оператором типа Гильберта — Шмидта называют вполне непрерывный оператор $A = UT$, для которого сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2,$$

составленный из квадратов собственных значений оператора T.

Геометрически это означает, что *оператор A типа Гильберта — Шмидта переводит сферу $\|f\| = 1$ в эллипсоид, у которого ряд, составленный из квадратов длин главных полуосей, сходится.*

Вспоминая, что в разложении

$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (f, e_n) h_n, \tag{1}$$

выведенном нами на стр. 46, λ_n — это собственные значения оператора T, мы можем утверждать, что *оператор типа Гильберта — Шмидта допускает разложение вида* (1), *где e_n и h_n — ортогональные нормированные базисы в пространствах H_1 и H_2, а числа $\lambda_n \geqslant 0$ таковы, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2$ сходится.*

Обратно, *если e_n и h_n — векторы ортогональных нормированных базисов в гильбертовых пространствах H_1 и H_2, а $\lambda_n \geqslant 0$ — такие числа, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2$ сходится, то формула* (1) *определяет оператор типа Гильберта — Шмидта.* В самом деле, из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2$ вытекает, что $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Поэтому, как было показано в п. 1, оператор A вполне непрерывен, причем λ_n — собственные значения оператора T, входящего в разложение $A = UT$.

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2$ составлен из квадратов собственных значений оператора T и, значит, A является оператором типа Гильберта — Шмидта.

Мы дадим ниже более удобное определение оператора типа Гильберта — Шмидта. Для этого нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть A — такой оператор, отображающий гильбертово пространство H_1 в гильбертово пространство H_2, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|Af_n\|^2$ сходится для некоторого ортогонального нормированного базиса $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ в H_1. Тогда этот ряд сходится и для любого другого ортогонального нормированного базиса $g_1, \ldots, g_n, \ldots$ в H_1 и имеет место равенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Af_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|Ag_n\|^2. \tag{2}$$

Доказательство. Чтобы доказать это предложение, выберем какой-нибудь ортогональный нормированный базис $h_1, \ldots, h_n, \ldots$ в пространстве H_2. По теореме Пифагора имеем

$$\|Af_n\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(Af_n, h_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(f_n, A^*h_k)|^2.$$

Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Af_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |(f_n, A^*h_k)|^2.$$

Вторичное применение теоремы Пифагора показывает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f_n, A^*h_k)|^2 = \|A^*h_k\|^2.$$

Поскольку правая часть этого равенства не зависит от выбора базиса в пространстве H_1, то равенство (2) доказано. Кроме того, мы показали, что *имеет место равенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Af_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|A^*h_n\|^2, \tag{3}$$

4 Зак. 1281. И. М. Гельфанд и Н. Я. Виленкин

где $h_1, \ldots, h_n, \ldots$ — любой ортогональный нормированный базис в пространстве H_2.

Дадим теперь другое определение операторов типа Гильберта — Шмидта. По определению для операторов A типа Гильберта — Шмидта сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2$, где λ_n — собственные значения положительно определенного оператора T в разложении $A = UT$. Пусть $\{e_n\}$ — ортогональный нормированный базис в H_1, составленный из собственных векторов оператора T. Поскольку $\|Af\| = \|Tf\|$, то $\lambda_n = \|Te_n\| = \|Ae_n\|$; значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2$ сходится. Но тогда из равенства (2) вытекает, что *для оператора типа Гильберта — Шмидта сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|Af_n\|^2$, где $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ — любой ортогональный нормированный базис в пространстве H_1.*

Докажем, что сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|Af_n\|^2$ для некоторого ортогонального нормированного базиса $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ в пространстве H_1 не только необходима, но и достаточна для того, чтобы оператор A был оператором типа Гильберта — Шмидта. Иными словами, докажем следующую теорему:

Теорема 2. *Для того чтобы оператор A был оператором типа Гильберта — Шмидта, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|Af_n\|^2$ сходился хотя бы для одного ортогонального нормированного базиса $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ в пространстве H_1.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть оператор A таков, что для некоторого ортогонального нормированного базиса $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ в H_1 сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|Af_n\|^2$. Тогда имеет место неравенство $\|A\| \leqslant \|A\|_2$, где через $\|A\|_2$ обозначено число* $\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|Af_n\|^2\right]^{1/2}$ (по равенству (2) значение $\|A\|_2$ зависит лишь от оператора A и не зависит от выбора ортогонального нормированного базиса $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ в H_1).

Доказательство. Выберем ортогональный нормированный базис $h_1, \ldots, h_n, \ldots$ в пространстве H_2. Тогда

$$\|Af\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(Af, h_n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, A^*h_n)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|f\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \|A^*h_n\|^2 = \|f\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \|Af_n\|^2.$$

Таким образом, показано, что

$$\|Af\|^2 \leqslant \|f\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \|Af_n\|^2 = \|f\|^2 \|A\|_2^2,$$

откуда следует

$$\|A\| = \sup_{\|f\|=1} \|Af\| \leqslant \|A\|_2.$$

Лемма доказана.

Докажем теперь теорему 2. Нам надо доказать лишь, что сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|Af_n\|^2$ достаточна для того, чтобы оператор A был оператором типа Гильберта — Шмидта. Но для этого достаточно показать, что из сходимости указанного ряда вытекает, что оператор A вполне непрерывен. В самом деле, если оператор вполне непрерывен, то имеет место разложение $A = UT$ и, в силу леммы 1, сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2$, где $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ — нормированные собственные векторы оператора T. Так как $\lambda_n = \|Ae_n\|$, то тем самым будет доказана сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2$, составленного из собственных значений оператора T.

Докажем полную непрерывность оператора A. Обозначим через A_k вырожденный оператор, переводящий вектор f_n в вектор Af_n при $1 \leqslant n \leqslant k$ и в нуль при $n > k$. Тогда

$$\|A - A_k\|^2 \leqslant \|A - A_k\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|(A - A_k) f_n\|^2 = \sum_{n=k+1}^{\infty} \|Af_n\|^2.$$

Из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|Af_k\|^2$ вытекает, что $\lim\limits_{k \to \infty} \|A - A_k\| = 0$.

Поэтому A является пределом по операторной норме $\|A\|$ последовательности вырожденных операторов A_k. Поскольку вырожденные операторы вполне непрерывны, то и оператор A вполне непрерывен. Как мы уже отметили, из полной непрерывности оператора A и сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\|Af_n\|^2$ вытекает принадлежность этого оператора к типу Гильберта — Шмидта. Теорема доказана.

В дальнейшем мы будем называть число $\|A\|_2$ нормой Гильберта — Шмидта для оператора A. Очевидно, что *норма Гильберта—Шмидта конечна для операторов типа Гильберта — Шмидта и только для таких операторов*. При этом она удовлетворяет легко доказываемым соотношениям

$$\|A+B\|_2 \leqslant \|A\|_2+\|B\|_2$$

и

$$\|\lambda A\|_2 = |\lambda|\,\|A\|_2.$$

Отсюда вытекает, что *множество операторов типа Гильберта — Шмидта образует линейное нормированное пространство $\mathfrak{H}$ относительно нормы* $\|A\|_2$. Покажем, что это пространство гильбертово. В самом деле, оператор Гильберта — Шмидта A задается числами (Af_n, h_k), где $\{f_n\}$ — ортогональный нормированный базис в пространстве H_1, а $\{h_n\}$ — ортогональный нормированный базис в пространстве H_2, причем

$$\|A\|_2 = \left[\sum_{n=1}^{\infty}\|Af_n\|^2\right]^{1/2} = \left[\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|(Af_n, h_k)|^2\right]^{1/2}.$$

Отсюда следует, что пространство $\mathfrak{H}$ операторов типа Гильберта — Шмидта изоморфно пространству бесконечных матриц $\|a_{nk}\|$, для которых сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|^2$. Но, как известно, пространство таких матриц является гильбертовым пространством. Следовательно, и пространство $\mathfrak{H}$ операторов типа Гильберта — Шмидта гильбертово.

Так как пространство операторов типа Гильберта—Шмидта с нормой $\|A\|_2$ является гильбертовым пространством, то оно полно. Мы докажем, что это пространство является пополнением множества вырожденных операторов по норме $\|A\|_2$. В самом деле, при доказательстве теоремы 2 было показано,

что если A — оператор типа Гильберта — Шмидта, а $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ — ортогональный нормированный базис в пространстве H_1, то имеет место равенство $\lim_{k\to\infty}\|A-A_k\|_2=0$, где A_k — оператор, совпадающий с A на элементах $f_1, \ldots, f_k$ и переводящий в нуль элементы $f_{k+1}, \ldots, f_{k+n}, \ldots$ Таким образом, каждый оператор типа Гильберта — Шмидта является пределом по норме $\|A\|_2$ последовательности вырожденных операторов $A_1, \ldots, A_k, \ldots$. Отсюда вытекает, что множество вырожденных операторов всюду плотно в пространстве операторов типа Гильберта — Шмидта с нормой $\|A\|_2$. Поскольку пространство таких операторов полно, оно является пополнением множества вырожденных операторов по норме $\|A\|_2$.

Остановимся еще на одном свойстве операторов типа Гильберта — Шмидта. Именно, докажем следующее утверждение.

Теорема 3. *Для того чтобы оператор A, отображающий гильбертово пространство H_1 в гильбертово пространство H_2, был оператором типа Гильберта — Шмидта, необходимо и достаточно, чтобы он допускал представление вида*

$$Af=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(f, e_n)h_n, \tag{4}$$

где $\{e_n\}$ и $\{h_n\}$ — ортогональные нормированные базисы в пространствах H_1 и H_2 соответственно, а $\lambda_n\geqslant 0$ — такие числа, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2$ сходится.

Доказательство. Пусть A — оператор типа Гильберта — Шмидта. Тогда этот оператор вполне непрерывен и, следовательно, может быть представлен в виде ряда

$$Af=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(f, e_n)h_n,$$

где λ_n — собственные значения положительно определенного оператора T, входящего в разложение $A=UT$. Так как A—оператор типа Гильберта—Шмидта, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2$ сходится. Этим необходимость условия теоремы доказана.

Докажем его достаточность. Пусть оператор A допускает представление вида (4), причем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2$ сходится. Тогда $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ и, следовательно, оператор A вполне непрерывен, причем числа λ_n являются собственными значениями для оператора T, входящего в разложение $A = UT$. Так как по условию ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2$ сходится, то A является оператором типа Гильберта—Шмидта. Теорема доказана.

В заключение отметим следующие свойства операторов типа Гильберта—Шмидта, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

1) *Оператор A^*, сопряженный с оператором типа Гильберта — Шмидта, является оператором того же типа.*

В самом деле, если A — оператор типа Гильберта — Шмидта, то для любого ортогонального нормированного базиса $\{f_n\}$ в пространстве H_1 сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|Af_n\|^2$. По лемме 1 отсюда вытекает сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \|A^*h_n\|^2$ для любого ортогонального нормированного базиса $\{h_n\}$ в пространстве H_2. Но это означает, что A^* также является оператором типа Гильберта — Шмидта.

2) *Произведение AB непрерывного линейного оператора A на оператор B типа Гильберта — Шмидта является оператором типа Гильберта — Шмидта.*

В самом деле, для любого ортогонального нормированного базиса $\{f_n\}$ в H_1 мы имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|ABf_n\|^2 \leqslant \|A\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \|Bf_n\|^2. \tag{5}$$

Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|Bf_n\|^2$ сходится, так как B — оператор типа Гильберта — Шмидта. Поэтому сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|ABf_n\|^2$ и, следовательно, AB также является оператором типа Гильберта — Шмидта. Отметим, что из этого неравенства вытекает

следующее полезное соотношение

$$\|AB\|_2 \leqslant \|A\| \, \|B\|_2.$$

3) *Произведение BA, где A — непрерывный линейный оператор, а B — оператор типа Гильберта — Шмидта, также является оператором того же типа.*

В самом деле, $BA = (A^*B^*)^*$. Но B^*, по свойству 1), является оператором типа Гильберта — Шмидта и, по свойству 2), A^*B^* является оператором того же типа. Вторично применяя свойство 1), мы убеждаемся, что BA является оператором типа Гильберта — Шмидта.

3. Ядерные операторы. Еще более ограничительным требованием, чем принадлежность оператора A к типу Гильберта — Шмидта, является требование ядерности этого оператора.

Вполне непрерывный оператор A называется *ядерным*, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$, составленный из собственных значений оператора T, входящего в разложение $A = UT$. Поскольку из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ вытекает сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2$, то всякий ядерный оператор является оператором типа Гильберта — Шмидта.

Геометрически требование ядерности означает, что оператор A отображает сферу $\|x\| = 1$ на эллипсоид пространства H_2, для которого ряд, составленный из главных полуосей, сходится.

Мы доказали в п. 1, что всякий вполне непрерывный оператор A, отображающий гильбертово пространство H_1 в гильбертово пространство H_2, может быть представлен в виде ряда

$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (f, e_n) h_n, \tag{1}$$

где $\{e_n\}$ и $\{h_n\}$ — ортогональные нормированные базисы в пространствах H_1 и H_2, а $\lambda_n \geqslant 0$, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Отсюда следует, что *всякий ядерный оператор может быть* *представлен в виде ряда* (1), *причем* $\lambda_n \geqslant 0$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ *сходится.*

В п. 1 было показано, что всякий ряд вида (1), где $\{e_n\}$ и $\{h_n\}$ — ортогональные нормированные базисы в пространствах H_1 и H_2, а $\lambda_n \geqslant 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ задает вполне непрерывный оператор A, причем λ_n являются собственными значениями положительно определенного оператора T, входящего в разложение $A = UT$. Поэтому *любой ряд вида* (1), *для которого* $\lambda_n \geqslant 0$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n < +\infty$, *задает ядерный оператор, отображающий пространство* H_1 *в* H_2.

Для положительно определенных операторов понятие ядерного оператора совпадает с понятием оператора, имеющего конечный след. Положительно определенный оператор A в гильбертовом пространстве H называется *оператором с конечным следом* *), если для любого ортогонального нормированного базиса $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ в пространстве H сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (Af_n, f_n)$.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 3. *Для того чтобы вполне непрерывный положительно определенный оператор* T *был ядерным, необходимо и достаточно, чтобы он имел конечный след* **).

Доказательство. Пусть T — положительно определенный ядерный оператор. Введем оператор $T^{1/2}$, положив $T^{1/2} e_n = \sqrt{\lambda_n}\, e_n$, где λ_n — собственные значения оператора T, а e_n — соответствующие собственные векторы. Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T^{1/2} e_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < +\infty, \tag{6}$$

*) Если $\|a_{mn}\|$ — матрица, соответствующая оператору A в базисе $\{f_n\}$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (Af_n, f_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{nn}$ и, таким образом, является следом матрицы $\|a_{mn}\|$.

**) Без предположения о полной непрерывности оператора T аналог этого утверждения доказан ниже в теореме 7.

то $T^{1/2}$ является оператором типа Гильберта — Шмидта. Поэтому для любого ортогонального нормированного базиса $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ выполняется равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T^{1/2} f_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|T^{1/2} e_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n.$$

В силу самосопряженности оператора $T^{1/2}$ мы имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T^{1/2} f_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (T^{1/2} f_n, T^{1/2} f_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (Tf_n, f_n).$$

Поэтому для любого ортогонального нормированного базиса $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ в H выполняется равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Tf_n, f_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < +\infty,$$

из которого следует, что оператор T имеет конечный след.

Обратно, пусть T — вполне непрерывный положительно определенный оператор, имеющий конечный след. Выберем в пространстве H ортогональный нормированный базис $e_1, \ldots, e_n, \ldots$, состоящий из собственных векторов оператора T, соответствующих собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ Тогда имеет место равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \sum_{n=1}^{\infty} (Te_n, e_n) < +\infty,$$

из которого следует, что T — ядерный оператор. Лемма доказана.

Отсюда следует, что любой ядерный оператор является произведением $A = UT$ изометрического оператора U на положительно определенный оператор T, имеющий конечный след.

Остановимся на связи ядерных операторов с операторами типа Гильберта — Шмидта.

Теорема 4. *Произведение* AB *любых двух операторов типа Гильберта — Шмидта является ядерным оператором. Обратно, каждый ядерный оператор является произведением двух операторов типа Гильберта — Шмидта.*

Доказательство. Пусть оператор B отображает пространство H_1 в H_2, а оператор A отображает пространство H_2 в H_3 и пусть $AB = UT$ — разложение оператора AB в произведение положительно определенного оператора T, действующего в пространстве H_1, и изометрического оператора U, отображающего область значений оператора T в пространство H_3. Обозначим через $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ ортогональный нормированный базис в пространстве H_1, состоящий из собственных векторов оператора T, $Te_n = \lambda_n e_n$, и через $h_1, \ldots, h_n, \ldots$ — ортогональную нормированную систему в пространстве H_3, состоящую из векторов $h_n = Ue_n$. Тогда при $\lambda_n \neq 0$ имеет место неравенство

$$\lambda_n = (Te_n, e_n) = (UTe_n, Ue_n) = (ABe_n, h_n) = \\ = (Be_n, A^*h_n) \leqslant \frac{1}{2}(\|Be_n\|^2 + \|A^*h_n\|^2). \qquad (7)$$

Если A и B являются операторами типа Гильберта — Шмидта, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \|Be_n\|^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \|A^*h_n\|^2$ сходятся, и, значит, в силу неравенства (7) сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$. Тем самым доказано, что произведение AB двух операторов типа Гильберта — Шмидта является ядерным оператором.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть A — ядерный оператор и $A = UT$ — его разложение в произведение положительно определенного и изометрического операторов. Тогда, как было показано выше, оператор $T^{1/2}$ является оператором типа Гильберта — Шмидта. Оператором того же типа является и $UT^{1/2}$, поскольку *)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| UT^{1/2}e_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left\| T^{1/2}e_n \right\|^2.$$

Так как $A = (UT^{1/2})T^{1/2}$, то оператор A является произведением двух операторов типа Гильберта — Шмидта, т. е. теорема доказана.

*) Оператор U определен на замыкании области значений оператора T. Легко видеть, что это замыкание совпадает с замыканием области значений оператора $T^{1/2}$: в обоих случаях речь идет о подпространстве, натянутом на векторы e_n, которым соответствуют ненулевые значения λ_n. Поэтому оператор $UT^{1/2}$ имеет смысл.

Из теоремы 4 вытекают следующие свойства ядерных операторов.

1) *Оператор A^*, сопряженный с ядерным оператором A, является ядерным оператором.*

В самом деле, если $A = UT^{1/2}T^{1/2}$, то $A^* = T^{1/2}(UT^{1/2})^*$. Оператор $(UT^{1/2})^*$ является оператором типа Гильберта — Шмидта, как сопряженный к оператору $UT^{1/2}$ того же типа. Следовательно, A^* является ядерным оператором.

2) *Произведение AB любого ограниченного линейного оператора A на ядерный оператор B является ядерным оператором. Аналогичное утверждение имеет место для произведения BA.*

В самом деле, если B — ядерный оператор, то $B = UT^{1/2}T^{1/2}$, где $UT^{1/2}$ и $T^{1/2}$ — операторы типа Гильберта — Шмидта. Но тогда и $AUT^{1/2}$ является оператором типа Гильберта — Шмидта. Следовательно, $AB = (AUT^{1/2})T^{1/2}$ является произведением двух операторов типа Гильберта — Шмидта, т. е. ядерным оператором. Аналогичное утверждение справедливо и для произведения BA ядерного оператора B на непрерывный оператор A, так как $BA = (A^*B^*)^*$.

Доказанных свойств ядерных операторов достаточно для построения теории ядерных пространств. Однако ввиду важности ядерных операторов, мы изложим их дальнейшие свойства.

Лемма 4. *Пусть A и B — операторы в гильбертовом пространстве H, причем B — ограниченный оператор, а $A = UT$ — ядерный оператор. Тогда имеет место равенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (ABe_n, e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (BAe_n, e_n), \qquad (8)$$

где $\{e_n\}$ — ортогональный нормированный базис в H, состоящий из собственных функций оператора T.

Доказательство. Очевидно, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} (ABe_n, e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (Be_n, e_m)(Ae_m, e_n) \qquad (9)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (BAe_n, e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (Ae_n, e_m)(Be_m, e_n). \qquad (9')$$

Правые части равенств (9) и (9′) отличаются лишь порядком слагаемых, поэтому, чтобы доказать равенство (8), достаточно показать, что ряд (9) абсолютно сходится. Но

$$(Ae_n, e_m) = (UTe_n, e_m) = \lambda_n (Ue_n, e_m),$$

где через λ_n обозначено собственное значение оператора T, соответствующее собственному вектору e_n. Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |(Ae_n, e_m)| \cdot |(Be_m, e_n)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sum_{m=1}^{\infty} |(Ue_n, e_m)| \cdot |(Be_m, e_n)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sum_{m=1}^{\infty} [\,|(Ue_n, e_m)|^2 + |(Be_m, e_n)|^2].$$

По теореме Пифагора

$$\sum_{m=1}^{\infty} |(Ue_n, e_m)|^2 = \|Ue_n\|^2 \leqslant 1,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} |(Be_m, e_n)|^2 = \|B^* e_n\|^2 \leqslant \|B^*\|^2 = \|B\|^2$$

и потому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |(Ae_n, e_m)|\,|(Be_m, e_n)| \leqslant (\|B\|^2 + 1) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n.$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ сходится, то абсолютная сходимость ряда (9) доказана. Тем самым доказано и равенство (8).

Из леммы 4 вытекает, что для любого унитарного оператора V и любого ядерного оператора $A = UT$ имеет место равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(V^{-1} A V e_n, e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (Ae_n, e_n), \tag{10}$$

где $\{e_n\}$ — ортогональный нормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора T. Для доказательства

достаточно заменить в формуле (8) B на V, A на $V^{-1}A$ и заметить, что разложение оператора $V^{-1}A$ имеет вид $V^{-1}A = WT$, где $W = V^{-1}U$.

Равенство (10) можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Af_n, f_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (Ae_n, e_n), \tag{11}$$

где через $\{f_n\}$ обозначен ортогональный нормированный базис в H, состоящий из векторов $f_n = Ve_n$. Таким образом, *если A — ядерный оператор, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (Af_n, f_n)$ сходится для любого ортогонального нормированного базиса $\{f_n\}$ и сумма этого ряда не зависит от выбора базиса*, т. е. оператор A имеет конечный след (ранее это было доказано лишь для положительно определенных ядерных операторов, см. лемму 3).

Равенство (11) можно обобщить, отказавшись от предположения об ортогональности базиса $\{f_n\}$. Назовем множество векторов $\{f_n\}$ в пространстве H *безусловным базисом*, если $f_n = Bh_n$, где $\{h_n\}$ — ортогональный нормированный базис в H, а B — ограниченный оператор, имеющий ограниченный обратный оператор B^{-1} *). Если $\{f_n\}$, $f_n = Bh_n$ — безусловный базис, то $\{g_n\}$, где $g_n = \left(B^{-1}\right)^* h_n$, также является безусловным базисом, причем имеет место равенство

$$(f_m, g_n) = \left(Bh_m, \left(B^{-1}\right)^* h_n\right) = (h_m, h_n) = \delta_{mn}.$$

Базис $\{g_n\}$ называется *биортогональным* к базису $\{f_n\}$.

Докажем следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть $\{f_n\}$ — безусловный базис в пространстве H, а $\{g_n\}$ — биортогональный к нему базис.*

*) Если $\{f_n\}$ — безусловный базис, то и все базисы $\{Cf_n\}$, где C — ограниченный оператор, имеющий ограниченный обратный оператор, являются безусловными. Поэтому понятие безусловного базиса есть аффинное понятие, зависящее лишь от линейных операций в H и топологии этого пространства, но не зависящее от задания скалярного произведения в H. Для того, чтобы базис $\{f_n\}$ был безусловным, необходимо и достаточно, чтобы он оставался базисом при любой перестановке векторов.

Тогда для любого ядерного оператора A ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(Af_n,\ g_n) \tag{12}$$

абсолютно сходится, причем его сумма не зависит от выбора базиса $\{f_n\}$.

Доказательство. Пусть $f_n = Bh_n$, $g_n = (B^{-1})^* h_n$, где $\{h_n\}$ — ортогональный нормированный базис в H. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(Af_n,\ g_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(ABh_n,\ (B^{-1})^* h_n\right) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty}\left(B^{-1}ABh_n,\ h_n\right).$$

Оператор $B^{-1}AB$ ядерный, поскольку A — ядерный оператор, а B и B^{-1} ограниченные операторы. Поэтому, как было доказано выше, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(B^{-1}ABh_n,\ h_n\right)$ абсолютно сходится, а потому абсолютно сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(Af_n,\ g_n)$. Докажем независимость суммы этого ряда от выбора безусловного базиса $\{f_n\}$. В силу равенства (11) сумма $\sum_{n=1}^{\infty}\left(B^{-1}ABh_n,\ h_n\right)$ не зависит от выбора ортогонального нормированного базиса $\{h_n\}$. Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(B^{-1}ABh_n,\ h_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(B^{-1}ABe_n,\ e_n\right),$$

где $\{e_n\}$ — ортогональный нормированный базис, состоящий из собственных векторов положительно определенного оператора Q, входящего в разложение $B^{-1}A = WQ$ (см. теорему 1). Применяя лемму 4 к операторам $B^{-1}A$ и B, получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(B^{-1}ABe_n,\ e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(Ae_n,\ e_n).$$

Тем самым доказано, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}(Af_n,\ g_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(Ae_n,\ e_n).$$

Поскольку правая часть этого равенства не зависит от выбора базиса $\{f_n\}$, то значение $\sum_{n=1}^{\infty}(Af_n,\ g_n)$ не зависит от выбора безусловного базиса $\{f_n\}$. Теорема доказана.

Значительно более тонкие рассуждения показывают, что справедлива следующая теорема, доказанная В. Б. Лидским.

Теорема 6 (о следе). *Если A — ядерный оператор, $\{f_n\}$ — безусловный базис и $\{g_n\}$ — биортогональный к нему базис, то*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(Af_n,\ g_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n, \tag{13}$$

где μ_n — собственные значения оператора A.

Заметим, что *если A — ядерный оператор, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(Af_n,\ g_n)$ абсолютно сходится не только, когда базисы $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ биортогональны, но и в случае, когда $f_n = B_1e_n$, $g_n = B_2e_n$, где B_1 и B_2 — ограниченные операторы, а $\{e_n\}$ — ортогональный нормированный базис в H.*

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 5.

Из этого утверждения вытекает, что для любых безусловных базисов $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ (или частей безусловных базисов) и любого ядерного оператора A абсолютно сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(Af_n,\ g_n)$. Абсолютная сходимость таких рядов не только необходима, но и достаточна для ядерности оператора A. Иными словами, справедлива следующая теорема:

Теорема 7. *Для того чтобы ограниченный линейный оператор A в гильбертовом пространстве H был ядерным, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(Af_n,\ g_n)$ сходился для всех систем векторов $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$, являющихся частями безусловных базисов в H.*

Доказательство. Выше было показано, что если A — ядерный оператор, а $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ — части безусловных базисов, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(Af_n,\ g_n)$ сходится. Поэтому необходимость условия теоремы доказана.

Докажем, что это условие достаточно, т. е. покажем что из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(Af_n, g_n)$ для любых систем векторов $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$, являющихся частями безусловных базисов в H, вытекает ядерность ограниченного оператора A.

Так как оператор A ограничен, то его можно записать в виде $A=UT$, где U — изометрический, а T — положительно определенный ограниченный оператор (в п. 1 было указано, что такое разложение справедливо для всех ограниченных операторов). Покажем, что оператор T имеет дискретный спектр, т. е. что в пространстве H можно выбрать ортогональный нормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора T.

В самом деле, предположим, что оператор T имеет непрерывный спектр. В этом случае можно указать последовательность непересекающихся отрезков $\Delta_1, \ldots, \Delta_n, \ldots$, лежащих на полупрямой $[\alpha, \infty)$, $\alpha>0$, и таких, что $E(\Delta_n)\neq 0$, где $E(\Delta)$ — разложение единицы, соответствующее оператору T (относительно разложения единицы, см. добавление к § 4). Выберем в каждом из подпространств $E(\Delta_n)H$ нормированный вектор f_n. Эти векторы попарно ортогональны и, поскольку отрезки Δ_n лежат на полупрямой $[\alpha, \infty)$, $\alpha>0$, удовлетворяют неравенствам вида $(Tf_n, f_n)\geqslant\alpha$. Изометрический оператор U определен на всех векторах f_n. Положим $Uf_n=g_n$. Системы векторов $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ могут быть дополнены до ортогональных нормированных базисов в H. Поэтому, по предположению, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(Af_n, g_n)$ абсолютно сходится. Но

$$(Af_n, g_n)=(UTf_n, Uf_n)=(Tf_n, f_n)\geqslant\alpha>0$$

и, следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(Af_n, g_n)=+\infty.$$

Полученное противоречие и доказывает, что у оператора T нет непрерывного спектра.

Итак, спектр оператора T дискретен. Покажем, что T является ядерным оператором, т. е. что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n$ сходится, где λ_n — собственные значения оператора T. Для этого заметим, что

$$\lambda_n=(Te_n, e_n)=(UTe_n, Ue_n)=(Ae_n, g_n),$$

где через e_n обозначен нормированный собственный вектор оператора T, соответствующий собственному значению λ_n, а через g_n — вектор Ue_n. Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n=\sum_{n=1}^{\infty}(Ae_n, g_n).$$

Так как системы векторов $\{e_n\}$ и $\{g_n\}$ можно дополнить до ортогональных нормированных базисов в пространстве H, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(Ae_n, g_n)$ абсолютно сходится, а следовательно, сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n$. Теорема доказана.

Полезно отметить, что при доказательстве достаточности условия теоремы мы использовали лишь абсолютную сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(Af_n, g_n)$ для любых ортогональных нормированных систем $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$. Поэтому теорему 7 можно усилить следующим образом.

Теорема 7′. *Для того чтобы ограниченный линейный оператор A в гильбертовом пространстве H был ядерным, достаточно, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(Af_n, g_n)$ сходился для любых ортогональных нормированных систем векторов $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ в H.*

Эта теорема сохраняет силу и для операторов, отображающих одно гильбертово пространство в другое.

Отметим еще следующий необходимый и достаточный признак ядерности оператора.

Теорема 8. *Для того чтобы оператор A был ядерным, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\|Af_n\|$ сходился хотя* *бы для одного ортогонального нормированного базиса $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ в пространстве H_1.*

Доказательство. Пусть $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ — ортогональный нормированный базис в пространстве H_1 и пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|Af_n\|$ сходится. Тогда сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|Af_n\|^2$. Поэтому оператор A является оператором типа Гильберта — Шмидта, а значит, и подавно вполне непрерывным оператором. Следовательно, оператор A можно представить в виде $A = UT$. Так как $\|f_n\| = 1$, а оператор U изометричен на области значений оператора T, то имеет место неравенство

$$(Tf_n, f_n) \leqslant \|Tf_n\| = \|UTf_n\| = \|Af_n\|.$$

Это неравенство показывает, в силу сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \|Af_n\|$, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (Tf_n, f_n)$ сходится. А тогда (по лемме 3) оператор A — ядерный.

Обратно, пусть $A = UT$ — ядерный оператор. Выберем ортогональный нормированный базис в пространстве H_1, состоящий из собственных векторов $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ оператора T. Тогда имеет место равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n,$$

показывающее, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|$ сходится. Теорема доказана.

Отметим, что из ядерности оператора A не следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \|Af_n\|$ для *всех* ортогональных нормированных базисов в пространстве H_1. Построим соответствующий пример.

Пример. Рассмотрим в гильбертовом пространстве H, состоящем из последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ со сходящейся суммой квадратов модулей, вектор

$$f = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right).$$

Обозначим через P оператор ортогонального проектирования на подпространство, порождённое вектором f. Так как оператор P отображает пространство H на одномерное подпространство, то он является ядерным оператором (след его равен единице).

Оператор P переводит векторы ортогонального нормированного базиса $\{e_n\}$, где

$$e_n = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots),$$

в векторы

$$Pe_n = \frac{(e_n, f)\,f}{\|f\|} = \frac{f}{n\|f\|}.$$

Но ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Pe_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

расходится.

Таким образом, если A — ядерный оператор, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|$, где $\{e_n\}$ — ортогональный нормированный базис в H, может расходиться.

4. Следовая норма. В этом пункте будет доказано, что ядерные операторы образуют линейное пространство и что это пространство является пополнением пространства вырожденных операторов относительно некоторой нормы, называемой следовой нормой. Докажем сначала следующую теорему.

Теорема 9. *Если A — ядерный оператор, отображающий гильбертово пространство H_1 в гильбертово пространство H_2, то имеет место равенство*

$$\sup \sum_{n=1}^{\infty} |(Af_n, g_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n, \tag{14}$$

где λ_n — собственные значения положительно определенного оператора T, входящего в разложение $A = UT$, а верхняя грань берется по всем ортогональным и нормированным системам векторов $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ в пространствах H_1 и H_2.

Доказательство. Обозначим через $\{e_n\}$ ортогональную нормированную систему в H_1, состоящую из всех собственных векторов оператора T, для которых $\lambda_n \neq 0$, а через h_n обозначим векторы Ue_n. Тогда

$$\lambda_n = (Te_n, e_n) = (UTe_n, Ue_n) = (Ae_n, h_n)$$

и потому

$$\sum_{n=1}^{\infty}(Ae_n, h_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n.$$

Так как $\{e_n\}$ и $\{h_n\}$ — ортогональные нормированные системы в H_1 и H_2, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n \leqslant \sup \sum_{n=1}^{\infty}|(Af_n, g_n)|. \qquad (15)$$

Докажем теперь обратное неравенство. Возьмем в пространствах H_1 и H_2 любые ортогональные нормированные системы векторов $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ и оценим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|(Af_n, g_n)|$. Так как оператор A переводит в нуль собственные векторы оператора T, соответствующие нулевому собственному значению, то

$$(Af_n, g_n)=\sum_{k=1}^{\infty}(f_n, e_k)(Ae_k, g_n)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(f_n, e_k)(Ue_k, g_n),$$

где $\{e_k\}$ — ортогональная нормированная система, состоящая из собственных векторов оператора T, для которых $\lambda_k \neq 0$. Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(Af_n, g_n)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k|(f_n, e_k)(Ue_k, g_n)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k[|(f_n, e_k)|^2+|(Ue_k, g_n)|^2]. \quad (16)$$

Так как $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ — ортогональные нормированные системы векторов в пространствах H_1 и H_2, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(f_n, e_k)|^2 \leqslant \|e_k\|^2 \leqslant 1$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(Ue_k, g_n)|^2 \leqslant \|Ue_k\|^2 \leqslant 1.$$

Из этих неравенств и соотношения (16) вытекает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(Af_n, g_n)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k.$$

Поэтому

$$\sup \sum_{n=1}^{\infty}|(Af_n, g_n)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k. \qquad (17)$$

Сравнивая соотношения (15) и (17), мы убеждаемся, что

$$\sup \sum_{n=1}^{\infty}|(Af_n, g_n)| = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k.$$

Теорема доказана.

В теореме 7′ было доказано, что из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|(Af_n, g_n)|$ для всех ортогональных нормированных базисов $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ в H_1 и H_2 вытекает ядерность оператора A. Поэтому ядерные операторы можно охарактеризовать как операторы, для которых выражение

$$\sup \sum_{n=1}^{\infty}|(Af_n, g_n)|$$

конечно.

Отсюда сразу вытекает, что ядерные операторы образуют линейное пространство. В доказательстве нуждается лишь утверждение, что сумма ядерных операторов есть ядерный оператор. Но это утверждение сразу вытекает из того, что

$$\sup \sum_{n=1}^{\infty}|((A+B)f_n, g_n)| \leqslant$$
$$\leqslant \sup \sum_{n=1}^{\infty}|(Af_n, g_n)| + \sup \sum_{n=1}^{\infty}|(Bf_n, g_n)|.$$

В пространство ядерных операторов можно ввести норму, положив

$$\|A\|_1 = \sup \sum_{n=1}^{\infty}|(Af_n, g_n)|, \qquad (18)$$

где верхняя грань берется по всем ортогональным нормированным системам векторов $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ в пространствах H_1

и H_2. Нетрудно проверить, что для нормы $\|A\|_1$ выполняются соотношения

$$\|A+B\|_1 \leqslant \|A\|_1 + \|B\|_1$$

и

$$\|\lambda A\|_1 = |\lambda| \|A\|_1.$$

Из теоремы 9 следует, что норму $\|A\|_1$ можно также определить, как $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$, т. е. как след положительно определенного оператора T, входящего в разложение $A=UT$ ядерного оператора A (см. равенство (14)). Поэтому норму $\|A\|_1$ называют *следовой нормой*.

Напомним, что не только следовая норма, но и норма Гильберта—Шмидта $\|A\|_2$, а также операторная норма $\|A\|$ могут быть выражены через собственные значения λ_n оператора T, входящего в разложение $A = UT$. Именно, имеют место равенства

$$\|A\| = \sup_n \lambda_n, \tag{19}$$

$$\|A\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n, \tag{20}$$

$$\|A\|_2 = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2\right]^{1/2}. \tag{21}$$

Мы доказали уже равенства (20) и (21), доказательство же равенства (19) общеизвестно.

Нормы $\|A\|$, $\|A\|_2$, $\|A\|_1$ связаны между собой неравенствами

$$\|A\| \leqslant \|A\|_2 \leqslant \|A\|_1. \tag{22}$$

В самом деле, неравенство $\|A\| \leqslant \|A\|_2$ было доказано выше (см. лемму 2), а неравенство $\|A\|_2 \leqslant \|A\|_1$ вытекает из того, что $\lambda_n \geqslant 0$ и потому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\right)^2.$$

В начале этого пункта было показано, что любой ядерный оператор $A = UT$ можно записать в виде

$$Af = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (f, e_k) h_k,$$

где $\{e_k\}$ — ортогональный нормированный базис в H_1 составленный из собственных векторов операторе T, λ_k — соответствующие собственные значения и $h_k = Ue_k$. При этом $\lambda_k \geqslant 0$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ сходится. Из теоремы 9 следует, что

$$\|A - A_n\|_1 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k,$$

где через A_n обозначен оператор, задаваемый формулой

$$A_n f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (f, e_k) h_k.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \|A - A_n\|_1 = 0.$$

Таким образом, *любой ядерный оператор является пределом по следовой норме последовательности вырожденных операторов $A_1, \ldots, A_n, \ldots$*

Мы докажем сейчас, что *пространство ядерных операторов является пополнением пространства вырожденных операторов по следовой норме*. Для этого достаточно показать, что пространство ядерных операторов полно относительно следовой нормы. Докажем сначала следующую теорему.

Теорема 10. *Пусть $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ — последовательность ядерных операторов, причем следовые нормы $\|A_n\|_1$ этих операторов ограничены в совокупности. Если операторы слабо сходятся к оператору A, то оператор A также является ядерным.*

Доказательство. Из ограниченности норм $\|A\|_1$ в совокупности вытекает существование такого числа M, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(A_n f_k, h_k)| \leqslant M$$

для всех ортогональных нормированных систем $f_1, \ldots, f_k, \ldots$ и $h_1, \ldots, h_k, \ldots$ и всех операторов A_n. Пусть теперь s — любое натуральное число. Перейдем в неравенстве

$$\sum_{k=1}^{s} |(A_n f_k, h_k)| \leqslant M$$

к пределу при $n \to \infty$. Принимая во внимание, что в силу слабой сходимости последовательности A_n $\lim\limits_{n\to\infty} (A_n f_k, h_k) = (Af_k, h_k)$ мы получим неравенство

$$\sum_{k=1}^{s} |(Af_k, h_k)| \leqslant M.$$

Но тогда имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(Af_k, h_k)| \leqslant M.$$

Так как $\{f_k\}$ и $\{h_k\}$ — произвольные ортогональные нормированные системы в H_1 и H_2, то

$$\sup \sum_{k=1}^{\infty} |(Af_k, h_k)| \leqslant M$$

и, следовательно, оператор A ядерный. Теорема доказана.

Замечание. Из этой теоремы, в частности, вытекает, что $\|A\|_1 \leqslant \sup\limits_n \|A_n\|_1$, если $\{A_n\}$ слабо сходится к A.

Из доказанной теоремы легко вывести, что *пространство всех ядерных операторов полно относительно следовой нормы*. В самом деле, пусть последовательность ядерных операторов $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ фундаментальна относительно нормы $\|A\|_1$, т. е. пусть $\lim\limits_{m,\, n\to\infty} \|A_m - A_n\|_1 = 0$. Тогда она фундаментальна и относительно нормы $\|A\|$. В силу полноты пространства непрерывных операторов относительно нормы $\|A\|$ найдется такой оператор A, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|A - A_n\| = 0$. Отсюда следует, что последовательность операторов $\{A_n\}$ сходится к A в слабом смысле и по теореме 10 оператор A является ядерным.

Покажем теперь, что последовательность $\{A_n\}$ сходится к A в смысле нормы $\|A\|_1$, т. е. что $\lim\limits_{n\to\infty} \|A - A_n\|_1 = 0$. Для этого заметим что так как последовательность $\{A_n\}$ фундаментельна относительно нормы $\|A\|_1$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что при $m \geqslant N$, $n \geqslant N$ и любых ортогональных нормированных базисах $\{f_n\}$ и $\{h_n\}$ в пространствах H_1 и H_2 выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |((A_m - A_n) f_k, g_k)| \leqslant \|A_m - A_n\|_1 \leqslant \varepsilon.$$

Но тогда, если $m \geqslant N$, $n \geqslant N$, то при всех значениях s выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{s} |((A_m - A_n) f_k, g_k)| \leqslant \varepsilon.$$

Из слабой сходимости операторов A_m к A вытекает, что при $n \geqslant N$ для всех s выполняется соотношение

$$\sum_{k=1}^{s} |((A - A_n) f_k, g_k)| \leqslant \varepsilon$$

и потому при $n \geqslant N$

$$\|A - A_n\|_1 = \sup \sum_{k=1}^{\infty} |((A - A_n) f_k, g_k)| \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, $\|A - A_n\|_1 \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant N$, и, следовательно, операторы A_n сходятся к A и по норме $\|A\|_1$. Поэтому *пространство ядерных операторов полно относительно следовой нормы*.

Как мы уже отмечали, отсюда вытекает, что пространство ядерных операторов является пополнением пространства вырожденных операторов по следовой норме.

5. Следовая норма и разложения оператора в сумму операторов ранга 1. Мы укажем в этом пункте другое определение следовой нормы, основанное на разложении операторов в сумму операторов ранга 1, т. е. операторов, отображающих все пространство H_1 в одномерные подпространства пространства H_2.

Рассмотрим вырожденный оператор A, отображающий гильбертово пространство H_1 на конечномерное подпространство G гильбертова пространства H_2. Выберем в подпространстве G базис, состоящий из линейно независимых векторов $g_1, \ldots, g_m$, и разложим векторы Af по этому базису

$$Af = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(f) g_k.$$

Очевидно, что при фиксированном k коэффициент $\alpha_k(f)$ является линейным непрерывным функционалом от f и, значит, может быть представлен в виде $\alpha_k(f)=(f, f_k)$, где f_k — фиксированный элемент из H_1. Таким образом, вырожденный оператор A всегда можно записать в виде

$$Af=\sum_{k=1}^{m}(f, f_k)\,g_k. \tag{23}$$

Обратно, если $g_1, \ldots, g_m$ — любые (может быть, и линейно зависимые) векторы в пространстве H_2, а $f_1, \ldots, f_m$ — любые векторы из пространства H_1, то формула (23) определяет вырожденный оператор. Каждое слагаемое $(f, f_k)\,g_k$ этой формулы есть оператор, отображающий все пространство H_1 в одномерное подпространство пространства H_2, порожденное вектором g_k. Такие операторы называются операторами ранга 1. Таким образом, формула (23) дает разложение вырожденного оператора A в сумму операторов ранга 1.

Введем оператор $P_kf=(f, f_k)\,g_k$. Тогда равенство (23) можно записать в виде

$$Af=\sum_{k=1}^{m}P_kf. \tag{24}$$

Мы будем называть такое разложение *разложением оператора A в сумму операторов ранга 1*. Отметим, что норма $\|P_k\|$ оператора P_k равна $\|f_k\|\,\|g_k\|$. В самом деле,

$$\|P_k\|=\sup_{\|f\|=1}\|(f, f_k)\,g_k\|=\sup_{\|f\|=1}|(f, f_k)|\,\|g_k\|=\|f_k\|\,\|g_k\|.$$

Разумеется, каждый вырожденный оператор A может быть различными способами представлен в виде суммы операторов ранга 1. Мы докажем сейчас, что *следовая норма оператора A равна нижней грани сумм $\sum_{k=1}^{m}\|P_k\|$, взятой по всем разложениям этого оператора в сумму операторов ранга 1*,

$$\|A\|_1=\inf\sum_{k=1}^{m}\|P_k\|. \tag{25}$$

Докажем сначала неравенство

$$\|A\|_1\geqslant\inf\sum_{k=1}^{m}\|P_k\|. \tag{26}$$

Так как оператор A вырожден, то лишь конечное число собственных значений λ_k оператора T, входящего в разложение $A=UT$, отлично от нуля. Поэтому оператор A можно записать в виде

$$Af=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k(f, e_k)\,h_k,$$

где e_k — собственные векторы оператора T, $h_k=Ue_k$. Так как $\|\lambda_ke_k\|=\lambda_k$, $\|h_k\|=1$, то для этого разложения сумма $\sum_{k=1}^{m}\|P_k\|$ равна $\sum_{k=1}^{m}\lambda_k$, т. е. следу оператора T. Значит, нижняя граница всех сумм вида $\sum_{k=1}^{m}\|P_k\|$, взятая по всем разложениям оператора A в сумму операторов ранга 1, не превосходит *) $\operatorname{Tr}(T)$

$$\inf\sum_{k=1}^{m}\|P_k\|\leqslant\operatorname{Tr}(T)=\|A\|_1.$$

Тем самым неравенство (26) доказано.

Докажем теперь обратное неравенство. Пусть

$$A=\sum_{k=1}^{m}P_k$$

одно из разложений оператора A в сумму операторов ранга 1. Тогда по свойствам следовой нормы мы имеем

$$\|A\|_1\leqslant\sum_{k=1}^{m}\|P_k\|_1. \tag{27}$$

Но для любого оператора ранга 1 следовая норма совпадает с обычной, т. е. $\|P\|_1=\|P\|$. В самом деле, пусть $Pf=(f, h)\,g$. Тогда для любых ортогональных нормированных систем векторов $\{f_k\}$ и $\{g_k\}$ в пространствах H_1 и H_2 мы имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(Pf_k, g_k)|=\sum_{k=1}^{\infty}|(f_k, h)(g, g_k)|.$$

*) Tr — след оператора.

В силу неравенства Буняковского—Шварца отсюда следует, что

$$\|P\|_1 = \sup_{f,\, g} \sum_{k=1}^{\infty} |(Pf_k,\ g_k)| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\sum_{k=1}^{\infty} |(f_k,\ h)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |(g,\ g_k)|^2\right]^{1/2} \leqslant \|h\|\ \|g\| = \|P\|.$$

Поскольку обратное неравенство $\|P\| \leqslant \|P\|_1$ имеет место всегда, то равенство $\|P\| = \|P\|_1$ доказано. Поэтому соотношение (27) можно переписать в виде

$$\|A\|_1 \leqslant \sum_{k=1}^{m} \|P_k\|. \tag{28}$$

Так как неравенство (27) справедливо для любого разложения оператора A в сумму операторов ранга 1, то

$$\|A\|_1 \leqslant \inf \sum_{k=1}^{m} \|P_k\| \tag{29}$$

Из неравенств (26) и (29) вытекает, что

$$\|A\|_1 = \inf \sum_{k=1}^{m} \|P_k\|,$$

и поскольку $\|P_k\| = \|f_k\|\ \|g_k\|$, то

$$\|A\|_1 = \inf \sum_{k=1}^{m} \|f_k\|\ \|g_k\|,$$

где нижняя грань берется по всем разложениям $Af = \sum_{k=1}^{m} (f,\ f_k)\, g_k$ оператора A в сумму операторов ранга 1. Эта нижняя грань достигается, если f_k — собственные векторы оператора T, входящего в разложение $A = UT$, а $g_k = Uf_k$.

Мы можем теперь сказать, что *ядерными операторами являются операторы, получающиеся при пополнении множества вырожденных операторов по норме*

$$\|A\|_1 = \inf \sum_{k=1}^{m} \|f_k\|\ \|g_k\|,$$

где нижняя грань берется по всем разложениям оператора A в сумму операторов ранга 1.

В этом виде определение ядерности оператора может быть перенесено на любые банаховы пространства. Вырожденные операторы, отображающие банахово пространство E_1 в банахово пространство E_2, имеют вид

$$Af = \sum_{k=1}^{m} (F_k,\ f)\, g_k,$$

где $F_1, \ldots, F_m$ — фиксированные линейные функционалы в пространстве E_1, а $g_1, \ldots, g_m$ — фиксированные элементы из пространства E_2. Оператор B, отображающий E_1 в E_2, называется ядерным, если он принадлежит пополнению множества вырожденных операторов по норме

$$\|A\|_1 = \inf \sum_{k=1}^{m} \|F_k\|\ \|g_k\|,$$

где нижняя грань берется по всем разложениям оператора A в сумму операторов ранга 1. Следует отметить, впрочем, что понятие ядерности для операторов в банаховых пространствах не представляется нам достаточно оправданным, поскольку такие операторы не обладают некоторыми весьма важными свойствами ядерных операторов в гильбертовых пространствах. Например, для ядерных операторов в банаховых пространствах не выполняется теорема о следе (см. теорему 6). Иными словами, если $\{f_n\}$ и $\{F_n\}$ — биортогональные безусловные базисы в пространствах E и E' (т. е. такие базисы, что $(F_k,\ f_m) = \delta_{km}$), а μ_k — собственные значения ядерного оператора A, то, вообще говоря, равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} (F_k,\ Af_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k$$

не имеет места.

Отметим, что если оператор A, отображающий банахово пространство E_1 в банахово пространство E_2, имеет вид

$$Af = \sum_{k=1}^{\infty} (F_k,\ f)\, g_k, \tag{30}$$

где $F_k \in E_1'$, $g_k \in E_2$, а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|F_k\|\ \|g_k\|$$

сходится, то A является ядерным оператором. Обратно, если A — ядерный оператор, отображающий банахово пространство E_1 в банахово пространство E_2, то его можно записать в виде ряда (30), причем ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\|F_k\|\,\|g_k\|$ сходится.

Мы не будем останавливаться на доказательстве этих утверждений, поскольку они доказаны в представляющем для нас интерес случае гильбертова пространства, а, как мы указали, понятие ядерности оператора в банаховом пространстве, по-видимому, недостаточно оправдано.

§ 3. ЯДЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. АБСТРАКТНАЯ ТЕОРЕМА О ЯДРЕ

Одной из основных задач, возникших после создания общей теории линейных топологических пространств и, в частности, теории счетно-нормированных пространств, явилась задача выделения класса пространств, определяемого достаточно простыми требованиями и хорошо обслуживающего анализ. Мы полагаем, что одним из таких классов пространств является класс ядерных пространств, который будет изучен в этом параграфе.

Ядерные пространства были введены в выпуске 3 (глава 4, § 3, п. 1) в связи со спектральным анализом самосопряженных операторов. Мы дадим здесь другое, более естественное определение ядерного пространства, эквивалентное прежнему определению в широком классе линейных топологических пространств. Кроме того, мы докажем абстрактный вариант теоремы о ядре, т. е. теорему о билинейных функционалах в ядерных пространствах, из которой может быть выведена теорема о ядре для пространств K и S.

1. Счетно-гильбертовы пространства. Назовем скалярным произведением в линейном пространстве Φ строго положительно определенный эрмитов функционал (φ, ψ), т. е. такой функционал, что

1) $(\varphi_1+\varphi_2, \psi)=(\varphi_1, \psi)+(\varphi_2, \psi)$,

2) $(\alpha\varphi, \psi)=\alpha(\varphi, \psi)$,

3) $(\varphi, \psi)=\overline{(\psi, \varphi)}$,

4) $(\varphi, \varphi)\geqslant 0$, причем $(\varphi, \varphi)=0$ тогда и только тогда, когда $\varphi=0$.

Каждому скалярному произведению (φ, ψ) в пространстве Φ можно сопоставить норму $\|\varphi\|$, положив $\|\varphi\|=\sqrt{(\varphi,\varphi)}$. Пусть теперь в пространстве Φ задана счетная система скалярных произведений $(\varphi, \psi)_n$, причем эти произведения *согласованы* друг с другом в следующем смысле: если последовательность $\{\varphi_k\}$ элементов пространства Φ сходится к нулю по норме $\|\varphi\|_m=\sqrt{(\varphi, \varphi)_m}$ и является фундаментальной последовательностью по норме $\|\varphi\|_n$, то она сходится и по норме $\|\varphi\|_n$ к нулю.

Введем в пространство Φ топологию, приняв за базис полной системы окрестностей нуля в Φ множества $U_{n,\varepsilon}$, задаваемые неравенствами $\|\varphi\|_n\leqslant\varepsilon$. Мы будем говорить, что пространство Φ с заданным счетным набором скалярных произведений является *счетно-гильбертовым*, если оно полно относительно указанной топологии. Итак, счетно-гильбертовым пространством называется полное линейное топологическое пространство, в котором топология задана счетным множеством согласованных норм $\|\varphi\|_n$, имеющих вид $\|\varphi\|_n=\sqrt{(\varphi, \varphi)_n}$.

Мы могли бы задать счетное множество произвольных (банаховых) согласованных норм $\|\varphi\|_n$. В этом случае пространство называется счетно-нормированным.

На первый взгляд может показаться, что класс счетно-гильбертовых пространств существенно уже класса счетно-нормированных пространств, поскольку гильбертовы нормы $\|\varphi\|_n=\sqrt{(\varphi, \varphi)_n}$ являются лишь частным случаем произвольных банаховых норм. Однако благодаря тому, что мы рассматриваем счетные наборы норм, различие между отдельными банаховыми нормами часто стирается*). Например, класс функций, имеющих непрерывную производную, отличен от класса функций, производные которых имеют интегрируемый квадрат модуля. Однако очевидно, что класс функций, имеющих непрерывные производные любого порядка, совпадает с классом функций, имеющих производные любого порядка с интегрируемым квадратом модуля.

*) То обстоятельство, что различия между банаховыми пространствами являются как бы фиктивными и слишком тонки для многих задач функционального анализа, было обнаружено, например, в теории представлений групп Ли.

Представления, записываемые одними и теми же формулами, но рассматриваемые в различных пространствах, оказывались из-за этих различий неэквивалентными друг другу. Поэтому наиболее естественно рассматривать представления групп не в банаховых пространствах, а в линейных топологических пространствах. Подробнее см. об этом в вып. 5.

сходится, то A является ядерным оператором. Обратно, если A — ядерный оператор, отображающий банахово пространство E_1 в банахово пространство E_2, то его можно записать в виде ряда (30), причем ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|F_k\| \, \|g_k\|$ сходится.

Мы не будем останавливаться на доказательстве этих утверждений, поскольку они доказаны в представляющем для нас интерес случае гильбертова пространства, а, как мы указали, понятие ядерности оператора в банаховом пространстве, по-видимому, недостаточно оправдано.

§ 3. ЯДЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. АБСТРАКТНАЯ ТЕОРЕМА О ЯДРЕ

Одной из основных задач, возникших после создания общей теории линейных топологических пространств и, в частности, теории счетно-нормированных пространств, явилась задача выделения класса пространств, определяемого достаточно простыми требованиями и хорошо обслуживающего анализ. Мы полагаем, что одним из таких классов пространств является класс ядерных пространств, который будет изучен в этом параграфе.

Ядерные пространства были введены в выпуске 3 (глава 4, § 3, п. 1) в связи со спектральным анализом самосопряженных операторов. Мы дадим здесь другое, более естественное определение ядерного пространства, эквивалентное прежнему определению в широком классе линейных топологических пространств. Кроме того, мы докажем абстрактный вариант теоремы о ядре, т. е. теорему о билинейных функционалах в ядерных пространствах, из которой может быть выведена теорема о ядре для пространств K и S.

1. Счетно-гильбертовы пространства. Назовем скалярным произведением в линейном пространстве Φ строго положительно определенный эрмитов функционал (φ, ψ), т. е. такой функционал, что

1) $(\varphi_1 + \varphi_2, \psi) = (\varphi_1, \psi) + (\varphi_2, \psi)$,

2) $(\alpha\varphi, \psi) = \alpha(\varphi, \psi)$,

3) $(\varphi, \psi) = \overline{(\psi, \varphi)}$,

4) $(\varphi, \varphi) \geqslant 0$, причем $(\varphi, \varphi) = 0$ тогда и только тогда, когда $\varphi = 0$.

Каждому скалярному произведению (φ, ψ) в пространстве Φ можно сопоставить норму $\|\varphi\|$, положив $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$. Пусть теперь в пространстве Φ задана счетная система скалярных произведений $(\varphi, \psi)_n$, причем эти произведения *согласованы* друг с другом в следующем смысле: если последовательность $\{\varphi_k\}$ элементов пространства Φ сходится к нулю по норме $\|\varphi\|_m = \sqrt{(\varphi, \varphi)_m}$ и является фундаментальной последовательностью по норме $\|\varphi\|_n$, то она сходится и по норме $\|\varphi\|_n$ к нулю.

Введем в пространство Φ топологию, приняв за базис полной системы окрестностей нуля в Φ множества $U_{n,\varepsilon}$, задаваемые неравенствами $\|\varphi\|_n \leqslant \varepsilon$. Мы будем говорить, что пространство Φ с заданным счетным набором скалярных произведений является *счетно-гильбертовым*, если оно полно относительно указанной топологии. Итак, счетно-гильбертовым пространством называется полное линейное топологическое пространство, в котором топология задана счетным множеством согласованных норм $\|\varphi\|_n$, имеющих вид $\|\varphi\|_n = \sqrt{(\varphi, \varphi)_n}$.

Мы могли бы задать счетное множество произвольных (банаховых) согласованных норм $\|\varphi\|_n$. В этом случае пространство называется счетно-нормированным.

На первый взгляд может показаться, что класс счетно-гильбертовых пространств существенно уже класса счетно-нормированных пространств, поскольку гильбертовы нормы $\|\varphi\|_n = \sqrt{(\varphi, \varphi)_n}$ являются лишь частным случаем произвольных банаховых норм. Однако благодаря тому, что мы рассматриваем счетные наборы норм, различие между отдельными банаховыми нормами часто стирается*). Например, класс функций, имеющих непрерывную производную, отличен от класса функций, производные которых имеют интегрируемый квадрат модуля. Однако очевидно, что класс функций, имеющих непрерывные производные любого порядка, совпадает с классом функций, имеющих производные любого порядка с интегрируемым квадратом модуля.

---

*) То обстоятельство, что различия между банаховыми пространствами являются как бы фиктивными и слишком тонки для многих задач функционального анализа, было обнаружено, например, в теории представлений групп Ли.

Представления, записываемые одними и теми же формулами, но рассматриваемые в различных пространствах, оказывались из-за этих различий неэквивалентными друг другу. Поэтому наиболее естественно рассматривать представления групп не в банаховых пространствах, а в линейных топологических пространствах. Подробнее см. об этом в вып. 5.

Часто систему норм $\|\varphi\|_n$ в данном счетно-нормированном пространстве Φ можно заменить системой норм, задаваемых скалярными произведениями, не изменяя топологии этого пространства.

Мы будем обычно рассматривать системы скалярных произведений $(\varphi, \psi)_n$, $n = 1, 2, \ldots$ в пространстве Φ, такие, что для любого элемента φ из Φ выполняются неравенства

$$(\varphi, \varphi)_1 \leqslant (\varphi, \varphi)_2 \leqslant \ldots \leqslant (\varphi, \varphi)_n \leqslant \ldots$$

Это условие не ограничивает класса рассматриваемых пространств. Если заданная система скалярных произведений не обладает этим свойством, ее можно заменить новой системой скалярных произведений $(\varphi, \psi)'_n$, положив

$$(\varphi, \psi)'_n = \sum_{k=1}^{n} (\varphi, \psi)_k.$$

При этом, как легко видеть, топология в пространстве Φ не изменяется. В то же время система скалярных произведений $(\varphi, \psi)'_n$, такова, что

$$(\varphi, \varphi)'_1 \leqslant (\varphi, \varphi)'_2 \leqslant \ldots \leqslant (\varphi, \varphi)'_n \leqslant \ldots$$

Обозначим через Φ_n пополнение пространства Φ относительно скалярного произведения $(\varphi, \psi)_n$ *). Очевидно, что Φ_n является гильбертовым пространством. Из полноты пространства Φ вытекает, что Φ является пересечением пространств Φ_n, $n = 1, 2, \ldots$,

$$\Phi = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi_n.$$

Обратно, если топология в линейном топологическом пространстве Φ задается при помощи счетного набора скалярных произведений $(\varphi, \psi)_n$ и пространство Φ совпадает с пересечением $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ своих пополнений относительно этих скалярных произведений, то пространство Φ полно и потому счетно-гильбертово. Мы не останавливаемся на доказательстве этих

*) Т. е. относительно нормы $\|\varphi\|_n = \sqrt{(\varphi, \varphi)_n}$, порождаемой этим скалярным произведением.

простых утверждений. При желании читатель может ознакомиться в главе I выпуска 2 с доказательством этих утверждений для более общего случая счетно-нормированных пространств.

В дальнейшем нам понадобится рассматривать некоторые элементы пространства Φ как элементы соответствующих гильбертовых пространств Φ_n. В тех случаях, когда это может привести к недоразумениям, мы будем вместо φ писать $\overset{(n)}{\varphi}$. Таким образом, элементы $\overset{(1)}{\varphi}, \ldots, \overset{(n)}{\varphi}, \ldots$ — это один и тот же элемент φ пространства Φ, рассматриваемый в различных пространствах Φ_n.

Выясним теперь строение пространства Φ', сопряженного счетно-гильбертову пространству Φ. Мы покажем, что *Φ' является объединением гильбертовых пространств Φ'_n, сопряженных гильбертовым пространствам Φ_n, $n = 1, 2, \ldots$.* В самом деле, пусть F — некоторый элемент пространства Φ'_n, т. е. линейный функционал в гильбертовом пространстве Φ_n. Тогда очевидно, что функционал F непрерывен относительно топологии пространства Φ, т. е. является элементом пространства Φ'. Отсюда следует, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi'_n \subset \Phi'$. С другой стороны, если F — линейный функционал в пространстве Φ, то, как было отмечено в § 1, п. 2, этот функционал непрерывен относительно одной из норм $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)_n}$, т. е. принадлежит пространству Φ'_n. Тем самым доказано, что $\Phi' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi'_n$. Отметим, что *пространства Φ'_n образуют возрастающую цепочку*

$$\Phi'_1 \subset \Phi'_2 \subset \ldots \subset \Phi'_n \subset \ldots$$

В самом деле, поскольку при $m \leqslant n$ выполняется неравенство $(\varphi, \varphi)_m \leqslant (\varphi, \varphi)_n$, то из ограниченности функционала F в шаре $(\varphi, \varphi)_m \leqslant 1$ вытекает его ограниченность в шаре $(\varphi, \varphi)_n \leqslant 1$, т. е. из принадлежности F пространству Φ'_m вытекает его принадлежность пространству Φ'_n.

Пространство Φ'_n сопряжено гильбертову пространству Φ_n. Поэтому в нем определена норма, которую удобно обозна-

6 Зак. 1281. И. М. Гельфанд и Н. Я. Виленкин

чать $\|F\|_{-n}$. Эта норма задается равенством

$$\|F\|_{-n} = \sup_{\|\varphi\|_n = 1} (F, \varphi).$$

Как известно, пространство, сопряженное гильбертову пространству, является гильбертовым и потому норма $\|F\|_{-n}$ задается при помощи скалярного произведения $(F, G)_{-n}$ в Φ'_n. Иными словами, имеет место равенство

$$\|F\|_{-n} = \sqrt{(F, F)_{-n}}.$$

Следует иметь в виду, что скалярные произведения в различных пространствах Φ'_n различны и что при $m \leqslant n$ имеет место неравенство $(F, F)_{-m} \geqslant (F, F)_{-n}$.

Иногда нам придется рассматривать один и тот же функционал F из пространства Φ' как элемент различных пространств Φ'_n. Мы будем пользоваться в этом случае такими же обозначениями $\overset{(1)}{F}, \ldots, \overset{(n)}{F}, \ldots$, как и для элементов пространства Φ. Отметим, что если $m \leqslant n$ и $F \in \Phi'_m$, то для любого элемента φ пространства Φ выполняется равенство

$$(\overset{(m)}{F}, \overset{(m)}{\varphi}) = (\overset{(n)}{F}, \overset{(n)}{\varphi}).$$

В самом деле, обе части этого равенства являются значениями функционала F для элемента φ из Φ.

Топологию в пространство Φ' можно ввести разными способами. Например, можно принять за полную систему окрестностей нуля в пространстве Φ' множества $U(\varphi_1, \ldots, \varphi_m; \varepsilon)$, состоящие из таких линейных функционалов F, что

$$|(F, \varphi_k)| \leqslant \varepsilon, \quad 1 \leqslant k \leqslant m.$$

Здесь $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — элементы пространства Φ, ε — произвольное положительное число. Эта топология называется *слабой топологией* в пространстве Φ'. Наряду с ней можно рассматривать сильную топологию. Чтобы определить сильную топологию в пространстве Φ', введем понятие *ограниченного множества* в Φ. Именно, множество A из Φ называется ограниченным, если для любого k множество чисел $(\varphi, \varphi)_k$, где $\varphi \in A$, ограничено. В этом случае для любой окрестности нуля U в пространстве Φ найдется такое n, что $A \subset nU$. Полная система окрестностей, задающих сильную топологию в пространстве Φ', состоит из множеств $U(A, \varepsilon)$, определяемых неравенствами

$$\sup_{\varphi \in A} |(F, \varphi)| < \varepsilon,$$

где A — любое ограниченное множество в пространстве Φ, а $\varepsilon > 0$.

Можно показать, что элементы каждого из подпространств Φ'_n образуют всюду плотное множество в пространстве Φ', рассматриваемом относительно слабой топологии.

В пространстве Φ' также можно ввести понятие ограниченности множества. При этом различают слабо и сильно ограниченные множества в Φ'. Множество A из Φ' называется *сильно ограниченным*, если для любой сильной окрестности нуля U в Φ' найдется такое n, что $A \subset nU$. Точно так же множество A называется *слабо ограниченным*, если для любой слабой окрестности нуля V при некотором n имеет место включение $A \subset nV$. Поскольку всякая слабая окрестность нуля в Φ' является и сильной окрестностью нуля, то *всякое сильно ограниченное множество в Φ' слабо ограничено.*

Рассмотрим, наконец, пространство Φ'', сопряженное пространству Φ'. В этом пространстве также можно рассматривать различные топологизации, исходя соответственно из конечных, сильно ограниченных и слабо ограниченных множеств пространства Φ'. Мы будем строить топологию в Φ'', исходя из сильно ограниченных множеств в Φ'. Каждому такому множеству A и каждому числу ε сопоставим множество $U(A, \varepsilon)$ в Φ'', состоящее из всех линейных функционалов $\hat{\varphi}$ в Φ', таких, что $\sup_{F \in A} |(\hat{\varphi}, F)| < \varepsilon$. Совокупность всех множеств $U(A, \varepsilon)$ примем за полную систему окрестностей нуля в Φ''.

При такой топологизации второе сопряженное пространство Φ'' изоморфно исходному счетно-гильбертову пространству Φ, т. е. $\Phi = \Phi''$. Линейные топологические пространства, для которых выполнено равенство $\Phi = \Phi''$, называются *рефлексивными* пространствами. Таким образом, *счетно-гильбертовы пространства рефлексивны.*

Доказательство проводится следующим образом. Каждому элементу φ из пространства Φ соответствует линейный функционал $\hat{\varphi}$ в пространстве Φ', определяемый равенством $(\hat{\varphi}, F) = (F, \varphi)$. Соответствие $\varphi \to \hat{\varphi}$ является однозначным вложением пространства Φ в пространство Φ''. Покажем, что оно взаимно однозначно, т. е. что каждый элемент $\hat{\varphi}$ пространства Φ'' является образом некоторого элемента φ пространства Φ. В самом деле, линейный функционал $\hat{\varphi}$ в пространстве $\Phi' = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Phi'_k$ является в то же время линейным функционалом в каждом из гильбертовых пространств Φ'_n. Но гильбертовы пространства рефлексивны и потому $\hat{\varphi}$ можно рассматривать как элемент каждого из гильбертовых пространств Φ_k, возникающих при пополнении пространства Φ относительно скалярных произведений $(\varphi, \psi)_k$. Поскольку $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Phi_k = \Phi$, то мы получаем, что $\hat{\varphi} \in \Phi$. Тем самым доказано, что пространства Φ и Φ'' совпадают по запасу элементов.

Покажем теперь, что установленное нами взаимно-однозначное соответствие между пространствами Φ и Φ'' взаимно непрерывно. Для этого воспользуемся данным в выпуске 2 (гл. I, § 5, п. 2 и 3) описанием сильно ограниченных множеств в пространстве Φ', сопряженном счетно-нормированному пространству $\Phi = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Phi_k$. Там было показано, что каждое такое множество A принадлежит одному из пространств Φ'_k и ограничено в нем по соответствующей норме $\|F\|_{-k}$.

Рассмотрим теперь некоторую окрестность нуля $U(A, \varepsilon)$ в пространстве Φ''. По сделанному сейчас замечанию ограниченное множество A ограничено в одном из гильбертовых пространств Φ'_k и потому лежит в одном из шаров $\|F\|_{-k} < a$. Рассмотрим теперь в пространстве Φ шар $\|\varphi\|_k \leqslant \frac{\varepsilon}{a}$. Если элемент φ принадлежит этому шару, то для любого функционала F из шара $\|F\|_{-k} < a$, а тем более для любого функционала F из множества A выполняется неравенство $|(F, \varphi)| < \varepsilon$. Это означает, что образ шара $\|\varphi\|_k \leqslant \frac{\varepsilon}{a}$ лежит в окрестности нуля $U(A, \varepsilon)$, т. е. что отображение $\varphi \to \hat{\varphi}$ непрерывно.

Непрерывность обратного отображения доказывается точно так же. Пусть $\|\varphi\|_k \leqslant \varepsilon$ — шар в пространстве Φ. Обозначим через A сильно ограниченное множество в пространстве Φ', состоящее из таких функционалов F, что $|(F, \varphi)| \leqslant 1$ при $\|\varphi\|_k \leqslant \varepsilon$. Очевидно, что образ окрестности нуля $U(A, \varepsilon)$ пространства Φ'' содержится в шаре $\|\varphi\|_k \leqslant \varepsilon$. Этим утверждение о непрерывности обратного отображения доказано.

Итак, мы доказали, что пространства Φ и Φ'' совпадают не только по запасу элементов, но и по топологии. Рефлексивность любого счетно-гильбертова пространства доказана.

2. Ядерные пространства. Введем теперь основное понятие этого параграфа — понятие ядерного пространства. Пусть Φ — счетно-гильбертово пространство. Рассмотрим гильбертовы пространства Φ_n, получающиеся при пополнении пространства Φ по нормам $\|\varphi\|_n = \sqrt{(\varphi, \varphi)_n}$. В каждом из этих пространств всюду плотно множество элементов из пространства Φ. При этом, если $m \leqslant n$, то, по нашему условию, имеет место неравенство $(\varphi, \varphi)_m \leqslant (\varphi, \varphi)_n$. Отсюда вытекает, что отображение $\overset{(n)}{\varphi} \to \overset{(m)}{\varphi}$ является непрерывным отображением всюду плотного подмножества в Φ_n на всюду плотное подмножество в Φ_m (напомним, что через $\overset{(n)}{\varphi}$ и $\overset{(m)}{\varphi}$ мы обозначаем один и тот же элемент φ пространства Φ, рассматриваемый в гильбертовых пространствах Φ_n и Φ_m). Мы можем продолжить это отображение до непрерывного линейного оператора T_m^n, отображающего пространство Φ_n на всюду плотное подмножество пространства Φ_m. Отметим, что если $m \leqslant n \leqslant p$, то имеет место очевидное равенство $T_m^p = T_m^n T_n^p$.

Введем теперь следующее определение: счетно-гильбертово пространство Φ называется *ядерным*, если для любого m найдется такое n, что отображение T_m^n пространства Φ_n в пространство Φ_m ядерно, т. е. имеет вид

$$T_m^n \varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\varphi, \varphi_k)_n \psi_k, \quad \varphi \in \Phi_n,$$

где $\{\varphi_k\}$ и $\{\psi_k\}$ — ортогональные нормированные системы векторов в пространствах Φ_n и Φ_m соответственно, $\lambda_k \geqslant 0$ и ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_k$ сходится.

Геометрически это определение означает следующее: *счетно-гильбертово пространство Φ является ядерным, если для любого m найдется такое n, что множество $(\varphi, \varphi)_n \leqslant 1$ является относительно скалярного произведения $(\varphi, \varphi)_m$ эллипсоидом, для которого ряд, составленный из длин главных полуосей, сходится.*

Отметим еще, что вместо ядерности оператора T_m^n можно требовать его принадлежности к типу Гильберта — Шмидта. В самом деле, в § 2, п. 3 было показано, что произведение любых двух операторов типа Гильберта — Шмидта является ядерным оператором. Следовательно, если операторы T_n^p и T_m^n принадлежат к типу Гильберта—Шмидта, то $T_m^p = T_m^n T_n^p$ является ядерным оператором.

Понятие ядерности обобщается на любые счетно-нормированные пространства. Именно, назовем счетно-нормированное пространство Φ ядерным, если для любого m найдется такое n, что оператор T_m^n, вкладывающий пространство Φ_n в пространство Φ_m, является ядерным, т. е. имеет вид

$$T_m^n \varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (F_k, \varphi) \psi_k,$$

где $\{F_k\}$ и $\{\psi_k\}$ — ограниченные последовательности элементов из пространств Φ_n' и Φ_m, $\lambda_k > 0$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ сходится *).

Однако это обобщение не приводит к расширению рассматриваемого класса пространств — *в любом ядерном счетно-нормированном пространстве можно ввести счетное множество скалярных произведений таким образом, что оно превращается в изоморфное ядерное счетно-гильбертово пространство.*

Эти скалярные произведения строятся следующим образом. Рассмотрим любое значение m. Найдется такое n, что отображение T_m^n ядерно, т. е. задается формулой вида

$$T_m^n \varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (F_k, \varphi) \psi_k,$$

где $\{F_k\}$ — ограниченное множество в Φ_n', $\{\psi_k\}$ — ограниченное множество в Φ_m, $\lambda_k \geqslant 0$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ сходится. Определим скалярное произведение $(\varphi, \psi)_{mn}$ любых двух элементов φ и ψ из пространства Φ формулой

$$(\varphi, \psi)_{mn} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (F_k, \varphi) \overline{(F_k, \psi)}.$$

Очевидно, что этот ряд сходится для любых элементов φ и ψ из пространства Φ, так как он мажорируется рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \| F_k \|_{-n}^2 \cdot \| \varphi \|_n \| \psi \|_n,$$

а по условию множество функционалов $\{F_k\}$ ограничено в пространстве Φ_n' и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ сходится.

Покажем, что скалярное произведение $(\varphi, \psi)_{mn}$ удовлетворяет неравенствам вида

$$\| \varphi \|_m^2 \leqslant C_1 (\varphi, \varphi)_{mn},$$
$$(\varphi, \varphi)_{mn} \leqslant C_2 \| \varphi \|_n^2,$$

где $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ и числа C_1 и C_2 не зависят от φ и ψ. В самом деле, поскольку множество элементов $\{\psi_k\}$ в пространстве Φ_m ограничено, имеет место неравенство

$$\| \varphi \|_m^2 \leqslant \Big[\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |(F_k, \varphi)| \, \| \psi_k \|_m \Big]^2 \leqslant C^2 \Big[\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |(F_k, \varphi)| \Big]^2,$$

где положено $C = \sup_k \| \psi_k \|_m$. Далее, в силу неравенства Буняковского—Шварца имеем

$$\Big[\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |(F_k, \varphi)| \Big]^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |(F_k, \varphi)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k.$$

Но

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |(F_k, \varphi)|^2 = (\varphi, \varphi)_{mn}$$

и потому

$$\varphi \, {}_m^2 \leqslant C_1 (\varphi, \varphi)_{mn},$$

где положено $C_1 = C \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$.

С другой стороны, мы имеем неравенство

$$(\varphi, \varphi)_{mn} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |(F_k, \varphi)|^2 \leqslant \| \varphi \|_n^2 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \| F_k \|_{-n}^2 \leqslant C_2 \| \varphi \|_n^2,$$

---

*) Иначе это можно сформулировать так:

$$T_m^n \varphi = \sum_{k=1}^{\infty} (F_k, \varphi) \psi_k,$$

где ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \| F_k \|_{-n} \| \psi_k \|_m$ сходится.

где положено $C_2 = \sup_k \|F_k\|_{-n} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$. Тем самым наши соотношения доказаны. Поскольку m произвольно, то из этих соотношений вытекает, что набор скалярных произведений $(\varphi, \psi)_{mn}$ задает ту же самую топологию в пространстве Φ, что и набор норм $\|\varphi\|_n$. Таким образом, Φ является счетно-гильбертовым пространством.

Нам осталось показать, что это пространство ядерно. Для этого рассмотрим любые индексы m и n, такие, что T_m^n является ядерным отображением. Найдутся такие индексы $p > n$ и $r > p$, что отображения T_n^p и T_p^r ядерны. Обозначим через Φ_{mn} пополнение пространства Φ относительно скалярного произведения $(\varphi, \psi)_{mn}$, через Φ_{pr} — пополнение Φ относительно скалярного произведения $(\varphi, \psi)_{pr}$ и через T_{mn}^{pr} — отображение пространства Φ_{pr} в пространство Φ_{mn}. Мы покажем, что это отображение ядерно. В самом деле, отображение T_{mn}^{pr} является композицией отображений Q, T_n^p и R, где Q — отображение пространства Φ_{pr} в Φ_p, T_n^p — отображение пространства Φ_p в Φ_n, а R — отображение пространства Φ_n в Φ_{mn}. Но отображения Q и R непрерывны в силу неравенств $\|\varphi\|_p^2 \leqslant \leqslant B_1 (\varphi, \varphi)_{pr}$ и $(\varphi, \varphi)_{mn} \leqslant B_2 \|\varphi\|_n^2$. Отображение же T_n^p по условию ядерно. Поэтому и отображение $T_{mn}^{pr} = RT_n^p Q$ ядерно *). Следовательно, Φ — ядерное пространство.

---

*) Для отображений банаховых пространств, как и для отображений гильбертовых пространств, справедливо утверждение о ядерности произведения ядерного и непрерывного отображений. В самом деле, если

$$T\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (F_k, \varphi) \psi_k$$

— ядерное отображение пространства Φ в Ψ, а A — непрерывное отображение пространства Ψ в X, то отображение AT можно представить в виде

$$AT = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (F_k, \varphi) A\psi_k.$$

При этом множество $\{A\psi_k\}$ в X ограничено в силу непрерывности оператора A. Поэтому AT является ядерным отображением. Точно так же доказывается ядерность отображения TA, где A — непрерывное отображение X в Φ, а T — ядерное отображение Φ в Ψ. Именно,

$$TA\chi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (F_k, A\chi) \psi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (A^* F_k, \chi) \psi_k,$$

а множество $\{A^* F_k\}$ ограничено в силу непрерывности оператора A^*.

Важным обобщением понятия ядерного счетно-нормированного пространства является понятие *ядерного линейного топологического пространства*. Это понятие вводится аналогичным образом с той лишь разницей, что множество норм, задающих топологию, несчетно, а сами нормы могут обращаться в нуль на ненулевых элементах. Отметим, что пространство, сопряженное к ядерному счетно-гильбертову пространству, ядерно в указанном смысле.

3. Критерий ядерности пространства. В различных применениях удобно пользоваться необходимым и достаточным условием ядерности, которое мы сформулируем в этом пункте. Предварительно введем следующие понятия.

Ряд функционалов $\sum_{k=1}^{\infty} F_k$, определенных на линейном топологическом пространстве Φ, называется *безусловно сходящимся*, если для любого элемента φ из пространства Φ сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |(F_k, \varphi)|$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} F_k$ называется *абсолютно сходящимся*, если можно найти такую окрестность нуля U в пространстве Φ, что сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|F_k\|_U$, где положено $\|F_k\|_U = \sup_{\varphi \in U} |(F_k, \varphi)|$.

Очевидно, что всякий абсолютно сходящийся ряд безусловно сходится. В ядерных пространствах понятия абсолютной и безусловной сходимости эквивалентны. Иными словами, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *В ядерном пространстве Φ любой безусловно сходящийся ряд $\sum_{k=1}^{\infty} F_k$ линейных функционалов абсолютно сходится.*

Мы докажем сначала следующую лемму.

Лемма 1. *Если $\sum_{k=1}^{\infty} F_k$ — безусловно сходящийся ряд линейных функционалов в счетно-гильбертовом пространстве Φ, то найдутся такие числа M и m, что для всех элементов φ из пространства Φ выполняется* *неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(F_k, \varphi)| \leqslant M \|\varphi\|_m. \tag{1}$$

Доказательство. Введем в пространстве Φ функционал $p(\varphi)$, положив

$$p(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} |(F_k, \varphi)|.$$

Из безусловной сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} F_k$ вытекает, что этот функционал принимает конечное значение для любого элемента φ из пространства Φ. Покажем, что этот функционал полунепрерывен снизу. В самом деле, мы имеем

$$p(\varphi) = \sup_n p_n(\varphi), \tag{2}$$

где положено $p_n(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} |(F_k, \varphi)|$. Так как каждый из выпуклых функционалов $p_n(\varphi)$ непрерывен, то, как было показано в § 1, п. 1, функционал $p(\varphi)$ является также выпуклым и полунепрерывным снизу.

По теореме 2 из § 1 функционал $p(\varphi)$ ограничен в некоторой окрестности нуля U пространства Φ. Отсюда вытекает существование таких чисел m и M, что для всех элементов φ из Φ

$$p(\varphi) \leqslant M \|\varphi\|_m.$$

Лемма доказана. Поскольку в силу доказанной леммы для любого k имеет место неравенство

$$|(F_k, \varphi)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |(F_k, \varphi)| \leqslant M \|\varphi\|_m,$$

то $\|F_k\|_{-m} \leqslant M$. Таким образом, *если* $\sum_{k=1}^{\infty} F_k$ — *безусловно сходящийся ряд в счетно-гильбертовом пространстве* Φ, *то найдется такое* m, *что числа* $\|F_k\|_{-m}$ *ограничены в совокупности. В частности, все функционалы* F_k *принадлежат пространству* Φ'_m.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1. Пусть пространство Φ ядерно, а $\sum_{k=1}^{\infty} F_k$ — безусловно сходящийся ряд

линейных функционалов в Φ. Тогда, как мы только что доказали, найдется такое m, что все функционалы $F_k \in \Phi'_m$ и $\|F_k\|_{-m} \leqslant M$.

Так как пространство Φ по условию ядерно, то найдется такое n, что оператор T_m^n, переводящий пространство Φ_n в Φ_m, является ядерным. Покажем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|F_k\|_{-n}$ сходится.

Так как отображение $\Phi_n \to \Phi_m$ ядерно, то в пространствах Φ_n и Φ_m можно выбрать такие ортогональные нормированные базисы $\{\varphi_k\}$ и $\{\psi_k\}$, что для всех элементов φ из Φ_n выполняется равенство $\overset{(m)}{\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\overset{(n)}{\varphi}, \varphi_k)_n \psi_k$, где $\lambda_k \geqslant 0$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ сходится. Значит, для любого $\varphi \in \Phi$ и любого линейного функционала F в этом пространстве имеет место равенство

$$(F, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\varphi, \varphi_k)_n (F, \psi_k).$$

Но, так как $\|\varphi_k\|_n = 1$, то $|(\varphi, \varphi_k)_n| \leqslant \|\varphi\|_n$ и потому

$$|(F, \varphi)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |(F, \psi_k)| \, \|\varphi\|_n.$$

Это значит, что

$$\|F\|_{-n} = \sup_{\|\varphi\|_n = 1} |(F, \varphi)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |(F, \psi_k)|.$$

Применяя это неравенство к функционалам $F_1, \ldots, F_j, \ldots$ и суммируя получаемые неравенства по j, мы получаем, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|F_j\|_{-n} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sum_{j=1}^{\infty} |(F_j, \psi_k)|,$$

и, значит, по неравенству (1) имеем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|F_j\|_{-n} \leqslant M \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \|\psi_k\|_m = M \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k.$$

Тем самым доказана сходимость ряда $\sum_{j=1}^{\infty} \|F_j\|_{-n}$.

Итак, теорема 1 доказана. Покажем теперь, что справедлива и обратная теорема.

Теорема 2. *Если в счетно-гильбертовом пространстве Φ всякий безусловно сходящийся ряд $\sum_{k=1}^{\infty} F_k$ линейных функционалов абсолютно сходится, то пространство Φ ядерно.*

Доказательство. Согласно определению ядерности нам надо показать, что для любого m найдется такое n, что отображение T_m^n пространства Φ_n в пространство Φ_m принадлежит к типу Гильберта — Шмидта. Поскольку оператор, сопряженный к оператору типа Гильберта — Шмидта, также принадлежит к тому же типу, то достаточно указать такое n, что отображение $(T_m^n)'$ пространства Φ_m' в пространство Φ_n' является отображением типа Гильберта — Шмидта.

Выберем в гильбертовом пространстве Φ_m' любой ортогональный нормированный базис $F_1, \ldots, F_k, \ldots$ Покажем, что существует $n > m$, при котором ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|F_k\|_{-n}^2$ сходится; это и будет означать, что оператор $(T_m^n)'$, задаваемый равенством $(T_m^n)' \overset{(m)}{F_k} = \overset{(n)}{F_k}$, принадлежит к типу Гильберта — Шмидта. В процессе доказательства мы воспользуемся известным критерием сходимости числового ряда $\sum_1^{\infty} |a_k|^2$. Именно, если ряд $\sum_1^{\infty} x_k a_k$ сходится при любом выборе чисел x_k, удовлетворяющих условию $\sum_1^{\infty} |x_k|^2 < \infty$, то ряд $\sum_1^{\infty} |a_k|^2$ сходится.

В силу ортонормированности базиса F_k в пространстве Φ_m' для любого элемента $\varphi \in \Phi_m$ сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(F_k, \varphi)|^2. \tag{3}$$

Рассмотрим любую последовательность $x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots)$ чисел, для которых сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$. Из

сходимости ряда (3) вытекает, что ряд функционалов $\sum_{k=1}^{\infty} x_k (F_k, \varphi)$ сходится для любого φ, т. е. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k F_k$ безусловно сходится. По условию теоремы это означает, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k F_k$ абсолютно сходится. Иными словами, найдется такое r (зависящее от выбранной последовательности $x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots)$), что сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \, \|F_k\|_{-r}. \tag{4}$$

Обозначим теперь через H гильбертово пространство, состоящее из последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots)$ со сходящейся суммой квадратов модулей $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$. Полагая

$$p_r(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \, \|F_k\|_{-r},$$

мы получим последовательность функционалов $p_1(x), \ldots, p_r(x), \ldots$ в этом пространстве. Так как для любого функционала F над пространством Φ выполнены неравенства

$$\|F\|_{-1} \geqslant \ldots \geqslant \|F\|_{-r} \geqslant \ldots,$$

то функционалы $p_r(x)$ удовлетворяют неравенствам

$$p_1(x) \geqslant \ldots \geqslant p_r(x) \geqslant \ldots$$

При этом, как было показано выше, для любого x найдется такое r, что ряд (4) сходится, т. е. функционал $p_r(x)$ имеет конечное значение. Поскольку

$$p_r(x) = \sup_j p_{rj}(x),$$

где

$$p_{rj}(x) = \sum_{k=1}^{j} |x_k| \, \|F_k\|_{-r}$$

— полунепрерывные выпуклые функционалы в пространстве H, то функционалы $p_r(x)$ полунепрерывны снизу и выпуклы.

Применим теперь к функционалам $p_r(x)$ теорему 3 из § 1. Мы получим, что существуют числа n и M, для которых

$$p_n(x) \leqslant M \|x\|,$$

где

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2.$$

Это означает, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \, \|F_k\|_{-n}$$

сходится для всех последовательностей x из H. Согласно указанному выше критерию сходимости числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ получаем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|F_k\|_{-n}^2$ сходится.

Итак, мы видим, что для любого ортогонального нормированного базиса $F_1, \ldots, F_k, \ldots$ в пространстве Φ'_m сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|F_k\|_{-n}^2$. Иными словами, отображение $(T_m^n)'$ пространства Φ'_m в пространство Φ'_n принадлежит к типу Гильберта — Шмидта. Тем самым доказана ядерность пространства Φ.

Из теорем 1 и 2 вытекает следующее утверждение: *для того чтобы счетно-гильбертово пространство Φ было ядерным, необходимо и достаточно, чтобы любой безусловно сходящийся ряд функционалов в этом пространстве абсолютно сходился.*

Иными словами, ядерные пространства можно определить как счетно-гильбертовы пространства, в которых всякий безусловно сходящийся ряд функционалов абсолютно сходится. Отметим, что абсолютная сходимость безусловно сходящихся рядов линейных функционалов имеет место во всех ядерных линейных топологических пространствах.

4. Свойства ядерных пространств. Перейдем теперь к установлению некоторых свойств ядерных пространств. Понятие ядерности мы будем при этом понимать в смысле, указанном в п. 2, т. е. рассматривать лишь счетно-гильбертовы ядерные пространства.

Покажем сначала, что *любое замкнутое подпространство Ψ ядерного счетно-гильбертова пространства Φ является ядерным счетно-гильбертовым пространством* *). В самом деле, очевидно, что любое скалярное произведение $(\varphi, \psi)_n$ в пространстве Φ задает скалярное произведение в пространстве Ψ. Кроме того, из замкнутости подпространства Ψ и полноты пространства Φ вытекает, что Ψ является полным пространством. Следовательно, пространство Ψ счетно-гильбертово. Покажем теперь, что пространство Ψ ядерно. Зададим любое значение m. Найдется такое n, что отображение T_m^n пространства Φ_n в Φ_m ядерно. Тогда индуцированное отображением T_m^n отображение пространства Ψ_n (пополнения пространства Ψ относительно скалярного произведения $(\varphi, \psi)_n$) в пространство Ψ_m также ядерно. Это вытекает из того, что для любых ортогональных нормированных систем элементов $\{\varphi_k\}$ и $\{\chi_k\}$ в пространствах Ψ_n и Ψ_m сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(T_m^n \varphi_k, \chi_k)_n|.$$

Тем самым наше утверждение доказано.

Покажем теперь, что *если Φ — ядерное пространство, а Ψ — его замкнутое подпространство, фактор-пространство Φ/Ψ по которому полно, то Φ/Ψ* **) *также является ядерным пространством.*

*) Это свойство справедливо и для любых линейных топологических ядерных пространств.

**) Пусть Ψ — замкнутое подпространство в Φ. Назовем смежным классом по этому подпространству совокупность всех элементов φ, представимых в виде $\varphi = \varphi_0 + \psi$, где φ_0 — фиксированный элемент из Φ, а ψ — элемент из подпространства Ψ. Такой смежный класс мы будем часто обозначать $\varphi_0 + \Psi$. Пространство Φ/Ψ, состоящее из смежных классов по Ψ, само является линейным пространством, именно, полагаем

$$(\varphi_1 + \Psi) + (\varphi_2 + \Psi) = \varphi_1 + \varphi_2 + \Psi$$

и

$$\lambda(\varphi_1 + \Psi) = \lambda\varphi_1 + \Psi.$$

Если пространство Φ нормировано, то, полагая

$$\|\varphi_1 + \Psi\| = \sup_{\psi \in \Psi} \|\varphi_1 + \psi\|,$$

мы превращаем Φ/Ψ в нормированное пространство. Это пространство полно, если полно пространство Φ.

В самом деле, полагая

$$(\varphi+\Psi,\ \varphi+\Psi)_n=\inf_{\psi\in\Psi}(\varphi+\psi,\ \varphi+\psi)_n,$$

мы превращаем Φ/Ψ в счетно-гильбертово пространство (предоставляем читателю это проверить). Покажем, что оно ядерно. Для этого рассмотрим безусловно сходящийся ряд функционалов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ в пространстве Φ/Ψ. Каждому функционалу f_k соответствует функционал F_k в пространстве Φ, такой, что

$$(F_k,\ \varphi)=(f_k,\ \varphi+\Psi)$$

для всех элементов φ из Φ. Очевидно, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} F_k$ также безусловно сходится. В силу ядерности пространства Φ отсюда вытекает существование такого значения m, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|F_k\|_{-m}$ сходится. Но

$$\|F_k\|_{-m}=\sup_{\|\varphi\|_m\leqslant 1}|(F_k,\ \varphi)|=\sup_{\|\varphi\|_m\leqslant 1}|(f_k,\ \varphi+\Psi)|=\|f_k\|_{-m}.$$

Следовательно, сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_{-m}$, а потому $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ — абсолютно сходящийся ряд. Тем самым ядерность пространства Φ/Ψ доказана.

Покажем теперь, что *все ядерные пространства* Φ *совершенны*. Иными словами, всякое ограниченное замкнутое множество в ядерном пространстве Φ компактно. В самом деле, пусть A — сильно ограниченное *) замкнутое множество в ядерном пространстве Φ. Обозначим через A_n множество A, рассматриваемое как множество элементов гильбертова пространства Φ_n. В силу ограниченности множества A все множества A_n ограничены. При этом для любых m и n $(n>m)$ имеет место равенство $T_m^n A_n=A_m$, где T_m^n — оператор вложения пространства Φ_n в пространство Φ_m. В силу ядерности пространства Φ для любого m найдется такое $n>m$, что отображение T_m^n ядерно и тем более вполне непрерывно. Но вполне непрерывное отображение переводит ограниченное множество A_n во множество A_m с компактным замыканием. Отсюда вытекает, что множество $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\overline{A}_m$ компактно как пересечение компактных множеств (замыкание множества A_m берется в Φ_m).

*) Т. е. такое множество, что для любой окрестности нуля U найдется значение $\lambda>0$, при котором $\lambda A\subset U$.

Чтобы закончить доказательство теоремы, нам осталось показать, что множество A совпадает с пересечением замыканий множеств A_m, т. е. что $A=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\overline{A}_k$. Возьмем любой элемент φ, не принадлежащий множеству A. Так как множество A замкнуто в Φ, то найдется окрестность нуля U такая, что $\varphi+U$ не пересекается с A. Если эта окрестность нуля задается неравенством $\|\varphi\|_m<\varepsilon$, то очевидно, что φ не принадлежит множеству $\overline{A}_m$ и потому $\varphi\,\overline{\in}\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\overline{A}_k$. Тем самым включение $A\supset\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\overline{A}_k$ доказано. Поскольку очевидно, что $A\subset\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\overline{A}_k$, то равенство $A=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\overline{A}_k$ доказано.

Из доказанной теоремы вытекает, что бесконечномерные банаховы пространства не являются ядерными, поскольку шары в таких пространствах ограничены, но не компактны. В то же время любое конечномерное пространство ядерно, поскольку тождественное отображение этого пространства ядерно.

Поскольку всякое ядерное пространство совершенно, для ядерных пространств справедливы все теоремы, доказанные в выпуске 2 о совершенных пространствах. Именно, справедливы следующие утверждения:

1) *Как в ядерном пространстве* Φ, *так и в сопряженном с ним пространстве* Φ' *сильная и слабая сходимости совпадают* *).

*) Последовательность элементов $\{\varphi_k\}$ из счетно-нормированного пространства Φ называется слабо сходящейся к нулю, если $\lim\limits_{k\to\infty}(F,\ \varphi_k)=0$ для любого линейного функционала F в Φ. Для линейных функционалов понятие слабой топологии (и тем самым слабой сходимости) определено на стр. 82.

2) *Если пространство Φ ядерно, то замкнутые ограниченные множества A в сопряженном с ним пространстве Φ′ компактны относительно слабой и сильной сходимости.*

3) *Ядерное пространство сепарабельно (содержит всюду плотное счетное множество).*

4) *Ядерное пространство полно относительно слабой сходимости.*

Доказательства этих утверждений (для более широкого класса совершенных пространств) читатель найдет в выпуске 2 (гл. I, § 6).

5. Билинейные функционалы в ядерных пространствах. Мы уже указывали выше, что теорема о ядре справедлива не только для пространства K, но и для многих других пространств, например, для пространства S, пространства $\mathfrak{Z}$ целых аналитических функций и т. д. Мы докажем в этом пункте теорему, охватывающую все эти частные случаи. Эта теорема формулируется следующим образом:

Теорема 3. (абстрактная теорема о ядре). *Пусть Φ и Ψ — счетно-гильбертовы пространства, одно из которых, например Φ, ядерно, а $B(\varphi, \psi)$, $\varphi \in \Phi$, $\psi \in \Psi$ — билинейный функционал, непрерывный по каждому из аргументов φ и ψ. Тогда найдутся такие значения p и m, что $B(\varphi, \psi)$ можно представить в виде* *)

$$B(\varphi, \psi) = (A\varphi, \psi),$$

где A — оператор типа Гильберта — Шмидта, отображающий гильбертово пространство Φ_p в гильбертово пространство Ψ'_m (Φ_p — пополнение пространства Φ по норме $\|\varphi\|_p = \sqrt{(\varphi, \varphi)_p}$, а Ψ'_m — пространство, сопряженное с Ψ_m).

Доказательство. Поскольку функционал $B(\varphi, \psi)$ непрерывен по каждому из аргументов φ и ψ, то по теореме 3 из § 1 найдутся такие нормы $\|\varphi\|_n$ и $\|\psi\|_m$ в пространствах Φ и Ψ, что

$$|B(\varphi, \psi)| \leqslant M \|\varphi\|_n \|\psi\|_m, \tag{5}$$

*) Символом $(A\varphi, \psi)$ обозначено значение функционала $A\varphi$ для элемента ψ (в отличие от символа $(\varphi, \psi)_n$, означающего скалярное произведение в пространстве Φ_n).

где значение M не зависит от n и m. Введем теперь линейный оператор A_1, отображающий пространство Φ_n в Ψ'_m и определяемый равенством

$$(A_1\varphi, \psi) = B(\varphi, \psi).$$

Из соотношения (5) вытекает, что

$$|(A_1\varphi, \psi)| = |B(\varphi, \psi)| \leqslant M \|\varphi\|_n \|\psi\|_m.$$

Поэтому

$$\|A_1\varphi\|_{-m} = \sup_{\|\psi\|_m = 1} |(A_1\varphi, \psi)| \leqslant M \|\varphi\|_n$$

и, следовательно, оператор A_1 ограничен относительно норм $\|\varphi\|_n$ и $\|F\|_{-m}$ в пространствах Φ_n и Ψ'_n.

Поскольку пространство Φ по предположению ядерно, найдется такое значение p, что оператор T^p_n, отображающий пространство Φ_p в Φ_n и оставляющий неизменными элементы пространства Φ, является оператором типа Гильберта — Шмидта. Но тогда и оператор $A = A_1 T^p_n$, отображающий пространство Φ_p в Ψ'_m, также является оператором того же типа. Поскольку оператор T^p_n оставляет неизменными элементы пространства Φ (точнее говоря, поскольку $T^p_n \overset{(p)}{\varphi} = \overset{(n)}{\varphi}$), то билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$ можно записать в виде

$$B(\varphi, \psi) = (A_1\varphi, \psi) = (A_1 T^p_n \varphi, \psi) = (A\varphi, \psi).$$

Тем самым наше утверждение доказано.

Заметим, что любой оператор A типа Гильберта — Шмидта, отображающий пространство Φ_p в пространство Ψ'_m имеет, согласно теореме 3 из § 2, вид

$$A\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\varphi, \varphi_k)_p F_k,$$

где $\{\varphi_k\}$ и $\{F_k\}$ — ортогональные нормированные базисы в пространствах Φ_p и Ψ'_m, $\lambda_k \geqslant 0$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2$ сходится. Поэтому мы получаем такое следствие из теоремы 3.

Следствие. *Пусть Φ и Ψ — счетно-гильбертовы пространства, причем пространство Φ ядерно. Тогда для любого билинейного функционала $B(\varphi, \psi)$, $\varphi \in \Phi$, $\psi \in \Psi$,* *непрерывного по каждому аргументу, существуют такие m и p, что $B(\varphi, \psi)$ имеет вид*

$$B(\varphi, \psi) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\varphi, \varphi_k)_p F_k(\psi),$$

где $\{\varphi_k\}$ и $\{F_k\}$ — ортогональные нормированные базисы в пространствах Φ_p и Ψ'_m, $\lambda_k \geqslant 0$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2$ сходится.

В некоторых случаях бывает полезно усиление теоремы 3, заключающееся в том, что вместо принадлежности оператора A к типу Гильберта—Шмидта утверждается ядерность этого оператора. Соответственно с этим в следствии вместо сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2$ можно добиться сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$. Никаких изменений в доказательстве это усиление не потребует, поскольку мы всегда можем добиться, чтобы оператор T_n^p был не только оператором типа Гильберта — Шмидта, но и ядерным оператором.

Теореме о ядре можно дать иную формулировку. Введем следующее обозначение. Пусть φ и ψ — элементы, принадлежащие соответственно гильбертовым пространствам H_1 и H_2. Сопоставим элементу ψ линейный функционал F_ψ в пространстве H_2, определяемый формулой $(F_\psi, \psi_1) = (\psi_1, \psi)_2$, где $\psi_1 \in H_2$, а $(\psi_1, \psi)_2$ — скалярное произведение в H_2. Обозначим через $\varphi \otimes \psi$ линейный оператор, отображающий пространство H_1 в пространство H'_2, задаваемый формулой

$$(\varphi \otimes \psi)\chi = (\chi, \varphi)_1 F_\psi,$$

где $(\chi, \varphi)_1$ — скалярное произведение в H_1. Через $(\varphi \otimes \psi)^*$ мы будем обозначать оператор, отображающий пространство H'_2 в H_1 и определяемый формулой

$$((\varphi \otimes \psi)^* F, \chi)_1 = (F, (\varphi \otimes \psi)\chi)_{-2},$$

где $F \in H'_2$, $\varphi \in H_1$, а $(F_1, F_2)_{-2}$ — скалярное произведение в H'_2. Оператор $(\varphi \otimes \psi)^*$ можно также задать формулой

$$((\varphi \otimes \psi)^* F, \chi)_1 = (F, (\chi, \varphi)_1 F_\psi)_{-2}.$$

Очевидно, что операторы $\varphi \otimes \psi$ и $(\varphi \otimes \psi)^*$ вырождены, а потому принадлежат к типу Гильберта — Шмидта. Поэтому,

если A — любой оператор типа Гильберта — Шмидта, отображающий пространство H_1 в H'_2, то оператор $(\varphi \otimes \psi)^* A$ — ядерный, и, следовательно, существует след $\mathrm{Tr}\,[(\varphi \otimes \psi)^* A]$ этого оператора. Полагая

$$B(\varphi, \psi) = \mathrm{Tr}\,[(\varphi \otimes \psi)^* A],$$

мы получим билинейный функционал в пространствах H_1 и H_2. Оператор A типа Гильберта — Шмидта называется ядром этого билинейного функционала *).

Мы докажем сейчас, что в ядерных пространствах любой билинейный функционал задается ядром. Иными словами, верна следующая теорема.

Теорема 4 (вторая формулировка абстрактной теоремы о ядре). *Пусть Φ и Ψ — счетно-гильбертовы пространства, причем пространство Φ ядерно. Для любого билинейного функционала $B(\varphi, \psi)$, $\varphi \in \Phi$, $\psi \in \Psi$, непрерывного по каждому из аргументов, найдутся такие значения p и m и такой оператор типа Гильберта — Шмидта A, отображающий пространство Φ_p в Ψ'_m, что*

$$B(\varphi, \psi) = \mathrm{Tr}\,[(\varphi \otimes \psi)^* A].$$

Здесь через $(\varphi \otimes \psi)^*$ обозначен оператор, отображающий пространство Ψ'_m в Φ_p и определяемый формулой

$$((\varphi \otimes \psi)^* F, \chi)_p = (F, (\chi, \varphi)_p F_\psi)_{-m},$$

где $F \in \Psi'_m$, $\chi \in \Phi_p$, $(\varphi, \chi)_p$ — скалярное произведение в Φ_p, $(F, F_\psi)_{-m}$ — скалярное произведение в Ψ'_m и F_ψ — линейный функционал в Ψ_m, задаваемый формулой $(F_\psi, \psi_1) = (\psi_1, \psi)_m$.

*) Если H_1 и H_2 — пространства функций с интегрируемым квадратом модуля, то оператор $\varphi \otimes \psi$ задается формулой

$$(\varphi \otimes \psi)\chi = \overline{\psi(y)} \int \chi(x) \overline{\varphi(x)}\, dx,$$

т. е. является вырожденным интегральным оператором с ядром $\overline{\varphi(x)}\,\overline{\psi(y)}$. Билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$ имеет в этом случае вид

$$B(\varphi, \psi) = \int A(x, y)\, \varphi(x)\, \psi(y)\, dx\, dy,$$

где $A(x, y)$ — функция с интегрируемым квадратом модуля, ядро функционала $B(\varphi, \psi)$.

Доказательство. По теореме 3 найдутся такие значения m и p, что

$$B(\varphi, \psi) = (A\varphi, \psi),$$

где A — оператор типа Гильберта — Шмидта, отображающий пространство Φ_p в Ψ'_m. Покажем, что

$$B(\varphi, \psi) = \operatorname{Tr}[(\varphi \otimes \psi)^* A].$$

Для этого выберем в пространстве Φ_p ортогональный нормированный базис $\{\varphi_k\}$, такой, что $\varphi_1 = \frac{\varphi}{\|\varphi\|}$. Оператор $\varphi \otimes \psi$ обозначим для краткости через T. Очевидно, что

$$\operatorname{Tr}(T^*A) = \sum_{k=1}^{\infty} (T^*A\varphi_k, \varphi_k)_p = \sum_{k=1}^{\infty} (A\varphi_k, T\varphi_k)_{-m}.$$

Но при $k \neq 1$

$$T\varphi_k = (\varphi \otimes \psi)\varphi_k = (\varphi_k, \varphi)F_\psi = \|\varphi\|(\varphi_k, \varphi_1)F_\psi = 0,$$

а

$$T\varphi_1 = \|\varphi\| F_\psi,$$

и потому

$$\operatorname{Tr}(T^*A) = (A\varphi_1, \|\varphi\| F_\psi)_{-m} = (A\varphi, F_\psi)_{-m}.$$

Поскольку функционал F_ψ определяется равенством $(F_\psi, \psi_1) = (\psi_1, \psi)_m$, то для любого элемента F из Ψ'_m справедливо равенство $(F, F_\psi)_{-m} = (F, \psi)$. Следовательно,

$$B(\varphi, \psi) = (A\varphi, \psi) = (A\varphi, F_\psi)_{-m} = \operatorname{Tr}(T^*A) = \operatorname{Tr}[(\varphi \otimes \psi)^* A].$$

Теорема доказана.

Применяя теоремы 3 и 4 к конкретным пространствам, мы получаем для них теоремы о ядре. Например, в п. 6 будет доказано, что пространство $K(a)$ бесконечно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль при $|x| \geqslant a$, ядерно. При этом скалярные произведения, задающие топологию в этом пространстве, имеют вид

$$(\varphi, \psi)_m = \sum_{k=0}^{m} \int \varphi^{(m)}(x) \overline{\psi^{(m)}(x)}\, dx.$$

Применяя к пространству $K(a)$ следствие теоремы 3, мы убеждаемся, что любой билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$ в $K(a)$ имеет вид

$$B(\varphi, \psi) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\varphi, \varphi_k)_p (F_k, \psi), \tag{6}$$

где $\{\varphi_k\}$ — ортогональный нормированный базис в пространстве $K_p(a)$ *), $\{F_k\}$ — ортогональный нормированный базис в пространстве $K'_m(a)$, $\lambda_k \geqslant 0$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ сходится.

Покажем теперь, что билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$ можно записать в виде

$$B(\varphi, \psi) = (F, \varphi(x)\psi(y)),$$

где F — линейный функционал в пространстве $K_2(a)$ бесконечно дифференцируемых функций, обращающийся в нуль вне квадрата $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant a$. Для этого сопоставим функции $\varphi_k(x)$ из $K_p(a)$ и функционалу F_k из $K'_m(a)$ функционал в пространстве $K_2(a)$, который мы обозначим $F_k \times \varphi_k$ и определим формулой

$$(F_k \times \varphi_k, \varphi(x, y)) = (F_k, (\varphi(x, y), \varphi_k)_p).$$

Этот функционал определен для всех функций $\varphi(x, y)$ из пространства $K_2(a)$. В самом деле, функция $\psi_k(y) = (\varphi(x, y), \varphi_k)_p$ имеет вид

$$\psi_k(y) = \sum_{j=0}^{p} \int \frac{\partial^j \varphi(x, y)}{\partial x^j} \overline{\varphi_k^{(j)}(x)}\, dx.$$

Из бесконечной дифференцируемости функции $\varphi(x, y)$ и принадлежности функции $\varphi_k(x)$ пространству $K_p(a)$ вытекает, что функция $\psi_k(y)$ определена для всех значений y. Кроме того, очевидно, что эта функция бесконечно дифференцируема и обращается в нуль при $|y| \geqslant a$. Поэтому имеет смысл и выражение

$$(F_k \times \varphi_k, \varphi(x, y)) = (F_k, \psi_k).$$

*) Через $K_p(a)$ мы обозначаем пополнение пространства $K(a)$ по норме $\|\varphi\|_p = \sqrt{(\varphi, \varphi)_p}$, а через $K'_m(a)$ — пространство, сопряженное с $K_m(a)$.

Простая оценка показывает, что

$$|(F_k \times \varphi_k, \ \varphi(x, y))| \leqslant \|F_k\|_{-m} \|\varphi_k\|_p \|\varphi(x, y)\|_{mp},$$

где через $\|\varphi(x, y)\|_{mp}$ обозначено выражение

$$\left[\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{p} \int \left| \frac{\partial \varphi^{i+j}(x, y)}{\partial x^j \partial y^i} \right|^2 dx\, dy \right]^{1/2}.$$

Так как по условию $\|F_k\|_{-m} = \|\varphi_k\|_p = 1$, то для всех k имеет место неравенство

$$|(F_k \times \varphi_k, \ \varphi(x, y))| \leqslant \|\varphi(x, y)\|_{mp}.$$

Отсюда вытекает, что для всех функций $\varphi(x, y)$ из $K_2(a)$ сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (F_k \times \varphi_k, \ \varphi(x, y)),$$

причем легко видеть, что этот ряд определяет непрерывный линейный функционал в пространстве $K_2(a)$. Обозначим этот функционал через F. Очевидно, что формулу (6) можно записать при помощи функционала F в виде

$$B(\varphi, \psi) = (F, \varphi(x)\psi(y)). \tag{7}$$

Но это и означает, что любой билинейный функционал в пространстве $K(a)$, непрерывный по каждому аргументу, может быть записан в виде (7), где F — непрерывный линейный функционал в пространстве $K_2(a)$. Тем самым получено новое доказательство теоремы о ядре для пространства $K(a)$.

Совершенно аналогично доказываются теоремы о ядре для пространств S и $\mathfrak{Z}$.

В заключение мы отметим еще теорему, тесно связанную с теоремой 3.

Теорема 5. *Пусть A — линейный оператор, отображающий ядерное пространство Φ в пространство Ψ', сопряженное со счетно-гильбертовым пространством Ψ. Если оператор A непрерывен относительно топологии пространства Φ и слабой топологии пространства Ψ', то найдутся такие p и m, что оператор A является оператором типа Гильберта — Шмидта относительно норм $\|\varphi\|_p$ и $\|F\|_{-m}$ в пространствах Φ и Ψ'.*

Доказательство. По теореме 3′ из § 1 найдутся такие значения n и m, что оператор A непрерывен относительно норм $\|\varphi\|_n$ и $\|F\|_{-m}$. Иными словами, оператор A_n, индуцированный оператором A в пространстве Φ_n, непрерывно отображает это пространство в Ψ'_m. Но в силу ядерности Φ найдется такое p, что отображение T^p_n пространства Φ_p в Φ_n принадлежит к типу Гильберта — Шмидта. Очевидно, что $A_p = A_n T^p_n$, где A_p — оператор, индуцированный оператором A в пространстве Φ_p. Так как A_p является произведением оператора T^p_n типа Гильберта — Шмидта и непрерывного оператора A_n, то A_p является оператором того же типа. Теорема доказана.

Точно так же доказывается двойственная теорема.

Теорема 6. *Пусть A — непрерывное линейное отображение счетно-гильбертова пространства Φ в пространство Ψ', сопряженное с ядерным пространством Ψ (пространство Ψ' рассматривается в слабой топологии). Тогда найдутся такие числа p и m, что оператор A является оператором типа Гильберта — Шмидта относительно норм $\|\varphi\|_m$ и $\|F\|_{-p}$ в пространствах Φ и Ψ'.*

6. Примеры ядерных пространств *). Мы установили различные свойства ядерных пространств. Естественно возникает вопрос, к каким же конкретным пространствам применимы наши результаты, какие конкретные пространства обладают свойством ядерности.

Рассмотрим сначала пространства типа $K(M_p)$, введенные в выпуске 2 (глава II, § 1, п. 2). Эти пространства были определены следующим образом **). Пусть

$$1 \leqslant M_1(x) \leqslant \ldots \leqslant M_p(x) \leqslant \ldots$$

— возрастающая в каждой точке последовательность функций, принимающих как конечные, так и бесконечные значения (бесконечные значения функции $M_p(x)$ принимают в одних и тех же точках). Функции $M_p(x)$, определяющие пространство $K(M_p)$, непрерывны в тех точках, где они принимают

*) Пункты 6, 7, 8 можно опустить при первом чтении.

**) Ради простоты мы проводим все рассуждения для функций одного переменного. Переход к функциям нескольких переменных приведет лишь к некоторому усложнению записи. Результаты же сохраняют силу и для функций многих переменных.

конечные значения. По определению, пространство $K(M_p)$ состоит из бесконечно дифференцируемых функций, для которых ограничены все функции вида

$$|M_p(x)\varphi^{(k)}(x)|, \quad 1 \leqslant p < \infty, \qquad 0 \leqslant k \leqslant p.$$

Нормы в пространствах $K(M_p)$ задаются формулами

$$\|\varphi\|_p = \max_{0 \leqslant k \leqslant p} \sup_x |M_p(x)\varphi^{(k)}(x)|. \tag{8}$$

Мы будем говорить, что пространство $K(M_p)$ удовлетворяет *условию* (N) (nucléaire — ядерный), если для любого n можно найти такое $p > n$, что отношение

$$m_{np}(x) = \frac{M_n(x)}{M_p(x)}$$

стремится к нулю при $|x| \to \infty$ и является суммируемой функцией от x (мы полагаем $m_{np}(x) = 0$ в тех точках, где $M_n(x) = M_p(x) = \infty$).

Условие (N) было введено в выпуске 2 (гл. II, § 4, п. 2). В выпуске 3 (гл. IV, § 3, п. 2) было показано, что из условия (N) вытекает ядерность пространства $K(M_p)$. При этом ядерность понималась в смысле, принятом в выпуске 3, т. е. как абсолютная сходимость любого безусловно сходящегося ряда линейных функционалов в $K(M_p)$. Поскольку для счетно-гильбертовых пространств оба понятия ядерности эквивалентны, то для доказательства ядерности пространства $K(M_p)$ в принятом здесь смысле было бы достаточно показать, что пространство $K(M_p)$, удовлетворяющее условию (N), счетно-гильбертово. Однако мы проведем полное доказательство, чтобы читатель мог не прибегать к выпуску 3.

Теорема 7. *Если пространство $K(M_p)$ удовлетворяет условию (N), то оно ядерно.*

Доказательство. Докажем сначала, что пространство $K(M_p)$ счетно-гильбертово. Для этого введем в $K(M_p)$ счетный набор скалярных произведений, положив

$$(\varphi, \psi)_p = \int [M_p(x)]^2 \sum_{0 \leqslant q \leqslant p} \varphi^{(q)}(x)\overline{\psi^{(q)}(x)}\,dx. \tag{9}$$

Покажем, что топология в $K(M_p)$, задаваемая нормами $\|\varphi\|_p$ [см. формулу (8)], совпадает с топологией, задаваемой нор-

мами $\|\varphi\|'_p = \sqrt{(\varphi, \varphi)_p}$. В самом деле, при $q \leqslant n < p$ имеем

$$\int [M_n(x)]^2 |\varphi^{(q)}(x)|^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \sup_x \{[M_p(x)]^2 |\varphi^{(q)}(x)|^2\} \int \left[\frac{M_n(x)}{M_p(x)}\right]^2 dx.$$

Но по условию (N) число p можно выбрать так, что интеграл

$$\int \frac{M_n(x)}{M_p(x)}\,dx = \int m_{np}(x)\,dx$$

сходится. Так как $\lim\limits_{x\to\infty} m_{np}(x) = 0$, то сходится и интеграл $\int m_{np}^2(x)\,dx$. Обозначим его значение через B_{np}^2. Мы получим тогда, что при $q \leqslant n < p$

$$\int [M_n(x)]^2 |\varphi^{(q)}(x)|^2\,dx \leqslant B_{np}^2 \|\varphi\|_p^2.$$

Отсюда следует, что

$$\|\varphi\|_n'^2 = \sum_{0 \leqslant q \leqslant n} \int [M_n(x)]^2 |\varphi^{(q)}(x)|^2\,dx \leqslant C^2 \|\varphi\|_p^2,$$

т. е. $\|\varphi\|_n'^2 \leqslant C^2 \|\varphi\|_p^2$, где C — постоянная, не зависящая от $\varphi(x)$.

Оценим теперь $\|\varphi\|_n$ через $\|\varphi\|'_p$. Пусть x_0 и q_0 — те значения x и q, для которых выражение $|M_n(x)\varphi^{(q)}(x)|$, $q \leqslant n$, достигает точной верхней грани. Обозначим $M_n(x_0)$ через A_n. Тогда мы имеем

$$\|\varphi\|_n = A_n |\varphi^{(q_0)}(x_0)| \leqslant A_n \left[\int_{-\infty}^{x_0} |\varphi^{(q_0+1)}(x)|\,dx\right].$$

Но так как $M_{q_0+1}(x) \geqslant 1$, то

$$\|\varphi\|_n \leqslant A_n \int_{-\infty}^{\infty} M_{q_0+1}(x)|\varphi^{(q_0+1)}(x)|\,dx.$$

В силу неравенства Буняковского — Шварца, отсюда следует, что

$$\|\varphi\|_n^2 \leqslant A_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{M_{q_0+1}(x)}{M_p(x)}\right]^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} [M_p(x)]^2 |\varphi^{q_0+1}(x)|^2\,dx.$$

Но найдется такое значение p, что интеграл $\int \frac{M_{q_0+1}(x)}{M_p(x)}\,dx$ сходится, а тогда сходится и интеграл $\int \left[\frac{M_{q_0+1}(x)}{M_p(x)}\right]^2 dx$. Обозначим его значение через E_p^2. Мы получим, что

$$\|\varphi\|_n \leqslant A_n E_n \|\varphi\|'_p.$$

Из доказанных нами неравенств

$$\|\varphi\|'_n \leqslant C\|\varphi\|_p$$

и

$$\|\varphi\|_n \leqslant A_n E_p \|\varphi\|'_p$$

вытекает, что система норм $\|\varphi\|'_p$ задает ту же топологию в пространстве $K(M_p)$, что и система норм $\|\varphi\|_n$. Итак, *если выполнено условие* (N), *то* $K(M_p)$ *является счетно-гильбертовым пространством.*

Докажем теперь, что пространство $K(M_p)$ ядерно. В силу теоремы 2 для этого достаточно показать, что любой безусловно сходящийся ряд функционалов $\sum_{k=1}^{\infty} F_k$ в пространстве $K(M_p)$ абсолютно сходится. При этом, разумеется, мы можем воспользоваться любым выражением норм в пространстве $K(M_p)$, задающим топологию этого пространства. Мы выберем выражение, даваемое формулой (8). Как было показано в выпуске 2 (гл. II, § 4, п. 2), в этом случае каждый функционал F_k, ограниченный по норме $\|\varphi\|_n$, можно записать в виде

$$(F_k, \varphi) = \sum_{0 \leqslant q \leqslant n} \int M_n(x) F_{kq}(x) \varphi^{(q)}(x)\,dx, \tag{10}$$

где $F_{kq}(x)$ при каждом q является измеримой и ограниченной функцией от x. При этом нормы функционалов F_k в пространстве $K(M_p)$ выражаются формулами

$$\|F_k\|_{-p} = \sum_{0 \leqslant q \leqslant p} \sup_x |F_{kq}(x)|,$$

где при вычислении верхней грани мы пренебрегаем множествами меры нуль.

По лемме 1 из п. 3 для безусловно сходящегося ряда функционалов $\sum_{k=1}^{\infty} F_k$ можно найти такие значения A и n, что неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(F_k, \varphi)| \leqslant A\|\varphi\|_n$$

выполняется для всех элементов φ пространства $K(M_p)$. Отсюда следует, что все функционалы F_k непрерывны по норме $\|\varphi\|_n$ и могут быть записаны формулой вида (10). Таким образом, для любого элемента φ из $K(M_p)$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{0 \leqslant q \leqslant n} \int M_n(x) F_{kq}(x) \varphi^{(q)}(x)\,dx \right| \leqslant \leqslant A \sum_{0 \leqslant q \leqslant n} \sup_x |M_n(x) \varphi^{(q)}(x)|.$$

Используя теорему о распространении линейных функционалов, легко получить аналогичное неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{0 \leqslant q \leqslant n} \int M_n(x) F_{kq}(x) \varphi_q(x)\,dx \right| \leqslant \leqslant A \sum_{0 \leqslant q \leqslant n} \sup_x |M_n(x) \varphi_q(x)|$$

для любых функций $\varphi_0(x), \ldots, \varphi_n(x)$, таких, что интегралы $\int M_n(x)\varphi_q(x)\,dx$ сходятся. Ввиду произвольности функций $\varphi_0(x), \ldots, \varphi_n(x)$ это может иметь место, только если существует такое число C, что неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{0 \leqslant q \leqslant n} |F_{kq}(x)| < C \tag{11}$$

выполняется почти для всех значений x.

Выберем теперь число $p \geqslant n$ так, чтобы интеграл $\int m_{np}(x)\,dx$ сходился, и покажем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|F_k\|_{-p}$

сходится. В самом деле, очевидно, что

$$|(F_k, \varphi)| \leqslant \sum_{0 \leqslant q \leqslant n} \int M_n(x) \, | F_{kq}(x) \varphi^{(q)}(x) | \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0 \leqslant q \leqslant n} \sup_x M_p(x) \, |\varphi^{(q)}(x)| \sum_{|q| \leqslant n} \int \frac{M_n(x)}{M_p(x)} \, | F_{kq}(x) | \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi\|_p \sum_{0 \leqslant q \leqslant n} \int m_{np}(x) \, | F_{kq}(x) | \, dx$$

и потому

$$\|F_k\|_{-p} \leqslant \sum_{0 \leqslant q \leqslant n} \int m_{np}(x) \, | F_{kq}(x) | \, dx.$$

Но в силу неравенства (11) и суммируемости функции $m_{np}(x)$ мы имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|F_k\|_{-p} \leqslant \int m_{np}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{0 \leqslant q \leqslant n} | F_{kq}(x) | \, dx \leqslant$$

$$\leqslant C \int m_{np}(x) \, dx \leqslant C_1.$$

Тем самым абсолютная сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} F_k$ доказана. Но это означает, что пространство $K(M_p)$ ядерно.

Класс пространств типа $K(M_p)$, удовлетворяющих условию (N), довольно обширен. К нему принадлежат, например, пространства $K(a)$. Для этих пространств $M_p(x) = 1$, если $|x| \leqslant a$, и $M_p(x) = \infty$, если $|x| \geqslant a$. Очевидно, что условие (N) выполнено. Далее пространство S также является пространством типа $K(M_p)$, удовлетворяющим условию (N). В данном случае $M_p(x) = (1 + x^2)^p$. Относятся к рассматриваемому классу и пространства $S_{\alpha, A}$, состоящие из бесконечно дифференцируемых функций, для которых сходятся интегралы

$$\int e^{a(1-1/p)|x|^{1/\alpha}} \varphi^{(q)}(x) \, dx, \quad 0 \leqslant q \leqslant p,$$

$$p = 2, 3, \ldots; \qquad a = \frac{\alpha}{eA^{1/\alpha}}.$$

В этом случае $M_p(x) = e^{a(1-1/p)|x|^{1/\alpha}}$ и, как легко проверить, условие (N) выполнено. Значит, и для таких пространств справедлива теорема о ядре.

Укажем еще на класс пространств последовательностей, аналогичных пространствам $K(M_p)$. Пусть $\|m_{pq}\|$, $1 \leqslant p$, $q < \infty$ — матрица, состоящая из таких элементов m_{pq}, что для любого q выполняются неравенства

$$1 \leqslant m_{1q} \leqslant m_{2q} \leqslant \ldots \leqslant m_{pq} \leqslant \ldots$$

Обозначим через $k(m_{pq})$ пространство последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_q, \ldots)$, таких, что при любом p последовательности

$$(m_{p1}x_1, \; m_{p2}x_2, \; \ldots, \; m_{pq}x_q, \; \ldots)$$

ограничены. Очевидно, что $k(m_{pq})$ является линейным пространством. Если положить

$$\|x\|_p = \sup_q |m_{pq}x_q|,$$

то пространство $k(m_{pq})$ будет счетно-нормированным. Мы скажем, что пространство $k(m_{pq})$ удовлетворяет условию (N), если для любого n найдется такое p, что ряд

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{m_{nq}}{m_{pq}}$$

сходится.

Рассуждения, аналогичные проведенным выше, показывают, что пространства $k(m_{pq})$, удовлетворяющие условию (N), являются ядерными. В частности, ядерным является пространство s быстро убывающих последовательностей*). Для этого пространства $m_{pq} = q^p$ и, как легко проверить, выполняется условие (N).

Из ядерности пространства s вытекает ядерность пространства $\mathfrak{Z}$ целых аналитических функций, в котором нормы задаются формулами

$$\|\varphi\|_n = \sup_{|z|=n} |\varphi(z)|.$$

*) Последовательность $x = (x_1, \ldots, x_q, \ldots)$ называется быстро убывающей, если для любого p выполнено соотношение

$$\lim_{q \to \infty} |q^p x_q| = 0.$$

В самом деле, без труда устанавливается, что коэффициенты ряда Тейлора $\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}$ целой аналитической функции $\varphi(z)$ образуют быстро убывающую последовательность и, обратно, если последовательность чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ быстро убывает, то

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

является целой аналитической функцией. Кроме того, применяя известные неравенства Коши для коэффициентов ряда Тейлора, мы убеждаемся, что соответствие

$$\varphi(z)\to\left\{\varphi(0), \ldots, \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}, \ldots\right\}$$

является изоморфизмом между пространствами $\mathfrak{Z}$ и s. Поэтому в силу ядерности пространства s пространство $\mathfrak{Z}$ также является ядерным.

Отметим в заключение, что Б. С. Митягин доказал ядерность пространств S_α^β (пространства S_α^β введены в выпуске 2 гл. IV).

7. Метрический порядок множеств в ядерных пространствах *). Пусть A — множество в метрическом пространстве R. Множество B из R называется *ε-сетью* для множества A, если для любой точки x из A найдется точка b из B, отстоящая от нее меньше чем на ε, $\varepsilon>0$. Очевидно, что *шары радиуса ε с центрами в точках ε-сети покрывают множество A.*

Если множество A компактно, то при любом $\varepsilon>0$ существует конечная ε-сеть для этого множества. Обозначим через $N(\varepsilon, A)$ наименьшее число элементов в ε-сети для множества A. Очевидно, что $N(\varepsilon, A)$ является невозрастающей функцией от ε, причем если множество A бесконечно, то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} N(\varepsilon, A)=\infty$.

Многие свойства пространства R могут быть выражены в терминах функций $N(\varepsilon, A)$. Например, банахово пространство конечномерно тогда и только тогда, когда для любого компактного множества A функция $N(\varepsilon, A)$ имеет степенной рост при $\varepsilon\to 0$. Иными словами, необходимое и достаточное условие конечномерности банахова пространства состоит в том, что для любого компактного множества A из R имеем:

$$N(\varepsilon, A)<C\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n,$$

где C зависит от A. Здесь n является размерностью пространства R.

Мы охарактеризуем в этом пункте при помощи ε-сетей ядерные счетно-гильбертовы пространства.

Введем сначала понятие ε-сети для любого линейного топологического пространства.

Пусть Φ — линейное топологическое пространство и U — окрестность нуля в этом пространстве. Назовем множество B *ε-сетью множества A относительно окрестности нуля U*, если для любого элемента φ из A найдется такой элемент ψ из B, что $\varphi\in\psi+\varepsilon U$ (через εU обозначена совокупность элементов вида $\varepsilon\chi$, $\chi\in U$). Наименьшее число элементов ε-сети относительно U для множества A обозначим через $N(\varepsilon, A, U)$. Если множество A компактно (или имеет компактное замыкание в Φ), то для любой окрестности нуля U величина $N(\varepsilon, A, U)$ конечна при всех $\varepsilon>0$.

Рассмотрим совершенное счетно-гильбертово пространство $\Phi=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\Phi_k$ и обозначим через U_m единичный шар в пространстве Φ_m. Если $k<m$, то шар U_m имеет компактное замыкание относительно нормы $\|\varphi\|_k$ и потому величина $N(\varepsilon, U_m, U_k)$ конечна при любом $\varepsilon>0$. Для краткости записи обозначим $N(\varepsilon, U_m, U_k)$ через $r_{km}(\varepsilon)$.

Таким образом, *каждому счетно-гильбертову совершенному пространству сопоставлены функции $r_{km}(\varepsilon)$, $1\leqslant m<\infty$, $k<m$.*

Мы дадим здесь необходимое и достаточное условие ядерности пространства Φ, выраженное в терминах, связанных с быстротой роста функций $r_{km}(\varepsilon)$. Поскольку одна и та же топология может быть задана различными наборами скалярных произведений в Φ, на стр. 122 будет дано другое условие, выраженное в иных терминах.

*) Результаты пп. 7 и 8 имеют истоком идеи А. Н. Колмогорова о ε-энтропии и ε-емкости компактов в функциональных пространствах. См. [51, 52, 53].

Напомним следующие определения. Пусть $f(x)$ — монотонно возрастающая положительная функция от x. *Порядком роста* ρ функции $f(x)$ называют точную нижнюю грань всех чисел μ, таких, что при некотором C (зависящем от μ) выполняется неравенство

$$f(x) \leqslant Ce^{x^\mu}.$$

Если $\rho = 0$, то функцию $f(x)$ называют функцией *минимального порядка роста*. В этом случае для любого $\mu > 0$ найдется такое C, что

$$f(x) \leqslant Ce^{x^\mu}.$$

Из определения порядка роста вытекает, что

$$\rho = \varlimsup_{x \to \infty} \frac{\ln \ln f(x)}{\ln x}.$$

Если Φ — совершенное счетно-гильбертово пространство, то через ρ_{km} обозначим порядок роста функции $r_{km}(\varepsilon)$ $\left(\text{рассматриваемой как функция от } \frac{1}{\varepsilon}\right)$. Иными словами, положим

$$\rho_{km} = \varlimsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln \ln N(\varepsilon,\ U_m,\ U_k)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}. \tag{12}$$

В дальнейшем число

$$\varlimsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln \ln N(\varepsilon,\ A,\ U)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$$

мы будем называть *метрическим порядком множества A относительно окрестности нуля U*. Таким образом, ρ_{km} есть метрический порядок эллипсоида U_m относительно шара U_k, $k < m$.

Основная теорема этого пункта гласит следующее: *для того чтобы совершенное счетно-гильбертово пространство $\Phi = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Phi_k$ было ядерным, необходимо и достаточно, чтобы при любом $p > 0$ имело место равенство*

$$\sum_{j=p+1}^{\infty} \frac{1}{\rho_{j,\,j+1}} = \infty \tag{13}$$

$\left(\text{если } \rho_{j,\,j+1} = 0, \text{ то мы полагаем } \frac{1}{\rho_{j,\,j+1}} = \infty\right)$.

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся некоторые новые понятия. Пусть $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ — последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю. Назовем *показателем сходимости* λ последовательности $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ точную нижнюю грань чисел μ, для которых сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\lambda}$. Таким образом, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lambda \leqslant 1$. Если $\lambda < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Для вычисления показателя сходимости можно использовать формулу

$$\lambda = \varlimsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln n(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}, \tag{14}$$

где через $n(\varepsilon)$ обозначено число членов последовательности $a_1, \ldots, a_n, \ldots$, больших чем ε *).

Вернемся теперь к рассмотрению совершенных счетно-гильбертовых пространств. Пусть U_m — единичный шар в пространстве Φ_m — пополнении пространства Φ по норме $\sqrt{(\varphi, \varphi)_m}$. Если рассматривать этот шар в пространстве Φ_k, где $k < m$, то он является эллипсоидом. Последовательность длин $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ полуосей этого эллипсоида стремится к нулю, так как эллипсоид U_m компактен в Φ_k в силу совершенства пространства Φ. Обозначим через λ_{km} показатель сходимости последовательности $\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}, \ldots$ Этот показатель сходимости мы будем для краткости называть *показателем сходимости эллипсоида U_m в пространстве Φ_k*.

В основе доказательства сформулированной выше теоремы лежит следующая лемма:

*) Доказательство этого утверждения приведено, например, в книге Б. Я. Левина «Распределение корней целых функций», М. — Л., 1956, стр. 20.

Лемма 2. *Показатель сходимости λ_{km} эллипсоида U_m в пространстве Φ_k удовлетворяет неравенству*

$$\lambda_{km} \leqslant \rho_{km} \equiv \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{\ln \ln N(\varepsilon, U_m, U_k)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}, \tag{15}$$

где ρ_{km} — порядок роста функции $r_{km}(\varepsilon) \equiv N(\varepsilon, U_m, U_k)$. Если $\lambda_{km} < 1$, то имеет место также неравенство

$$\rho_{km} \leqslant 2\lambda_{km}. \tag{16}$$

Доказательство. Докажем сначала, что

$$\ln n(e\varepsilon) \leqslant \ln \ln r_{km}(\varepsilon), \tag{17}$$

где через $n(e\varepsilon)$ обозначено число членов последовательности $a_1, \ldots, a_n, \ldots$, таких, что $a_n \geqslant e\varepsilon$. Не теряя общности, можно считать, что последовательность $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ не возрастает, то есть, что $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots$

Пересечем эллипсоид U_m конечномерным подпространством, натянутым на полуоси $a_1, \ldots, a_n$, $n \equiv n(e\varepsilon)$. Объем сечения равен $T_n \prod_{j=1}^{n} a_j$, где T_n — объем единичного n-мерного шара.

Так как объем n-мерного шара радиуса ε равен $T_n \varepsilon^n$, то для покрытия эллипсоида U_m сдвигами шара εU_k надо не менее чем $\prod_{j=1}^{n(e\varepsilon)} \frac{a_j}{\varepsilon}$ шаров. Отсюда вытекает, что

$$r_{km}(\varepsilon) \geqslant \prod_{j=1}^{n(e\varepsilon)} \frac{a_j}{\varepsilon}. \tag{18}$$

Так как при $1 \leqslant j \leqslant n(e\varepsilon)$ имеем $\frac{a_j}{\varepsilon} > e$, то из неравенства (18) следует, что

$$r_{km}(\varepsilon) \geqslant e^{n(e\varepsilon)}.$$

Поэтому

$$\ln \ln r_{km}(\varepsilon) \geqslant \ln n(e\varepsilon). \tag{19}$$

Отсюда и вытекает, что

$$\rho_{km} = \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{\ln \ln r_{km}(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \geqslant$$

$$\geqslant \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{\ln n(e\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{\ln n(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = \lambda_{km}.$$

Тем самым соотношение $\rho_{km} \geqslant \lambda_{km}$ доказано.

Перейдем к доказательству неравенства (16). Пусть $\lambda_{km} < 1$. Тогда ряд $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ сходится. Обозначим через a его сумму. Если $n \geqslant n\left(\frac{\varepsilon^2}{4a}\right)$, то мы имеем:

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} a_j^2 \leqslant a_{n+1} \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4}. \tag{20}$$

Мы докажем сейчас, что

$$r_{km}(\varepsilon) \leqslant \prod_{k=1}^{p} \frac{2[a_k\sqrt{p} + \varepsilon]}{\varepsilon},$$

где через p обозначено число $n\left(\frac{\varepsilon^2}{4a}\right)$. Для этого рассмотрим сечение $U_{m,p}$ эллипсоида U_m подпространством H_p в Φ_k, натянутым на полуоси $a_1, \ldots, a_p$. Построим в подпространстве H_p кубическую решетку с шагом $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p}}$, выбрав в качестве осей координат оси эллипсоида $U_{m,p}$.

В силу выбора ε_1 любая точка подпространства H_p находится от ближайшей точки решетки на расстоянии, не превышающем $\frac{\varepsilon}{2}$. При этом любая точка эллипсоида $U_{m,p}$ находится на расстоянии, не превышающем $\frac{\varepsilon}{2}$ от одного из узлов решетки, принадлежащих параллелепипеду T_p:

$$-\frac{\varepsilon_1}{2} - a_k \leqslant x_k \leqslant \frac{\varepsilon_1}{2} + a_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant p.$$

Очевидно, что число узлов решетки в этом параллелепипеде не больше чем

$$\prod_{k=1}^{p} 2\left(\frac{a_k}{\varepsilon_1}+1\right)=\prod_{k=1}^{p}\frac{2\left(a_k\sqrt{p}+\varepsilon\right)}{\varepsilon}$$

и, поскольку $a_1 \geqslant a_k$, не больше чем

$$\left[\frac{2}{\varepsilon}\left(a_1\sqrt{p}+1\right)\right]^p.$$

Покажем, что шары в Φ_k радиуса ε с центрами в узлах решетки, принадлежащих параллелепипеду T_p, покрывают эллипсоид U_m. В самом деле, из неравенства (20) вытекает, что каждая точка A эллипсоида U_m находится на расстоянии, не превосходящем числа $\frac{\varepsilon}{2}$ от подпространства H_p. Таким образом, $AB < \frac{\varepsilon}{2}$, где B — точка подпространства H_p. Но по доказанному выше найдется такая точка C решетки, принадлежащая параллелепипеду T_p, что $BC < \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, $AC < \varepsilon$ и точка A принадлежит шару радиуса ε с центром в точке C.

Итак, мы построили $p_1 = \left[\frac{2}{\varepsilon}\left(a_1\sqrt{p}+1\right)\right]^p$ точек $x_1, \ldots, x_{p_1}$, таких, что

$$U_m \subset \bigcup_{j=1}^{p_1}\left(x_j+\varepsilon U_k\right).$$

Поэтому

$$r_{km}(\varepsilon) \equiv N(\varepsilon, U_m, U_k) \leqslant \left[\frac{2}{\varepsilon}\left(a_1\sqrt{p}+1\right)\right]^p.$$

Принимая во внимание, что $p = n\left(\frac{\varepsilon^2}{4a}\right)$, получаем отсюда неравенство

$$\ln\ln r_{km}(\varepsilon) \leqslant$$
$$\leqslant \ln n\left(\frac{\varepsilon^2}{4a}\right)+\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}+\ln\ln\left[2\left(a_1\sqrt{n\left(\frac{\varepsilon^2}{4a}\right)}+1\right)\right]. \quad (21)$$

Так как $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\frac{\varepsilon^2}{4a}}{\ln\varepsilon}=2$, то имеем:

$$\rho_{km}=\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{\ln\ln r_{km}(\varepsilon)}{\ln\frac{1}{\varepsilon}} \leqslant \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{\ln\ln n\left(\frac{\varepsilon^2}{4a}\right)}{\ln\frac{1}{\varepsilon}}=2\lambda_{km}. \quad (22)$$

Тем самым неравенство (16) также доказано.

Нам понадобится еще следующая лемма, связывающая числа ρ_{km}, ρ_{kl} и ρ_{lm} при $k<l<m$.

Лемма 3. *Если $k<l<m$, то имеет место неравенство*

$$\frac{1}{\rho_{km}} \geqslant \frac{1}{\rho_{kl}}+\frac{1}{\rho_{lm}}. \quad (23)$$

Доказательство. Очевидно, что при любых $\delta>0$ и $\varepsilon>0$ имеем:

$$N(\varepsilon, \delta U_l, U_k)=N\left(\frac{\varepsilon}{\delta}, U_l, U_k\right). \quad (24)$$

Кроме того,

$$r_{km}(\varepsilon) \equiv N(\varepsilon, U_m, U_k) \leqslant N(\delta, U_m, U_l)\,N(\varepsilon, \delta U_l, U_k), \quad (25)$$

так как можно сначала покрыть эллипсоид U_m сдвигами шара δU_l, а потом покрыть эти сдвиги сдвигами шара εU_k.

По определению чисел ρ_{kl} и ρ_{lm} при любых $\gamma_1>\rho_{kl}$ и $\gamma_2>\rho_{lm}$ имеем:

$$N(\varepsilon, U_l, U_k) \leqslant e^{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\gamma_1}}$$

и

$$N(\varepsilon, U_m, U_l) \leqslant e^{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\gamma_2}}.$$

Поэтому, в силу неравенств (24) и (25),

$$r_{km}(\varepsilon) \leqslant e^{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\gamma_2}+\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)^{\gamma_1}}.$$

Положим в этом неравенстве $\alpha=\varepsilon^{\frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}}$. Мы получим, что

$$r_{km}(\varepsilon) \leqslant e^{2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}}}. \quad (26)$$

Так как числа $\gamma_1 - \rho_{kl}$ и $\gamma_2 - \rho_{lm}$ могут быть сколь угодно малы, то из неравенства (15) вытекает соотношение

$$\rho_{km} = \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{\ln \ln r_{km}(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \leqslant \frac{\rho_{kl}\rho_{lm}}{\rho_{kl} + \rho_{lm}}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\rho_{km}} \geqslant \frac{1}{\rho_{kl}} + \frac{1}{\rho_{lm}}.$$

Лемма доказана.

Из леммы 3 вытекает, что при любых k и m выполняется соотношение

$$\frac{1}{\rho_{km}} \geqslant \sum_{j=k}^{m-1} \frac{1}{\rho_{j,\,j+1}}. \tag{27}$$

При этом если одно из $\rho_{j,\,j+1}$, $k \leqslant j \leqslant m-1$, равно нулю, то и $\rho_{km} = 0$.

Докажем теперь упомянутую выше теорему, дающую необходимое и достаточное условие ядерности пространства.

Теорема 8. *Для того чтобы счетно-гильбертово совершенное пространство Φ было ядерным, необходимо и достаточно, чтобы для любого p выполнялось равенство*

$$\sum_{j=p+1}^{\infty} \frac{1}{\rho_{j,\,j+1}} = \infty \tag{28}$$

$\left(\textit{где } \frac{1}{\rho_{j,\,j+1}} = \infty, \textit{ если } \rho_{j,\,j+1} = 0\right)$.

Доказательство. Докажем сначала необходимость условия (28). Пусть $\Phi = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ — ядерное пространство. Тогда, не теряя общности, мы можем считать, что все отображения T_j^{j+1} пространств Φ_{j+1} в пространства Φ_j ядерны. Иными словами, можно считать, что каждый единичный шар U_{j+1} является относительно нормы $\|\varphi\|_j$ эллипсоидом со сходящейся суммой длин полуосей. Таким образом, если пространство Φ ядерно, то для любого j показатель сходимости $\lambda_{j,\,j+1}$ эллипсоида U_{j+1} в Φ_j не превосходит единицы, $\lambda_{j,\,j+1} \leqslant 1$. В силу неравенства (16) отсюда следует, что

$\rho_{j,\,j+1} \leqslant 2$ при всех j. Но тогда для любого p имеем:

$$\sum_{j=p}^{\infty} \frac{1}{\rho_{j,\,j+1}} = \infty.$$

Тем самым необходимость условия теоремы доказана.

Докажем теперь, что условие теоремы 8 достаточно для ядерности пространства Φ. Выберем какой-нибудь индекс k. По условию ряд $\sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{\rho_{j,\,j+1}}$ расходится. Поэтому найдется такое m, что $\sum_{j=k}^{m-1} \frac{1}{\rho_{j,\,j+1}} > 1$. По неравенству (27) отсюда следует, что $\frac{1}{\rho_{km}} > 1$. Но, как было показано в лемме 2, $\lambda_{km} < \rho_{km}$ и потому $\lambda_{km} < 1$.

Таким образом, для любого k можно найти такое m, что $\lambda_{km} < 1$, и следовательно, ряд $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$, составленный из полуосей эллипсоида U_m, в пространстве Φ_k сходится. Поэтому отображение T_k^m пространства Φ_m в Φ_k ядерно. Так как для любого k нашлось такое m, что отображение T_k^m ядерно, то пространство Φ ядерно.

Теорема 8 доказана.

Как уже отмечалось, одна и та же топология в Φ может задаваться различными наборами скалярных произведений. Дадим теперь необходимое и достаточное условие ядерности пространства Φ, в формулировку которого не входят скалярные произведения $(\varphi, \psi)_n$.

Будем рассматривать порядок роста функций вида

$$N(\varepsilon, A, U),$$

где A — компактное множество *), а U — окрестность нуля в пространстве Φ. В случае, когда пространство Φ_n конечномерно, функция $N(\varepsilon, A, U)$ растет как $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n$, то есть можно

*) Как часто делается в анализе, мы называем компактными множества с компактными замыканиями.

найти такое C, что

$$N(\varepsilon, A, U) < C\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n.$$

Для гильбертова пространства (и для банаховых пространств) функция $N(\varepsilon, A, U)$ может расти сколь угодно быстро. Это значит, что, какова бы ни была возрастающая функция $f(x)$, можно построить такое компактное множество A в гильбертовом пространстве, что

$$N(\varepsilon, A, U) > f\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Мы увидим сейчас, что *для ядерных пространств* Φ $N(\varepsilon, A, U)$ *является функцией минимального порядка роста.* Иными словами, если A — компактное множество в ядерном пространстве и U — любая окрестность нуля в Φ, то для каждого $\alpha > 0$ найдется такое C, что

$$N(\varepsilon, A, U) < Ce^{x^\alpha}. \tag{29}$$

При этом минимальный порядок роста всех функций $N(\varepsilon, A, U)$ не только необходим, но и достаточен для ядерности пространства Φ. Это утверждение можно сформулировать в виде следующей теоремы:

Теорема 9. *Пусть* $\Phi = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ — *счетно-гильбертово совершенное пространство. Для того чтобы пространство Φ было ядерным, необходимо и достаточно, чтобы для любого компактного множества A в Φ и любой окрестности нуля U выполнялось равенство*

$$\varlimsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln \ln N(\varepsilon, A, U)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = 0. \tag{30}$$

Покажем необходимость условия (30). В самом деле, предположим, что в ядерном пространстве Φ найдутся компактное множество A и шар U_k *), такие, что

$$\varlimsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln \ln N(\varepsilon, A, U_k)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = C > 0. \tag{31}$$

*) Без потери общности можно считать, что шар U_k единичный, так как метрический порядок не меняется при замене множеств A и U подобными множествами.

Так как множество A компактно, то для любого $m > k$ найдется такое b_m, что A лежит в шаре $b_m U_m$. Но тогда из неравенства (31) вытекает, что для любого $m > k$ выполняется соотношение

$$\varlimsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln \ln N(\varepsilon, b_m U_m, U_k)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \geqslant C > 0,$$

и потому $\rho_{km} \geqslant C > 0$.

Итак, если неравенство (31) выполняется для некоторого компактного множества A и некоторого шара U_k, то для всех $m > k$ имеем: $\rho_{km} \geqslant C > 0$. Но тогда, по неравенству (27),

$$\sum_{j=k}^{m-1} \frac{1}{\rho_{j,\,j+1}} \leqslant \frac{1}{\rho_{km}} < \frac{1}{C}$$

для всех $m > k$ и потому ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_{j,\,j+1}}$ сходится, что в силу теоремы 8 противоречит ядерности пространства Φ. Тем самым доказана необходимость условия (30).

Докажем теперь, что это условие достаточно. Для этого достаточно показать следующее: если условие (30) выполнено для всех компактных множеств A и всех окрестностей нуля U, то при любом k найдется такое m, что $\lambda_{km} < 1$.

Проведем доказательство от противного. Предположим, что существует k, при котором для всех $m > k$ выполняется неравенство $\lambda_{km} \geqslant 1$. В силу соотношения (15) тогда и $\rho_{km} \geqslant 1$. Это неравенство в развернутом виде записывается следующим образом:

$$\varlimsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln \ln N(\varepsilon, U_m, U_k)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \geqslant 1. \tag{32}$$

Оно формально не противоречит равенству (30), поскольку эллипсоиды U_m, компактные в пространстве Φ_k, не являются, вообще говоря, компактными множествами в пространстве Φ. Однако мы покажем сейчас, что из выполнения неравенства (32) при всех $m > k$ вытекает существование такого компактного множества F в Φ, что

$$\varlimsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln\ln N(\varepsilon, F, U_k)}{\ln\frac{1}{\varepsilon}} \geqslant 1. \tag{33}$$

А это уже противоречит равенству (30).

Множество F строится следующим образом. Рассмотрим в пространстве Φ множества A_m, задаваемые неравенствами $(\varphi, \varphi)_m \leqslant \frac{1}{m^2}$. Замыкания этих множеств в пространствах Φ_k, $k < m$, являются компактными множествами в Φ_k. Эти замыкания являются не чем иным, как эллипсоидами $\frac{1}{m} U_m$ в пространствах Φ_k.

Мы предположили, что при $m > k$ выполняется неравенство (32). Но тогда, очевидно, имеет место и неравенство

$$\varlimsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln\ln N\left(\varepsilon, \frac{1}{m} U_m, U_k\right)}{\ln\frac{1}{\varepsilon}} \geqslant 1 \tag{34}$$

(значение метрического порядка не меняется при замене множеств подобными им множествами). Неравенство (34) означает, что для любого $m > k$ найдется последовательность чисел $\varepsilon_{m1}, \ldots, \varepsilon_{mn}, \ldots$, такая, что

$$\ln N\left(\varepsilon_{mn}, \frac{1}{m} U_m, U_k\right) \geqslant \frac{1}{\varepsilon_{mn}}.$$

Выберем последовательность целых чисел $n_k, n_{k+1}, \ldots$, так, чтобы $\lim \varepsilon_{m, n_m} = 0$ и обозначим числа ε_{m, n_m} через δ_m. Тогда мы имеем:

$$\ln N\left(\delta_m, \frac{1}{m} U_m, U_k\right) \geqslant \frac{1}{\delta_m}. \tag{35}$$

Выберем теперь в каждом из множеств A_m наибольшее подмножество $F_m = (x_1, \ldots, x_n)$, такое, что $\|x_i - x_j\| \geqslant \frac{2\delta_m}{3}$ при $i \neq j$. Это подмножество конечно в силу компактности замыкания $\overline{A_m}$ в Φ_k. В силу максимальности множества F_m

шары $x_1 + \delta_m U_k, \ldots, x_n + \delta_m U_k$ покрывают множество $\overline{A_m} \equiv \frac{1}{m} U_m$, то есть

$$\frac{1}{m} U_m \subset \bigcup_{j=1}^{n} (x_j + \delta_m U_k).$$

Поэтому $N\left(\delta_m, \frac{1}{m} U_m, U_k\right) < n$.

Так как для различных точек x_i и x_j множества F_m имеем $\|x_i - x_j\|_k \geqslant \frac{2\delta_m}{3}$, то для покрытия этого множества нужно не менее чем n шаров радиуса $\frac{\delta_m}{3}$. Следовательно, $n \leqslant N\left(\frac{\delta_m}{3}, \frac{1}{m} U_m, U_k\right)$. Из полученных неравенств следует, что

$$\ln N\left(\frac{\delta_m}{3}, \frac{1}{m} U_m, U_k\right) \geqslant \ln n \geqslant \ln\left(\delta_m, \frac{1}{m} U_m, U_k\right) \geqslant \frac{1}{\delta_m}.$$

Итак

$$\ln\left(\frac{\delta_m}{3}, \frac{1}{m} U_m, U_k\right) \geqslant \frac{1}{\delta_m}. \tag{36}$$

Обозначим через F объединение всех построенных множеств F_m и точки $\varphi = 0$:

$$F = 0 \cup \bigcup_{m=k+1}^{\infty} F_m.$$

Докажем, что F является компактным множеством. Для этого достаточно показать, что в любой окрестности нуля U содержатся все точки множества F, за исключением конечного числа точек. Пусть окрестность нуля U задается неравенством $\|\varphi\|_m \leqslant \rho$. Выберем l так, что $l \geqslant m$ и $\rho > \frac{1}{l}$. Тогда очевидно, что $\frac{1}{l} U_l \subset U$. Поэтому при $p > l$ имеем:

$$F_p \subset A_p \subset \frac{1}{p} U_p \subset \frac{1}{l} U_l \subset U.$$

Таким образом, вне окрестности U может лежать лишь конечное число точек из F, а именно точки, принадлежащие $F_1, \ldots, F_l$.

Из неравенства (33) вытекает, что

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\ln\ln N\left(\frac{\delta_m}{3}, F, U_k\right)}{\ln\frac{1}{\delta_m}} \geqslant 1$$

и потому

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \frac{\ln\ln N(\varepsilon, F, U_k)}{\ln\frac{1}{\varepsilon}} \geqslant 1.$$

Таким образом, компактное множество F, для которого выполняется неравенство (33), построено. Но существование такого множества противоречит условию теоремы. Поэтому предположение о том, что $\rho_{km} \geqslant 1$ для всех $m > k$ неверно. Следовательно, найдется такое $m > k$, что $\rho_{km} < 1$. Но тогда отображение T_k^m ядерно. Иными словами, для любого k найдется такое m, что отображение T_k^m ядерно, а потому Φ — ядерное пространство.

Отметим следствие из доказанных нами утверждений.

Следствие. *Если для любого компактного множества A в счетно-гильбертовом пространстве Φ и любого шара U_k выполняется неравенство*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \frac{\ln\ln N(\varepsilon, A, U_k)}{\ln\frac{1}{\varepsilon}} \leqslant C, \tag{37}$$

где C не зависит от A и k, то пространство Φ ядерно.

В самом деле, пользуясь соотношением (37), можно для любого k построить такую последовательность $k = k_0 < k_1 < \ldots < k_n < \ldots$, что $\rho_{k_n, k_{n+1}} < 2C$. Тогда при $n > 2C + 1$ имеем:

$$\frac{1}{\rho_{k, k_n}} \geqslant \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\rho_{k_j, k_{j+1}}} > 1$$

и потому $\rho_{k, k_n} < 1$. Но отсюда вытекает ядерность пространства Φ.

8. Функциональная размерность линейных топологических пространств. Пусть Φ — линейное топологическое пространство. Назовем его *функциональной размерностью* число $\operatorname{df}\Phi$, определяемое формулой

$$\operatorname{df}\Phi = \sup_U \inf_V \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \frac{\ln\ln N(\varepsilon, V, U)}{\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}, \tag{38}$$

где U и V пробегают окрестности нуля в Φ. Основанием такого названия служит то, что для многих линейных топологических пространств, состоящих из целых аналитических функций, $\operatorname{df}\Phi$ совпадает с числом переменных, от которых зависят эти функции.

Мы рассмотрим в этом пункте счетно-гильбертовы пространства, имеющие конечную функциональную размерность. Для счетно-гильбертова пространства $\Phi = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Phi_k$ формулу (38) можно переписать в следующем виде:

$$\operatorname{df}\Phi = \sup_k \inf_m \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \frac{\ln\ln r_{km}(\varepsilon)}{\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}, \tag{39}$$

где $r_{km}(\varepsilon) = N(\varepsilon, U_m, U_k)$. Иными словами, $\operatorname{df}\Phi = \sup_k \sigma_k$, где $\sigma_k = \inf_m \sigma_{km}$, а

$$\sigma_{km} = \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \frac{\ln\ln r_{km}(\varepsilon)}{\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}. \tag{40}$$

Из этой формулы и теоремы 8 п. 7 вытекает, что *все счетно-гильбертовы пространства конечной функциональной размерности ядерны.*

Можно показать, что для счетно-гильбертовых пространств справедлива формула

$$\operatorname{df}\Phi = \sup_{U, A} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \frac{\ln\ln N(\varepsilon, A, U)}{\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}, \tag{41}$$

где U пробегает все окрестности нуля в Φ, а A — все компактные множества в Φ. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 9 из п. 7 и мы не будем на нем останавливаться.

Мы выведем в этом пункте другую формулу для $\operatorname{df}\Phi$, выражающую $\operatorname{df}\Phi$ через длины полуосей эллипсоидов U_m в пространствах Φ_k. Нам понадобится при этом следующее определение. Пусть $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ — последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю. Назовем *типом сходимости* этой последовательности показатель сходимости для последовательности $\ln\frac{1}{a_1}, \ldots, \ln\frac{1}{a_n}, \ldots$ Иными словами, тип сходимости τ равен точной нижней грани чисел μ, для которых сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^{-\mu}\frac{1}{a_n}$. Очевидно, что *для конечности типа сходимости последовательности $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ необходимо, чтобы показатель сходимости последовательности $\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}, \ldots$ был равен нулю.*

Если $n(\varepsilon)$ — число членов последовательности $a_1, \ldots, a_n, \ldots$, больших чем ε, то имеет место формула

$$\tau = \varlimsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln n(\varepsilon)}{\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}. \qquad (42)$$

В самом деле, применим к последовательности $\ln\frac{1}{a_1}, \ldots, \ln\frac{1}{a_n}, \ldots$ формулу (14) из п. 7. В силу этой формулы показатель сходимости λ для $\ln\frac{1}{a_1}, \ldots, \ln\frac{1}{a_n}, \ldots$ имеет вид

$$\varlimsup_{\delta \to 0} \frac{\ln m(\delta)}{\ln\frac{1}{\delta}},$$

где $m(\delta)$ — число членов последовательности $\ln\frac{1}{a_1}, \ldots, \ln\frac{1}{a_n}, \ldots$, больших чем δ. Но очевидно, что $m(\delta) = n\left(e^{-\frac{1}{\delta}}\right)$. Поэтому

$$\tau = \varlimsup_{\delta \to 0} \frac{\ln n\left(e^{-\frac{1}{\delta}}\right)}{\ln\frac{1}{\delta}}.$$

Подставляя в это равенство вместо $e^{-\frac{1}{\delta}}$ число ε, мы и придем к формуле (42).

Рассмотрим теперь счетно-гильбертово пространство Φ и обозначим через τ_{km} тип сходимости последовательности $a_1, \ldots, a_n, \ldots$, составленной из длин полуосей эллипсоида U_m в пространстве Φ_k. Таким образом,

$$\tau_{km} = \varlimsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln n(\varepsilon)}{\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}, \qquad (43)$$

где $n(\varepsilon)$ — число полуосей эллипсоида U_m в пространстве Φ_k, длина которых больше чем ε.

Мы докажем сейчас следующую теорему.

Теорема 10. *Для счетно-гильбертовых пространств имеет место формула*

$$\operatorname{df}\Phi = \tau_0 + 1, \qquad (44)$$

где положено $\tau_0 = \sup_k \tau_k$, $\tau_k = \inf_m \tau_{km}$.

Доказательство. Покажем сначала, что $\sup_k \tau_k + 1 \leqslant \operatorname{df}\Phi$. Выберем любое значение k. Так как $\sigma_k = \inf_m \sigma_{km}$, то для любого $\alpha > 0$ найдется такое m, что $\sigma_{km} \leqslant \operatorname{df}\Phi + \alpha$. Обозначим через $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ длины полуосей эллипсоида U_m в пространстве Φ_n. Зададим $\varepsilon > 0$. Сравнивая объем эллипсоида, натянутого на оси $a_1, \ldots, a_{n(\sqrt{\varepsilon})}$ с объемом $n(\sqrt{\varepsilon})$-мерного шара радиуса ε, получаем, что

$$\prod_{j=1}^{n(\sqrt{\varepsilon})} \left(\frac{a_j}{\varepsilon}\right) \leqslant r_{km}(\varepsilon) \equiv N(\varepsilon, U_m, U_k)$$

(см. вывод формулы (17) из п. 7).

Так как при $1 \leqslant j \leqslant n(\sqrt{\varepsilon})$ имеем $a_k > \sqrt{\varepsilon}$, то из этого неравенства следует, что

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2} n(\sqrt{\varepsilon})} \leqslant r_{km}(\varepsilon),$$

и потому

$$\ln\frac{1}{2} + \ln n(\sqrt{\varepsilon}) + \ln\ln\frac{1}{\varepsilon} \leqslant \ln\ln r_{km}(\varepsilon).$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{\ln n(\sqrt{\varepsilon})}{\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}+1\leqslant\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{\ln\ln r_{km}(\varepsilon)}{\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}=\sigma_{km}.$$

Поскольку

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\ln\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}{\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}=1,$$

то мы получаем, что

$$\tau_{km}+1=\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{\ln n(\sqrt{\varepsilon})}{\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}+1\leqslant\sigma_{km}\leqslant\operatorname{df}\Phi+\alpha.$$

Отсюда следует, что $\tau_k+1=\inf\limits_m\tau_{km}+1\leqslant\operatorname{df}\Phi+\alpha$. Но тогда $\sup\limits_k\tau_k+1\leqslant\operatorname{df}\Phi+\alpha$. В силу произвольности $\alpha>0$ мы получаем, что $\sup\limits_k\tau_k+1\leqslant\operatorname{df}\Phi$.

Итак, неравенство $\sup\limits_k\tau_k+1\leqslant\operatorname{df}\Phi$ доказано. Докажем теперь обратное неравенство. Пусть $\sup\limits_k\tau_k$ имеет конечное значение. Тогда для любого k найдется такое m, что τ_{km} конечно, и потому показатель сходимости последовательности $\frac{1}{a_1},\ldots,\frac{1}{a_n},\ldots$ равен нулю (через $a_1,\ldots,a_n,\ldots$ мы, как и выше, обозначаем длины полуосей эллипсоида U_m в Φ_k). Поэтому ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_j$ сходится. Не теряя общности, мы можем считать, что ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_j$ сходится при любых k и m. Обозначим через a сумму этого ряда. В п. 7 было показано, что

$$\ln\ln r_{km}(\varepsilon)\leqslant$$
$$\leqslant\ln n\left(\frac{\varepsilon^2}{4a}\right)+\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}+\ln\ln\left[2\left(a_1\sqrt{n\left(\frac{\varepsilon^2}{4a}\right)}+1\right)\right]$$

(см. неравенство (21)). Из этого неравенства вытекает, что

$$\sigma_{km}=\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{\ln\ln r_{km}(\varepsilon)}{\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}\leqslant$$
$$\leqslant 1+\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{\ln n\left(\frac{\varepsilon^2}{4a}\right)+\ln\ln\left[2\left(a_1\sqrt{n\left(\frac{\varepsilon^2}{4a}\right)}+1\right)\right]}{\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}. \qquad (45)$$

Зададим любое значение k. Так как $\tau_0=\sup\limits_k\tau_k$ и $\tau_k=\inf\limits_m\tau_{km}$, то для любого $\alpha>0$ найдется такое m, что

$$\tau_{km}=\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{\ln n(\varepsilon)}{\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}<\tau_0+\alpha.$$

Но тогда и

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{\ln n\left(\frac{\varepsilon^2}{4a}\right)}{\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}<\tau_0+\alpha.$$

Поэтому из неравенства (45) следует, что $\sigma_{km}<1+\tau_0+\alpha$. В силу произвольности α мы получаем, что $\sigma_k=\inf\limits_m\sigma_{km}<\tau_0+1$. Но тогда $\operatorname{df}\Phi=\sup\limits_k\sigma_k\leqslant\tau_0+1$. Тем самым доказано, что $\operatorname{df}\Phi\leqslant\tau_0+1$. Поскольку ранее мы доказали, что $\operatorname{df}\Phi\geqslant\tau_0+1$, то $\operatorname{df}\Phi=\tau_0+1$. Теорема доказана.

Приведем некоторые примеры ядерных пространств, имеющих конечную функциональную размерность.

Пусть $\mathfrak{Z}$ — пространство всех целых аналитических функций от s переменных. Введем в пространство $\mathfrak{Z}$ топологию при помощи счетного набора скалярных произведений

$$(\varphi,\psi)_n=\int\limits_{\Omega_n}\varphi(z_1,\ldots,z_s)\overline{\psi(z_1,\ldots,z_s)}\,dx_1\ldots dx_s\,dy_1\ldots dy_s,$$

где $z_k=x_k+iy_k$, а Ω_n — область, задаваемая неравенствами

$$0\leqslant|z_k|\leqslant n,\qquad 1\leqslant k\leqslant s.$$

Пространство $\mathfrak{Z}$ является пространством конечной функциональной размерности. Чтобы доказать это утверждение, рассмотрим пространства $\mathfrak{Z}_n$, получаемые при пополнении пространства $\mathfrak{Z}$ относительно норм $\|\varphi\|_n=\sqrt{(\varphi, \varphi)_n}$. Одночлены

$$z_1^{p_1}\ldots z_s^{p_s}, \quad 0\leqslant p_k<\infty, \quad 1\leqslant k\leqslant s,$$

принадлежат всем пространствам $\mathfrak{Z}_n$. Очевидно, что если наборы $p_1, \ldots, p_s$ и $q_1, \ldots, q_s$ не совпадают, то функции $z_1^{p_1}\ldots z_s^{p_s}$ и $z_1^{q_1}\ldots z_s^{q_s}$ ортогональны относительно всех скалярных произведений $(\varphi, \psi)_n$. При этом норма одночлена $z_1^{p_1}\ldots z_s^{p_s}$ относительно скалярного произведения $(\varphi, \psi)_n$ равна

$$\frac{n^{p_1+\ldots+p_s+s}\sqrt{\pi^{p_1+\ldots+p_s}}}{\sqrt{(p_1+1)\ldots(p_s+1)}}.$$

Отсюда вытекает, что при любых k и m, $k<m$, длины $a^{(k, m)}_{p_1, \ldots, p_s}$ полуосей эллипсоида U_m в Φ_k даются формулами

$$a^{(k, m)}_{p_1, \ldots, p_s}=\left(\frac{k}{m}\right)^{p_1+\ldots+p_s+s}.$$

Нетрудно видеть, что показатель сходимости множества чисел $a^{(k, m)}_{p_1, \ldots, p_s}$ при любых k и m равен нулю, а тип сходимости τ_{km} этого множества равен s. Поэтому $\tau_0=\sup\limits_k \inf\limits_m \tau_{km}=s$. Но тогда, по теореме 10, имеем $\operatorname{df}\Phi=s+1$.

Другим пространством конечной функциональной размерности является пространство $\mathfrak{A}$ всех целых аналитических функций $\varphi(z_1, \ldots, z_s)$, имеющих по каждому переменному период 2π. Скалярные произведения задаются в этом пространстве равенствами

$$(\varphi, \psi)_n=\int\limits_{P_n}\varphi(z_1, \ldots, z_s)\overline{\psi(z_1, \ldots, z_s)}\,dx_1\ldots dx_s\,dy_1\ldots dy_s,$$

где через P_n обозначена область $0\leqslant x_k\leqslant 2\pi$, $-n\leqslant y_k\leqslant n$, $1\leqslant k\leqslant s$.

Функции

$$e^{i(p_1z_1+\ldots+p_sz_s)},$$

где $p_1, \ldots, p_s$ — любые целые числа, ортогональны относительно всех скалярных произведений $(\varphi, \psi)_n$. Рассуждая так же, как и выше, убеждаемся, что для пространства $\mathfrak{A}$ имеем $\operatorname{df}\mathfrak{A}=s+1$.

Было бы весьма интересно рассмотреть в общем случае связь между функциональной размерностью пространства и числом переменных, от которых зависят входящие в него функции.

Отметим еще следующий результат. Пусть счетно-гильбертово пространство Φ является топологизированным тензорным произведением *) счетно-гильбертовых пространств $\Phi^{(1)}$ и $\Phi^{(2)}$, имеющих конечную функциональную размерность. Тогда функциональная размерность пространства Φ конечна, причем имеет место формула

$$\operatorname{df}\Phi=\operatorname{df}\Phi^{(1)}+\operatorname{df}\Phi^{(2)}.$$

§ 4. ОСНАЩЕННЫЕ ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ САМОСОПРЯЖЕННЫХ И УНИТАРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

1. Обобщенные собственные векторы. Одним из основных результатов линейной алгебры является теорема о существовании полной системы собственных векторов у любого самосопряженного линейного оператора A в n-мерном евклидовом пространстве R_n. Эта теорема гласит, что если A — самосопряженный оператор в n-мерном евклидовом пространстве R_n, то в R_n найдется ортогональный нормированный базис $e_1, \ldots, e_n$, каждый вектор которого является собственным вектором оператора $A: Ae_k=\lambda_k e_k$, где λ_k — вещественное число. Разлагая любой вектор f из пространства R_n по векторам $e_1, \ldots, e_n$: $f=a_1e_1+\ldots+a_ne_n$, $a_k=(f, e_k)$, мы можем записать оператор A следующим образом:

$$Af=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(f, e_k)\,e_k. \tag{1}$$

*) Относительно вопросов, связанных с тензорными произведениями линейных топологических пространств, см. книгу Гротендика [7].

рассмотрим пространства $\mathfrak{Z}_n$, получаемые при пополнении пространства $\mathfrak{Z}$ относительно норм $\|\varphi\|_n=\sqrt{(\varphi, \varphi)_n}$. Одночлены

$$z_1^{p_1}\ldots z_s^{p_s}, \quad 0\leqslant p_k<\infty, \quad 1\leqslant k\leqslant s,$$

принадлежат всем пространствам $\mathfrak{Z}_n$. Очевидно, что если наборы $p_1, \ldots, p_s$ и $q_1, \ldots, q_s$ не совпадают, то функции $z_1^{p_1}\ldots z_s^{p_s}$ и $z_1^{q_1}\ldots z_s^{q_s}$ ортогональны относительно всех скалярных произведений $(\varphi, \psi)_n$. При этом норма одночлена $z_1^{p_1}\ldots z_s^{p_s}$ относительно скалярного произведения $(\varphi, \psi)_n$ равна

$$\frac{n^{p_1+\ldots+p_s+s}\sqrt{\pi^{p_1+\ldots+p_s}}}{\sqrt{(p_1+1)\ldots(p_s+1)}}.$$

Отсюда вытекает, что при любых k и m, $k<m$, длины $a^{(k, m)}_{p_1, \ldots, p_s}$ полуосей эллипсоида U_m в Φ_k даются формулами

$$a^{(k, m)}_{p_1, \ldots, p_s}=\left(\frac{k}{m}\right)^{p_1+\ldots+p_s+s}.$$

Нетрудно видеть, что показатель сходимости множества чисел $a^{(k, m)}_{p_1, \ldots, p_s}$ при любых k и m равен нулю, а тип сходимости τ_{km} этого множества равен s. Поэтому $\tau_0=\sup\limits_k\inf\limits_m \tau_{km}=s$. Но тогда, по теореме 10, имеем $\operatorname{df}\Phi=s+1$.

Другим пространством конечной функциональной размерности является пространство $\mathfrak{A}$ всех целых аналитических функций $\varphi(z_1, \ldots, z_s)$, имеющих по каждому переменному период 2π. Скалярные произведения задаются в этом пространстве равенствами

$$(\varphi, \psi)_n=\int\limits_{P_n}\varphi(z_1, \ldots, z_s)\overline{\psi(z_1, \ldots, z_s)}\,dx_1\ldots dx_s\,dy_1\ldots dy_s,$$

где через P_n обозначена область $0\leqslant x_k\leqslant 2\pi$, $-n\leqslant y_k\leqslant n$, $1\leqslant k\leqslant s$.

Функции

$$e^{i(p_1z_1+\ldots+p_sz_s)},$$

где $p_1, \ldots, p_s$ — любые целые числа, ортогональны относительно всех скалярных произведений $(\varphi, \psi)_n$. Рассуждая так же, как и выше, убеждаемся, что для пространства $\mathfrak{A}$ имеем $\operatorname{df}\mathfrak{A}=s+1$.

Было бы весьма интересно рассмотреть в общем случае связь между функциональной размерностью пространства и числом переменных, от которых зависят входящие в него функции.

Отметим еще следующий результат. Пусть счетно-гильбертово пространство Φ является топологизированным тензорным произведением *) счетно-гильбертовых пространств $\Phi^{(1)}$ и $\Phi^{(2)}$, имеющих конечную функциональную размерность. Тогда функциональная размерность пространства Φ конечна, причем имеет место формула

$$\operatorname{df}\Phi=\operatorname{df}\Phi^{(1)}+\operatorname{df}\Phi^{(2)}.$$

§ 4. ОСНАЩЕННЫЕ ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ САМОСОПРЯЖЕННЫХ И УНИТАРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

1. Обобщенные собственные векторы. Одним из основных результатов линейной алгебры является теорема о существовании полной системы собственных векторов у любого самосопряженного линейного оператора A в n-мерном евклидовом пространстве R_n. Эта теорема гласит, что если A — самосопряженный оператор в n-мерном евклидовом пространстве R_n, то в R_n найдется ортогональный нормированный базис $e_1, \ldots, e_n$, каждый вектор которого является собственным вектором оператора $A: Ae_k=\lambda_ke_k$, где λ_k — вещественное число. Разлагая любой вектор f из пространства R_n по векторам $e_1, \ldots, e_n$: $f=a_1e_1+\ldots+a_ne_n$, $a_k=(f, e_k)$, мы можем записать оператор A следующим образом:

$$Af=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(f, e_k)e_k. \tag{1}$$

*) Относительно вопросов, связанных с тензорными произведениями линейных топологических пространств, см. книгу Гротендика [7].

Аналогичное утверждение справедливо и для унитарных операторов с той лишь разницей, что λ_k являются не вещественными числами, а комплексными, модуль которых равен единице.

Положение дел осложняется при переходе от конечномерного случая к бесконечномерному. Например, в гильбертовом пространстве существуют унитарные операторы (т. е. такие операторы U, что $\|Uf\| = \|f\| = \|U^{-1}f\|$ для любого вектора f из H), не имеющие ни одного собственного вектора, отличного от нуля.

Так называемая абстрактная теорема о спектральном разложении (см. добавление к этому параграфу) дает лишь некоторый суррогат разложения по собственным векторам. Она позволяет для любого $\varepsilon > 0$ и любого λ, $|\lambda| = 1$, найти такие векторы f_ε, $\|f_\varepsilon\| = 1$, что

$$\|U_h f_\varepsilon - \lambda f\| \leqslant \varepsilon.$$

Примером такого оператора может служить оператор сдвига U_h в гильбертовом пространстве L^2 функций на прямой, имеющих интегрируемый квадрат модуля. В самом деле, предположим, что функция $f(x)$ из пространства L^2 такова, что

$$U_h f(x) \equiv f(x-h) = af(x). \tag{2}$$

Так как преобразованием Фурье функции $f(x-h)$ является $e^{i\lambda h}F(\lambda)$, где $F(\lambda) = \int f(x)\, e^{i\lambda x}\, dx$ — преобразование Фурье для $f(x)$, то из равенства (2) следует, что

$$e^{i\lambda h}\, F(\lambda) = aF(\lambda).$$

Но это может иметь место лишь в случае, когда функция $F(\lambda)$ равна нулю во всех точках, для которых $e^{i\lambda x} \neq a$, т. е. отлична от нуля лишь в счетном множестве точек. Поскольку $F(\lambda)$ имеет интегрируемый квадрат модуля, мы получаем, что $F(\lambda) = 0$. Таким образом, оператор U_h не имеет собственных векторов в пространстве L^2. Тем не менее легко найти функции, не принадлежащие пространству L^2 и являющиеся собственными функциями оператора сдвига. Например, $U_h e^{-i\lambda x} = e^{i\lambda h} e^{-i\lambda x}$, т. е. $e^{-i\lambda x}$ является собственной функцией оператора U_h, соответствующей собственному значению $e^{i\lambda h}$. При этом, как известно, любая функция $f(x)$ из L^2 может быть разложена по функциям $e^{-i\lambda x}$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int F(\lambda)\, e^{-i\lambda x}\, d\lambda,$$

где

$$F(\lambda) = \int f(x)\, e^{i\lambda x}\, dx,$$

и действие оператора сдвига записывается равенством

$$U_h f(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\lambda h} F(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\lambda h} \left[\int f(\xi)\, e^{i\lambda\xi}\, d\xi \right] e^{i\lambda x}\, d\lambda,$$

аналогичным равенству (1). Система собственных функций $e^{-i\lambda x}$ полна в том смысле, что для любой функции $f(x)$ из L^2 имеет место равенство Планшереля

$$\int |f(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi} \int |F(\lambda)|^2\, d\lambda. \tag{3}$$

Мы видим, таким образом, что хотя оператор U_h не имеет собственных функций, лежащих в самом пространстве L^2, он обладает полной системой собственных функций, лежащих вне этого пространства. Аналогичное положение возникает и для других операторов [например для оператора умножения на функцию, «собственными функциями» которого являются функции вида $\delta(x-h)$]. Истолковать эти собственные функции, привлекая лишь понятия, связанные с самим гильбертовым пространством L^2, оказывается невозможным. Мы покажем, однако, что такое истолкование становится возможным, если наряду с самим гильбертовым пространством L^2 рассматривать некоторое его расширение Φ'.

Как правило, гильбертовы пространства возникают в анализе при рассмотрении линейного пространства Φ, в котором задан положительно определенный эрмитов билинейный функционал (φ, ψ). Принимая (φ, ψ) за скалярное произведение в Φ и пополняя Φ по этому скалярному произведению, и получают соответствующее гильбертово пространство H. После этого обычно забывают о пространстве Φ, пополнение которого привело к гильбертову пространству H, и изучают лишь само пространство H. Однако именно одновременное рассмотрение пространства Φ и полученного его пополнением пространства H позволяет истолковать «собственные функции», лежащие вне гильбертова пространства H.

Например, функции $e^{-i\lambda x}$ можно рассматривать как линейные функционалы в линейном пространстве S бесконечно дифференцируемых функций, быстро убывающих на вещественной оси вместе с производными любого порядка. Пространство L^2 получается из S путем пополнения относительно скалярного произведения

$$(\varphi, \psi) = \int \varphi(x)\, \overline{\psi(x)}\, dx.$$

Таким образом, собственные векторы оператора U_h, не принадлежащие пространству L^2, оказываются не чем иным, как линейными функционалами в линейном пространстве S, вложенном в пространство L^2. Точно так же мы можем истолковать собственные функции $\delta(x-h)$ оператора умножения на функцию как линейные функционалы в пространстве S.

Введем теперь следующее определение.

Пусть A — линейный оператор в линейном топологическом пространстве Φ. *Обобщенным собственным вектором для оператора A, соответствующим собственному значению* λ, называется такой линейный функционал F в пространстве Φ, что

$$F(A\varphi)=\lambda F(\varphi) \tag{4}$$

для всех элементов φ из пространства Φ *).

Можно сказать теперь, что функции $e^{-i\lambda x}$ являются обобщенными собственными векторами для оператора сдвига, рассматриваемого в пространстве S. Преобразование Фурье $F(\lambda)$ функции $\varphi(x)$ является не чем иным, как значением функционала $(e^{-i\lambda x}, \varphi(x))$ для функции $\varphi(x)$. Равенство Планшереля (3) показывает, что множество обобщенных собственных функций $e^{-i\lambda x}$ полно, т. е. что из равенства $F(\lambda)=0$ вытекает равенство $\varphi(x)=0$.

В п. 5 мы докажем существование полной системы обобщенных собственных векторов для любых унитарных и самосопряженных операторов, заданных в ядерных пространствах. Мы используем при этом понятие оснащенного гильбертова пространства **), возникающее при рассмотрении ядерного пространства Φ, в котором задано скалярное произведение (φ, ψ).

2. Оснащенные гильбертовы пространства. Пусть в счетно-гильбертовом ядерном пространстве Φ, определяемом скалярными произведениями $(\varphi, \psi)_n$, задано еще одно

*) Мы обозначаем здесь значение функционала F для элемента φ через $F(\varphi)$, а не через (F, φ), чтобы предотвратить возможное смешение со скалярным произведением.

**) Понятие оснащенного гильбертова пространства оказывается полезным не только при изучении спектральной теории линейных операторов, но и в ряде других вопросов функционального анализа (например, в теории квазиинвариантной меры; см. гл. IV). Мы полагаем, что это понятие является не менее (если даже не более) важным, нежели понятие гильбертова пространства.

скалярное произведение, т. е. непрерывный по каждому переменному φ и ψ положительно определенный невырожденный эрмитов функционал (φ, ψ). Таким образом, каждым двум элементам φ и ψ из Φ сопоставлено комплексное число (φ, ψ), такое, что

1) $(\varphi_1+\varphi_2, \psi)=(\varphi_1, \psi)+(\varphi_2, \psi)$,
2) $(\alpha\varphi, \psi)=\alpha(\varphi, \psi)$,
3) $(\varphi, \psi)=\overline{(\psi, \varphi)}$,
4) $(\varphi, \varphi)\geqslant 0$, причем $(\varphi, \varphi)=0$ лишь в случае, когда $\varphi=0$,
5) если $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n=\varphi$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(\varphi_n, \psi)=(\varphi, \psi)$.

Из условий 3) и 5) вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty}(\psi, \varphi_n)=(\psi, \varphi)$.

Поскольку пространство Φ счетно-гильбертово, то из условия 5) вытекает, что скалярное произведение (φ, ψ) непрерывно относительно некоторой нормы $\|\varphi\|_m=\sqrt{(\varphi, \varphi)_m}$ в пространстве Φ, т. е. найдутся такие числа M и m, что

$$|(\varphi, \psi)|\leqslant M\|\varphi\|_m\|\psi\|_m. \tag{5}$$

Построим теперь гильбертово пространство H, пополнив пространство Φ относительно нормы $\|\varphi\|=\sqrt{(\varphi_n, \varphi)}$. Элементы пространства Φ образуют всюду плотное множество в гильбертовом пространстве H, чем определяется непрерывный *) линейный оператор T, отображающий пространство Φ в H. Мы будем в дальнейшем часто отождествлять пространство Φ с соответствующим подмножеством гильбертова пространства H.

Наряду с пространствами Φ и H мы будем рассматривать пространство Φ', сопряженное с пространством Φ. Оператору T сопряжен оператор T', отображающий пространство H', сопряженное с H, в пространство Φ' и определяемый равенством

$$(T'h')(\varphi)=h'(T\varphi)$$

для любых элементов h' из H' и φ из Φ. Поскольку каждый линейный функционал h' в гильбертовом пространстве H

*) Непрерывность оператора T вытекает из непрерывности скалярного произведения относительно топологии пространства Φ.

можно записать в виде

$$h'(h) = (h, h_1),$$

где h_1 — некоторый элемент пространства H, то T' можно рассматривать как отображение пространства H в Φ'. Следует иметь в виду, однако, что отображение $h' \to h_1$ антилинейно, так как если $h_1' \to h_1$, $h'' \to h_2$, то

$$(\alpha h' + \beta h'')(h) = \alpha h'(h) + \beta h''(h) = (h, \bar{\alpha} h_1 + \bar{\beta} h_2)$$

и потому $\alpha h' + \beta h'' \to \bar{\alpha} h_1 + \bar{\beta} h_2$. Поэтому, если рассматривать T' как отображение пространства H в Φ', то T' является антилинейным оператором. Антилинейным является и оператор $T'T$, отображающий пространство Φ в Φ'. Если рассматривать лишь вещественные пространства, то оба отображения T' и $T'T$ линейны.

Назовем *оснащенным гильбертовым пространством* тройку пространств Φ, H, Φ', обладающих указанными выше свойствами (то есть ядерное счетно-гильбертово пространство Φ, в котором задано невырожденное скалярное произведение (φ, ψ), пополнение H пространства Φ по этому скалярному произведению и пространство Φ', сопряженное с Φ). Мы показали, что для оснащенного гильбертова пространства существует непрерывный линейный оператор T, взаимно-однозначно отображающий пространство Φ на всюду плотное подмножество в H и сопряженный с ним (антилинейный) оператор T', взаимно-однозначно отображающий пространство H на всюду плотное подмножество в Φ'. Поэтому мы будем обозначать оснащенное гильбертово пространство $\Phi \subset H \subset \Phi'$.

Заметим теперь, что оператор T непрерывен относительно одной из норм $\|\varphi\|_m$, задающих топологию в пространстве Φ. В самом деле, в силу неравенства (5), мы имеем

$$\|T\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)} \leqslant \sqrt{M}\, \|\varphi\|_m.$$

Поэтому можно распространить оператор T на все пространства Φ_n, $n \geqslant m$, получаемые пополнением пространства Φ по нормам $\|\varphi\|_n = \sqrt{(\varphi, \varphi)_n}$. Обозначим соответствующие операторы через T_n. Из теоремы 5 § 3 вытекает, что найдется значение n, для которого оператор T_n, отображающий гильбертово пространство Φ_n в H, является ядерным. Ядерным является и оператор T_n', отображающий H в Φ_n'.

Отметим, что в ряде случаев вместо оснащенного гильбертова пространства $\Phi \subset H \subset \Phi'$ достаточно рассматривать тройку $G \subset H \subset G'$ гильбертовых пространств, связанных ядерными отображениями T и T'. Однако лишь для оснащенных гильбертовых пространств *любое* непрерывное скалярное произведение (φ, ψ) приводит к таким тройкам пространств.

Укажем теперь вид оператора T. Для этого применим к оператору T_n данное в п. 3, § 2 описание ядерных операторов. Мы получим при этом следующий результат. Существуют такие ортогональные нормированные базисы $\{h_k\}$ и $\{\varphi_k\}$ в пространствах H и Φ_n, что для всех элементов φ из Φ_n имеет место равенство

$$T_n\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\varphi, \varphi_k)_n h_k, \tag{6}$$

где $\lambda_k \geqslant 0$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ сходится.

Чтобы перейти от оператора T_n к оператору T, заметим, что $T_n\varphi = T\varphi$, если элемент φ принадлежит пространству Φ, и потому для элементов φ из Φ формула (6) принимает вид

$$T\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\varphi, \varphi_k)_n h_k.$$

Выражение $(\varphi, \varphi_k)_n$ при фиксированном k является линейным функционалом в пространстве Φ_n. Обозначим этот функционал через F_k: $F_k(\varphi) = (\varphi, \varphi_k)_n$. Так как соответствие $F \longleftrightarrow \psi$ между элементами пространства Φ_n и некоторыми линейными функционалами в этом пространстве, устанавливаемое формулой $F(\varphi) = (\varphi, \psi)_n$, изометрично, то функционалы F_k образуют ортогональный нормированный базис в пространстве Φ_n'. Мы доказали, таким образом, следующий результат.

Пусть $\Phi \subset H \subset \Phi'$ — оснащенное гильбертово пространство и T — оператор естественного вложения Φ в H. Тогда найдутся такое n и такие ортогональные нормированные базисы $\{h_k\}$ и $\{F_k\}$ в пространствах H и Φ_n', что для всех элементов φ из Φ имеет место равенство

$$T\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k F_k(\varphi)\, h_k, \tag{7}$$

где $\lambda_k \geqslant 0$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ сходится.

Заметим, что с оснащенным гильбертовым пространством можно связать бесконечную в обе стороны убывающую цепочку гильбертовых пространств

$$\ldots \supset \Phi_{-k} \supset \ldots \supset \Phi_0 \supset \ldots \supset \Phi_k \supset \ldots, \tag{8}$$

такую, что при любом k, $-\infty < k < \infty$, существует ядерное отображение T_k^{k+1} пространства Φ_{k+1} на всюду плотное подмножество пространства Φ_k.

Чтобы построить такую цепочку, примем во внимание, что ядерное пространство Φ является пересечением убывающей цепочки гильбертовых пространств: $\Phi = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Phi_k$,

$$\Phi_1 \supset \Phi_2 \supset \ldots \supset \Phi_k \supset \ldots, \tag{9}$$

причем для любого k естественное отображение T_k^{k+1} является ядерным. Пространство же Φ' является объединением возрастающей цепочки гильбертовых пространств: $\Phi' = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Phi_{-k}$,

$$\Phi_{-1} \subset \Phi_{-2} \subset \ldots \subset \Phi_{-k} \subset \ldots, \tag{10}$$

где через Φ_{-k} обозначено пространство Φ_k', сопряженное с Φ_k. Обозначим через T_k^{k+1} при $k < -1$ оператор, сопряженный с оператором T_{-k-1}^{-k}. Этот оператор также является ядерным. Для того чтобы связать цепочки (9) и (10), заметим следующее. Мы видели выше, что найдется значение n, для которого оператор T_n, отображающий пространство Φ_n в H, является ядерным. Тогда и отображение T_{-n} пространства H в Φ_{-n} ядерно (это отображение, как указывалось выше, антилинейно). Не теряя общности, можно считать, что $n = 1$. Обозначим теперь H через Φ_0, а отображения T_1 и T_{-1} — через T_0^1 и T_{-1}^0 соответственно. Мы получим при этом искомую последовательность пространств (8).

Цепочки подобного вида возникают при рассмотрении симметрических положительно определенных дифференциальных операторов. Пусть A — такой оператор. Сопоставим этому оператору набор скалярных произведений в пространстве K бесконечно дифференцируемых финитных функций

$$(\varphi, \psi)_n = \sum_{k=0}^{n} \int A^k \varphi(x) \overline{\psi(x)}\, dx, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{11}$$

Очевидно, что для любого элемента φ из пространства K выполняется неравенство $(\varphi, \varphi)_{n+1} \geqslant (\varphi, \varphi)_n$. Поэтому, пополняя пространство K относительно этих скалярных произведений, мы получим убывающую цепочку гильбертовых пространств

$$\Phi_0 \supset \Phi_1 \supset \ldots \supset \Phi_n \supset \ldots$$

Обозначим пересечение этих пространств через Φ. Очевидно, что оператор A переводит пространство Φ в себя. В самом деле, в силу симметричности оператора A мы имеем

$$(A\varphi, A\varphi)_n = \sum_{k=0}^{n} \int A^{k+1} \varphi(x) \overline{A\varphi(x)}\, dx = \sum_{k=0}^{n} \int A^{k+2} \varphi(x) \overline{\varphi(x)}\, dx \geqslant (\varphi, \varphi)_{n+2}.$$

Следовательно, оператор A непрерывно отображает гильбертово пространство Φ_{n+2} в Φ_n, а потому переводит пространство Φ в себя.

Рассмотрим теперь пространства Φ_{-n}, сопряженные пространствам Φ_n. Эти пространства образуют возрастающую цепочку

$$\Phi_0 \subset \Phi_{-1} \subset \ldots \subset \Phi_{-n} \subset \ldots$$

Мы отождествили пространство Φ_0 с самим собой, сопоставив функции $\psi(x)$ из Φ_0 функционал F_ψ, такой, что

$$F_\psi(\varphi) = \int \varphi(x) \overline{\psi(x)}\, dx.$$

Итак, нами получена цепочка пространств вида

$$\Phi' \supset \ldots \supset \Phi_{-n} \supset \ldots \supset \Phi_0 \supset \ldots \supset \Phi_n \supset \ldots \supset \Phi.$$

Для любых двух элементов φ и ψ из пространства $\Phi = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ определены, таким образом, наряду со скалярными произведениями $(\varphi, \psi)_n$, $n \geqslant 0$, и скалярные произведения $(\varphi, \psi)_{-n}$, $n \geqslant 0$, возникающие, если рассматривать φ и ψ как элементы пространства Φ_{-n}. Скалярные произведения вида $(\varphi, \psi)_{-n}$ оказываются полезными в некоторых вопросах теории дифференциальных уравнений в частных производных.

3. Реализация гильбертова пространства в виде пространства функций и оснащенные гильбертовы пространства. Как известно, гильбертово пространство допускает различные реализации в виде пространства функций. Эти реализации строятся следующим образом. Выберем положительную меру σ в некотором множестве X (например, на вещественной прямой) и обозначим через L_σ^2 пространство всех функций $\varphi(x)$, для которых сходится интеграл

$$\int_X |\varphi(x)|^2 \, d\sigma(x).$$

Введя в пространство L^2_σ скалярное произведение по формуле *)

$$(\varphi, \psi) = \int \varphi(x) \overline{\psi(x)} \, d\sigma(x), \tag{12}$$

мы получим гильбертово пространство. Точнее говоря, элементами пространства L^2_σ являются не отдельные функции $\varphi(x)$, а классы функций, отличающихся друг от друга лишь на множестве нулевой σ-меры.

Недостатком указанной реализации является то обстоятельство, что, сопоставляя функции $\varphi(x)$ из пространства L^2_σ ее значение в некоторой точке x_0, мы не получаем, вообще говоря, непрерывного линейного функционала в этом пространстве (исключение составляют точки, в которых сосредоточена ненулевая σ-мера). Более того, поскольку функции $\varphi(x)$ из пространства L^2_σ определены лишь с точностью до их значений на множестве нулевой σ-меры, мы лишены возможности говорить об их значениях в фиксированной точке x_0. Однако во многих вопросах, в частности в вопросах, связанных со спектральным разложением самосопряженных операторов, представляется желательным рассматривать значение функции в точке как линейный функционал. Как и во многих аналогичных случаях, это оказывается возможным, если перейти от рассмотрения гильбертова пространства к рассмотрению оснащенного гильбертова пространства.

Пусть $\Phi \subset H \subset \Phi'$ — оснащенное гильбертово пространство. Рассмотрим реализацию $h \to h(x)$ пространства H в виде пространства функций со скалярным произведением вида (12). Тогда каждому элементу φ ядерного пространства Φ соответствует функция $\varphi(x)$, сопоставляемая при этой реализации элементу $T\varphi$ пространства H (через T мы обозначаем оператор естественного вложения пространства Φ в его пополнение H). Таким образом, мы получаем реализацию $\varphi \to \varphi(x)$ пространства Φ, индуцированную реализацией $h \to h(x)$ пространства H. В этом пункте будет доказана следующая теорема о такой реализации.

*) В дальнейшем при интегрировании по множеству X мы будем опускать указание области интегрирования.

Теорема 1. *Пусть $\Phi \subset H \subset \Phi'$ — оснащенное гильбертово пространство и $\varphi \to \varphi(x)$ — реализация пространства Φ в виде пространства функций, индуцированная реализацией гильбертова пространства H в виде пространства L^2_σ. Тогда каждому значению x можно сопоставить линейный функционал F_x в пространстве Φ так, чтобы для любой функции $\varphi(x)$ из этого пространства равенство*

$$\varphi(x_0) = F_{x_0}(\varphi) \tag{13}$$

выполнялось почти при всех значениях x_0 (относительно меры σ).

Доказательству этой теоремы предпошлем следующую лемму об ортогональных рядах.

Лемма 1. *Пусть функции $\{h_k(x)\}$ образуют ортогональную нормированную систему относительно положительной меры σ. Тогда для любой последовательности положительных чисел λ_k, такой, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ сходится, ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |h_k(x)| \tag{14}$$

почти всюду сходится.

Доказательство. Применим следующий известный критерий сходимости почти всюду функциональных рядов с неотрицательными членами.

Если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \int g_k(x) \, d\sigma(x)$, где $g_k(x) \geqslant 0$ *и $\sigma(x)$ — положительная мера, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ сходится почти всюду относительно меры σ.*

В силу неравенства Коши — Буняковского имеем

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |h_k(x)| \right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |h_k(x)|^2.$$

Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ по условию сходится, то нам достаточно показать сходимость почти всюду ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |h_k(x)|^2. \tag{15}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int \left[\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |h_k(x)|^2\right] d\sigma(x). \tag{16}$$

Так как функции $h_k(x)$ нормированы, то этот интеграл равен $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$. Поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ по условию сходится, то интеграл (16) имеет конечное значение, а потому ряд (15) сходится почти для всех значений x (относительно меры σ). Отсюда, как мы видели, и вытекает сходимость почти всюду ряда (14). Лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1. Итак, дано, что $\varphi \to \varphi(x)$ — реализация ядерного пространства Φ, возникающая при реализации пространства H в виде L^2_σ. Надо построить функционалы F_x в Φ, такие, что $F_x(\varphi) = \varphi(x)$ для всех функций φ из Φ. Определим эти функционалы следующим образом. Рассмотрим оператор T, вкладывающий естественным образом пространство Φ в пространство H. Мы видели в п. 2, что оператор T можно записать в виде

$$T\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k F_k(\varphi) h_k, \tag{17}$$

где $\{F_k\}$ — ортогональный нормированный базис в одном из пространств Φ'_n, сопряженных пространству Φ_n, $\{h_k\}$ — ортогональный нормированный базис в пространстве H, $\lambda_k \geqslant 0$, и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k$ сходится. Так как по условию теоремы пространство H реализовано в виде пространства функций, то каждому элементу h_k соответствует функция $h_k(x)$ *). Рассмотрим ряд

$$F_x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k h_k(x) F_k, \tag{18}$$

и докажем, что он сходится почти для всех x (относительно меры σ) по норме пространства Φ_n. Применим для этого к ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |h_k(x)|$ лемму 1. Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ сходится, а функции $h_k(x)$ ортогональны и нормированы относительно меры σ **), то по этой лемме ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |h_k(x)|$ почти всюду сходится (относительно меры σ).

Примем теперь во внимание, что функционалы $\{F_k\}$ образуют ортогональный нормированный базис в пространстве Φ'_n и потому $\|F_k\|_{-n} = 1$ ($\|F\|_{-n}$ — норма функционала F в пространстве Φ'_n). Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |h_k(x)|$ можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |h_k(x)| \, \|F_k\|_{-n}. \tag{19}$$

Таким образом ряд с положительными членами (19) сходится почти для всех значений x. Так как

$$\|\lambda_k h_k(x) F_k\|_{-n} = \lambda_k |h_k(x)| \, \|F_k\|_{-n},$$

то почти для всех значений x ряд функционалов (18) сходится по норме пространства Φ'_n.

Тем самым сходимость ряда функционалов (17) почти для всех значений x относительно топологии пространства Φ'_n доказана. Примем сумму ряда (18) (в тех точках, где он сходится) за функционал F_x, положив в остальных точках, например, $F_x = 0$.

*) Эти функции определены с точностью до множества меры нуль. Мы предполагаем, что они доопределены любым образом на этом множестве и потому $h_k(x)$ имеет смысл для всех значений x.

**) Эти функции соответствуют при реализации пространства H элементам h_k ортогонального нормированного базиса в H.

Нам осталось показать, что если $\varphi(x)$ — любая функция из пространства Φ, то почти для всех значений x (относительно меры σ) выполняется равенство $F_x(\varphi)=\varphi(x)$. Но из равенства (18) вытекает, что почти для всех значений x мы имеем

$$F_x(\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k h_k(x)F_k(\varphi). \tag{20}$$

С другой стороны, из равенства (17) следует, что

$$\varphi(x)=T\varphi=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k F_k(\varphi)h_k(x), \tag{21}$$

где $\varphi(x)$ и $h_k(x)$ рассматриваются как функции из L^2_σ. Отсюда вытекает, что ряд (21) является разложением функции $\varphi(x)$ по ортогональной нормированной системе функций $\{h_k(x)\}$. Так как функция $\varphi(x)$ имеет интегрируемый квадрат модуля, то этот ряд сходится к ней в среднем. Но если один и тот же ряд сходится почти всюду к функции $F_x(\varphi)$ и сходится в среднем к функции $\varphi(x)$, то почти для всех значений x должно выполняться равенство $F_x(\varphi)=\varphi(x)$. Теорема доказана.

Заметим теперь, что функции $\varphi(x)$ определены лишь с точностью до их значений на множестве нулевой σ-меры. Поэтому мы можем изменить значение каждой из этих функций на множестве нулевой σ-меры (различном для разных функций), оставляя неизменной реализацию пространства. В дальнейшем мы всегда будем иметь в виду такую реализацию пространства H, при которой для всех функций $\varphi(x)$, $\varphi\in\Phi$, и всех значений x выполняется равенство $\varphi(x)=F_x(\varphi)$.

Полезно отметить, что все функционалы F_x в теореме 1 принадлежат одному и тому же пространству Φ'_n. Отметим также, что условие ядерности пространства Φ можно ослабить. Теорема остается справедливой для любой пары $\Phi\subset H$, состоящей из локально выпуклого линейного топологического пространства Φ и гильбертова пространства H, если существует ядерное отображение T пространства Φ в H *).

*) Линейное топологическое пространство называется локально выпуклым, если любая его окрестность содержит выпуклую окрестность того же элемента. Ядерным отображением Φ в H называется произведение непрерывного линейного отображения Φ в некоторое гильбертово пространство H_1 и ядерного отображения H_1 в H.

4. Непрерывные прямые суммы гильбертовых пространств и оснащенные гильбертовы пространства. Доказанная в предыдущем пункте теорема является частным случаем более общей теоремы, связанной с изометрическим вложением гильбертова пространства в непрерывную прямую сумму гильбертовых пространств.

Понятие непрерывной прямой суммы гильбертовых пространств является обобщением понятия ортогональной прямой суммы счетного набора гильбертовых пространств $H_1, \ldots, H_n, \ldots$

Напомним, что ортогональной прямой суммой гильбертовых пространств $H_1, \ldots, H_n, \ldots$ называется гильбертово пространство

$$\mathfrak{H}=\sum_{n=1}^{\infty}\oplus H_n,$$

элементами которого являются такие последовательности

$$\xi=(h_1, \ldots, h_n, \ldots),\quad h_n\in H_n,$$

что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\|h_n\|_n^2$, где $\|h_n\|_n$ — норма в H_n, сходится. Линейные операции в пространстве $\mathfrak{H}$ определяются покоординатно: если $\xi=(h_1, \ldots, h_n, \ldots)$, $\eta=(g_1, \ldots, g_n, \ldots)$, то $\xi+\eta=(h_1+g_1, \ldots, h_n+g_n, \ldots)$ и $a\xi=(ah_1, \ldots, ah_n, \ldots)$, а скалярное произведение (ξ, η) задается формулой

$$(\xi, \eta)=\sum_{n=1}^{\infty}(h_n, g_n)_n,$$

где $(h_n, g_n)_n$ — скалярное произведение в H_n. Можно рассматривать несколько более общее понятие ортогональной прямой суммы гильбертовых пространств $H_1, \ldots, H_n, \ldots$, взятых с положительными весами $\mu_1, \ldots, \mu_n, \ldots, \mu_n>0$. В этом случае скалярное произведение определяется формулой

$$(\xi, \eta)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(h_n, g_n)_n.$$

Это равенство можно записать в виде

$$(\xi, \eta)=\int_X (h(x), g(x))_x\,d\mu(x),$$

где через X обозначено множество, состоящее из точек $x=1, 2, \ldots, n, \ldots$, а через $\mu(x)$ — мера на этом множестве, равная μ_n в точке $x=n$. В соответствии с этим ортогональную прямую сумму гильбертовых пространств $H_1, \ldots$ $\ldots, H_n, \ldots$, взятых с весами $\mu_1, \ldots, \mu_n, \ldots$, можно записать в виде

$$\mathfrak{H}=\int\limits_X \oplus H(x)\,d\mu(x).$$

Обобщим теперь понятие ортогональной прямой суммы гильбертовых пространств, взятых с заданными весами, отказавшись от требования счетности числа слагаемых. Иными словами, рассмотрим некоторое множество X, на котором задана положительная мера μ. Пусть каждой точке x этого множества сопоставлено сепарабельное гильбертово пространство $H(x)$ размерности $n(x)$, где $n(x)$ может принимать значения $1, 2, \ldots, n, \ldots$ или значение ∞, причем функция $n(x)$ измерима по мере μ. Рассмотрим сначала случай, когда все пространства $H(x)$ имеют одну и ту же размерность n (n — целое число или ∞). Отождествим в этом случае каждое из пространств $H(x)$ с одним и тем же гильбертовым пространством H размерности n.

Построим пространство $\mathfrak{H}$, состоящее из таких вектор-функций $\xi=h(x)$ на множестве X, принимающих значения в пространстве H, что

1) для любого элемента h из H числовая функция $(h(x), h)$ измерима по мере μ,

2) числовая функция $\|h(x)\|$ имеет интегрируемый квадрат модуля по мере μ

$$\int\limits_X \|h(x)\|^2\,d\mu(x)<\infty.$$

Определим в пространстве $\mathfrak{H}$ линейные операции, положив для вектор-функций $\xi=h(x)$ и $\eta=g(x)$

$$\xi+\eta=h(x)+g(x),$$
$$a\xi=ah(x),$$

и введем скалярное произведение, положив

$$(\xi,\ \eta)=\int\limits_X (h(x),\ g(x))\,d\mu(x). \tag{22}$$

Это скалярное произведение определено для всех элементов $\xi=h(x)$ и $\eta=g(x)$ пространства $\mathfrak{H}$. В самом деле, в силу условия 1) для любого ортогонального базиса $h_1, \ldots$ $\ldots, h_n, \ldots$ в пространстве H все функции $(h(x), h_n)$ и $(h_n, g(x))$ измеримы, а потому измерима и функция

$$(h(x),\ g(x))=\sum_{n=1}^{\infty}(h(x),\ h_n)\,(h_n,\ g(x)).$$

Но

$$\int\limits_X |(h(x),\ g(x))|\,d\mu(x)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\left[\int\limits_X \|h(x)\|^2\,d\mu(x)+\int\limits_X \|g(x)\|^2\,d\mu(x)\right],$$

и потому в силу условия 2) интеграл (22) сходится.

Легко проверить, что пространство $\mathfrak{H}$ удовлетворяет всем аксиомам гильбертова пространства. В частности, это пространство полно. Доказательство полноты пространства $\mathfrak{H}$ хорошо известно в случае, когда $n(x)=1$, т. е. когда пространство $\mathfrak{H}$ является пространством L^2_μ скалярных функций $f(x)$, имеющих интегрируемый квадрат модуля относительно меры μ. В общем случае оно проводится аналогично.

Мы будем называть гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ *непрерывной прямой суммой гильбертовых пространств* $H(x)$ относительно меры μ и обозначать его тем же символом

$$\mathfrak{H}=\int\limits_X \oplus H(x)\,d\mu(x),$$

который был использован для ортогональной прямой суммы.

В случае, когда пространства $H(x)$ имеют различную размерность, мы поступаем следующим образом. Разобьем множество X, на котором задана мера μ, на измеримые подмножества $X_1, \ldots, X_n, \ldots$, в каждом из которых имеет место равенство $n(x)=n$. Мы уже знаем определение гильбертова пространства

$$\mathfrak{H}_n=\int\limits_{X_n} \oplus H(x)\,d\mu(x).$$

Обозначим теперь через $\mathfrak{H}$ ортогональную прямую сумму пространств $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_n, \ldots$

$$\mathfrak{H} = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \mathfrak{H}_n.$$

Это пространство $\mathfrak{H}$ мы и будем называть *непрерывной прямой суммой пространств* $H(x)$ *относительно меры* μ и обозначать

$$\mathfrak{H} = \int_X \oplus H(x)\, d\mu(x).$$

Частным случаем введенного понятия непрерывной прямой суммы гильбертовых пространств является понятие ортогональной прямой суммы гильбертовых пространств. Оно соответствует случаю, когда мера μ задана на счетном множестве. Гильбертово пространство L^2_μ функций с интегрируемым квадратом модуля относительно меры μ является непрерывной прямой суммой одномерных пространств относительно меры μ.

Перейдем теперь к рассмотрению результатов, аналогичных результатам п. 3, для непрерывных прямых сумм.

Отметим следующую лемму, аналогичную лемме 1 из п. 3.

Лемма 1'. *Пусть* $\mathfrak{H}$ — *непрерывная прямая сумма гильбертовых пространств* $H(x)$ *относительно меры* μ

$$\mathfrak{H} = \int_X \oplus H(x)\, d\mu(x).$$

Если $\{\xi_n\} = \{h_n(x)\}$ — *любой ортогональный нормированный базис в пространстве* $\mathfrak{H}$ *и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$, *где* $\lambda_n \geqslant 0$, *сходится, то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n h_n(x)$$

сходится почти для всех значений x (*относительно меры* μ) *по норме пространства* $\mathfrak{H}$.

Поскольку доказательство этой леммы протекает дословно так же, как и доказательство леммы 1, мы опускаем его.

Рассмотрим теперь оснащенное гильбертово пространство $\Phi \subset H \subset \Phi'$. Пусть пространство H изометрично отображено в непрерывную прямую сумму

$$\mathfrak{H} = \int_X \oplus H(x)\, d\mu(x)$$

гильбертовых пространств $H(x)$ относительно меры μ. Тогда каждому элементу h из H соответствует вектор-функция $\xi = h(x)$, значение которой при каждом x есть вектор $h(x)$ из $H(x)$, причем

$$(\xi, \eta) = \int_X (h(x), g(x))\, d\mu(x).$$

Так как каждому элементу φ пространства Φ соответствует элемент $T\varphi$ пространства H (T — естественное вложение Φ в H), то мы можем сопоставить элементу φ из Φ функцию $\varphi(x)$ из пространства $\mathfrak{H}$. Докажем сейчас следующую теорему об этих функциях, обобщающую теорему 1 из п. 3.

Теорема 1'. *Пусть* $\Phi \subset H \subset \Phi'$ — *оснащенное гильбертово пространство и* $h \to \xi \equiv h(x) \in H(x)$ — *изометрическое отображение пространства* H *в пространство*

$$\mathfrak{H} = \int_X \oplus H(x)\, d\mu(x).$$

Тогда для любого x *существует такой ядерный оператор* T_x, *отображающий пространство* Φ *в* $H(x)$, *что для* $\varphi \in \Phi$ *функции* $\varphi(x)$ *и* $T_x(\varphi)$ *отличаются лишь на множестве меры нуль.*

Доказательство. Так как пространство Φ ядерно, то найдется такое значение n, что естественное отображение T пространства Φ в H можно записать в виде

$$T\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k F_k(\varphi)\, h_k, \tag{23}$$

где $\{h_k\}$ — ортогональный нормированный базис в пространстве H, $\{F_k\}$ — ортогональный нормированный базис в пространстве Φ'_n, $\lambda_k \geqslant 0$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ сходится. Сопоставим каждому значению k и каждому $x \in X$ оператор $\lambda_k F_k h_k(x)$ ранга 1, переводящий элемент φ из пространства Φ_n в элемент $\lambda_k F_k(\varphi) h_k(x)$ пространства $H(x)$. Мы докажем сейчас, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k F_k h_k(x), \tag{24}$$

составленный из этих операторов, сходится по норме почти для всех значений x [относительно меры $\mu(x)$], причем почти для всех значений x сумма T_x этого ряда является ядерным оператором. Заметим для этого, что из определения оператора $\lambda_k F_k h_k(x)$ вытекает равенство

$$\|\lambda_k F_k h_k(x)\| = \lambda_k \|F_k\|_{-n} \|h_k(x)\|,$$

где $\|F_k\|_{-n}$ — норма линейного функционала F_k в пространстве Φ_n', а $\|h_k(x)\|$ — норма элемента $h_k(x)$ в пространстве $H(x)$. Поэтому согласно п. 5 § 2 как сходимость почти всюду ряда (24), так и ядерность почти всюду оператора T_x будут доказаны, если мы докажем, что сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \|F_k\|_{-n} \|h_k(x)\|,$$

составленный из норм операторов ранга 1. Но эта сходимость непосредственно вытекает из леммы 1', если принять во внимание, что $\|F_k\|_{-n} = 1$, а вектор-функции $h_k(x)$ соответствуют элементам ортогонального и нормированного базиса h_k в пространстве H и потому образуют ортогональную и нормированную систему функций в $\mathfrak{H}$.

Положим теперь

$$T_x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k F_k h_k(x) \tag{25}$$

для всех точек x, в которых сумма ряда (24) является ядерным оператором и $T_x = 0$ в остальных точках. Мы покажем сейчас, что для всех элементов φ из пространства Φ равенство $T_x(\varphi) = \varphi(x)$ выполняется почти для всех значений x. В самом деле, из равенства (25) вытекает, что почти всюду

$$T_x(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k F_k(\varphi) h_k(x). \tag{26}$$

Но функция $\varphi(x)$ соответствует элементу $T\varphi$ пространства H и потому по формуле (23) мы имеем, что

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k F_k(\varphi) h_k(x), \tag{27}$$

причем ряд (27) сходится в среднем (относительно меры μ). Сравнивая формулы (26) и (27), мы убеждаемся, что вектор-функции $T_x(\varphi)$ и $\varphi(x)$ почти всюду равны. Теорема доказана.

Как и для теоремы 1, отметим, что все операторы T_x можно выбрать так, чтобы они были ядерны относительно одного и того же скалярного произведения $(\varphi, \psi)_n$ в Φ. Кроме того, отметим, что вместо требования ядерности Φ достаточно потребовать, чтобы Φ было локально выпуклым линейным топологическим пространством, допускающим ядерное вложение T в пространство H.

В дальнейшем, говоря о реализации $h \to h(x)$ пространства H, мы будем иметь в виду реализацию, при которой равенство $T_x(\varphi) = \varphi(x)$ справедливо при всех x и всех $\varphi \in \Phi$.

5. Спектральный анализ операторов в оснащенных гильбертовых пространствах. Перейдем теперь к основному вопросу этого параграфа — спектральному анализу операторов в оснащенных гильбертовых пространствах. Напомним сначала введенное в п. 1 понятие обобщенного собственного вектора. Пусть A — оператор, действующий в линейном топологическом пространстве Φ. *Обобщенным собственным вектором оператора A, соответствующим собственному значению* λ, называется такой линейный функционал F из пространства Φ', что для всех элементов φ из Φ имеет место равенство

$$F(A\varphi) = \lambda F(\varphi).$$

Это равенство можно записать в следующем виде

$$A'F = \lambda F,$$

где A' — такой оператор в пространстве Φ', что

$$A'F(\varphi) = F(A\varphi)$$

для всех элементов φ из Φ и функционалов F из Φ'.

Каждому значению λ соответствует *собственное подпространство* Φ'_λ оператора A, состоящее из всех обобщенных собственных векторов F, для которых собственное значение равно λ. Введем теперь понятие спектрального разложения для элементов φ пространства Φ. Сопоставим каждому элементу φ из пространства Φ и каждому числу λ линейный функционал $\tilde{\varphi}_\lambda$ в пространстве Φ'_λ, принимающий на элементе F_λ из Φ'_λ значение $F_\lambda(\varphi)$. Мы получим *вектор-функцию* $\tilde{\varphi}_\lambda$, *значениями которой являются линейные функционалы, заданные в подпространствах* Φ'_λ. Соответствие $\varphi \to \tilde{\varphi}_\lambda$ назовем *спектральным разложением элемента* φ, *соответствующим оператору* A. Очевидно, что если $\varphi \to \tilde{\varphi}_\lambda$ — спектральное разложение элемента φ, то спектральным разложением элемента $\psi = A\varphi$ является вектор-функция $\tilde{\psi}_\lambda = \lambda\tilde{\varphi}_\lambda$. В самом деле, для любого функционала F_λ из Φ'_λ мы имеем

$$F_\lambda(\psi) = F_\lambda(A\varphi) = \lambda F_\lambda(\varphi).$$

Значит, по определению $\tilde{\varphi}_\lambda$ и $\tilde{\psi}_\lambda$ имеем

$$\tilde{\psi}_\lambda = \lambda\tilde{\varphi}_\lambda.$$

Если подпространства Φ'_λ одномерны (или, как мы будем говорить, оператор A имеет простой спектр), то функции $\tilde{\varphi}_\lambda$ скалярны.

Примером спектрального разложения с простым спектром является соответствие, при котором функции $\varphi(x)$ из пространства S соответствует ее преобразование Фурье $\tilde{\varphi}(\lambda)$

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = \int \varphi(x) e^{i\lambda x}\, dx.$$

Это разложение соответствует оператору сдвига U_h: $\varphi(x) \to \varphi(x-h)$, так как функции $e^{i\lambda x}$ являются обобщенными собственными векторами для этого оператора.

Если у оператора A «мало» обобщенных собственных векторов, то может случиться, что $\tilde{\varphi}_\lambda \equiv 0$, в то время как $\varphi \neq 0$. В этом случае различным элементам пространства Φ будут соответствовать одни и те же вектор-функции. Мы будем говорить, что *оператор A обладает достаточным набором обобщенных собственных векторов* или, иначе, что *множество обобщенных собственных векторов оператора A полно*, если из равенства $\tilde{\varphi}_\lambda \equiv 0$ вытекает равенство $\varphi = 0$. Если множество обобщенных собственных векторов оператора A полно, то различным элементам φ пространства Φ отвечают различные вектор-функции $\tilde{\varphi}_\lambda$.

Мы покажем, что если задано оснащенное гильбертово пространство $\Phi \subset H \subset \Phi'$ и оператор A, действующий в пространстве Φ, может быть продолжен до унитарного или самосопряженного оператора в пространстве H, то система обобщенных собственных векторов оператора A полна.

При доказательстве этих результатов будут использованы некоторые теоремы из спектральной теории линейных операторов в гильбертовом пространстве. Для того чтобы не прерывать изложения, мы приведем в тексте лишь формулировки этих теорем (некоторые из них будут доказаны в дополнении к этому параграфу).

Напомним следующие определения. Оператор U в гильбертовом пространстве H называется *унитарным*, если для любых векторов f и g из H имеет место равенство $(f, g) = (Uf, Ug) = (U^{-1}f, U^{-1}g)$. Унитарный оператор U называется *циклическим*, если в пространстве H существует такой вектор f, что векторы $U^n f$, $-\infty < n < \infty$, где n — целое число, порождают все пространство H.

Приведем пример унитарного циклического оператора. Пусть L^2_σ — пространство функций $\varphi(\lambda)$, $|\lambda| = 1$, на единичной окружности, имеющих интегрируемый квадрат модуля относительно положительной конечной меры σ на этой окружности. Тогда оператор U, переводящий функцию $\varphi(\lambda)$ в функцию $\lambda\varphi(\lambda)$, унитарен. В самом деле,

$$(U\varphi, U\psi) = \int\limits_{|\lambda|=1} \lambda\varphi(\lambda)\overline{\lambda\psi(\lambda)}\, d\sigma(\lambda) = \int \varphi(\lambda)\overline{\psi(\lambda)}\, d\sigma(\lambda) = (\varphi, \psi).$$

Нетрудно видеть, что U является циклическим оператором, порождающим вектором для которого служит функция $\varphi_0(\lambda) \equiv 1$. Оказывается, что любой унитарный циклический оператор имеет такой вид. Иными словами, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть U — унитарный циклический оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда пространство H можно так реализовать в виде пространства L^2_σ*

функций $\varphi(\lambda)$, $|\lambda|=1$, *на единичной окружности, имеющих интегрируемый квадрат модуля относительно положительной меры* σ, *чтобы оператору* U *соответствовал оператор умножения на* λ: *если* $h \to h(\lambda)$, *то* $Uh \to \lambda h(\lambda)$.

Рассмотрим теперь оснащенное гильбертово пространство $\Phi \subset H \subset \Phi'$. Оператор U, отображающий пространство Φ на себя, называется *унитарным*, если для любых двух элементов φ и ψ из Φ выполняется равенство

$$(U\varphi, U\psi) = (\varphi, \psi),$$

где (φ, ψ) — скалярное произведение, пополнение по которому пространства Φ дает H.

В силу плотности Φ в H унитарный оператор U в Φ можно продолжить до унитарного оператора в пространстве H. Мы будем обозначать этот оператор также буквой U. Если получающийся при продолжении оператор в пространстве H является циклическим, то и оператор U в пространстве Φ мы будем называть *циклическим*.

Докажем теперь следующую теорему о полноте системы обобщенных собственных векторов для унитарного циклического оператора U в оснащенном гильбертовом пространстве $\Phi \subset H \subset \Phi'$.

Теорема 3. *Пусть* U — *циклический унитарный оператор в оснащенном гильбертовом пространстве. Тогда множество обобщенных собственных векторов оператора* U *полно, т. е. из обращения в нуль всех компонент* $\tilde{\varphi}_\lambda$ *элемента* φ *при спектральном разложении, соответствующем оператору* U, *вытекает обращение в нуль элемента* φ.

Доказательство. Так как пространство Φ всюду плотно в H, то оператор U можно распространить до унитарного оператора в пространстве H. Применим к этому оператору теорему 2. Мы получим реализацию $h \to h(\lambda)$ пространства H в виде функций на единичной окружности, имеющих интегрируемый квадрат модуля относительно положительной меры σ. Оператору U при этой реализации отвечает оператор умножения на λ, $|\lambda|=1$, т. е. если $h \to h(\lambda)$, то $Uh \to \lambda h(\lambda)$.

При реализации $h \to h(\lambda)$ каждому элементу φ из пространства Φ соответствует функция $\varphi(\lambda)$. При этом по теореме 1 из п. 3 функции $\varphi(\lambda)$ можно выбрать так, чтобы для любого λ выполнялось равенство

$$\varphi(\lambda) = F_\lambda(\varphi),$$

где F_λ — непрерывный линейный функционал в пространстве Φ. Покажем, что функционалы F_λ являются обобщенными собственными векторами оператора U. В самом деле, пусть φ — любой элемент из пространства Φ и $U\varphi = \psi$. Тогда при любом λ мы имеем $\psi(\lambda) = \lambda\varphi(\lambda)$. Но

$$\psi(\lambda) = F_\lambda(\psi) = F_\lambda(U\varphi),$$

а

$$\varphi(\lambda) = F_\lambda(\varphi),$$

и потому

$$F_\lambda(U\varphi) = \lambda F_\lambda(\varphi).$$

Но это и означает, что F_λ является обобщенным собственным вектором оператора U, соответствующим собственному значению λ.

Заметим теперь, что

$$\varphi(\lambda) = F_\lambda(\varphi) = \tilde{\varphi}_\lambda.$$

Это означает, что функция $\varphi(\lambda)$ совпадает в пространстве Φ'_λ обобщенных собственных векторов F_λ с $\tilde{\varphi}_\lambda$. Отсюда следует, что если $\tilde{\varphi}_\lambda \equiv 0$, то и $\varphi(\lambda) \equiv 0$.

Для того чтобы доказать полноту системы обобщенных собственных векторов оператора U, нам осталось показать, что из выполнения равенства $\varphi(\lambda)=0$ при всех λ, $|\lambda|=1$, вытекает равенство $\varphi=0$. Но это утверждение непосредственно вытекает из того, что отображение $h \to h(\lambda)$ пространства H в L^2_σ изометрично, и потому имеет место равенство

$$\|\varphi\|^2 = (\varphi, \varphi) = \int_{|\lambda|=1} |\varphi(\lambda)|^2 \, d\sigma(\lambda). \tag{28}$$

Следовательно, если $\varphi(\lambda) \equiv 0$, $|\lambda|=1$, то и $\varphi=0$. Тем самым теорема 3 доказана.

Заметим, что равенство (28) можно записать также в виде

$$\|\varphi\|^2 = \int |F_\lambda(\varphi)|^2 \, d\sigma(\lambda).$$

Оно является обобщением равенства Планшереля для обычного преобразования Фурье.

Рассмотрим теперь самосопряженные операторы. Линейный оператор A, действующий в гильбертовом пространстве H и определенный на некотором всюду плотном линейном подмножестве Ω_A в H, называется *самосопряженным*, если:

1) для любых двух векторов f и g из Ω_A выполняется равенство

$$(Af, g) = (f, Ag),$$

2) ни для одного вектора g, не принадлежащего Ω_A, нельзя найти такого вектора g_1, что $(Af, g) = (f, g_1)$ при всех f из Ω_A.

Самосопряженный оператор A называется *циклическим*, если найдется такой вектор f, что векторы $A^n f$, $n = 0, 1, \ldots$, порождают все пространство H.

Для самосопряженных циклических операторов A справедлива теорема, аналогичная теореме 2.

Теорема 2′. *Пусть A — самосопряженный циклический оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда существует такая реализация $h \to h(\lambda)$ пространства H в виде пространства L^2_σ функций на вещественной оси, имеющих интегрируемый квадрат модуля относительно положительной меры σ, что*

1) *область определения оператора A переходит при этой реализации в множество функций $f(\lambda)$, для которых сходится интеграл*

$$\int |\lambda f(\lambda)|^2 \, d\sigma(\lambda),$$

2) *если элементу f соответствует функция $f(\lambda)$, то элементу Af соответствует функция $\lambda f(\lambda)$* *).

Назовем оператор A, действующий в ядерном пространстве Φ, *самосопряженным* относительно скалярного произведения (φ, ψ), если его замыкание в пополнении H пространства Φ относительно нормы $\sqrt{(\varphi, \varphi)}$ самосопряжено. Мы будем говорить в этом случае, что оператор A самосопряжен в оснащенном гильбертовом пространстве $\Phi \subset H \subset \Phi'$. Если получающийся при этом оператор в пространстве H оказывается циклическим, то и оператор A мы будем называть *циклическим* оператором.

*) Теоремы 2 и 2′ тесно связаны друг с другом. Если U — унитарный оператор, то оператор A, задаваемый формулой

$$A = \frac{U - iE}{U + iE},$$

самосопряжен. Любой самосопряженный оператор A может быть записан в указанном виде, где U — унитарный оператор. Пользуясь этим замечанием, можно получить теорему 2′ из теоремы 2 и обратно.

Пользуясь теоремой 2′, можно доказать следующую теорему.

Теорема 3′. *Пусть A — самосопряженный циклический оператор в оснащенном гильбертовом пространстве $\Phi \subset H \subset \Phi'$. Тогда множество обобщенных собственных векторов оператора A, соответствующих вещественным собственным значениям, полно.*

Заметим, что можно ослабить условия теорем 3 и 3′, отказавшись от требования, чтобы оператор U (или A) переводил пространство Φ в себя (это условие не выполняется, например, если Φ — пространство бесконечно дифференцируемых функций, а A — линейный дифференциальный оператор, коэффициентами которого являются функции, обладающие лишь конечным числом непрерывных производных). Теоремы 3 и 3′ сохраняют силу и в случае, когда оператор U (или A) переводит в себя такое пополнение Φ_n пространства Φ, что естественное вложение T_n пространства Φ_n в H ядерно. Это вытекает из справедливости теоремы 1 в случае, когда пространство Φ не является ядерным, но вложение T пространства Φ в H ядерно.

Остановимся теперь на случае, когда оператор не является циклическим. В этом случае теоремы 2 и 2′ заменяются следующими, более общими теоремами.

Теорема 4. *Пусть U — унитарный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда существует такая положительная мера σ на единичной окружности и такое изометрическое вложение пространства H в непрерывную прямую сумму*

$$\mathfrak{H} = \int\limits_{|\lambda|=1} \oplus H(\lambda) \, d\sigma(\lambda)$$

гильбертовых пространств $H(\lambda)$ относительно меры σ, что оператору U соответствует при этом разложении *оператор умножения на* λ. Иными словами, если элементу h из H соответствует вектор-функция $h(\lambda)$, то элементу Uh соответствует вектор-функция $\lambda h(\lambda)$.

Теорема 4′. *Пусть A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда существует такая положительная мера $\sigma(\lambda)$ на вещественной оси и такое изометрическое вложение пространства H в непрерывную прямую сумму $\mathfrak{H}$ гильбертовых пространств $H(\lambda)$ относительно меры $\sigma(\lambda)$*

$$\mathfrak{H}=\int_{-\infty}^{\infty}\oplus H(\lambda)\,d\sigma(\lambda),$$

что оператору A соответствует при этом оператор умножения на λ.

Применим эти теоремы для доказательства полноты системы обобщенных собственных векторов унитарных и самосопряженных операторов в оснащенном гильбертовом пространстве $\Phi\subset H\subset\Phi'$. Мы рассмотрим подробно только случай унитарных операторов, поскольку для самосопряженных операторов все доказывается совершенно аналогично.

Итак, пусть U — унитарный оператор в оснащенном гильбертовом пространстве $\Phi\subset H\subset\Phi'$. По теореме 4 существует изометрическое вложение пространства H в непрерывную прямую сумму

$$\mathfrak{H}=\int_{|\lambda|=1}\oplus H(\lambda)\,d\sigma(\lambda),$$

при котором оператору U соответствует оператор умножения на λ. Применим к этому вложению теорему 1′. Мы получим, что для всех элементов φ из Φ и всех λ выполняется равенство

$$\varphi(\lambda)=T_\lambda(\varphi),$$

где T_λ — ядерный оператор, отображающий пространство Φ в $H(\lambda)$.

Отсюда следует, что каждому элементу ξ из пространства $H(\lambda)$ соответствует линейный функционал $\tilde{\xi}$ в пространстве Φ, определяемый равенством

$$\tilde{\xi}(\varphi)=(\varphi(\lambda),\ \xi)_\lambda\equiv(T_\lambda\varphi,\ \xi)_\lambda$$

(скалярное произведение берется в пространстве $H(\lambda)$). Примем теперь во внимание, что оператору U соответствует в пространстве $\mathfrak{H}$ оператор умножения на λ. Мы получаем отсюда, что функционал $\tilde{\xi}$, соответствующий элементу ξ из $H(\lambda)$, является обобщенным собственным вектором оператора U, т. е. что $U'\tilde{\xi}=\lambda\tilde{\xi}$. При этом, если $\xi\neq0$, то и $\tilde{\xi}\neq0$.

Мы построили, таким образом, вложение каждого пространства $H(\lambda)$ в пространство Φ'_λ, состоящее из линейных функционалов F в пространстве Φ, для которых $A'F=\lambda F$. Нетрудно видеть, что это вложение непрерывно: если $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\xi$, то и $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{\xi}_n=\tilde{\xi}$.

Пусть теперь φ — такой элемент из пространства Φ, что $\tilde{\varphi}_\lambda\equiv0$. Тогда для любого λ и любого элемента ξ из пространства $H(\lambda)$, мы имеем

$$0=\tilde{\varphi}_\lambda(\xi)=\tilde{\xi}(\varphi)=(\varphi(\lambda),\ \xi)_\lambda.$$

Отсюда вытекает, что $\varphi(\lambda)\equiv0$. Так как

$$\|\varphi\|^2=(\varphi,\ \varphi)=\int\|\varphi(\lambda)\|_\lambda^2\,d\sigma(\lambda),$$

то мы получаем, что $\varphi=0$.

Итак, мы доказали, что если $\tilde{\varphi}_\lambda\equiv0$ для всех значений λ, то $\varphi=0$. Иными словами, нами доказана полнота системы обобщенных собственных функций оператора U.

Теорема 5. *Унитарный оператор в оснащенном гильбертовом пространстве обладает полной системой обобщенных собственных векторов, соответствующих собственным значениям λ, модуль которых равен единице.*

Точно так же доказывается следующая теорема.

Теорема 5′. *Самосопряженный оператор в оснащенном гильбертовом пространстве обладает полной системой обобщенных собственных векторов, соответствующих вещественным собственным значениям.*

В некоторых случаях полезны аналогичные теоремы, касающиеся коммутирующих систем унитарных или самосопряженных операторов.

Пусть $\{A_k\}$, $k=1, \ldots, n$ — система коммутирующих между собой самосопряженных операторов в оснащенном гильбертовом пространстве. Это означает, что операторы $E_k(\Delta)$, $k=1, \ldots, n$, входящие в разложения единицы самосопряженных замыканий операторов A_k в H, коммутируют друг с другом. Назовем линейный функционал F в пространстве Φ обобщенным собственным вектором для системы операторов $\{A_k\}$, если для любого k, $1 \leqslant k \leqslant n$, имеет место равенство

$$A'_k F = \lambda_k F.$$

Совокупность чисел $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ назовем *собственным значением*, соответствующим этому собственному вектору.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 6. *Если $\{A_k\}$, $1 \leqslant k \leqslant n$ — система коммутирующих самосопряженных операторов в оснащенном гильбертовом пространстве, то множество их обобщенных собственных векторов полно.*

Аналогичная теорема справедлива и для коммутирующей системы унитарных операторов в оснащенном гильбертовом пространстве.

ДОБАВЛЕНИЕ К § 4

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ САМОСОПРЯЖЕННЫХ И УНИТАРНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Абстрактная теорема о спектральном разложении. В этом параграфе были использованы некоторые результаты спектральной теории операторов. Поскольку не все эти результаты можно считать общеизвестными, мы даем здесь их изложение, опирающееся на теорему об абстрактном спектральном разложении самосопряженного оператора (относительно определения самосопряженного оператора см. п. 5 § 4).

Чтобы сформулировать эту теорему, введем понятие о разложении единицы. Пусть каждому интервалу $\Delta = [a, b)$ на вещественной оси сопоставлен ограниченный самосопряженный оператор $E(\Delta)$ в гильбертовом пространстве H, причем выполняются следующие свойства:

1) для любых двух интервалов Δ_1 и Δ_2 имеет место равенство

$$E(\Delta_1) E(\Delta_2) = E(\Delta_1 \cap \Delta_2); \tag{1}$$

2) имеют место равенства

$$\lim_{x \to +\infty} E(x) = E, \quad \lim_{x \to -\infty} E(x) = 0, \tag{2}$$

где положено $E(x) = E(\Delta_x)$ (Δ_x — интервал $(-\infty, x)$), через E обозначен единичный оператор, а через 0 — нулевой оператор *);

3) если интервал Δ является счетной суммой непересекающихся интервалов Δ_n, $\Delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$, то $E(\Delta) = \sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n)$.

Такое семейство операторов $E(\Delta)$ и называется *разложением единицы.*

Из равенства (1) вытекает, что для любого интервала Δ выполняется равенство $E^2(\Delta) = E(\Delta)$. Это означает, что $E(\Delta)$ является проекционным оператором, проектирующим пространство H на подпространство $H_\Delta = E(\Delta) H$. Операторы $E(\Delta)$ положительно определены, т. е. таковы, что $(E(\Delta) f, f) \geqslant 0$ для любого элемента f из H. В самом деле,

$$(E(\Delta) f, f) = (E^2(\Delta) f, f) = (E(\Delta) f, E(\Delta) f) \geqslant 0.$$

Положим для любого интервала Δ и любого элемента f из H

$$\mu_f(\Delta) = (E(\Delta) f, f).$$

Из изложенного выше вытекает, что $\mu_f(\Delta)$ является счетно-аддитивной положительной мерой, заданной на интервалах Δ. Эту меру можно распространить на все борелевские множества. Мы будем называть меру $\mu_f(\Delta)$ *спектральной мерой*, соответствующей при разложении единицы $E(\Delta)$ элементу f.

Теорема о спектральном разложении самосопряженного оператора формулируется следующим образом.

Теорема 1. *Пусть A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда существует такое разложение единицы $E(\Delta)$, что оператор A определен*

*) Здесь и ниже сходимость операторов понимается в слабом смысле: равенство $\lim_{x \to +\infty} E(x) = E$ означает, что

$$\lim_{x \to +\infty} (E(x) f, g) = (f, g)$$

для любых двух элементов f и g из H.

на множестве Ω_A тех элементов f из H, для которых сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, d\mu_f(x),$$

где $\mu_f(x) = (E(\Delta) f, f)$. *Оператор A задается для таких элементов f формулой* *)

$$Af = \int_{-\infty}^{\infty} x\, d(E(x) f), \tag{3}$$

где $E(x) = E(-\infty, x)$.

Из теоремы 1 вытекает, что если Δ — любой интервал, то имеют место равенства

$$E(\Delta) A = AE(\Delta) = \int_{\Delta} x\, dE(x). \tag{4}$$

В самом деле,

$$E(\Delta) A = E(\Delta) \int_{-\infty}^{\infty} x\, dE(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xE(\Delta)\, dE(x).$$

Но, по равенству (1), $E(\Delta)\, dE(x) = 0$, если x не принадлежит Δ, и $E(\Delta)\, dE(x) = dE(x)$, если $x \in \Delta$. Поэтому

$$E(\Delta) A = \int_{\Delta} x\, dE(x).$$

Аналогично доказывается, что

$$AE(\Delta) = \int_{\Delta} x\, dE(x).$$

*) Равенство (3) также понимается в слабом смысле: для любых двух элементов f и g из Ω_A выполняется равенство

$$(Af, g) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, d(E(x) f, g).$$

Из равенства (4) вытекает, что для любого вектора f из подпространства $H_\Delta = E(\Delta) H$, $\Delta = [a, b)$, выполняется неравенство

$$\| Af - af \| \leqslant (b - a) \| f \|.$$

Поэтому, если $b - a$ мало, то f является «почти собственным вектором» оператора A. Если $\Delta_1, \ldots, \Delta_n, \ldots$ — непересекающиеся интервалы, покрывающие вещественную ось, то пространство H является ортогональной прямой суммой подпространств H_{Δ_n}, в которых оператор A «почти совпадает с оператором подобия».

Аналогичная теорема справедлива и для унитарных операторов с той лишь разницей, что интервалы Δ лежат не на вещественной прямой, а на единичной окружности.

2. Циклические операторы. Особенно простое строение имеют циклические операторы. Самосопряженный оператор A называется *циклическим*, если существует такой вектор f, что линейные комбинации векторов $E(\Delta) f$ всюду плотны в гильбертовом пространстве H. Вектор f называется *циклическим вектором*.

Если A — циклический оператор, то гильбертово пространство H можно реализовать в виде пространства L_f^2 функций $\varphi(x)$, имеющих интегрируемый квадрат модуля относительно меры $\mu_f(\Delta)$, причем оператору A соответствует оператор умножения функции $\varphi(x)$ на x.

Таким образом, область определения оператора A при такой реализации состоит из функций $\varphi(x)$, для которых сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\varphi(x)|^2\, d\mu_f(x).$$

Указанная реализация осуществляется следующим образом. Сопоставим каждому вектору вида $E(\Delta) f$ характеристическую функцию $\chi_\Delta(x)$ интервала Δ. В частности, самому вектору f сопоставим функцию, тождественно равную единице на всей прямой. Покажем, что это соответствие является изометрическим соответствием в том смысле, что

$$\| E(\Delta) f \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\chi_\Delta(x)|^2\, d\mu_f(x).$$

В самом деле, из соотношения (1) вытекает, что

$$\|E(\Delta)f\|^2 = (E(\Delta)f, E(\Delta)f) = (E(\Delta)f, f) =$$
$$= \mu_f(\Delta) = \int_\Delta d\mu_f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |\chi_\Delta(x)|^2 d\mu_f(x).$$

Распространим теперь полученное изометрическое соответствие $E(\Delta)f \to \chi_\Delta(x)$, используя линейные комбинации и предельный переход. Поскольку линейные комбинации векторов $E(\Delta)f$ всюду плотны в H, а линейные комбинации характеристических функций $\chi_\Delta(x)$ всюду плотны в пространстве L_f^2, мы получим изометрическое соответствие между пространствами H и L_f^2.

Очевидно, что для любого интервала Δ имеет место равенство

$$(AE(\Delta)f, g) = \int_\Delta xd(E(x)f, g).$$

Поэтому

$$(AE(\Delta)f, f) = \int_\Delta x\,d(E(x)f, f) =$$
$$= \int_\Delta x\,d\mu_f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\chi_\Delta(x)\,d\mu_f(x).$$

Это означает, что оператору A соответствует в пространстве L_f^2 оператор, переводящий характеристическую функцию $\chi_\Delta(x)$ в функцию $x\chi_\Delta(x)$. Поскольку функции $\chi_\Delta(x)$ образуют всюду плотное множество в L_f^2, то мы получаем, что *при описанной реализации оператору A соответствует оператор умножения на x функций $\varphi(x)$ из пространства L_f^2.*

3. Разложение гильбертова пространства в непрерывную прямую сумму, соответствующее данному самосопряженному оператору. Покажем, что если A — самосопряженный линейный оператор в гильбертовом пространстве H, то существует изометрическое вложение пространства H в прямую сумму

$$\mathfrak{H} = \int \oplus H(x)\,d\mu(x)$$

гильбертовых пространств $H(x)$, при котором оператор A задается в каждом из пространств $H(x)$ в виде оператора умножения на x.

Пусть A — самосопряженный оператор в H и f — вектор из H. *Циклическим подпространством* в H, порожденным вектором f, называют наименьшее замкнутое подпространство H_f, содержащее все векторы $E(\Delta)f$, где $E(\Delta)$ — разложение единицы, соответствующее оператору A. Покажем, что если вектор h ортогонален циклическому подпространству H_f, то и все векторы $E(\Delta)h$ ортогональны H_f. В самом деле, так как операторы $E(\Delta)$ самосопряжены, то при $g \in H_f$ мы имеем

$$(E(\Delta)h, g) = (h, E(\Delta)g).$$

Поскольку подпространство H_f содержит вместе с вектором g и все векторы $E(\Delta)g$, то $(E(\Delta)h, g) = 0$ при $g \in H_f$, т. е. векторы $E(\Delta)h$ ортогональны H_f. Отсюда следует, что *если вектор h ортогонален циклическому подпространству H_f, то циклическое подпространство H_h, порожденное вектором h, ортогонально H_f.*

Перейдем теперь к построению вложения пространства H в $\mathfrak{H}$, соответствующего оператору A. Выберем в пространстве H счетное всюду плотное множество $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ и обозначим через H_1 циклическое подпространство, порожденное элементом f_1. Пусть уже построены попарно ортогональные циклические подпространства $H_1, \ldots, H_n$ в H. Возьмем первый из элементов f_k, $1 \leqslant k < \infty$, не принадлежащих прямой сумме $H^n = H_1 \oplus \ldots \oplus H_n$. Пусть это будет элемент f_{k_n}. Выберем в подпространстве G, натянутом на H^n и f_{k_n}, элемент h_{n+1} ($\|h_{n+1}\| = 1$), ортогональный H^n. Обозначим через H_{n+1} циклическое подпространство, порожденное h_{n+1}. Очевидно, что $f_{k_n} \in H_1 \oplus \ldots \oplus H_{n+1}$. Так как множество элементов $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ всюду плотно в H, то, продолжая описанный процесс, мы получим разложение

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus H_n$$

в ортогональную прямую сумму циклических подпространств $H_1, \ldots, H_n, \ldots$

Выше было показано, что каждое из циклических подпространств H_n можно реализовать в виде пространства функций $h_n(x)$, причем скалярное произведение в H_n задается формулой

$$(f_n(x), g_n(x)) = \int f_n(x) \overline{g_n(x)}\, d\mu_n(x),$$

где $\mu_n(\Delta) = (E(\Delta) h_n, h_n)$ — положительная мера. Отсюда вытекает, что каждый элемент f из H задается в виде последовательности функций

$$f = (f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots),$$

причем скалярное произведение в H имеет вид

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x) \overline{g_n(x)}\, d\mu_n(x).$$

Оператор A переводит каждую из функций $f_n(x)$ в функцию $xf_n(x)$ и, следовательно,

$$Af = (xf_1(x), \ldots, xf_n(x), \ldots).$$

Мы реализовали пространство H в виде прямой суммы пространств функций, причем в каждом слагаемом скалярное произведение задается при помощи своей положительной меры. Покажем, что можно построить реализацию пространства H в виде прямой суммы пространств функций так, чтобы скалярное произведение задавалось в каждом из пространств H_n одной и той же мерой μ. Определим эту меру равенством

$$\mu(\Delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mu_n(\Delta) \tag{5}$$

(поскольку для любого n мы имеем

$$\mu_n(\Delta) = (E(\Delta) h_n, h_n) \leqslant \|h_n\| = 1,$$

то ряд (5) сходится). Мера μ обладает следующим свойством, непосредственно вытекающим из равенства (5): если для некоторого множества Δ выполняется равенство $\mu(\Delta) = 0$, то $\mu_n(\Delta) = 0$ при всех значениях n.

По теореме Радона—Никодима *) отсюда вытекает, что каждую из мер μ_n можно записать в виде

$$\mu_n(\Delta) = \int_{\Delta} \varphi_n(x)\, d\mu(x),$$

где $\varphi_n(x)$ — положительная функция. Обозначим через L^2_μ гильбертово пространство, состоящее из функций $\psi(x)$, для которых сходится интеграл

$$\int |\psi(x)|^2\, d\mu(x).$$

Очевидно, что если $h_n(x)$ — функция из пространства H_n, то функция $\psi_n(x) = \sqrt{\varphi_n(x)}\, h_n(x)$ принадлежит пространству L^2_μ, причем имеет место равенство

$$\|\psi_n(x)\|^2 = \int |\psi_n(x)|^2\, d\mu(x) = \int |h_n(x)|^2 \varphi_n(x)\, d\mu(x) = \\ = \int |h_n(x)|^2\, d\mu_n(x) = \|h_n(x)\|^2.$$

Иными словами, отображение $h_n(x) \to \psi_n(x)$ является изометрическим отображением пространства H_n на L^2_μ.

Таким образом, каждому элементу f из пространства H соответствует последовательность элементов

$$f = (\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x), \ldots)$$

из L^2_μ, причем скалярное произведение в H задается формулой

$$(f, g) = \int \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \overline{\chi_n(x)}\, d\mu(x),$$

где

$$f = (\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x), \ldots),$$
$$g = (\chi_1(x), \ldots, \chi_n(x), \ldots).$$

*) Относительно теоремы Радона—Никодима см. сноску на стр. 436.

Поскольку для любого элемента f из H интеграл $\int \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n(x)|^2 d\mu(x)$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n(x)|^2$ сходится почти для всех значений x (относительно меры μ). Поэтому почти для всех значений x мы можем считать числа $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x), \ldots$ координатами вектора $h(x)$ из некоторого гильбертова пространства $H(x)$. Таким образом, каждому элементу h из H сопоставлен почти для всех значений x вектор $h(x)$ из гильбертова пространства $H(x)$, причем имеет место равенство

$$\|h\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int |h_n(x)|^2 d\mu(x) = \int \|h(x)\|^2 d\mu(x).$$

Но это и означает, что пространство H изометрически вложено в непрерывную прямую сумму

$$\mathfrak{H} = \int \oplus H(x)\, d\mu(x)$$

гильбертовых пространств $H(x)$ относительно меры μ. Нетрудно видеть, что при этом вложении оператору A соответствует оператор в $\mathfrak{H}$, переводящий вектор $\{h(x)\}$ в вектор $\{xh(x)\}$. Этот оператор определен на множестве таких вектор-функций $\{h(x)\}$, что интеграл

$$\int |x|^2 \|h(x)\|^2 d\mu(x)$$

сходится.

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда пространство H можно так изометрически вложить в непрерывную прямую сумму гильбертовых пространств*

$$\mathfrak{H} = \int \oplus H(x)\, d\mu(x)$$

относительно положительной меры μ, чтобы оператору A соответствовал в $\mathfrak{H}$ оператор умножения на x.

ГЛАВА II

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ И ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В этой главе будет изложен ряд результатов теории обобщенных функций, так или иначе связанных с понятиями положительности и положительной определенности. В центре внимания стоит вопрос о задании таких обобщенных функций положительными мерами на различных множествах. Для непрерывных функций классический пример такого задания дает теорема Бохнера о том, что всякая непрерывная положительно определенная функция является преобразованием Фурье положительной меры. Здесь указываются различные обобщения этой теоремы. В частности, рассматриваются условно положительно определенные обобщенные функции, имеющие полезные приложения в теории случайных процессов (см. § 4).

Дальнейшая часть главы посвящена теории четно-положительно определенных обобщенных функций. Эта теория дает пример того, как в зависимости от априорных оценок, наложенных на изучаемые обобщенные функции, решается вопрос об единственности или неединственности положительной меры, задающей эту функцию. Типичной теоремой этого круга вопросов является теорема о четных функциях $f(x)$, для которых ядро

$$K(x, y) = f(x + y) + f(x - y)$$

положительно определено. Как показал М. Г. Крейн [57], (см. также А. Я. Повзнер [67]), такие функции являются преобразованиями Фурье положительных мер, сосредоточенных на вещественной и мнимой осях. При этом, в отличие от теоремы Бохнера, мера μ, задающая функцию $f(x)$, не

Поскольку для любого элемента f из H интеграл $\int \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n(x)|^2 d\mu(x)$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n(x)|^2$ сходится почти для всех значений x (относительно меры μ). Поэтому почти для всех значений x мы можем считать числа $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x), \ldots$ координатами вектора $h(x)$ из некоторого гильбертова пространства $H(x)$. Таким образом, каждому элементу h из H сопоставлен почти для всех значений x вектор $h(x)$ из гильбертова пространства $H(x)$, причем имеет место равенство

$$\|h\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int |h_n(x)|^2 d\mu(x) = \int \|h(x)\|^2 d\mu(x).$$

Но это и означает, что пространство H изометрически вложено в непрерывную прямую сумму

$$\mathfrak{H} = \int \oplus H(x)\, d\mu(x)$$

гильбертовых пространств $H(x)$ относительно меры μ. Нетрудно видеть, что при этом вложении оператору A соответствует оператор в $\mathfrak{H}$, переводящий вектор $\{h(x)\}$ в вектор $\{xh(x)\}$. Этот оператор определен на множестве таких вектор-функций $\{h(x)\}$, что интеграл

$$\int |x|^2 \|h(x)\|^2 d\mu(x)$$

сходится.

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда пространство H можно так изометрически вложить в непрерывную прямую сумму гильбертовых пространств*

$$\mathfrak{H} = \int \oplus H(x)\, d\mu(x)$$

относительно положительной меры μ, чтобы оператору A соответствовал в $\mathfrak{H}$ оператор умножения на x.

ГЛАВА II

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ И ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В этой главе будет изложен ряд результатов теории обобщенных функций, так или иначе связанных с понятиями положительности и положительной определенности. В центре внимания стоит вопрос о задании таких обобщенных функций положительными мерами на различных множествах. Для непрерывных функций классический пример такого задания дает теорема Бохнера о том, что всякая непрерывная положительно определенная функция является преобразованием Фурье положительной меры. Здесь указываются различные обобщения этой теоремы. В частности, рассматриваются условно положительно определенные обобщенные функции, имеющие полезные приложения в теории случайных процессов (см. § 4).

Дальнейшая часть главы посвящена теории четно-положительно определенных обобщенных функций. Эта теория дает пример того, как в зависимости от априорных оценок, наложенных на изучаемые обобщенные функции, решается вопрос об единственности или неединственности положительной меры, задающей эту функцию. Типичной теоремой этого круга вопросов является теорема о четных функциях $f(x)$, для которых ядро

$$K(x, y) = f(x+y) + f(x-y)$$

положительно определено. Как показал М. Г. Крейн [57], (см. также А. Я. Повзнер [67]), такие функции являются преобразованиями Фурье положительных мер, сосредоточенных на вещественной и мнимой осях. При этом, в отличие от теоремы Бохнера, мера μ, задающая функцию $f(x)$, не всегда однозначно определена, а лишь при некоторых предположениях о росте функции на бесконечности. *Мы считаем, что случаи единственности и неединственности меры* μ *принципиально различны.* Внутри класса единственности доказательство теоремы существования может быть проведено общими методами. При этом возможно перенесение теоремы с функций одного переменного на функции многих переменных. В то же время известные нам примеры показывают, что за пределами класса единственности теорема существования справедлива лишь для функций одного переменного. Аналогичное положение имеет место и для теории моментов.

Методы, использованные в этой главе, показывают, что общий замысел, состоящий в том, чтобы для каждой задачи конструировать соответствующие пространства основных или обобщенных функций, и в данном случае дает ключ к решению вопроса. Например, в теореме М. Г. Крейна оказалось целесообразным рассматривать функции, растущие медленнее, чем все функции e^{ax^2}, $a>0$ (функции, являющиеся линейными функционалами в пространстве $S_{1/2}^{1/2}$, см. стр. 248).

Общие методы, которые могут быть применены для исследования указанного круга вопросов, распадаются на спектральные и на методы, связанные с использованием нормированных колец. При помощи спектральных методов А. Г. Костюченко и Б. С. Митягин доказали недавно ряд теорем о положительно определенных обобщенных функциях. Этот метод примыкает к методам М. Г. Крейна и является синтезом методов М. Г. Крейна [57] и И. М. Гельфанда и А. Г. Костюченко [42]. Основной трудностью в использовании спектральных методов является доказательство самосопряженности возникающих дифференциальных или разностных операторов. Однако, рассматривая связанную с этими операторами задачу Коши и используя результаты выпуска 3, удается преодолеть эту трудность. Другой общий метод — метод нормированных колец был приложен к рассматриваемому кругу вопросов в работе И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка [43].

Рассматриваемые здесь задачи о положительно определенных функциях интересны тем, что в них выявляется тесная связь между единственностью задачи Коши, квазианалитическими функциями, самосопряженными операторами, проблемой моментов и нормированными кольцами. При этом, как уже говорилось, в классе единственности возможен общий метод. Таким методом должна была бы стать правильно построенная теория линейных топологических колец, позволяющая объединить указанные выше подходы. Задачи, рассматриваемые в этой главе, и должны послужить началом для создания такой теории. Поскольку эта теория еще не построена, мы, чтобы не вносить ненужной тенденции, рассматривали задачи элементарными способами, не опирающимися на ту или иную общую теорию.

1. Положительность и положительная определенность. Обобщенную функцию F мы будем называть *положительной* и писать $F\geqslant 0$, если $(F,\varphi)\geqslant 0$ для всех положительных *) основных функций. Например, $\delta(x)\geqslant 0$, а $\delta'(x)$ и $\delta''(x)$ не обладают этим свойством. Во многих случаях положительные обобщенные функции могут быть заданы положительными мерами μ, т. е. имеют вид

$$(F,\varphi)=\int\varphi(x)\,d\mu(x),$$

где положительная мера μ удовлетворяет тем или иным условиям роста на бесконечности (эти условия роста зависят от того, для какого пространства основных функций рассматриваются положительные обобщенные функции).

Рассмотрим пространство C_A вещественных функций $\varphi(x)$, непрерывных на ограниченном замкнутом множестве A n-мерного пространства (множество A может быть, например, шаром $|x|\leqslant a$ **)).

Согласно теореме Ф. Рисса ***), любой положительный линейный функционал F в пространстве C_A задается однозначно определенной конечной положительной мерой μ, определенной на борелевских подмножествах A, т. е.

$$(F,\varphi)=\int\varphi(x)\,d\mu(x).$$

*) Основную функцию $\varphi(x)$ назовем *положительной*, если для всех значений $x=\{x_1,\ldots,x_n\}$ выполняется неравенство $\varphi(x)\geqslant 0$. Функции, удовлетворяющие неравенству $\varphi(x)>0$, назовем *строго положительными*.

**) Напомним обозначения:

$$x=\{x_1,\ldots,x_n\} \text{ и } |x|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}.$$

***) См. Л. А. Люстерник и В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, гл. III, § 22.

Произвольный вещественный линейный функционал F представляется таким же интегралом, но только с мерой μ, принимающей значения обоих знаков. Наконец, если пространство C_A образовано из комплексных функций $\varphi(x)$, а функционал F также комплексный, то справедливо то же самое представление с комплексной мерой μ.

Теорема Рисса сохраняет силу и для некоторых других пространств непрерывных функций. Так, *любой линейный положительный функционал в пространстве $C(a)$ функций $\varphi(x)$, непрерывных в шаре $|x| \leqslant a$ и обращающихся в нуль вне этого шара, также задается положительной конечной мерой.*

Другим понятием, изучаемым в этой главе и связанным с понятием положительности, является *положительная определенность*. Положительно определенные функции возникают при рассмотрении преобразований Фурье положительных суммируемых функций. Положительно определенные функции встречаются в самых различных вопросах теории вероятностей (см. гл. III), теории представлений групп (см. вып. 5) и многих других разделов математики. Для лучшей ориентировки читателя мы сформулируем сейчас некоторые результаты, касающиеся положительно определенных функций *). Сначала рассмотрим функции одного переменного.

Пусть функция $f(x)$ является преобразованием Фурье положительной суммируемой функции $F(\lambda)$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda.$$

В этом случае функция $f(x)$ обладает следующими свойствами: она непрерывна и, каковы бы ни были вещественные числа $x_1, \ldots, x_m$ и комплексные числа $\xi_1, \ldots, \xi_m$, имеет место неравенство

$$\sum_{k,\, j=1}^{m} f(x_k - x_j)\, \xi_k \bar{\xi}_j \geqslant 0. \tag{1}$$

*) Формально мы не будем пользоваться этими результатами. Более того, мы выведем их в § 3 из доказанных нами более общих теорем.

В самом деле, подставим в левую часть этого неравенства вместо $f(x)$ выражение этой функции через $F(\lambda)$. Мы получим, что

$$\sum_{k,\, j=1}^{m} f(x_k - x_j)\, \xi_k \bar{\xi}_j = \sum_{k,\, j=1}^{m} \xi_k \bar{\xi}_j \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(x_k - x_j)} F(\lambda)\, d\lambda =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{m} e^{i\lambda x_j} \xi_j \right|^2 F(\lambda)\, d\lambda.$$

Так как функция $F(\lambda)$ положительна, то выражение, стоящее в правой части этого равенства, положительно или равно нулю. Отсюда и вытекает неравенство (1).

Функции $f(x)$, удовлетворяющие при любых вещественных значениях $x_1, \ldots, x_m$ и комплексных значениях $\xi_1, \ldots, \xi_m$ неравенству (1), называются *положительно определенными*. Мы доказали, таким образом, что преобразование Фурье любой положительной суммируемой функции положительно определено. Дословно также доказывается непрерывность и положительная определенность всех функций $f(x)$, имеющих вид

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\, d\mu(\lambda), \tag{2}$$

где μ — положительная конечная мера на прямой *).

Рассмотрим теперь положительную конечную меру μ в n-мерном пространстве. Равенство

$$f(x) = \int e^{i(\lambda,\, x)}\, d\mu(\lambda) \tag{2'}$$

(где, как обычно, положено $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ и $(\lambda, x) = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$) задает непрерывную функцию $f(x)$, положительно определенную в следующем смысле.

*) Это утверждение является обобщением ранее доказанного, поскольку каждой положительной суммируемой функции $F(\lambda)$ соответствует положительная конечная мера μ, задаваемая равенством

$$\mu(A) = \int_A F(\lambda)\, d\lambda.$$

Каковы бы ни были точки $x_1, \ldots, x_m$ n-мерного пространства R_m и комплексные числа $\xi_1, \ldots, \xi_m$, имеет место неравенство

$$\sum_{k,\ j=1}^{m} f(x_k - x_j)\,\xi_k\overline{\xi_j} \geqslant 0$$

(через $x_k - x_j$ обозначена точка с координатами $x_{k1} - x_{j1}, \ldots$ $\ldots, x_{kn} - x_{jn}$ где $x_k = \{x_{k1}, \ldots, x_{kn}\}$, $x_j = \{x_{j1}, \ldots, x_{jn}\}$).

Как показал С. Бохнер, функциями вида (2′) и исчерпывается класс непрерывных положительно определенных функций, а именно, каждая положительно определенная функция $f(x)$ является преобразованием Фурье*) некоторой положительной конечной меры μ.

Мы рассматривали преобразование Фурье положительных суммируемых функций (или в формулах (2) и (2′) положительных конечных мер). Существенное обобщение теоремы Бохнера получается, если рассматривать преобразование Фурье положительных функций, не суммируемых на всем пространстве. Естественно ввести такое определение положительной определенности, чтобы преобразование Фурье и таких функций (равно как и преобразование Фурье бесконечных положительных мер) было положительно определенным. Мы знаем, что преобразования Фурье таких функций являются обобщенными функциями. Очевидно, что определение положительной определенности, выражаемое неравенством (1), не переносится на обобщенные функции, так как для обобщенных функций понятие значения в точке отсутствует и потому выражение $f(x_k - x_j)$ не имеет смысла. Однако можно показать, что данное нами определение положительной определенности для непрерывных функций эквивалентно следующему: непрерывная функция $f(x)$ называется *положительно определенной*, если для любой бесконечно дифференцируемой финитной функции $\varphi(x)$ выполняется неравенство

$$\int\int \overline{f(t-y)}\,\varphi(t)\,\overline{\varphi(y)}\,dt\,dy \geqslant 0 \tag{3}$$

(доказательство эквивалентности проведено в § 3, п 2).

Перепишем это определение так, чтобы его можно было перенести на обобщенные функции. Для этого сделаем в интеграле (3) подстановку $t - y = x$. При этом неравенство (3) примет вид

$$\int \overline{f(x)} \int \varphi(t)\,\overline{\varphi(t-x)}\,dt\,dx \geqslant 0. \tag{3′}$$

Но интеграл $\int \varphi(t)\,\overline{\varphi(t-x)}\,dt$ представляет собой не что иное, как свертку*) функций $\varphi(x)$ и $\varphi^*(x) = \overline{\varphi(-x)}$

$$\int \varphi(t)\,\overline{\varphi(t-x)}\,dt = \varphi * \varphi^*(x).$$

Таким образом, мы получаем, что непрерывная функция $f(x)$ положительно определена, если соответствующий ей функционал

$$(f,\ \psi) = \int \overline{f(x)}\,\psi(x)\,dx$$

принимает положительные значения для всех функций вида $\psi(x) = \varphi * \varphi^*(x)$, т. е. если $(f,\ \varphi * \varphi^*) \geqslant 0$ для всех финитных бесконечно дифференцируемых функций. В таком виде определение положительной определенности может быть распространено на обобщенные функции. Именно, пусть F — обобщенная функция в пространстве K финитных бесконечно

---

*) Преобразование Фурье $\tilde{\mu}$ меры μ (вообще говоря, комплексной) мы понимаем как преобразование Фурье соответствующей обобщенной функции, определяемой для основной функции $\varphi(\lambda)$ равенством

$$(\mu,\ \varphi) = \int \varphi(\lambda)\,\overline{d\mu(\lambda)}.$$

Иными словами, мы положим по определению

$$(\tilde{\mu},\ \tilde{\varphi}) = (2\pi)^n \int \varphi(\lambda)\,\overline{d\mu(\lambda)},$$

где

$$\tilde{\varphi}(x) = \int e^{i(\lambda,\ x)}\varphi(\lambda)\,d\lambda.$$

Нетрудно проверить, что если мера μ конечна, то обобщенная функция $\tilde{\mu}$ задается непрерывной функцией $f(x)$, где

$$f(x) = \int e^{i(\lambda,\ x)}\,d\mu(\lambda).$$

*) Напомним, что *сверткой* основных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называется функция

$$\varphi * \psi(x) = \int \varphi(t)\,\psi(x-t)\,dt.$$

дифференцируемых функций. Мы будем называть эту обобщенную функцию *положительно определенной*, если для всех основных функций $\varphi(x)$ выполняется неравенство $(F, \varphi * \varphi^*) \geqslant 0$, где $\varphi^*(x) = \overline{\varphi(-x)}$. В дальнейшем мы распространим это определение на обобщенные функции в других пространствах основных функций.

Л. Шварц обобщил теорему С. Бохнера на положительно определенные обобщенные функции в пространстве K. Чтобы сформулировать полученную им теорему, введем понятие меры степенного роста. Назовем положительную меру μ *мерой степенного роста*, если интеграл $\int (1 + |\lambda|^2)^{-p}\, d\mu(\lambda)$ сходится при некотором $p \geqslant 0$. Теорема Бохнера — Шварца состоит в том, что *класс положительно определенных обобщенных функций, являющихся функционалами в пространстве K, совпадает с классом преобразований Фурье положительных мер степенного роста.* Иными словами, каждую такую обобщенную функцию F можно записать в виде

$$(F, \varphi) = \int \tilde{\varphi}(\lambda)\, d\mu(\lambda), \tag{4}$$

где $\tilde{\varphi}(\lambda)$ — преобразование Фурье основной функции $\varphi(x)$, а μ — положительная мера степенного роста. Обратно, все обобщенные функции вида (4) положительно определены.

Примерами положительно определенных обобщенных функций могут служить преобразования Фурье функций $|x|^\lambda$, x_+^λ, x_-^λ, где $\lambda \geqslant 0$, и т. д. (относительно определения этих преобразований Фурье см. вып. 1, гл. II, § 2, 3). В частности, положительно определены обобщенные функции $\delta(x)$ и $-\delta''(x)$, являющиеся, соответственно, преобразованиями Фурье положительных функций 1 и x^2. Впрочем, в положительной определенности этих обобщенных функций можно убедиться непосредственно. В самом деле, для любой бесконечно дифференцируемой финитной функции $\varphi(x)$ мы имеем

$$\int \delta(t-y)\varphi(t)\overline{\varphi(y)}\, dy\, dt = \int |\varphi(t)|^2\, dt \geqslant 0$$

и

$$-\int \delta''(t-y)\varphi(t)\overline{\varphi(y)}\, dy\, dt = \\ = -\int \varphi(t)\overline{\varphi''(t)}\, dt = \int |\varphi'(t)|^2\, dt \geqslant 0.$$

Теорема Бохнера — Шварца связана с преобразованиями Фурье положительных функций (а также и мер) степенного роста. Можно рассматривать и преобразования Фурье быстро растущих функций, которые являются обычно линейными функционалами в пространствах аналитических функций. Рассмотрим, например, положительную функцию e^{cx}, где c — вещественное число. Ее преобразованием Фурье является обобщенная функция $F = 2\pi\,\delta(\lambda - ic)$ в пространстве Z целых аналитических функций экспоненциального типа, быстро убывающих на вещественной оси вместе со всеми производными (см. вып. 1, гл. II, § 2, п. 2). Эта обобщенная функция положительно определена в следующем смысле. Пусть $\varphi(z)$ — функция из пространства Z. Обозначим через $\varphi^*(z)$ функцию из этого пространства, определяемую формулой $\varphi^*(z) = \overline{\varphi(-\bar{z})}$. Если z вещественно, $z = x$, то $\varphi^*(x) = \overline{\varphi(-x)}$, так что это обозначение согласуется с введенным ранее.

Обобщенная функция F в пространстве Z называется положительно определенной, если $(F, \varphi * \varphi^*) \geqslant 0$ для всех функций $\varphi(z)$ из Z *).

Мы изучим в этой главе и другие обобщения понятия положительной определенности.

§ 2. ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Мы уже отметили во введении к этой главе связь между положительными мерами и положительно определенными обобщенными функциями. Эта связь состоит в следующем. Преобразование Фурье переводит положительно определенные функции F в обобщенные функции $\tilde{F}$, обладающие следующим свойством, которое мы будем называть свойством *мультипликативной положительности*: для любой основной функции $\tilde{\varphi}(\lambda)$ из двойственного пространства выполняется неравенство $(\tilde{F}, \tilde{\varphi}\bar{\tilde{\varphi}}) \geqslant 0$.

Мультипликативная положительность является, вообще говоря, более слабым требованием, чем положительность

*) Поскольку каждая функция $\varphi(z)$ из Z, рассматриваемая при вещественных значениях z, принадлежит пространству S, для этих функций определено понятие свертки. При этом свертка двух функций из пространства Z принадлежит тому же пространству.

обобщенной функции. Однако, как мы увидим ниже, для многих пространств основных функций класс мультипликативно положительных линейных функционалов совпадает с классом положительных функционалов. Положительные же функционалы задаются, как правило, положительными мерами. В этом параграфе мы и изучим положительные линейные функционалы в некоторых пространствах основных функций и установим связь между понятиями положительности и мультипликативной положительности.

1. Положительные обобщенные функции в пространстве финитных бесконечно дифференцируемых функций. Обобщенная функция F называется *положительной*, если для любой положительной основной функции $\varphi(x)$ выполняется неравенство

$$(F, \varphi) \geqslant 0.$$

В этом пункте мы изучим положительные обобщенные функции в пространстве K.

Теорема 1. *Каждая обобщенная функция F, такая, что $(F, \varphi) \geqslant 0$ для всех бесконечно дифференцируемых финитных положительных функций $\varphi(x)$, имеет вид*

$$(F, \varphi) = \int \varphi(x)\, d\mu(x),$$

где μ — некоторая положительная мера (не обязательно конечная).

Обратно, каждая положительная мера μ задает положительный линейный функционал в пространстве K.

Для доказательства этой теоремы покажем сначала, что любой положительный линейный функционал в пространстве K может быть распространен с сохранением положительности на пространство C всех непрерывных финитных функций. При этом топология в пространстве C задается следующим образом: последовательность $\{\varphi_m(x)\}$ функций из этого пространства сходится к нулю, если все функции $\varphi_m(x)$ равны нулю вне одного и того же шара $|x| \leqslant a$ и последовательность $\varphi_m(x)$ равномерно сходится к нулю.

Лемма 1. *Каждый положительный линейный функционал в пространстве K непрерывен на нем относительно топологии пространства C.*

Доказательство. Пусть $\{\varphi_m(x)\}$ — последовательность функций из пространства K, сходящаяся к нулю в смысле топологии пространства C. Иными словами, пусть функции $\varphi_m(x)$ обращаются в нуль вне одного и того же шара $|x| \leqslant a$ и равномерно сходятся к нулю. Тогда для любого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого номера n, выполняется неравенство

$$-\varepsilon \leqslant \varphi_m(x) \leqslant \varepsilon. \tag{1}$$

Умножим все члены этого неравенства на положительную функцию $\alpha(x)$ из пространства K, равную единице при $|x| \leqslant a$. Так как $\varphi_m(x) = 0$ при $|x| \geqslant a$, то $\alpha(x)\varphi_m(x) = \varphi_m(x)$. Поэтому мы получаем неравенство

$$-\varepsilon\alpha(x) \leqslant \varphi_m(x) \leqslant \varepsilon\alpha(x).$$

Применив к этому неравенству положительный линейный функционал F, мы получаем, что

$$-\varepsilon(F, \alpha) \leqslant (F, \varphi_m) \leqslant \varepsilon(F, \alpha).$$

Ввиду произвольности ε отсюда следует, что $\lim\limits_{m\to\infty}(F, \varphi_m) = 0$ *). Тем самым доказана непрерывность функционала F относительно топологии пространства C.

Аналогичные рассуждения показывают, что если последовательность функций $\{\varphi_m(x)\}$ из пространства K фундаментальна в смысле топологии пространства C, а F — положительный линейный функционал, то последовательность чисел $\{(F, \varphi_m)\}$ также фундаментальна. Отсюда вытекает, что каждый положительный линейный функционал в пространстве K можно распространить по непрерывности на пространство C непрерывных финитных функций.

В самом деле, если $\varphi(x)$ — функция из пространства C, то существует последовательность функций $\{\varphi_m(x)\}$ из пространства K, сходящаяся к $\varphi(x)$ в топологии пространства C. Можно положить, например, $\varphi_m(x) = \varphi * \alpha_m(x)$, где $\{\alpha_m(x)\}$ —

*) Функционал F нельзя применять непосредственно к членам неравенства (1), так как постоянные не являются финитными функциями. Прием, связанный с умножением на функцию $\alpha(x)$, мы будем неоднократно применять в дальнейшем в аналогичных случаях.

некоторая δ-последовательность*), состоящая из функций пространства K. Но тогда функции $\{\varphi_m(x)\}$ образуют фундаментальную последовательность в смысле топологии пространства C. По сделанному замечанию числовая последовательность $\{(F, \varphi_m)\}$ также будет фундаментальной. Полагая $(F, \varphi) = \lim\limits_{m\to\infty} (F, \varphi_m)$, мы распространяем функционал F на функцию φ. Читатель без труда убедится, что таким путем получается линейный функционал, непрерывный на всем пространстве C. Получающийся линейный функционал в пространстве C положителен, так как если функция $\varphi(x)$ из пространства C положительна, то аппроксимирующую последовательность $\{\varphi_m(x)\}$ тоже можно выбрать положительной (взяв, например, функции δ-последовательности положительными). Но тогда мы получим, что

$$(F, \varphi) = \lim_{m\to\infty} (F, \varphi_m) \geqslant 0.$$

Таким образом, мы доказали, что *каждый положительный линейный функционал в пространстве K однозначно распространяется с сохранением положительности на пространство C непрерывных финитных функций*. Дадим теперь описание положительных линейных функционалов в C.

Лемма 2. *Каждый положительный линейный функционал в пространстве C задается формулой вида*

$$(F, \varphi) = \int \varphi(x)\, d\mu(x),$$

где μ — некоторая положительная мера (вообще говоря, не являющаяся конечной).

Доказательство. Функционал F определен на всех непрерывных финитных функциях. Тем самым он определен

*) *δ-последовательностью*, или *дельтообразной последовательностью* мы называем такую последовательность функций $\{\varphi_m(x)\}$, что для любой непрерывной ограниченной функции $f(x)$ выполняется равенство

$$\lim_{m\to\infty} \int f(x)\,\varphi_m(x)\,dx = (\delta, f) = f(0).$$

Если $\{\varphi_m(x)\}$ — δ-последовательность, то $\{\overset{*}{\varphi}_m(x)\}$ также является δ-последовательностью. Свертка $\{\varphi_m * \psi_m(x)\}$ двух δ-последовательностей является δ-последовательностью.

также на каждом пространстве $C(a)$, состоящем из таких непрерывных функций $\varphi(x)$, что $\varphi(x) = 0$ при $|x| \geqslant a$. По теореме Ф. Рисса, в каждом из пространств $C(a)$ функционал F имеет вид $(F, \varphi) = \int \varphi(x)\, d\mu_a(x)$, где μ_a — положительная мера, заданная в шаре $|x| \leqslant a$. Поскольку меры μ_a однозначно определяются значениями функционала F, то при $a < b$ меры μ_a и μ_b совпадают в шаре $|x| \leqslant a$. Поэтому существует такая мера μ, что в каждом шаре $|x| \leqslant a$ она совпадает с мерой μ_a. Но тогда для любой функции $\varphi(x)$ из пространства C имеет место формула

$$(F, \varphi) = \int \varphi(x)\, d\mu(x).$$

Из лемм 1 и 2 непосредственно вытекает, что каждый положительный линейный функционал в пространстве K задается положительной мерой μ. Тем самым первая часть теоремы 1 доказана. Обратное утверждение (вторая часть теоремы 1) — *каждая положительная мера μ задает положительный линейный функционал*

$$(F, \varphi) = \int \varphi(x)\, d\mu(x)$$

на пространстве K — очевидно. Тем самым теорема 1 доказана полностью.

2. Общий вид положительных обобщенных функций в пространстве S. Рассмотрим теперь пространство S бесконечно дифференцируемых функций, быстро убывающих при $|x| \to \infty$ вместе с производными любого порядка (напомним, что функция $\varphi(x)$ называется быстро убывающей, если $\lim\limits_{|x|\to\infty} |x^k \varphi(x)| = 0$ при любом k).

Пусть задан положительный линейный функционал F в пространстве S. Тем самым задан и положительный функционал в пространстве K (поскольку K содержится в S, и из сходимости в K вытекает сходимость в S). В силу результатов п. 1, существует такая положительная мера μ, что для всех функций $\varphi(x)$ из пространства K функционал F может быть представлен в виде

$$(F, \varphi) = \int \varphi(x)\, d\mu(x). \tag{2}$$

Для того чтобы формула (2) имела смысл для всех функций $\varphi(x)$ на S, мера μ должна удовлетворять некоторым условиям роста на бесконечности. Именно, мы покажем, что из непрерывности функционала F относительно топологии пространства S вытекает сходимость интеграла

$$\int (1+|x|^2)^{-p}\, d\mu(x)$$

при некотором $p>0$ (или, как мы будем обычно говорить, степенной рост меры μ).

Чтобы доказать необходимость этого условия, мы используем следующую лемму Фату *).

Пусть μ — положительная мера, а $\{\varphi_m(x)\}$ — такая последовательность положительных функций, что $\int \varphi_m(x)\, d\mu(x) \leqslant A$ при всех m. Если в каждой точке x $\lim\limits_{m\to\infty} \varphi_m(x) = \varphi(x)$, то $\int \varphi(x)\, d\mu(x) \leqslant A$.

В силу этой леммы для доказательства степенного роста меры μ достаточно сконструировать такую последовательность $\{\varphi_m(x)\}$ положительных финитных бесконечно дифференцируемых функций, что $\int \varphi_m(x)\, d\mu(x) < 1$ и

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_m(x) = A(1+|x|^2)^{-p}$$

при некоторых $A>0$ и $p>0$. Эта последовательность строится следующим образом.

Из непрерывности функционала F относительно топологии пространства S вытекает существование такой окрестности нуля U в пространстве S, что $|(F, \varphi)| \leqslant 1$ для всех функций $\varphi(x)$ из этой окрестности. В силу определения топологии в пространстве S эта окрестность задается натуральными числами p, k и числом η и состоит из всех функций $\varphi(x)$ пространства S, удовлетворяющих при $|q| \leqslant k$ неравенству

$$\sup_x \left| (1+|x|^2)^p \varphi^{(q)}(x) \right| \leqslant \eta.$$

*) См. И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, М.— Л., 1950, стр. 125.

Искомые функции $\varphi_m(x)$ определяются равенством

$$\varphi_m(x) = A\alpha\left(\frac{x}{m}\right)(1+|x|^2)^{-p},$$

где $\alpha(x)$—любая бесконечно дифференцируемая финитная функция, равная единице при $|x| \leqslant 1$. При достаточно малом значении A все функции $\varphi_m(x)$ принадлежат окрестности нуля U *) и потому для них выполняется неравенство $(F, \varphi_m) \leqslant 1$. Но так как функции $\varphi_m(x)$ финитны, то для них функционал F задается формулой (2). Следовательно, функции $\varphi_m(x)$ удовлетворяют неравенству

$$\int \varphi_m(x)\, d\mu(x) \leqslant 1. \tag{3}$$

Кроме того, по построению функций $\varphi_m(x)$ мы имеем для любого x равенство

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_m(x) = A(1+|x|^2)^{-p}.$$

Воспользуемся теперь леммой Фату. Переходя в неравенстве (3) к пределу, мы получим, что

$$A\int (1+|x|^2)^{-p}\, d\mu(x) \leqslant 1.$$

Но это и означает, что мера μ имеет степенной рост.

Итак, если функционал F, задаваемый формулой (2), непрерывен относительно топологии пространства S, то соответствующая ему мера μ имеет степенной рост. Обратно, если положительная мера μ имеет степенной рост, то интеграл $\int \varphi(x)\, d\mu(x)$ сходится для всех функций $\varphi(x)$ из пространства S и задает в этом пространстве линейный функционал. Из определения топологии в пространстве S легко следует непрерывность этого функционала.

Теперь мы уже в состоянии доказать, что формула (2) справедлива для всех функций $\varphi(x)$ из пространства S. В самом деле, мы видели, что линейные функционалы (F, φ) и $\int \varphi(x)\, d\mu(x)$ совпадают на всюду плотном в пространстве S

*) Это легко вытекает из неравенств вида

$$[(1+|x|^2)^{-p}]^{(q)} \leqslant C_q(1+|x|^2)^{-p}.$$

множестве финитных функций. Кроме того, оба функционала непрерывны относительно топологии пространства S. Отсюда следует совпадение этих функционалов на всем пространстве S.

Итак, нами доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Каждая положительная обобщенная функция F в пространстве S задается положительной мерой μ степенного роста*

$$(F, \varphi) = \int \varphi(x)\, d\mu(x). \tag{2}$$

Обратно, если μ — положительная мера степенного роста, то формула (2) задает положительную обобщенную функцию в пространстве S. Само определение меры степенного роста дано на стр. 178.

3. Положительные обобщенные функции для некоторых других пространств *). Метод, использованный нами для описания положительных обобщенных функций в пространстве S, применим к значительно более широкому классу линейных топологических пространств, в частности, к пространствам типа $K(M_p)$ и их объединениям.

Относительно определения пространств типа $K(M_p)$ см. главу I, § 3, п. 6. Мы ограничимся здесь рассмотрением пространств $K(M_p)$, для которых функции $M_p(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

а) функции $M_p(x)$ бесконечно дифференцируемы вне некоторой окрестности нуля (одной и той же для всех p) и не обращаются в бесконечность;

б) для любого p найдутся такие числа q, a и C, что если $|x| \geqslant a$ и $1 \leqslant |k| \leqslant p$, то

$$\left[\frac{1}{M_q(x)}\right]^{(k)} \leqslant \frac{C}{M_p(x)}.$$

Для таких пространств $K(M_p)$ положительные обобщенные функции описываются следующей теоремой.

Теорема 3. *Если последовательность функций $M_p(x)$ удовлетворяет условиям* а) *и* б), *то положительная обобщенная функция F в пространстве $K(M_p)$ задается положительной мерой μ, такой, что интеграл $\int [M_p(x)]^{-1} d\mu(x)$ сходится при некотором p. Обратно, каждая положительная мера μ, такая, что интеграл $\int [M_p(x)]^{-1} d\mu(x)$* сходится для некоторого p, *задает положительную обобщенную функцию в пространстве $K(M_p)$.*

Доказательство этой теоремы протекает совершенно аналогично доказательству соответствующей теоремы для пространства S, которое является частным случаем пространств $K(M_p)$, когда

*) Этот пункт может быть опущен при первом чтении.

$M_p(x) = (1 + |x|^2)^p$. Мы предоставляем читателю провести детали соответствующих доказательств.

Рассмотрим теперь объединения пространств типа $K(M_p)$. Эти объединения задаются двойной последовательностью функций $\{M_{rp}(x)\}$. При фиксированном r функции $M_{rp}(x)$ должны удовлетворять условиям а) и б) и условию $1 \leqslant M_{r1}(x) \leqslant \ldots \leqslant M_{rp}(x) \leqslant \ldots$ Пространство, соответствующее последовательности функций $M_{rp}(x)$, $1 \leqslant p < \infty$ (при фиксированном r) мы будем обозначать через $K_r(M_{rp})$. Пусть теперь при каждом p выполняются неравенства $M_{r+1,\,p} \leqslant M_{rp}$. Тогда из того, что функция $\varphi(x)$ принадлежит пространству $K_r(M_{rp})$, следует, что она принадлежит и пространству $K_{r+1}(M_{rp})$. Таким образом, мы получаем возрастающую цепочку пространств

$$K_1(M_{1p}) \subset \ldots \subset K_r(M_{rp}) \subset \ldots.$$

Объединение этой цепочки с соответствующей топологией мы и будем называть пространством типа $K(M_{rp})$ (последовательность функций $\{\varphi_m(x)\}$ из пространства $K(M_{rp})$ сходится к нулю, если все функции $\varphi_m(x)$ принадлежат одному и тому же пространству $K_r(M_{rp})$ и сходятся к нулю в этом пространстве).

Положительные обобщенные функции в пространствах типа $K(M_{rp})$ описываются следующей теоремой.

Теорема 4. *Пусть дана двойная последовательность функций $\{M_{rp}(x)\}$, удовлетворяющих при каждом фиксированном r условиям* а) *и* б) (см. стр. 186), *а также неравенствам*

$$1 \leqslant M_{r1}(x) \leqslant \ldots \leqslant M_{rp}(x) \leqslant \ldots,$$
$$M_{rp}(x) \geqslant M_{r+1,\,p}(x).$$

Каждая положительная обобщенная функция в пространстве $K(M_{rp})$ задается положительной мерой μ, такой, что для любого r интеграл $\int [M_{rp}(x)]^{-1} d\mu(x)$ сходится при некотором p. Обратно, если μ — такая положительная мера, что для любого r интеграл $\int [M_{rp}(x)]^{-1} d\mu(x)$ сходится при некотором p, то равенство $(F, \varphi) = \int \varphi(x)\, d\mu(x)$ задает положительную обобщенную функцию в пространстве $K(M_{rp})$.

Рассмотрим, например, пространство S_α, состоящее из бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|x^k \varphi^{(q)}(x)| \leqslant C_q A^k k^{k\alpha},$$

где постоянные C_q и A зависят от функции $\varphi(x)$.

Как показано в выпуске 2 (гл. IV, § 3, п. 1), эти пространства являются пространствами типа $K(M_{rp})$, где

$$M_{rp}(x) = e^{\frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{p}\right)|x|^{1/\alpha}}.$$

Из теоремы 4 вытекает следующее описание положительных линейных функционалов в пространстве S_α.

Теорема 5. *Все положительные линейные функционалы в пространстве S_α задаются такими положительными мерами, что для любого $r>0$ интеграл*

$$\int e^{-\frac{1}{r}\left(1-\frac{1}{p}\right)|x|^{1/\alpha}}\,d\mu(x) \qquad (3)$$

сходится при некотором $p>0$. Обратно, если мера μ такова, что интеграл (3) *для любого $r>0$ сходится при некотором $p>0$, то равенство $(F,\varphi)=\int\varphi(x)\,d\mu(x)$ задает положительный линейный функционал в пространстве S_α.*

Заметим, что условие сходимости интеграла (3) для любого $r>0$ при некотором $p>0$ равносильно условию сходимости интеграла $\int e^{-a|x|^{1/\alpha}}\,d\mu(x)$ при любом $a>0$.

4. Мультипликативно положительные обобщенные функции. Многие из рассматриваемых нами пространств (в частности, пространства K и S) являются линейными алгебрами, т. е. произведение принадлежащих этим пространствам функций принадлежит тем же пространствам. В таких пространствах, наряду с разобранным выше понятием положительности, существует другое понятие — мультипликативной положительности. Оно будет существенным образом использовано ниже при изучении положительно определенных обобщенных функций.

Обобщенная функция F называется *мультипликативно положительной*, если для каждой основной функции $\varphi(x)$ выполняется неравенство $(F,\varphi\bar{\varphi})\geqslant 0$ *).

Всякая положительная обобщенная функция мультипликативно положительна. В самом деле, так как $\varphi(x)\overline{\varphi(x)}\geqslant 0$, то из выполнения неравенства $(F,\psi)\geqslant 0$ для всех положительных основных функций вытекает выполнение неравенства $(F,\varphi\bar{\varphi})\geqslant 0$ для всех основных функций.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно — существуют линейные пространства (например, пространство всех вещественных многочленов от двух переменных), в которых

*) Рассматриваемые пространства вместе с каждой функцией $\varphi(x)$ содержат и функцию $\overline{\varphi(x)}$. Переход от функции $\varphi(x)$ к функции $\overline{\varphi(x)}$ обладает обычными свойствами инволюции.

выполнение неравенства $(F,\varphi\bar{\varphi})\geqslant 0$ для всех входящих в них функций не влечет за собой выполнения неравенства $(F,\psi)\geqslant 0$ для всех положительных функций из этих пространств (см. § 7). Однако *для пространств K и S всякая мультипликативно положительная обобщенная функция положительна.*

Доказательство этого утверждения мы проведем сначала для пространства K. Пусть F — обобщенная мультипликативно положительная функция в пространстве K. Так как функционал F непрерывен, то для доказательства его положительности достаточно показать, что функции вида $\varphi(x)\overline{\varphi(x)}$ всюду плотны во множестве положительных функций пространства K *).

Рассмотрим положительную функцию $\psi(x)$ из пространства K. Эта функция обращается в нуль при $|x|\geqslant a$, где a — достаточно большое положительное число. Обозначим через $\alpha(x)$ положительную финитную бесконечно дифференцируемую функцию, равную единице при $|x|\leqslant a$, и положим $\varphi_m(x)=\alpha(x)\sqrt{\psi(x)+1/m}$. Тогда очевидно, что функция $\varphi_m(x)$ принадлежит пространству K **) и что последовательность функций $\varphi_m^2(x)\equiv\varphi_m(x)\overline{\varphi_m(x)}$ сходится в топологии пространства K к функции $\psi(x)$.

Итак, мы доказали, что множество всех функций вида $\varphi(x)\overline{\varphi(x)}$ всюду плотно во множестве положительных функций из пространства K. Поэтому из выполнения неравенства $(F,\varphi\bar{\varphi})\geqslant 0$ для всех функций $\varphi(x)$ из пространства K следует выполнение неравенства $(F,\psi)\geqslant 0$ для всех положительных функций $\psi(x)$ из этого пространства, т. е. положительность обобщенной функции F.

Докажем теперь совпадение положительности и мультипликативной положительности для обобщенных функций в пространстве S.

Пусть $\psi(x)$ — положительная функция из пространства S. Существует последовательность положительных финитных

*) Заметим, что множество функций вида $\varphi(x)\overline{\varphi(x)}$, $\varphi(x)\in K$ не совпадает со множеством всех положительных функций в пространстве K. Это связано с тем, что функция $\sqrt{\psi(x)}$ может иметь излом в тех точках, где $\psi(x)=0$.

**) Так как $\psi(x)+1/m$ не обращается в нуль, то функция $\sqrt{\psi(x)+1/m}$ бесконечно дифференцируема.

функций $\{\varphi_m(x)\}$, сходящаяся к $\psi(x)$ в топологии пространства S *). Поэтому множество положительных функций пространства K всюду плотно во множестве положительных функций пространства S. Но, как мы показали выше, во множестве положительных функций пространства K всюду плотно множество функций вида $\varphi(x)\overline{\varphi(x)}$, где $\varphi(x)\in K$. Поскольку вложение пространства K в пространство S непрерывно, то множество функций вида $\varphi(x)\overline{\varphi(x)}$ всюду плотно и в множестве положительных функций из S. Но тогда из мультипликативной положительности обобщенной функции F следует ее положительность. Таким образом, мы показали, что и *в пространстве S понятия положительности и мультипликативной положительности совпадают* **).

Так как мы знаем общий вид положительных обобщенных функций для пространств K и S, то из доказанного утверждения вытекают следующие теоремы.

Теорема 6. *Всякая мультипликативно положительная обобщенная функция в пространстве K всех финитных бесконечно дифференцируемых функций задается положительной мерой.*

Теорема 7. *Всякая мультипликативно положительная обобщенная функция в пространстве S бесконечно дифференцируемых функций, быстро убывающих при $|x|\to\infty$ вместе с производными любого порядка, задается положительной мерой степенного роста.*

§ 3. ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ. ТЕОРЕМА БОХНЕРА

В этом параграфе мы найдем общий вид положительно определенных обобщенных функций в пространствах K и S.

*) Например, положим $\varphi_m(x)=\alpha\left(\frac{x}{m}\right)\psi(x)$, где $\alpha(x)$ — финитная, бесконечно дифференцируемая функция, равная единице в некоторой окрестности точки $x=0$ и такая, что $0\leqslant\alpha(x)\leqslant 1$. Тогда последовательность функций $\{\varphi_m(x)\}$ будет обладать требуемыми свойствами.

**) Аналогично доказывается совпадение положительности и мультипликативной положительности в любом пространстве Φ при условии, что положительные функции из пространства K всюду плотны в множестве положительных функций из пространства Φ и отображение K в Φ непрерывно. В частности, это совпадение имеет место во всех пространствах $K(M_{rp})$.

Мы покажем, что для этих пространств положительно определенные обобщенные функции являются преобразованиями Фурье положительных мер степенного роста. Начнем рассмотрение положительно определенных обобщенных функций со случая пространства S, так как этот случай проще.

1. Положительно определенные обобщенные функции в пространстве S. Обобщенная функция F в пространстве S называется *положительно определенной*, если для всех функций $\varphi(x)$ из этого пространства выполняется неравенство $(F, \varphi*\varphi^*)\geqslant 0$, где через $\varphi*\varphi^*(x)$ обозначена свертка функций $\varphi(x)$ и $\varphi^*(x)=\overline{\varphi(-x)}$

$$\varphi*\varphi^*(x)=\int\varphi(t)\overline{\varphi(t-x)}\,dt.$$

Покажем, что *при преобразовании Фурье положительно определенные обобщенные функции в пространстве S переходят в мультипликативно положительные обобщенные функции в том же пространстве* *), *причем таким путем могут быть получены все мультипликативно положительные обобщенные функции в пространстве S.*

В самом деле, преобразование Фурье переводит свертку функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ в произведение их преобразований Фурье $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$, а функцию $\varphi^*(x)$ — в функцию $\overline{\psi(\lambda)}$, где $\psi(\lambda)$ — преобразование Фурье для $\varphi(x)$. Поэтому преобразование Фурье функции $\varphi*\varphi^*(x)$ равно $\psi(\lambda)\overline{\psi(\lambda)}$, где $\psi(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $\varphi(x)$.

При этом, поскольку пространство S двойственно самому себе относительно преобразования Фурье, любая функция вида $\psi(\lambda)\overline{\psi(\lambda)}$, где $\psi(\lambda)\in S$, является преобразованием Фурье функции вида $\varphi*\varphi^*(x)$, $\varphi(x)\in S$. Но, по определению, преобразованием Фурье обобщенной функции F в пространстве S называется такая обобщенная функция $\tilde F$ в том же пространстве, что $(\tilde F, \tilde\varphi)=(2\pi)^n(F, \varphi)$ для всех функций $\varphi(x)$ из пространства S. Следовательно, выполнение неравенства $(F, \varphi*\varphi^*)\geqslant 0$ для всех функций $\varphi(x)$ пространства S эквивалентно выполнению неравенства $(\tilde F, \psi\overline{\psi})\geqslant 0$ для всех функций $\psi(\lambda)$ того же пространства. Поэтому положительная

*) Напомним, что пространство S двойственно самому себе относительно преобразования Фурье.

определенность обобщенной функции F в пространстве S эквивалентна мультипликативной положительности ее преобразования Фурье $\tilde{F}$.

Поскольку мультипликативно положительные обобщенные функции в пространстве S задаются положительными мерами степенного роста (см. § 2, п. 2), то справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы обобщенная функция F в пространстве S была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы она являлась преобразованием Фурье положительной меры μ степенного роста.*

2. Непрерывные положительно определенные функции. В этом пункте мы рассмотрим частный случай положительно определенных обобщенных функций в пространстве S — непрерывные положительно определенные функции. Непрерывная функция $f(x)$ называется *положительно определенной*, если для любых вещественных значений $x_1, \ldots, x_m$ и комплексных чисел $\xi_1, \ldots, \xi_m$ выполняется неравенство

$$\sum_{j,\,k=1}^{m} f(x_k - x_j)\,\xi_k\bar{\xi}_j \geqslant 0. \tag{1}$$

Мы покажем сейчас, что *непрерывные положительно определенные функции $f(x)$ являются положительно определенными обобщенными функциями в пространстве S*. Прежде чем показать это, установим некоторые простые свойства непрерывных положительно определенных функций.

В первую очередь отметим, что если функция $f(x)$ положительно определена, то и функция $\overline{f(x)}$ также положительно определена, так как

$$\sum_{j,\,k=1}^{m} \overline{f(x_k - x_j)}\,\xi_k\bar{\xi}_j = \overline{\sum_{j,\,k=1}^{m} f(x_k - x_j)\,\bar{\xi}_k\xi_j} \geqslant 0.$$

Далее заметим, что неравенство (1) означает положительную определенность матрицы с элементами $f(x_k - x_j)$. Известно, что условиями положительной определенности матрицы являются ее эрмитовость и положительность диагональных

миноров. В силу эрмитовости матрицы $f(x_k - x_j)$ мы получаем, что

$$f(-x) = \overline{f(x)}.$$

Из положительности диагональных элементов этой матрицы вытекает, что

$$f(0) \geqslant 0.$$

Наконец, поскольку число $x_k - x_j$ произвольно, то положительность диагональных миноров второго порядка означает,

$$\begin{vmatrix} f(0) & f(x) \\ f(-x) & f(0) \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

Из последнего неравенства вытекает

$$|f(x)| \leqslant f(0),$$

т. е. ограниченность функции $f(x)$.

Мы видим, таким образом, что *положительно определенные непрерывные функции ограничены*. Поскольку каждая непрерывная ограниченная функция $f(x)$ определяет обобщенную функцию

$$(f, \varphi) = \int \overline{f(x)}\,\varphi(x)\,dx$$

в пространстве S, то мы получаем следующее утверждение: *каждая положительно определенная непрерывная функция $f(x)$ определяет обобщенную функцию в пространстве S.*

Покажем теперь, что эта обобщенная функция положительно определена, т. е. что $(f, \varphi * \varphi^*) \geqslant 0$ для всех функций $\varphi(x)$ из пространства S. Заметим для этого, что выражение $(f, \varphi * \varphi^*)$ можно представить в виде интеграла

$$\int \overline{f(x-y)}\,\varphi(y)\,\overline{\varphi(x)}\,dx\,dy.$$

Этот интеграл является пределом при $T \to \infty$ интегралов

$$\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} \overline{f(x-y)}\,\varphi(y)\,\overline{\varphi(x)}\,dx\,dy \tag{2}$$

(так как функция $\varphi(x)$ абсолютно интегрируема, а функция $f(x)$ ограничена). Но каждый из интегралов (2) является пределом интегральных сумм

$$\sum_{j,\,k=1}^{m} \overline{f(x_k - x_j)}\,\varphi(x_k)\overline{\varphi(x_j)}\,\Delta x_k\,\Delta x_j,$$

которые в силу неравенства (1) неотрицательны. Отсюда следует, что неравенство $(f,\ \varphi * \varphi^*) \geqslant 0$ имеет место для всех функций $\varphi(x)$ из пространства S, т. е. что обобщенная функция $(f,\ \varphi)$ положительно определена.

Тем самым наше утверждение доказано — из выполнения неравенства (1) для непрерывной функции $f(x)$ вытекает выполнение неравенства $(f,\ \varphi * \varphi^*) \geqslant 0$ для всех функций $\varphi(x)$ из пространства S. В частности, *это неравенство имеет место и для всех функций* $\varphi(x)$ *из пространства* K.

Справедливо и обратное утверждение — *если непрерывная функция* $f(x)$ *такова, что*

$$(f,\ \varphi * \varphi^*) = \int \overline{f(x-y)}\,\varphi(x)\overline{\varphi(y)}\,dx\,dy \geqslant 0 \qquad (3)$$

для всех функций $\varphi(x)$ *из пространства* S, *то эта функция положительно определена, т. е. неравенство* (1) *выполняется для всех вещественных значений* $x_1, \ldots, x_m$ *и всех комплексных чисел* $\xi_1, \ldots, \xi_m$. Мы докажем сразу более общее неравенство

$$\int \overline{f(x-y)}\,d\mu(x)\,\overline{d\mu(y)} \geqslant 0, \qquad (4)$$

где μ — любая конечная финитная мера *) (неравенство (1) является частным случаем неравенства (4), когда в точках x_k сосредоточены меры ξ_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, а $f(x)$ заменена на $\overline{f(x)}$).

В самом деле, пусть μ — конечная финитная мера. Рассмотрим δ-образную последовательность функций $\{\varphi_m(x)\}$, принадлежащих пространству K. Тогда функции

$$\mu_m(x) = \int \varphi_m(x-y)\,\overline{d\mu(y)}$$

также принадлежат пространству K. В самом деле, найдется такое значение A, что μ и $\varphi_m(x)$ обращаются в нуль при $|x| \geqslant A$. Но тогда $\mu_m(x) = 0$ при $|x| \geqslant 2A$ и потому функции $\mu_m(x)$ финитны. Они бесконечно дифференцируемы, поскольку бесконечно дифференцируемы функции $\varphi_m(x)$. Тем самым принадлежность функций $\mu_m(x)$ пространству K доказана.

*) Мера называется *финитной*, если она сосредоточена на каком-нибудь ограниченном множестве.

Функции $\mu_m(x)$ таковы, что для любой непрерывной ограниченной функции $f(x)$ выполняется равенство

$$\lim_{m \to \infty} (f,\ \mu_m * \mu_m^*) = \int f(x-y)\,d\mu(x)\,\overline{d\mu(y)}. \qquad (5)$$

В самом деле,

$$(f,\ \mu_m * \mu_m^*) = \int \overline{f(u-v)}\,\mu_m(u)\,\overline{\mu_m(v)}\,du\,dv =$$

$$= \int \overline{f(u-v)}\,\varphi_m(u-x)\,\overline{\varphi_m(v-y)}\,du\,dv\,d\mu(x)\,\overline{d\mu(y)}. \qquad (6)$$

Поскольку функции $\{\varphi_m(x)\}$ образуют δ-образную последовательность, то

$$\lim_{m \to \infty} \int \overline{f(u-v)}\,\varphi_m(u-x)\,\varphi_m(v-y)\,du\,dv = \overline{f(x-y)}.$$

Поэтому, переходя в равенстве (6) к пределу при $m \to \infty$, мы и приходим к соотношению (5).

Пусть теперь функция $f(x)$ такова, что $(f,\ \varphi * \varphi^*) \geqslant 0$ для любой функции $\varphi(x)$ из пространства K. Тогда имеет место неравенство

$$(f,\ \mu_m * \mu_m^*) \geqslant 0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$ и принимая во внимание соотношение (5), мы получаем, что

$$\int f(x-y)\,d\mu(x)\,\overline{d\mu(y)} \geqslant 0.$$

Тем самым доказано, что из *выполнения неравенства* (3) *для любой функции* $\varphi(x)$ *из пространства* K *вытекает выполнение неравенства* (4) *для любой конечной финитной меры*. В частности, отсюда вытекает и выполнение неравенства (1).

Итак, мы видим, что *для непрерывных функций* $f(x)$ *неравенства* (1), (3), (4) *приводят к эквивалентным между собой определениям понятия положительной определенности.*

Мы проводили рассуждения для функций одного переменного, однако утверждение справедливо и в случае многих переменных.

Перейдем теперь к описанию всех непрерывных положительно определенных функций (многих переменных).

Теорема 2 (Бохнера). *Каждая непрерывная положительно определенная функция $f(x)$ является преобразованием Фурье конечной положительной меры μ.*

Доказательство. Мы уже видели, что непрерывная положительно определенная функция $f(x)$ задает положительно определенную обобщенную функцию в пространстве S. По теореме 1 из п. 1 § 3 существует такая положительная мера μ степенного роста, что обобщенная функция (f, φ) является преобразованием Фурье этой меры. Это означает, что

$$(f, \varphi) = (2\pi)^{-n} \int \tilde{\varphi}(\lambda)\, d\mu(\lambda) \tag{7}$$

для всех функций $\varphi(x)$ из пространства S ($\tilde{\varphi}(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $\varphi(x)$). Нам осталось показать, что мера μ конечна $\left(\text{т. е. что} \int d\mu(\lambda) < +\infty\right)$. Для этого применим равенство (7) к функциям $\varphi_m(x) = \alpha_m * \alpha_m^*(x)$, где $\{\alpha_m(x)\}$ — δ-образная последовательность из пространства S. Мы получим, что

$$(f, \varphi_m) = (2\pi)^{-n} \int \tilde{\varphi}_m(\lambda)\, d\mu(\lambda). \tag{8}$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $m \to \infty$. Так как свертка двух δ-образных последовательностей δ-образна, то последовательность $\{\varphi_m(x)\}$ также δ-образна. Отсюда следует, что левая часть равенства (8) стремится к $f(0)$ при $m \to \infty$. Рассмотрим теперь правую часть этого равенства. Из соотношения

$$\lim_{m \to \infty} \tilde{\varphi}_m(\lambda) = \lim_{m \to \infty} \int e^{i(\lambda, x)} \varphi_m(x)\, dx = (\delta, e^{i(\lambda, x)}) = 1$$

вытекает, что при любом значении λ функции $\tilde{\varphi}_m(\lambda)$ стремятся к единице, когда $m \to \infty$. Кроме того, эти функции положительны в силу соотношения $\tilde{\varphi}(\lambda) = |\tilde{\alpha}(\lambda)|^2$. Отсюда следует, что

$$\lim_{m \to \infty} \int \tilde{\varphi}_m(\lambda)\, d\mu(\lambda) \geqslant \int d\mu(\lambda)$$

и потому

$$\int d\mu(\lambda) \leqslant (2\pi)^{-n} f(0)^{*)}.$$

Тем самым конечность меры μ доказана.

Справедливо и обратное утверждение: *если μ — любая конечная положительная мера, то ее преобразование Фурье*

$$f(x) = \int e^{i(\lambda, x)}\, d\mu(\lambda)$$

является непрерывной положительно определенной функцией.

Докажем сначала, что функция $f(x)$ непрерывна. Поскольку мера μ конечна, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N > 0$, что

$$\int_{|\lambda| > N} d\mu(\lambda) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Пусть $|x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{2NM}$, где M — мера шара $|\lambda| \leqslant N$. Тогда легко видеть, что

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \int_{|\lambda| \leqslant N} |e^{i(\lambda, x_1)} - e^{i(\lambda, x_2)}|\, d\mu(\lambda) \leqslant \varepsilon.$$

Тем самым непрерывность функции $f(x)$ доказана. Чтобы доказать положительную определенность этой функции, заметим, что

$$\sum_{j, k=1}^{m} f(x_k - x_j)\xi_k\bar{\xi}_j = \sum_{j, k=1}^{m} \xi_k\bar{\xi}_j \int e^{i(\lambda, x_k - x_j)}\, d\mu(\lambda) = \\ = \int \left| \sum_{j=1}^{m} e^{i(\lambda, x_j)}\xi_j \right|^2 d\mu(\lambda).$$

Так как мера μ положительна, то мы получаем, что

$$\sum_{j, k=1}^{m} f(x_k - x_j)\xi_k\bar{\xi}_j \geqslant 0,$$

т. е. что функция $f(x)$ положительно определена.

---

*) На самом деле здесь имеет место равенство.

3. Положительно определенные обобщенные функции в пространстве K. В п. 1 мы описали запас положительно определенных обобщенных функций из пространства S'. Пространство K' значительно богаче обобщенными функциями, чем S'; тем не менее оказывается, что при переходе от S' к K' запас положительно определенных обобщенных функций *не увеличивается*; иными словами, хотя $S' \subset K'$, запас положительно определенных функций в K' такой же, как в S'. Этот запас описывается следующей теоремой:

Теорема 3 (Бохнер — Шварц). *Каждая положительно определенная функция F в пространстве K бесконечно дифференцируемых финитных функций является преобразованием Фурье положительной меры μ степенного роста, т. е. записывается формулой вида*

$$(F, \varphi) = \int \tilde{\varphi}(\lambda)\, d\mu(\lambda). \tag{9}$$

Обратно, преобразование Фурье любой положительной меры степенного роста задает положительно определенную обобщенную функцию в пространстве K.

Первым шагом в доказательстве этой теоремы будет рассмотрение некоторых непрерывных функций $F_\alpha(x)$, связанных с обобщенной функцией F. Мы докажем следующее утверждение:

Лемма 1. *Если F — положительно определенная обобщенная функция в пространстве K и $\alpha(x)$ — любая функция из этого пространства, то функция*

$$F_\alpha = \alpha * \alpha^* * F$$

является непрерывной положительно определенной функцией.

Доказательство. Положительная определенность обобщенной функции F_α доказывается следующим образом. По определению свертки обобщенной функции F с функцией $\alpha * \alpha^*$ (см. вып. 2, гл. III, § 3, п. 2) для любой функции $\varphi(x)$ из пространства K имеет место равенство

$$(F_\alpha, \varphi * \varphi^*) = (F, \alpha * \alpha^* * \varphi * \varphi^*) = (F, (\alpha * \varphi) * (\alpha * \varphi)^*).$$

В силу положительной определенности обобщенной функции F правая часть этого равенства неотрицательна. Но это показывает, что $(F_\alpha, \varphi * \varphi^*) \geqslant 0$ для любой функции $\varphi(x)$ из пространства K, т. е. что F_α является положительно определенной обобщенной функцией.

В силу бесконечной дифференцируемости и финитности $\alpha(x)$ обобщенная функция F_α задается бесконечно дифференцируемой функцией $F_\alpha(x)$, т. е. имеет вид

$$(F_\alpha, \varphi) = \int \overline{F_\alpha(x)}\, \varphi(x)\, dx$$

(см. вып. 2, гл. III, § 3, п. 4). При этом в силу доказанного выше функция $F_\alpha(x)$ положительно определена, и тем самым лемма доказана.

Из доказанной леммы в силу теоремы Бохнера вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. *Если F — положительно определенная обобщенная функция в пространстве K, а $\alpha(x)$ — любая функция из этого пространства, то обобщенная функция $F_\alpha = \alpha * \alpha^* * F$ имеет вид*

$$(F_\alpha, \varphi) = \int \tilde{\varphi}(\lambda)\, d\mu_\alpha(\lambda), \tag{10}$$

где $\tilde{\varphi}(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $\varphi(x)$, а μ_α — положительная конечная мера.

Рассмотрим теперь, как связаны между собой меры μ_α и μ_β, соответствующие функциям $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ из пространства K. Для этого примем во внимание, что преобразованием Фурье функции $\beta * \beta^* * \varphi(x)$ является функция $\tilde{\beta}(\lambda)\overline{\tilde{\beta}}(\lambda)\tilde{\varphi}(\lambda)$. В силу формулы (10) отсюда следует, что

$$(F, (\alpha * \alpha^*) * (\beta * \beta^*) * \varphi) = \int \tilde{\varphi}(\lambda)\, |\tilde{\beta}(\lambda)|^2\, d\mu_\alpha(\lambda) \tag{10'}$$

и

$$(F, (\alpha * \alpha^*) * (\beta * \beta^*) * \varphi) = \int \tilde{\varphi}(\lambda)\, |\tilde{\alpha}(\lambda)|^2\, d\mu_\beta(\lambda). \tag{10''}$$

Поскольку левые части этих равенств совпадают, то для всех функций $\varphi(x)$ из пространства K мы имеем

$$\int \tilde{\varphi}(\lambda)\, |\tilde{\beta}(\lambda)|^2\, d\mu_\alpha(\lambda) = \int \tilde{\varphi}(\lambda)\, |\tilde{\alpha}(\lambda)|^2\, d\mu_\beta(\lambda),$$

где $\tilde{\varphi}(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $\varphi(x)$, принадлежащей пространству Z. Так как пространство Z достаточно богато функциями*), то отсюда вытекает, что

$$|\tilde{\beta}(\lambda)|^2 d\mu_\alpha(\lambda) = |\tilde{\alpha}(\lambda)|^2 d\mu_\beta(\lambda). \qquad (11)$$

Мы можем теперь переписать равенство (10), исключив из него функцию $\alpha(x)$. Для этого введем положительную меру μ, положив

$$\int \tilde{\varphi}(\lambda)\, d\mu(\lambda) = \int \tilde{\varphi}(\lambda) \frac{d\mu_\alpha(\lambda)}{|\tilde{\alpha}(\lambda)|^2}$$

для всех функций $\varphi(x)$ из пространства K. Из формулы (11) следует, что мера μ не зависит от выбора функции $\alpha(x)$ из пространства K. При помощи этой меры равенство (10) может быть записано в виде

$$(F,\ \alpha * \alpha^* * \varphi) = \int |\tilde{\alpha}(\lambda)|^2 \tilde{\varphi}(\lambda) \frac{d\mu_\alpha(\lambda)}{|\tilde{\alpha}(\lambda)|^2} = \int |\tilde{\alpha}(\lambda)|^2 \tilde{\varphi}(\lambda)\, d\mu(\lambda). \qquad (12)$$

Обозначим функцию $\alpha * \alpha^* * \varphi(x)$ через $\psi(x)$. Тогда формула (12) примет следующий вид:

$$(F,\ \psi) = \int \tilde{\psi}(\lambda)\, d\mu(\lambda). \qquad (13)$$

Эта формула справедлива для всех функций $\psi(x)$, представимых в виде

$$\psi(x) = \alpha * \alpha^* * \varphi(x), \qquad (14)$$

где $\alpha(x)$ и $\varphi(x)$ — любые функции из пространства K.

Таким образом, равенство (13) уже доказано для функций $\psi(x)$, имеющих вид (14). Нам предстоит теперь доказать, что равенство (13) остается справедливым для всех функций $\psi(x)$ из пространства K и что мера μ имеет степенной рост.

Первое из этих двух утверждений легко выводится из второго. В самом деле, если мера μ имеет степенной рост, то функционал $\int \tilde{\psi}(\lambda)\, d\mu(\lambda)$ непрерывен в топологии пространства S, а тем более в топологии пространства K. Но этот функционал совпадает с функционалом F на множестве всех функций, представимых в виде (14). Поскольку множество таких функций всюду плотно в пространстве K, то функционалы $(F,\ \psi)$ и $\int \tilde{\psi}(\lambda)\, d\mu(\lambda)$ совпадают на всем пространстве K, т. е. формула (13) справедлива для всех функций этого пространства.

Итак, нам остается доказать следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть положительная мера μ такова, что для всех функций $\psi(x)$, имеющих вид $\psi(x) = \alpha * \alpha^* * \varphi(x)$, $\alpha(x) \in K$ и $\varphi(x) \in K$, выполняется равенство*

$$\int \tilde{\psi}(\lambda)\, d\mu(\lambda) = (F,\ \psi),$$

где F — обобщенная функция в пространстве K, а $\tilde{\psi}(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $\psi(x)$. Тогда мера μ имеет степенной рост.

Доказательство. Так как функционал F непрерывен на пространстве K, то он непрерывен и на всех его подпространствах $K(a)$. Фиксируем любое значение $a > 0$. Найдется такая окрестность нуля U в пространстве $K(a)$, что для всех функций $\varphi(x)$ из этой окрестности выполняется неравенство $|(F,\ \varphi)| \leqslant 1$.

Для доказательства степенного роста меры μ достаточно построить последовательность функций $\{\psi_m(x)\}$, принадлежащих наперед заданной окрестности нуля U в пространстве $K(a)$ и обладающих следующими свойствами:

1) эти функции имеют вид (14), для которого доказано представление (13), т. е. функции $\psi_m(x)$ представимы в виде

$$\psi_m(x) = \alpha_m * \alpha_m^* * \varphi_m(x), \qquad (15)$$

где $\alpha_m,\ \varphi_m \in K$;

*) Из леммы доказанной в выпуске 2 (гл. IV, § 8, п. 4), следует, что выполнение равенства

$$\int f(x)\, \varphi(x)\, dx = 0$$

для всех функций $\varphi(x)$ из пространства Z влечет за собой обращение в нуль непрерывной функции $f(x)$. Это утверждение без труда переносится на любые конечные положительные меры (например, при помощи свертки этих мер с δ-образными последовательностями).

2) $\tilde{\psi}_m(\lambda) \geqslant 0$, где $\tilde{\psi}_m(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $\psi_m(x)$;

3) для каждого λ существует предел $\lim\limits_{m\to\infty} \tilde{\psi}_m(\lambda) = \tilde{\omega}(\lambda)$, причем выполнено неравенство

$$\tilde{\omega}(\lambda) \geqslant \frac{A}{(1+|\lambda|^2)^{p+n+1}}, \tag{16}$$

где $A > 0$, $p > 0$ — некоторые числа, а n — число переменных.

Эту последовательность функций и соответствующую предельную функцию $\tilde{\omega}(\lambda)$ назовем *барьерной*, поскольку она дает возможность оценить рост меры μ (такие барьерные последовательности строились и при изучении положительных обобщенных функций в пространстве S).

Предположим, что такая последовательность функций $\{\psi_m(x)\}$ построена. Поскольку все функции $\psi_m(x)$ принадлежат окрестности нуля U, то для них выполняется неравенство $|(F, \psi_m)| \leqslant 1$. Но так как эти функции имеют вид (15), то функционал F задается для них формулой

$$(F, \psi_m) = \int \tilde{\psi}_m(\lambda)\, d\mu(\lambda).$$

Поэтому при всех значениях m имеет место неравенство $\left|\int \tilde{\psi}_m(\lambda)\, d\mu(\lambda)\right| \leqslant 1$ или, поскольку $\mu \geqslant 0$, $\tilde{\psi}_m(\lambda) \geqslant 0$, неравенство $0 \leqslant \int \tilde{\psi}_m(\lambda)\, d\mu(\lambda) \leqslant 1$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$ и используя лемму Фату (см. стр. 184), получаем, что интеграл $\int \tilde{\omega}(\lambda)\, d\mu(\lambda)$ сходится. В силу соотношения (16) отсюда вытекает сходимость интеграла

$$\int \frac{d\mu(\lambda)}{(1+|\lambda|^2)^{p+n+1}} \leqslant \frac{1}{A},$$

т. е. степенной рост меры μ.

Таким образом, лемма 3 будет доказана, если мы построим барьерную последовательность. Перейдем к построению такой последовательности, принадлежащей заданной окрестности нуля U в пространстве K. Возьмем любое $a > 0$, тогда $U \cap K(a)$ является окрестностью нуля в $K(a)$. По определению топологии в пространстве $K(a)$ (см. стр. 34) можно найти такие числа p и η, что из неравенства $|\varphi^{(q)}(x)| \leqslant \eta$ для всех q, $0 \leqslant |q| \leqslant 2p$,

вытекает, что $\varphi(x) \in U \cap K(a)$. Это число p мы и положим в основу построения барьерной последовательности $\psi_m(x)$. Построим сначала предельную функцию $\tilde{\omega}(\lambda)$. Для этого обозначим через $\gamma(x)$ функцию, преобразование Фурье $\tilde{\gamma}(\lambda)$ которой равно

$$\tilde{\gamma}(\lambda) = (1+|\lambda|^2)^{-p-n-1}.$$

Выберем теперь бесконечно дифференцируемую функцию $\chi(x)$, равную нулю при $|x| > \frac{a}{4}$, обозначим $\chi_0(x) = \chi(x) * \chi^*(x)$ и положим

$$\omega(x) = \gamma(x)\chi_0(x) = \gamma(x)[\chi(x) * \chi^*(x)].$$

Лемма 4. *Функция $\omega(x)$ обладает следующими свойствами:*

1) $\omega(x) = 0$ *для* $|x| > a/2$,

2) $\tilde{\omega}(\lambda) > A(1+|\lambda|^2)^{-p-n-1}$,

3) *все производные $\omega(x)$, вплоть до порядка $2p$, ограничены* *).

Доказательство. Так как $\chi(x) = 0$ для $|x| > \frac{a}{4}$, то $\chi(x) * \chi^*(x) = 0$ для $|x| > \frac{a}{2}$. Следовательно, и $\omega(x) = \gamma(x)[\chi(x) * \chi^*(x)] = 0$ для $|x| > \frac{a}{2}$. Далее, по определению

$$\gamma(x) = (2\pi)^{-n} \int \frac{e^{-i(x,\lambda)}}{(1+|\lambda|^2)^{p+n+1}}\, dx.$$

Значит

$$|\gamma^{(q)}(x)| < (2\pi)^{-n} \int |\lambda|^{|q|} (1+|\lambda|^2)^{-n-p-1}\, dx.$$

Так как при $|q| \leqslant 2p$ этот интеграл сходится, то ограничены производные $|\gamma^{(q)}(x)|$ для $|q| \leqslant 2p$.

Оценим теперь $\tilde{\omega}(\lambda)$. Поскольку при преобразовании Фурье произведение переходит в свертку, а свертка — в произведение, то из равенства

$$\omega(x) = \gamma(x)\, [\chi(x) * \chi^*(x)]$$

следует, что

$$\tilde{\omega}(\lambda) = \tilde{\gamma}(\lambda) * |\tilde{\chi}(\lambda)|^2 = (1+|\lambda|^2)^{-n-p-1} * |\tilde{\chi}(\lambda)|^2,$$

*) Производные же порядка $2p+1$ имеют разрыв при $x = 0$.

т. е.

$$\tilde{\omega}(\lambda)=\int |\tilde{\chi}(u)|^2(1+|\lambda-u|^2)^{-n-p-1}\,du.$$

Выбрав какое-либо число $\rho>0$, имеем

$$\tilde{\omega}(\lambda)\geqslant \int\limits_{|u|<\rho} |\tilde{\chi}(u)|^2(1+|\lambda-u|^2)^{-n-p-1}\,du$$

и для $|\lambda|>\rho$ имеем

$$\tilde{\omega}(\lambda)\geqslant(1+|\lambda+\rho|^2)^{-n-p-1}\int\limits_{|u|<\rho}|\tilde{\chi}(u)|^2\,du= \\ =C(1+|\lambda+\rho|^2)^{-n-p-1}.$$

Полагая

$$A=C\sup_\lambda[(1+|\lambda+\rho|^2)^{p+n+1}(1+|\lambda|^2)^{-p-n-1}],$$

мы приходим к неравенству (16). Лемма доказана.

Построенная функция $\omega(x)$ имеет лишь $2p$ непрерывных производных. Однако, если свернуть ее с финитной бесконечно дифференцируемой функцией, то мы получим бесконечно дифференцируемую функцию. Поэтому по функции $\omega(x)$ построим $\psi_m(x)$ следующим образом. Выберем функцию $\alpha(x)$, равную нулю, например, при $|x|>\frac{a}{8}$, так, чтобы $\int\alpha(x)\,dx=1$, и положим $\alpha_m(x)=m^n\alpha(mx)$. Обозначим через $\beta_m(x)$ функцию $\alpha_m(x)*\alpha_m^*(x)$ и построим $\psi_m(x)$ по формуле

$$\psi_m(x)=C\omega(x)*\beta_m(x)*\beta_m^*(x).$$

Лемма 5. *Последовательность $\{\psi_m(x)\}$ является барьерной, т. е. удовлетворяет следующим условиям:*

1) *имеет вид*

$$\psi_m=\alpha_m*\alpha_m^**\varphi_m(x),$$

где α, $\varphi_m\in K(a)$;

2) $\tilde{\psi}_m(\lambda)\geqslant 0$;

3) $\lim\limits_{m\to\infty}\tilde{\psi}_m(\lambda)=\tilde{\omega}(\lambda)$, *где*

$$\tilde{\omega}(\lambda)\geqslant\frac{A}{(1+|\lambda|^2)^{p+n+1}}.$$

Кроме того, при достаточно малом C функции $\psi_m(x)$ принадлежат заданной окрестности нуля U в $K(a)$.

Доказательство. Положим

$$\varphi_m(x)=C\alpha_m*\alpha_m^**\omega(x).$$

Так как $\psi_m(x)=C\omega*\beta_m*\beta_m^*(x)$, где $\beta_m(x)=\alpha_m*\alpha_m^*(x)$, то $\psi_m(x)=\alpha_m*\alpha_m^**\varphi_m(x)$. По самому способу построения $\varphi_m(x)$ ясно, что $\varphi_m\in K(a)$ и поэтому условие (1) выполнено.

Далее имеем $\tilde{\psi}_m(\lambda)=\tilde{\omega}(\lambda)|\tilde{\beta}_m(\lambda)|^2\geqslant 0$. Найдем теперь $\lim\limits_{m\to\infty}\tilde{\psi}_m(\lambda)$. Так как

$$\psi_m(\lambda)=\tilde{\omega}(\lambda)|\tilde{\beta}_m(\lambda)|^2=\tilde{\omega}(\lambda)|\tilde{\alpha}_m(\lambda)|^4,$$

то достаточно найти $\lim\limits_{m\to\infty}\tilde{\alpha}_m(\lambda)$

$$\lim_{m\to\infty}\tilde{\alpha}_m(\lambda)=\lim_{m\to\infty}m^{-n}\int\alpha(mx)e^{i(\lambda,x)}\,dx= \\ =\lim_{m\to\infty}\int\alpha(x)e^{\frac{i}{m}(\lambda,x)}\,dx=\int\alpha(x)\,dx=1,$$

и, значит, $\lim\limits_{m\to\infty}\psi_m(\lambda)=\tilde{\omega}(\lambda)$, т. е. выполнено также условие 3).

Нам осталось показать, что при достаточно малом значении C все функции $\psi_m(x)$ принадлежат окрестности нуля U. Для этого заметим, что для любых функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ имеет место равенство

$$[\varphi*\psi(x)]^{(q)}=\varphi^{(q)}*\psi(x)$$

и потому

$$\sup_x|[\varphi*\varphi(x)]^{(q)}|\leqslant\sup_x|\varphi^{(q)}(x)|\int|\psi(x)|\,dx.$$

Применим это неравенство к функциям $\psi_m(x)$. При всех m имеет место равенство

$$\int\beta_m*\beta_m^*(x)\,dx=\left|\int\beta_m(x)\,dx\right|^2=\left|\int\alpha_m*\alpha_m^*(x)\,dx\right|^2= \\ =\left|\int\alpha_m(x)\,dx\right|^4=\left|m^n\int\alpha(mx)\,dx\right|^4=\left|\int\alpha(x)\,dx\right|^4=1.$$

Поскольку функция $\omega(x)$ имеет ограниченные производные порядка q, $0 \leqslant |q| \leqslant 2p$, то найдется такое M, что

$$\sup_x |\omega^{(q)}(x)| \leqslant M, \quad 0 \leqslant |q| \leqslant 2p.$$

Следовательно, при $C = \frac{\eta}{M}$ функции $\psi_m(x)$ удовлетворяют неравенствам

$$\sup_x |\psi_m^{(q)}(x)| \leqslant \eta, \quad 0 \leqslant |q| \leqslant 2p$$

и потому принадлежат окрестности нуля U. Лемма доказана.

Итак, существование барьерных последовательностей доказано, а отсюда, как упоминалось, следует лемма 3.

Мы уже указывали, что из леммы 3 вытекает справедливость формулы (13) для всех функций пространства K. Иными словами, мы доказали, что *любая положительно определенная обобщенная функция в пространстве* K задается формулой

$$(F, \psi) = \int \tilde{\psi}(\lambda)\, d\mu(\lambda), \tag{17}$$

где $\tilde{\psi}(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $\psi(x)$, а μ — положительная мера степенного роста. Но это утверждение есть не что иное, как теорема Бохнера — Шварца.

Заметим, что теорему Бохнера — Шварца можно также сформулировать следующим образом.

Теорема 3′. *Любая мультипликативно положительная обобщенная функция F в пространстве Z имеет вид*

$$(F, \varphi) = \int \varphi(\lambda)\, d\mu(\lambda),$$

где μ — положительная мера степенного роста.

Из теоремы Бохнера — Шварца без труда вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. *Каждая положительно определенная обобщенная функция F в пространстве K может быть представлена в виде*

$$F = (1 - \Delta)^p f(x), \tag{18}$$

где $f(x)$ — непрерывная положительно определенная обобщенная функция, а Δ — оператор Лапласа

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

В самом деле, пусть $\tilde{F}$ — преобразование Фурье обобщенной функции F. По теореме Бохнера — Шварца обобщенная функция $\tilde{F}$ задается формулой

$$(\tilde{F}, \tilde{\varphi}) = \int \tilde{\varphi}(\lambda)\, d\mu(\lambda),$$

где μ — положительная мера степенного роста. Поэтому найдется такое p, что интеграл $\int (1 + |\lambda|^2)^{-p}\, d\mu(\lambda)$ сходится. Положим

$$d\nu(\lambda) = (1 + |\lambda|^2)^{-p}\, d\mu(\lambda).$$

Мера ν положительна и конечна. Поэтому ее преобразование Фурье является непрерывной положительно определенной функцией $f_1(x)$:

$$f_1(x) = \int e^{i(\lambda, x)}\, d\nu(\lambda).$$

Функция $f(x) = \overline{f_1(x)}$ также положительно определена. При этом из равенства $d\mu(\lambda) = (1 + |\lambda|^2)^p\, d\nu(\lambda)$ вытекает, что для любой функции $\varphi(x)$ из пространства K имеет место равенство

$$\begin{aligned}
(F, \varphi) = (2\pi)^{-n} (\tilde{F}, \tilde{\varphi}) &= \int \tilde{\varphi}(\lambda)\, d\mu(\lambda) = \\
&= \int \varphi(x) e^{i(\lambda, x)} (1 + |\lambda|^2)^p\, d\nu(\lambda)\, dx = \\
&= \int [(1 - \Delta)^p \varphi(x)]\, e^{i(\lambda, x)}\, d\nu(\lambda)\, dx = \\
&= \int [(1 - \Delta)^p \varphi(x)]\, f_1(x)\, dx = \\
&= \int [(1 - \Delta)^p \varphi(x)]\, \overline{f(x)}\, dx = (f, (1 - \Delta)^p \varphi).
\end{aligned}$$

Но это и означает, что $F = (1 - \Delta)^p f$.

Справедливо и обратное утверждение: *все обобщенные функции вида $(1 - \Delta)^p f$, где $f(x)$ — непрерывная положительно определенная функция, положительно определены.*

4. Положительно определенные обобщенные функции в пространстве Z. Еще проще, чем в пространствах K и S, найти положительно определенные обобщенные функции в пространстве Z. Пусть $\varphi(z)$ — некоторая функция из пространства Z. Мы будем обозначать через $\varphi^*(z)$ функцию $\overline{\varphi(-\bar{z})}$. Очевидно, что функция

$\varphi^*(z)$ также принадлежит пространству Z. Обозначение $\varphi^*(z)$ оправдано тем, что при вещественных значениях z имеет место равенство $\varphi^*(x)=\overline{\varphi(-x)}$.

Назовем обобщенную функцию F в пространстве Z положительно определенной, если для любой функции из этого пространства выполняется неравенство *)

$$(F,\ \varphi*\varphi^*)\geqslant 0.$$

Но преобразование Фурье переводит функцию $\varphi*\varphi^*(z)$ в функцию $|\psi(\lambda)|^2$, где $\psi(\lambda)$ — функция из пространства K, являющаяся преобразованием Фурье функции $\varphi(z)$. При этом получаются все функции вида $|\psi(\lambda)|^2$, $\psi(\lambda)\in K$. Отсюда следует, что преобразованием Фурье положительно определенной обобщенной функции F в пространстве Z является мультипликативно положительная обобщенная функция $\widetilde{F}$ в пространстве K. Поскольку по теореме 6 из § 2 все мультипликативно положительные обобщенные функции в пространстве K задаются положительными мерами, а любая положительная мера задает мультипликативно положительную обобщенную функцию в пространстве K, мы приходим к следующей теореме:

Теорема 5. *Положительно определенные обобщенные функции в пространстве Z являются преобразованиями Фурье положительных мер. Обратно, преобразование Фурье любой положительной меры является положительно определенной обобщенной функцией в пространстве Z.*

5. Инвариантные относительно сдвигов положительно определенные эрмитовы билинейные функционалы. Положительно определенные обобщенные функции чаще всего появляются в связи с рассмотрением инвариантных относительно сдвигов положительно определенных билинейных функционалов. Сейчас мы остановимся подробнее на этой связи. Для простоты мы будем рассматривать билинейные функционалы в пространстве K, хотя полученные результаты без особого труда распространяются на другие пространства основных функций.

Функционал $B(\varphi,\ \psi)$, где φ и ψ пробегают пространство K, называется *эрмитовым билинейным функционалом*, если:

*) Рассматривая функции из пространства Z при вещественных значениях аргумента, мы получаем функции, принадлежащие пространству S. Эти функции можно свертывать. При этом легко видеть, что, свертывая функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, соответствующие функциям $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ из пространства Z, мы получаем функцию $\varphi*\psi(x)$, также соответствующую некоторой функции из пространства Z (в этом проще всего убедиться, сделав преобразование Фурье). Эту функцию из пространства Z мы и обозначаем $\varphi*\psi(z)$.

1) при фиксированной функции $\psi(x)$ $B(\varphi,\ \psi)$ является линейным, непрерывным в топологии пространства K функционалом от $\varphi(x)$,

2) при фиксированной функции $\varphi(x)$ $\overline{B(\varphi,\ \psi)}$ является линейным, непрерывным в топологии пространства K функционалом от $\psi(x)$.

Билинейный функционал $B(\varphi,\ \psi)$ называется *инвариантным относительно сдвигов*, если его значение не меняется при одновременном сдвиге функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на один и тот же вектор h

$$B[\varphi(x),\ \psi(x)]=B[\varphi(x+h),\ \psi(x+h)]. \tag{19}$$

Укажем общий вид таких функционалов. Для этого заметим, что значение свертки $\varphi*\psi^*$ не изменяется при одновременном сдвиге обеих функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на один и тот же вектор h. В самом деле, пусть $\varphi_1(x)=\varphi(x+h)$, $\psi_1(x)=\psi(x+h)$. Тогда

$$\varphi_1*\psi_1^*(x)=\int\varphi_1(y)\overline{\psi_1(y-x)}\,dy=$$
$$=\int\varphi(y+h)\overline{\psi(y+h-x)}\,dy=$$
$$=\int\varphi(y)\overline{\psi(y-x)}\,dy=\varphi*\psi^*(x).$$

Положим

$$B(\varphi,\ \psi)=(F,\ \varphi*\psi^*), \tag{20}$$

где F — любая обобщенная функция в пространстве K. Простая проверка показывает, что $B(\varphi,\ \psi)$ является эрмитовым билинейным функционалом в пространстве K. При этом из инвариантности выражения $\varphi*\psi^*$ относительно одновременного сдвига функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на один и тот же вектор h вытекает, что функционал $B(\varphi,\ \psi)$ инвариантен относительно сдвигов.

Покажем, что любой инвариантный относительно сдвигов эрмитов билинейный функционал в пространстве K может быть записан в виде $(F,\ \varphi*\psi^*)$, где F — обобщенная функция в пространстве K.

Это утверждение основано на теореме о ядре для пространства K, изложенной в главе I. Из этой теоремы следует, что каждый эрмитов билинейный функционал $B(\varphi,\ \psi)$

в пространстве K можно записать в виде

$$B(\varphi, \psi) = (F_1, \varphi(x)\overline{\psi(y)}),$$

где F_1 — линейный функционал в пространстве K_2 бесконечно дифференцируемых финитных функций от x и y (т. е. от $2n$ переменных $x_1, \ldots, x_n$; $y_1, \ldots, y_n$).

Так как линейные комбинации функций вида $\varphi(x)\overline{\psi(y)}$, где $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ пробегают пространства K, всюду плотны в пространстве K_2, то из соотношения (19) вытекает соотношение

$$(F_1, \varphi(x, y)) = (F_1, \varphi(x+h, y+h)). \tag{21}$$

Таким образом, обобщенная функция F_1 инвариантна относительно одновременного сдвига аргументов x и y на один и тот же вектор h.

Но все обобщенные функции F_1, удовлетворяющие соотношению (21), имеют вид

$$(F_1, \varphi(x, y)) = (F, \chi(y)), \tag{22}$$

где F — некоторая обобщенная функция в K, а $\chi(y)$ задается равенством

$$\chi(y) = \int \varphi(x, x-y)\, dx.$$

В самом деле, введем обобщенную функцию F_2 в пространстве K_2, положив

$$(F_2, \psi(x, y)) = (F_1, \psi(x+y, x-y)). \tag{23}$$

Из равенства (21) следует, что эта обобщенная функция инвариантна относительно сдвигов x по h. В выпуске 1 (гл. I, § 4, п. 1) было показано, что такие обобщенные функции задаются равенствами

$$(F_2, \psi(x, y)) = (F(y), \int \psi(x, y)\, dx), \tag{24}$$

где F — обобщенная функция в пространстве K. Полагая

$$\psi(x, y) = \varphi\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right),$$

мы получаем из равенств (23) и (24), что

$$(F_1, \varphi(x, y)) = (F_2, \psi(x, y)) = \left(F, \int \psi(x, y)\, dx\right) =$$
$$= \left(F, \int \varphi\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) dx\right) = 2\left(F, \int \varphi(x, x-y)\, dx\right).$$

Тем самым соотношение (22) доказано (множитель 2 можно ввести в обобщенную функцию F).

Из соотношения (22) вытекает, что для функций вида $\varphi(x, y) = \varphi(x)\overline{\psi(y)}$ обобщенная функция F_1 задается формулой

$$(F_1(y), \varphi(x)\overline{\psi(y)}) = \left(F, \int \varphi(x)\overline{\psi(x-y)}\, dx\right) = (F, \varphi * \psi^*), \tag{25}$$

но

$$(F_1, \varphi(x)\overline{\psi(y)}) = B(\varphi, \psi).$$

Итак, мы получаем следующий результат: *всякий инвариантный относительно сдвигов эрмитов билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$ в пространстве K имеет вид $B(\varphi, \psi) = (F, \varphi * \psi^*)$*, где F — некоторая обобщенная функция в пространстве K.

Назовем билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$ в пространстве K положительно определенным, если $B(\varphi, \varphi) \geqslant 0$ для всех функций $\varphi(x)$ из пространства K. Если этот функционал, кроме того, инвариантен относительно сдвигов, то соответствующая ему обобщенная функция F удовлетворяет неравенству $(F, \varphi * \varphi^*) \geqslant 0$, т. е. также положительно определена.

Воспользуемся теоремой Бохнера — Шварца (см. п. 3), которая дает представление обобщенных положительно определенных функций из K через меры степенного роста. Принимая во внимание, что $\widetilde{\varphi * \varphi^*} = \tilde{\varphi}(\lambda)\overline{\tilde{\varphi}(\lambda)}$, получаем следующий результат.

Теорема 6. *Всякий инвариантный относительно сдвигов положительно определенный эрмитов билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$ в пространстве K имеет вид*

$$B(\varphi, \psi) = \int \tilde{\varphi}(\lambda)\overline{\tilde{\psi}(\lambda)}\, d\mu(\lambda),$$

где μ — некоторая положительная мера степенного роста, а $\tilde{\varphi}(\lambda)$ и $\tilde{\psi}(\lambda)$ — соответственно преобразования Фурье функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

6. Примеры положительных и положительно определенных обобщенных функций. В этом пункте мы приведем различные примеры положительных и положительно определенных обобщенных функций в пространстве S и других пространствах.

Начнем с функций одного переменного. Самыми простыми положительными функциями являются одночлены x^{2m}. Так как преобразование Фурье положительной обобщенной функции положительно определено, а преобразованием Фурье одночлена x^{2m} является *) $(-1)^m 2\pi\delta^{(2m)}(x)$, то мы получаем следующий результат: обобщенные функции $(-1)^m \delta^{(2m)}(x)$ положительно определены. Впрочем, этот результат легко получить непосредственным вычислением интеграла

$$(-1)^m \int \delta^{(2m)}(x-y)\varphi(x)\overline{\varphi(y)}\,dx\,dy = \\ = (-1)^m \int \varphi^{(2m)}(x)\overline{\psi(x)}\,dx.$$

Интегрируя m раз по частям, получаем, что этот интеграл равен

$$\int |\varphi^{(m)}(x)|^2\,dx \geqslant 0.$$

Этот результат связан со следующим общим фактом: *если F положительно определена, то $(-1)^m \dfrac{d^{2m}F}{dx^{2m}}$ также положительно определена.* Действительно,

$$\left((-1)^m \frac{d^{2m}F}{dx^{2m}},\ \varphi * \varphi^*\right) = \left(F,\ (-1)^m \frac{d^{2m}}{dx^{2m}}\varphi * \varphi^*\right) = \\ = (F,\ \varphi^{(m)} * (\varphi^{(m)}(x))^*) \geqslant 0.$$

*) На протяжении этого пункта нам будет удобно обозначать одной и той же буквой аргумент функции и ее преобразования Фурье.

Вообще, если $\lambda > -1$, то обобщенная функция $|x|^\lambda$ положительна. В самом деле, она задается формулой

$$(|x|^\lambda,\ \varphi(x)) = \int |x|^\lambda \varphi(x)\,dx$$

и ясно, что при $\varphi(x) \geqslant 0$ имеет место неравенство $(|x|^\lambda,\ \varphi(x)) \geqslant 0$. Преобразование Фурье обобщенной функции $|x|^\lambda$ равно

$$-2\sin\frac{\lambda\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)|x|^{-\lambda-1}$$

(см. вып. 1, гл. I, § 2, п. 3). Таким образом, при условии $\lambda > -1$ обобщенная функция $-2\sin\frac{\lambda\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)|x|^{-\lambda-1}$ положительно определена. Аналогично показывается положительная определенность при $\lambda > -1$ обобщенных функций

$$ie^{\frac{\pi\lambda i}{2}}\Gamma(\lambda+1)(x+i0)^{-\lambda-1}$$

и

$$-ie^{-\frac{\pi\lambda i}{2}}\Gamma(\lambda+1)(x-i0)^{-\lambda-1}$$

(они являются преобразованиями Фурье положительных обобщенных функций x_+^λ и x_-^λ).

Иначе обстоит дело при $\lambda < -1$. Так, например, при $\lambda > -m-1$ обобщенная функция x_+^λ задается формулой

$$(x_+^\lambda,\ \varphi) = \int_0^1 x^\lambda \left[\varphi(x) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{x^k}{k!}\varphi^{(k)}(0)\right]dx + \int_1^\infty x^\lambda\varphi(x)\,dx. \tag{26}$$

Это выражение может принимать отрицательные значения и для положительных основных функций $\varphi(x)$. Однако, если функция $\varphi(x)$ такова, что $\varphi(0) = \varphi'(0) = \ldots = \varphi^{(m-1)}(0) = 0$, то формула (26) принимает вид

$$(x_+^\lambda,\ \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda\varphi(x)\,dx.$$

Поэтому при условии $\lambda > -m-1$ обобщенная функция x_+^λ положительна не на всем пространстве основных функций, а лишь на его подпространстве, состоящем из таких функций, для которых $\varphi(0)=\varphi'(0)=\ldots=\varphi^{(m-1)}(0)=0$. Аналогичное замечание относится и к обобщенной функции x_-^λ.

Отсюда следует, что при $-2m-1<\lambda$ неравенства $(x_+^\lambda, \varphi\bar{\varphi})\geqslant 0$ и $(x_-^\lambda, \varphi\bar{\varphi})\geqslant 0$ выполняются, если

$$\varphi(0)=\varphi'(0)=\ldots=\varphi^{(m-1)}(0)=0. \tag{27}$$

В самом деле, в этом случае все производные функции $\varphi(x)\overline{\varphi(x)}$ до $2m-1$-й включительно обращаются в нуль при $x=0$ и потому имеет место неравенство $(x_+^\lambda, \varphi\bar{\varphi})=$ $=\int_0^\infty x^\lambda|\varphi(x)|^2\,dx\geqslant 0$ и аналогичное неравенство для x_-^λ. Рассматривая преобразование Фурье обобщенных функций x_+^λ и x_-^λ, мы получаем, что обобщенные функции

$$ie^{\frac{\pi\lambda i}{2}}\Gamma(\lambda+1)(x+i0)^{-\lambda-1}$$

и

$$-ie^{-\frac{\pi\lambda i}{2}}\Gamma(\lambda+1)(x-i0)^{-\lambda-1}$$

при $-2m-1<\lambda$ положительно определены не на всем пространстве S, а лишь на некотором подпространстве этого пространства. Можно показать, что это подпространство состоит из таких функций, для которых все моменты $m_k=\int_{-\infty}^{\infty}x^k\varphi(x)\,dx$ до $m-1$-го включительно обращаются в нуль.

Иными словами,

$$\left(ie^{\frac{\pi\lambda i}{2}}\Gamma(\lambda+1)(x+i0)^{-\lambda-1},\ \varphi * \varphi^*(x)\right)\geqslant 0$$

для всех функций $\varphi(x)$ из пространства S, таких, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^k\varphi(x)\,dx=0,\quad 0\leqslant k\leqslant m-1.$$

Рассмотрим теперь обобщенные функции вида $(ax^2+bx+c)^\lambda$. Эти обобщенные функции были изучены

в выпуске 1 (гл. II, § 2, п. 6), где были приведены и их преобразования Фурье. Обобщенная функция $(1+x^2)^\lambda$ положительна при любом вещественном значении λ. Поэтому ее преобразование Фурье

$$\frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\lambda)}\left(\frac{|x|}{2}\right)^{-\lambda-\frac{1}{2}}K_{-\lambda-\frac{1}{2}}(x)$$

положительно определено при любом вещественном значении λ.

Обобщенные функции $(x^2-1)_+^\lambda$ и $(x^2-1)_-^\lambda$ положительны при $\lambda>-1$. Поэтому при $\lambda>-1$ их преобразования Фурье

$$\Gamma(\lambda+1)\sqrt{\pi}\left(\frac{|x|}{2}\right)^{-\lambda-\frac{1}{2}}N_{-\lambda-\frac{1}{2}}(|x|)$$

и

$$\Gamma(\lambda+1)\sqrt{\pi}\left(\frac{|x|}{2}\right)^{-\lambda-\frac{1}{2}}J_{-\lambda-\frac{1}{2}}(|x|)$$

положительно определены.

При целых положительных значениях m положительно определены обобщенные функции

$$\left(1-\frac{d^2}{dx^2}\right)^m\delta(x)$$

и

$$2\pi(-1)^m\left(1+\frac{d^2}{dx^2}\right)^m\delta(x)+(-1)^{m+1}\sqrt{\pi}\left(\frac{|x|}{2}\right)^{-m-\frac{1}{2}}J_{m+\frac{1}{2}}(x),$$

являющиеся соответственно преобразованиями Фурье положительных обобщенных функций $(x^2+1)^m$ и $(x^2-1)^m$.

Рассмотрим теперь функции многих переменных. При условии $\lambda>-n$ обобщенная функция r^λ задается формулой

$$(r^\lambda, \varphi)=\Omega_n\int_0^\infty r^{\lambda+n-1}S_\varphi(r)\,dr,$$

где через Ω_n обозначена поверхность n-мерной сферы радиуса 1 $\left(\Omega_n=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\right)$, а через $S_\varphi(r)$ — среднее значение функции $\varphi(x)$ на сфере радиуса r. Из этой формулы видно, что при $\lambda > -n$ обобщенная функция r^λ положительна. Следовательно, ее преобразование Фурье

$$\widetilde{r^\lambda} = 2^{\lambda+n}\pi^{n/2}\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}r^{-\lambda-n}$$

при условии $\lambda > -n$ положительно определено.

Если же $-n-2m < \lambda < -n-2m+2$, то обобщенная функция r^λ задается выражением

$$(r^\lambda, \varphi) = \Omega_n\int_0^\infty r^{\lambda+n-1}\left[S_\varphi(r) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{r^{2k}}{(2k)!}S_\varphi^{(2k)}(0)\right]dr.$$

В этом случае она положительна на подпространстве, состоящем из таких функций $\varphi(x)$, что

$$S_\varphi(0) = S''_\varphi(0) = \ldots = S_\varphi^{(2m-2)}(0) = 0. \qquad (28)$$

Согласно формуле (6) из выпуска 1 (гл. I, § 3, п. 9) это условие (28) можно представить в виде

$$\varphi(0) = \Delta\varphi(0) = \ldots = \Delta^{m-1}\varphi(0) = 0,\ \Delta = \sum_{k=1}^n\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}. \qquad (29)$$

Итак, мы доказали, что обобщенная функция (r^λ, φ), где

$$r^\lambda = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\lambda/2},\quad -n-2m < \lambda < -n-2m+2,$$

положительна на подпространстве, состоящем из основных функций, удовлетворяющих условиям (29).

Более сложные примеры положительных и положительно определенных обобщенных функций многих переменных возникают при рассмотрении обобщенных функций, связанных с квадратичными формами (см. вып. 1. гл. IV, § 2).

Пусть, например, $P = \sum_{j,k=1}^n g_{jk}x_jx_k$ — квадратичная форма от n переменных. Тогда обобщенные функции P_+^λ и P_-^λ положительны при $\lambda > -1$. Поэтому преобразования Фурье этих обобщенных функций положительно определены.

Эти преобразования Фурье задаются (вып. 1, гл. IV, § 2, п. 6) формулами

$$\widetilde{P_+^\lambda} = 2^{n+2\lambda}\pi^{n/2-1}\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\frac{1}{2i\sqrt{|D|}}\times$$
$$\times\left[e^{i\left(\frac{q}{2}+\lambda\right)\pi}(Q-i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}} - e^{-i\left(\frac{q}{2}+\lambda\right)\pi}(Q+i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}\right] \qquad (30)$$

и

$$\widetilde{P_-^\lambda} = -2^{n+2\lambda}\pi^{\frac{n}{2}-1}\,\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\frac{1}{2i\sqrt{|D|}}\times$$
$$\times\left[e^{-\frac{\pi qi}{2}}(Q-i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}} - e^{\frac{\pi qi}{2}}(Q+i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}\right], \qquad (31)$$

где q — число отрицательных членов в канонической записи формы P, $Q = \sum_{j,k=1}^n g^{jk}x_jx_k$ — квадратичная форма, сопряженная форме P $\left(\text{т. е. такая форма, что } \sum_{k=1}^n g_{jk}g^{km} = \delta_j^m\right)$. Через D в формулах (30) и (31) обозначен дискриминант формы P, через $(Q+i0)^\lambda$ — обобщенная функция $Q_+^\lambda + e^{\pi\lambda i}Q_-^\lambda$ и через $(Q-i0)^\lambda$ — обобщенная функция $Q_+^\lambda + e^{-\pi\lambda i}Q_-^\lambda$.

Укажем еще, что при четном s обобщенная функция

$$(2\pi)^n\sum_{k=0}^s\frac{(-1)^n\left(\frac{c}{2}\right)^{2s-2k}}{4^kk!\,(s-k)!}L^k\delta(x),$$

где

$$L = \sum_{j,k=1}^n g^{jk}\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_k},$$

положительно определена, так как она является преобразованием Фурье положительной обобщенной функции $\frac{(c^2+P)^s}{\Gamma(s+1)}$, где s — четное положительное число. Мы не приводим здесь более сложных примеров, связанных с рассмотрением положительных обобщенных функций $(c^2+P)_+^\lambda$ и $(c^2+P)_-^\lambda$, поскольку выражения преобразований Фурье этих обобщенных функций довольно сложны.

Мы рассматривали до сих пор примеры положительно определенных обобщенных функций в пространстве K (или, что то же самое, в пространстве S). Укажем еще примеры положительно определенных обобщенных функций в пространстве Z. Эти обобщенные функции являются преобразованиями Фурье положительных обобщенных функций в пространстве K. Благодаря финитности основных функций обобщенные функции в пространстве K могут иметь любое поведение в бесконечности.

Рассмотрим, например, положительную функцию e^{ax} (a — вещественное число). Ее преобразованием Фурье является положительно определенная обобщенная функция $2\pi\delta(z - ia)$

$$(2\pi\delta(z - ia),\ \varphi(z)) = 2\pi\varphi(ia)$$

в пространстве Z.

Точно так же преобразованием Фурье положительной обобщенной функции $e^{x^2/2}$ в пространстве K является положительно определенная обобщенная функция

$$(F,\ \varphi) = -i\sqrt{2\pi}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{z^2}\varphi(z)\,dz$$

в пространстве Z.

§ 4. УСЛОВНО ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ *)

1. Основные определения. Из положительно определенных обобщенных функций можно получать новые положительно определенные обобщенные функции, применяя к ним дифференциальные операторы вида $D\bar{D}$, где $D = \sum_{|k|=s} a_k \frac{d^k}{dx^k}$ — линейный однородный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами порядка s *), а через $\bar{D}$ обозначен оператор $(-1)^s \sum_{|k|=s} \bar{a}_k \frac{d^k}{dx^k}$. В самом деле, из легко доказываемого равенства

$$D\bar{D}(\varphi * \varphi^*) = D\varphi * (D\varphi)^* \tag{1}$$

вытекает, что $(D\bar{D}F,\ \varphi * \varphi^*) = (F,\ D\varphi * (D\varphi)^*)$. Поэтому для любой положительно определенной обобщенной функции F выполняется неравенство $(D\bar{D}F,\ \varphi * \varphi^*) \geqslant 0$.

Обратное утверждение не имеет места — из того, что обобщенная функция $D\bar{D}F$ положительно определена, не следует, вообще говоря, положительная определенность самой функции F. Например, функция $-x^2$ не является положительно определенной. Однако, применяя к ней оператор $D\bar{D}$, где $D = \frac{d}{dx}$, мы получаем положительно определенную функцию $D\bar{D}(-x^2) = 2$.

Мы будем называть обобщенную функцию F *условно положительно определенной обобщенной функцией порядка* s, если неравенство $(D\bar{D}F,\ \varphi * \varphi^*) \geqslant 0$ выполняется для всех основных функций $\varphi(x)$ и всех линейных *однородных* дифференциальных операторов D порядка s с постоянными коэффициентами. Такие обобщенные функции встретятся нам, например, в приложениях к теории обобщенных случайных процессов в главе III.

Используя равенство (1), мы можем иначе сформулировать определение условной положительной определенности. Именно, обобщенная функция F условно положительно определена, если неравенство $(F,\ \varphi * \varphi^*) \geqslant 0$ выполняется для всех функций основного пространства, представимых в виде $\varphi(x) = D\psi(x)$, где D — линейный однородный дифференциальный оператор порядка s с постоянными коэффициентами, а $\psi(x)$ — основная функция.

*) Этот параграф может быть опущен при первом чтении. Его следует изучить перед чтением гл. III.

*) Как обычно, через $\frac{d^k}{dx^k}$ мы обозначаем оператор

$$\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}, \ldots, \partial x_n^{k_n}}, \quad |k| = k_1 + \ldots + k_n.$$

выражения преобразований Фурье этих обобщенных функций довольно сложны.

Мы рассматривали до сих пор примеры положительно определенных обобщенных функций в пространстве K (или, что то же самое, в пространстве S). Укажем еще примеры положительно определенных обобщенных функций в пространстве Z. Эти обобщенные функции являются преобразованиями Фурье положительных обобщенных функций в пространстве K. Благодаря финитности основных функций обобщенные функции в пространстве K могут иметь любое поведение в бесконечности.

Рассмотрим, например, положительную функцию e^{ax} (a — вещественное число). Ее преобразованием Фурье является положительно определенная обобщенная функция $2\pi\delta(z-ia)$

$$(2\pi\delta(z-ia),\ \varphi(z))=2\pi\varphi(ia)$$

в пространстве Z.

Точно так же преобразованием Фурье положительной обобщенной функции $e^{x^2/2}$ в пространстве K является положительно определенная обобщенная функция

$$(F,\ \varphi)=-i\sqrt{2\pi}\int_{-i\infty}^{i\infty}e^{z^2}\varphi(z)\,dz$$

в пространстве Z.

§ 4. УСЛОВНО ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ *)

1. Основные определения. Из положительно определенных обобщенных функций можно получать новые положительно определенные обобщенные функции, применяя к ним дифференциальные операторы вида $D\bar{D}$, где $D=\sum\limits_{|k|=s}a_k\dfrac{d^k}{dx^k}$ — линейный однородный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами порядка s *), а через $\bar{D}$ обозначен оператор $(-1)^s\sum\limits_{|k|=s}\overline{a_k}\dfrac{d^k}{dx^k}$. В самом деле, из легко доказываемого равенства

$$D\bar{D}(\varphi*\varphi^*)=D\varphi*(D\varphi)^* \qquad (1)$$

вытекает, что $(D\bar{D}F,\ \varphi*\varphi^*)=(F,\ D\varphi*(D\varphi)^*)$. Поэтому для любой положительно определенной обобщенной функции F выполняется неравенство $(D\bar{D}F,\ \varphi*\varphi^*)\geqslant 0$.

Обратное утверждение не имеет места — из того, что обобщенная функция $D\bar{D}F$ положительно определена, не следует, вообще говоря, положительная определенность самой функции F. Например, функция $-x^2$ не является положительно определенной. Однако, применяя к ней оператор $D\bar{D}$, где $D=\dfrac{d}{dx}$, мы получаем положительно определенную функцию $D\bar{D}(-x^2)=2$.

Мы будем называть обобщенную функцию F *условно положительно определенной обобщенной функцией порядка* s, если неравенство $(D\bar{D}F,\ \varphi*\varphi^*)\geqslant 0$ выполняется для всех основных функций $\varphi(x)$ и всех линейных *однородных* дифференциальных операторов D порядка s с постоянными коэффициентами. Такие обобщенные функции встретятся нам, например, в приложениях к теории обобщенных случайных процессов в главе III.

Используя равенство (1), мы можем иначе сформулировать определение условной положительной определенности. Именно, обобщенная функция F условно положительно определена, если неравенство $(F,\ \varphi*\varphi^*)\geqslant 0$ выполняется для всех функций основного пространства, представимых в виде $\varphi(x)=D\psi(x)$, где D — линейный однородный дифференциальный оператор порядка s с постоянными коэффициентами, а $\psi(x)$ — основная функция.

*) Этот параграф может быть опущен при первом чтении. Его следует изучить перед чтением гл. III.

*) Как обычно, через $\dfrac{d^k}{dx^k}$ мы обозначаем оператор

$$\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1},\ \ldots,\ \partial x_n^{k_n}},\quad |k|=k_1+\ldots+k_n.$$

Изучение условно положительно определенных обобщенных функций удобнее провести, заменив эти функции их преобразованиями Фурье.

Сопоставим каждому дифференциальному оператору

$$D = \sum_{|k|=s} a_k \frac{d^k}{dx^k}$$

многочлен

$$P(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|k|=s} a_k (-i\lambda)^k.$$

Так как для любой обобщенной функции справедливо равенство $\widetilde{\frac{d^kF}{dx^k}} = \frac{(-i\lambda)^k}{(2\pi)^n}\tilde{F}$, то $\widetilde{DF} = P(\lambda)\tilde{F}$. Легко показать, что оператору $\overline{D}$ соответствует многочлен

$$\overline{P}(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|k|=s} \overline{a}_k (-i\lambda)^k.$$

Поэтому преобразованием Фурье обобщенной функции $D\overline{D}F$ является обобщенная функция $P\overline{P}\tilde{F}$. Так как преобразование Фурье переводит функцию $\varphi * \varphi^*(x)$ в функцию $\tilde{\varphi}(\lambda)\overline{\tilde{\varphi}}(\lambda)$, то условная положительная определенность порядка s для обобщенной функции F эквивалентна выполнению неравенства

$$(P\overline{P}\tilde{F},\ \psi\overline{\psi}) \geqslant 0$$

для всех *однородных* многочленов P степени s и всех функций $\psi(\lambda)$ из двойственного пространства.

В соответствии с этим мы будем называть обобщенную функцию F *условно положительной порядка* s, если неравенство $(P\overline{P}F,\ \psi\overline{\psi}) \geqslant 0$ выполняется для всех *однородных многочленов степени* s и всех основных функций (точнее было бы назвать такие обобщенные функции *условно мультипликативно положительными*, но мы для краткости опускаем слово «мультипликативно»).

Поскольку нас будут интересовать условно положительно определенные обобщенные функции в пространстве K, мы будем условно положительные обобщенные функции рассматривать в двойственном к нему пространстве Z.

2. Условно положительные обобщенные функции (случай одного переменного) *). В этом пункте мы найдем общий вид условно положительных обобщенных функций порядка s для функций одного переменного. Поскольку для функций одного переменного единственным однородным многочленом степени s является x^s, то условная положительность обобщенной функции F эквивалентна мультипликативной положительности обобщенной функции $x^{2s}F$. Но по теореме Бохнера — Шварца из § 3 всякая мультипликативно положительная обобщенная функция в пространстве Z задается положительной мерой степенного роста. Таким образом, если F — условно положительная обобщенная функция порядка s, то существует такая положительная мера ν степенного роста, что для всех функций $\varphi(z)$ из пространства Z выполняется равенство

$$(F,\ z^{2s}\varphi(z)) = \int \varphi(x)\, d\nu(x).$$

Но любая функция одного переменного $\psi(z)$ из пространства Z, имеющая при $z=0$ нуль порядка $2s$, может быть представлена в виде $\psi(z) = z^{2s}\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ также принадлежит Z. Поэтому доказанное нами утверждение означает, что

$$(F,\ \psi) = \int \psi(x) \frac{d\nu(x)}{x^{2s}} \tag{2}$$

для любой функции $\psi(z)$ из пространства Z, имеющей при $z=0$ нуль $2s$-го порядка.

Нам будет удобнее сформулировать это утверждение иначе. Для этого выделим в интеграле (2) точку $x=0$. Принимая во внимание соотношение

$$\lim_{x\to 0} \frac{\psi(x)}{x^{2s}} = \frac{\psi^{(2s)}(0)}{(2s)!},$$

мы получаем, что

$$(F,\ \psi) = \int_{\Omega_0} \psi(x) \frac{d\nu(x)}{x^{2s}} + a\frac{\psi^{(2s)}(0)}{(2s)!}, \tag{3}$$

*) Этот случай наиболее важен для теории случайных процессов. Читатель, интересующийся теорией случайных полей, должен ознакомиться также с п. 3, в котором будут рассмотрены условно положительные обобщенные функции для многих переменных.

где Ω_0 — область, дополнительная к точке $x=0$, а коэффициент a равен мере этой точки. Введя в области Ω_0 новую меру $d\mu(x)=\frac{d\nu(x)}{x^{2s}}$, мы можем переписать равенство (3) в более простом виде

$$(F, \psi)=\int\limits_{\Omega_0}\psi(x)\,d\mu(x)+a\,\frac{\psi^{(2s)}(0)}{(2s)!}. \tag{4}$$

Мы нашли, таким образом, общий вид функционала F для функций $\psi(z)$, имеющих при $z=0$ нуль $2s$-го порядка. Найдем теперь общий вид этого функционала для любой функции $\psi(z)$ из пространства Z. Выберем любую функцию $\alpha(z)$ из пространства Z, такую, что $\alpha(z)-1$ имеет при $z=0$ нуль $(2s+1)$-го порядка *), и сопоставим каждой функции $\psi(z)$ из пространства Z функцию

$$\theta(z)=\psi(z)-\alpha(z)\sum_{k=0}^{2s-1}\frac{\psi^{(k)}(0)\,z^k}{k!}.$$

Эта функция имеет при $z=0$ нуль $2s$-го порядка, и потому к ней применима формула (4) **)

$$(F, \theta)=\int\limits_{\Omega_0}\theta(x)\,d\mu(x)+a\frac{\theta^{(2s)}(0)}{2s!}.$$

Но

$$(F, \psi)=(F, \theta)+\sum_{k=0}^{2s-1}\frac{\psi^{(k)}(0)}{k!}(F, \alpha(z)z^k),$$

---

*) Такую функцию $\alpha(z)$ легко построить, рассматривая функции вида $p(z)\beta(z)$, где $\beta(z)\in Z$, а $p(z)$ — многочлен степени $2s+1$, и подбирая соответственным образом коэффициенты этого многочлена.

**) Мы не могли положить попросту

$$\theta(z)=\psi(z)-\sum_{k=0}^{2s-1}\frac{\psi^{(k)}(0)}{k!}z^k,$$

так как тогда функция $\theta(z)$ не стремилась бы к нулю на вещественной оси и не принадлежала бы пространству Z.

Заметим, что функция $\alpha(z)$ определена неоднозначно. Окончательное выражение для (F, ψ) зависит от выбора $\alpha(z)$ и потому также неоднозначно.

а $\theta^{(2s)}(0)=\psi^{(2s)}(0)$, и потому

$$(F, \psi)=$$
$$=\int\limits_{\Omega_0}\left[\psi(x)-\alpha(x)\sum_{k=0}^{2s-1}\frac{\psi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right]d\mu(x)+\sum_{k=0}^{2s}a_k\frac{\psi_k(0)}{k!},$$

где положено для краткости $a_k=(F, \alpha(z)z^k)$ при $0\leqslant k\leqslant 2s-1$ и $a_{2s}=a=\nu(0)$.

Поскольку мера ν конечна для всех ограниченных множеств, то $\int\limits_{0<|x|<1}d\nu(x)<+\infty$, и потому $\int\limits_{0<|x|<1}x^{2s}\,d\mu(x)<+\infty$. Кроме того, отметим, что $a_{2s}\geqslant 0$, так как a_{2s} является ν-мерой точки $x=0$.

Итак, мы доказали следующую теорему:

Теорема 1. *В пространстве Z всякая условно положительная обобщенная функция F порядка s от одного переменного имеет вид*

$$(F, \psi)=\int\limits_{\Omega_0}\left[\psi(x)-\alpha(x)\sum_{k=0}^{2s-1}\frac{\psi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right]d\mu(x)+\sum_{k=0}^{2s}a_k\frac{\psi^{(k)}(0)}{k!}. \tag{5}$$

Здесь μ — положительная мера степенного роста, такая, что интеграл $\int\limits_{0<|x|<1}x^{2s}\,d\mu(x)$ сходится, $\alpha(z)$ — функция из пространства Z, такая, что $\alpha(z)-1$ имеет при $z=0$ нуль $(2s+1)$-го порядка, $a_{2s}\geqslant 0$, и a_k, $0\leqslant k\leqslant 2s-1$ — некоторые числа.

Заметим, что справедливо и обратное утверждение — *любая обобщенная функция F вида (5), где μ, $\alpha(z)$ и a_k удовлетворяют сформулированным условиям, является условно положительной функцией порядка s.* В самом деле, если $\varphi(z)$ — любая функция из пространства Z, то функция $z^{2s}\varphi(z)\overline{\varphi}(z)$ имеет при $z=0$ нуль по меньшей мере $2s$-го порядка. Поэтому все ее производные до $(2s-1)$-го порядка включительно обращаются в точке $z=0$ в нуль. Производная же порядка $2s$ при $z=0$ равна $(2s)!\,|\varphi(0)|^2$.

Поэтому имеет место равенство

$$(F,\ z^{2s}\varphi(z)\overline{\varphi}(z)) = \int\limits_{\Omega_0} x^{2s}\,|\varphi(x)|^2\,d\mu(x) + a_{2s}\,|\varphi(0)|^2. \quad (6)$$

Интеграл в формуле (6) сходится на бесконечности, так как камера μ имеет степенной рост, а функция $x^{2s}|\varphi(x)|^2$ быстро убывает. Он сходится также и в нуле, так как по условию сходится интеграл $\int\limits_{0<|x|<1} x^{2s}\,d\mu(x)$. Но так как мера μ положительна и $a_{2s} \geqslant 0$, то из формулы (6) следует, что $(F,\ z^{2s}\varphi(z)\overline{\varphi}(z)) \geqslant 0$. Тем самым доказано, что если мера μ, функция $\alpha(z)$ и числа a_k удовлетворяют условиям теоремы 1, то формула (5) задает условно положительную обобщенную функцию порядка s.

3. Условно положительные обобщенные функции (случай многих переменных). В случае многих переменных имеет место теорема, аналогичная теореме 1.

Теорема 1′. *Любая условно положительная обобщенная функция F порядка s в пространстве Z имеет вид*

$$(F,\varphi) =$$

$$= \int\limits_{\Omega_0}\left[\varphi(x) - \alpha(x)\sum_{|k|=0}^{2s-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right]d\mu(x) + \sum_{|k|=0}^{2s} a_k\,\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}. \quad (7)$$

Здесь μ — положительная мера степенного роста, определенная в дополнении Ω_0 к точке $x=0$ и такая, что интеграл $\int\limits_{0<|x|<1} |x|^{2s}\,d\mu(x)$ сходится, $\alpha(z)$ — функция из пространства Z, такая, что $\alpha(z)-1$ имеет при $z=0$ нуль $(2s+1)$-го порядка); a_k, $|k|=2s$, — такие числа, что эрмитова форма $\sum\limits_{|i|=|j|=s} a_{i+j}\xi_i\overline{\xi}_j$ положительно определена, а a_k, $|k| \leqslant 2s-1$, — любые фиксированные числа*).*

Мы докажем сначала частный случай этой теоремы, а именно укажем общий вид функционала (F,φ) для функций $\varphi(z)$ пространства Z, имеющих вид

$$\varphi(z) = \sum_{|k|=2s} z^k\varphi_k(z), \quad \varphi_k(z) \in Z. \quad (8)$$

Лемма 1. *Пусть F — условно положительная обобщенная функция порядка s. Тогда для любой функции $\varphi(z)$ пространства Z, являющейся линейной комбинацией функций $z^k\varphi_k(z)$, где $|k|=2s$, $\varphi_k(z)\in Z$, обобщенная функция F задается формулой*

$$(F,\varphi) = \int\limits_{\Omega_0}\varphi(x)\,d\mu(x) + \sum_{|k|=2s} a_k\,\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}. \quad (9)$$

Здесь μ — такая положительная мера степенного роста, что интеграл $\int\limits_{0<|x|<1} |x|^{2s}\,d\mu(x)$ сходится, а a_k, $|k|=2s$, — такие числа, что эрмитова форма $\sum\limits_{|i|=|j|=s} a_{i+j}\xi_i\overline{\xi}_j$ положительно определена.

Сначала мы найдем общий вид функционала F для функций вида $\varphi(z) = z^k\psi(z)$, где $\psi(z)$ — функция из пространства Z, а $|k|=2s$. Поскольку при $|k|=2s$ одночлен z^k можно записать в виде $z^k = z^iz^j$, где $|i|=|j|=s$, то функцию $z^k\psi(z)$ можно представить в следующем виде:

$$z^k\psi(z) = \left(\frac{z^i+z^j}{2}\right)^2\psi(z) - \left(\frac{z^i-z^j}{2}\right)^2\psi(z).$$

Но для любого однородного многочлена $P(z)$ степени s найдется такая положительная мера ν_P степенного роста, что для всех функций $\psi(z)$ из пространства Z выполняется равенство

$$(F,\ P\overline{P}\psi) = \int \psi(x)\,d\nu_P(x). \quad (10)$$

---

*) Иными словами, $\alpha(0)=1$ и $\alpha^{(q)}(0)=0$ при $1 \leqslant |q| \leqslant 2s$.

*) Мы полагаем здесь, как и во всей книге, $|x| = (x_1^2+\ldots+x_n^2)^{1/2}$. Через $k!$ мы обозначаем $k_1!\ldots k_n!$, через z^k — выражение $z_1^{k_1}\ldots z_n^{k_n}$, через $|k|$ — сумму $k_1+\ldots+k_n$.

В самом деле, по определению условной положительности обобщенной функции F обобщенная функция $P\bar{P}F$ мультипликативно положительна. Согласно же теореме 3′ из § 3 мультипликативно положительная обобщенная функция в пространстве Z задается положительной мерой степенного роста ν_P. Поэтому

$$(F, P\bar{P}\psi) = (P\bar{P}F, \psi) = \int \psi(x)\, d\nu_P(x).$$

Применяя доказанное утверждение к многочленам $P_1(z) = \frac{z^i + z^j}{2}$ и $P_2(z) = \frac{z^i - z^j}{2}$, мы убеждаемся, что

$$(F, z^k\psi(z)) = (F, P_1\bar{P}_1\psi) - (F, P_2\bar{P}_2\psi) =$$
$$= \int \psi(x)\, d\nu_{P_1}(x) - \int \psi(x)\, d\nu_{P_2}(x) = \int \psi(x)\, d\nu_k(x),$$

где положено

$$d\nu_k(x) = d\nu_{P_1}(x) - d\nu_{P_2}(x).$$

На первый взгляд, мера ν_k зависит не только от значения k, но и от способа разложения $z^k = z^i z^j$ одночлена z^k в произведение одночленов $z^i = z^{i_1} \ldots z^{i_n}$ и $z^j = z^{j_1} \ldots z^{j_n}$ степени s. На самом деле, мера ν_k зависит только от k. Действительно, предположим, что другому разложению $z^k = z^p z^q$, $|p| = |q| = s$, соответствует мера σ_k. Тогда для любой функции $\psi(z)$ из пространства Z мы имеем

$$(F, z^k\psi(z)) = \int \psi(x)\, d\nu_k(x) = \int \psi(x)\, d\sigma_k(x).$$

Но пространство Z всюду плотно в пространстве S и потому для всех функций $\psi(x)$ из S выполняется равенство

$$\int \psi(x)\, d\nu_k(x) = \int \psi(x)\, d\sigma_k(x).$$

Это может иметь место, только если $\nu_k = \sigma_k$.

Итак, мы доказали, что для любого k, $|k| = 2s$, найдется единственная мера ν_k (вообще говоря, не положительная), такая, что обобщенная функция F задается для всех функций вида $z^k\psi(z)$, $\psi(z) \in Z$, равенством

$$(F, z^k\psi(z)) = \int \psi(x)\, d\nu_k(x). \qquad (11)$$

Формула (11) еще не позволяет найти общий вид функционала (F, φ) для всех функций вида $\sum_{|k|} z^k\varphi_k(z)$, поскольку мера ν_k в этой формуле зависит от значения k (т. е. от набора чисел $k_1, \ldots, k_n$). Мы хотим поэтому переписать эту формулу в виде, не зависящем от значения k. Для этого разобьем все пространство независимых переменных на два множества — многообразие L_k, где $x^k = 0$ *), и дополнительную к нему область Ω_k. В каждой области Ω_k вместо меры ν_k введем новую меру μ_k, положив **) $d\mu_k(x) = \frac{d\nu_k(x)}{x^k}$.

Покажем, что эти меры обладают следующим свойством *согласованности*: в области $\Omega_j \cap \Omega_k$ имеет место равенство $\mu_j = \mu_k$. Пусть x^j и x^k — два одночлена степени $2s$. Тогда для любой функции $\psi(z)$ из пространства Z выполняются равенства

$$(F, z^{j+k}\psi(z)) = \int x^k\psi(x)\, d\nu_j(x)$$

и

$$(F, z^{j+k}\psi(z)) = \int x^j\psi(x)\, d\nu_k(x)$$

и, значит, для любой $\psi(z) \in Z$

$$\int x^k\psi(x)\, d\nu_j(x) = \int x^j\psi(x)\, d\nu_k(x),$$

т. е.

$$x^k\, d\nu_j(x) = x^j\, d\nu_k(x). \qquad (12)$$

Но тогда в области $\Omega_j \cap \Omega_k$ имеем $\mu_j = \mu_k$. Согласованность мер μ_k доказана.

Из согласованности этих мер вытекает, что в объединении Ω_0 всех областей Ω_k существует мера μ, совпадающая в каждой из областей Ω_k с соответствующей мерой μ_k.

*) Напомним, что равенство $x^k = 0$ является сокращенным обозначением равенства $x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} = 0$. Поэтому многообразие L_k состоит из всех гиперплоскостей $x_i = 0$, для которых k_i отлично от нуля.

**) Это возможно, поскольку в области Ω_k знаменатель x^k не обращается в нуль.

Нетрудно видеть, что Ω_0 является дополнением точки $x=0$. Мы можем теперь записать равенство (11) в виде

$$(F,\ z^k\psi(z)) = \int_{\Omega_k} \psi(x)\,d\nu_k(x) + \int_{L_k} \psi(x)\,d\nu_k(x) =$$
$$= \int_{\Omega_k} x^k\psi(x)\,d\mu_k(x) + \int_{L_k} \psi(x)\,d\nu_k(x) =$$
$$= \int_{\Omega_k} x^k\psi(x)\,d\mu(x) + \int_{L_k} \psi(x)\,d\nu_k(x). \qquad (13)$$

Поскольку функция $x^k\psi(x)$ обращается в нуль вне множества Ω_k, то первое слагаемое в формуле (13) не изменится, если заменить область интегрирования Ω_k областью Ω_0

$$\int_{\Omega_k} x^k\psi(x)\,d\mu(x) = \int_{\Omega_0} x^k\psi(x)\,d\mu(x).$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое. Из соотношения (12) мы имеем $\nu_k(L_k') = 0$, где через L_k' обозначена совокупность точек x, в которых $x^k = 0$, но хотя бы один из одночленов x^j не равен нулю. Поскольку многообразие L_k можно разбить на точку $x=0$ и на конечное число множеств, в которых хотя бы один из одночленов x^j отличен от нуля, мера ν_k сосредоточена в точке $x=0$. Поэтому интеграл $\int_{L_k}\psi(x)\,d\nu_k(x)$ равен $a_k\psi(0)$, где a_k равно ν_k-мере точки $x=0$.

Подставляя полученные выражения в формулу (13), мы получаем, что

$$(F,\ z^k\psi(z)) = \int_{\Omega_0} x^k\psi(x)\,d\mu(x) + a_k\psi(0). \qquad (14)$$

Полагая $z^k\psi(z) = \varphi(z)$ и принимая во внимание равенство $\psi(0) = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}$, мы можем записать равенство (14) в виде

$$(F,\ \varphi) = \int_{\Omega_0} \varphi(x)\,d\mu(x) + a_k\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}. \qquad (15)$$

Равенство (15) можно представить в следующей форме, уже не зависящей от значения k,

$$(F,\ \varphi) = \int_{\Omega_0} \varphi(x)\,d\mu(x) + \sum_{|k|=2s} a_k\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}. \qquad (16)$$

В самом деле, все производные порядка j, $|j| = 2s$, функции $\varphi(z) = z^k\psi(z)$ обращаются в нуль при $z=0$, если j отлично от k. Поэтому равенство (15) равносильно равенству (16).

Итак, мы нашли общий вид функционала $(F,\ \varphi)$ для функций вида $\varphi = z^k\psi(z)$, $|k| = 2s$, $\psi(z)\in Z$. Но правая часть равенства (16) не зависит от значения k, а потому это равенство сохраняет силу для линейных комбинаций функций $z^k\psi(z)$. Тем самым доказано, что для всех функций вида

$$\varphi(z) = \sum_{|k|=2s} z^k\varphi_k(z), \quad \varphi_k(z)\in Z$$

значение функционала $(F,\ \varphi)$ выражается формулой (16).

Чтобы завершить доказательство леммы, нам осталось показать, что мера μ и числа a_k обладают указанными в ней свойствами. Иными словами, нам надо доказать, что мера μ положительна, имеет степенной рост и что интеграл *) $\int_{0<|x|\leqslant 1} |x|^{2s}\,d\mu(x)$ сходится. Числа же a_k ($|k| = 2s$) таковы, что эрмитова форма $\sum_{|l|=|j|=s} a_{l+j}\xi_l\bar{\xi}_j$ положительно определена.

Для доказательства положительности меры μ воспользуемся соотношением $x^k\,d\mu(x) = d\nu_k(x)$, послужившим для введения меры μ. Выберем значение k, имеющее вид $k = 2j$ (т. е. такое, что $x^k = x_1^{2j_1}\ldots x_n^{2j_n}$). *Это возможно, так как k может быть любым целочисленным вектором с длиной* $|k| = 2s$. В силу условной положительности обобщенной функции F обобщенная функция $z^{2j}F$ мультипликативно положительна. По теореме 3′ из § 3 отвечающая ей мера ν_{2j} есть положительная мера степенного роста. Но тогда и мера μ, связанная с ней равенством $x^{2j}\,d\mu(x) = d\nu_{2j}(x)$, также положительна и имеет степенной рост. При этом из

*) $|x|^{2s} = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^s$.

того, что $\int\limits_{0<|x|<1} d\nu_{2j}(x)<+\infty$, вытекает сходимость интеграла

$$\int\limits_{0<|x|<1} x^{2j}\,d\mu(x). \tag{17}$$

Поскольку интеграл $\int\limits_{0<|x|<1} |x|^{2s}\,d\mu(x)$ является линейной комбинацией интегралов вида (17), то и он тоже сходится. Итак, наши утверждения, касавшиеся меры μ, доказаны.

Чтобы доказать утверждение, касающееся чисел a_k, напомним, что эти числа определялись нами как ν_k — меры точки 0, $a_k=\nu_k(0)$. Поэтому нам надо доказать, что для любых комплексных чисел $\xi_1, \ldots, \xi_n$ выполняется неравенство

$$\sum_{|i|=|j|=s} \nu_{i+j}(0)\,\xi_i\bar{\xi}_j \geqslant 0. \tag{18}$$

Для доказательства неравенства (18) образуем однородный многочлен $P(z)=\sum\limits_{|j|=s}\xi_j z^j$ степени s. Как было отмечено в начале доказательства, этому многочлену соответствует положительная мера $d\nu_P$, такая, что

$$(F,\ P\bar{P}\varphi)=\int \varphi(x)\,d\nu_P(x) \tag{19}$$

для всех функций $\varphi(z)$ из пространства Z. Но, с другой стороны,

$$(F,\ P\bar{P}\,\varphi)=\sum_{|i|=|j|=s}(F,\ z^{i+j}\varphi)\,\xi_i\bar{\xi}_j = \\ =\sum_{|i|=|j|=s}\xi_i\bar{\xi}_j\int\varphi(x)\,d\nu_{i+j}(x). \tag{20}$$

Поскольку формулы (19) и (20) имеют место для любой функции $\varphi(z)$ из пространства Z, то для любого множества A выполняется равенство

$$\nu_P(A)=\sum_{|i|=|j|=s}\nu_{i+j}(A)\,\xi_i\bar{\xi}_j.$$

Выберем в качестве множества A точку $x=0$. Так как $\nu_{i+j}(0)=a_{i+j}$, то мы получим, что

$$\nu_P(0)=\sum_{|i|=|j|=s} a_{i+j}\xi_i\bar{\xi}_j.$$

Поскольку $\nu_P(0)\geqslant 0$, то из этого соотношения вытекает неравенство (18). Таким образом, положительная определенность эрмитовой формы $\sum\limits_{|i|=|j|=s} a_{i+j}\xi_i\bar{\xi}_j$ доказана.

Лемма 1 дает общий вид функционала $(F,\ \varphi)$ для функций, записываемых формулой (8). Мы покажем теперь, что равенство (16) справедливо для всех функций $\varphi(z)$, имеющих в точке $z=0$ нуль порядка $2s$. Чтобы доказать это, примем во внимание, что функции вида (8) всюду плотны в множестве функций из Z, имеющих при $z=0$ нуль порядка $2s$ (доказательство этого утверждения приведено в добавлении к этому параграфу, стр. 243). Поэтому для доказательства нашего утверждения достаточно показать, что функционал

$$(F_1,\ \varphi)=\int\limits_{\Omega_0}\varphi(x)\,d\mu(x)+\sum_{|k|=2s} a_k\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}, \tag{21}$$

рассматриваемый на функциях вида

$$\varphi(z)=\sum_{|k|=2s} z^k\varphi_k(z),\quad \varphi_k(z)\in Z, \tag{22}$$

непрерывен в топологии пространства Z.

Пусть функция $\varphi(z)$ из пространства Z имеет указанный вид. Тогда функция $\frac{\varphi(x)}{|x|^{2s}}$ ограничена при $0<|x|<1$ и из сходимости интеграла $\int\limits_{0<|x|<1}|x|^{2s}\,d\mu(x)$ вытекает сходимость интеграла $\int\limits_{0<|x|<1}\varphi(x)\,d\mu(x)$. Сходимость же интеграла $\int\limits_{|x|\geqslant 1}\varphi(x)\,d\mu(x)$ вытекает из быстрого убывания функции $\varphi(x)$ и степенного роста меры μ. Отсюда следует, что функционал $(F_1,\ \varphi)$ определен для всех функций $\varphi(z)$ вида (22) из пространства Z.

Докажем непрерывность функционала F_1 в топологии пространства Z. Пусть последовательность функций $\varphi_m(z)$ из этого пространства, имеющих вид

$$\varphi_m(z) = \sum_{|k|=2s} z^k \varphi_{mk}(z), \quad \varphi_{mk}(z) \in Z, \tag{23}$$

сходится к нулю (в топологии пространства Z). Из свойств меры μ вытекает, что при некотором $p > 0$ интеграл $\int \frac{|x|^{2s}\, d\mu(x)}{(1+|x|^2)^p}$ сходится.

Поскольку функции $\varphi_m(z)$ сходятся к нулю в топологии пространства Z и имеют вид (23), то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что при $m \geqslant N$ выполняются неравенства $|\varphi_m(z)| < \frac{\varepsilon |x|^{2s}}{(1+|x|^2)^p}$ и $|\varphi_m^{(k)}(0)| < \varepsilon$, $|k| = 2s$. Но тогда при $m \geqslant N$ имеет место неравенство

$$|(F_1, \varphi_m)| \leqslant \varepsilon \left[\int \frac{|x|^{2s}\, d\mu(x)}{(1+|x|^2)^p} + \sum_{|k|=2s} \frac{|a_k|}{k!} \right].$$

Ввиду произвольности ε отсюда вытекает непрерывность функционала F_1. Поскольку этот функционал совпадает с функционалом F на функциях вида (22), а эти функции всюду плотны в подпространстве функций $\varphi(z)$ из Z, имеющих при $z = 0$ нуль $2s$-го порядка, то равенство

$$(F, \varphi) = \int \varphi(x)\, d\mu(x) + \sum_{|k|=2s} a_k \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}$$

справедливо для всех функций $\varphi(z)$ из этого подпространства. Тем самым лемма 1 доказана.

Из наших рассуждений вытекает, что *если мера μ имеет степенной рост, а интеграл* $\int\limits_{0<|x|<1} |x|^{2s}\, d\mu(x)$ *сходится, то интеграл* $\int \varphi(x)\, d\mu(x)$ *сходится для всех функций из пространства Z, имеющих при $z = 0$ нуль порядка $2s$, и определяет непрерывный линейный функционал в подпространстве таких функций.*

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1′, т. е. к установлению вида обобщенной функции F для любой функции $\varphi(z)$ из пространства Z. Как и для функций одного переменного, введем новую функцию $\theta(z)$, положив

$$\theta(z) = \varphi(z) - \alpha(z) \sum_{|k|=0}^{2s-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} z^k,$$

где $\alpha(z)$ — какая-либо функция из пространства Z, такая, что $\alpha(z) - 1$ имеет при $z = 0$ нуль $(2s+1)$-го порядка. Функция $\theta(z)$ имеет при $z = 0$ нуль $2s$-го порядка.

Мы уже показали, что для таких функций обобщенная функция F выражается формулой

$$(F, \theta) = \int\limits_{\Omega_0} \theta(x)\, d\mu(x) + \sum_{|k|=2s} a_k \frac{\theta^{(k)}(0)}{k!}.$$

Поскольку производные порядка $2s$ функций $\varphi(z)$ и $\theta(z)$ совпадают, то эту формулу можно записать в виде

$$(F, \theta) = \int\limits_{\Omega_0} \theta(x)\, d\mu(x) + \sum_{|k|=2s} a_k \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}.$$

Но

$$(F, \varphi) = (F, \theta) + \sum_{|k|=0}^{2s-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} (F, \alpha(z) z^k).$$

Обозначая $(F, \alpha(z) z^k)$ через a_k, мы получаем, что

$$(F, \varphi) = \\ = \int\limits_{\Omega_0} \left[\varphi(x) - \alpha(x) \sum_{|k|=0}^{2s-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \right] d\mu(x) + \sum_{|k|=0}^{2s} a_k \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}.$$

Тем самым найден общий вид обобщенной функции F для любой функции $\varphi(z)$ из пространства Z. Теорема 1′ доказана.

Справедлива и теорема, обратная теореме 1′.

Теорема 2. *Пусть μ — положительная мера степенного роста, такая, что интеграл $\int\limits_{0<|x|<1} |x|^{2s}\,d\mu(x)$ сходится, a_k, $|k|=2s$, — такие числа, что эрмитова форма $\sum\limits_{|i|=|j|=s} a_{i+j}\xi_i\bar{\xi}_j$ положительно определена, a_k, $0\leqslant|k|\leqslant 2s-1$, — произвольные числа, а $\alpha(z)$ — такая функция из пространства Z, что $\alpha(z)-1$ имеет при $z=0$ нуль $(2s+1)$-го порядка. Тогда обобщенная функция, задаваемая формулой*

$$(F,\ \varphi)=\int\limits_{\Omega_0}\left[\varphi(x)-\alpha(x)\sum_{|k|=0}^{2s-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right]d\mu(x)+ \\ +\sum_{|k|=0}^{2s} a_k\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}, \qquad (24)$$

условно положительна порядка s.

Доказательство. Сначала докажем, что равенство (24) определяет функционал в пространстве Z. Пусть $\varphi(z)$ — любая функция из этого пространства. Тогда функция

$$\theta(z)=\varphi(z)-\alpha(z)\sum_{|k|=0}^{2s-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}Z^k$$

имеет при $z=0$ нуль $2s$-го порядка.

Мы показали на стр. 232, что отсюда следует сходимость интеграла $\int\limits_{\Omega_0}\theta(x)\,d\mu(x)$ и непрерывная зависимость этого интеграла от функции $\theta(x)$. Поэтому равенство (24) определяет непрерывный линейный функционал в пространстве Z.

Покажем теперь, что обобщенная функция F условно положительна порядка s, т. е. что $(F, P\bar{P}\varphi\bar{\varphi})\geqslant 0$ для любого однородного многочлена $P(z)$ степени s и любой функции $\varphi(z)$ из пространства Z. В самом деле, функция $\psi(z)=P(z)\bar{P}(z)\varphi(z)\bar{\varphi}(z)$ имеет при $z=0$ нуль $2s$-го порядка, т. е. все ее производные до $(2s-1)$-го порядка включительно обращаются в нуль при $z=0$. Производные же

$\psi^{(k)}(0)$, $|k|=2s$, по формуле Лейбница при $z=0$ равны *)

$$\psi^{(k)}(0)=\sum_{|i|=|j|=s}(i+j)!\,\frac{P^{(i)}(0)\,\varphi(0)}{i!}\,\overline{\frac{P^{(j)}(0)\,\varphi(0)}{j!}}\ {}^{**)}.$$

Поэтому обобщенная функция F задается для функции $\psi(z)=P(z)\bar{P}(z)\varphi(z)\bar{\varphi}(z)$ равенством

$$(F,\ P\bar{P}\varphi\bar{\varphi})=\int\limits_{\Omega_0}|P(x)\varphi(x)|^2\,d\mu(x)+ \\ +\sum_{|i|=|j|=s}a_{i+j}\,\frac{P^{(i)}(0)\,\varphi(0)}{i!}\,\overline{\frac{P^{(j)}(0)\,\varphi(0)}{j!}}.$$

Поскольку оба слагаемых в правой части этого равенства положительны $\left(\text{в силу положительности меры } \mu \text{ и положительной определенности формы } \sum\limits_{|i|=|j|=s}a_{i+j}\xi_i\bar{\xi}_j\right)$, то мы получаем, что $(F, P\bar{P}\varphi\bar{\varphi})\geqslant 0$. Тем самым условная положительность обобщенной функции F доказана.

Отметим, что как мера μ, так и числа a_k, $|k|=2s$, однозначно определяются условно положительной обобщенной функцией F. В то же время функция $\alpha(z)$ и числа a_k, $|k|\leqslant 2s-1$, определены неоднозначно. Для доказательства однозначной определенности меры μ и чисел a_k, $|k|=2s$, заметим следующее.

По теореме Бохнера — Шварца (теорема 3 из § 3) функционал F *однозначно* определяет для каждого многочлена $P(z)$ меру ν_P, такую, что $(F, P\bar{P}\varphi)=\int\varphi(x)\,d\nu_P(x)$. Меры ν_P однозначно определяют такие меры ν_k, $|k|=2s$, что $(F, z^k\varphi(z))=\int\varphi(x)\,d\nu_k(x)$. Наконец, меры ν_k однозначно

---

*) Через $\dfrac{(i+j)!}{i!\,j!}$ мы обозначаем выражение

$$\frac{(i_1+j_1)!\ldots(i_n+j_n)!}{i_1!\ldots i_n!\,j_1!\ldots j_n!}.$$

**) Остальные слагаемые в формуле Лейбница обращаются в нуль, так как $P^{(i)}(0)=0$, если $|i|\leqslant s-1$. Если же $|i|\geqslant s+1$, то $|j|\leqslant s-1$ и $P^{(j)}(0)=0$.

определяют меру μ и числа a_k, $|k|=2s$, поскольку $d\mu(x)=$ $=\frac{d\nu_k(x)}{x^k}$ и $a_k=\nu_k(0)$. Этим однозначная определенность меры μ и чисел a_k, $|k|=2s$, доказана.

4. Условно положительно определенные обобщенные функции в пространстве K. Мы видели в § 3, что преобразование Фурье переводит условно положительно определенные обобщенные функции в условно мультипликативно положительные обобщенные функции в двойственном пространстве основных функций. Поэтому результаты предыдущего пункта позволяют описать условно положительно определенные обобщенные функции в пространстве K. Напомним, что обобщенная функция F в пространстве K называется условно положительно определенной порядка s, если $(D\bar{D}F, \varphi*\varphi^*)\geqslant 0$ для всех функций $\varphi(x)$ из пространства K и всех линейных однородных дифференциальных операторов D порядка s.

Из теоремы 1' предыдущего пункта непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть F — условно положительно определенная обобщенная функция порядка s в пространстве K. Тогда эта обобщенная функция имеет вид*

$$(F,\ \varphi)=\int_{\Omega_0}\left[\tilde{\varphi}(\lambda)-\alpha(\lambda)\sum_{|k|=0}^{2s-1}\frac{\tilde{\varphi}^{(k)}(0)}{k!}\lambda^k\right]d\mu(\lambda)+$$

$$+\sum_{|k|=0}^{2s}a_k\frac{\tilde{\varphi}^{(k)}(0)}{k!}. \qquad (25)$$

Здесь $\tilde{\varphi}(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $\varphi(x)$, μ — такая положительная мера степенного роста, что интеграл $\int\limits_{0<|\lambda|<1}|\lambda|^{2s}\,d\mu(\lambda)$ сходится, a_k, $|k|=2s$, — такие числа, что эрмитова форма $\sum\limits_{|i|=|j|=s}a_{i+j}\xi_i\bar{\xi}_j$ положительно определена, a_k при $0\leqslant|k|\leqslant 2s-1$ — произвольные числа (зависящие от F), $\alpha(\lambda)$ — функция из пространства Z, такая, что $\alpha(\lambda)-1$ имеет при $\lambda=0$ нуль $(2s+1)$-го порядка.

Формулу (25) можно записать иначе, введя моменты функции $\varphi(x)$. Для этого заметим следующее. Из равенства

$$\tilde{\varphi}(\lambda)=\int e^{i(\lambda,\,x)}\varphi(x)\,dx$$

вытекает, что

$$\tilde{\varphi}^{(k)}(\lambda)=i^{|k|}\int x^k e^{i(\lambda,\,x)}\varphi(x)\,dx.$$

Положим в этом равенстве $\lambda=0$. Мы получим, что

$$\tilde{\varphi}^{(k)}(0)=i^{(k)}\int x^k\varphi(x)\,dx=i^{|k|}b_k,$$

где через b_k обозначен k-й момент функции $\varphi(x)$.

Используя это равенство, мы можем записать формулу (25) в виде

$$(F,\ \varphi)=\int_{\Omega_0}\left[\tilde{\varphi}(\lambda)-\alpha(\lambda)\sum_{|k|=0}^{2s-1}\frac{i^{|k|}\lambda^k b_k}{k!}\right]d\mu(\lambda)+$$

$$+\sum_{|k|=0}^{2s}a_k\frac{i^{|k|}b_k}{k!}. \qquad (25')$$

В частности, если все моменты функции $\varphi(x)$ при $|k|<2s$ обращаются в нуль, то формула (25') принимает следующий вид:

$$(F,\ \varphi)=\int_{\Omega_0}\tilde{\varphi}(\lambda)\,d\mu(\lambda)+(-1)^s\sum_{|k|=2s}a_k\frac{b_k}{k!}=$$

$$=\int_{\Omega_0}\tilde{\varphi}(\lambda)\,d\mu(\lambda)+\sum_{|k|=2s}a_k\frac{\tilde{\varphi}^{(k)}(0)}{k!}. \qquad (25'')$$

Отметим в заключение, что если условно положительно определенная обобщенная функция F имеет вид

$$(F,\ \varphi)=\int\overline{F(x)}\,\varphi(x)\,dx, \qquad (26)$$

где $F(x)$ — непрерывная функция, то соответствующая ей положительная мера μ конечна в любой области вида $|\lambda|\geqslant a>0$, а интеграл $\int\limits_{0<|\lambda|<1}|\lambda|^{2s}\,d\mu(\lambda)$ сходится. Справедливо и обратное утверждение.

5. Билинейные функционалы, связанные с условно положительно определенными обобщенными функциями. В этом пункте мы рассмотрим эрмитовы билинейные функционалы $B(\varphi, \psi)$ в пространстве K, обладающие следующим свойством: для любого линейного однородного дифференциального оператора $D = \sum_{|k|=s} a_k \frac{d^k}{dx^k}$ с постоянными коэффициентами эрмитов билинейный функционал $B_D(\varphi, \psi)$, определяемый равенством

$$B_D(\varphi, \psi) = B(D\varphi, D\psi),$$

инвариантен относительно сдвигов и положительно определен.

Для описания таких функционалов воспользуемся теоремой § 3, согласно которой функционал $B_D(\varphi, \psi)$ можно представить в виде

$$B_D(\varphi, \psi) = (F_D, \varphi * \psi^*),$$

где F_D — положительно определенная обобщенная функция. Таким образом, для любых двух функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из пространства K выполняется равенство

$$B(D\varphi, D\psi) = (F_D, \varphi * \psi^*).$$

Введем новую обобщенную функцию F, положив $(F, D\overline{D}\theta) = (F_D, \theta)$ для любой функции $\theta(x)$ из пространства K. Это равенство определяет функционал F лишь для функций вида $D\overline{D}\theta(x)$. На все пространство K функционал F распространим произвольным образом *).

Билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$ связан с обобщенной функцией F равенством

$$B(D\varphi, D\psi) = B_D(\varphi, \psi) = (F_D, \varphi * \varphi^*) =$$
$$= (F, D\overline{D}(\varphi * \psi^*)) = (D\overline{D}F, \varphi * \psi^*).$$

*) Функции вида $D\overline{D}\theta(x)$, $\theta(x) \in K$, образуют в пространстве K подпространство K_D, фактор-пространство K/K_D по которому конечномерно. Выбирая в этом фактор-пространстве линейно независимый базис $\varphi_1 + K_D, \ldots, \varphi_m + K_D$ и придавая любые значения функционалу F для элементов $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ из K, мы распространим его на все пространство K.

Это равенство имеет место для любых функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из пространства K и любого однородного дифференциального оператора D порядка s с постоянными коэффициентами.

Поскольку, по предположению, $B(D\varphi, D\psi) \geqslant 0$, то $(D\overline{D}F, \varphi * \psi^*) \geqslant 0$, и потому обобщенная функция $D\overline{D}F$ положительно определена, каков бы ни был дифференциальный оператор D рассматриваемого вида. Но это означает, что F является условно положительно определенной обобщенной функцией порядка s.

Мы можем теперь доказать следующую теорему, дающую описание билинейных функционалов рассматриваемого вида.

Теорема 4. *Пусть эрмитов функционал $B(\varphi, \psi)$ таков, что для любого однородного линейного дифференциального оператора D порядка s с постоянными коэффициентами функционал $B_D(\varphi, \psi) = B(D\varphi, D\psi)$ инвариантен относительно сдвигов и положительно определен. Тогда для любых бесконечно дифференцируемых финитных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, все моменты которых до $(s-1)$-го порядка включительно равны нулю, справедливо равенство*

$$B(\varphi, \psi) = \int_{\Omega_0} \tilde{\varphi}(\lambda)\overline{\tilde{\psi}(\lambda)}\, d\mu(\lambda) + \sum_{|i|=|j|=s} a_{i+j} \frac{\tilde{\varphi}^{(i)}(0)}{i!} \frac{\overline{\tilde{\psi}^{(j)}(0)}}{j!}.$$

Здесь μ — положительная мера степенного роста, такая, что интеграл

$$\int_{0<|\lambda|<1} |\lambda|^{2s}\, d\mu(\lambda)$$

сходится, a_k, $|k| = 2s$, — такие числа, что форма $\sum_{|i|=|j|=s} a_{i+j}\xi_i\bar{\xi}_j$ положительно определена.

Доказательство. Покажем сначала, что из равенства нулю моментов b_k и c_k функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ при $|k| \leqslant s-1$ следует равенство нулю всех моментов функции $\varphi * \psi^*(x)$ до $(2s-1)$-го порядка включительно. В самом деле, пусть $|k| \leqslant 2s-1$. Тогда

$$\int x^k [\varphi * \psi^*(x)]\, dx = \int\int x^k \varphi(y) \overline{\psi(y-x)}\, dx\, dy.$$

Сделаем в этом интеграле подстановку $x=y+t$. Мы получим тогда, что *)

$$\int x^k [\varphi * \psi^*(x)]\,dx = \int\int (y+t)^k \varphi(y)\overline{\psi(t)}\,dy\,dt =$$
$$= \sum_{i+j=k} C^j_{i+j} \int y^j \varphi(y)\,dy \int \overline{t^i \psi(t)\,dt} = \sum_{i+j=k} C^j_{i+j} b_j \bar{c}_i. \qquad (27)$$

Но эта сумма равна нулю, так как из неравенства $|i+j| = |k| \leqslant 2s-1$ следует, что в каждом слагаемом либо $|i| \leqslant s-1$, либо $|j| \leqslant s-1$ и потому каждое слагаемое в равенстве (27) равно нулю.

Перейдем теперь к описанию билинейного функционала $B(\varphi, \psi)$. Мы видели выше, что для функций вида $\varphi = D\varphi_1$, $\psi = D\psi_1$ он задается формулой

$$B(\varphi, \psi) = (F, \varphi * \psi^*), \qquad (28)$$

где F — условно положительно определенная обобщенная функция порядка s. Поскольку функции вида $D\varphi_1$ всюду плотны в множестве функций, имеющих нулевые моменты до $(s-1)$-го порядка включительно (см. дополнение к этому параграфу), то равенство (28) сохраняет силу для всех функций этого множества. При этом для вычисления выражения $(F, \varphi * \psi^*)$ мы можем применить формулу (25″), так как выше было показано, что все моменты функции $\varphi * \psi^*(x)$ до $(2s-1)$-го включительно равны нулю. Тем самым доказано, что

$$B(\varphi, \psi) = \int_{\Omega_0} \tilde{\theta}(\lambda)\,d\mu(\lambda) + \sum_{|k|=2s} a_k \frac{\tilde{\theta}^{(k)}(0)}{k!}; \qquad (29)$$

где $\tilde{\theta}(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $\theta(x) = \varphi * \psi^*(x)$, а μ и a_k, $|k| = 2s$, имеют тот же смысл, что и в формуле (25″).

Примем теперь во внимание, что $\tilde{\theta}(\lambda) = \tilde{\varphi}(\lambda)\overline{\tilde{\psi}(\lambda)}$, где $\tilde{\varphi}(\lambda)$ и $\tilde{\psi}(\lambda)$ — преобразования Фурье функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

*) Через C^j_{i+j} мы обозначили выражение

$$\frac{(i+j)!}{i!\,j!} = \frac{(i_1+j_1)! \ldots (i_n+j_n)!}{i_1! \ldots i_n!\, j_1! \ldots j_n!}.$$

Отсюда следует, что *)

$$\tilde{\theta}^{(k)}(0) = \sum_{i+j=k} C^j_{i+j} \tilde{\varphi}^{(i)}(0)\overline{\tilde{\psi}^{(j)}(0)} = \sum_{\substack{|i|=|j|=s \\ i+j=k}} C^j_{i+j} \tilde{\varphi}^{(i)}(0)\overline{\tilde{\psi}^{(j)}(0)}.$$

Подставим эти значения $\tilde{\theta}(\lambda)$ и $\tilde{\theta}^{(k)}(0)$ в формулу (29). Мы получим, что

$$B(\varphi, \psi) = \int_{\Omega_0} \tilde{\varphi}(\lambda)\overline{\tilde{\varphi}(\lambda)}\,d\mu(\lambda) + \sum_{|i|=|j|=s} a_{i+j} \frac{\tilde{\varphi}^{(i)}(0)}{i!} \overline{\frac{\tilde{\varphi}^{(j)}(0)}{j!}}. \qquad (29')$$

Тем самым теорема доказана.

Так как при $|i| = |j|$ мы имеем $\tilde{\varphi}^{(i)}(0)\overline{\tilde{\varphi}^{(j)}(0)} = b_i \bar{c}_j$, то формулу (29′) можно переписать в виде

$$B(\varphi, \psi) = \int_{\Omega_0} \tilde{\varphi}(\lambda)\overline{\tilde{\psi}(\lambda)}\,d\mu(\lambda) + \sum_{|i|=|j|=s} a_{i+j} \frac{b_i \bar{c}_j}{i!\,j!}. \qquad (29'')$$

Выясним теперь, какой вид имеет эрмитовый билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$ для любых функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из пространства K. Для этого введем такие функции $\theta_j(x)$, $|j| \leqslant s-1$, из этого пространства, что

$$\int x^i \theta_j(x)\,dx = \delta_{ij}, \quad |i| \leqslant s-1, \quad |j| \leqslant s-1, \qquad (30)$$

где δ_{ij} — многомерный символ Кронекера: $\delta_{ij} = \delta_{i_1 j_1} \ldots \delta_{i_n j_n}$.

Существование таких функций $\theta_j(x)$ доказывается без труда. Пусть $\theta(x)$ — такая функция, что $\int \theta(x)\,dx = 1$. Рассмотрим функции $\theta^{(j)}(x)$. Очевидно, что

$$\int x^k \theta^{(j)}(x)\,dx = 0, \text{ если } |k| < |j|; \text{ или } |k| = |j|, \text{ но } k \neq j,$$

а также, что

$$\int x^j \theta^{(j)}(x)\,dx = j!.$$

Из этих равенств и вытекает, что можно составить линейные комбинации $\theta_i(x)$ функций $\theta^{(j)}(x)$, $|j| \leqslant s-1$, так, чтобы они удовлетворяли соотношениям (30).

*) Напомним, что $\tilde{\varphi}^{(i)}(0) = 0$, если $|i| \leqslant s-1$.

16 Зак. 1281. И. М. Гельфанд и Н. Я. Виленкин

Сопоставим каждой функции $\varphi(x)$ из пространства K функцию

$$\varphi_0(x)=\varphi(x)-\sum_{|j|\leqslant s-1} b_j\theta_j(x),$$

где b_j, $|j|\leqslant s-1$, — моменты функции $\varphi(x)$. Очевидно, что все моменты функции $\varphi_0(x)$ до $s-1$-го порядка включительно равны нулю, а ее моменты s-го порядка совпадают с соответствующими моментами функции $\varphi(x)$. Поэтому если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — любые две функции из пространства K, то по формуле (29″) мы получаем, что

$$B(\varphi_0,\ \psi_0)=\int\limits_{\mathfrak{L}_0}\widetilde{\varphi}_0(\lambda)\overline{\widetilde{\psi}_0(\lambda)}\,d\mu(\lambda)+\sum_{|i|=|j|=s} a_{i+j}\frac{b_i\overline{c_j}}{i!\,j!}. \qquad (31)$$

Здесь μ, a_k $(|k|=2s)$, b_j, c_j имеют тот же смысл, что и выше, а $\widetilde{\varphi}_0(\lambda)$ и $\widetilde{\psi}_0(\lambda)$ — преобразования Фурье функций $\varphi_0(x)$ и $\psi_0(x)$.

Из эрмитовости функционала $B(\varphi,\ \psi)$ вытекает, что

$$B(\varphi,\ \psi)=B(\varphi_0,\ \psi_0)+\sum_{|i|\leqslant s-1} b_iB(\theta_i,\ \psi_0)+\\ +\sum_{|j|\leqslant s-1}\overline{c_j}B(\varphi_0,\ \theta_j)+\sum_{|i|,\ |j|\leqslant s-1} b_i\overline{c_j}B(\theta_i,\ \theta_j).$$

Но $B(\varphi_0,\ \theta_j)$ при фиксированном значении j является линейным функционалом в пространстве K, $B(\varphi_0,\ \theta_j)=L_j(\varphi)$. При этом $B(\theta_i,\ \psi_0)=\overline{L_i(\psi)}$.

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть $B(\varphi,\ \psi)$ — эрмитов функционал и для любого однородного линейного дифференциального оператора D порядка s с постоянными коэффициентами функционал $B_D(\varphi,\ \psi)=B(D\varphi,\ D\psi)$ инвариантен относительно сдвигов и положительно определен. Тогда для любых функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из пространства K этот билинейный функционал задается формулой*

$$B(\varphi,\ \psi)=\int\limits_{\mathfrak{L}_0}\widetilde{\varphi}_0(\lambda)\overline{\widetilde{\psi}_0(\lambda)}\,d\mu(\lambda)+\sum_{|i|=|j|=s} a_{i+j}\frac{b_i\overline{c_j}}{i!\,j!}+\\ +\sum_{|i|\leqslant s-1} b_i\overline{L_i(\psi)}+\sum_{|j|\leqslant s-1}\overline{c_j}L_j(\varphi)+\sum_{|i|,\ |j|\leqslant s-1} A_{ij}b_i\overline{c_j}.$$

Здесь μ — положительная мера степенного роста, такая, что интеграл $\int\limits_{0<|\lambda|<1}|\lambda|^{2s}\,d\mu(\lambda)$ сходится; a_k, $|k|=2s$, — такие числа, что эрмитова форма $\sum\limits_{|i|=|j|=s} a_{i+j}\xi_i\overline{\xi_j}$ положительно определена, L_i — линейные функционалы в пространстве K, $A_{ij}=\overline{A_{ji}}$ — некоторые числа, b_i и c_i — моменты функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, $\widetilde{\varphi}_0(\lambda)$ и $\widetilde{\psi}_0(\lambda)$ — преобразования Фурье функций

$$\varphi_0(x)=\varphi(x)-\sum_{|i|\leqslant s-1} b_i\theta_i(x)$$

и

$$\psi_0(x)=\psi(x)-\sum_{|i|\leqslant s-1} c_i\theta_i(x).$$

ДОБАВЛЕНИЕ К § 4

При доказательстве теоремы 1′ мы воспользовались следующим утверждением.

Теорема 6. *Всякая функция $\varphi(z)$ из пространства Z, имеющая при $z=0$ нуль m-го порядка, является пределом (в смысле топологии этого пространства) последовательности функций $\varphi_k(z)$, имеющих вид*

$$\varphi_k(z)=\sum_{|r|=m} z^r\varphi_{kr}(z),$$

где $\varphi_{kr}(z)$ — функции из Z.

Дадим доказательство этой теоремы. Покажем сначала, что функцию $\varphi(z)$ можно представить в виде

$$\varphi(z)=\sum_{|r|=m} z^r\psi_r(z),$$

где $\psi_r(z)$ — целые аналитические функции экспоненциального типа, имеющие при вещественных значениях z степенной рост. Это утверждение очевидно, если число переменных равно единице, так как в этом случае $\varphi(z)=z^m\psi(z)$, где $\psi(z)$ — функция из пространства Z. Предположим теперь, что наше утверждение уже доказано для случая, когда число переменных меньше чем n. Разложим функцию $\varphi(z)$ в ряд Тейлора по степеням переменной z_n. Это разложение можно записать в виде

$$\varphi(z) = \sum_{s=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(s)}(z^*)}{s!} z_n^s + z_n^m \hat{\varphi}(z), \tag{32}$$

где через z^* обозначена совокупность переменных $\{z_1, \ldots, z_{n-1}\}$, через $\varphi^{(s)}(z^*)$ — значения частных производных $\frac{\partial^s \varphi}{\partial z_n^s}$ при $z_n = 0$, а через $\hat{\varphi}(z)$ функция $\sum_{s=m}^{\infty} \frac{z_n^{s-m} \varphi^{(s)}(z^*)}{s!}$. Каждая из функций $\varphi^{(s)}(z^*)$, $0 \leqslant s \leqslant m-1$, принадлежит пространству Z^* функций от $n-1$ переменных $z_1, \ldots, z_{n-1}$ и имеет при $z^* = 0$ нуль порядка $m-s$. Поэтому по предположению индукции эти функции можно записать в виде

$$\varphi^{(s)}(z^*) = \sum_{|l|=m-s} (z^*)^l \psi_{sl}(z^*),$$

где $\psi_{sl}(z^*)$ — целые функции экспоненциального типа, имеющие степенной рост при вещественных значениях переменной z^*. Подставляя эти значения в равенство (32), мы получаем, что

$$\varphi(z) = \sum_{s=0}^{m-1} \sum_{|l|=m-s} \frac{z_n^s (z^*)^l \psi_{sl}(z^*)}{s!} + z_n^m \hat{\varphi}(z). \tag{33}$$

Функция $\hat{\varphi}(z)$ также является целой функцией. При этом, поскольку все остальные слагаемые в правой части равенства (33) имеют экспоненциальный тип и степенной рост при вещественных значениях z, а функция $\varphi(z)$ также обладает этими свойствами, то ими обладает и функция $z_n^m \hat{\varphi}(z)$. Но тогда и $\hat{\varphi}(z)$ является функцией экспоненциального типа, имеющей степенной рост при вещественных значениях z.

Поскольку в равенстве (33) мы имеем $s + |l| = m$, то это равенство можно переписать в виде

$$\varphi(z) = \sum_{|r|=m} z^r \psi_r(z),$$

где $\psi_r(z) = \psi_{sl}(z^*)$, если $z^r = z_n^s (z^*)^l$, $l > 0$ и $\psi_r(z) = \hat{\varphi}(z)$, если $z^r = z_n^m$. Как мы доказали, все функции $\psi_r(z)$ имеют экспоненциальный тип и степенной рост при вещественных значениях z. Этим наше вспомогательное утверждение доказано.

Возьмем теперь любую функцию $\alpha(z)$ из пространства Z, равную единице при $z = 0$. Последовательность функций $\alpha\left(\frac{z}{k}\right)\psi(z)$ сходится к функции $\varphi(z)$ в топологии пространства Z. Но

$$\alpha\left(\frac{z}{k}\right)\varphi(z) = \sum_{|r|=m} z^r \alpha\left(\frac{z}{k}\right)\psi_r(z),$$

а функции $\varphi_{kr}(z) = \alpha\left(\frac{z}{k}\right)\psi_r(z)$, как легко видеть, принадлежат пространству Z. Тем самым теорема доказана.

При помощи преобразования Фурье мы получаем такое следствие из теоремы 6.

Следствие. *Всякая функция $\varphi(x)$ из пространства K, все моменты которой до m-го порядка включительно равны нулю, является пределом (в смысле топологии этого пространства) последовательности функций $\varphi_k(x)$, имеющих вид*

$$\varphi_k(x) = \sum_{|r|=m} \varphi_{kr}^{(r)}(x),$$

где $\varphi_{kr}(x)$ — функции из пространства K.

§ 5. ЧЕТНО-ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Мы рассмотрим здесь один из наиболее типичных примеров теорем, аналогичных теореме Бохнера — Шварца, в которых, в отличие от рассмотренных в § 3 случаев, положительная мера не является однозначно определенной. Такие теоремы встречаются довольно часто (например, в проблеме моментов).

1. Предварительные замечания. Обобщенная функция F называется *четной по каждому аргументу*, если для любых комбинаций знаков

$$F(\pm x_1, \ldots, \pm x_n) = F(x_1, \ldots, x_n).$$

В дальнейшем для краткости слова «по каждому аргументу» будут опускаться.

Если F — четная обобщенная функция, а основная функция $\varphi(x)$ нечетна хотя бы по одному аргументу, то $(F, \varphi) = 0$.

Многие вопросы приводят к рассмотрению четных обобщенных функций F, таких, что $(F, \varphi * \varphi^*) \geqslant 0$ лишь для четных основных функций $\varphi(x)$. Мы будем называть такие обобщенные функции *четно-положительно определенными*. Разумеется, класс четно-положительно определенных обобщенных функций шире класса четных положительно определенных обобщенных функций, так как, если F — четная положительно определенная обобщенная функция, то неравенство $(F, \varphi * \varphi^*) \geqslant 0$ выполняется не только для четных, но и для произвольных основных функций.

Определению четно-положительно определенной обобщенной функции можно придать иную форму. Предположим, что пространство основных функций Φ таково, что вместе с любыми двумя функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, оно содержит и функцию

$$\theta(x) = \sum \int \varphi(y_1, \ldots, y_n)\, \psi(x_1 \pm y_1, \ldots, x_n \pm y_n)\, dy_1 \ldots dy_n,$$

где суммирование распространено на все комбинации знаков. Легко показать, что *если F — четно-положительно определенная обобщенная функция, то билинейный функционал в Φ, определяемый равенством $B(\varphi, \psi) = (F, \theta)$, положительно определен, т. е. удовлетворяет неравенству $B(\varphi, \varphi) \geqslant 0$. Обратно, если билинейный функционал, определяемый равенством $B(\varphi, \psi) = (F, \theta)$, положительно определен, то обобщенная функция F четно-положительно определена*. Мы не будем останавливаться на доказательстве этих простых утверждений.

М. Г. Крейн получил описание *всех непрерывных четно-положительно определенных функций $f(x)$ одного переменного*, т. е. таких четных функций $f(x)$, что

$$\int f(x)\, \varphi(y)\, \overline{\varphi(y-x)}\, dx\, dy \geqslant 0 \tag{1}$$

для всех четных функций $\varphi(x)$ из пространства K. Он доказал, что *все такие функции имеют вид*

$$f(x) = \int_0^\infty \cos \lambda x\, d\mu_1(\lambda) + \int_0^\infty \operatorname{ch} \lambda x\, d\mu_2(\lambda), \tag{2}$$

где μ_1 и μ_2 — положительные меры, причем мера μ_1 конечна, а мера μ_2 такова, что интеграл $\int_0^\infty \operatorname{ch} \lambda x\, d\mu_2(\lambda)$ сходится при всех значениях $x \geqslant 0$.

Аналогичный результат при ограничениях на рост $f(x)$ получил А. Я. Повзнер [67].

Если мера μ_2 равна нулю, то функция $f(x)$ принимает вид

$$f(x) = \int_0^\infty \cos \lambda x\, d\mu_1(\lambda), \tag{3}$$

и, следовательно, является четной положительно определенной функцией.

Очевидно, что теорема М. Г. Крейна является аналогом теоремы Бохнера. При этом в случае теоремы М. Г. Крейна меры μ_1 и μ_2 не определяются однозначно заданием функции $f(x)$. Соответствующий пример будет приведен в § 6. Однако, если функция $f(x)$ удовлетворяет некоторым ограничениям роста при $|x| \to \infty$, то интегральное представление (2) функции $f(x)$ является единственным. Достаточно, например, чтобы интеграл $\int_0^\infty e^{-cx^2} f(x)\, dx$ сходился при всех значениях $c > 0$.

Эти результаты будут получены нами ниже как следствие более общих результатов, связанных с четно-положительно определенными обобщенными функциями. Чтобы установить связь рассматриваемого круга вопросов с теорией обобщенных функций, заметим следующее. Если интеграл $\int_0^\infty e^{-cx^2} f(x)\, dx$ сходится при всех $c > 0$, то равенство

$$(f, \varphi) = \int \overline{f(x)}\, \varphi(x)\, dx \tag{4}$$

задает обобщенную функцию не только в пространстве K финитных бесконечно дифференцируемых функций, но и в более широких пространствах основных функций. Например, это равенство задает обобщенную функцию в пространстве *) $S_{1/2}^{1/2}$, состоящем из целых аналитических функций $\varphi(z)$, удовлетворяющих неравенствам вида

$$|\varphi(x+iy)| \leqslant Ce^{-ax^2+by^2}, \qquad 0 < a \leqslant b.$$

Оказывается, что возможность распространить функционал (f, φ) на пространство $S_{1/2}^{1/2}$ достаточна для единственности

*) Относительно определения пространства $S_{1/2}^{1/2}$ см. вып. 2, гл. IV, § 2, п. 3. Вкратце это определение приведено на стр. 248—249.

мер μ_1 и μ_2. Иными словами, *для того чтобы меры μ_1 и μ_2 в равенстве* (2) *однозначно определялись четно-положительно определенной непрерывной функцией $f(x)$, достаточно, чтобы формула* (4) *задавала непрерывный линейный функционал в пространстве $S_{1/2}^{1/2}$.*

Мы увидим ниже, что в этом виде соответствующее утверждение переносится на четно-положительно определенные обобщенные функции многих переменных. Более того, для четно-положительно определенных обобщенных функций в пространстве $S_{1/2}^{1/2}$ будет доказана теорема существования интегрального представления не только для функций одного переменного, но и для функций многих переменных.

Мы видим, таким образом, что, подобрав соответствующим образом пространство основных функций, можно добиться, чтобы все четно-положительно определенные обобщенные функции в этом пространстве однозначным образом задавались при помощи положительных мер.

Отметим, что для некоторых пространств (например для пространства K) можно доказать теорему существования соответствующих мер, причем эти меры не являются однозначно определенными. Однако в этих случаях теорема существования доказана лишь для функций одного переменного. В то же время в классе единственности полученные результаты верны и для функций многих переменных.

По-видимому, это не случайно и за пределами класса единственности теорема существования для функций многих переменных, как правило, не имеет места. Именно, не удается из мультипликативной положительности обобщенной функции вывести ее положительность. Было бы интересно построить соответствующие примеры (они известны пока в многомерной проблеме моментов, см. § 7, п. 2).

2. Четно-положительно определенные обобщенные функции в пространстве $S_{1/2}^{1/2}$ *). Мы изучим в этом пункте четно-положительно определенные обобщенные функции в пространстве $S_{1/2}^{1/2}$. Иными словами, мы будем рассматривать

*) В случае функций многих переменных пространством $S_{1/2}^{1/2}$ называется пространство целых аналитических функций $\varphi(z)=\varphi(z_1, \ldots, z_n)$, удовлетворяющих неравенствам вида

$$|\varphi(x+iy)| \leqslant Ke^{-ax^2+by^2}, \quad 0<a\leqslant b. \tag{5}$$

Здесь через ax^2 обозначено выражение $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k^2$, через by^2 выражение $\sum_{k=1}^{n} b_k y_k^2$, а неравенство $0<a\leqslant b$ означает, что $0<a_k\leqslant b_k$ при всех k. Топология в пространстве $S_{1/2}^{1/2}$ задается следующим образом: последовательность $\{\varphi_m(z)\}$ функций из пространства $S_{1/2}^{1/2}$ называется сходящейся к нулю, если функции $\varphi_m(z)$ равномерно сходятся к нулю в каждой конечной области изменения z и при этом выполняются неравенства

$$|\varphi_m(x+iy)| \leqslant Ke^{-ax^2+by^2}, \quad 0<a\leqslant b$$

с постоянными K, a, b, не зависящими от m.

четные обобщенные функции в этом пространстве, такие, что $(F, \varphi*\varphi^*)\geqslant 0$ для всех четных функций $\varphi(z)$ из $S_{1/2}^{1/2}$.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество точек $z=(z_1, \ldots, z_n)$ n-мерного комплексного пространства, каждая координата которых либо вещественная, либо чисто мнимая. Имеет место следующая теорема, обобщающая сформулированные выше утверждения о функциях одного переменного.

Теорема 1. *Пусть F — четно-положительно определенная обобщенная функция в пространстве $S_{1/2}^{1/2}$. Тогда F является преобразованием Фурье однозначно определенной четной положительной меры μ, сосредоточенной на множестве $\mathfrak{M}$ точек $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, каждая из координат λ_k которых либо вещественная, либо чисто мнимая, и такой, что интеграл* *) $\int_{\mathfrak{M}} e^{-c\lambda^2}d\mu(\lambda)$ *сходится для всех $c>0$.*

*) Через $c\lambda^2$ мы обозначаем $\sum_{k=1}^{n} c_k\lambda_k^2$. Неравенство $c>0$ означает, что $c_k>0$, $1\leqslant k\leqslant n$.

Иными словами, для любой четной функции *) $\varphi(z)$ из пространства $S_{1/2}^{1/2}$ имеет место равенство

$$(F, \varphi) = \int_{\mathfrak{M}} \tilde{\varphi}(\lambda)\, d\mu(\lambda),$$

где μ — мера с указанными выше свойствами, а $\tilde{\varphi}$ — преобразование Фурье функции $\varphi(z)$.

Если F — обобщенная функция одного переменного, то условие сходимости интеграла $\int_{\mathfrak{M}} e^{-c\lambda^2} d\mu(\lambda)$ означает, что

$$\int_0^\infty e^{-c\lambda^2} d\mu_1(\lambda) + \int_0^\infty e^{c\lambda^2} d\mu_2(\lambda) < +\infty$$

при любом $c > 0$ (здесь μ_1 — значение четной меры μ на вещественной оси, а μ_2 — значение этой меры на мнимой оси). Обобщенная функция F задается при $n = 1$ формулой

$$(F, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(\lambda)\, d\mu_1(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(i\lambda)\, d\mu_2(\lambda).$$

Это равенство можно записать в виде

$$F = 2\left[\int_0^\infty \cos \lambda x\, d\mu_1(\lambda) + \int_0^\infty \operatorname{ch} \lambda x\, d\mu_2(\lambda)\right].$$

Таким образом, при $n = 1$ мы получаем обобщение указанных выше результатов о четно-положительно определенных обобщенных функциях одного переменного.

Мы будем, как обычно, доказывать теорему, двойственную теореме 1 относительно преобразования Фурье. Поскольку это преобразование отображает пространство $S_{1/2}^{1/2}$ на себя, $\tilde{S}_{1/2}^{1/2} = S_{1/2}^{1/2}$, то двойственная теорема читается следующим образом.

*) Нам достаточно указать вид обобщенной функции F лишь для четных основных функций — каждая основная функция $\varphi(z)$ является суммой четной основной функции и функций нечетных хотя бы по одному аргументу. Для функций же нечетных хотя бы по одному аргументу, в силу четности F, выполняется равенство $(F, \varphi) = 0$.

Теорема 1′. *Пусть F — такая четная обобщенная функция в пространстве $S_{1/2}^{1/2}$, что $(F, \varphi\bar{\varphi}) \geqslant 0$ для всех четных функций $\varphi(z)$ из $S_{1/2}^{1/2}$. Тогда обобщенная функция *) F задается четной положительной мерой μ, сосредоточенной на множестве $\mathfrak{M}$ точек, все координаты которых вещественные или чисто мнимые, и такой, что интеграл $\int_{\mathfrak{M}} e^{-cz^2} d\mu(z)$ сходится при всех $c > 0$ **). Иными словами, имеет место формула*

$$(F, \varphi) = \int_{\mathfrak{M}} \varphi(z)\, d\mu(z).$$

Для доказательства теоремы 1′ нам будет удобнее перейти от функций пространства $S_{1/2}^{1/2}$ к функциям экспоненциального типа, сопоставив каждой четной функции $\varphi(z_1, \ldots, z_n)$ из пространства $S_{1/2}^{1/2}$ функцию $\psi(z_1, \ldots, z_n)$, определяемую равенством

$$\psi(z_1, \ldots, z_n) = \varphi(\sqrt{z_1}, \ldots, \sqrt{z_n}).$$

В силу четности функции $\varphi(z)$ функция $\psi(z)$ однозначно определена. Пространство всех функций $\psi(z)$, получаемых при этом отображении, мы обозначим через Q. Очевидно, что все функции $\psi(z)$ пространства Q являются целыми аналитическими функциями.

Из неравенств

$$|\varphi(x + iy)| < Ke^{-ax^2+by^2}, \qquad 0 < a \leqslant b, \tag{5}$$

которым удовлетворяют функции пространства $S_{1/2}^{1/2}$, вытекает, что функции $\psi(z)$ пространства Q удовлетворяют неравенствам

$$|\psi(x + iy)| \leqslant Ke^{-cx+d\|z\|}, \qquad 0 \leqslant d < c, \tag{6}$$

*) Ради удобства записи мы обозначаем двойственную обобщенную функцию через F, а не через $\tilde{F}$; кроме того, мы обозначаем аргумент через z, а не через λ, как это сделано в теореме 1. Надеемся, что эти изменения не затруднят читателя.

**) Т. е. $c_1 > 0, \ldots, c_n > 0$. Под cz^2 мы понимаем $\sum_{k=1}^{n} c_k z_k^2$.

где положено

$$cx=\sum_{k=1}^{n} c_k x_k,\quad d\|z\|=\sum_{k=1}^{n} d_k |z_k|\ ^{*)}.$$

Обратно, если функция $\psi(z)$ — целая аналитическая функция, удовлетворяющая неравенству (6), то функция $\varphi(z)=\psi(z^2)$ удовлетворяет неравенству вида (5), т. е. принадлежит пространству $S_{1/2}^{1/2}$. Таким образом, *пространство Q может быть определено как пространство целых аналитических функций, удовлетворяющих неравенствам вида*

$$|\psi(x+iy)|\leqslant Ke^{-cx+d\|z\|}, \tag{6}$$

где $0\leqslant d<c$. Неравенство (6) в развернутом виде означает, что

$$|\psi(x_1+iy_1,\ \ldots,\ x_n+iy_n)|\leqslant K\exp\left[-\sum_{k=1}^{n} c_k x_k+\sum_{k=1}^{n} d_k |z_k|\right],$$

где $0\leqslant d_k<c_k$, $1\leqslant k\leqslant n$.

Топология в пространстве Q индуцируется топологией в пространстве $S_{1/2}^{1/2}$. Из определения топологии в пространстве $S_{1/2}^{1/2}$ вытекает, что последовательность функций $\{\psi_m(z)\}$ в пространстве Q сходится к нулю тогда и только тогда, когда функции $\psi_m(z)$ равномерно сходятся к нулю в каждой конечной области изменения z и все функции $\psi_m(z)$ удовлетворяют неравенству

$$|\psi_m(x+iy)|\leqslant Ke^{-cx+d\|z\|}$$

где K, c и d не зависят от m.

*) В самом деле, из неравенства (5) следует, что

$$|\psi(x+iy)|=|\varphi(\sqrt{x_1+iy_1},\ \ldots,\ \sqrt{x_n+iy_n})|=$$
$$=\left|\varphi\left(\sqrt{\frac{x_1+|z_1|}{2}}+i\sqrt{\frac{-x_1+|z_1|}{2}},\ \ldots\right.\right.$$
$$\left.\left.\ldots,\ \sqrt{\frac{x_n+|z_n|}{2}}+i\sqrt{\frac{-x_n+|z_n|}{2}}\right)\right|\leqslant Ke^{-cx+d\|z\|},$$

где положено $c=\frac{a+b}{2}$, $d=\frac{b-a}{2}$, а выражения cx и $d\|z\|$ имеют указанный выше смысл. Очевидно при этом, что $0\leqslant d<c$ (т. е. что $0\leqslant d_k<c_k$, $1\leqslant k\leqslant n$).

Сопоставим каждой обобщенной функции F в пространстве $S_{1/2}^{1/2}$ обобщенную функцию Φ в пространстве Q, определяемую равенством

$$(\Phi,\ \psi(z))=(F,\ \psi(z^2)).$$

При этом, очевидно, из выполнения неравенства $(F,\ \varphi\bar{\varphi})\geqslant 0$ для всех четных функций $\varphi(z)$ из пространства $S_{1/2}^{1/2}$ вытекает выполнение неравенства $(\Phi,\ \psi\bar{\psi})\geqslant 0$ для всех функций $\psi(z)$ из пространства Q и обратно.

Поскольку при преобразовании $z\to z^2$ множество $\mathfrak{M}$ точек с вещественными и чисто мнимыми координатами переходит в множество $\mathfrak{R}$ точек с вещественными координатами, то теорема 1′ эквивалентна следующему утверждению.

Теорема 1″. *Каждая мультипликативно положительная обобщенная функция Φ в пространстве Q имеет вид*

$$(\Phi,\ \psi)=\int_{\mathfrak{R}}\psi(x)\,d\nu(x),$$

где ν — однозначно определенная положительная мера на множестве $\mathfrak{R}$ точек с вещественными координатами, такая, что интеграл $\int e^{-cx}d\nu(x)$ сходится для всех $c>0$ *).

Очевидна аналогия между теоремой 1″ и теоремой 3′ из § 3. Мы и сведем теорему 1″ к теореме 3′ из § 3.

План доказательства заключается в следующем. Сначала при помощи равенства

$$(\Phi_c,\ \theta(z))=(\Phi,\ e^{-cz}\theta(z))$$

мы введем мультипликативно положительную обобщенную функцию Φ_c в пространстве Z. По теореме 3′ из § 3 эта обобщенная функция задается положительной мерой степенного роста σ_c, т. е.

$$(\Phi,\ \theta)=\int\theta(x)\,d\sigma_c(x).$$

*) Как и выше, через cx, $c>0$, мы обозначаем $c_1x_1+\ldots+c_nx_n$, $c_1>0,\ \ldots,\ c_n>0$.

Полагая $d\nu_c(x) = e^{cx}\,d\sigma_c(x)$, мы получаем для каждого $c > 0$ положительную меру ν_c, такую, что

$$(\Phi, \psi) = \int \psi(x)\,d\nu_c(x)$$

для всех функций $\psi(z)$ из пространства Q, имеющих вид $\psi(z) = e^{-cz}\theta(z)$, где $\theta(z) \in Z$.

Используя непрерывность функционала Φ относительно топологии пространства Q, удается показать, что меры ν_c не зависят от выбора $c > 0$. После этого доказывается, что равенство

$$(\Phi, \psi) = \int \psi(x)\,d\nu(x) \qquad (\nu(x) \equiv \nu_c(x))$$

выполняется не только для функций ψ вида $\psi(z) = e^{-cz}\theta(z)$, где $\theta(z) \in Z$, но и для всех функций $\psi(z)$ из $S_{1/2}^{1/2}$.

Перейдем к выполнению этого плана. Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Для любого $c > 0$ все функции вида $\psi(z) = e^{-cz}\theta(z)$, где $\theta(z)$ — функции из пространства Z, принадлежат пространству Q, причем отображение $\theta(z) \to e^{-cz}\theta(z)$ пространства Z в пространство Q непрерывно при любом фиксированном c.*

Так как $\theta(z) \in Z$, то, по определению пространства Z, выполняется неравенство $|\theta(x+iy)| \leqslant Ce^{a\|y\|}$ *) и потому

$$|e^{-cz}\theta(z)| \leqslant Ce^{-cx+a\|y\|}. \tag{7}$$

При любых a и c найдутся такие числа $r = (r_1, \ldots, r_n)$, $r_k > 0$, что $c_k + r_k > \sqrt{a_k^2 + r_k^2}$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Положим

$$a' = \left(\sqrt{a_1^2 + r_1^2}, \ldots, \sqrt{a_n^2 + r_n^2}\right) \text{ и } c' = (c_1 + r_1, \ldots, c_n + r_n).$$

Так как

$$r\|x\| + a\|y\| = \\ = (r_1|x_1| + \ldots + r_n|x_n|) + (a_1|y_1| + \ldots + a_n|y_1|) \leqslant \\ \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{r_k^2 + a_k^2}\sqrt{|x_k|^2 + |y_k|^2} = a'\|z\|,$$

*) Через $a\|y\|$ мы обозначаем $\sum_{k=1}^{n} a_k |y_k|$.

то

$$e^{-cx+a\|y\|} = e^{-c'x+rx+a\|y\|} \leqslant e^{-c'x+a'\|z\|}$$

и потому

$$|e^{-cz}\theta(z)| \leqslant Ce^{-cx+a\|y\|} \leqslant Ce^{-c'x+a'\|z\|}. \tag{8}$$

Поскольку в силу выбора r имеет место неравенство $c' > a'$, то функция $e^{-cz}\theta(z)$ принадлежит пространству Q.

Итак, функции вида $e^{-cz}\theta(z)$, $\theta(z) \in Z$, принадлежат пространству Q при любом c. Непрерывность отображения $\theta(z) \to e^{-cz}\theta(z)$ пространства Z в Q легко установить, исходя из определения сходимости в этих пространствах.

Из леммы 1 вытекает, что *равенство*

$$(\Phi_c, \theta(z)) = (\Phi, e^{-cz}\theta(z)) \tag{9}$$

задает непрерывный линейный функционал Φ_c в пространстве Z. По условию теоремы 1″ неравенство $(\Phi, \psi\bar{\psi}) \geqslant 0$ выполняется для всех функций $\psi(z)$ из Q. Поэтому $(\Phi_c, \theta\bar{\theta}) \geqslant 0$ для всех функций $\theta(z)$ из Z. В самом деле, имеем

$$(\Phi_c, \theta\bar{\theta}) = \left(\Phi, e^{-\frac{cz}{2}}\theta(z)\,\overline{e^{-\frac{c\bar{z}}{2}}\theta(\bar{z})}\right) \geqslant 0.$$

Так как $(\Phi_c, \theta\bar{\theta}) \geqslant 0$ для всех функций $\theta(z)$ из пространства Z, то по теореме 3 из § 3 обобщенная функция Φ_c задается однозначно определенной положительной мерой σ_c на множестве $\mathfrak{R}$ точек с вещественными координатами, имеющей степенной рост. Поэтому, если обобщенная функция Φ удовлетворяет условию теоремы 1″, то для любого $c > 0$ найдется такая положительная мера степенного роста σ_c, что

$$(\Phi_c, \theta) = \int_{\mathfrak{R}} \theta(x)\,d\sigma_c(x) \tag{10}$$

для всех функций $\theta(x)$ из пространства Z.

Равенство (10) можно также записать в виде

$$(\Phi, \psi) = \int_{\mathfrak{R}} \psi(x)\,d\nu_c(x), \tag{10'}$$

если положить $\psi(z) = e^{-cz}\theta(z)$, $d\nu_c(x) = e^{cx}\,d\sigma_c(x)$.

Итак, мы доказали, что *для всех функций $\psi(z)$ из пространства Q, представимых в виде $e^{-cz}\theta(z)$, где $\theta(z) \in Z$,* *имеет место равенство* (10′). Множества функций $\psi(z)$ в Q, имеющих вид $e^{-z}\theta(z)$, $\theta(z)\in Z$, мы будем обозначать через Q_c. Таким образом, обобщенная функция Φ задается положительной мерой ν_c на подпространстве Q_c. Перейдем теперь к центральному пункту доказательства, а именно, покажем, что мера ν_c не зависит от выбора $c>0$, т. е. что $\nu_c=\nu_b=\nu$ при любых $b>0$, $c>0$. Этим будет показано, что обобщенная функция Φ задается одной и той же положительной мерой на всех подпространствах Q_c, т. е. что равенство

$$(\Phi, \psi)=\int_{\Re}\psi(x)\,d\nu(x)$$

имеет место для всех функций $\psi(x)$, принадлежащих хотя бы одному из подпространств Q_c. Теорема 1″ легко получится отсюда путем предельного перехода.

В основе дальнейшего рассуждения лежат следующие две леммы, доказательство которых несложно, но требует некоторых выкладок. Поэтому, чтобы не прерывать изложения, мы приведем их доказательство по окончании доказательства теоремы.

Лемма 2. *Если* $0<b<2c$, *т. е.* $0<b_k<2c_k$ *при всех* k, $1\leqslant k\leqslant n$, *то существует последовательность функций* $\theta_m(z)$ *из пространства* Z, *таких, что*

1) *последовательность* $e^{-cz}\theta_m(z)$ *сходится к* e^{-bz} *в топологии пространства* Q,

2) *функции* $\theta_m(z)$ *принимают положительные значения при вещественных значениях* z (т. е. $\theta_m(x)\geqslant 0$),

3) *при вещественных значениях* x *выполняются неравенства*

$$|\theta_m(x)|\leqslant K_1e^{\|(b-c)\,x\|} \tag{11}$$

с постоянной K_1, *не зависящей от* m *).

Лемма 3. *Каждая функция* $\psi(z)$ *из пространства* Q *принадлежит замыканию в* Q *хотя бы одного из множеств* Q_c.

---

*) Через $\|(b-c)\,x\|$ мы обозначаем сумму

$$\sum_{k=1}^{n}|(b_k-c_k)\,x_k|.$$

Лемма 2 позволяет установить независимость меры ν_c от значения $c>0$. Для этого покажем сначала, что при $0<b<2c$ интеграл

$$\int e^{-bx}\,d\nu_c(x) \tag{12}$$

сходится. В самом деле, поскольку функции $\theta_m(z)$ в лемме 2 принадлежат Z, функции $e^{-cz}\theta_m(z)$ входят в Q_c и, значит, обобщенная функция Φ задается для них равенством

$$(\Phi, e^{-cz}\theta_m(z))=\int e^{-cx}\theta_m(x)\,d\nu_c(x). \tag{12′}$$

Так как $e^{-cz}\theta_m(z)\to e^{-bz}$ в топологии пространства Q, то из непрерывности функционала Φ следует, что левая часть равенства (12′) ограничена. Иными словами, при всех m выполняется неравенство

$$\left|\int e^{-cx}\theta_m(x)\,d\nu_c(x)\right|<A.$$

Далее из того, что $\theta_m(x)e^{-cx}\geqslant 0$ и $\theta_m(x)e^{-cx}\to e^{-bx}$ равномерно в каждой конечной области, вытекает, что

$$\int e^{-bx}\,d\nu_c(x)<A.$$

Поэтому интеграл (12) сходится. Покажем теперь, что

$$(\Phi, e^{-bz}\theta(z))=\int e^{-bx}\theta(x)\,d\nu_c(x) \tag{13}$$

для любой функции $\theta(z)\in Z$, если только $0<b<2c$.

В самом деле,

$$\lim_{m\to\infty}e^{-cz}\theta_m(z)\,\theta(z)=e^{-bz}\theta(z)$$

в топологии пространства Q. Значит,

$$(\Phi, e^{-bz}\theta(z))=\lim_{m\to\infty}(\Phi, e^{-cz}\theta_m(z)\,\theta(z)),$$

т. е. по определению меры ν_c

$$(\Phi, e^{-bz}\theta(z))=\lim_{m\to\infty}\int e^{-cx}\theta_m(x)\,\theta(x)\,d\nu_c(x). \tag{13′}$$

Для доказательства равенства (13) достаточно доказать, что можно перейти к пределу под знаком интеграла (13′). Для этого заметим, что в силу неравенства (11) и ограниченности функции $\theta(x)$

$$|e^{-cx}\theta(x)\,\theta_m(x)| \leqslant Ke^{-cx+\|(b-c)\,x\|}, \tag{14}$$

где постоянная K не зависит от m. Выражение $-cx+$ $+\|(b-c)\,x\|$ в развернутом виде записывается так:

$$-\sum_{k=1}^{n}[c_k x_k + |(b_k - c_k)\,x_k|] =$$
$$= -\sum_{k=1}^{n} x_k\,[c_k - |b_k - c_k|\operatorname{sign} x_k].$$

Но в силу неравенств $0 < b_k < 2c_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, мы имеем $0 < c_k - |b_k - c_k|\operatorname{sign} x_k < 2c_k$. Обозначим выражение $c_k - |b_k - c_k|\operatorname{sign} x_k$ через h_k. Мы видели, что $0 < h_k < 2c_k$. Поэтому из неравенства (14) следует, что

$$|e^{-cx}\theta(x)\,\theta_m(x)| < Ke^{-hx}, \quad h = (h_1, \ldots, h_n),$$

где $0 < h < 2c$. Но, как было показано выше, интеграл $\int e^{-hx}d\nu_c(x)$ сходится при $0 < h < 2c$. Таким образом, все функции $e^{-cx}\theta(x)\,\theta_m(x)$ ограничены функцией e^{-hx}, суммируемой по мере ν_c. Как известно, отсюда вытекает возможность предельного перехода под знаком интеграла. Тем самым равенство (13) доказано.

Теперь мы уже можем доказать независимость меры ν_c от выбора $c > 0$. В самом деле, по определению меры ν_b для всех функций $\theta(z)$ из пространства Z выполняется равенство

$$(\Phi,\ e^{-bz}\theta(z)) = \int e^{-bx}\theta(x)\,d\nu_b(x).$$

Сравнивая это равенство с равенством (10′), мы убеждаемся, что

$$\int e^{-bx}\theta(x)\,d\nu_c(x) = \int e^{-bx}\theta(x)\,d\nu_b(x)$$

для всех функций θ из пространства Z. Но это может быть лишь, если $\nu_c = \nu_b$.

Таким образом, равенство $\nu_c = \nu_b$ доказано, если $0 < b < 2c$. Но тогда это равенство имеет место и при любых положительных значениях b и c. Обозначим через ν общее значение этих мер. Из свойств мер ν_c вытекает, что интеграл

$$\int e^{-cx}d\nu(x) \tag{15}$$

сходится при всех $c > 0$.

Как уже отмечалось выше (см. стр. 256), отсюда следует, что равенство

$$(\Phi,\ \psi) = \int \psi(x)\,d\nu(x),$$

справедливо для всех функций $\psi(x)$, принадлежащих хотя бы одному из множеств Q_c. Чтобы доказать его справедливость для всех функций $\psi(x)$ из пространства Q, воспользуемся леммой 3. По этой лемме для любой функции $\psi(z)$ из пространства Q найдется сходящаяся к ней в топологии пространства Q последовательность функций $\psi_m(z)$, принадлежащих одному и тому же пространству Q_c. Для каждой из этих функций обобщенная функция Φ задается равенством

$$(\Phi,\ \psi_m) = \int \psi_m(x)\,d\nu(x)$$

и потому в силу непрерывности функционала Φ имеем

$$(\Phi;\ \psi) = \lim_{m\to\infty}\int \psi_m(x)\,d\nu(x). \tag{16}$$

В силу доказанной ранее сходимости интеграла (15) и оценки

$$|\psi_m(x)| \leqslant Ke^{-cx},$$

которой удовлетворяют все функции $\psi_m(x)$ (по определению сходимости в пространстве Q), мы можем перейти в правой части равенства (16) к пределу под знаком интеграла. Отсюда и вытекает, что

$$(\Phi,\ \psi) = \int \psi(x)\,d\nu(x).$$

Тем самым теорема 1″ доказана. Но, как мы видели выше, теоремы 1, 1′ и 1″ эквивалентны друг другу. Поэтому доказательство теоремы 1 завершено.

Имеет место и теорема, обратная теореме 1.

Теорема 2. *Пусть положительная четная мера* μ, *заданная на множестве* $\mathfrak{M}$ *точек, все координаты которых вещественны или чисто мнимы, такова, что интеграл*

$$\int\limits_{\mathfrak{M}} e^{-cz^2}\,d\mu(z)$$

сходится при всех $c>0$. *Тогда равенство*

$$(F,\varphi)=\int\limits_{\mathfrak{M}} \varphi(z)\,d\mu(z)$$

задает четную обобщенную функцию F *в пространстве* $S_{1/2}^{1/2}$, *такую, что для всех четных функций* $\varphi(z)$ *из этого пространства выполняется неравенство* $(F,\varphi*\varphi^*)\geqslant 0$.

Доказательство этого утверждения тривиально.

В ходе доказательства теоремы 1 мы опустили доказательства лемм 2 и 3. Восполним этот пробел.

Мы докажем сначала лемму 2, т. е. покажем, что при $0<b<2c$ функцию e^{-bz} можно аппроксимировать в пространстве Q последовательностью функций вида $e^{-cz}\theta_m(z)$, где $\theta_m(z)$ — функции из пространства Z, такие, что $\theta_m(x)>0$ и $|\theta_m(x)|\leqslant K_1 e^{\|(b-c)x\|}$ с постоянной K_1, не зависящей от m. Для построения функций $\theta_m(x)$ возьмем любую функцию $\alpha(z)$ из пространства Z, такую, что $\alpha(0)=1$ и

$$|\alpha(x+iy)|\leqslant ce^{r\|y\|},$$

где r удовлетворяет неравенству *) $0<r<\dfrac{c-\|b-c\|}{2}$ (так как по условию $0<b<2c$, то такое r существует).

Положим

$$\theta_m(z)=\alpha\left(\frac{z}{m}\right)\bar{\alpha}\left(\frac{z}{m}\right)\left[\sum_{|k|=0}^{m}\frac{(c-b)^k z^k}{2^k k!}\right]^2 \tag{17}$$

и покажем, что последовательность функций $\theta_m(z)$ удовлетворяет всем условиям леммы. Заметим, что все функции $\theta_m(z)$

*) Это неравенство означает, что при всех k, $1\leqslant k\leqslant n$, имеет место соотношение

$$0<r_k<\frac{c_k-|b_k-c_k|}{2}.$$

принадлежат пространству Z как произведение функции $\alpha\left(\frac{z}{m}\right)\bar{\alpha}\left(\frac{z}{m}\right)$ из этого пространства на многочлен. Далее выражения, стоящие в квадратных скобках, являются частичными суммами ряда Тейлора для $e^{\frac{(c-b)z}{2}}$ и потому они при $m\to\infty$ в каждой конечной области равномерно сходятся к $e^{\frac{(c-b)z}{2}}$. Функции же $\alpha\left(\frac{z}{m}\right)\bar{\alpha}\left(\frac{z}{m}\right)$ при $m\to\infty$ равномерно в каждой конечной области сходятся к $\alpha(0)=1$. Поэтому функции $e^{-cz}\theta_m(z)$ равномерно в каждой конечной области сходятся к e^{-bz}.

Кроме того, эти функции удовлетворяют неравенствам

$$|e^{-cz}\theta_m(z)|<Le^{-cx+s\|z\|},\quad 0<s<c$$

с постоянными L, c, s, не зависящими от m. В самом деле,

$$\left|\sum_{|k|=0}^{m}\frac{(c-b)^k z^k}{2^k k!}\right|\leqslant e^{\frac{\|(c-b)z\|}{2}} \tag{18}$$

и потому

$$|e^{-cz}\theta_m(z)|\leqslant\left|e^{-cz}\alpha\left(\frac{z}{m}\right)\bar{\alpha}\left(\frac{z}{m}\right)\right|e^{\|(c-b)z\|}\leqslant C^2 e^{-cx+\frac{2r\|y\|}{m}+\|(c-b)z\|}. \tag{19}$$

Но поскольку $\|y\|\leqslant\|z\|$, то из неравенства (19) следует, что

$$|e^{-cz}\theta_m(z)|\leqslant Le^{-cx+s\|z\|}, \tag{20}$$

где положено $L=C^2$, $s=\|c-b\|+2r$. При этом $0<s<c$ в силу выбора r. Из равномерной сходимости $e^{-cz}\theta_m(z)$ к e^{-bz} в каждой конечной области и из неравенств (20) и вытекает, что последовательность $e^{-cz}\theta_m(z)$ сходится к e^{-cz} в топологии пространства Q. Далее функции $\theta_m(z)$ принимают на множестве $\mathfrak{R}$ точек с вещественными координатами положительные значения и удовлетворяют на нем неравенству

$$|e^{-cx}\theta_m(x)|\leqslant Le^{-cx+s\|x\|},\quad 0<s<c.$$

Наконец, из равенства (17) и того, что функции $\alpha\left(\frac{z}{m}\right)$ при вещественных значениях z ограничены в совокупности, вытекает неравенство

$$|\theta_m(x)|<K_1 e^{\|(c-b)x\|}$$

с постоянной K_1, не зависящей от m.

Тем самым лемма 2 доказана.

Докажем теперь лемму 3, т. е. покажем, что каждая функция $\varphi(z)$ из пространства Q принадлежит замыканию в Q одного из пространств Q_c. Для этого нам надо для каждой функции $\psi(z)$ из пространства Q найти такое $c>0$ и последовательность функций $\psi_m(z)$ из Q, имеющих вид $\psi_m(z)=e^{-cz}\varphi_m(z)$, $\varphi_m(z)\in Z$, что $\lim\limits_{m\to\infty}\psi_m(z)=\psi(z)$ (предел понимается в смысле топологии пространства Q).

Итак, пусть $\psi(z)$ — любая функция из пространства Q. По определению этого пространства, функция $\psi(z)$ удовлетворяет неравенству вида

$$|\psi(x+iy)|<Ce^{-ax+b\|z\|},\quad 0<a<b. \tag{21}$$

Возьмем любое $c>a$ и разложим целую функцию $e^{cz}\psi(z)$ в ряд Тейлора. Обозначим через $\rho_m(z)$ m-ю частичную сумму этого ряда. Выберем любую функцию $\alpha(z)$ из пространства Z, такую, что $\alpha(0)=1$ и $|\alpha(x+iy)|<Le^{r\|y\|}$, где $0<r<\frac{a-b}{4}$. Положим теперь

$$\psi_m(z)=e^{-cz}\alpha\left(\frac{z}{m}\right)\rho_m(z).$$

Так как функция $\alpha\left(\frac{z}{m}\right)$ принадлежит пространству Z, а функции $\rho_m(z)$ являются многочленами, то функции $\psi_m(z)$ принадлежат множеству Q_c. Покажем, что $\lim\limits_{m\to\infty}\psi_m(z)=\psi(z)$, где предел понимается в смысле топологии пространства Q.

Очевидно, во-первых, что в каждой конечной области изменения z последовательность $\rho_m(z)$ равномерно сходится к целой функции $e^{cz}\psi(z)$. Далее последовательность $\alpha\left(\frac{z}{m}\right)$ равномерно в каждой конечной области сходится к 1. Поэтому $\{\psi_m(z)\}$ равномерно в каждой конечной области сходится к $\psi(z)$.

Теперь покажем, что функции $\psi_m(z)$ удовлетворяют неравенствам

$$|\psi_m(x+iy)|<Ne^{-cx+s\|z\|},\quad 0\leqslant s<c, \tag{22}$$

с постоянными N, c, s, не зависящими от m. Для этого заметим, что в силу (21) имеет место неравенство

$$|e^{cz}\psi(z)|<Ce^{(c-a)x+b\|z\|}\leqslant Ke^{b_1\|z\|}, \tag{23}$$

где положено $b_1=b+c-a$. Но тогда для любого $b_2>b_1$ выполняются неравенства вида *)

$$|\rho_m(z)|\leqslant K_1e^{b_2\|z\|},$$

где постоянная K_1 не зависит от m. Мы выберем $b_2=c-\frac{a-b}{2}$.

При таком выборе b_2 имеет место оценка

$$|\psi_m(x+iy)|=e^{-cx}\left|\alpha\left(\frac{z}{m}\right)\right||\rho_m(z)|\leqslant$$
$$\leqslant LK_1e^{-cx+\frac{r\|y\|}{m}+\frac{1}{2}[2c-a-b]\|z\|}\leqslant Ne^{-cx+s\|z\|},$$

где положено $s=c-\frac{a-b}{4}$. Очевидно, что $0<s<c$.

Тем самым доказано выполнение неравенства (22) с постоянными N, c, s, не зависящими от m, следовательно, и сходимость последовательности функций $\psi_m(z)$ к $\psi(z)$ в топологии пространства Q.

Таким образом, доказательство леммы 3, а с ней и теоремы 1″ (а значит, 1′ и 1) полностью завершено.

При помощи теоремы 1″ легко получить описание четно-положительно определенных непрерывных функций $f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)$, таких, что интеграл $\int e^{-cx^2}f(x)\,dx$ сходится для всех $c>0$. Такая функция задает четно-положительно определенную обобщенную функцию

$$(f,\varphi)=\int\overline{f(x)}\,\varphi(x)\,dx$$

*) В самом деле, $e^{cz}\psi(z)$ является целой аналитической функцией, удовлетворяющей неравенству (23). Поэтому коэффициенты ее ряда Тейлора удовлетворяют неравенствам $|d_k|<M\left(\frac{b_1e}{k}\right)^k$. Но тогда $k!\,|d_k|<M_1\sqrt{k}\,b_1^k$. Если $b_2>b_1$, то найдется такое K_1, что $|k!\,d_k|<K_1b_2^k$, причем K_1 не зависит от k. Очевидно, имеет место неравенство

$$|\rho_m(z)|\leqslant K_1\sum_{|k|=0}^{m}\left|\frac{b_2^kz^k}{k!}\right|\leqslant K_1e^{b_2\|z\|}.$$

в пространстве $S_{1/2}^{1/2}$. По теореме 1 эта функция имеет вид

$$f(x)=\int_{\mathfrak{M}} e^{i(x,\,z)}\,d\mu(z), \tag{24}$$

где μ — однозначно определенная положительно четная мера на множестве $\mathfrak{M}$, такая, что интеграл $\int_{\mathfrak{M}} e^{-cz^2}\,d\mu(z)$ сходится при всех $c>0$. Однако условие непрерывности функции $f(x)$ накладывает дополнительные условия на меру μ. Можно показать, что мера μ должна быть такой, чтобы для всех $c>0$ сходились не только интегралы вида $\int_{\mathfrak{M}} e^{-cz^2}\,d\mu(z)$, но и интегралы вида $\int_{\mathfrak{M}} e^{cy^2}\,d\mu(z)$, $z=x+iy$. Обратно, если мера μ такова, что интеграл

$$\int_{\mathfrak{M}} e^{cy^2}\,d\mu(z) \tag{25}$$

сходится при всех $c>0$, то функция $f(x)$, определяемая формулой (24), непрерывна.

Итак, имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $f(x)$ — непрерывная четно-положительно определенная функция, такая, что интеграл $\int e^{-cx^2} f(x)\,dx$ сходится при всех $c>0$. Тогда эта функция является преобразованием Фурье четной положительной меры μ на множестве $\mathfrak{M}$ точек, все координаты которых вещественные или чисто мнимые. При этом мера μ такова, что интеграл (25) сходится при всех $c>0$. Обратно, если положительная четная мера μ такова, что интеграл (25) сходится при всех $c>0$, то равенство (24) задает непрерывную четно-положительно определенную функцию $f(x)$, такую, что интеграл $\int e^{-cx^2} f(x)\,dx$ сходится при всех $c>0$.* Мы опускаем доказательство теоремы 3.

Теорема 1 позволяет также выяснить, в каких случаях из совпадения преобразований Фурье двух положительных четных мер μ_1 и μ_2 вытекает совпадение этих мер. Именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть μ_1 и μ_2 положительные четные меры на множестве $\mathfrak{M}$ точек, все координаты которых вещественные или чисто мнимые, причем эти меры задают обобщенные функции в пространстве Z. Если преобразования Фурье $\tilde{\mu}_1$ и $\tilde{\mu}_2$ этих мер совпадают и если интегралы $\int_{\mathfrak{M}} e^{-cz^2}\,d\mu_1(z)$ и $\int_{\mathfrak{M}} e^{-cz^2}\,d\mu_2(z)$ сходятся при всех $c>0$, то меры μ_1 и μ_2 совпадают.*

В самом деле, при выполнении условий теоремы меры μ_1 и μ_2 задают обобщенные функции в пространстве $S_{1/2}^{1/2}$. Но тогда и их преобразования Фурье также являются обобщенными функциями в $S_{1/2}^{1/2}$, т. е. $\tilde{\mu}_1=\tilde{\mu}_2=F$, где F четно-положительно определенная обобщенная функция в пространстве $S_{1/2}^{1/2}$.

Поскольку для четно-положительно определенных обобщенных функций в пространстве $S_{1/2}^{1/2}$ соответствующие положительные меры однозначно определены, мы получаем, что $\mu_1=\mu_2$.

3. Четно-положительно определенные обобщенные функции в пространстве $S_{1/2}$. Результаты, аналогичные доказанным в п. 2, справедливы и для обобщенных функций в пространстве *) $S_{1/2}$.

Теорема, касающаяся четно-положительно определенных обобщенных функций в пространстве $S_{1/2}$, формулируется следующим образом.

Теорема 5. *Пусть F — четная обобщенная функция в пространстве $S_{1/2}$, такая, что $(F,\varphi*\varphi^*)\geqslant 0$ для всех*

*) Пространство $S_{1/2}$ состоит из бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих неравенствам вида

$$|\varphi^{(q)}(x)|\leqslant C_q e^{-bx^2},$$

где постоянные C_q и b зависят от функции $\varphi(x)$ (см. вып. 2, гл. IV, § 2, п. 2), а через bx^2 обозначена сумма $\sum_{k=1}^{n} b_k x_k^2$. Топология в пространстве $S_{1/2}$ вводится следующим образом. Последовательность $\{\varphi_m(x)\}$ функций из этого пространства называется сходящейся к нулю, если при любом q последовательность $\{\varphi_m^{(q)}(x)\}$ рав-

четных функций φ из этого пространства. Тогда функция F представима в виде

$$(F, \varphi) = \int_{\mathfrak{M}} \tilde{\varphi}(z)\, d\mu(z), \tag{26}$$

где $\tilde{\varphi}(z)$ — преобразование Фурье функции $\varphi(x)$, а μ однозначно определенная положительная четная мера на множестве $\mathfrak{M}$ точек, все координаты которых либо вещественные, либо чисто мнимые. При этом мера μ обладает следующим свойством: для любого $c > 0$ интеграл

$$\int_{\mathfrak{M}} (1 + |x|^2)^{-p} e^{c|y|^2} d\mu(z) \tag{27}$$

сходится при некотором p. Обратно, если μ — четная положительная мера на множестве $\mathfrak{M}$, обладающая указанным свойством, то равенство (26) задает такую четную обобщенную функцию F в пространстве $S_{1/2}$, что $(F, \varphi * \varphi^*) \geqslant 0$ для всех четных функций $\varphi(x)$ из этого пространства.

Мы не будем проводить подробное доказательство этой теоремы, укажем лишь его идею. Как обычно, от теоремы 5 можно перейти к двойственной ей относительно преобразования Фурье теореме, касающейся мультипликативно положительных обобщенных функций в пространстве $S^{1/2}$ (читатель без труда сформулирует эту теорему). Так как пространство $S_{1/2}^{1/2}$ является подпространством пространства $S^{1/2}$, то такая мультипликативно положительная обобщенная функция индуцирует

номерно сходится к нулю в каждой конечной области, причем выполняются неравенства

$$|\varphi_m^{(q)}(x)| \leqslant C_q e^{-bx^2}$$

с постоянными C_q и b, не зависящими от m.

Отметим, что свертка двух функций из пространства $S_{1/2}$ принадлежит тому же пространству. Кроме того, вместе с любой функцией $\varphi(x)$ ему принадлежит и функция $\varphi^*(x) = \overline{\varphi(-x)}$.

Пространство $S_{1/2}$ двойственно относительно преобразования Фурье пространству $S^{1/2}$ целых аналитических функций $\varphi(z)$, удовлетворяющих неравенствам вида

$$|x^k \varphi(x + iy)| \leqslant C_k e^{by^2}$$

(см. вып. 2, гл. IV, § 6, п. 2).

обобщенную функцию с аналогичными свойствами в пространстве $S_{1/2}^{1/2}$. По теореме 1′ эта обобщенная функция задается (для функций из $S_{1/2}^{1/2}$) четной положительной мерой μ на множестве $\mathfrak{M}$, такой, что интеграл

$$\int_{\mathfrak{M}} e^{-cz^2} d\mu(z)$$

сходится при всех $c > 0$. После этого надо лишь доказать, что эта мера μ задает обобщенную функцию F для всех функций $\varphi(z)$ из пространства $S^{1/2}$ и обладает свойствами, указанными в формулировке теоремы. Доказательство этого утверждения можно провести, приближая функции $\varphi(z)$ из пространства $S^{1/2}$ функциями вида $\varphi_m(z) = e^{-\frac{z^2}{m}} \varphi(z)$ из пространства $S_{1/2}^{1/2}$ и используя лемму Фату. Мы опускаем детали доказательства.

4. Положительно определенные обобщенные функции и группы линейных преобразований. Изученное нами понятие четно-положительно определенной обобщенной функции является частным случаем более общего понятия, связанного с рассмотрением групп линейных преобразований.

Пусть G — некоторая группа линейных преобразований n-мерного пространства.

Функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *симметричной* (или инвариантной) *относительно группы преобразований* G, если для всех элементов g группы G выполняется равенство $f(gx) = f(x)$. Например, если группа G состоит из всех преобразований, при которых у некоторых переменных меняются знаки, то симметричными относительно этой группы функциями являются четные функции.

Если непрерывная функция $f(x)$ симметрична относительно некоторой группы G, то для всех функций $\varphi(x)$ из пространства K выполняется равенство

$$(f, \varphi(g^{-1}x)) = (\det g)(f, \varphi(x)). \tag{28}$$

В самом деле,

$$(f, \varphi(g^{-1}x)) = \int \overline{f(x)}\, \varphi(g^{-1}x)\, dx = (\det g) \int \overline{f(gx)}\, \varphi(x)\, dx =$$
$$= (\det g) \int \overline{f(x)}\, \varphi(x)\, dx = (\det g)(f, \varphi(x)).$$

В соответствии с этим назовем обобщенную функцию F *симметричной относительно группы* G, если для всех основных функций $\varphi(x)$ и всех элементов g группы G выполняется равенство

$$(F, \varphi(g^{-1}x)) = (\det g)(F, \varphi(x)).$$

Назовем, наконец, основную функцию $\varphi(x)$ *симметричной функцией второго рода относительно группы* G, если для всех элементов g группы G имеет место равенство

$$\varphi(g^{-1}x) = (\det g)\,\varphi(x). \tag{29}$$

Очевидно, что если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — симметричные функции второго рода, то и их свертка $\varphi(x) = \varphi_1 * \varphi_2(x)$ является симметричной функцией второго рода. В самом деле,

$$\begin{aligned}\varphi(g^{-1}x) &= \int \varphi_1(y)\,\varphi_2(g^{-1}x - y)\,dy = \\ &= (\det g)^{-1} \int \varphi_1(g^{-1}y)\,\varphi_2(g^{-1}(x-y))\,dy = \\ &= (\det g) \int \varphi_1(y)\,\varphi_2(x-y)\,dy = (\det g)\,\varphi(x).\end{aligned}$$

Введем теперь понятие обобщенной функции F, *положительно определенной относительно группы* G. Так мы будем называть обобщенную функцию F, симметричную относительно группы G и такую, что для всякой симметричной относительно группы G основной функции $\varphi(x)$ второго рода выполняется неравенство

$$(F, \varphi * \varphi^*) \geqslant 0. \tag{30}$$

Например, если G — группа перемен знаков у аргументов, то положительно определенными относительно этой группы являются четно-положительно определенные обобщенные функции.

Легко указать способ, позволяющий построить целый класс обобщенных функций, симметричных относительно данной группы G. Для этого рассмотрим наряду с группой G группу G^*, состоящую из преобразований g^*, сопряженных с преобразованиями g группы G, т. е. таких, что

$$(\lambda, gx) = (g^*\lambda, x)$$

для всех векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Обозначим через $\mathfrak{M}$ подмножество n-мерного комплексного про-

странства, состоящее из всех точек $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, таких, что $g^*\lambda = \bar{\lambda}$ для всех элементов g^* из G^*. Тогда *каждая положительная мера* μ, *заданная на множестве* $\mathfrak{M}$ *и симметричная* *) *относительно группы* G^*, *задает положительно определенную относительно группы* G *обобщенную функцию*

$$(F, \varphi) = \int_{\mathfrak{M}} \tilde{\varphi}(\lambda)\,d\mu(\lambda) \tag{31}$$

[через $\tilde{\varphi}(\lambda)$, как обычно, мы обозначаем преобразование Фурье функции $\varphi(x)$].

Чтобы доказать это утверждение, покажем сначала, что преобразованием Фурье основной функции $\varphi(g^{-1}x)$ является функция $(\det g)\,\tilde{\varphi}(g^*\lambda)$. Мы имеем

$$\begin{aligned}\int \varphi(g^{-1}x)\,e^{i(\lambda, x)}\,dx &= (\det g) \int \varphi(x)\,e^{i(\lambda, gx)}\,dx = \\ &= (\det g) \int \varphi(x)\,e^{i(g^*\lambda, x)}dx = (\det g)\,\tilde{\varphi}(g^*\lambda).\end{aligned} \tag{32}$$

Отсюда вытекает, что если мера μ симметрична относительно группы G^*, то обобщенная функция F симметрична относительно группы G. В самом деле, для любой основной функции $\varphi(x)$ выполняется равенство

$$\begin{aligned}(F, \varphi(g^{-1}x)) &= (\det g) \int_{\mathfrak{M}} \tilde{\varphi}(g^*\lambda)\,d\mu(\lambda) = \\ &= (\det g) \int_{\mathfrak{M}} \tilde{\varphi}(\lambda)\,d\mu(\lambda) = (\det g)(F, \varphi(x)).\end{aligned}$$

Нам осталось показать, что если $\varphi(x)$ — симметричная основная функция второго рода относительно группы G, то имеет место неравенство

$$(F, \varphi * \varphi^*) \geqslant 0. \tag{33}$$

---

*) Мера μ называется *симметричной относительно группы* G^*, если для любой функции $\tilde{\varphi}(\lambda)$ выполняется равенство

$$\int_{\mathfrak{M}} \tilde{\varphi}(g^*\lambda)\,d\mu(\lambda) = \int_{\mathfrak{M}} \tilde{\varphi}(\lambda)\,d\mu(\lambda).$$

Отметим, что само множество $\mathfrak{M}$ инвариантно относительно всех преобразований из группы G^*.

Для этого примем во внимание, что в силу равенства (32)

$$\tilde{\varphi}(g^*\lambda) = (\det g)^{-1} \int \varphi(g^{-1}\lambda)\, e^{i(\lambda,\, x)}\, dx.$$

Так как $\varphi(x)$ — симметричная функция второго рода, то $\varphi(g^{-1}x) = (\det g)\varphi(x)$ и потому

$$\tilde{\varphi}(g^*\lambda) = \int \varphi(x)\, e^{i(\lambda,\, x)}\, dx = \tilde{\varphi}(\lambda).$$

Из равенства $\tilde{\varphi}(g^*\lambda) = \tilde{\varphi}(\lambda)$ и определения множества $\mathfrak{M}$ вытекает, что для всех точек λ из $\mathfrak{M}$ выполняется равенство $\bar{\tilde{\varphi}}(\lambda) = \overline{\tilde{\varphi}(\lambda)}$. В самом деле,

$$\bar{\tilde{\varphi}}(\lambda) = \overline{\tilde{\varphi}(\bar{\lambda})} = \overline{\tilde{\varphi}(g^*\lambda)} = \overline{\tilde{\varphi}(\lambda)}.$$

Но преобразованием Фурье функции $\varphi * \varphi^*(x)$ является функция $\tilde{\varphi}(\lambda)\bar{\tilde{\varphi}}(\lambda)$. Поэтому мы имеем

$$(F,\, \varphi * \varphi^*) = \int_{\mathfrak{M}} \tilde{\varphi}(\lambda)\bar{\tilde{\varphi}}(\lambda)\, d\mu(\lambda) = \int_{\mathfrak{M}} |\tilde{\varphi}(\lambda)|^2\, d\mu(\lambda).$$

В силу положительности меры μ этот интеграл положителен. Тем самым неравенство (33) доказано.

Мы указали способ, позволяющий строить целый класс положительно определенных относительно группы G обобщенных функций. Было бы интересно знать, для каких групп G и пространств Φ этим способом можно получить все положительно определенные относительно G обобщенные функции, а также выяснить вопрос об условиях однозначной определенности меры μ. В этом параграфе мы решили указанную задачу группы G перемен знаков аргументов и пространства основных функций $S_{1/2}^{1/2}$.

§ 6. ЧЕТНО-ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ ФИНИТНЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. Положительные и мультипликативно положительные обобщенные функции. Мы рассмотрим в этом параграфе четно-положительно определенные обобщенные функции в пространстве K, ограничившись при этом случаем функций одного переменного. Иными словами, мы рассмотрим четные

обобщенные функции F в пространстве K, такие, что $(F,\, \varphi * \varphi^*) \geqslant 0$ для любой четной бесконечно дифференцируемой финитной функции одного переменного. Мы покажем, что такие обобщенные функции являются преобразованиями Фурье положительных мер, сосредоточенных на вещественной и мнимой осях, причем, однако, эти меры определяются неоднозначно.

Рассмотрим преобразование Фурье $\tilde{F}$ четно-положительно определенной обобщенной функции F в пространстве K. В силу двойственности относительно преобразования Фурье свертки и умножения функций обобщенная функция $\tilde{F}$ обладает следующим свойством: для любой четной функции $\varphi(z)$ из пространства Z имеет место неравенство $(\tilde{F},\, \varphi\bar{\varphi}) \geqslant 0$.

Итак, наша задача свелась к описанию четных обобщенных функций F *) в пространстве Z, таких, что $(F,\, \varphi\bar{\varphi}) \geqslant 0$ для всех четных функций из этого пространства. В рассматриваемом нами случае функций одного переменного удается свести эту задачу к более простой задаче описания таких обобщенных функций F, что $(F,\, \varphi) \geqslant 0$ для всех функций $\varphi(z)$, принимающих положительные значения на вещественной и мнимой осях. Нам понадобится для этого следующая вспомогательная теорема.

Теорема 1. *Пусть целая аналитическая функция $\psi(z)$ от одного переменного имеет порядок роста $1/2$ и конечный тип (т. е. удовлетворяет неравенству $|\psi(z)| < Ce^{a|z|^{1/2}}$) и принимает положительные значения на вещественной оси. Тогда функция $\psi(z)$ имеет вид $\psi(z) = \varphi(z)\bar{\varphi}(z)$ **), где $\varphi(z)$ — целая аналитическая функция порядка роста $1/2$ и конечного типа.*

Доказательство. Так как функция $\psi(z)$ имеет порядок роста $1/2$, то ее можно разложить в бесконечное произведение вида ***)

$$\psi(z) = Az^m \prod_{k=0}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_k}\right), \tag{1}$$

*) В дальнейшем мы обозначаем обобщенные функции в пространстве Z буквой F, а не $\tilde{F}$.

**) Как и выше, мы обозначаем через $\bar{\varphi}(z)$ функцию $\overline{\varphi(\bar{z})}$.

***) См. Титчмарш, Теория функций, М. — Л., 1951, стр. 284.

где a_k — корни функции $\psi(z)$, m — кратность корня $z=0$ этой функции. В силу вещественности ее значений на вещественной оси коэффициенты разложения функции $\psi(z)$ в степенной ряд вещественны и потому комплексные корни этой функции попарно сопряжены. Так как, кроме того, значения функции $\psi(z)$ на вещественной оси положительны, то вещественные корни этой функции имеют четную кратность (в частности, m — четно), а коэффициент A положителен. Перенумеруем корни функции $\psi(z)$ так, чтобы для любого k выполнялось равенство $a_{2k}=\bar{a}_{2k+1}$, и введем новую функцию

$$\varphi(z)=\sqrt{A}z^{\frac{m}{2}}\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_{2k}}\right). \qquad (2)$$

Тогда очевидно, что $\psi(z)=\varphi(z)\bar{\varphi}(z)$. Нам осталось лишь показать, что порядок роста функции $\varphi(z)$ также равен $1/2$ и что она имеет конечный тип. Иными словами, надо доказать, что функция $\varphi(z)$ удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(z)|\leqslant C_1 e^{a_1|z|^{1/2}}.$$

Для этого воспользуемся следующей связью между ростом целой функции и плотностью ее нулей (см. Б. Я. Левин «Распределение корней целых функций», Физматгиз, 1956, стр. 41).

Если целая аналитическая функция $\varphi(z)$ имеет порядок роста ρ и тип a, причем ρ не является целым числом, то

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln n(r)}{\ln r}=\rho$$

и

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n(r)}{r^{\rho}}=a,$$

где $n(r)$ — число корней функции $\varphi(z)$ в круге $|z|<r$. Обратно, из выполнения этих соотношений вытекает, что функция $\varphi(z)$ имеет порядок роста ρ и тип a.

Для функции $\varphi(z)$ число корней $n_1(r)$ в круге $|z|<r$ равно половине числа корней $n(r)$ функции $\psi(z)$ в том же круге. Поскольку порядок роста функции $\psi(z)$ нецелый, то в силу цитированной теоремы функция $\varphi(z)$ имеет порядок роста, равный $1/2$, и конечный тип.

Теорема доказана.

Мы можем теперь доказать следующее утверждение, позволяющее свести изучение четных обобщенных функций в пространстве Z, удовлетворяющих неравенству $(F,\varphi\bar{\varphi})\geqslant 0$ для любой четной функции $\varphi(z)$ из Z, к изучению функций, для которых $(F,\varphi)\geqslant 0$, если функция $\varphi(z)$ положительна на вещественной и мнимой осях.

Теорема 2. *Любая четная функция $\theta(z)$ из пространства Z, принимающая положительные значения на множестве $\mathfrak{M}$, состоящем из вещественной и мнимой осей, представима в виде $\theta(z)=\chi(z)\bar{\chi}(z)$, где $\chi(z)$ — некоторая четная функция из пространства Z.*

Доказательство. Сопоставим функции $\theta(z)$ функцию $\psi(z)=\theta(\sqrt{z})$ [эта функция однозначно определена в силу четности функции $\theta(z)$]. Очевидно, что $\psi(z)$ является целой аналитической функцией, принимающей положительные значения на вещественной оси и имеющей порядок роста $1/2$. По теореме 1 мы можем записать функцию $\psi(z)$ в виде $\psi(z)=\varphi(z)\bar{\varphi}(z)$, где $\varphi(z)$ — целая аналитическая функция порядка роста $1/2$ и конечного типа. Положим тогда $\chi(z)=\varphi(z^2)$. Поскольку

$$\theta(z)=\psi(z^2)=\varphi(z^2)\bar{\varphi}(z^2)=\chi(z)\bar{\chi}(z),$$

то для доказательства нашего утверждения достаточно показать, что функция $\chi(z)$ принадлежит пространству Z (четность функции $\chi(z)$ вытекает из ее определения).

Иными словами, нам надо доказать, что при любом k функция $\chi(z)$ удовлетворяет неравенствам вида

$$|z^{2k}\chi(z)|<C_k e^{a|y|}.$$

Для этого заметим, что по построению функция $\varphi(z)$ имеет порядок роста $1/2$ и конечный тип, а потому функция $\chi(z)=\varphi(z^2)$ имеет первый порядок роста и конечный тип, т. е. $|\chi(z)|<Ce^{a|z|}$. Такова же и функция $z^{2k}\chi(z)$. Но при вещественных значениях z эта функция ограничена, так как

$$|x^{2k}\chi(x)|^2=|x^{4k}\theta(x)|,$$

а функция $z^{4k}\theta(z)$ ограничена на вещественной оси в силу принадлежности $\theta(z)$ пространству Z. Но если

$$\sup_x|x^k\chi(x)|=M,$$

то из известного неравенства С. Н. Бернштейна вытекает *)

$$|z^k \chi(z)| \leqslant M e^{a|y|}.$$

Тем самым принадлежность функции $\chi(z)$ пространству Z, а с ней и теорема 2 доказаны.

Итак, мы доказали, что любую четную функцию $\theta(z)$ одного переменного из пространства Z, принимающую положительные значения на вещественной и мнимой осях, можно представить в виде $\theta(z) = \chi(z)\overline{\chi}(z)$, где $\chi(z)$ — четная функция из пространства Z (для функций нескольких переменных эта теорема, по-видимому, не имеет места). Следовательно, если неравенство $(F, \chi\overline{\chi}) \geqslant 0$ справедливо для всех четных функций из пространства Z, то для всех функций $\theta(z)$ из этого пространства, принимающих положительные значения на вещественной и мнимой осях, выполняется неравенство $(F, \theta) \geqslant 0$.

Таким образом, задача описания четных обобщенных функций F одного переменного, для которых $(F, \chi\overline{\chi}) \geqslant 0$ при всех четных функциях $\chi(z)$ из пространства Z эквивалентна задаче описания четных обобщенных функций F, таких, что $(F, \theta) \geqslant 0$ для всех четных функций из этого пространства, принимающих положительные значения на вещественной и мнимой осях.

Эта задача будет решена в п. 3 при помощи теоремы о распространении положительных линейных функционалов.

2. Теорема о распространении положительных линейных функционалов **). Мы будем рассматривать линейные пространства L, элементами которых являются функции $\varphi(x)$, заданные на некотором множестве $\mathfrak{M}$. Функция $\varphi(x)$ называется *положительной*, если для всех элементов x множества $\mathfrak{M}$ выполняется неравенство $\varphi(x) \geqslant 0$. Линейный

*) См. Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, 1947, стр. 152—153.

**) По сути дела, теория распространения положительных линейных функционалов может быть построена для любых линейных пространств, в которых определена частичная упорядоченность элементов, обладающая обычными свойствами:

а) если $x \leqslant y$, $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$,
б) если $x \leqslant y$, $y \leqslant x$, то $x = y$,
в) $x \leqslant x$.

функционал F, заданный в пространстве L, называется *положительным*, если для всех положительных функций из пространства L выполняется неравенство $(F, \varphi) \geqslant 0$. Мы будем говорить, что функция $\varphi(x)$, заданная на множестве $\mathfrak{M}$, *подчинена* пространству L, если в пространстве L существует такая функция $\psi(x)$, что $-\psi(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \psi(x)$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть L — линейное пространство, элементами которого являются функции, заданные на множестве $\mathfrak{M}$, а F — положительный линейный функционал в пространстве L. Функционал F можно распространить с сохранением положительности на любое линейное пространство M, состоящее из функций, подчиненных пространству L.*

Доказательство. Возьмем любую функцию $\varphi_1(x)$ из пространства M, не принадлежащую пространству L, и обозначим через L_1 линейное пространство, порождаемое функцией $\varphi_1(x)$ и пространством L. Чтобы распространить функционал F с сохранением положительности на пространство L_1, рассмотрим всевозможные функции $\psi(x)$ и $\chi(x)$ из пространства L, такие, что $\psi(x) \leqslant \varphi_1(x) \leqslant \chi(x)$ (существование хотя бы одной пары таких функций вытекает из того, что функция $\varphi_1(x)$ подчинена пространству L). В силу положительности функционала F имеет место неравенство $(F, \psi) \leqslant (F, \chi)$. Но тогда и $\sup (F, \psi) \leqslant \inf (F, \chi)$, где $\sup (F, \psi)$ берется по всем функциям $\psi(x)$, таким, что $\psi(x) \leqslant \varphi(x)$, а $\inf (F, \chi)$ берется по всем функциям $\chi(x)$, таким, что $\varphi(x) \leqslant \chi(x)$. Выберем число c, лежащее между $\sup (F, \varphi)$ и $\inf (F, \chi)$, и положим $(F, \varphi) = (F, \theta) + \lambda c$ для всех функций вида $\varphi(x) = \theta(x) + \lambda\varphi_1(x)$, где $\theta(x)$ — функции из пространства L. Очевидно, что тем самым определяется линейный функционал в пространстве L_1. Покажем, что этот функционал положителен. Пусть функция $\varphi(x) = \theta(x) + \lambda\varphi_1(x)$ положительна. Если $\lambda > 0$, то $-\frac{1}{\lambda}\theta(x) < \varphi_1(x)$ и, следовательно, в силу неравенства $\sup \psi(x) \leqslant c$ имеем $-\frac{1}{\lambda}(F, \theta) \leqslant c$. Но тогда $(F, \varphi) = (F, \theta) + \lambda c \geqslant 0$. Аналогично доказывается, что $(F, \varphi) \geqslant 0$ при $\lambda < c$. В случае $\lambda = 0$ неравенство $(F, \varphi) \geqslant 0$ имеет место в силу предположения о положительности функционала F на пространстве L.

Итак, мы распространили с сохранением положительности функционал F на пространство L_1. Выбирая после этого другую функцию $\varphi_2(x)$, не принадлежащую пространству L_1, мы распространим функционал F с сохранением положительности на пространство, получаемое присоединением к L_1 функции $\varphi_2(x)$ и т. д. Продолжая этот процесс дальше и используя трансфинитную индукцию, мы можем распространить функционал F с сохранением положительности на все пространство M.

Отметим, что проведенное нами распространение функционала F, вообще говоря, не единственно. В этом заключается существенное различие с построениями, проведенными в предыдущих параграфах, где функционалы распространялись по непрерывности, и потому это распространение было единственным. Мы увидим ниже, что и положительные меры, доказательство существования которых основывается на теореме 3, определяются в некоторых случаях неединственным образом.

3. Четные положительные обобщенные функции в пространстве Z. В этом пункте мы опишем четные обобщенные функции F в пространстве Z, такие, что $(F, \theta) \geqslant 0$ для всех четных функций $\theta(z)$ этого пространства, принимающих положительные значения на вещественной и мнимой осях.

Теорема 4. *Пусть F — четная обобщенная функция одного переменного в пространстве Z, такая, что $(F, \theta) \geqslant 0$ для всех четных функций $\theta(z)$ этого пространства, принимающих положительные значения на вещественной и мнимой осях. Тогда существуют такие положительные четные меры μ_1 и μ_2, что для всех четных функций $\varphi(z)$ из пространства Z выполняется равенство*

$$(F, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, d\mu_1(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(iy)\, d\mu_2(y). \tag{3}$$

При этом интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{-p}\, d\mu_1(x) \tag{4}$$

сходится при некотором $p > 0$, а интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{a|y|}\, d\mu_2(y) \tag{5}$$

сходится при всех $a > 0$.

Обратно, если положительные четные меры μ_1 и μ_2 удовлетворяют условиям (4) и (5), то равенство (3) определяет обобщенную функцию F в пространстве Z, такую, что $(F, \theta) \geqslant 0$ для всех четных функций этого пространства, принимающих положительные значения на вещественной и мнимой осях.

Доказательство. Докажем сначала справедливость обратного утверждения. Нам надо лишь показать, что при выполнении условий на меры μ_1 и μ_2 функционал F непрерывен в топологии пространства Z. Так как это пространство является объединением своих подпространств $Z(a)$, то для этого достаточно показать непрерывность функционала F в топологии пространства $Z(a)$ при всех $a > 0$. Из определения топологии в пространстве Z (см. добавление к § 1 гл. I, стр. 36—37) вытекает, что окрестности нуля в пространстве $Z(a)$ задаются неравенствами вида

$$\sup_x (1+|x|^2)^r |\varphi(x)| \leqslant \eta. \tag{6}$$

Кроме того, из принадлежности функции $\varphi(z)$ пространству $Z(a)$ вытекает, что

$$\sup_x |\varphi(x+iy)| \leqslant Ae^{a|y|}, \tag{7}$$

где

$$A = \sup_x |\varphi(x)|.$$

Отсюда и из условий (4) и (5) на меры μ_1 и μ_2 вытекает, что интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, d\mu_1(x) \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(iy)\, d\mu_2(y)$$

сходятся для всех функций $\varphi(z)$ из окрестности нуля U, задаваемой неравенством вида (6), если положить в нем $r = p$. При этом значения указанных интегралов ограничены, когда функция $\varphi(z)$ пробегает окрестность нуля U. Мы доказали, таким образом, что функционал F ограничен на окрестности нуля U. Следовательно, он непрерывен на подпространстве $Z(a)$. Отсюда вытекает непрерывность этого функционала и на всем пространстве Z.

Перейдем теперь к доказательству прямого утверждения теоремы. Мы будем обозначать пространство четных функций из Z через Z_+. Функции пространства Z_+ будут рассматриваться лишь на множестве $\mathfrak{M}$, состоящем из вещественной и мнимой осей. В соответствии с этим они будут называться *положительными*, если они принимают положительные значения на вещественной и мнимой осях. Из условия теоремы вытекает, что рассматриваемый функционал F положителен. Поэтому по теореме 3 этот функционал можно распространить с сохранением положительности на все функции $\psi(z)$, заданные на множестве $\mathfrak{M}$ и подчиненные пространству Z_+ (т. е. такие, что на множестве $\mathfrak{M}$ выполняется неравенство $-\theta(z) \leqslant \psi(z) \leqslant \theta(z)$, где $\theta(z)$ — положительная функция из пространства Z_+.

Пользуясь этим замечанием, распространим функционал F с сохранением положительности на все функции вида $\varphi(z)f(z)$, где $\varphi(z)$ — положительная функция из Z_+, а $f(z)$ — функция из пространства C_0 непрерывных функций на множестве $\mathfrak{M}$, стремящихся к нулю при $|z| \to \infty$ (пространство C_0 берется с обычной топологией); легко видеть, что все функции этого вида подчинены пространству Z_+. Не теряя общности, мы можем считать, что $(F, \varphi(z) f(z)) = 0$, если функция $f(z)$ нечетная.

Сопоставим теперь каждой положительной функции $\varphi(z)$ из Z_+ функционал F_φ на пространстве C_0, определяемый равенством

$$(F_\varphi, f) = (F, \varphi f)$$

(правая часть этого равенства имеет смысл для любой функции $f(z)$ из пространства C_0).

Мы распространили функционал F с сохранением положительности. Поэтому неравенство $(F_\varphi, f) \geqslant 0$ выполняется для всех положительных функций из пространства C_0 (т. е. функций, принимающих положительные значения на множестве $\mathfrak{M}$). Кроме того, функционал F_φ непрерывен относительно топологии пространства C_0, поскольку

$$-\sup_{z \in \mathfrak{M}} |f(z)| \, (F, \varphi) \leqslant (F_\varphi, f) \leqslant \sup_{z \in \mathfrak{M}} |f(z)| \, (F, \varphi).$$

По теореме Ф. Рисса на множестве $\mathfrak{M}$ существует такая положительная мера ν_φ, что для всех функций $f(z)$ из пространства C_0 выполняется равенство

$$(F_\varphi, f) = \int_{\mathfrak{M}} f(z)\, d\nu_\varphi(z). \tag{8}$$

При этом, поскольку $(F_\varphi, f) = 0$ для нечетных функций $f(z)$, мера ν_φ является четной.

Равенство (8) можно переписать в виде

$$(F, \varphi f) = (F_\varphi, f) = \int_{\mathfrak{M}} \varphi(z) f(z) \frac{d\nu_\varphi(z)}{\varphi(z)}.$$

Если положить $\varphi(z) f(z) = \theta(z)$ и $\dfrac{d\nu_\varphi(z)}{\varphi(z)} = d\mu_\varphi(z)$, то мы получим, что

$$(F, \theta) = \int_{\mathfrak{M}} \theta(z)\, d\mu_\varphi(z). \tag{9}$$

Рассматривая выражение $(F, \varphi_1\varphi_2 f)$, мы убеждаемся, что мера μ_φ не зависит от выбора функции $\varphi(z)$. Поэтому мы будем обозначать ее просто через μ. Значения меры μ на вещественной оси мы обозначим через μ_1, а ее значения на мнимой оси — через μ_2. Тогда равенство (9) примет вид

$$(F, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)\, d\mu_1(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \theta(iy)\, d\mu_2(y). \tag{10}$$

Мы получили это равенство для функций вида $\theta(z) = \varphi(z) f(z)$, где $\varphi(z)$ — положительная функция из пространства Z_+, а $f(z)$ — функция из пространства C_0. Но любую положительную функцию $\theta(z)$ из пространства Z_+ можно представить в этом виде, положив, например,

$$\theta(z) = \theta(z)(1 + z^4)\frac{1}{(1 + z^4)}$$

(очевидно, что функция $\theta(z)(1 + z^4)$ также принадлежит пространству Z_+ и положительна на $\mathfrak{M}$, а функция $\dfrac{1}{1 + z^4}$ принадлежит пространству C_0). Поэтому равенство (10) уже доказано для положительных функций из пространства Z_+.

Пользуясь справедливостью равенства (10) для положительных функций из пространства Z_+, докажем, что меры μ_1 и μ_2 удовлетворяют условиям теоремы. В самом деле, функционал F непрерывен относительно топологии пространства Z. Поэтому для любого $a > 0$ найдется такая окрестность нуля U в пространстве $Z(2a)$, что $|(F, \varphi)| \leqslant 1$ для всех функций $\varphi(z)$ из этой окрестности. Окрестность нуля U задается неравенством вида

$$\sup_x |(1+x^2)^r \varphi(x)| \leqslant \eta.$$

Выберем теперь в этой окрестности нуля последовательность положительных четных функций $\varphi_n(z)$ *), таких, что для любого $z \in \mathfrak{M}$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(z) = \beta_0(z)$, причем функция $\beta_0(z)$ удовлетворяет неравенствам

$$\beta_0(x) \geqslant \frac{A}{(1+x^2)^r} \tag{11}$$

и

$$\beta_0(iy) \geqslant Be^{a|y|}. \tag{12}$$

Из неравенств

$$(F, \varphi_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)\, d\mu_1(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(iy)\, d\mu_2(y) \leqslant 1$$

---

*) Такую последовательность можно построить в виде

$$\varphi_n(z) = \varepsilon\beta(z)\, \alpha\left(\frac{z}{n}\right) \bar{\alpha}\left(\frac{z}{n}\right),$$

где $\alpha(z)$ — четная функция из пространства $Z(a/2)$, такая, что $\alpha(0) = 1$, а $\beta(z)$ — функция вида

$$\beta(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma(z-x)}{(1+x^2)^p}\, dx,$$

где $\gamma(z)$ — четная функция из пространства $Z(a)$, такая, что $\int_{-\infty}^{\infty} \gamma(x) \neq 0$ и преобразование Фурье функции $\gamma(x)$ положительно. Мы опускаем детали соответствующих оценок, поскольку аналогичная инструкция встречалась в лемме 3 из § 3.

и оценок (11) и (12) в силу леммы Фату вытекает сходимость интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu_1(x)}{(1+x^2)^r}$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{a|y|}\, d\mu_2(y).$$

Поскольку значение a было произвольным, выполнение условий теоремы для мер μ_1 и μ_2 доказано.

Мы видели уже, что из выполнения этих условий вытекает непрерывность функционала

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, d\mu_1(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(iy)\, d\mu_2(y)$$

относительно топологии пространства Z. Но этот функционал совпадает с функционалом (F, φ) на функциях пространства Z_+, представимых в виде $\theta(z) f(z)$, где $\theta(z)$ положительная функция из Z_+ и $f(z) \in C_0$. Поэтому для доказательства справедливости формулы (10) для всех функций пространства Z_+ нам осталось показать, что множество функций вида $\theta(z) f(z)$ всюду плотно в Z_+.

Пусть $\varphi(z)$ — некоторая функция из пространства Z_+. Найдется такое вещественное значение c, что на вещественной и мнимой оси выполняются неравенства

$$-A(2+\cos cz) < \varphi(z) < A(2+\cos cz).$$

Возьмем теперь любую функцию $\alpha(z)$ из пространства Z_+ и положим

$$\varphi_n(z) = \varphi(z)\, \alpha\left(\frac{z}{n}\right) \bar{\alpha}\left(\frac{z}{n}\right).$$

Тогда последовательность функций $\varphi_n(z)$ сходится к функции $\varphi(z)$ в топологии пространства Z, причем все функции $\varphi_n(z)$ могут быть представлены в виде

$$\varphi_n(z) = A(2+\cos cz)(1+z^4)\, \alpha\left(\frac{z}{n}\right) \bar{\alpha}\left(\frac{z}{n}\right) \frac{\theta(z)}{(2+\cos cz)(1+z^4)}.$$

Но

$$\theta_n(z)=A(2+\cos cz)(1+z^4)\,\alpha\left(\frac{z}{n}\right)\overline{\alpha}\left(\frac{z}{n}\right)$$

является, очевидно, положительной функцией из пространства Z_+, а функция $f(z)=\dfrac{\theta(z)}{(2+\cos cz)(1+z^4)}$ стремится к нулю при $|z|\to\infty$. Тем самым доказано, что функции вида $\theta(z)f(z)$ образуют всюду плотное множество в пространстве Z_+, и потому равенство (10) справедливо для всех функций этого пространства.

Теорема 4 доказана.

Отметим, что эта теорема справедлива и для функций многих переменных. Именно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 4′. *Пусть F — четная обобщенная функция в пространстве Z функций нескольких переменных, такая, что $(F,\theta)\geqslant 0$ для всех четных функций $\theta(z)$ этого пространства, принимающих положительные значения на множестве $\mathfrak{M}$, состоящем из точек, все координаты которых вещественные или чисто мнимые. Тогда обобщенная функция F имеет вид*

$$(F,\varphi)=\int_{\mathfrak{M}}\varphi(z)\,d\mu(z),$$

где μ — четная положительная мера на множестве $\mathfrak{M}$, такая, что при любом $a>0$ интеграл

$$\int_{\mathfrak{M}}(1+|x|^2)^{-p}e^{a|y|}\,d\mu(z)$$

сходится при некотором $p>0$.

Доказательство этой теоремы почти дословно повторяет доказательство теоремы 4. Мы не стали доказывать теорему 4′ для функций нескольких переменных, так как для таких функций нам неизвестно, имеет ли место эквивалентность понятий положительности и мультипликативной положительности.

Для функций же одного переменного, как было показано в п. 1, эта эквивалентность имеет место. Таким образом, формула (3) описывает не только положительные, но и мультипликативно положительные обобщенные функции в пространстве Z_+ (т. е. такие четные обобщенные функции в пространстве Z, что $(F,\varphi\overline{\varphi})\geqslant 0$ для всех четных функций из этого пространства). При помощи преобразования Фурье мы получаем следующую теорему, описывающую четно-положительно определенные обобщенные функции *) в пространстве K бесконечно дифференцируемых финитных функций одного переменного.

Теорема 5. *Пусть F — четно-положительно определенная обобщенная функция в пространстве K бесконечно дифференцируемых финитных функций одного переменного. Тогда существуют такие четные положительные меры μ_1 и μ_2, что для всех функций $\varphi(x)$ из пространства K имеет место равенство*

$$(F,\varphi)=\int\widetilde{\varphi}(x)\,d\mu_1(x)+\int\widetilde{\varphi}(iy)\,d\mu_2(y), \tag{13}$$

где $\widetilde{\varphi}(z)$ — преобразование Фурье функции $\varphi(x)$. При этом меры μ_1 и μ_2 таковы, что интеграл $\int e^{a|y|}d\mu_2(y)$ сходится при всех $a>0$, а интеграл $\int(1+x^2)^{-p}\,d\mu_1(x)$ сходится для некоторого $p>0$.

Если четно-положительно определенная обобщенная функция F имеет вид

$$(F,\varphi)=\int\overline{f(x)}\,\varphi(x)\,dx,$$

где $f(x)$ — непрерывная функция, то мера μ_1 в равенстве (13) конечна. Обратно, если мера μ_1 конечна, а $\int e^{a|y|}d\mu_2(y)$ сходится при всех $a>0$, то обобщенная функция F задается непрерывной функцией. Отсюда мы получаем следующее описание непрерывных четно-положительно определенных функций одного переменного.

Теорема 6. *Пусть непрерывная функция $f(x)$ четно-положительно определена. Тогда функция $f(x)$ имеет вид*

$$f(x)=\int e^{i\lambda x}\,d\mu_1(\lambda)+\int e^{\lambda x}\,d\mu_2(\lambda),$$

*) Т. е. такие четные обобщенные функции в пространстве K, что $(F,\varphi*\varphi^*)\geqslant 0$ для всех четных функций из этого пространства.

где μ_1 и μ_2 — четные положительные меры, такие, что мера μ_1 конечна, а интеграл $\int e^{a\lambda}\,d\mu_2(\lambda)$ сходится при всех положительных значениях a.

4. Пример неединственности задания положительного функционала в пространстве Z_+ при помощи положительных мер. Мы уже указывали в п. 2, что распространение положительного функционала может быть выполнено неединственным образом. Поэтому меры μ_1 и μ_2, задающие согласно теореме 4 положительные функционалы в пространстве Z_+, определяются этим функционалом, вообще говоря, не единственным образом. Мы укажем сейчас пример такой неединственности.

Возьмем любое число a, лежащее между 1 и 2. Обозначим $b=\frac{\pi a}{4}$ и рассмотрим функцию $\exp(-z^a e^{-ib})$. Разделим у этой функции вещественную и мнимую части, $\exp(-z^a e^{-ib}) = \psi_1(z) + i\psi_2(z)$.

Обозначим теперь через $\psi_1^+(x)$ функцию, совпадающую с $\psi_1(x)$ в точках, где $\psi_1(x)\geqslant 0$, и равную нулю в точках, где $\psi_1(x)\leqslant 0$. Аналогично, через $\psi_1^-(x)$ обозначим функцию, совпадающую с $-\psi_1(x)$ в точках, где $\psi_1(x)\leqslant 0$, и равную нулю в точках, где $\psi_1(x)>0$. Точно так же определим функции ψ_2^+ и ψ_2^-. Примем функции ψ_1^+, ψ_1^-, ψ_2^+, ψ_2^- за плотности мер μ_1^+, μ_1^-, μ_2^+, μ_2^-. Легко видеть, что эти меры задаются формулами:

$$\mu_1^+(x) = \int_0^x \max[0, \exp(-t^a\cos b)\cos(t^a\sin b)]\,dt,$$

$$\mu_1^-(x) = -\int_0^x \min[0, \exp(-t^a\cos b)\cos(t^a\sin b)]\,dt,$$

$$\mu_2^+(x) = \int_0^x \max[0, \exp(-t^a\cos b)\sin(t^a\sin b)]\,dt,$$

$$\mu_2^-(x) = -\int_0^x \min[0, \exp(-t^a\cos b)\sin(t^a\sin b)]\,dt.$$

Очевидно, что $\mu_1^+(x)$, $\mu_1^-(x)$, $\mu_2^+(x)$, $\mu_2^-(x)$ являются возрастающими функциями от x, причем

$$\mu_1^+(x) \neq \mu_1^-(x), \qquad \mu_2^+(x) \neq \mu_2^-(x).$$

Мы докажем сейчас, что для любой четной функции $\varphi(x)$ из пространства Z выполняется равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,d\mu_1^+(x) + \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(iy)\,d\mu_2^-(y) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,\mu_1^-(x) + \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(iy)\,d\mu_2^+(y). \quad (14)$$

Тем самым будет показано, что различные меры μ_1^+, μ_2^- и μ_1^-, μ_2^+ определяют один и тот же положительный функционал на пространстве Z_+.

Для доказательства равенства (14) заметим, что для любой функции $\varphi(z)$ из пространства Z выполняется равенство

$$\int_0^{\infty}\exp[-x^a e^{-ib}]\,\varphi(x)\,dx = \\ = i\int_0^{\infty}\exp[-y^a e^{-ib}]\,\varphi(iy)\,dy, \quad (15)$$

где положено $b=\frac{\pi a}{4}$.

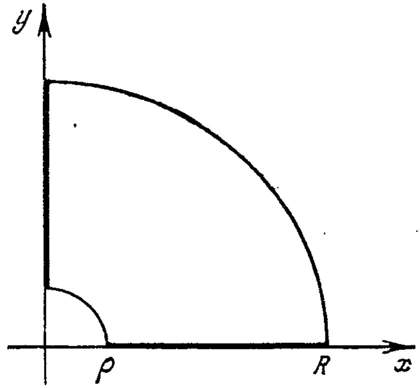

Рис. 1.

В самом деле, рассмотрим функцию

$$\exp[-z^a e^{-ib}]\,\varphi(z).$$

Эта функция является аналитической функцией в области, ограниченной отрезками вещественной и мнимой осей и окружностями $|z|=\rho$ и $|z|=R$ (рис. 1). Поэтому ее интеграл по контуру этой области равен нулю. Но

$$|\exp[-z^a e^{-ib}]| = e^{-|z|^a\cos a\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)},$$

где $\alpha = \arg z$. В силу неравенств $1 < a < 2$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ интегралы по дугам окружностей $|z| = \rho$ и $|z| = R$ стремятся к нулю, когда $\rho \to 0$ и $R \to \infty$ (напомним, что функция $\varphi(z)$ принадлежит пространству Z и потому удовлетворяет неравенству вида $|\varphi(z)| \leqslant Ce^{b|y|} \leqslant Ce^{b|z|}$). Отсюда следует, что интегралы от функции $\exp[-z^a e^{-ib}]\varphi(z)$ по вещественной и мнимой осям равны друг другу. Тем самым формула (15) доказана.

Пусть теперь $\varphi(z)$ — четная функция, принимающая вещественные значения на вещественной оси. Тогда и на мнимой оси она принимает вещественные значения. Приравнивая друг другу вещественные части в равенстве (15), мы получаем

$$\int_0^\infty \exp[-x^a \cos b] \cos(x^a \sin b)\, \varphi(x)\, dx =$$
$$= \int_0^\infty \exp[-y^a \cos b] \sin(y^a \sin b)\, \varphi(iy)\, dy. \tag{16}$$

Но это равенство есть лишь иная запись равенства (14), в чем легко убедиться, разлагая интеграл в левой части на интегралы по областям, где $\cos(x^a \sin b) > 0$ и $\cos(x^a \sin b) < 0$, а интеграл в правой части на интегралы по областям, где $\sin(x^a \sin b) > 0$ и $\sin(x^a \sin b) < 0$.

Таким образом, равенство (14) доказано для четных функций $\varphi(z)$, принимающих вещественные значения на вещественной оси.

Возьмем теперь любую четную функцию $\varphi(z)$ из пространства Z и представим ее в виде

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) + i\varphi_2(z),$$

где

$$\varphi_1(z) = \frac{\varphi(z) + \overline{\varphi(\bar z)}}{2} \quad \text{и} \quad \varphi_2(z) = \frac{\varphi(z) - \overline{\varphi(\bar z)}}{2i}.$$

Функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ являются четными функциями из пространства Z, принимающими вещественные значения на вещественной оси. Формула (14) справедлива для этих функций, а поэтому она справедлива и для функции $\varphi(z)$.

Таким образом, искомый пример построен.

§ 7. МУЛЬТИПЛИКАТИВНО ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ АЛГЕБРАХ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

1. Топологические алгебры с инволюцией. Как мы уже говорили, основные понятия, введенные и изученные в §§ 2—6 (положительность, мультипликативная положительность, положительная определенность), относятся по существу к теории топологических алгебр с инволюцией. Дадим основные определения, относящиеся к этим алгебрам.

Линейное пространство L называется *алгеброй с инволюцией*, если для его элементов определены операции умножения и перехода к сопряженному элементу x^* (инволюция), удовлетворяющие следующим аксиомам:

1) $(xy)z = x(yz)$;
2) $x(y+z) = xy + xz$; $(y+z)x = yx + zx$;
3) $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$;
4) $(x^*)^* = x$;
5) $(\lambda x + \mu y)^* = \bar\lambda x^* + \bar\mu y^*$,
6) $(xy)^* = y^* x^*$.

Алгебра L называется *коммутативной*, если умножение элементов коммутативно $xy = yx$. Если в алгебре L существует такой элемент e (единица алгебры), что $xe = ex = 1$, то L называется *алгеброй с единицей*.

Как правило, рассматриваются алгебры, являющиеся линейными топологическими пространствами. В этом случае от алгебраических операций (в том числе и от инволюции) требуется непрерывность в топологии пространства.

Если пространство L является нормированным, то и алгебра L называется *нормированной*. При этом от нормы, введенной в алгебру L, требуется выполнение следующих условий:

1) $\|xy\| \leqslant \|x\|\,\|y\|$,
2) $\|x^*\| = \|x\|$,

3) алгебра L полна относительно нормы $\|x\|$, т. е. из того, что $\lim\limits_{m, n \to \infty} \|x_n - x_m\| = 0$, вытекает существование элемента x этой алгебры, для которого

$$\lim_{n \to \infty} \|x - x_n\| = 0.$$

Пространства K и S, рассмотренные нами выше, становятся топологическими алгебрами с инволюцией, если в качестве умножения элементов взять, например, обычное умножение функций, а в качестве инволюции — переход от функции $\varphi(x)$ к функции $\overline{\varphi(x)}$. Топологической алгеброй с инволюцией является и пространство Z. Умножение в этой алгебре определяется как обычное умножение функций, а инволюция — как переход от функции $\varphi(z)$ к функции $\bar{\varphi}(z) = \overline{\varphi(\bar{z})}$ (легко видеть, что функция $\bar{\varphi}(z)$ также принадлежит этой алгебре).

Для алгебр с инволюцией понятие мультипликативно положительного линейного функционала определяется следующим образом.

Линейный функционал F в топологической алгебре с инволюцией L называется *мультипликативно положительным*, если для всех элементов x этой алгебры выполняется неравенство $(F, xx^*) \geqslant 0$.

Легко видеть, что мультипликативно положительные обобщенные функции в пространствах K и S представляют собой не что иное, как мультипликативно положительные линейные функционалы для соответствующих алгебр.

Понятие положительной определенности может также рассматриваться как частный случай мультипликативной положительности линейного функционала при соответствующем определении умножения элементов в алгебре.

Именно, если определить в пространстве S новое умножение элементов как свертку функций, а инволюцию как переход от функции $\varphi(x)$ к функции $\varphi^*(x) = \overline{\varphi(-x)}$, то мультипликативно положительными линейными функционалами для этой алгебры будут положительно определенные обобщенные функции.

В эту схему укладывается и понятие четно-положительной определенности. Именно, назовем произведением функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ функцию

$$\chi(x) = \\ = \sum \int \varphi(y_1, \ldots, y_n) \psi(x_1 \pm y_1, \ldots, x_n \pm y_n)\, dy_1 \ldots dy_n, \tag{1}$$

а инволюцию определим как переход от функции $\varphi(x)$ к функции $\varphi^*(x) = \overline{\varphi(-x)}$. Тогда мультипликативно положительными функционалами будут четно-положительно определенные обобщенные функции.

Полное описание мультипликативно положительных функционалов получено для нормированных алгебр с инволюцией. Для того чтобы описать мультипликативно положительные линейные функционалы в нормированных алгебрах с инволюцией, введем понятие симметрического гомоморфизма алгебры с инволюцией в поле комплексных чисел.

Симметрическим гомоморфизмом алгебры с инволюцией L в поле комплексных чисел называется линейный функционал M в этой алгебре, такой, что

$$(M, xy) = (M, x)\quad (M, y) \quad \text{и} \quad (M, x^*) = \overline{(M, x)}.$$

Для алгебр, состоящих из функций вещественного переменного, в которых умножение элементов определено как умножение функций, а инволюция — как переход от функции $\varphi(x)$ к функции $\overline{\varphi(x)}$, примером симметрического гомоморфизма может служить соответствие $\varphi(x) \to \varphi(x_0)$, где x_0 — некоторое вещественное число. Однако у некоторых алгебр есть и другие симметрические гомоморфизмы. Например, если ввести в пространства четных функций из Z или $S^{1/2}_{1/2}$ умножение при помощи формулы (1), а инволюцию понимать как переход от функции $\varphi(z)$ к функции $\overline{\varphi(-\bar{z})}$, то симметрическими гомоморфизмами будут все соответствия

$$\varphi(z_1, \ldots, z_n) \to \varphi(z_1^0, \ldots, z_n^0),$$

где $z_1^0, \ldots, z_n^0$ — вещественные или чисто мнимые числа.

Мы будем обозначать множество всех симметрических гомоморфизмов алгебры L в поле комплексных чисел через $\mathfrak{M}$. Очевидно, что каждому элементу x алгебры L соответствует функция $x(M) = (M, x)$, заданная на множестве $\mathfrak{M}$. Если алгебра L коммутативна и нормирована, то в множество $\mathfrak{M}$

можно ввести такую топологию, что все функции $x(M)$ будут непрерывны относительно этой топологии, а множество $\mathfrak{M}$ компактно в этой топологии.

При этом каждой положительной конечной мере $\sigma(M)$, заданной на множестве $\mathfrak{M}$, соответствует линейный функционал в алгебре L, определяемый равенством

$$(F_1, x) = \int x(M)\, d\sigma(M).$$

Для любого элемента x алгебры L имеем

$$(F_1, xx^*) = \int xx^*(\mu)\, d\sigma(\mu) = \int |x(\mu)|^2\, d\sigma(\mu) > 0.$$

Поэтому функционал F_1 мультипликативно положителен. Можно показать, что этим и исчерпывается множество мультипликативно положительных линейных функционалов для коммутативных нормированных алгебр с инволюцией. Точнее говоря, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Всякий мультипликативно положительный линейный функционал F на коммутативной нормированной алгебре с инволюцией L может быть единственным образом представлен в виде*

$$(F, x) = \int\limits_{\mathfrak{M}} x(M)\, d\sigma(M),$$

где $\sigma(M)$ — положительная мера на множестве $\mathfrak{M}$ симметричных гомоморфизмов алгебры L в поле комплексных чисел.

С доказательством этой теоремы читатель может познакомиться, например, по книгам М. А Наймарка «Нормированные кольца», стр. 245 или И. М. Гельфанда, Д. А. Райкова, Г. Е. Шилова «Коммутативные нормированные кольца», стр. 299.

2. Алгебра многочленов от двух переменных. Пользуясь теоремой 1, можно получить описание четно-положительно определенных непрерывных функций, растущих не быстрее, чем $e^{a|x|}$, $a > 0$. Методы, использованные в § 5, позволяют получить соответствующее описание для функций, растущих медленнее всех функций $e^{\varepsilon|x|^2}$, $\varepsilon > 0$, и, в частности, для всех функций, растущих не быстрее, чем $e^{a|x|}$. По-видимому, результаты § 5 могли бы быть получены, если бы удалось

построить достаточно развитую теорию топологических колец с инволюцией.

Однако для произвольных коммутативных алгебр с инволюцией, не являющихся нормированными, теорема, аналогичная теореме 1, вообще говоря, не имеет места. Существуют топологические алгебры с инволюцией, для которых некоторые мультипликативно положительные линейные функционалы не являются положительными. Примером такой алгебры является алгебра P многочленов от двух переменных. Эта алгебра состоит из всех многочленов вида

$$\varphi(x, y) = \sum_{k, l} a_{kl} x^k y^l.$$

Умножение в алгебре P определяется как обычное умножение многочленов, а инволюция — как переход от многочлена $\varphi(x, y)$ к многочлену

$$\bar{\varphi}(x, y) = \sum_{k, l} \bar{a}_{kl} x^k y^l.$$

Последовательность

$$\varphi_n(x, y) = \sum_{k, l} a_{kl}^{(n)} x^k y^l$$

многочленов алгебры P называется сходящейся к многочлену $\varphi(x, y) = \sum_{k, l} a_{kl} x^k y^l$, если все многочлены $\varphi_n(x, y)$ имеют ту же степень, что и $\varphi(x, y)$, причем для всех k и l выполняется соотношение

$$\lim_{n \to \infty} a_{kl}^{(n)} = a_{kl}.$$

Для задания гомоморфизма алгебры P в поле комплексных чисел достаточно указать значения x_0 и y_0, которые принимают при этом одночлены x и y (x_0 и y_0 могут быть и комплексными числами). При этом гомоморфизм задается формулой

$$f(x, y) \to \sum_{k, l=0} a_{kl} x_0^k y_0^l.$$

Очевидно, что такой гомоморфизм симметричен, если x_0 и y_0 — вещественные числа. Поэтому положительными элементами в алгебре P являются такие многочлены $\varphi(x, y)$, что $\varphi(x, y) \geqslant 0$ для всех вещественных значений x и y.

Д. Гильберт построил пример положительного многочлена от двух переменных, не являющегося линейной комбинацией многочленов вида $\psi(x, y)\overline{\psi(x, y)}$.

Этот пример строится следующим образом. Рассмотрим любые восемь точек $M_1, \ldots, M_8$ на плоскости, такие, что никакие три из них не лежат на одной прямой и никакие шесть из них не лежат на одной кривой второго порядка. Как доказывается в алгебраической геометрии, через эти точки можно провести бесконечное множество кривых третьего порядка, причем все эти кривые пересекаются в некоторой девятой точке M_9 (см. Уокер «Алгебраические кривые», теорема 6.2, на стр. 84). Покажем, что любой многочлен $f(x, y)$ шестой степени, являющийся суммой квадратов многочленов $\varphi_k(x, y)$ и обращающийся в нуль в точках $M_1, \ldots, M_8$, равен нулю и в точке M_9. В самом деле, пусть

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k^2(x, y) \quad \text{и} \quad f(M_1) = \ldots = f(M_8) = 0.$$

Тогда каждый из многочленов $\varphi_k(x, y)$ обращается в нуль в точках M_r, $1 \leqslant r \leqslant 8$. Но так как эти точки не лежат на одной кривой второго порядка, то все многочлены $\varphi_k(x, y)$ являются многочленами третьей степени. Кривые $\varphi_k(x, y) = 0$ проходят через точки $M_1, \ldots, M_8$. Тогда, как отмечалось выше, они проходят и через точку M_9, т. е. $\varphi_k(M_9) = 0$. Следовательно, и $f(M_9) = 0$.

Из доказанного утверждения следует, что любой многочлен шестой степени $f(x, y)$, равный нулю в точках M_r, $1 \leqslant r \leqslant 8$, и отличный от нуля в точке M_9, не может быть представлен в виде суммы квадратов. Покажем теперь, что существует многочлен шестой степени $f(x, y)$, принимающий положительные значения при всех x и y, равный нулю в точках M_k, $1 \leqslant k \leqslant 8$, и отличный от нуля в точке M_9. Этим и будет доказано существование положительного многочлена, не представимого в виде суммы квадратов многочленов.

Многочлен $f(x, y)$ строится следующим образом. Зафиксируем две кривые третьего порядка $\varphi(x, y) = 0$ и $\psi(x, y) = 0$, проходящие через точки M_k, $1 \leqslant k \leqslant 9$. Проведем через точки M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 кривую второго порядка $\alpha(x, y) = 0$, а через точки M_k, $1 \leqslant k \leqslant 8$, — кривую четвертого порядка $\beta(x, y) = 0$, для которой точки M_6, M_7, M_8 являются двойными. Покажем, что эти кривые не проходят через точку M_9. В самом деле, пусть $\alpha(M_9) = 0$. Возьмем тогда на кривой $\alpha(x, y) = 0$ любую точку N, отличную от точек M_k, и положим $\lambda = -\dfrac{\varphi(N)}{\psi(N)}$.

Кривая третьего порядка $\theta(x, y) = \varphi(x, y) + \lambda\psi(x, y) = 0$ проходит тогда через точки M_k, $1 \leqslant k \leqslant 9$ и N и имеет, таким образом, семь общих точек с кривой второго порядка $\alpha(x, y) = 0$. Но если кривые порядка m и n имеют более mn общих точек, то они имеют общую компоненту (Уокер «Алгебраические кривые», теорема 3.1, стр. 72). Этой компонентой может быть только кривая $\alpha(x, y) = 0$. Таким образом, кривая $\theta(x, y) = 0$ распадается на кривую второго порядка и прямую линию. Так как кривая $\alpha(x, y) = 0$ не проходит через точки M_6, M_7, M_8 (иначе шесть точек из точек M_k, $1 \leqslant k \leqslant 8$, лежали бы на кривой второго порядка), то точки M_6, M_7, M_8 должны лежать на второй компоненте кривой $\theta(x, y) = 0$ — на некоторой прямой. Но это противоречит выбору точек M_k.

Итак, мы доказали, что кривая $\alpha(x, y) = 0$ не проходит через точку M_9. Точно так же доказывается, что через точку M_9 не проходит и кривая $\beta(x, y) = 0$. Не теряя общности, мы можем считать, что $\alpha(M_9)\beta(M_9) > 0$.

Рассмотрим теперь кривую

$$\chi(x, y) = \varphi^2(x, y) + \psi^2(x, y) + p\alpha(x, y)\beta(x, y) = 0.$$

Многочлен $\chi(x, y)$ является многочленом шестой степени, равным нулю в точках M_k, $1 \leqslant k \leqslant 8$, и положительным в точке M_9. Поэтому он не может быть представлен в виде суммы квадратов нескольких многочленов. Нам осталось показать, что при некотором выборе постоянной $p \geqslant 0$ этот многочлен положителен. Для этого заметим, что при $p = 0$ многочлен $\chi(x, y)$ превращается в многочлен $\varphi^2(x, y) + \psi^2(x, y)$, для которого точки M_k, $1 \leqslant k \leqslant 9$, являются точками минимума, причем $\varphi^2(x, y) + \psi^2(x, y)$ обращается в этих точках в нуль. Для многочлена $\alpha(x, y)\beta(x, y)$ точки M_k, $1 \leqslant k \leqslant 8$, являются также стационарными точками, так как его частные производные обращаются в этих точках в нуль (в точках M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 обращаются в нуль оба многочлена $\alpha(x, y)$ и $\beta(x, y)$, а точки M_6, M_7, M_8 являются двойными точками для кривой $\beta(x, y) = 0$). Поэтому найдется такое число $p_0 > 0$, что при $0 \leqslant p \leqslant p_0$ многочлен $\varphi^2(x, y) + \psi^2(x, y) + p\alpha(x, y)\beta(x, y)$ имеет в точках M_k, $1 \leqslant k \leqslant 8$ минимум, равный нулю, а в точке M_9 положителен.

Мы можем найти такие круги Ω_k с центрами в точках M_k, $1 \leqslant k \leqslant 9$, что в области, составленной из этих кругов, многочлен $\chi(x, y)$ положителен при $0 < p \leqslant p_0$, причем он обращается в нуль лишь в точках M_k, $1 \leqslant k \leqslant 8$. Вне этих кругов функция имеет отличный от нуля минимум A. Поэтому при $p \leqslant A$ вне указанных кругов выполняется неравенство $\varphi^2(x, y) + \psi^2(x, y) \geqslant A\,|\,\alpha(x, y)\beta(x, y)\,|$. Но тогда при $0 \leqslant p \leqslant \min(p_0, M)$ многочлен $\chi(x, y)$ положителен.

Существование положительного многочлена от двух переменных, не представимого в виде суммы квадратов многочленов, доказано.

Можно доказать, что многочлен Гильберта $f(x, y)$ не только не является суммой квадратов многочленов, но и не может быть приближен в пространстве многочленов шестой степени суммами квадратов многочленов.

Обозначим теперь через T_6 конус в линейном пространстве P_6 многочленов шестой степени, состоящий из многочленов вида

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_k^2(x, y),$$

где $\varphi_k(x, y)$ — многочлены с вещественными коэффициентами. Многочлен Гильберта $f(x, y)$ не принадлежит замыканию этого конуса. Поэтому можно построить линейный функционал F в P_6, положительный на конусе T_6 и принимающий отрицательное значение на многочлене Гильберта $f(x, y)$. Этот функционал можно распространить на всю алгебру многочленов так, чтобы он принимал положительные значения для всех многочленов, представимых в виде суммы квадратов многочленов. В результате получается мультипликативно положительный, но не положительный линейный функционал в алгебре всех многочленов от двух переменных.

Рассмотренный пример показывает, что *для топологических колец с инволюцией понятия положительного и мультипликативно положительного линейного функционала, вообще говоря, не совпадают.* Было бы весьма важно выделить класс топологических колец, в которых эти понятия совпадают. Как мы видели, к таким кольцам относятся кольца K, S, Z, кольцо $S_{1/2}^{1/2}$ и другие кольца.

Пример Гильберта тесно связан с проблемой моментов для функций двух переменных. Эта проблема состоит в следующем. Даны числа μ_{jk}, $0 \leqslant j, k < \infty$. Требуется найти положительную меру σ, такую, что

$$\mu_{jk} = \int\int x^j y^k \, d\sigma(x, y).$$

Если проблема моментов имеет решение, то для любого многочлена

$$\varphi(x, y) = \sum_{j,\,k=0}^{n} a_{jk} x^j y^k,$$

принимающего положительные значения при всех вещественных x и y, выполняется неравенство

$$\sum_{j,\,k=0}^{n} a_{jk}\mu_{jk} = \sum_{j,\,k=0}^{n} a_{jk} \int\int x^j y^k \, d\sigma(x, y) = \\ = \int\int \varphi(x, y)\, d\sigma(x, y) \geqslant 0.$$

Иными словами, линейный функционал F в пространстве P многочленов от двух переменных, задаваемый формулой

$$\left(F, \sum_{j,\,k=0}^{n} a_{jk} x^j y^k\right) = \sum_{j,\,k=0}^{n} a_{jk}\mu_{jk}, \tag{2}$$

должен быть положительным. Можно показать, пользуясь теоремой о распространении положительных линейных функционалов (см. теорему 3 из § 6), что это условие является также и достаточным.

В случае функций одного переменного для разрешимости проблемы моментов оказывается достаточным более слабое требование мультипликативной положительности функционала F. Как показывает пример Гильберта, для функций двух переменных существуют мультипликативно положительные, но не положительные линейные функционалы. Поэтому выполнение условия

$$(F, \varphi^2(x, y)) \geqslant 0$$

для всех многочленов $\varphi(x, y)$, где F — линейный функционал, задаваемый формулой (2), уже не является достаточным для разрешимости проблемы моментов. Следует отметить, однако, что если наложить на рост моментов μ_{jk} известные ограничения, обеспечивающие возможность распространения функционала (2) с пространства многочленов на те или иные пространства целых функций, условие мультипликативной положительности становится не только необходимым, но и достаточным для разрешимости проблемы моментов. При этом решение проблемы моментов становится однозначным.

ГЛАВА III

ОБОБЩЕННЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ОБОБЩЕННЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ ПРОЦЕССАМИ

1. Случайные величины. Мы предполагаем, что читатель знаком с основными понятиями теории вероятностей. Однако, поскольку понятие случайной величины является основным для этой главы и поскольку определение этого понятия, которое будет использовано в этой книге, внешне отличается от общепринятого, мы начнем с определения случайной величины.

Будем говорить, что задана одна *случайная величина* ξ, если для любого вещественного числа x задано число $\mathsf{P}(x)$, называемое *вероятностью события* $\xi < x$, со следующими свойствами:

1) $\mathsf{P}(x_1) \leqslant \mathsf{P}(x_2)$, если $x_1 \leqslant x_2$,

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathsf{P}(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} \mathsf{P}(x) = 1$,

3) $\lim\limits_{x \to a-0} \mathsf{P}(x) = \mathsf{P}(a)$.

Задание функции $\mathsf{P}(x)$ однозначно определяет вероятность $\mathsf{P}(X)$ принадлежности случайной величины ξ борелевскому множеству X.

Если рассматривается несколько случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$, то задание распределения вероятностей для каждой из этих величин уже не является достаточным. Необходимо задать и вероятности $\mathsf{P}(x_1, \ldots, x_n)$ одновременного выполнения неравенств $\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n$. Этими вероятностями однозначно определяется вероятность $\mathsf{P}(X)$ принадлежности точки $\xi \equiv (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ борелевскому множеству X n-мерного

пространства R_n. Мы будем называть совокупность $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ n-мерной случайной величиной.

Разумеется, задание вероятностей $\mathsf{P}(x_1, \ldots, x_n)$ однозначно определяет распределение вероятностей каждой случайной величины ξ_k. Оно дается формулой

$$\mathsf{P}(x_k) = \mathsf{P}(\infty, \ldots, x_k, \ldots, \infty).$$

Аналогично можно найти распределение вероятностей и для любого подмножества $\xi_{k_1}, \ldots, \xi_{k_r}$ наших случайных величин. Для этого надо в функции $\mathsf{P}(x_1, \ldots, x_n)$ заменить символом ∞ те значения x_k, для которых k отлично от $k_1, \ldots, k_r$.

Рассмотрим теперь бесконечное множество случайных величин $\{\xi_\alpha\}$. В этом случае мы для любого конечного набора $\xi_1, \ldots, \xi_n$ будем задавать вероятность $\mathsf{P}(x_1, \ldots, x_n)$ выполнения неравенств $\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n$ *). Эти вероятности должны быть согласованы друг с другом в том смысле, что для любых случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta$ вероятность $\mathsf{P}(x_1, \ldots, x_n)$ выполнения неравенств

$$\xi_k < x_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n \tag{1}$$

должна совпадать с вероятностью $\mathsf{P}(x_1, \ldots, x_n, \infty)$ выполнения неравенств

$$\xi_k < x_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$
$$\eta < +\infty.$$

Иными словами, наложение условия вида $\eta < +\infty$ не меняет вероятности выполнения неравенств (1).

Итак, *множество случайных величин* $\{\xi_\alpha\}$ *считается заданным, если для любого конечного набора величин* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *указано совместное распределение вероятностей* $\mathsf{P}(x_1, \ldots, x_n)$, *причем эти распределения вероятностей согласованы друг с другом.*

Введем теперь понятие *равенства двух случайных величин* ξ и η. Мы будем говорить, что $\xi = \eta$, если для любых вещественных чисел $a < b$ вероятность *одновременного* выполнения неравенств

$$a \leqslant \xi < b,$$
$$a \leqslant \eta < b$$

*) Разумеется, вероятность $\mathsf{P}(x_1, \ldots, x_n)$ зависит от того, какие случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ из числа $\{\xi_\alpha\}$ мы рассматриваем.

совпадает как с вероятностью выполнения неравенства $a \leqslant \xi < b$, так и с вероятностью выполнения неравенства $a \leqslant \eta < b$. Таким образом, если обозначить через $\mathsf{P}(X, Y)$ вероятность того, что $\xi \in X$, $\eta \in Y$, а через $\mathsf{P}_1(X)$ — вероятность того, что $\xi \in X$, то равенство $\xi = \eta$ означает, что $\mathsf{P}(X, X) = \mathsf{P}_1(X)$. Далее, *если* $X \cap Y = 0$ *и* $\xi = \eta$, *то* $\mathsf{P}(X, Y) = 0$. В самом деле, по условию согласованности

$$\mathsf{P}_1(X) = \mathsf{P}(X, R_1),$$

где R_1 — вещественная ось. Но

$$\mathsf{P}(X, R_1) = \mathsf{P}(X, X) + \mathsf{P}(X, R_1 - X),$$

а по определению равенства случайных величин $\mathsf{P}_1(X) = \mathsf{P}(X, X)$. Из этих соотношений следует, что $\mathsf{P}(X, R_1 - X) = 0$. Поскольку $Y \subset R_1 - X$, то тем более $\mathsf{P}(X, Y) = 0$.

Чтобы доказать естественность данного нами определения равенства случайных величин, докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть* $\xi = \eta$. *Тогда, каковы бы ни были случайные величины* $\xi_1, \ldots, \xi_n$, *вероятность* $\mathsf{P}(x_1, \ldots, x_n, x)$ *выполнения неравенств*

$$\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n, \xi < x, \tag{2}$$

совпадает с вероятностью $\mathsf{P}_1(x_1, \ldots, x_n, x)$ *выполнения неравенств*

$$\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n, \eta < x. \tag{3}$$

Доказательство. Мы докажем, что как вероятность $\mathsf{P}(x_1, \ldots, x_n, x)$, так и вероятность $\mathsf{P}_1(x_1, \ldots, x_n, x)$ совпадают с вероятностью $\mathsf{P}(x_1, \ldots, x_n, x, x)$ одновременного выполнения неравенств $\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n$, $\xi < x$, $\eta < x$. В самом деле, мы показали, что из равенства $\xi = \eta$ вытекает равенство нулю вероятности одновременного выполнения неравенств $\xi < x$ и $\eta \geqslant x$. Тем более равна нулю вероятность $\overline{\mathsf{P}}(x_1, \ldots, x_n, x, x)$ одновременного выполнения неравенств

$$\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n, \xi < x, \eta \geqslant x.$$

Но из условия согласованности следует, что

$$\mathsf{P}(x_1, \ldots, x_n, x) = \mathsf{P}(x_1, \ldots, x_n, x, \infty),$$

где через $\mathsf{P}(x_1, \ldots, x_n, x, \infty)$ обозначена вероятность выполнения неравенств

$$\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n, \xi < x, \eta < \infty.$$

Так как

$$\mathsf{P}(x_1, \ldots, x_n, x, \infty) = \\ = \mathsf{P}(x_1, \ldots, x_n, x, x) + \overline{\mathsf{P}}(x_1, \ldots, x_n, x, x)$$

а

$$\overline{\mathsf{P}}(x_1, \ldots, x_n, x, x) = 0,$$

то

$$\mathsf{P}(x_1, \ldots, x_n, x) = \mathsf{P}(x_1, \ldots, x_n, x, x).$$

Точно так же доказывается, что и вероятность $\mathsf{P}_1(x_1, \ldots, x_n, x)$ выполнения неравенств (3) совпадает с $\mathsf{P}(x_1, \ldots, x_n, x, x)$, и, значит, соотношение

$$\mathsf{P}(x_1, \ldots, x_n, x) = \mathsf{P}_1(x_1, \ldots, x_n, x)$$

доказано.

Аналогично доказывается, что если $\xi_1 = \eta_1, \ldots, \xi_n = \eta_n$, то вероятность $\mathsf{P}(X)$ выполнения условия $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in X$ совпадает с вероятностью $\mathsf{P}_1(X)$ того, что $(\eta_1, \ldots, \eta_n) \in X$.

В дальнейшем мы не будем различать равные случайные величины.

Пусть теперь $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторая измеримая функция от аргументов $x_1, \ldots, x_n$, а $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — случайные величины. Мы определим случайную величину $\eta = f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, т. е. укажем для любых случайных величин $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ вероятность того, что точка $(\zeta_1, \ldots, \zeta_m, \eta)$ принадлежит заданному множеству $\tilde{Z}$ $(n+1)$-мерного пространства R_{n+1}. Разумеется, достаточно указать эту вероятность лишь для множеств вида $\tilde{Z} = Z \times Y$, где Z — некоторое множество в m-мерном пространстве, Y — множество на вещественной прямой, а через $Z \times Y$ обозначено множество таких точек $(z_1, \ldots, z_m; y)$, что $(z_1, \ldots, z_m) \in Z$, $y \in Y$.

Рассмотрим $(n+m)$-мерное пространство R_{n+m} и обозначим через W множество всех точек $(z_1, \ldots, z_m; x_1, \ldots, x_n)$ в R_{n+m}, таких, что $(z_1, \ldots, z_m) \in Z$ и $f(x_1, \ldots, x_n) \in Y$.

Положим теперь

$$\mathsf{P}_1(\tilde{Z}) = \mathsf{P}_1(Z \times Y) = \mathsf{P}(W),$$

где через $\mathsf{P}(W)$ обозначена вероятность того, что

$$(z_1, \ldots, z_m; \ x_1, \ldots, x_n) \in W.$$

Мы примем $\mathsf{P}_1(\tilde{Z})$ за распределение вероятностей случайной величины $(\zeta_1, \ldots, \zeta_m, \eta)$. Тем самым определены совместные распределения вероятностей случайной величины $\eta = f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ с любыми случайными величинами $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$, т. е. определена случайная величина $\eta = f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Если

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m &= f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

— функции от переменных $x_1, \ldots, x_n$, то при помощи данного нами определения легко найти распределение вероятностей случайной величины $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$, где положено

$$\eta_k = f_k(\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Оно задается формулой

$$\mathsf{P}_1(Y) = \mathsf{P}(X),$$

где через X обозначено множество всех значений $x_1, \ldots, x_n$, таких, что $(y_1, \ldots, y_m) \in Y$, а через $\mathsf{P}(X)$ — вероятность выполнения условия $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in X$.

Укажем формулу для среднего значения случайной величины $\eta = f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Если обозначить через $\mathsf{P}_1(y)$ вероятность неравенства $\eta < y$, то по определению среднего значения случайной величины имеет место равенство *)

$$\mathsf{E}\eta = \int y \, d\mathsf{P}_1(y). \tag{4}$$

Но по данному нами определению функции от случайных аргументов вероятность $\mathsf{P}_1(y)$ совпадает с вероятностью

*) Через $\mathsf{E}\eta$ мы обозначаем среднее значение случайной величины η.

выполнения неравенства $f(x_1, \ldots, x_n) < y$. Поэтому

$$\mathsf{E}\eta = \int f(x_1, \ldots, x_n) \, d\mathsf{P}(x_1, \ldots, x_n),$$

где $\mathsf{P}(X)$ — распределение вероятностей случайной величины $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Например, среднее значение произведения случайных величин ξ_1 и ξ_2 задается интегралом

$$\mathsf{E}(\xi_1 \xi_2) = \int x_1 x_2 \, d\mathsf{P}(x_1, x_2),$$

где $\mathsf{P}(x_1, x_2)$ — вероятность выполнения неравенств $\xi_1 < x_1$, $\xi_2 < x_2$. Среднее же значение случайной величины $e^{i\lambda\xi}$ задается интегралом

$$\mathsf{E}(e^{i\lambda\xi}) = \int e^{i\lambda x} \, d\mathsf{P}(x).$$

Выражение $\mathsf{E}(e^{i\lambda\xi})$ называют *характеристической функцией* случайной величины ξ.

Перейдем теперь к определению предела последовательности случайных величин. Пусть дана последовательность $\{\xi_{k1}, \ldots, \xi_{kn}\}$ n-мерных случайных величин. Мы будем говорить, что эта последовательность сходится к n-мерной случайной величине $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, если для любых случайных величин $\eta_1, \ldots, \eta_m$ и любой ограниченной непрерывной функции $f(x_1, \ldots, x_n; \ y_1, \ldots, y_m)$ выполняется равенство

$$\lim_{k \to \infty} \int f(x_1, \ldots, x_n; \ y_1, \ldots, y_m) \, d\mathsf{P}_k(x; y) =$$
$$= \int f(x_1, \ldots, x_n; \ y_1, \ldots, y_m) \, d\mathsf{P}(x, y),$$

где через $\mathsf{P}_k(x, y)$ обозначена мера в R_{n+m}, соответствующая случайной величине $(\xi_{k1}, \ldots, \xi_{kn}; \ \eta_1, \ldots, \eta_m)$, а через $\mathsf{P}(x, y)$ — мера в R_{n+m}, соответствующая случайной величине $(\xi_1, \ldots, \xi_n; \ \eta_1, \ldots, \eta_m)$ *).

Введем далее понятие случайной функции, или, иначе, случайного процесса. Пусть каждому вещественному числу t сопоставлена случайная величина $\xi(t)$ (т. е. иными словами, пусть для любых n вещественных чисел $t_1, \ldots, t_n$ задано совместное распределение вероятностей случайных величин

*) Мерой множества X, соответствующей случайной величине $\xi_1, \ldots, \xi_n$, мы называем вероятность включения $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in X$.

$\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)$, удовлетворяющее условию согласованности). Мы будем говорить в этом случае, что нам задана *случайная функция* $\xi(t)$. Для случайных функций можно ввести понятия непрерывности, интеграла, производной аналогично тому, как это делается для обычных функций. Например, случайная функция $\xi(t)$ называется непрерывной, если из того, что $\lim\limits_{k\to\infty} t_{kj} = t_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, вытекает равенство

$$\lim_{k\to\infty}(\xi(t_{k1}), \ldots, \xi(t_{kn})) = (\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)).$$

Если $\xi(t)$ — непрерывная случайная функция, а $\varphi(t)$ — непрерывная финитная скалярная функция, то существует интеграл

$$\int \varphi(t)\xi(t)\,dt,$$

понимаемый как предел интегральных сумм

$$\int \varphi(t)\xi(t)\,dt = \lim_{\max \Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{n} \varphi(t_k)\xi(t_k)\Delta t_k.$$

Мы не останавливаемся подробнее на теории случайных функций, поскольку основные результаты этой теории будут получены ниже как частные случаи более общей теории.

В заключение укажем, что наряду с вещественными случайными величинами можно рассматривать случайные величины, принимающие комплексные значения. В этом случае задаются вероятности того, что точка $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ принадлежит заданной области n-мерного комплексного пространства, причем эти вероятности должны удовлетворять условию согласованности.

2. Обобщенные случайные процессы. Перейдем теперь к определению основного понятия этой главы — понятия обобщенного случайного процесса. Рассмотрим пространство K бесконечно дифференцируемых финитных функций $\varphi(t)$. Мы будем говорить, что задан *случайный функционал* Φ в этом пространстве, если каждому элементу $\varphi(t)$ пространства K сопоставлена случайная величина $\Phi(\varphi)$. В соответствии со сказанным в п. 1, это означает, что для каждых n элементов $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ пространства K указана вероятность одновременного выполнения неравенств

$$a_k \leqslant \Phi(\varphi_k) < b_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

причем распределения вероятностей согласованы друг с другом в указанном смысле.

Случайный функционал $\Phi(\varphi)$ называется *линейным*, если для любых элементов φ и ψ из пространства K и любых чисел α и β выполняется равенство

$$\Phi(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha\Phi(\varphi) + \beta\Phi(\psi)$$

(относительно определения равенства случайных величин см. п. 1). Наконец, случайный функционал $\Phi(\varphi)$ называется *непрерывным*, если из того, что функции $\varphi_{kj}(t)$ сходятся к $\varphi_j(t)$ в пространстве K $(1 \leqslant j \leqslant n)$, вытекает равенство

$$\lim_{k\to\infty}(\Phi(\varphi_{k1}), \ldots, \Phi(\varphi_{kn})) = (\Phi(\varphi_1), \ldots, \Phi(\varphi_n)).$$

Поскольку мы не рассматриваем иных случайных величин, кроме величин вида $\Phi(\varphi)$, то непрерывность Φ означает следующее.

Если $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_{kj}(t) = \varphi_j(t)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, то для любой непрерывной ограниченной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет место равенство

$$\lim_{k\to\infty} \int f(x_1, \ldots, x_n)\,d\mathsf{P}_k(x) = \int f(x_1, \ldots, x_n)\,d\mathsf{P}(x),$$

где через $\mathsf{P}(x)$ обозначена мера, соответствующая случайной величине $(\Phi(\varphi_1), \ldots, \Phi(\varphi_n))$, а через $\mathsf{P}_k(x)$ — мера, соответствующая случайной величине $(\Phi(\varphi_{k1}), \ldots, \Phi(\varphi_{kn}))$.

Подобно тому как непрерывный линейный функционал в пространстве K называют обобщенной функцией, непрерывный линейный случайный функционал в пространстве K мы будем называть *обобщенной случайной функцией*. В случае, когда пространство K состоит из функций одного переменного, соответствующую случайную функцию называют *обобщенным случайным процессом*. В случае же, когда пространство K есть пространство функций многих переменных, Φ называют *обобщенным случайным полем*.

Остановимся теперь на физических истоках понятия обобщенной случайной функции. Обычное понятие случайной функции, приведенное нами в конце п. 1, основано на предположении о возможности измерять значения случайной функции в каждый момент времени t без учета значений этой функции в другие моменты времени. Однако каждое реальное измерение производится при помощи прибора, имеющего некоторую инерцию. Поэтому показания прибора дают не значения самой случайной величины $\xi(t)$ в момент времени t, а некоторое усредненное значение $\Phi(\varphi)=\int\varphi(t)\xi(t)\,dt$, где $\varphi(t)$ — функция, характеризующая прибор. Эти величины согласованы друг с другом и линейно зависят от φ. Кроме того, при малом изменении функции $\varphi(t)$ случайная величина $\Phi(\varphi)$ мало меняется (мало отличающиеся друг от друга приборы дают близкие показания). Таким образом, в результате измерения значений случайной функции при помощи приборов мы получаем непрерывный линейный случайный функционал $\Phi(\varphi)$, т. е. обобщенный случайный процесс.

В результате сглаживающего действия приборов можно, таким образом, получить распределение вероятностей не только когда оно существует в каждый момент времени t, но и для «обобщенных» процессов, у которых распределения вероятностей в отдельные моменты времени не существует. Типичный пример таких процессов (скорость броуновской частицы, не имеющей инерции) будет рассмотрен нами в п. 3. Это аналогично тому, что значения обобщенных функций F в отдельных точках могут не существовать, однако интегралы вида $(F,\varphi)=\int F(t)\varphi(t)\,dt$ существуют.

3. Примеры обобщенных случайных процессов. Приведем примеры обобщенных случайных процессов. Более подробно эти примеры изложены в § 2, п. 5. Сопоставим линейно независимым функциям $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$ из пространства K случайную величину $(\Phi(\varphi_1),\ldots,\Phi(\varphi_n))$ с распределением вероятностей

$$\mathrm{P}_\varphi(X)=\frac{\sqrt{\det\Lambda_\varphi}}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_X e^{-\frac{1}{2}(\Lambda_\varphi x,\,x)}\,dx, \tag{5}$$

где Λ_φ — матрица, обратная матрице $\|b_{jk}\|$, состоящей из чисел

$$b_{jk}=\int\varphi_j(t)\varphi_k(t)\,dt.$$

Можно показать, что эти случайные величины согласованы друг с другом и линейно и непрерывно зависят от $\varphi(t)$. Обобщенный случайный процесс, задаваемый распределением вероятностей (5), называется *единичным* процессом. Этот процесс можно истолковать как результат измерения некоторым прибором скорости частицы, совершающей одномерное броуновское движение и не имеющей инерции. Единичный случайный процесс не является обычным случайным процессом, поскольку скорость броуновской частицы в каждый данный момент времени не имеет распределения вероятностей. Поэтому не существует такой непрерывной случайной функции $\xi(t)$, что $\Phi(\varphi)=\int\varphi(t)\xi(t)\,dt$.

Отметим, что путь, пройденный броуновской частицей, также является случайной функцией времени. Однако на этот раз для любых n моментов времени $0\leqslant t_1<\ldots<t_n$ можно указать распределение вероятностей для n-мерной случайной величины $(\xi(t_1),\ldots,\xi(t_n))$, где $\xi(t)$ — координата частицы в момент времени t. Именно, если $\xi(0)=0$, то при соответствующем выборе единиц измерения вероятность того, что $(\xi(t_1),\ldots,\xi(t_n))\in X$ выражается интегралом

$$\mathrm{P}(X)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{t_1(t_2-t_1)\ldots(t_n-t_{n-1})}}\times$$
$$\times\int\limits_X e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x_1^2}{t_1}+\frac{(x_2-x_1)^2}{t_2-t_1}+\ldots+\frac{(x_n-x_{n-1})^2}{t_n-t_{n-1}}\right]}\,dx_1\ldots dx_n. \tag{6}$$

Можно показать, что обобщенный случайный процесс, соответствующий случайной функции $\xi(t)$, с распределением вероятностей (6), сопоставляет функциям $\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)$ случайную величину $(\Phi(\varphi_1),\ldots,\Phi(\varphi_n))$ с распределением вероятностей

$$\mathrm{P}(X)=\frac{\sqrt{\det\Lambda_\varphi}}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_X e^{-\frac{1}{2}(\Lambda_\varphi x,\,x)}\,dx.$$

Здесь Λ_φ — матрица, обратная матрице $B=\|b_{jk}\|$, состоящей из чисел $b_{jk}=B(\varphi_j,\varphi_k)$, где

$$B(\varphi,\psi)=\int[\hat\varphi(t)-\hat\varphi(\infty)][\hat\psi(t)-\hat\psi(\infty)]\,dt,$$

$$\hat\varphi(t)=\int\limits_0^t\varphi(t)\,dt,\qquad \hat\psi(t)=\int\limits_0^t\psi(t)\,dt.$$

Этот случайный процесс называется *винеровским*.

Точно так же можно построить примеры обобщенных случайных полей. Например, аналогом единичного обобщенного случайного процесса является *единичное случайное поле* Φ. Если $\varphi_k(x)=\varphi_k(x_1, \ldots, x_m)$, $1 \leqslant k \leqslant n$ — функции из пространства K, то единичное случайное поле сопоставляет им случайную величину $(\Phi(\varphi_1), \ldots, \Phi(\varphi_n))$ с распределением вероятностей, задаваемым той же формулой (5), что и для единичного случайного процесса. Единственное различие состоит в том, что числа b_{jk} определяются формулой

$$b_{jk}=\int \varphi_j(x_1, \ldots, x_n)\varphi_k(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n.$$

4. Операции над обобщенными случайными процессами. Операции над обобщенными случайными процессами определяются аналогично тому, как это делается для обобщенных функций. Например, под *линейной комбинацией* $\alpha\Phi_1+\beta\Phi_2$ обобщенных случайных процессов Φ_1 и Φ_2 понимают обобщенный случайный процесс Φ, сопоставляющий каждой функции $\varphi(t)$ из пространства K случайную величину $\alpha\Phi_1(\varphi)+\beta\Phi_2(\varphi)$. Таким образом, множество всех обобщенных случайных процессов образует линейное пространство.

Обычно операции над обобщенными случайными процессами определяются при помощи соответствующих операций над основными функциями $\varphi(t)$. Так, под *произведением $f(t)\Phi$ бесконечно дифференцируемой функции $f(t)$ на обобщенный случайный процесс* Φ мы понимаем процесс, при котором функции $\varphi(t)$ из пространства K соответствует случайная величина $\Phi(f\varphi)$. Точно так же под *производной* Φ' обобщенного случайного процесса Φ мы понимаем процесс, при котором функции $\varphi(t)$ соответствует случайная величина $-\Phi(\varphi')$.

Заметим, что, в то время как производная обычного случайного процесса может уже не являться случайным процессом того же типа, производная обобщенного случайного процесса всегда существует и является обобщенным случайным процессом. В частности, хотя производная винеровского случайного процесса не является обычным случайным процессом, она является обобщенным случайным процессом.

Рассмотрим, наконец, понятие *сдвига* обобщенного случайного процесса. Если Φ — обобщенный случайный процесс, то под его сдвигом на число h мы понимаем случайный процесс Φ_h, сопоставляющий каждой функции $\varphi(t)$ случайную величину $\Phi_h(\varphi)=\Phi[\varphi(t-h)]$. Нетрудно показать, что имеет место равенство

$$\Phi'=\lim_{h\to\infty}\frac{\Phi_h-\Phi}{h},$$

однако мы не будем на этом останавливаться.

§ 2. МОМЕНТЫ ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ. ГАУССОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ФУНКЦИОНАЛ

1. Среднее значение обобщенного случайного процесса. Если Φ — обобщенный случайный процесс, то каждой функции $\varphi(t)$ из пространства K соответствует случайная величина $\Phi(\varphi)$. Предположим, что все случайные величины $\Phi(\varphi)$ имеют средние значения $m(\varphi)$, непрерывно зависящие от φ. Тогда $m(\varphi)$ является *непрерывным функционалом* в пространстве K. Мы будем называть этот функционал *средним значением обобщенного случайного процесса* Φ. Таким образом, среднее значение обобщенного случайного процесса Φ задается формулой *)

$$m(\varphi)=\mathsf{E}[\Phi(\varphi)]=\int x\,d\,\mathsf{P}(x)$$

(через $\mathsf{P}(x)$ мы обозначили вероятность неравенства $\Phi(\varphi)\leqslant x$).

Очевидно, что функционал $m(\varphi)$ линеен, ибо по определению случайная величина $\Phi(a\varphi_1+b\varphi_2)$ равна случайной величине $a\Phi(\varphi_1)+b\Phi(\varphi_2)$, а потому

$$m(a\varphi_1+b\varphi_2)=\mathsf{E}[\Phi(a\varphi_1+b\varphi_2)]=\mathsf{E}[a\Phi(\varphi_1)+b\Phi(\varphi_2)]= \\ =a\mathsf{E}[\Phi(\varphi_1)]+b\mathsf{E}[\Phi(\varphi_2)]=am(\varphi_1)+bm(\varphi_2).$$

Итак, функционал $m(\varphi)$ является линейным функционалом в пространстве K, т. е. обобщенной функцией.

Среднее значение обобщенного случайного процесса $\Phi(\varphi)-m(\varphi)$ равно нулю. Каждый обобщенный случайный процесс является суммой линейного функционала $m(\varphi)$ и процесса с нулевым средним значением.

*) Среднее значение случайной величины ξ мы будем обозначать через $\mathsf{E}\xi$.

Корреляционным функционалом случайного процесса называют среднее значение случайной величины $\Phi(\varphi)\Phi(\psi)$, если оно существует для любых φ и ψ и непрерывно зависит от каждого из аргументов φ и ψ. Итак, корреляционный функционал $B(\varphi, \psi)$ процесса Φ задается равенством

$$B(\varphi, \psi) = \mathsf{E}\,[\Phi(\varphi)\Phi(\psi)].$$

Это равенство можно иначе переписать в виде

$$B(\varphi, \psi) = \int x_1 x_2\, d\mathsf{P}(x_1, x_2),$$

где через $\mathsf{P}(x_1, x_2)$ обозначено совместное распределение вероятностей случайных величин $\Phi(\varphi)\Phi(\psi)$.

Из линейности случайного функционала $\Phi(\varphi)$ вытекает, что $B(\varphi, \psi)$ является билинейным функционалом.

Функционал $B(\varphi, \psi)$ задает связь между показаниями приборов, характеризующихся функциями $\varphi(t)$ и $\psi(t)$.

Поскольку случайная величина $[\Phi(\varphi)]^2$ положительна, то и ее среднее значение $B(\varphi, \varphi) = \mathsf{E}\,[\Phi(\varphi)\Phi(\varphi)]$ также положительно, $B(\varphi, \varphi) \geqslant 0$. Поэтому корреляционный фукционал $B(\varphi, \psi)$ положительно определен *). Более того, положительно определен и функционал $C(\varphi, \psi)$, задаваемый равенством

$$C(\varphi, \psi) = B(\varphi, \psi) - m(\varphi)\, m(\psi),$$

где $m(\varphi)$ — среднее значение процесса Φ.

В самом деле,

$$C(\varphi, \varphi) = B(\varphi, \varphi) - m(\varphi)\, m(\varphi) = \mathsf{E}\,[\Phi(\varphi)\Phi(\varphi)] - \\ - 2\mathsf{E}\,[\Phi(\varphi)]\, m(\varphi) + m^2(\varphi) = \mathsf{E}\,[\,|\Phi(\varphi) - m(\varphi)|^2] \geqslant 0.$$

Моментом n-го порядка обобщенного случайного процесса Φ называют полилинейный функционал, равный среднему значению случайной величины $\Phi(\varphi_1)\cdot\ldots\cdot\Phi(\varphi_n)$, т. е. $m\,[\Phi(\varphi_1)\ldots\Phi(\varphi_n)]$. Он задается интегралом

$$m\,[\Phi(\varphi_1)\ldots\Phi(\varphi_n)] = \int x_1 \ldots x_n\, d\mathsf{P}(x_1, \ldots, x_n),$$

где P — мера, соответствующая n-мерной случайной величине

$$\{\Phi(\varphi_1), \ldots, \Phi(\varphi_n)\}\ ^*).$$

По теореме 5′ из гл. I, § 1, п. 3 каждый полилинейный функционал F в пространстве K может быть записан в виде

$$F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = (F_0, \varphi_1(t_1)\cdot\ldots\cdot\varphi_n(t_n)),$$

где F_0 — линейный функционал (обобщенная функция) в пространстве K_n бесконечно дифференцируемых финитных функций от n переменных. Таким образом, n-й момент обобщенного случайного процесса Φ задается обобщенной функцией F_0 от n переменных. В частности, корреляционный функционал $B(\varphi, \psi)$ задается обобщенной функцией $B(t_1, t_2)$ от двух переменных.

2. Гауссовские процессы. Одним из важных классов обобщенных случайных процессов являются гауссовские случайные процессы. Мы рассмотрим сначала вещественные гауссовские процессы. Обобщенный случайный процесс называют *собственным гауссовским процессом*, если для любых линейно независимых функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ из пространства K случайная величина $\{\Phi(\varphi_1), \ldots, \Phi(\varphi_n)\}$ распределена по гауссовскому закону. Это означает, что вероятность того, что $\{\Phi(\varphi_1), \ldots, \Phi(\varphi_n)\} \in X$, выражается формулой

$$\mathsf{P}(X) = \frac{\sqrt{\det \Lambda}}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_X e^{-\frac{1}{2}(\Lambda x,\, x)}\, dx, \qquad (1)$$

где $\Lambda = \|\lambda_{ij}\|$ — положительно определенная невырожденная матрица, а через $(\Lambda x, x)$ обозначена квадратичная форма

$$(\Lambda x, x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i x_j.$$

---

*) Для комплексных обобщенных случайных процессов корреляционный функционал определяется равенством

$$B(\varphi, \psi) = \mathsf{E}\,[\Phi(\varphi)\overline{\Phi(\psi)}]$$

и является положительно определенным эрмитовым функционалом.

*) Среднее значение процесса Φ является моментом первого порядка. Корреляционный функционал $B(\varphi, \psi)$ совпадает с моментом второго порядка.

Простой подсчет показывает, что $\mathsf{P}(R_n)=1$. В самом деле, так как матрица Λ положительно определена, ее можно записать в виде $\Lambda = C'C$, где C — квадратная матрица, а C' — транспонированная матрица. Поэтому $(\Lambda x, x) = (Cx, Cx)$. Сделаем в интеграле

$$\mathsf{P}(R_n) = \frac{\sqrt{\det\Lambda}}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-\frac{1}{2}(\Lambda x, x)}\, dx$$

подстановку $Cx = y$. Так как $\det C = \sqrt{\det\Lambda}$, мы получим, что

$$\mathsf{P}(R_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-\frac{1}{2}(y, y)}\, dy = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-\frac{1}{2}\left(y_1^2+\ldots+y_n^2\right)}\, dy_1 \ldots dy_n.$$

Поскольку $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y_k^2}\, dy_k = \sqrt{2\pi}$, мы и приходим к равенству $\mathsf{P}(R_n) = 1$.

Мы докажем сейчас, что распределение вероятностей $\mathsf{P}(X)$ однозначно определяется корреляционным функционалом $B(\varphi, \psi)$ процесса Φ. Именно, *если Φ — собственный гауссовский процесс, то для любых линейно независимых функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ из K имеет место равенство* $\Lambda = \|B(\varphi_i, \varphi_j)\|^{-1}$. Для доказательства этого утверждения вычислим двумя способами значение $\mathsf{E}[\Phi(\varphi_i)\Phi(\varphi_j)]$.

По определению корреляционного функционала мы имеем

$$\mathsf{E}[\Phi(\varphi_i)\Phi(\varphi_j)] = B(\varphi_i, \varphi_j). \tag{2}$$

Но случайную величину $\Phi(\varphi_i)\Phi(\varphi_j)$ можно рассматривать и как функцию n-мерной случайной величины, распределение вероятностей которой задается формулой (1). Поэтому

$$\mathsf{E}[\Phi(\varphi_i)\Phi(\varphi_j)] = \frac{\sqrt{\det\Lambda}}{(2\pi)^{n/2}} \int x_i x_j e^{-\frac{1}{2}(\Lambda x, x)}\, dx. \tag{3}$$

Для вычисления интеграла (3) мы воспользуемся формулой

$$\frac{\sqrt{\det C}}{(2\pi)^{n/2}} \int (Ax, x)\, e^{-\frac{1}{2}(Cx, x)}\, dx = \mathrm{Tr}\left(AC^{-1}\right)\,^{*}), \tag{4}$$

*) Под $\mathrm{Tr}\, B$ мы понимаем след матрицы B, т. е. сумму ее диагональных элементов.

справедливой для любой строго положительно определенной матрицы C и любой матрицы A (доказательство формулы (4) см. ниже). Так как $x_i x_j = (A_{ij}x, x)$, где A_{ij} — матрица, все элементы которой равны нулю, за исключением элемента a_{ij}, равного единице, то интеграл (3) равен $\mathrm{Tr}\left(A_{ij}\Lambda^{-}\right)$.

Но $A_{ij}\Lambda^{-1}$ является матрицей, все строки которой равны нулю, за исключением i-й строки, совпадающей с j-й строкой матрицы Λ^{-1}. Поэтому $\mathrm{Tr}\left(A_{ij}\Lambda^{-1}\right) = \mu_{ij}$, где μ_{ij} — элементы матрицы Λ^{-1}.

Итак, мы доказали, что

$$\mathsf{E}[\Phi(\varphi_i)\Phi(\varphi_j)] = \mathrm{Tr}\left(A_{ij}\Lambda^{-1}\right) = \mu_{ij}.$$

Сравнивая это равенство с равенством (2), мы убеждаемся, что

$$\|B(\varphi_i, \varphi_j)\| = \|\mu_{ij}\| = \Lambda^{-1}.$$

Тем самым наше утверждение доказано.

Нам осталось доказать формулу (4). С этой целью заметим, что если C — положительно определенная матрица порядка n, а A — любая вещественная матрица того же порядка, то при достаточно малом вещественном ε мы имеем

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-\frac{1}{2}((C+\varepsilon A)x, x)}\, dx = [\det(C+\varepsilon A)]^{-1/2}$$

(доказательство этого равенства совпадает с проведенным выше доказательством равенства $\mathsf{P}(R_n)=1$). Так как

$$\det[(C+\varepsilon A)]^{-1/2} = (\det C)^{-1/2}\left[\det\left(E+\varepsilon AC^{-1}\right)\right]^{-1/2},$$

то это равенство можно записать также в виде

$$\frac{(\det C)^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-\frac{1}{2}((C+\varepsilon A)x, x)}\, dx = \left[\det\left(E+\varepsilon AC^{-1}\right)\right]^{-1/2}. \tag{5}$$

Разложим обе части равенства (5) в ряд по степеням ε и сравним коэффициенты при ε. Так как

$$\det\left(E+\varepsilon AC^{-1}\right) = 1 + \varepsilon\, \mathrm{Tr}\left(AC^{-1}\right) + \ldots,$$

то мы получаем, что

$$\frac{(\det C)^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \int (Ax,\ x)\, e^{-\frac{1}{2}(Cx,\,x)}\, dx = \operatorname{Tr}(AC^{-1}).$$

Тем самым формула (4) доказана.

Заметим, что аналогичным путем можно вычислить и такие интегралы, как

$$\int (Ax,\ x)^2\, e^{-\frac{1}{2}(Cx,\,x)}\, dx$$

и т. д.

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть Φ — собственный гауссовский обобщенный процесс. Тогда для любых линейно независимых функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ из пространства K распределение вероятностей случайной величины $\{\Phi(\varphi_1), \ldots, \Phi(\varphi_n)\}$ имеет вид*

$$\mathsf{P}(X) = \frac{\sqrt{\det \Lambda}}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_X e^{-\frac{1}{2}(\Lambda x,\, x)}\, dx,$$

где $\Lambda = \|\lambda_{ij}\|$ — матрица, обратная матрице $\|B(\varphi_i,\ \varphi_j)\|$, а через $(\Lambda x,\ x)$ обозначена квадратичная форма

$$(\Lambda x,\ x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i x_j.$$

Если функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ линейно зависимы, то распределение вероятностей случайной величины $\{\Phi(\varphi_1), \ldots, \Phi(\varphi_n)\}$ сосредоточено на подпространстве R'_m в R_n, размерность которого равна размерности линейного пространства, натянутого на функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Оно состоит из точек $(x_1, \ldots, x_n)$, координаты которых удовлетворяют тем же линейным соотношениям, что и функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. На подпространстве R'_m распределение вероятностей задается формулой, аналогичной формуле (1).

Мы получили распределение вероятностей для собственных гауссовских процессов. Иногда рассматриваются несобственные гауссовские процессы, для которых корреляционный функционал $B(\varphi,\ \varphi)$ может обращаться в нуль не только для функции $\varphi(t) \equiv 0$. Для таких процессов случайные величины $\{\Phi(\varphi_1), \ldots, \Phi(\varphi_n)\}$ могут быть распределены по несобственным гауссовским законам, т. е. по гауссовским законам, сосредоточенным на некоторых подпространствах n-мерного пространства. Мы не будем останавливаться далее на этих вопросах.

Отметим еще, что если среднее значение $m(\varphi)$ гауссовского процесса Φ отлично от нуля, то формула (1) заменяется несколько более сложной формулой

$$\mathsf{P}(X) = \frac{\sqrt{\det \Lambda}}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_X e^{-\frac{1}{2}(\Lambda(x-x^0),\, x-x^0)}\, dx, \qquad (1')$$

где x^0 — вектор с координатами $m(\varphi_1), \ldots, m(\varphi_n)$.

Наряду с вещественными гауссовскими процессами можно ввести комплексные гауссовские процессы. Для таких процессов вероятность включения

$$\{\Phi(\varphi_1), \ldots, \Phi(\varphi_n)\} \in X$$

(X — множество в n-мерном комплексном пространстве) выражается формулой

$$\mathsf{P}(X) = \frac{\det \Lambda}{(2\pi)^n} \int\limits_X e^{-\frac{1}{2}(\Lambda z,\, z)}\, dz, \qquad (1'')$$

где $\Lambda = \|\lambda_{ij}\|$ — матрица, обратная матрице $\|B(\varphi_i,\ \varphi_j)\|$,

$$(\Lambda z,\ z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} z_i \bar{z}_j$$

— эрмитова форма, соответствующая матрице Λ, а через dz обозначена мера $dx_1\, dy_1 \ldots dx_n\, dy_n$, $z_k = x_k + iy_k$.

3. Существование гауссовских процессов с заданными корреляционными функционалами и средними значениями. В предыдущем пункте мы показали, что распределение вероятностей случайных величин $\{\Phi(\varphi_1), \ldots, \Phi(\varphi_n)\}$, где Φ — обобщенный гауссовский процесс, однозначно определяется корреляционным функционалом $B(\varphi,\ \psi)$ этого процесса и его средним значением $m(\varphi)$. При этом, как было доказано в п. 1, корреляционный функционал $B(\varphi,\ \psi)$

и среднее значение $m(\varphi)$ должны быть такими, чтобы билинейный функционал

$$C(\varphi, \psi) = B(\varphi, \psi) - m(\varphi)\, m(\psi)$$

был положительно определен.

Покажем, что *если непрерывный билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$ в пространстве K и непрерывный линейный функционал $m(\varphi)$ в том же пространстве таковы, что функционал $B(\varphi, \psi) - m(\varphi)\, m(\psi)$ положительно определен, то существует обобщенный гауссовский процесс Φ, для которого $B(\varphi, \psi)$ является корреляционным функционалом, а $m(\varphi)$ — средним значением.*

Очевидно, что достаточно доказать теорему для случая, когда $m(\varphi) = 0$, а функционал $B(\varphi, \psi)$ положительно определен.

Мы рассмотрим сначала случай, когда функционал $B(\varphi, \psi)$ строго положительно определен, т. е. когда $B(\varphi, \varphi) > 0$ для всех функций $\varphi(t)$ из пространства K, не равных тождественно нулю. В этом случае для любых линейно независимых функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ из пространства K матрица $\|B(\varphi_i, \varphi_j)\|$ невырождена. В самом деле, если функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ линейно независимы, а числа $a_1, \ldots, a_n$ не равны одновременно нулю, то функция

$$\psi(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(t)$$

не равна тождественно нулю, и потому

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} B(\varphi_i, \varphi_j)\, a_i a_j = B(\psi, \psi) > 0.$$

Отсюда вытекает невырожденность матрицы $\|B(\varphi_i, \varphi_j)\|$.

Так как матрица $B = \|B(\varphi_i, \varphi_j)\|$ невырождена, то существует обратная ей матрица Λ. Сопоставим теперь функциям $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ случайную величину $\{\Phi(\varphi_1), \ldots, \Phi(\varphi_n)\}$ с распределением вероятностей

$$\mathsf{P}(X) = \frac{\sqrt{\det \Lambda}}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_X e^{-\frac{1}{2}(\Lambda x, x)}\, dx, \tag{6}$$

где

$$(\Lambda x, x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i x_j. \tag{7}$$

Этим случайная величина $\{\Phi(\varphi_1), \ldots, \Phi(\varphi_n)\}$ задается для линейно независимых функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Пусть теперь функции $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ линейно зависимы. Выберем в линейном пространстве, натянутом на эти функции, линейно независимый базис $\psi_1(t), \ldots, \psi_m(t)$. Так как функции $\psi_1, \ldots, \psi_m$ линейно независимы, то для случайной величины $\{\Phi(\psi_1), \ldots, \Phi(\psi_m)\}$ определено распределение вероятностей $\mathsf{P}_1(X)$, имеющее вид (6). Поскольку функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ являются линейными комбинациями функций $\psi_1, \ldots, \psi_m$

$$\varphi_k(t) = \sum_{j=1}^{m} b_{kj} \psi_j(t),$$

мы определим распределение вероятностей для случайной величины $\{\Phi(\varphi_1), \ldots, \Phi(\varphi_n)\}$ формулой

$$\mathsf{P}(X) = \mathsf{P}_1(\tilde{X}).$$

Здесь через $\tilde{X}$ обозначено множество точек $x = (x_1, \ldots, x_m)$ в m-мерном пространстве R_m, таких, что $(y_1, \ldots, y_n) \in X$, где $y_k = \sum\limits_{j=1}^{m} b_{kj} x_j$.

Таким образом, для любых функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ из K мы определили распределение вероятностей $\mathsf{P}(X)$ для n-мерной случайной величины $\{\Phi(\varphi_1), \ldots, \Phi(\varphi_n)\}$. Можно показать, что эти распределения вероятностей задают непрерывный линейный случайный функционал в пространстве K, т. е. что выполняются следующие условия:

1) *для любых функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi$ и чисел $x_1, \ldots, x_n$ вероятность выполнения неравенств*

$$\Phi(\varphi_k) \leqslant x_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n$$

совпадает с вероятностью выполнения неравенств

$$\Phi(\varphi_k) \leqslant x_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad \Phi(\varphi) < \infty$$

(*условие согласованности*);

2) *имеет место соотношение*

$$\Phi(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha\Phi(\varphi) + \beta\Phi(\psi),$$

где равенство случайных величин понимается в смысле, установленном в § 1;

3) *случайная величина* $\{\Phi(\varphi_1), \ldots, \Phi(\varphi_n)\}$ *непрерывно зависит от функций* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Доказательство утверждений 1) и 2) основано на следующей лемме.

Лемма. 1. *Пусть* $\{\varphi_k(t)\}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, — *система линейно независимых функций из пространства* K, *а* $\{\psi_k(t)\}$, $1 \leqslant k \leqslant m$, — *линейно независимые функции, принадлежащие пространству, натянутому на функции* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$,

$$\psi_k(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\varphi_j(t). \tag{8}$$

Обозначим через $\mathsf{P}(X)$ *распределение вероятностей случайной величины* $\{\Phi(\varphi_1), \ldots, \Phi(\varphi_n)\}$, *через* $\mathsf{P}_1(Y)$ — *распределение вероятностей случайной величины* $\{\Phi(\psi_1), \ldots, \Phi(\psi_m)\}$. *Тогда имеет место равенство*

$$\mathsf{P}(\tilde{Y}) = \mathsf{P}_1(Y),$$

где Y — *любое множество в пространстве* R_m, *а* $\tilde{Y}$ — *множество таких точек* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *в* R_n, *что точка* $y = (y_1, \ldots, y_m)$ *с координатами* $y_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j$ *принадлежит* Y.

Доказательство. Равенство $\mathsf{P}(\tilde{Y}) = \mathsf{P}_1(Y)$ можно записать в виде

$$\frac{\sqrt{\det \Lambda_\varphi}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\tilde{Y}} e^{-\frac{1}{2}(\Lambda_\varphi x,\, x)}\, dx = \frac{\sqrt{\det \Lambda_\psi}}{(2\pi)^{m/2}} \int_{Y} e^{-\frac{1}{2}(\Lambda_\psi y,\, y)}\, dy, \tag{9}$$

где через Λ_ψ обозначена матрица $\|B(\psi_i, \psi_j)\|^{-1}$, а через Λ_φ — матрица $\|B(\varphi_i, \varphi_j)\|^{-1}$.

Чтобы доказать соотношение (9), отметим, что в силу равенства (8) мы имеем

$$B(\psi_k, \psi_l) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ki}a_{lj}B(\varphi_i, \varphi_j),$$

и потому

$$\|B(\psi_k, \psi_l)\| = A\,\|B(\varphi_i, \varphi_j)\|\,A', \tag{10}$$

где через A обозначена матрица $\|a_{ki}\|$, а через A' — транспонированная матрица.

Рассмотрим сначала случай, когда $m = n$. В этом случае матрица A невырождена, поскольку наборы функций $\{\psi_k\}$ и $\{\varphi_j\}$ линейно независимы. Следовательно, из равенства (10) вытекает, что

$$\Lambda_\psi = (A')^{-1}\Lambda_\varphi A^{-1},$$

т. е. что

$$\Lambda_\varphi = A'\Lambda_\psi A. \tag{11}$$

Поэтому

$$(\Lambda_\varphi x,\, x) = (A'\Lambda_\psi Ax,\, x) = (\Lambda_\psi Ax,\, Ax). \tag{12}$$

Кроме того, из равенства (11) следует, что

$$\det \Lambda_\varphi = (\det A)^2 \det \Lambda_\psi. \tag{13}$$

Подставим выражения (12) и (13) для $(\Lambda_\varphi x, x)$ и $\det \Lambda_\varphi$ в левую часть равенства (9). Мы получим, что

$$\frac{\sqrt{\det \Lambda_\varphi}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\tilde{Y}} e^{-\frac{1}{2}(\Lambda_\varphi x,\, x)}\, dx = \frac{|\det A|\sqrt{\det \Lambda_\psi}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\tilde{Y}} e^{-\frac{1}{2}(\Lambda_\psi Ax,\, Ax)}\, dx.$$

Сделаем в правой части этого равенства замену переменной $Ax = y$. Принимая во внимание, что $dx = |\det A|^{-1}\,dy$, а множесто $\tilde{Y}$ является прообразом множества Y при преобразовании $Ax = y$, мы придем к равенству (9).

Рассмотрим теперь общий случай. Любое линейное преобразование A, переводящее функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ в функции $\psi_1, \ldots, \psi_m$, можно представить в виде

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \xrightarrow{A_1} \{\hat{\varphi}_1, \ldots, \hat{\varphi}_n\} \xrightarrow{A_2} \{\hat{\varphi}_1, \ldots, \hat{\varphi}_m\} \xrightarrow{A_3} \{\psi_1, \ldots, \psi_m\},$$

где A_1 и A_3 — невырожденные линейные преобразования, а $\hat{\varphi}_1, \ldots, \hat{\varphi}_n$ — такие функции, что $B(\hat{\varphi}_i, \hat{\varphi}_j) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера). Для преобразований A_1 и A_3 соотношение согласованности доказано. Поэтому нам достаточно доказать равенство $\mathsf{P}_1(Y) = \mathsf{P}(\tilde{Y})$ лишь для отображений вида $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \to (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, где $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — такие функции, что $B(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$. Для таких функций матрицы $\|B(\varphi_i, \varphi_j)\|$

и $\|B(\psi_i, \psi_j)\|$, а с ними и матрицы Λ_φ и Λ_ψ являются единичными. Следовательно, подлежащее доказательству соотношение (9) принимает в рассматриваемом случае вид

$$\frac{1}{(2\pi)^{m/2}}\int\limits_{Y} e^{-\frac{1}{2}\left(y_1^2+\ldots+y_m^2\right)}\,dy_1\ldots dy_m = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\widetilde{Y}} e^{-\frac{1}{2}\left(x_1^2+\ldots+x_n^2\right)}\,dx_1\ldots dx_n. \quad (14)$$

Поскольку множество $\widetilde{Y}$ состоит из всех точек $x=(x_1, \ldots, x_n)$, таких, что $(x_1, \ldots, x_m)\in Y$, то равенство (14) непосредственно вытекает из соотношения

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = 1.$$

Таким образом, лемма 1 доказана и в случае, когда $m\neq n$. Применяя лемму 1 к отображению вида

$$(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi)\to(\varphi_1, \ldots, \varphi_n),$$

мы убеждаемся в согласованности распределений вероятностей для случайных величин $(\Phi(\varphi_1), \ldots, \Phi(\varphi_n), \Phi(\varphi))$ и $(\Phi(\varphi_1), \ldots, \Phi(\varphi_n))$, если функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi$ линейно независимы. Если же они линейно зависимы, то согласованность легко следует из определения вероятностей для линейно зависимых функций.

Далее, применяя лемму 1 к отображению

$$(\varphi_1, \varphi_2)\to\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2,$$

мы убеждаемся, что случайный функционал $\Phi(\varphi)$ линеен.

Наконец, непрерывная зависимость случайной величины $\{\Phi(\varphi_1), \ldots, \Phi(\varphi_n)\}$ от $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ вытекает из того, что билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$ непрерывно зависит от φ и ψ.

Из результатов п. 2 вытекает, что корреляционный функционал построенного нами процесса равен $B(\varphi, \psi)$.

Этим рассмотрение случая, когда функционал $B(\varphi, \psi)$ строго положителен, закончено. Если же этот функционал вырождается на некотором подпространстве в K, то доказательство проводится аналогичным образом. При этом распределение вероятностей случайной величины $\{\Phi(\varphi_1), \ldots, \Phi(\varphi_n)\}$ может оказаться сосредоточенным на некотором подпространстве в K и в случае, когда функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ линейно независимы.

Мы доказали, таким образом, следующую теорему.

Теорема 2. *Для того чтобы непрерывный линейный функционал $m(\varphi)$ в пространстве K и непрерывный билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$ в том же пространстве были соответственно средним значением и корреляционным функционалом обобщенного случайного процесса Φ, необходимо и достаточно, чтобы билинейный функционал*

$$C(\varphi, \psi)=B(\varphi, \psi)-m(\varphi)\,m(\psi)$$

был положительно определенным. Процесс Φ при этом можно выбрать гауссовским.

Из этой теоремы вытекает следствие.

Следствие. *Пусть Φ — любой обобщенный случайный процесс, имеющий среднее значение $m(\varphi)$ и корреляционный функционал $B(\varphi, \psi)$. Тогда существует гауссовский обобщенный случайный процесс, имеющий то же среднее значение и тот же корреляционный функционал, что и процесс Φ.*

В самом деле, если $m(\varphi)$ — среднее значение, а $B(\varphi, \psi)$ — корреляционный функционал процесса Φ, то билинейный функционал $B(\varphi, \psi)-m(\varphi)\,m(\psi)$ положительно определен. Тогда в силу теоремы 2 существует гауссовский обобщенный случайный процесс, для которого $m(\varphi)$ является средним значением, а $B(\varphi, \psi)$ — корреляционным функционалом.

4. Производные обобщенных гауссовских процессов. Мы докажем сейчас, что производная обобщенного гауссовского случайного процесса сама является гауссовским случайным процессом. В самом деле, пусть распределение вероятностей для случайной величины $\{\Phi(\varphi_1), \ldots, \Phi(\varphi_n)\}$ задается формулой

$$\mathsf{P}_n(X)=\frac{(\det\Lambda)^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_X e^{-\frac{1}{2}(\Lambda x,\, x)}\,dx,$$

где Λ — матрица, обратная матрице $B = \|B(\varphi_i, \varphi_j)\|$. По определению производной случайного процесса, случайная величина $\{\Phi'(\varphi_1), \ldots, \Phi'(\varphi_n)\}$ имеет распределение вероятностей $\{-\Phi(\varphi_1'), \ldots, -\Phi(\varphi_n')\}$. Иными словами, вероятность $\mathsf{P}_n'(X)$ выполнения включения $\{\Phi'(\varphi_1), \ldots, \Phi'(\varphi_n)\} \in X$ выражается формулой

$$\mathsf{P}_n'(X) = \frac{(\det \Lambda')^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{-X} e^{-\frac{1}{2}(\Lambda' x, x)}\, dx, \tag{15}$$

где Λ' — матрица, обратная матрице $B' = \|B(\varphi_i', \varphi_j')\|$, а $-X$ — множество, симметричное множеству X относительно начала координат.

Поскольку $(\Lambda' x, x) = (-\Lambda' x, -x)$, мы можем заменить в формуле (15) множество $-X$ множеством X. Мы получим, что случайная величина $\{\Phi'(\varphi_1), \ldots, \Phi'(\varphi_n)\}$ является гауссовской случайной величиной, для которой матрица вторых моментов равна $\|B(\varphi_i', \varphi_j')\|$.

Итак, мы доказали, что *производная гауссовского случайного процесса с корреляционным функционалом $B(\varphi, \psi)$ является гауссовским случайным процессом с корреляционным функционалом $B(\varphi', \psi')$.*

5. Примеры гауссовских обобщенных случайных процессов. Гауссовский случайный процесс, для которого корреляционный функционал $B(\varphi, \psi)$ задается формулой

$$B(\varphi, \psi) = \int B(t, s)\varphi(t)\psi(s)\, dt\, ds, \tag{16}$$

где $B(t, s)$ — положительно определенное непрерывное ядро *), называется непрерывным (или классическим) гауссовским случайным процессом. Для таких процессов существует распределение вероятностей $\mathsf{P}_n(X)$ для любых моментов времени $t_1, \ldots, t_n$. Это распределение задается формулой

$$\mathsf{P}_n(X) = \frac{\sqrt{\det \Lambda}}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_X e^{-\frac{1}{2}(\Lambda x, x)}\, dx, \tag{17}$$

*) Т. е. такое ядро, что

$$\int B(t, s)\varphi(t)\varphi(s)\, dt\, ds \geqslant 0$$

для любой функции $\varphi(t)$ из K.

где Λ — матрица, обратная матрице $B = \|B(t_i, t_j)\|$. Обратно, если Φ — непрерывный случайный процесс и если для любых n моментов времени $t_1, \ldots, t_n$ распределение вероятностей задается формулой (17), где $\Lambda = \|B(t_i, t_j)\|^{-1}$, то корреляционный функционал для процесса Φ задается формулой (16). Мы опускаем доказательство этих утверждений.

В качестве примера непрерывного гауссовского процесса рассмотрим винеровский процесс. Так называют процесс $\Phi(t)$, для которого при $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ вероятность выполнения условия $(\Phi(t_1), \ldots, \Phi(t_n)) \in X$ выражается интегралом *)

$$\mathsf{P}_n(X) = [(2\pi)^n t_1(t_2 - t_1) \ldots (t_n - t_{n-1})]^{-1/2} \times$$
$$\times \int\limits_X e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x_1^2}{t_1^2} + \ldots + \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{t_n - t_{n-1}}\right]} dx_1 \ldots dx_n.$$

Можно показать, что винеровский случайный процесс описывает координату не имеющей инерции частицы, которая совершает одномерное броуновское движение и в момент времени $t = 0$ находится в точке $x = 0$.

Вычислим корреляционную матрицу для винеровского процесса. Пусть $t < s$. Тогда мы имеем

$$(\Lambda x, x) = \frac{x_1^2}{t} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{s - t}$$

и потому матрица Λ имеет вид

$$\Lambda = \begin{Vmatrix} \frac{s}{(s-t)t} & -\frac{1}{s-t} \\ -\frac{1}{s-t} & \frac{1}{s-t} \end{Vmatrix} = \frac{1}{s-t} \begin{Vmatrix} \frac{s}{t} & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Но это означает, что

$$B = \Lambda^{-1} = \begin{Vmatrix} t & t \\ t & s \end{Vmatrix}.$$

*) Моментам времени $t < 0$ соответствует распределение вероятностей, сосредоточенное в точке $x = 0$.

Так как матрица B имеет вид

$$B=\begin{Vmatrix} B(t, t) & B(t, s) \\ B(s, t) & B(s, s) \end{Vmatrix},$$

то мы получаем, что при $t<s$ выполняются равенства

$$B(t, t)=t; \quad B(t, s)=t; \quad B(s, t)=t; \quad B(s, s)=s.$$

Эти равенства можно записать одной формулой, а именно:

$$B(t, s)=\min(t, s),$$

где $t>0$ и $s>0$. Если же $t<0$ или $s<0$, то $B(t, s)=0$.

Найдем вид корреляционного функционала для винеровского процесса. По формуле (16) мы имеем

$$B(\varphi, \psi)=\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(t)\psi(s)\min(t, s)\,dt\,ds=$$

$$=\int_0^\infty \varphi(t)\int_0^t s\psi(s)\,ds\,dt+\int_0^\infty \psi(s)\int_0^s t\varphi(t)\,dt\,ds. \qquad (18)$$

Положим

$$\hat{\varphi}(t)=\int_0^t \varphi(t)\,dt, \qquad \hat{\psi}(t)=\int_0^t \psi(t)\,dt.$$

Интегрируя по частям правую часть равенства (18), имеем

$$B(\varphi, \psi)=\int_0^\infty [\hat{\varphi}(\infty)-\hat{\varphi}(t)]\,t\psi(t)\,dt+\int_0^\infty [\hat{\psi}(\infty)-\hat{\psi}(s)]\,s\varphi(s)\,ds.$$

Повторно интегрируя по частям первое слагаемое и принимая во внимание формулу

$$\int_0^\infty s\varphi(s)\,ds=\int_0^\infty [\hat{\varphi}(\infty)-\hat{\varphi}(s)]\,ds,$$

получаем после простых преобразований, что

$$B(\varphi, \psi)=\int_0^\infty [\hat{\varphi}(t)-\hat{\varphi}(\infty)][\hat{\psi}(t)-\hat{\psi}(\infty)]\,dt. \qquad (19)$$

Таким образом, мы нашли корреляционный функционал для винеровского случайного процесса.

Рассмотрим теперь производную винеровского процесса, т. е. распределение вероятностей для скоростей броуновской частицы. Можно показать, что эта производная уже не является непрерывным случайным процессом. Однако как обобщенный случайный процесс производная винеровского случайного процесса существует. Корреляционный функционал для производной винеровского процесса задается формулой $B'(\varphi, \psi)=B(\varphi', \psi')$, где $B(\varphi, \psi)$ определяется равенством (19). Так как

$$[\varphi'(t)]^{\wedge}=\int_0^t \varphi'(s)\,ds=\varphi(s)-\varphi(0), \qquad [\psi'(t)]^{\wedge}=\psi(s)-\psi(0),$$

а, в силу финитности функций $\varphi(s)$ и $\psi(s)$, $\varphi(\infty)=\psi(\infty)=0$, то

$$B'(\varphi, \psi)=\int_0^\infty \varphi(t)\psi(t)\,dt.$$

Эту формулу можно записать в виде

$$B'(\varphi, \psi)=\int_0^\infty\int_0^\infty \delta(t-s)\varphi(t)\psi(s)\,ds.$$

Таким образом, корреляционная функция для производной винеровского процесса является обобщенной функцией $B(t, s)=\delta(t-s)$. Производная винеровского процесса является простейшим из обобщенных процессов гауссовского типа. Она играет роль, аналогичную роли δ-функции в теории обобщенных функций, и называется *единичным обобщенным случайным процессом*.

Случай комплексного винеровского процесса рассматривается аналогично, причем формула для корреляционного функционала производного процесса имеет вид $B'(\varphi, \psi)=\int_0^\infty \varphi(t)\overline{\psi(t)}\,dt$.

6. Характеристический функционал обобщенного случайного процесса. Введем теперь понятие характеристического функционала обобщенного случайного процесса, обобщающее понятие характеристической функции для распределения вероятностей. Пусть Φ — обобщенный случайный процесс.

Его *характеристическим функционалом* называют среднее значение случайной величины $e^{i\Phi(\varphi)}$. Иными словами, характеристический функционал $L(\varphi)$ задается равенством

$$L(\varphi) = \mathsf{E}\,[e^{i\Phi(\varphi)}] = \int e^{ix}\,d\mathsf{P}(x), \tag{20}$$

где через $\mathsf{P}(x)$ обозначена вероятность неравенства $\Phi(\varphi) \leqslant x$.

В качестве примера вычислим характеристические функционалы для гауссовских случайных процессов. Пусть корреляционный функционал гауссовского случайного процесса равен $B(\varphi, \psi)$. Тогда случайная величина $\Phi(\varphi)$ согласно п. 2 имеет распределение вероятностей

$$\mathsf{P}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi B(\varphi, \varphi)}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2B(\varphi, \varphi)}}\,dx.$$

Поэтому

$$L(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi B(\varphi, \varphi)}} \int e^{ix - \frac{x^2}{2B(\varphi, \varphi)}}\,dx = e^{-\frac{1}{2}B(\varphi, \varphi)}.$$

Таким образом, для гауссовского обобщенного случайного процесса с корреляционным функционалом $B(\varphi, \psi)$ характеристический функционал задается формулой

$$L(\varphi) = e^{-\frac{1}{2}B(\varphi, \varphi)}. \tag{21}$$

В частности, для единичного гауссовского процесса мы имеем $B(\varphi, \varphi) = \int \varphi^2(t)\,dt$ и потому

$$L(\varphi) = e^{-\frac{1}{2}\int \varphi^2(t)\,dt}. \tag{22}$$

Свойства характеристических функционалов аналогичны свойствам характеристических функций. Именно, справедливо следующее утверждение.

Характеристический функционал $L(\varphi)$ *обобщенного случайного процесса* Φ *положительно определен*, т. е. для любых функций $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ из пространства K и любых комплексных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ выполняется неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} L(\varphi_j - \varphi_k)\,\alpha_j \bar{\alpha}_k \geqslant 0.$$

В самом деле, мы имеем

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} L(\varphi_j - \varphi_k)\,\alpha_j \bar{\alpha}_k = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}\left[\alpha_j \bar{\alpha}_k e^{i\Phi(\varphi_j - \varphi_k)}\right] = \\ = \mathsf{E}\left|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e^{i\Phi(\varphi_j)}\right|^2 \geqslant 0.$$

Далее, *характеристический функционал* $L(\varphi)$ *непрерывен*. В самом деле, если $\lim\limits_{k \to \infty} \varphi_k(t) = \varphi(t)$, то для любой непрерывной ограниченной функции $f(x)$ имеет место равенство

$$\lim_{k \to \infty} \int f(x)\,d\mathsf{P}_k(x) = \int f(x)\,d\mathsf{P}(x),$$

где $\mathsf{P}_k(x)$ — распределение вероятностей случайной величины $\Phi(\varphi_k)$, а $\mathsf{P}(x)$ — распределение вероятностей случайной величины $\Phi(\varphi)$. Полагая $f(x) = e^{ix}$, мы получаем, что

$$\lim_{k \to \infty} L(\varphi_k) = L(\varphi).$$

Тем самым непрерывность функционала $L(\varphi)$ доказана. Наконец, *имеет место равенство*

$$L(0) = \int d\mathsf{P}(x) = 1.$$

Указанные свойства являются не только необходимыми, но и достаточными для того, чтобы функционал $L(\varphi)$ был характеристическим функционалом некоторого обобщенного случайного процесса Φ. Иными словами, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $L(\varphi)$ — *положительно определенный непрерывный функционал в пространстве* K, *такой, что* $L(0) = 1$. *Тогда существует обобщенный случайный процесс* Φ, *такой, что* $L(\varphi)$ *является характеристическим функционалом для этого процесса.*

Подробное доказательство этой теоремы будет приведено в главе IV, § 4 в связи с рассмотрением преобразования Фурье мер в линейных топологических пространствах. Здесь мы укажем лишь идею доказательства.

Пусть $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ — функции из пространства K. Сопоставим им функцию $\psi(y_1, \ldots, y_n)$ от n переменных, положив

$$\psi(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{k=1}^{n} y_k \varphi_k(t).$$

Простая проверка показывает, что эта функция непрерывна и положительно определена. Следовательно, по теореме Бохнера функция $\psi(y_1, \ldots, y_n)$ является преобразованием Фурье некоторой положительной меры $\mathsf{P}(x_1, \ldots, x_n)$ в n-мерном пространстве R_n. Эту меру $\mathsf{P}(x_1, \ldots, x_n)$ мы и примем за распределение вероятностей для случайной величины $(\Phi(\varphi_1), \ldots, \Phi(\varphi_n))$. Можно доказать, что эти случайные величины согласованы друг с другом и что $\Phi(\varphi)$ линейно и непрерывно зависит от φ. Тем самым построен обобщенный случайный процесс Φ, характеристическим функционалом для которого является $L(\varphi)$.

§ 3. СТАЦИОНАРНЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ. ОБОБЩЕННЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ СО СТАЦИОНАРНЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ n-го ПОРЯДКА

1. Стационарные процессы. Обобщенный случайный процесс Φ называется *стационарным*, если для любых функций $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ из пространства K и любого числа h случайные величины $\{\Phi[\varphi_1(t+h)], \ldots, \Phi[\varphi_n(t+h)]\}$ и $\{\Phi[\varphi_1(t)], \ldots, \Phi[\varphi_n(t)]\}$ имеют одинаковое распределение вероятностей. Иными словами, процесс Φ стационарен, если результат его измерения приборами, характеризующимися функциями $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$, не изменится при одновременном сдвиге всех измерений на один и тот же отрезок времени h.

Если процесс Φ стационарен, то его среднее значение инвариантно относительно сдвигов. Таким образом, для любой функции $\varphi(t)$ из пространства K и любого числа h справедливо равенство

$$m[\varphi(t)] = m[\varphi(t+h)].$$

Но единственными линейными функционалами в простран-

стве K, инвариантными относительно сдвигов, являются функционалы вида

$$m(\varphi) = a \int \varphi(t)\, dt, \tag{1}$$

где a — некоторое число *). Поэтому среднее значение стационарного обобщенного случайного процесса имеет вид (1). Так как число a однозначно задает для стационарных случайных процессов среднее значение $m(\varphi)$, мы будем это число также называть средним значением стационарного процесса Φ.

2. Корреляционный функционал стационарного процесса. Найдем теперь общий вид корреляционного функционала (комплексного) стационарного обобщенного случайного процесса. Из стационарности процесса Φ вытекает, что для любых двух функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ из пространства K выполняется равенство

$$B[\varphi(t), \psi(t)] = B[\varphi(t+h), \psi(t+h)]. \tag{2}$$

Таким образом, корреляционный функционал стационарного обобщенного случайного процесса является положительно определенным билинейным эрмитовым функционалом, инвариантным относительно сдвигов. Общий вид таких

---

*) В самом деле, по результатам из выпуска 2 (гл. II, § 4, п. 3) функционал m имеет вид

$$m(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t)\, \varphi^{(k)}(t)\, dt,$$

где $f_k(t)$ — непрерывные функции. При этом на любом конечном отрезке лишь конечное число функций $f_k(t)$ отлично от нуля. Но из условия стационарности следует, что функции $f_k(t)$ постоянны. При $k \geqslant 1$ мы имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(k)}(t)\, dt = \varphi^{(k-1)}(t) = 0$$

и потому функционал $m(\varphi)$ имеет вид

$$m(\varphi) = a \int \varphi(t)\, dt.$$

функционалов был найден в главе II, § 3, п. 5. В силу доказанных там результатов такие функционалы имеют вид

$$B(\varphi, \psi) = (B_0, \varphi * \psi^*), \tag{3}$$

где B_0 — обобщенная функция одного переменного, являющаяся преобразованием Фурье некоторой положительной меры степенного роста.

Итак, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Корреляционный функционал $B(\varphi, \psi)$ стационарного обобщенного случайного процесса Φ имеет вид $B(\varphi, \psi) = (B_0, \varphi * \psi^*)$, где B_0 — преобразование Фурье некоторой положительной меры σ степенного роста.*

Поскольку преобразованием Фурье функции $\varphi * \psi^*(x)$ является функция $\tilde{\varphi}(\lambda)\overline{\tilde{\psi}}(\lambda)$, где $\tilde{\varphi}(\lambda)$ и $\tilde{\psi}(\lambda)$ — преобразования Фурье функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ *), то теорему 1 можно также сформулировать следующим образом.

Теорема 1′. *Корреляционный функционал $B(\varphi, \psi)$ стационарного обобщенного случайного процесса Φ имеет вид*

$$B(\varphi, \psi) = \int \tilde{\varphi}(\lambda)\overline{\tilde{\psi}}(\lambda)\, d\sigma(\lambda), \tag{4}$$

где σ — некоторая положительная мера степенного роста.

Мера σ называется *спектральной мерой* процесса Φ. Отметим, что как спектральная мера σ, так и среднее значение a стационарного обобщенного случайного процесса Φ однозначно определяются этим процессом.

Рассмотрим в качестве примера единичный случайный процесс, т. е. производную винеровского случайного процесса. Как было показано в п. 5 § 2, корреляционный функционал этого процесса выражается формулой

$$B(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\overline{\psi(t)}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)\overline{\psi(s-t)}\, ds \right] dt = (\delta, \varphi * \psi^*). \tag{5}$$

*) Напомним, что $\overline{\tilde{\varphi}}(\lambda) = \widetilde{\overline{\varphi}}(\overline{\lambda})$.

Поэтому $B_0(t) = \delta(t)$. Но функция $\delta(t)$ является преобразованием Фурье лебеговой меры. Следовательно, *спектральная мера для единичного обобщенного случайного процесса (производной винеровского процесса) является лебеговой мерой, $d\sigma(\lambda) = d\lambda$.*

3. Процессы со стационарными приращениями. Перейдем теперь к изучению обобщенных случайных процессов со стационарными приращениями n-го порядка.

Обобщенный случайный процесс Φ называется процессом со стационарными приращениями n-го порядка, если его n-я производная является стационарным обобщенным случайным процессом. Таким образом, для обобщенного случайного процесса со стационарными приращениями n-го порядка случайные величины

$$\{\Phi^{(n)}[\varphi_1(t+h)], \ldots, \Phi^{(n)}[\varphi_k(t+h)]\},$$
$$\{\Phi^{(n)}[\varphi_1(t)], \ldots, \Phi^{(n)}[\varphi_k(t)]\}$$

имеют одинаковые распределения вероятностей *). В силу определения производной обобщенного случайного процесса, это означает, что случайные величины

$$\{\Phi[\varphi_1^{(n)}(t+h)], \ldots, \Phi[\varphi_k^{(n)}(t+h)]\}$$

и

$$\{\Phi[\varphi_1^{(n)}(t)], \ldots, \Phi[\varphi_k^{(n)}(t)]\}$$

имеют одинаковое распределение вероятностей.

Найдем теперь общий вид среднего значения $m(\varphi)$ для обобщенного случайного процесса Φ со стационарными приращениями n-го порядка. Обозначим через $m_n(\varphi)$ среднее значение процесса $\Phi^{(n)}(\varphi) = (-1)^n \Phi(\varphi^{(n)})$. Из равенства

$$m_n(\varphi) = \mathsf{E}[\Phi^{(n)}(\varphi)] = (-1)^n \mathsf{E}\Phi[\varphi^{(n)}] = (-1)^n m(\varphi^{(n)}) = m^{(n)}(\varphi)$$

*) Можно показать, что это определение эквивалентно следующему: процесс $\Delta_h^n \Phi$ является при любом h стационарным случайным процессом. Через $\Delta_h \Phi$ мы обозначаем процесс, определяемый равенством

$$\Delta_h \Phi(\varphi) = \Phi[\varphi(t+h) - \varphi(t)],$$

а через $\Delta_h^n \Phi$ — процесс $\Delta_h[\Delta_h^{n-1}\Phi]$. Это определение и оправдывает название «процесс со стационарными приращениями n-го порядка».

вытекает, что обобщенная функция $m_n(\varphi)$ является производной n-го порядка от обобщенной функции $m(\varphi)$.

Поскольку процесс $\Phi^{(n)}$ стационарен, то его среднее значение $m_n(\varphi)$ имеет, согласно п. 1, вид

$$m_n(\varphi)=a\int\varphi(t)\,dt,$$

где a — некоторое число. Таким образом, среднее значение $m(\varphi)$ обобщенного случайного процесса Φ со стационарными приращениями n-го порядка удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$m^{(n)}=a,$$

где a — некоторая постоянная. Отсюда следует, что обобщенная функция $m(\varphi)$ имеет вид

$$m(\varphi)=\left(\sum_{k=0}^{n}a_kt^k,\ \varphi\right)=\sum_{k=0}^{n}a_k\int_{-\infty}^{\infty}t^k\varphi(t)\,dt=\sum_{k=0}^{n}a_k(t^k,\ \varphi). \qquad (6)$$

Рассмотрим теперь корреляционный функционал $B(\varphi,\psi)$ обобщенного случайного процесса Φ со стационарными приращениями n-го порядка.

Этот корреляционный функционал связан с корреляционным функционалом $B_n(\varphi,\psi)$ процесса $\Phi^{(n)}$ соотношением

$$B(\varphi^{(n)},\psi^{(n)})=B_n(\varphi,\psi). \qquad (7)$$

В самом деле,

$$B(\varphi^{(n)},\psi^{(n)})=\mathsf{E}[\Phi(\varphi^{(n)})\overline{\Phi(\psi^{(n)})}]=$$
$$=\mathsf{E}[\Phi^{(n)}(\varphi)\overline{\Phi^{(n)}(\psi)}]=B_n(\varphi,\psi),$$

чем равенство (7) и доказано.

Так как процесс $\Phi^{(n)}$ является по определению стационарным обобщенным случайным процессом, то его корреляционный функционал $B_n(\varphi,\psi)$ инвариантен относительно сдвигов. В главе II (§ 4, п. 5) мы выяснили структуру эрмитовых функционалов $B(\varphi,\psi)$, для которых $B(\varphi^{(n)},\psi^{(n)})$ является положительно определенным инвариантным относительно сдвигов эрмитовым функционалом. Применяя полученные там результаты, мы убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 2. *Корреляционный функционал $B(\varphi,\psi)$ обобщенного случайного процесса со стационарными приращениями n-го порядка имеет вид*

$$B(\varphi,\psi)=\int_{\Omega_0}\left[\tilde\varphi(\lambda)-\alpha(\lambda)\sum_{j=0}^{n-1}\tilde\varphi^{(j)}(0)\frac{\lambda^j}{j!}\right]\times$$
$$\times\overline{\left[\tilde\psi(\lambda)-\alpha(\lambda)\sum_{j=0}^{n-1}\tilde\psi^{(j)}(0)\frac{\lambda^j}{j!}\right]}\,d\sigma(\lambda)+$$
$$+a_{2n}\alpha_n\overline{\beta_n}+\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_j\overline{L_j(\psi)}+\sum_{j=0}^{n-1}\overline{\beta_j}L_j(\varphi)+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}c_{jk}\alpha_j\overline{\beta_k}. \qquad (8)$$

Здесь $\tilde\varphi(\lambda)$ и $\tilde\psi(\lambda)$ — преобразования Фурье функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, σ — положительная мера степенного роста, для которой

$$\int_{0<\lambda<1}|\lambda|^{2n}\,d\sigma(\lambda)<+\infty,$$

$\alpha(\lambda)$ — такая целая аналитическая функция из пространства Z, что $\alpha(\lambda)-1$ имеет при $\lambda=0$ нуль n-го порядка, α_j и β_j — моменты функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, т. е.

$$\alpha_j=(t^j,\ \varphi);\qquad \beta_j=(t^j,\ \psi),$$

a_{2n} — положительное число, c_{jk}, $0\leqslant j,\ k\leqslant n-1$ — некоторые числа, L_j — линейные функционалы в пространстве K и Ω_0 — дополнение точки $\lambda=0$.

Моменты α_j и β_j в формуле (8) можно заменить выражениями $i^{-j}\tilde\varphi^{(j)}(0)$ и $i^{-j}\tilde\psi^{(j)}(0)$. В самом деле, дифференцируя j раз по λ равенство

$$\tilde\varphi(\lambda)=\int\varphi(x)e^{i\lambda x}\,dx$$

и полагая $\lambda=0$, мы убеждаемся, что $\alpha_j=i^{-j}\tilde\varphi^{(j)}(0)$. Точно так же доказывается равенство $\beta_j=i^{-j}\tilde\psi^{(j)}(0)$.

Особенно простой вид принимает корреляционный функционал $B(\varphi,\psi)$, если все моменты функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ до $n-1$-го порядка включительно равны нулю. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2′. *Если $B(\varphi, \psi)$ — корреляционный функционал обобщенного случайного процесса со стационарными приращениями n-го порядка и моменты функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ до $n-1$-го порядка включительно равны нулю, то*

$$B(\varphi, \psi) = \int\limits_{\Omega_0} \tilde{\varphi}(\lambda)\,\overline{\tilde{\psi}(\lambda)}\,d\sigma(\lambda) + a_{2n}\alpha_n\overline{\beta_n},$$

где $\tilde{\varphi}(\lambda)$, $\tilde{\psi}(\lambda)$, σ *и* a_{2n} *имеют тот же смысл, что и в теореме* 2.

Пусть Φ — обобщенный случайный процесс со стационарными приращениями n-го порядка, а $c_0, \ldots, c_{n-1}$ — произвольные случайные величины, такие, что $\mathsf{E}(c_j\overline{c_k})$ существует при всех j и k. Тогда процесс Φ', задаваемый формулой

$$\Phi_1(\varphi) = \Phi(\varphi) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k\alpha_k, \qquad \alpha_k = \int \varphi(t)\,t^k\,dt,$$

также является процессом со стационарными приращениями n-го порядка, поскольку $\Phi_1^{(n)} = \Phi^{(n)}$ является стационарным процессом. Корреляционный функционал $B_1(\varphi, \psi)$ процесса Φ выражается через корреляционный функционал $B(\varphi, \psi)$ процесса Φ формулой

$$B_1(\varphi, \psi) = B(\varphi, \psi) + \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\beta_k} L_k(\varphi) + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \overline{L_k(\psi)} + \sum_{j,\,k=0}^{n-1} a_{jk}\alpha_j\overline{\beta_k},$$

где $\alpha_k = \int \varphi(t)\,t^k\,dt$, $\beta_k = \int \psi(t)\,t^k\,dt$, через $L_j(\varphi)$ обозначен линейный функционал $\mathsf{E}[\overline{c_j}\Phi(\varphi)]$, а через a_{jk} — числа $\mathsf{E}(c_j\overline{c_k})$.

Таким образом, наличие в формуле (8) слагаемых вида $\alpha_j\overline{L_j(\psi)}$, $\overline{\beta_j}L_j(\psi)$, $a_{jk}\alpha_j\overline{\beta_k}$ связано с тем, что при добавлении к процессу Φ со стационарными приращениями n-го порядка многочлена степени $n-1$ со случайными коэффициентами мы получаем процесс со стационарными приращениями n-го порядка.

Отметим, что при построении развитой в этом параграфе теории мы использовали лишь то обстоятельство, что ни средние значения, ни корреляционный функционал процесса Φ (соответственно процесса $\Phi^{(n)}$) не меняется при сдвиге функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Поэтому все доказанные нами результаты применимы к процессам, стационарным (соответственно, обладающим стационарными приращениями n-го порядка) в широком смысле. Обобщенный случайный процесс Φ называется стационарным в широком смысле слова, если среднее значение $m(\varphi)$ и корреляционный функционал $B(\varphi, \psi)$ этого процесса не меняются при параллельном переносе. Аналогично определяются процессы, имеющие в широком смысле стационарные приращения n-го порядка.

Поскольку гауссовские процессы однозначно определяются заданием среднего значения $m(\varphi)$ и корреляционного функционала $B(\varphi, \psi)$, для таких процессов стационарность в широком смысле совпадает со стационарностью в обычном смысле, а наличие стационарных приращений n-го порядка в широком смысле совпадает с обычной стационарностью приращений n-го порядка.

4. Преобразование Фурье стационарных обобщенных случайных процессов. Формула (4) из п. 2 дает выражение корреляционного функционала стационарного обобщенного случайного процесса в виде преобразования Фурье некоторой положительной меры. Это представление корреляционного функционала наводит на мысль построить преобразование Фурье самогó стационарного обобщенного процесса Φ. Чтобы уточнить эту идею, введем понятие случайной меры. Пусть каждому борелевскому множеству Δ вещественной оси сопоставлена случайная величина $Z(\Delta)$. Мы будем говорить, что $Z(\Delta)$ является *случайной мерой*, если:

1) $Z(\Delta)$ является вполне аддитивной случайной функцией множества, т. е. если для любого разложения $\Delta = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ множества Δ в счетную сумму непересекающихся множеств Δ_n выполняется, в смысле сходимости в среднем *), равенство $Z(\Delta) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} Z(\Delta_n)$;

*) Случайные величины ξ_n сходятся в среднем к ξ, если $\mathsf{E}[(\xi_n - \xi)^2] \to 0$ при $n \to \infty$.

2) существует положительная мера $\sigma(\Delta)$, такая, что для любых множеств Δ_1 и Δ_2

$$\mathsf{E}(Z(\Delta_1)\overline{Z(\Delta_2)}) = \sigma(\Delta_1 \cap \Delta_2); \tag{9}$$

3) среднее значение случайной величины $Z(\Delta)$ для любого множества Δ равно нулю.

Заметим, что в силу равенства (9) для любых двух непересекающихся множеств Δ_1 и Δ_2 мы имеем

$$\mathsf{E}(Z(\Delta_1)\overline{Z(\Delta_2)}) = 0.$$

Иными словами, *случайные величины $Z(\Delta_1)$ и $Z(\Delta_2)$, соответствующие непересекающимся множествам Δ_1 и Δ_2, некоррелированы.*

Более естественным было бы рассмотрение мер, для которых случайные величины $Z(\Delta_1)$ и $Z(\Delta_2)$, соответствующие непересекающимся множествам Δ_1 и Δ_2, не только некоррелированы, но и независимы. *Если все величины $Z(\Delta)$ являются гауссовскими случайными величинами, то из некоррелированности случайных величин $Z(\Delta_1)$ и $Z(\Delta_2)$ вытекает их независимость* *). Поэтому

*) В самом деле, пусть ξ и η — вещественные гауссовские величины, такие, что $E(\xi) = E(\eta) = 0$. Тогда распределение вероятностей двумерной гауссовской случайной величины $\zeta = (\xi, \eta)$ имеет вид

$$\mathsf{P}_\zeta(a, b) = \frac{(\det \Lambda)^{1/2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{b} e^{-\frac{1}{2}(\lambda_{11}x^2 + 2\lambda_{12}xy + \lambda_{22}y^2)}\,dx\,dy, \tag{10}$$

где через $\mathsf{P}(a, b)$ обозначена вероятность выполнения неравенств $\xi \leqslant a$, $\eta \leqslant b$, а $\Lambda = \begin{Vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} \end{Vmatrix}$ — матрица, обратная матрице вторых моментов, т. е. матрице

$$B = \begin{Vmatrix} \mathsf{E}(\xi^2) & \mathsf{E}(\xi\eta) \\ \mathsf{E}(\xi\eta) & \mathsf{E}(\eta^2) \end{Vmatrix}.$$

Если $\mathsf{E}(\xi\eta) = 0$, то $\lambda_{12} = 0$, и распределение вероятностей (10) принимает вид

$$\mathsf{P}_\zeta(a, b) = \frac{\lambda_{11}^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{1}{2}\lambda_{11}x^2}\,dx\, \frac{\lambda_{22}^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{b} e^{-\frac{1}{2}\lambda_{22}y^2}\,dy = \mathsf{P}_\xi(a)\,\mathsf{P}_\eta(b),$$

где $\mathsf{P}_\xi(a)$ — распределение вероятностей случайной величины ξ, а $\mathsf{P}_\eta(b)$ — распределение вероятностей случайной величины η. Поэтому из равенства $\mathsf{E}(\xi\eta) = 0$ вытекает равенство $\mathsf{P}_\zeta(a, b) = \mathsf{P}_\xi(a)\,\mathsf{P}_\eta(b)$, т. е. независимость случайных величин ξ и η.

Случай комплексных гауссовских случайных величин рассматривается аналогичным образом.

на наш взгляд, естественно рассматривать случайные меры лишь в случае, когда все случайные величины $Z(\Delta)$ распределены по гауссовскому закону. Однако, в теории вероятностей принято рассматривать случайные меры, не налагая на них требования, что $Z(\Delta)$ — гауссовские случайные величины.

Введем теперь понятие преобразования Фурье случайной меры. Так называют обобщенный случайный процесс, задаваемый равенством *)

$$\Phi = \int e^{i\lambda t}\,dZ(\lambda).$$

Это равенство означает, что функции $\varphi(t)$ из пространства K сопоставляется случайная величина

$$\Phi(\varphi) = \int \varphi(t)\, e^{i\lambda t}\,dZ(\lambda)\,dt = \int \tilde{\varphi}(\lambda)\,dZ(\lambda). \tag{11}$$

Нетрудно показать, что если мера $\sigma(\Delta) = \mathsf{E}[\,|Z(\Delta)|^2]$ имеет степенной рост, то равенство (11) задает непрерывный линейный случайный функционал в пространстве K, т. е. обобщенный случайный процесс.

Покажем, что этот процесс стационарен в широком смысле. В самом деле, так как среднее значение всех случайных величин $Z(\Delta)$ равно нулю, то и для любой функции $\varphi(t)$ из K мы имеем $\mathsf{E}[\Phi(\varphi)] = 0$. Следовательно,

$$m[\varphi(t)] = m[\varphi(t+h)] = 0.$$

Далее,

$$\begin{aligned} B(\varphi, \psi) &= \mathsf{E}[\Phi(\varphi)\overline{\Phi(\psi)}] = \\ &= \mathsf{E}\left[\int \tilde{\varphi}(\lambda)\,dZ(\lambda) \int \overline{\tilde{\psi}(\mu)\,dZ(\mu)}\right] = \\ &= \int\int \tilde{\varphi}(\lambda)\overline{\tilde{\psi}(\mu)}\,\mathsf{E}[dZ(\lambda)\overline{dZ(\mu)}]. \end{aligned}$$

В силу равенства (9) мы можем переписать эту формулу в виде

$$B(\varphi, \psi) = \int \tilde{\varphi}(\lambda)\overline{\tilde{\psi}(\lambda)}\,d\sigma(\lambda).$$

*) Интеграл от функции $\varphi(\lambda)$ по мере $Z(\lambda)$ понимается как предел соответствующих интегральных сумм

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\lambda_k)\,\Delta Z(\lambda_k),$$

При сдвиге функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ на h их преобразования Фурье умножаются на $e^{-i\lambda h}$ и потому

$$B[\varphi(t+h),\ \psi(t+h)] = \int e^{-i\lambda h}\widetilde{\varphi}(\lambda)\overline{e^{-i\lambda h}\widetilde{\psi}(\lambda)}\,d\sigma(\lambda) = \int \widetilde{\varphi}(\lambda)\overline{\widetilde{\psi}(\lambda)}\,d\sigma(\lambda) = B[\varphi(t),\ \psi(t)].$$

Тем самым доказано, что процесс Φ, определяемый равенством (11), стационарен в широком смысле.

Мы докажем сейчас справедливость обратного утверждения.

Теорема 3. *Пусть Φ — стационарный в широком смысле обобщенный случайный процесс, такой, что все величины $\mathsf{E}[|\Phi(\varphi)|^2]$ конечны, и $\sigma(\Delta)$ — соответствующая ему спектральная мера. Тогда существует такая случайная мера $Z(\Delta)$, что*

$$\Phi = \int e^{it\lambda}\,dZ(\lambda), \tag{12}$$

причем

$$\mathsf{E}[Z(\Delta_1)\overline{Z(\Delta_2)}] = \sigma(\Delta_1 \cap \Delta_2). \tag{13}$$

Доказательство. Введем в пространство K скалярное произведение при помощи положительно определенного функционала $B(\varphi, \psi)$ — корреляционного функционала процесса Φ, т. е. положим

$$(\varphi, \psi) = B(\varphi, \psi). \tag{14}$$

Далее рассмотрим линейное пространство $\mathfrak{K}$, состоящее из всех случайных величин $\Phi(\varphi)$ (это пространство линейно в силу линейности случайного функционала Φ). В пространстве $\mathfrak{K}$ также введем скалярное произведение, положив

$$(\Phi(\varphi), \Phi(\psi)) = B(\varphi, \psi) \equiv \mathsf{E}[\Phi(\varphi)\overline{\Phi(\psi)}]. \tag{15}$$

Так как $(\Phi(\varphi), \Phi(\psi)) = B(\varphi, \psi) = (\varphi, \psi)$, то отображение $\varphi \to \Phi(\varphi)$ является изометрическим отображением пространства K на пространство $\mathfrak{K}$. Это отображение можно продолжить на гильбертовы пространства H и $\mathfrak{H}$, возникающие при пополнении пространств K и $\mathfrak{K}$ относительно скалярных произведений (14) и (15) [если билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$ вырождается, то предварительно надо взять фактор-пространство по подпространствам в K и $\mathfrak{K}$, на которых вырождается $B(\varphi, \psi)$].

Мы получили, таким образом, изометрическое соответствие между пространствами H и $\mathfrak{H}$.

Так как процесс Φ стационарен в широком смысле, то для любых двух функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ из K выполняется равенство

$$(\varphi, \psi) = B(\varphi, \psi) = \int \widetilde{\varphi}(\lambda)\overline{\widetilde{\psi}(\lambda)}\,d\sigma(\lambda),$$

где $\sigma(\Delta)$ — спектральная мера процесса Φ. Поэтому соответствие $\varphi(t) \to \widetilde{\varphi}(\lambda)$, $\varphi \in K$, можно продолжить до изометрического соответствия между пространством H и пространством L^2_σ функций $\widetilde{\varphi}(\lambda)$, имеющих интегрируемый квадрат модуля относительно меры σ.

Пространству L^2_σ принадлежат, в частности, все характеристические функции $\chi_\Delta(\lambda)$ ограниченных борелевских множеств Δ. Обозначим через $Z(\Delta)$ элемент пространства $\mathfrak{H}$, соответствующий функции $\chi_\Delta(\lambda)$. Если $\Delta = \bigcup_{n=1}^{\infty}\Delta_n$ — разложение множества Δ в счетную сумму непересекающихся множеств, то, очевидно, $\chi_\Delta(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty}\chi_{\Delta_n}(\lambda)$. Поскольку отображение пространства L^2_σ на пространство $\mathfrak{H}$ линейно, отсюда следует, что $Z(\Delta) = \sum_{n=1}^{\infty} Z(\Delta_n)$, в смысле сходимости в среднем. Иными словами, мы доказали, что $Z(\Delta)$ является случайной мерой. В силу изометричности отображения L^2_σ на $\mathfrak{H}$ и равенства $\chi_{\Delta_1}(\lambda)\overline{\chi_{\Delta_2}(\lambda)} = \chi_{\Delta_1 \cap \Delta_2}(\lambda)$ мы имеем

$$\mathsf{E}(Z(\Delta_1)\overline{Z(\Delta_2)}) = (Z(\Delta_1),\ Z(\Delta_2)) = \int \chi_{\Delta_1}(\lambda)\overline{\chi_{\Delta_2}(\lambda)}\,d\sigma(\lambda) = \int \chi_{\Delta_1 \cap \Delta_2}(\lambda)\,d\sigma(\lambda) = \sigma(\Delta_1 \cap \Delta_2).$$

Тем самым равенство (13) доказано.

Докажем теперь равенство (12), т. е. покажем, что для любой функции $\varphi(t)$ из пространства K мы имеем

$$\Phi(\varphi) = \int \widetilde{\varphi}(\lambda)\,dZ(\lambda).$$

В самом деле, случайная величина $\Phi(\varphi)$ из $\mathfrak{K}$ соответствует функции $\tilde{\varphi}(\lambda)$ из L^2_σ. Но функцию $\tilde{\varphi}(\lambda)$ можно приблизить суммами вида

$$\sum_{k=1}^{n} \tilde{\varphi}(\lambda_k)\chi_{\Delta_k}(\lambda),$$

где λ_k — точка из множества Δ_k, а значит, случайная величина $\Phi(\varphi)$ является пределом сумм вида

$$\sum_{k=1}^{n} \tilde{\varphi}(\lambda_k) Z(\Delta_k).$$

Но это и означает, что

$$\Phi(\varphi) = \int \tilde{\varphi}(\lambda)\, dZ(\lambda).$$

Теорема 3 доказана.

Мы получили, таким образом, изображение стационарного в широком смысле процесса Φ в виде преобразования Фурье случайной меры $Z(\Delta)$. По изложенным выше соображениям это изображение может считаться полноценным лишь для гауссовских случайных процессов — для этих процессов случайные величины, соответствующие непересекающимся множествам Δ_1 и Δ_2, независимы между собой.

Аналогичное разложение можно получить и для процессов со стационарными приращениями n-го порядка, но мы не будем останавливаться на этом вопросе.

§ 4. ОБОБЩЕННЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ С НЕЗАВИСИМЫМИ В КАЖДОЙ ТОЧКЕ ЗНАЧЕНИЯМИ

1. Процессы с независимыми значениями. В рамках обычной теории случайных процессов невозможно ввести процессы с непрерывно изменяющимся временем так, чтобы значения этих процессов в различных точках были независимыми случайными величинами. Применение теории обобщенных случайных процессов позволяет рассматривать и такие процессы. При этом устанавливаются связи между процессами с независимыми в каждой точке значениями и безгранично делимыми случайными величинами.

Мы будем говорить, что *обобщенный случайный процесс имеет независимые в каждой точке значения, если*

случайные величины $\Phi(\varphi_1)$ и $\Phi(\varphi_2)$ *) *независимы между собой при условии, что $\varphi_1(t)\varphi_2(t) = 0$.* Физически это означает, что результаты измерения случайной величины Φ в непересекающиеся промежутки времени не зависят друг от друга. Примером процесса с независимыми в каждой точке значениями является, например, скорость частицы в броуновском движении.

Удобнее всего вести исследование процессов с независимыми в каждой точке значениями при помощи характеристических функционалов. Мы дадим условия того, чтобы некоторый функционал был характеристическим функционалом процесса с независимыми в каждой точке значениями.

Теорема 1. *Для того чтобы непрерывный функционал $L(\varphi) \not\equiv 0$ был характеристическим функционалом обобщенного случайного процесса с независимыми в каждой точке значениями, необходимо и достаточно, чтобы он был положительно определенным функционалом и чтобы для любых функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, произведение которых равно нулю, выполнялось равенство*

$$L(\varphi_1 + \varphi_2) = L(\varphi_1) L(\varphi_2). \tag{1}$$

Доказательство. Пусть функционал $L(\varphi)$ является характеристическим функционалом обобщенного случайного процесса Φ с независимыми в каждой точке значениями. Как было показано в п. 6 § 2, он непрерывен и положительно определен.

Возьмем две функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ из пространства K. Очевидно, что

$$L(\varphi_1 + \varphi_2) = \mathsf{E}\,[e^{i\Phi(\varphi_1+\varphi_2)}] = \mathsf{E}\,[e^{i\Phi(\varphi_1)} e^{i\Phi(\varphi_2)}].$$

Если функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ таковы, что $\varphi_1(t)\varphi_2(t) = 0$, то случайные величины $\Phi(\varphi_1)$ и $\Phi(\varphi_2)$ независимы по определению процесса с независимыми значениями. Независимы тогда и случайные величины $e^{i\Phi(\varphi_1)}$ и $e^{i\Phi(\varphi_2)}$. Поскольку среднее значение независимых случайных величин равно произведению их средних значений, то при $\varphi_1(t)\varphi_2(t) = 0$ выполняется равенство

$$L(\varphi_1 + \varphi_2) = \mathsf{E}\,(e^{i\Phi(\varphi_1)}]\,\mathsf{E}\,[e^{i\Phi(\varphi_2)}] = L(\varphi_1) L(\varphi_2).$$

*) Мы рассматриваем в этом параграфе лишь вещественные функции $\varphi(t)$.

В самом деле, случайная величина $\Phi(\varphi)$ из $\mathfrak{K}$ соответствует функции $\tilde{\varphi}(\lambda)$ из L_σ^2. Но функцию $\tilde{\varphi}(\lambda)$ можно приблизить суммами вида

$$\sum_{k=1}^{n} \tilde{\varphi}(\lambda_k)\chi_{\Delta_k}(\lambda),$$

где λ_k — точка из множества Δ_k, а значит, случайная величина $\Phi(\varphi)$ является пределом сумм вида

$$\sum_{k=1}^{n} \tilde{\varphi}(\lambda_k) Z(\Delta_k).$$

Но это и означает, что

$$\Phi(\varphi) = \int \tilde{\varphi}(\lambda)\, dZ(\lambda).$$

Теорема 3 доказана.

Мы получили, таким образом, изображение стационарного в широком смысле процесса Φ в виде преобразования Фурье случайной меры $Z(\Delta)$. По изложенным выше соображениям это изображение может считаться полноценным лишь для гауссовских случайных процессов — для этих процессов случайные величины, соответствующие непересекающимся множествам Δ_1 и Δ_2, независимы между собой.

Аналогичное разложение можно получить и для процессов со стационарными приращениями n-го порядка, но мы не будем останавливаться на этом вопросе.

§ 4. ОБОБЩЕННЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ С НЕЗАВИСИМЫМИ В КАЖДОЙ ТОЧКЕ ЗНАЧЕНИЯМИ

1. Процессы с независимыми значениями. В рамках обычной теории случайных процессов невозможно ввести процессы с непрерывно изменяющимся временем так, чтобы значения этих процессов в различных точках были независимыми случайными величинами. Применение теории обобщенных случайных процессов позволяет рассматривать и такие процессы. При этом устанавливаются связи между процессами с независимыми в каждой точке значениями и безгранично делимыми случайными величинами.

Мы будем говорить, что *обобщенный случайный процесс имеет независимые в каждой точке значения, если*

случайные величины $\Phi(\varphi_1)$ и $\Phi(\varphi_2)$ *) *независимы между собой при условии, что* $\varphi_1(t)\varphi_2(t) = 0$. Физически это означает, что результаты измерения случайной величины Φ в непересекающиеся промежутки времени не зависят друг от друга. Примером процесса с независимыми в каждой точке значениями является, например, скорость частицы в броуновском движении.

Удобнее всего вести исследование процессов с независимыми в каждой точке значениями при помощи характеристических функционалов. Мы дадим условия того, чтобы некоторый функционал был характеристическим функционалом процесса с независимыми в каждой точке значениями.

Теорема 1. *Для того чтобы непрерывный функционал $L(\varphi) \not\equiv 0$ был характеристическим функционалом обобщенного случайного процесса с независимыми в каждой точке значениями, необходимо и достаточно, чтобы он был положительно определенным функционалом и чтобы для любых функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, произведение которых равно нулю, выполнялось равенство*

$$L(\varphi_1 + \varphi_2) = L(\varphi_1) L(\varphi_2). \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть функционал $L(\varphi)$ является характеристическим функционалом обобщенного случайного процесса Φ с независимыми в каждой точке значениями. Как было показано в п. 6 § 2, он непрерывен и положительно определен.

Возьмем две функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ из пространства K. Очевидно, что

$$L(\varphi_1 + \varphi_2) = \mathsf{E}\,[e^{i\Phi(\varphi_1+\varphi_2)}] = \mathsf{E}\,[e^{i\Phi(\varphi_1)} e^{i\Phi(\varphi_2)}].$$

Если функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ таковы, что $\varphi_1(t)\varphi_2(t) = 0$, то случайные величины $\Phi(\varphi_1)$ и $\Phi(\varphi_2)$ независимы по определению процесса с независимыми значениями. Независимы тогда и случайные величины $e^{i\Phi(\varphi_1)}$ и $e^{i\Phi(\varphi_2)}$. Поскольку среднее значение независимых случайных величин равно произведению их средних значений, то при $\varphi_1(t)\varphi_2(t) = 0$ выполняется равенство

$$L(\varphi_1 + \varphi_2) = \mathsf{E}\,(e^{i\Phi(\varphi_1)}]\,\mathsf{E}\,[e^{i\Phi(\varphi_2)}] = L(\varphi_1) L(\varphi_2).$$

*) Мы рассматриваем в этом параграфе лишь вещественные функции $\varphi(t)$.

Необходимость условий теоремы доказана. Перейдем к доказательству достаточности этих условий. Полагая в равенстве (1) $\varphi_2(t)=0$ и выбирая φ_1 так, чтобы $L(\varphi_1)\neq 0$, мы получим, что $L(0)=1$. Далее, поскольку функционал $L(\varphi)$ непрерывен и положительно определен, то по теореме 3 из § 2 он является характеристическим функционалом некоторого обобщенного случайного процесса Φ. Нам надо лишь показать, что значения процесса Φ в каждой точке независимы друг от друга, т. е. что случайные величины $\Phi(\varphi_1)$ и $\Phi(\varphi_2)$ независимы, если $\varphi_1(t)\varphi_2(t)=0$.

Заметим для этого, что из равенства $\varphi_1(t)\varphi_2(t)=0$ вытекает по условию теоремы выполнение равенства

$$L(s\varphi_1+s\varphi_2)=L(s\varphi_1)L(s\varphi_2) \tag{2}$$

для всех значений s. Характеристическая функция случайной величины $\Phi(\varphi)$ равна $L(s\varphi)$. Поэтому

$$f(s)=f_1(s)f_2(s), \tag{2'}$$

где через $f_1(s)$, $f_2(s)$, $f(s)$ обозначены соответственно характеристические функции случайных величин $\Phi(\varphi_1)$, $\Phi(\varphi_2)$ и $\Phi(\varphi_1+\varphi_2)=\Phi(\varphi_1)+\Phi(\varphi_2)$.

Но из выполнения равенства (2′) вытекает независимость случайных величин $\Phi(\varphi_1)$ и $\Phi(\varphi_2)$. Таким образом, случайные величины $\Phi(\varphi_1)$ и $\Phi(\varphi_2)$ независимы, если $\varphi_1(t)\varphi_2(t)=0$.

Примером функционала $L(\varphi)$, удовлетворяющего равенству (1), является любой функционал вида

$$\left.\begin{aligned} L(\varphi)&=e^{M(\varphi)},\\ M(\varphi)&=\int f[\varphi(t),\varphi'(t),\ldots,\varphi^{(n)}(t),t]\,dt,\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где $f(x_0,\ldots,x_n,t)$ непрерывная функция от $n+2$ переменных, такая, что $f(0,\ldots,0,t)=0$. В самом деле, если $\varphi_1(t)\varphi_2(t)=0$, то интеграл, выражающий $M(\varphi_1+\varphi_2)$, является суммой двух интегралов, распространенных на множества $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$, на которых функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ соответственно отличны от нуля (интеграл по остальной части оси равен нулю в силу условия $f(0,\ldots,0,t)=0$). Но на множестве $\mathfrak{M}_1$ сумма $\varphi_1(t)+\varphi_2(t)$ совпадает с $\varphi_1(t)$, а на множестве $\mathfrak{M}_2$ эта сумма совпадает с $\varphi_2(t)$; поэтому

$$M(\varphi_1+\varphi_2)=\int\limits_{\mathfrak{M}_1} f\left[\varphi_1(t),\varphi_1'(t),\ldots,\varphi_1^{(n)}(t),t\right]dt+\int\limits_{\mathfrak{M}_2} f\left[\varphi_2(t),\varphi_2'(t),\ldots,\varphi_2^{(n)}(t),t\right]dt.$$

Поскольку по определению множеств $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ правая часть равенства не изменится, если заменить интегралы по этим множествам интегралами по всей вещественной оси, то получаем, что *)

$$M(\varphi_1+\varphi_2)=M(\varphi_1)+M(\varphi_2)$$

и, следовательно,

$$L(\varphi_1+\varphi_2)=L(\varphi_1)L(\varphi_2).$$

Тем самым наше утверждение доказано. Число n в формуле (3) называется *порядком функционала* $L(\varphi)$.

2. Условия положительной определенности функционала $e^{\int f[\varphi(t)]\,dt}$. Выясним теперь, какие условия на функцию $f(x_1,\ldots,x_n,t)$ накладывает требование положительной определенности функционала $L(\varphi)$, заданного формулой (3). Рассмотрим сначала случай, когда функционал L задается формулой

$$L(\varphi)=e^{\int f[\varphi(t)]\,dt}. \tag{4}$$

Необходимые и достаточные условия положительной определенности такого функционала даются следующей теоремой.

Теорема 2. *Для того чтобы функционал $L(\varphi)$, задаваемый формулой (4), был положительно определен, необходимо и достаточно, чтобы функция $e^{sf(x)}$ была положительно определена при любых положительных значениях параметра s.*

Доказательство. Докажем сначала необходимость условия теоремы. Если функционал $L(\varphi)$ задается формулой (4), то его можно распространить на все кусочно-непрерывные

*) Функционал $M(\varphi)$, такой, что $M(\varphi_1+\varphi_2)=M(\varphi_1)+M(\varphi_2)$, если $\varphi_1(t)\varphi_2(t)=0$, называется *локальным*. Было бы интересно найти общий вид локальных функционалов.

финитные функции, причем и после этого распространения будет выполняться условие

$$\sum_{j,k=1}^{m} L(\varphi_j-\varphi_k)\xi_j\bar{\xi}_k \geqslant 0 \tag{5}$$

положительной определенности. Обозначим через $\varphi_j(t)$ функцию, равную x_j при $0\leqslant t\leqslant s$ и равную нулю вне этого отрезка. Тогда для функций $\varphi_j(t)$, $1\leqslant j\leqslant m$, неравенство (5) примет вид

$$\sum_{j,k=1}^{m} e^{sf(x_j-x_k)}\xi_j\bar{\xi}_k \geqslant 0.$$

Этим и доказана положительная определенность функции $e^{sf(x)}$.

Докажем теперь, что условие теоремы достаточно, т. е. что из положительной определенности функции $e^{sf(x)}$ при всех $s>0$ вытекает положительная определенность функционала

$$L(\varphi)=e^{\int f[\varphi(t)]\,dt}.$$

Иными словами, докажем, что если функция $e^{sf(x)}$ положительно определена при всех $s>0$, то для любых функций $\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)$ из пространства K матрица $A=\|a_{ij}\|$ с элементами

$$a_{ij}=e^{\int_{-\infty}^{\infty} f[\varphi_i(t)-\varphi_j(t)]\,dt}$$

положительно определена. Обозначим через $[-b, b]$ отрезок, вне которого все функции $\varphi_i(t)$, $1\leqslant i\leqslant m$, обращаются в нуль. Тогда элементы матрицы A можно представить в следующем виде:

$$a_{ij}=e^{\int_{-b}^{b} f[\varphi_i(t)-\varphi_j(t)]\,dt}.$$

Поскольку $f(x)$ — непрерывная функция, то

$$\int_{-b}^{b} f[\varphi_i(t)-\varphi_j(t)]\,dt=\lim_{k\to\infty}\frac{b}{k}\sum_{q=-k}^{k-1}\alpha_q,$$

где

$$\alpha_q=f\left[\varphi_i\left(\frac{qb}{k}\right)-\varphi_j\left(\frac{qb}{k}\right)\right].$$

Поэтому нам достаточно доказать положительную определенность матрицы A_k с элементами

$$a_{ij}=e^{\frac{b}{k}\sum_{q=-k}^{k-1}\alpha_q}=\prod_{q=-k}^{k-1}e^{\frac{b}{k}\alpha_q}.$$

Но матрица, элементы которой равны произведениям соответствующих элементов положительно определенных матриц, положительно определена (теорема Шура, доказательство см. ниже). Поэтому положительная определенность матрицы A_k (а тем самым и матрицы A) вытекает из положительной определенности матриц A_{kq} с элементами

$$a_{ij}^{(kq)}=e^{\frac{b}{k}\alpha_q}=e^{\frac{b}{k}f\left[\varphi_i\left(\frac{qb}{k}\right)-\varphi_j\left(\frac{qb}{k}\right)\right]}.$$

Положительная же определенность матрицы A_{kq} вытекает из того, что по условию функция $e^{\frac{b}{k}f(t)}$ положительно определена. Тем самым наша теорема доказана.

Приведем для полноты доказательство упомянутой теоремы Шура.

Теорема. *Если эрмитовы матрицы $\|a_{ij}\|$ и $\|b_{ij}\|$ положительно определены, то и матрица $\|a_{ij}b_{ij}\|$ также положительно определена.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Каждая положительно определенная матрица $\|a_{ij}\|$ может быть представлена в виде суммы матриц вида $\|a_i\bar{a}_j\|$, т. е.*

$$a_{ij}=\sum_{p=1}^{m}a_i^{(p)}\bar{a}_j^{(p)}. \tag{6}$$

Доказательство. Любая положительно определенная эрмитова форма $\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_i\bar{x}_j$ может быть приведена к сумме квадратов, т. е. записана в виде

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_i\bar{x}_j=\sum_{p=1}^{m}x'_p\bar{x}'_p, \tag{7}$$

где x'_i — линейные комбинации переменных x_j

$$x'_p=\sum_{i=1}^{n}a_i^{(p)}x_i,\quad 1\leqslant p\leqslant m, \tag{8}$$

Подставляя в равенство (7) вместо x'_p выражения (8) и сравнивая коэффициенты при $x_i\bar{x}_j$, мы и получаем, что $a_{ij} = \sum_{p=1}^{m} \alpha_i^{(p)}\bar{\alpha}_j^{(p)}$.

Справедливо и обратное утверждение: любая матрица, элементы которой имеют вид (6), положительно определена. В самом деле, для любых $\xi_1, \ldots, \xi_n$ выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i\bar{\alpha}_j\xi_i\bar{\xi}_j = \left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\xi_i\right|^2 \geqslant 0,$$

а потому матрица $\|\alpha_i\bar{\alpha}_j\|$ положительно определена. Но тогда положительно определена и сумма матриц такого вида.

Перейдем теперь к доказательству теоремы. Пусть матрицы $\|a_{ij}\|$ и $\|b_{ij}\|$ положительно определены. Тогда по лемме их элементы можно представить в следующем виде:

$$a_{ij} = \sum_{p=1}^{m} \alpha_i^{(p)}\bar{\alpha}_j^{(p)}$$

и

$$b_{ij} = \sum_{q=1}^{l} \beta_i^{(q)}\bar{\beta}_j^{(q)}.$$

Отсюда вытекает, что матрица $\|a_{ij}b_{ij}\|$ является суммой матриц с элементами вида

$$\alpha_i^{(p)}\beta_i^{(q)}\overline{\alpha_j^{(p)}\beta_j^{(q)}}$$

и потому положительно определена.

Из теорем 1 и 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. *Для того чтобы функционал $L(\varphi)$, определяемый формулой*

$$L(\varphi) = e^{\int_{-\infty}^{\infty} f[\varphi(t)]\,dt},$$

где $f(x)$ — непрерывная функция, такая, что $f(0) = 0$, был характеристическим функционалом некоторого обобщенного случайного процесса с независимыми в каждой точке значениями, необходимо и достаточно, чтобы функция $e^{sf(x)}$ была положительно определена при всех положительных значениях s.

Из свойств положительно определенных функций вытекает, что в этом случае для любого x выполняется неравенство

$$|e^{sf(x)}| \leqslant e^{sf(0)} = 1.$$

3. Процессы с независимыми значениями и условно положительно определенные функции. Для окончательного описания характеристических функционалов обобщенных случайных процессов с независимыми в каждой точке значениями, задаваемых формулой вида (4), нам осталось описать функции $f(x)$, такие, что функция $e^{sf(x)}$ положительно определена при всех положительных значениях s. Отметим сначала, что если функция $e^{sf(x)}$ положительно определена, а $s > 0$, то $e^{sf(-x)} = \overline{e^{sf(x)}} = e^{s\overline{f(x)}}$ и потому $f(-x) = \overline{f(x)}$. Отсюда вытекает, что для любых вещественных чисел $x_1, \ldots, x_n$ и комплексных чисел $\xi_1, \ldots, \xi_n$ выражение

$$\sum_{j,k=1}^{n} f(x_j - x_k)\xi_j\bar{\xi}_k$$

принимает вещественные значения.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 4. *Для того чтобы функция $e^{sf(x)}$ была положительно определена при всех положительных значениях s, необходимо и достаточно, чтобы неравенство*

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_j - x_k)\xi_j\bar{\xi}_k \geqslant 0 \qquad (9)$$

выполнялось при всех вещественных значениях $x_1, \ldots, x_n$ и любых комплексных значениях $\xi_1, \ldots, \xi_n$, таких, что $\sum_{k=1}^{n} \xi_k = 0$.

Доказательство. Докажем сначала, что выполнение неравенства (9) при условии $\sum_{k=1}^{n} \xi_k = 0$ необходимо для положительной определенности функции $e^{sf(x)}$ при всех $s \geqslant 0$. Если функция $e^{sf(x)}$ положительно определена при всех $s \geqslant 0$, то для любых чисел $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и любых вещественных чисел

$x_1, \ldots, x_n$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} e^{sf(x_i-x_j)}\xi_i\bar{\xi}_j \geqslant 0.$$

Разлагая $e^{sf(x)}$ по формуле Тейлора, получаем, что

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} e^{sf(x_i-x_j)}\xi_i\bar{\xi}_j = \left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right|^2 + s\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_i-x_j)\xi_i\bar{\xi}_j + \\ + \frac{s^2}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} e^{s\theta_{ij}f(x_i-x_j)}f^2(x_i-x_j)\xi_i\bar{\xi}_j, \quad (10)$$

где θ_{ij} — некоторые числа, лежащие между 0 и 1.

Предположим теперь, что $\sum_{k=1}^{n}\xi_k=0$, но неравенство (9) не выполнено, т. е. $\sum\sum f(x_i-x_j)\xi_i\bar{\xi}_j<0$. Тогда, выбирая достаточно малое s, мы получим из формулы (10), что

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} e^{sf(x_i-x_j)}\xi_i\bar{\xi}_j < 0$$

вопреки предположению о положительной определенности $e^{sf(x)}$.

Покажем теперь достаточность условия (9). Мы докажем сначала, что если условие (9) выполнено, то для любых фиксированных значений $x_1, \ldots, x_n$ можно найти такое число s_0, что при $0 \leqslant s < s_0$ матрица с элементами

$$a_{ij} = 1 + sf(x_i - x_j)$$

положительно определена. Пусть

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_i-x_j)\xi_i\bar{\xi}_j \geqslant 0,$$

когда $\sum_{i=1}^{n}\xi_i=0$. Обозначим через A наименьшее значение, принимаемое эрмитовой формой

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_i-x_j)\xi_i\bar{\xi}_j \quad (11)$$

на гиперплоскости $\sum_{i=1}^{n}\xi_i=1$. Такое значение существует, так как форма (11) имеет в силу неравенства (9) минимум на гиперплоскости $\sum_{k=1}^{n}\xi_k=0$, а тогда она достигает минимума и на любой параллельной ей гиперплоскости.

Легко видеть, что для любых значений $\xi_1, \ldots, \xi_n$ в этом случае выполняется неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} f(x_i-x_j)\xi_i\bar{\xi}_j \geqslant (A+1)\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right|^2. \quad (12)$$

Нам нужно вывести положительную определенность матрицы с элементами $1+sf(x_i-x_j)$ при достаточно малых s, т. е. проверить положительную определенность формы

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right|^2 + s\sum_{i,j=1}^{n} f(x_i-x_j)\xi_i\bar{\xi}_j.$$

Но в силу неравенства (12) мы имеем

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right|^2 + s\sum_{i,j=1}^{n} f(x_i-x_j)\xi_i\bar{\xi}_j = \\ = (1-s)\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right|^2 + s\left[\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} f(x_i-x_j)\xi_i\bar{\xi}_j\right] \geqslant \\ \geqslant (1-s)\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right|^2 + s(A+1)\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right|^2 = (1+sA)\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right|^2.$$

Поэтому, если $A>0$, то неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right|^2 + s\sum_{i,j=1}^{n} f(x_i-x_j)\xi_i\bar{\xi}_j \geqslant 0$$

выполняется при всех $s>0$. Если же $A<0$, то это неравенство выполняется при $s<-\frac{1}{A}$. По теореме Шура отсюда следует, что матрица с элементами $\left[1+\frac{s}{n}f(x_i-x_j)\right]^n$ также положительно определена при любом s и достаточно большом n. Значит, положительно определен и предел этой матрицы, т. е. матрица с элементами

$$b_{ij}=e^{sf(x_i-x_j)}=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{sf(x_i-x_j)}{n}\right]^n.$$

Таким образом, матрица с элементами $e^{sf(x_i-x_j)}$ положительно определена. Но это и означает положительную определенность функции $e^{sf(x)}$. Теорема 4 доказана.

Перейдем теперь к разысканию всех непрерывных функций $f(x)$, таких, что

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} f(x_i-x_j)\,\xi_i\bar{\xi}_j\geqslant 0 \tag{13}$$

при условии $\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i=0$. Легко показать, переходя к интегральным суммам, что все такие функции удовлетворяют неравенству $(f,\ \varphi*\varphi^*)\geqslant 0$, если $\int\varphi(x)\,dx=0$.

Но $\int\limits_K\psi'(x)\,dx=0$ для всех функций $\psi(x)$ из пространства K. Поэтому для всех функций $f(x)$, удовлетворяющих неравенству (13), при $\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i=0$, выполняется неравенство

$$(f,\ \psi'*(\psi')^*)\geqslant 0.$$

Справедливо и обратное утверждение.

Мы назвали в главе I, § 4, п. 1 такие функции условно положительно определенными функциями первого порядка.

Мы видим, таким образом, что *функция* $f(x)$, *для которой удовлетворяется неравенство* (13) *при условии* $\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i=0$, *является условно положительно определенной функцией первого порядка.*

Вид таких функций был установлен нами в главе II, § 4, п. 4. Используя этот результат, мы получаем следующую теорему.

Теорема 5. *Для того чтобы функционал* $L(\varphi)$, *задаваемый формулой*

$$L(\varphi)=e^{\int f[\varphi(t)]\,dt}$$

являлся характеристическим функционалом обобщенного случайного процесса Φ *с независимыми значениями в каждой точке, необходимо и достаточно, чтобы непрерывная функция* $f(x)$ *имела вид*

$$f(x)=\int\limits_{|\lambda|>0}[e^{i\lambda x}-\alpha(\lambda)(1+i\lambda x)]\,d\sigma(\lambda)+a_0+ia_1x-\frac{a_2x^2}{2!}. \tag{14}$$

Здесь $\sigma(\lambda)$ — *положительная мера, такая, что* $\int\limits_{|\lambda|>1}d\sigma(\lambda)+\int\limits_{0<|\lambda|\leqslant 1}\lambda^2\,d\sigma(\lambda)<\infty$, a_2 — *положительное число,* $\alpha(\lambda)$ — *функция из пространства* Z, *такая, что* $\alpha(\lambda)-1$ *имеет при* $\lambda=0$ *нуль третьего порядка, и* a_0, a_1 — *любые числа.*

При этом должно выполняться соотношение

$$\int\limits_{|\lambda|>0}[1-\alpha(\lambda)]\,d\sigma(\lambda)+a_0=0,$$

так как необходимо, чтобы имело место равенство $f(0)=0$.

Отметим, что среди функций, представимых формулой (14), имеются функции вида

$$f(x)=c\,(e^{ihx}-1).$$

Они возникают, когда мера $\sigma(\lambda)$ сосредоточена в точке $\lambda=h$ при соответствующем подборе функции $\alpha(\lambda)$ и постоянных a_0, a_1, a_2. В этом случае характеристический функционал $L(\varphi)$ определяется следующей формулой:

$$L(\varphi)=\exp\left[c\int[\exp ih\varphi(t)-1]\,dt\right]. \tag{15}$$

Обобщенные случайные процессы с такими характеристическими функционалами называются *пуассоновскими случайными процессами.*

4. Связь процессов с независимыми в каждой точке значениями и безгранично делимых законов распределения. Из теоремы 2 вытекает связь между процессами с независимыми значениями и безгранично делимыми случайными величинами. Случайная величина ξ называется *безгранично делимой*, если при любом значении n ее можно представить в виде

$$\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_n,$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины с одинаковыми законами распределения. Пусть $\chi(x)$ — характеристическая функция безгранично делимой случайной величины. Поскольку при сложении независимых случайных величин их характеристические функции перемножаются, функцию $\chi(x)$ при любом натуральном значении n можно представить в виде

$$\chi(x) = [\chi_n(x)]^n, \tag{16}$$

где $\chi_n(x)$ — характеристическая функция случайной величины ξ_n.

Имеет место следующая теорема, устанавливающая упомянутую выше связь между процессами с независимыми значениями и безгранично делимыми случайными величинами.

Теорема 6. *Для того чтобы функционал, определенный формулой*

$$L(\varphi) = e^{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f[\varphi(t)]\,dt},$$

где $f(x)$ — непрерывная функция, такая, что $f(0) = 0$, был характеристическим функционалом некоторого обобщенного случайного процесса с независимыми в каждой точке значениями, необходимо и достаточно, чтобы функция $e^{f(x)}$ была характеристической функцией некоторой безгранично делимой случайной величины.

Доказательство. Пусть функционал $L(\varphi)$ является характеристическим функционалом процесса с независимыми значениями. Тогда в силу теоремы 2 функция $e^{\frac{1}{n}f(x)}$ положительно определена при любом n и потому по теореме Бохнера является характеристической функцией некоторой случайной величины η (т. е. преобразованием Фурье некоторой положительной нормированной меры). Так как

$$e^{f(x)} = \left[e^{\frac{1}{n}f(x)}\right]^n,$$

то $e^{f(x)}$ является характеристической функцией случайной

величины

$$\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_n,$$

где все случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и распределены по тому же закону, что и величина η. Отсюда следует, что ξ является безгранично делимой случайной величиной.

Обратно, пусть $e^{f(x)}$ является характеристической функцией безгранично делимой случайной величины. Тогда при любом n функция $e^{\frac{1}{n}f(x)}$ является характеристической функцией некоторой случайной величины и потому положительно определена. Но тогда при любых m и n функция $e^{\frac{m}{n}f(x)}$ также положительно определена как произведение m положительно определенных функций. Наконец, функция $e^{sf(x)}$ положительно определена при любом положительном значении s как предел положительно определенных функций. Но тогда в силу теоремы 2 функционал $L(\varphi) = e^{\int f[\varphi(t)]\,dt}$ является характеристическим функционалом некоторого процесса с независимыми в каждой точке значениями.

Из доказанной теоремы следует, что если характеристическая функция безгранично делимой случайной величины не обращается в нуль, то она имеет вид $e^{f(x)}$, где $f(x)$ задается формулой вида (14).

Примером процесса с независимыми в каждой точке значениями может служить производная винеровского процесса (единичный процесс). Мы видели в § 2, п. 6, что характеристический функционал этого процесса имеет вид

$$L(\varphi) = e^{-\frac{1}{2}\int \varphi^2(t)\,dt}. \tag{17}$$

Но этот функционал является частным случаем функционала вида (4) при $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$.

5. Процессы, связанные с функционалами n-го порядка. Мы рассматривали до сих пор процессы с независимыми в каждой точке значениями, характеристические функционалы которых имеют вид $L(\varphi) = e^{M(\varphi)}$, где $M(\varphi) = \int f[\varphi(t)]\,dt$. Рассмотрим теперь процессы, у которых характеристические функционалы имеют более общий вид $L(\varphi) = e^{M(\varphi)}$, где

$$M(\varphi) = \int f[\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n)}]\, dt.$$

Почти не меняя проведенные выше рассуждения, мы можем указать *достаточные* условия для того, чтобы функционал $e^{M(\varphi)} = L(\varphi)$ был положительно определен, иными словами, для того, чтобы функционал $L(\varphi)$ являлся характеристическим для обобщенного случайного процесса с независимыми в каждой точке значениями. Эти условия даются следующей теоремой.

Теорема 7. *Для того чтобы функционал $L(\varphi) = e^{M(\varphi)}$, где*

$$M(\varphi) = \int f[\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n)}]\, dt, \tag{18}$$

был положительно определенным, достаточно, чтобы функция $e^{sf(x_0, \ldots, x_n)}$ была при любом $s > 0$ положительно определенной функцией переменных $x_0, \ldots, x_n$.

Доказательство этой теоремы протекает совершенно так же, как и доказательство соответствующей части теоремы 2, и мы его опускаем. Неизвестно, является ли сформулированное выше условие также и *необходимым* для положительной определенности функционала $L(\varphi)$.

Описание функций $f(x_0, \ldots, x_n)$, таких, что $e^{sf(x_0, \ldots, x_n)}$ — положительно определенная функция при $s > 0$, протекает буквально так же, как и для случая одного переменного. Не проводя детального доказательства, сформулируем соответствующую теорему.

Теорема 8. *Для того чтобы функция $e^{sf(x)} \equiv e^{sf(x_0, \ldots, x_n)}$ была положительно определена при всех значениях $s > 0$, необходимо и достаточно, чтобы неравенство $(f, \varphi * \varphi^*) \geqslant 0$ выполнялось для всех функций $\varphi(x) = \varphi(x_0, \ldots, x_n)$, таких, что $\int \varphi(x)\, dx = 0$.*

Функции $f(x)$, обладающие этим свойством, имеют согласно теореме 3 из главы II (§ 4, п. 4) следующий вид:

$$f(x) = \int\limits_{|\lambda| > 0} [e^{i(\lambda, x)} - \alpha(\lambda)(1 + i(\lambda, x))]\, d\sigma(\lambda) + \sum_{|k|=0}^{2} a_k \frac{(ix)^k}{k!}; \tag{19}$$

здесь $\sigma(\lambda)$ — положительная мера, такая, что интегралы

$$\int\limits_{0 < |\lambda| \leqslant 1} |\lambda|^2\, d\sigma(\lambda) \quad \text{и} \quad \int\limits_{|\lambda| > 1} d\sigma(\lambda)$$

сходятся, $\alpha(\lambda)$ — функция из пространства Z, такая, что $\alpha(\lambda) - 1$ имеет при $\lambda = 0$ нуль 3-го порядка, a_k, $|k| < 2$, — произвольные числа и a_k, $|k| = 2$, — такие числа, что форма $\sum\limits_{|r|=|s|=1} a_{r+s} \xi_r \bar{\xi}_s$ положительно определена. Разумеется, и здесь должно выполняться равенство

$$\int\limits_{|\lambda| > 0} [1 - \alpha(\lambda)]\, d\sigma(\lambda) + a_0 = 0.$$

6. Процессы обобщенного пуассоновского типа. Пусть в формуле (19) мера σ сосредоточена в точке $\lambda = h$. Подбирая функцию $\alpha(\lambda)$ и числа a_k, $|k| = 0, 1, 2$, мы можем добиться, чтобы функция $f(x)$ приняла вид

$$f(x) = C(e^{i(h, x)} - 1) = C(e^{i(h_0 x_0 + \ldots + h_n x_n)} - 1).$$

Характеристический функционал определяется в таком случае следующей формулой:

$$L(\varphi) = \exp\left[C \int \exp[ih_1 \varphi(t) + \ldots + ih_n \varphi^{(n)}(t)]\right] dt.$$

Процессы такого типа могут рассматриваться как обобщение рассмотренных выше пуассоновских случайных процессов. При этих процессах имеют место случайные скачки, распределенные по закону Пуассона, случайные изменения скорости, также распределенные по закону Пуассона, и т. д. вплоть до случайных изменений производных n-го порядка, распределенных по пуассоновскому закону.

7. Корреляционные функционалы и моменты для процессов с независимыми в каждой точке значениями. Найдем теперь общий вид корреляционного функционала для процесса Φ с независимыми в каждой точке значениями. Не ограничивая общности, мы можем считать, что среднее значение этого процесса равно нулю.

23 Зак. 1281. И. М. Гельфанд и Н. Я. Виленкин

Согласно теореме о ядре (гл. I, § 1, п. 3, теорема 5) корреляционный функционал любого вещественного обобщенного случайного процесса имеет вид

$$B(\varphi, \psi) = (B, \varphi(x)\psi(y)),$$

где B — обобщенная функция двух переменных. Покажем, что если процесс Φ имеет независимые значения в каждой точке, то обобщенная функция B сосредоточена на диагонали $x = y$ (т. е. что $(B, \theta(x, y)) = 0$, если функция $\theta(x, y)$ равна нулю в некоторой окрестности этой диагонали).

В самом деле, пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — такие функции из пространства K, что $\varphi(x)\psi(x) = 0$. Тогда по определению процесса Φ случайные величины $\Phi(\varphi)$ и $\Phi(\psi)$ независимы (см. п. 1). Поскольку среднее значение произведения независимых случайных величин равно произведению их средних значений, то

$$B(\varphi, \psi) = \mathsf{E}[\Phi(\varphi)\Phi(\psi)] = \mathsf{E}[\Phi(\varphi)]\,\mathsf{E}[\Phi(\psi)] = m(\varphi)m(\psi) = 0$$

(напомним, что мы рассматриваем процесс с нулевым средним значением).

Мы доказали, таким образом, что $B(\varphi, \psi) = 0$ для любых двух функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, таких, что произведение $\varphi(x)\psi(y)$ равно нулю в некоторой окрестности диагонали $x = y$. Но линейными комбинациями функций вида $\varphi(x)\psi(y)$, равных нулю в некоторой окрестности диагонали $x = y$, можно аппроксимировать любую функцию $\theta(x, y)$ из пространства K, равную нулю в некоторой окрестности этой диагонали. Таким образом, мы доказали, что

$$(B, \theta(x, y)) = 0,$$

если функция $\theta(x, y)$ обращается в нуль в некоторой окрестности диагонали $x = y$. Но это и значит, что обобщенная функция B сосредоточена на диагонали $x = y$.

В выпуске 2 (гл. II, § 4, п. 3) был указан общий вид обобщенных функций для пространства $K(a)$. Из этого результата вытекает, что обобщенная функция B имеет вид

$$(B, \theta) = \int \sum_{j,k} Q_{jk}(x, y) \frac{\partial^{j+k}\theta(x, y)}{\partial x^j\, \partial y^k}\, dx\, dy,$$

где $Q_{jk}(x, y)$ — непрерывные функции, такие, что на каждом ограниченном множестве лишь конечное число функций $Q_{jk}(x, y)$ отлично от нуля. Поскольку обобщенная функция B сосредоточена на диагонали $x = y$, то мы получаем, что

$$(B, \theta) = \int \sum_{j,k} R_{jk}(x) \left.\frac{\partial^{j+k}\theta(x, y)}{\partial x^j\, \partial y^k}\right|_{x=y} dx,$$

где положено $R_{jk}(x) = Q_{jk}(x, x)$.

Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 9. *Корреляционный функционал $B(\varphi, \psi)$ для процессов с независимыми в каждой точке значениями задается следующей формулой*:

$$B(\varphi, \psi) = \int \sum_{j,k} R_{jk}(x)\varphi^{(j)}(x)\psi^{(k)}(x)\,dx, \tag{20}$$

где лишь конечное число функций $R_{jk}(x)$ отлично от нуля на каждом конечном отрезке.

Поскольку функционал $B(\varphi, \psi)$ положительно определен, то для любой функции $\varphi(x)$ должно выполняться неравенство

$$\int \sum_{j,k} R_{jk}(x)\varphi^{(j)}(x)\varphi^{(k)}(x)\,dx \geqslant 0. \tag{21}$$

Совершенно аналогично доказывается следующая общая теорема.

Теорема 9′. *Момент n-го порядка обобщенного случайного процесса с независимыми в каждой точке значениями задается формулой*

$$m_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \int \sum_{j_1, \ldots, j_n} R_{j_1, \ldots, j_n}(x)\varphi_1^{(j_1)}(x)\ldots\varphi_n^{(j_n)}(x)\,dx, \tag{22}$$

где $R_{j_1, \ldots, j_n}(x)$ — непрерывные функции, причем на каждом конечном отрезке лишь конечное число этих функций отлично от нуля.

8. Гауссовские процессы с независимыми в каждой точке значениями. Результаты, полученные нами в предыдущем пункте, позволяют указать общий вид гауссовских процессов с независимыми в каждой точке значениями. Мы знаем, что гауссовский процесс Φ полностью определяется своим корреляционным функционалом $B(\varphi, \psi)$ (мы считаем здесь, что среднее значение $m(\varphi)$ процесса Φ равно нулю). Распределение вероятностей для гауссовского процесса с корреляционным функционалом $B(\varphi, \psi)$ имеет вид

$$P_n(X) = \frac{|\det \Lambda|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_X e^{-\frac{1}{2}(\Lambda x, x)}\, dx, \tag{23}$$

где Λ — матрица, обратная матрице $\|B(\varphi_k, \varphi_r)\|$. Но мы знаем уже общий вид корреляционных функционалов для процессов с независимыми в каждой точке значениями. Отсюда следует, что гауссовский процесс Φ с независимыми в каждой точке значениями задается следующим образом. Рассмотрим билинейный функционал

$$B(\varphi, \psi) = \int \sum_{j,\,k=1}^{n} R_{jk}(x)\, \varphi^{(j)}(x)\, \psi^{(k)}(x)\, dx, \tag{24}$$

такой, что на каждом конечном отрезке лишь конечное число функций $R_{jk}(x)$ отлично от нуля, причем для любой функции $\varphi(x)$ из пространства K выполняется неравенство $B(\varphi, \varphi) \geqslant 0$. Сопоставим любым функциям $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ из пространства K случайную величину $\Phi(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, для которой распределение вероятностей задается формулой (23), где Λ — матрица, обратная матрице $\|B(\varphi_k, \varphi_r)\|$. Тогда эта совокупность распределений вероятностей задает гауссовский процесс с независимыми в каждой точке значениями. Обратно, любой такой процесс может быть получен указанным способом.

Таким образом, *каждому гауссовскому процессу с независимыми в каждой точке значениями можно сопоставить однозначно определенный билинейный функционал* (24) *с указанными выше свойствами, причем каждый такой функционал определяет гауссовский процесс с независимыми в каждой точке значениями.*

Примеры. Пусть Φ_0 — единичный процесс (см. п. 5 § 2), а T — любой дифференциальный оператор конечного порядка. Тогда процесс $\Phi = T\Phi_0$ будет гауссовским процессом с независимыми в каждой точке значениями. Действительно, в вещественном случае корреляционный функционал $B(\varphi, \psi)$ для процесса Φ имеет вид

$$B(\varphi, \psi) = \mathsf{E}\,[\Phi(\varphi)\,\Phi(\psi)] = \mathsf{E}\,[T\,\Phi_0(\varphi)\,T\,\Phi_0(\psi)] =$$
$$= \mathsf{E}\,[\Phi_0(T\varphi)\,\Phi_0(T\psi)] = B_0(T\varphi, T\psi),$$

где B_0 — корреляционный функционал процесса Φ_0. Но корреляционный функционал $B_0(\varphi, \psi)$ для единичного процесса имеет вид

$$B_0(\varphi, \psi) = \int \varphi(x)\,\psi(x)\,dx.$$

Поэтому

$$B(\varphi, \psi) = \int T\varphi(x)\, T\psi(x)\, dx. \tag{25}$$

Так как функционал вида (25) является частным случаем функционала вида (24), то процесс $T\Phi_0$ является гауссовским процессом с независимыми в каждой точке значениями.

Разумеется, не все гауссовские процессы с независимыми в каждой точке значениями имеют вид $T\Phi_0$, так как не все положительно определенные функционалы вида (24) представимы формулой вида (25).

§ 5. ОБОБЩЕННЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ

1. Основные определения. Мы рассматривали до сих пор обобщенные случайные процессы, т. е. обобщенные случайные функции одного переменного. В этом параграфе мы рассмотрим обобщенные случайные функции нескольких переменных. Чтобы отличать их от функций одного переменного, будем называть такие функции *обобщенными случайными полями.*

Итак, мы будем говорить, что задано обобщенное случайное поле Φ, зависящее от n переменных, если каждому набору

$$\{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)\}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n)$$

бесконечно дифференцируемых финитных функций от n переменных соответствует m-мерная случайная величина $\{\Phi(\varphi_1), \ldots, \Phi(\varphi_m)\}$, причем распределения вероятностей этих случайных величин удовлетворяют условиям согласованности и непрерывности (поскольку эти условия формулируются так же, как и для функций одного переменного, мы отсылаем читателя за точными формулировками к § 1).

Значительная часть теории обобщенных случайных полей аналогична соответствующей части теории обобщенных случайных процессов. Мы ограничимся в этих случаях лишь формулировкой соответствующих результатов (например, в теории однородных полей, аналогичной теории стационарных процессов). Существенно новые результаты, возникающие лишь в теории случайных полей, касаются поведения полей при вращениях и отражениях пространства R_n, на котором заданы функции $\varphi(x)$. При этом мы не ограничимся рассмотрением скалярных полей, сопоставляющих каждой функции $\varphi(x)$ из K одну случайную величину $\Phi(\varphi)$. Мы рассмотрим и многомерные поля, т. е. будем сопоставлять каждой функции $\varphi(x)$ из K случайный вектор

$$\{\Phi_1(\varphi), \ldots, \Phi_N(\varphi)\}.$$

Разумеется, при этом набору функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ сопоставляется случайная матрица с элементами $\Phi_i(\varphi_j)$. Для многомерных полей мы также рассмотрим вопрос об их преобразованиях при вращениях и отражениях пространства R_n.

2. Однородные случайные поля и поля с однородными приращениями s-го порядка. В этом пункте мы сформулируем определения и теоремы, аналогичные результатам, полученным в § 3. Аналогом понятия стационарного обобщенного случайного процесса является понятие *однородного обобщенного случайного поля.*

Обобщенное случайное поле Φ называется однородным, если для любых функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ из пространства K и любого вектора $h=(h_1, \ldots, h_n)$ распределения вероятностей случайных величин

$$\{\Phi(\varphi_1(x)), \ldots, \Phi(\varphi_m(x))\}$$

и

$$\{\Phi(\varphi_1(x+h)), \ldots, \Phi(\varphi_m(x+h))\}$$

совпадают.

Точно так же, как для стационарных процессов, можно показать, что *корреляционный функционал $B(\varphi, \psi)$ однородного обобщенного случайного поля имеет вид*

$$B(\varphi, \psi)=\int \tilde{\varphi}(\lambda)\,\bar{\tilde{\psi}}(\lambda)\,d\sigma(\lambda), \qquad (1)$$

где $\tilde{\varphi}(\lambda)$ и $\tilde{\psi}(\lambda)$ — преобразования Фурье функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, σ — положительная мера степенного роста.

Эта мера называется *спектральной мерой* обобщенного случайного поля Φ.

Назовем, далее, *обобщенным случайным полем с однородными приращениями s-го порядка* такое поле Φ, что все его частные производные *) $\Phi^{(j)}$ порядка s (т. е. такие, что $|j|=s$) являются однородными обобщенными случайными полями.

Очевидно, что линейные комбинации однородных обобщенных случайных полей также однородны. Поэтому, если поле Φ имеет однородные приращения s-го порядка, а D — линейный однородный дифференциальный оператор порядка s с постоянными коэффициентами, то поле $D\Phi$ однородно.

Формула для корреляционного функционала поля с однородными приращениями s-го порядка имеет почти тот же вид, что и для обобщенных процессов со стационарными приращениями s-го порядка. Она выводится аналогичным образом с использованием результатов из § 4 главы II.

Мы приведем формулу корреляционного функционала $B(\varphi, \psi)$ однородного обобщенного случайного процесса при условии, что все моменты функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ до $(s-1)$-го включительно равны нулю (иными словами, что выполняются равенства

$$\alpha_k=\int x^k\varphi(x)\,dx=0; \quad \beta_k=\int x^k\psi(x)\,dx=0$$

при $|k|\leqslant s-1$). В этом случае имеет место формула

$$B(\varphi, \psi)=\int_{\Omega_0} \tilde{\varphi}(\lambda)\,\bar{\tilde{\psi}}(\lambda)\,d\sigma(\lambda)+\sum_{|j|=|k|=s} a_{j+k}\alpha_j\bar{\beta}_k, \qquad (2)$$

*) Дифференцирование обобщенных полей определяется точно так же, как и для обобщеных случайных функций.

где $\tilde{\varphi}(\lambda)$ и $\tilde{\psi}(\lambda)$ — преобразования Фурье функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, σ — положительная мера степенного роста, такая, что интеграл $\int\limits_{0<|\lambda|<1} |\lambda|^{2s}\,d\sigma(\lambda)$ сходится, Ω_0 — область, получаемая из всего пространства удалением точки $\lambda=0$, α_j и β_k — моменты функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ соответственно, a_l, $|l|=s$, — такие числа, что форма

$$\sum_{|j|=|k|=s} a_{j+k}\alpha_j\overline{\beta}_k \tag{3}$$

положительно определена.

Справедливы и обратные утверждения. Именно, *если билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$ имеет вид, указанный в формуле* (1), *то можно построить однородное обобщенное случайное поле, для которого этот функционал является корреляционным.* Аналогично, *для функционалов вида* (2) *можно построить обобщенное случайное поле с однородными приращениями s-го порядка, для которого этот функционал является корреляционным* (точнее говоря, совпадает с корреляционным функционалом на подпространстве функций, имеющих нулевые моменты до $(s-1)$-го порядка включительно). Более того, указанные обобщенные поля можно выбрать так, чтобы они были гауссовскими, т. е. чтобы для любой функции φ из K случайная величина $\Phi(\varphi)$ имела гауссовский закон распределения.

3. Изотропные однородные обобщенные случайные поля. Как мы уже говорили в п. 1, наибольший интерес при изучении обобщенных случайных полей представляет рассмотрение поведения этих полей при вращениях и отражениях пространства R_n, в котором заданы функции $\varphi(x)$. Начнем с рассмотрения полей, инвариантных относительно этих преобразований. Такие поля называются изотропными. Итак, обобщенное случайное поле Φ называется *изотропным*, если для любых функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ из пространства K и любого вращения или отражения g пространства R_n, в котором заданы эти функции, случайные величины

$$\{\Phi(\varphi_1(x)), \ldots, \Phi(\varphi_m(x))\}$$

и

$$\{\Phi(\varphi_1(g^{-1}x)), \ldots, \Phi(\varphi_m(g^{-1}x))\}$$

имеют одинаковые законы распределения. Через $g^{-1}x$ обозначена точка, в которую переходит точка x при преобразовании g^{-1}. Функция $\varphi(g^{-1}x)$ для краткости будет обозначаться через $\varphi_g(x)$.

Обычно мы будем рассматривать поля, одновременно удовлетворяющие условиям однородности и изотропности. Условие однородности позволяет применить к этим полям формулу (1), а условие изотропности накладывает определенные ограничения на входящую в формулу (1) спектральную меру σ.

Именно, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Если обобщенное случайное поле Φ однородно и изотропно, то его спектральная мера σ инвариантна относительно вращений и отражений.*

Доказательство. Из изотропности поля Φ следует, что

$$B(\varphi, \psi) = B(\varphi_g, \psi_g)$$

для всех элементов g группы G вращений и отражений пространства R_n. Легко показать, что преобразование Фурье функции $\varphi_g(x)=\varphi(g^{-1}x)$ равно $\tilde{\varphi}(g^{-1}\lambda)$, где $\tilde{\varphi}(\lambda)$ — преобразование Фурье для $\varphi(x)$. Отсюда следует, что корреляционный функционал $B(\varphi_g, \psi_g)$ задается формулой

$$B(\varphi_g, \psi_g) = \int \tilde{\varphi}(g^{-1}\lambda)\,\overline{\tilde{\psi}}(g^{-1}\lambda)\,d\sigma(\lambda)$$

и потому

$$\int \tilde{\varphi}(\lambda)\,\overline{\tilde{\psi}}(\lambda)\,d\sigma(\lambda) = \int \tilde{\varphi}(g^{-1}\lambda)\,\overline{\tilde{\psi}}(g^{-1}\lambda)\,d\sigma(\lambda).$$

Сделаем в правой части этого равенства подстановку $g^{-1}\lambda=\lambda_1$. Мы получим, что

$$\int \tilde{\varphi}(\lambda)\,\overline{\tilde{\psi}}(\lambda)\,d\sigma(\lambda) = \int \tilde{\varphi}(\lambda)\,\overline{\tilde{\psi}}(\lambda)\,d\sigma(g\lambda).$$

Так как спектральная мера σ однозначно определяется полем Φ, то из этого равенства вытекает, что для любого множества A из R_n справедливо равенство $\sigma(A)=\sigma(gA)$, т. е. что мера σ инвариантна относительно вращений и отражений пространства R_n.

Лемма 1 позволяет упростить выражение для корреляционного функционала в случае, когда поле Φ однородно и изотропно, заменив интеграл по n-мерному пространству двойным интегралом. Обозначим через $\hat{\theta}_0(r)$ среднее значение функции $\tilde{\theta}(\lambda)=\tilde{\varphi}(\lambda)\overline{\tilde{\psi}}(\lambda)$ на сфере $S(r)$ радиуса r *), а через $\sigma(r)$ обозначим σ-меру шара радиуса r. Тогда имеет место формула

$$B(\varphi, \psi)=\int \hat{\theta}_0(r)\,d\sigma(r), \tag{4}$$

легко получаемая из формулы (1) переходом к сферическим координатам.

Но функция $\tilde{\theta}(\lambda)$ является преобразованием Фурье функции $\varphi * \psi^*(x)=\theta(x)$. Чтобы упростить формулу (4), дадим выражение функции $\hat{\theta}_0(r)$ через среднее значение функции $\theta(x)$ на сфере радиуса R. Для этого используем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть функция $\tilde{f}(\lambda)$ является преобразованием Фурье функции $f(x)$. Тогда среднее значение $\hat{f}_0(r)$ функции $\tilde{f}(\lambda)$ на сфере радиуса r выражается через средние значения $f_0(R)$ функции $f(x)$ на сферах радиусов R по формуле*

$$\hat{f}_0(r)=\frac{(2\pi)^{p+1}}{r^p}\int_0^\infty R^{p+1}f_0(R)\,J_p(rR)\,dR, \tag{5}$$

где $J_p(R)$ — бесселева функция порядка $p=\frac{n-2}{2}$

$$J_p(R)=\left(\frac{R}{2}\right)^p\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+p+1)}\left(\frac{R}{2}\right)^{2n}.$$

Эта лемма также весьма просто доказывается путем перехода к сферическим координатам в интеграле Фурье. При этом следует лишь иметь в виду, что

$$\int_0^\pi e^{iR\cos\theta}\sin^{2p}\theta\,d\theta=\frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\left(\frac{R}{2}\right)^p}J_p(R)$$

(см. И. М. Рыжик и И. С. Градштейн «Таблицы сумм, произведений и интегралов», М. — Л., 1951, 6.412 (6), стр. 345).

Применим эту теорему к интегралу (4). Принимая во внимание, что функция $\tilde{\theta}(\lambda)=\tilde{\varphi}(\lambda)\overline{\tilde{\psi}}(\lambda)$ является преобразованием Фурье функции $\theta(x)=\varphi*\psi^*(x)$, мы приходим к следующему результату.

Теорема 1. *Корреляционный функционал однородного и изотропного поля Φ выражается формулой*

$$B(\varphi, \psi)=(2\pi)^{p+1}\int_0^\infty\int_0^\infty \theta_0(R)\left(\frac{R}{r}\right)^p J_p(Rr)\,R\,dR\,d\sigma(r), \tag{6}$$

где σ — положительная мера на прямой, имеющая степенной рост, $\theta_0(R)$ — среднее значение функции $\theta(x)=\varphi*\psi^*(x)$ на сфере радиуса R, $p=\frac{n-2}{2}$ и $J_p(R)$ — бесселева функция порядка p.

4. Обобщенные случайные поля с однородными и изотропными приращениями s-го порядка. Введем поля с однородными и изотропными приращениями s-го порядка. Говорят, что поле Φ имеет *однородные и изотропные приращения s-го порядка*, если все частные производные $\Phi^{(j)}$, для которых $|j|=s$, являются однородными и изотропными полями.

Укажем вид корреляционного функционала $B(\varphi, \psi)$ для таких полей в случае, когда все моменты функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ до $(s-1)$-го порядка включительно равны нулю. В этом случае

$$B(\varphi, \psi)=B(\varphi_g, \psi_g), \tag{7}$$

где, напомним, положено $\varphi_g(x)=\varphi(g^{-1}x)$, $\psi_g(x)=\psi(g^{-1}x)$. Поэтому *спектральная мера σ, входящая в формулу*

$$B(\varphi, \psi)=\int_{\Omega_0}\tilde{\varphi}(\lambda)\overline{\tilde{\psi}}(\lambda)\,d\sigma(\lambda)+\sum_{|j|=|k|=s}a_{j+k}\alpha_j\bar{\beta}_k, \tag{8}$$

*) Иными словами, положим

$$\hat{\theta}_0(r)=\int_{S(r)}\tilde{\theta}(\lambda)\,d\tau(\lambda),$$

где $\tau(\lambda)$ — инвариантная относительно вращений мера на сфере $S(r)$, нормированная условием $\tau[S(r)]=1$.

для $B(\varphi, \psi)$ *) *инвариантна относительно вращений и отражений пространства* R_n, *а билинейная форма*

$$\sum_{|j|=|k|=s} a_{j+k}\alpha_j\overline{\beta_k} \tag{9}$$

удовлетворяет соотношению

$$\sum_{|j|=|k|=s} a_{j+k}\alpha_j\overline{\beta_k} = \sum_{|j|=|k|=s} a_{j+k}\alpha_j^{(g)}\overline{\beta_k^{(g)}}, \tag{10}$$

где через $\alpha_j^{(g)}$ *и* $\beta_k^{(g)}$ *обозначены моменты функций* $\varphi(g^{-1}x)$ *и* $\psi(g^{-1}x)$.

Пользуясь инвариантностью меры σ относительно вращений и отражений, мы, как и для изотропных процессов, доказываем, что первое слагаемое в формуле (7) может быть записано в виде, аналогичном формуле (6), с той лишь разницей, что мера $\sigma(r)$ должна не только иметь степенной рост, но и быть такой, что интеграл $\int\limits_{0<r<1} r^{2s}\,d\sigma(r)$ сходится (последнее утверждение вытекает из того, что сходится интеграл $\int\limits_{0<|\lambda|<1} |\lambda|^{2s}\,d\sigma(\lambda)$; см. п. 2).

Выясним теперь, какие ограничения на эрмитову форму (9) налагает соотношение (10). Для этого воспользуемся тем, что α_j и β_k — моменты функций $\varphi(x)$ и $\psi(y)$. Поэтому форму (9) можно записать в виде

$$\sum_{|j|=|k|=s} a_{j+k}\alpha_j\overline{\beta_k} = \int P(x, y)\varphi(x)\overline{\psi(y)}\,dx\,dy,$$

где через $P(x, y)$ обозначен многочлен $\sum\limits_{|j|=|k|=s} a_{j+k}x^jy^k$. Из равенства (10) следует, что многочлен $P(x, y)$ должен быть инвариантен относительно всех вращений и отражений n-мерного пространства

$$P(x, y) = P(gx, gy).$$

*) Так как приращения s-го порядка поля Φ однородны, то согласно п. 2 корреляционный функционал этого поля имеет вид (8).

Но любой многочлен, инвариантный относительно вращений и отражений пространства R_n, можно представить в виде многочлена от выражений

$$(x, x) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2,$$

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

$$(y, y) = \sum_{k=1}^{n} y_k^2$$

(доказательство этого факта приведено, например, в книге Г. Вейля «Классические группы», ИЛ, 1947, стр. 57), а именно

$$P(x, y) = \sum_{i, j, k} b_{ijk}(x, x)^i (x, y)^j (y, y)^k.$$

Так как каждый член многочлена $P(x, y)$ имеет степень $2s$, то должно выполняться равенство $i+j+k=s$. Поскольку, кроме того, каждый член многочлена $P(x, y)$ имеет одинаковую степень s как по x, так и по y, то должны иметь место равенства $i=k$. Это означает, что многочлен $P(x, y)$ имеет следующий вид:

$$P(x, y) = \sum_{k=0}^{[s/2]} b_k (x, x)^k (x, y)^{s-2k} (y, y)^k.$$

Тем самым доказано, что эрмитова форма (9) задается следующей формулой:

$$\sum_{|j|=|k|=s} a_{j+k}\alpha_j\overline{\beta_k} = \sum_{k=0}^{[s/2]} b_k \int (x, x)^k (x, y)^{s-2k} (y, y)^k \varphi(x)\overline{\psi(y)}\,dx\,dy. \tag{11}$$

Покажем теперь, что в формуле (11) все коэффициенты $b_k \geqslant 0$.

В самом деле, эрмитова форма (9) положительно определена. Поэтому для любой функции $\varphi(x)$ из пространства K

должно выполняться неравенство

$$\sum_{k=0}^{[s/2]} b_k \int (x, x)^k (x, y)^{s-2k} (y, y)^k \varphi(x) \overline{\varphi(y)}\, dx\, dy \geqslant 0. \quad (12)$$

Раскрывая скобки в выражении

$$(x, y)^{s-2k} = (x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n)^{s-2k},$$

мы без труда убеждаемся, что все интегралы, входящие в правую часть неравенства (12), являются произведениями интегралов от комплексно сопряженных функций и потому положительны. Путем подбора функции $\varphi(x)$ этим интегралам можно придать любые положительные значения. А отсюда вытекает, что неравенство (12) может выполняться тогда и только тогда, когда все коэффициенты $b_k \geqslant 0$.

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. *Если Φ — обобщенное случайное поле с однородными изотропными приращениями s-го порядка и если моменты функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ до $(s-1)$-го порядка включительно равны нулю, то корреляционный функционал $B(\varphi, \psi)$ поля Φ имеет вид*

$$B(\varphi, \psi) = (2\pi)^{p+1} \int_0^\infty \int_0^\infty \theta_0(R) \left(\frac{R}{r}\right)^p J_p(Rr)\, R\, dR\, d\sigma(r) + \\ + \sum_{k=0}^{[s/2]} b_k \int (x, x)^k (x, y)^{s-2k} (y, y)^k \varphi(x) \overline{\psi(y)}\, dx\, dy. \quad (13)$$

Здесь $\theta_0(R)$ — среднее значение функции $\theta(x) = \varphi * \psi^*(x)$ на сфере радиуса R, $\sigma(r)$ — положительная мера степенного роста на полупрямой $0 < r < \infty$, для которой сходится интеграл $\int\limits_{0<r<1} |r|^{2s} d\sigma(r)$, $J_p(R)$ — бесселева функция порядка p, $p = \frac{n-2}{2}$, и b_k — неотрицательные числа.

Из этой теоремы легко получить вид функционала $B(\varphi, \psi)$ для любых функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из пространства K, заменяя

функцию $\varphi(x)$ из этого пространства функцией вида

$$\varphi(x) - \sum_{|k|=0}^{s-1} \alpha_k \theta_k(x).$$

Здесь через α_k обозначены моменты функции $\varphi(x)$, а через $\theta_k(x)$ — функции из пространства K, такие, что

$$\int x^j \theta_k(x)\, dx = \delta_{jk}$$

(δ_{jk} — символ Кронекера). Мы опускаем точную формулировку получающегося при этом результата ввиду его громоздкости.

5. Многомерные обобщенные случайные поля. В некоторых приложениях теории случайных полей рассмотрение скалярных полей оказывается недостаточным. Например, скорости частиц турбулентного потока можно рассматривать как случайные величины. Однако, поскольку скорость является векторной величиной, мы получаем не скалярное, а векторное случайное поле. В этом пункте будут даны основные определения, относящиеся к многомерным обобщенным случайным полям.

Обозначим через R_{Nm} линейное пространство, состоящее из матриц с N строками и m столбцами.

Мы будем говорить, что задано *N-мерное обобщенное случайное поле* Φ, если каждым m функциям φ_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, из пространства K сопоставлено распределение вероятностей в пространстве R_{Nm}, причем эти распределения вероятностей удовлетворяют требованиям согласованности и непрерывной зависимости от функций φ_j. Иными словами, N-мерное обобщенное случайное поле сопоставляет вектор-функции $\boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ случайную матрицу $\|\Phi(\boldsymbol{\varphi})\|$ с элементами $\Phi_i(\varphi_j)$

$$\|\Phi(\boldsymbol{\varphi})\| = \left\| \begin{matrix} \Phi_1(\varphi_1) & \Phi_1(\varphi_2) & \ldots & \Phi_1(\varphi_m) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Phi_N(\varphi_1) & \Phi_N(\varphi_2) & \ldots & \Phi_N(\varphi_m) \end{matrix} \right\|.$$

В частности, каждой функции φ из пространства K соответствует случайный вектор-столбец $\Phi(\varphi)$ с координатами $\Phi_1(\varphi), \ldots, \Phi_N(\varphi)$.

Введем теперь для многомерных обобщенных случайных полей понятия средней величины и корреляционной матрицы.

Пусть φ — некоторая функция из пространства K, а $\Phi(\varphi)$ — соответствующий ей случайный вектор. Предположим, что все случайные величины $\Phi_k(\varphi)$ имеют средние значения, непрерывно зависящие от функции φ. Тогда, полагая

$$\mathfrak{m}(\varphi)=\begin{Vmatrix} m_1(\varphi) \\ \vdots \\ m_N(\varphi) \end{Vmatrix},$$

где $m_k(\varphi)=\mathsf{E}[\Phi_k(\varphi)]$, мы получим вектор, координатами которого являются обобщенные функции $m_k(\varphi)$ в пространстве K. Этот вектор мы и назовем *вектором средних значений* для поля $\|\Phi\|$.

Вместо корреляционного функционала $B(\varphi, \psi)$ мы введем для многомерных случайных полей корреляционную матрицу $\mathfrak{B}(\varphi, \psi)$. Именно, пусть для любых функций φ и ψ из пространства K и любых i и j, $0 \leqslant i \leqslant N$, $0 \leqslant j \leqslant N$, существуют средние значения

$$B_{ij}(\varphi, \psi)=\mathsf{E}[\Phi_i(\varphi)\overline{\Phi_j(\psi)}], \qquad 1 \leqslant i, \ j \leqslant N,$$

непрерывно зависящие от φ и ψ. Матрицу, составленную из функционалов $B_{ij}(\varphi, \psi)$, мы и назовем корреляционной матрицей для поля Φ. Эту матрицу мы будем обозначать через $\mathfrak{B}(\varphi, \psi)$.

Корреляционная матрица $\mathfrak{B}(\varphi, \psi)=\|B_{ij}(\varphi, \psi)\|$ *многомерного обобщенного случайного поля* Φ *обладает следующим свойством сильной положительной определенности: для любых комплексных чисел* α_{ir}, $1 \leqslant i \leqslant N$, $1 \leqslant r \leqslant m$, *и любых функций* $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ *из пространства* K *выполняется неравенство*

$$\sum_{i,\,j=1}^{N} \sum_{r,\,s=1}^{m} B_{ij}(\varphi_r, \varphi_s)\,\alpha_{ir}\overline{\alpha_{js}} \geqslant 0. \qquad (14)$$

Для доказательства этого неравенства достаточно заметить, что его левая часть может быть записана в виде

$$\mathsf{E}\left[\left|\sum_{i=1}^{N}\sum_{r=1}^{m}\alpha_{ir}\Phi_i(\varphi_r)\right|^2\right]$$

и потому неотрицательна как среднее значение неотрицательной случайной величины.

Из сильной положительной определенности матрицы $\mathfrak{B}(\varphi, \psi)$ вытекает, что при любых числах $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ билинейный функционал

$$B_\alpha(\varphi, \psi)=\sum_{i,\,j=1}^{N}\alpha_i\overline{\alpha_j}B_{ij}(\varphi, \psi)$$

положительно определен. В самом деле, если $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — любые функции из пространства K, а $\xi_1, \ldots, \xi_m$ — любые комплексные числа, то

$$\sum_{r,\,s=1}^{m} B_\alpha(\varphi_r, \varphi_s)\,\xi_r\overline{\xi_s}=\sum_{i,\,j=1}^{N}\sum_{r,\,s=1}^{m}B_{ij}(\varphi_r, \varphi_s)\,\alpha_i\xi_r\overline{\alpha_j\xi_s}.$$

Но правая часть этого равенства неотрицательна, в чем можно убедиться, полагая в неравенстве (14) $\alpha_{ir}=\alpha_i\xi_r$. Поэтому

$$\sum_{r,\,s=1}^{m} B_\alpha(\varphi_r, \varphi_s) \geqslant 0,$$

чем положительная определенность $B_\alpha(\varphi, \psi)$ доказана.

Заметим, что обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места: из того, что функционал $B_\alpha(\varphi, \psi)$ положительно определен при всех $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$, еще не вытекает, что матрица $\mathfrak{B}(\varphi, \psi)$ сильно положительно определена.

Перейдем теперь к рассмотрению однородных многомерных полей. Многомерное обобщенное случайное поле Φ называется *однородным*, если распределение вероятностей случайной матрицы $\|\Phi_i(\varphi_j)\|$ не изменяется при одновременном сдвиге всех функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ на один и тот же вектор $h=(h_1, \ldots, h_n)$. Для однородных полей вектор средних значений имеет вид

$$\mathfrak{m}(\varphi)=a\int\varphi(x)\,dx,$$

где $a=(a_1, \ldots, a_N)$ — некоторый N-мерный вектор.

Корреляционная же матрица для таких полей описывается следующим образом: *корреляционная матрица* $\mathfrak{B}(\varphi, \psi)$ *однородного* N*-мерного обобщенного случайного поля имеет вид*

$$\mathfrak{B}(\varphi, \psi)=\int\tilde{\varphi}(\lambda)\overline{\tilde{\psi}}(\lambda)\,d\overline{\mathfrak{F}(\lambda)}. \qquad (15)$$

Здесь $\tilde{\varphi}(\lambda)$ *и* $\tilde{\psi}(\lambda)$ — *преобразования Фурье функций* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$, *а*

$$\mathfrak{F}(X) = \|\mathfrak{F}_{ij}(X)\|, \quad 1 \leqslant i \leqslant N, \ 1 \leqslant j \leqslant N$$

— *матрица, составленная из комплексных мер в пространстве* R_n, *имеющих степенной рост, и таких, что матрица* $\mathfrak{F}(X)$ *положительно определена для всех множеств* X (мы будем называть матрицу $\mathfrak{F}(X)$ *спектральной матрицей* поля Φ).

Доказательство этого утверждения проводится при помощи рассмотрения одномерного случайного поля

$$\Psi_\xi = \xi_1\Phi_1 + \ldots + \xi_n\Phi_n, \tag{16}$$

линейно зависящего от комплексных параметров $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Перейдем теперь к рассмотрению *многомерных случайных полей, имеющих однородные приращения s-го порядка*, т. е. таких, что все поля $\Phi^{(j)}$, где $|j| = s$, однородны.

Описание корреляционной матрицы в этом случае также получается при помощи перехода к одномерному полю

$$\Psi_\xi = \xi_1\Phi_1 + \ldots + \xi_N\Phi_N.$$

Корреляционная матрица $\mathfrak{B}(\varphi, \psi)$ имеет особенно простой вид, если все моменты до $s-1$-го порядка включительно функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ равны нулю. В этом случае *матрица* $\mathfrak{B}(\varphi, \psi)$ *состоит из элементов* $B_{ij}(\varphi, \psi)$ *вида*

$$B_{ij}(\varphi, \psi) = \int\limits_{\Omega_0} \tilde{\varphi}(\lambda)\overline{\tilde{\psi}(\lambda)}\, dF_{ij}(\lambda) + \sum_{|p|=|q|=s} a^{ij}_{p+q}\alpha_p\bar{\beta}_q, \tag{17}$$

где Ω_0 — *множество, получаемое из всего пространства удалением точки* $\lambda = 0$, F_{ij} — *комплексные меры степенного роста, такие, что интегралы*

$$\int\limits_{0<|\lambda|<1} |\lambda|^{2s}\, dF_{ij}(\lambda)$$

сходятся, а матрица $\mathfrak{F}(X) = \|F_{ij}(X)\|$ *положительно определена для всех множеств* X. *Через* α_p *в формуле* (17) *обозначены моменты*

$$\int x^p\varphi(x)\, dx$$

функции $\varphi(x)$, *а через* β_q — *моменты функции* $\psi(x)$. *Наконец, числа* a^{ij}_k, $|k| = 2s$, *таковы, что неравенство*

$$\sum_{i,j=1}^{N} \sum_{|p|=|q|=s} a^{ij}_{p+q}\alpha_{ip}\overline{\alpha_{jq}} \geqslant 0$$

выполняется для любых комплексных чисел α_{ip}, $1 \leqslant i \leqslant N$, $|p| = s$.

6. Изотропные и векторные многомерные случайные поля. Многомерное поле Φ называется *изотропным*, если для любого вращения или отражения g пространства R_n случайная матрица $\Phi_g(\boldsymbol{\varphi})$, задаваемая формулой

$$\Phi_g(\boldsymbol{\varphi}) = \|\Phi_i[\varphi_j(g^{-1}x)]\|,$$

имеет то же распределение вероятностей, что и случайная матрица $\Phi(\boldsymbol{\varphi})$.

Можно доказать следующее утверждение: *корреляционная матрица* $\mathfrak{B}(\varphi, \psi)$ *однородного изотропного N-мерного обобщенного случайного поля* Φ *имеет вид*

$$\mathfrak{B}(\varphi, \psi) = (2\pi)^{p+1} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \theta_0(R)\left(\frac{R}{r}\right)^p J_p(Rr)\, R\, dR\, d\sigma(r),$$

где $\theta_0(R)$ — *среднее значение функции* $\theta(x) = \varphi * \psi^*(x)$ *на сфере радиуса* R, *а* $\sigma(X)$ — *матрица, состоящая из комплексных мер* $\sigma_{ij}(X)$ *степенного роста, заданных на полупрямой* $0 \leqslant r < \infty$, *причем для любого множества* X *матрица* $\sigma(X)$ *положительно определена.*

Введем теперь понятие векторного поля. Обобщенное n-мерное случайное поле Φ называется *векторным*, если для любого вращения или отражения g пространства R_n случайные матрицы $\|\Phi_i[\varphi_j(g^{-1}x)]\|$ и $\|g\| \cdot \|\Phi_i[\varphi_j(x)]\|$ имеют одинаковые законы распределения (через $\|g\|$ обозначена матрица преобразования g).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* Φ — *однородное обобщенное случайное векторное поле. Тогда его среднее значение равно нулю. Корреляционная матрица* $\mathfrak{B}(\varphi, \psi)$ *поля* Φ *состоит* *из элементов* $B_{ij}(\varphi, \psi)$, $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$, *выражаемых формулами*

$$B_{ij}(\varphi, \psi) = \int \theta_{ij}(R)\, J_p(R_r) \left(\frac{R}{r}\right)^p \frac{d\sigma(r)}{r^2} R\, dR, \quad i \neq j$$

и

$$B_{ii}(\varphi, \psi) = \int \theta_0(R)\, J_p(Rr) \left(\frac{R}{r}\right)^p d\sigma_2(r)\, R\, dR + \\ + \int \theta_{ii}(R)\, J_p(Rr) \left(\frac{R}{r}\right)^p \frac{d\sigma(r)}{r^2} R\, dR.$$

В этих формулах $p = \frac{n-2}{2}$, через $\theta_0(R)$ обозначено среднее значение функции $\theta(x) = \varphi * \psi^*(x)$ на сфере $|x| = R$, через $\theta_{ij}(R)$ — среднее значение функций $\frac{\partial^2 \theta(x)}{\partial x_i\, \partial x_j}$ на той же сфере, а $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$, где σ_1 и σ_2 — положительные меры степенного роста на полупрямой $0 \leqslant r < \infty$, такие, что $\sigma_1(0) = \sigma_2(0)$.

Мы опускаем доказательство этого утверждения, связанное с теорией представлений группы вращений и отражений евклидова пространства.

ГЛАВА IV

МЕРЫ В ЛИНЕЙНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Цилиндрические множества. В этой главе мы изучим меры в линейных топологических пространствах. Мы ограничимся при этом рассмотрением мер в пространствах Φ', сопряженных с некоторым линейным топологическим пространством Φ. Сначала будут изучены меры на самых простых множествах в Φ' — цилиндрических множествах. Потом будут рассмотрены меры множеств более общего вида. Определим понятие цилиндрического множества в пространстве Φ'. Выберем в пространстве Φ какие-либо фиксированные элементы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Каждому элементу F из пространства Φ' соответствует точка $\{(F, \varphi_1), \ldots, (F, \varphi_n)\}$ n-мерного пространства R_n. Таким образом, элементы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ пространства Φ задают отображение

$$F \to \{(F, \varphi_1), \ldots, (F, \varphi_n)\} \tag{1}$$

пространства Φ' в R_n.

Зададим теперь в R_n некоторое множество A и рассмотрим множество Z всех линейных функционалов F, таких, что

$$\{(F, \varphi_1), \ldots, (F, \varphi_n)\} \in A.$$

Это множество мы и назовем *цилиндрическим множеством*, задаваемым элементами $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ из Φ, и множеством A из R_n.

Примерами цилиндрических множеств могут служить *полупространства* в Φ', задаваемые неравенствами вида $(F, \varphi) \leqslant a$, и также множества более общего вида — полосы, задаваемые *из элементов* $B_{ij}(\varphi, \psi)$, $1 \leqslant i, \; j \leqslant n$, *выражаемых формулами*

$$B_{ij}(\varphi, \psi) = \int \theta_{ij}(R) J_p(Rr) \left(\frac{R}{r}\right)^p \frac{d\sigma(r)}{r^2} R\, dR, \quad i \neq j$$

и

$$B_{ii}(\varphi, \psi) = \int \theta_0(R) J_p(Rr) \left(\frac{R}{r}\right)^p d\sigma_2(r) R\, dR + \\ + \int \theta_{ii}(R) J_p(Rr) \left(\frac{R}{r}\right)^p \frac{d\sigma(r)}{r^2} R\, dR.$$

В этих формулах $p = \frac{n-2}{2}$, через $\theta_0(R)$ обозначено среднее значение функции $\theta(x) = \varphi * \psi^*(x)$ на сфере $|x| = R$, через $\theta_{ij}(R)$ — среднее значение функций $\frac{\partial^2\theta(x)}{\partial x_i\, \partial x_j}$ на той же сфере, а $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$, где σ_1 и σ_2 — положительные меры степенного роста на полупрямой $0 \leqslant r < \infty$, такие, что $\sigma_1(0) = \sigma_2(0)$.

Мы опускаем доказательство этого утверждения, связанное с теорией представлений группы вращений и отражений евклидова пространства.

ГЛАВА IV

МЕРЫ В ЛИНЕЙНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Цилиндрические множества. В этой главе мы изучим меры в линейных топологических пространствах. Мы ограничимся при этом рассмотрением мер в пространствах Φ', сопряженных с некоторым линейным топологическим пространством Φ. Сначала будут изучены меры на самых простых множествах в Φ' — цилиндрических множествах. Потом будут рассмотрены меры множеств более общего вида. Определим понятие цилиндрического множества в пространстве Φ'. Выберем в пространстве Φ какие-либо фиксированные элементы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Каждому элементу F из пространства Φ' соответствует точка $\{(F, \varphi_1), \ldots, (F, \varphi_n)\}$ n-мерного пространства R_n. Таким образом, элементы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ пространства Φ задают отображение

$$F \to \{(F, \varphi_1), \ldots, (F, \varphi_n)\} \tag{1}$$

пространства Φ' в R_n.

Зададим теперь в R_n некоторое множество A и рассмотрим множество Z всех линейных функционалов F, таких, что

$$\{(F, \varphi_1), \ldots, (F, \varphi_n)\} \in A.$$

Это множество мы и назовем *цилиндрическим множеством*, задаваемым элементами $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ из Φ, и множеством A из R_n.

Примерами цилиндрических множеств могут служить *полупространства* в Φ', задаваемые неравенствами вида $(F, \varphi) \leqslant a$, и также множества более общего вида — полосы, задаваемые системами неравенств

$$a_k \leqslant (F, \varphi_k) \leqslant b_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Можно дать другое определение цилиндрического множества. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — элементы из Φ. Произведем разбиение пространства Φ' на смежные классы, отнеся к одному смежному классу все линейные функционалы, переходящие при отображении

$$F \to \{(F, \varphi_1), \ldots, (F, \varphi_n)\}, \tag{1}$$

в одну и ту же точку пространства R_n. Иными словами, функционалы F_1 и F_2 относятся к одному смежному классу тогда и только тогда, когда

$$(F_1, \varphi_k) = (F_2, \varphi_k), \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Очевидно, что цилиндрическое множество Z является объединением смежных классов, соответствующих точкам множества A. Обратно, *любое объединение смежных классов является цилиндрическим множеством в* Φ'.

Разбиение пространства Φ' на смежные классы однозначно определяется указанием линейного подпространства Ψ^0 в Φ', состоящего из функционалов, которые переходят в нуль при отображении (1). В самом деле, условие

$$(F_1, \varphi_k) = (F_2, \varphi_k), \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

равносильно условию

$$(F_1 - F_2, \varphi_k) = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Поэтому два функционала относятся к одному и тому же смежному классу тогда и только тогда, когда их разность принадлежит подпространству Ψ^0.

Заметим теперь, что из равенств $(F, \varphi_k) = 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$, вытекает, что для любого элемента ψ вида

$$\psi = a_1\varphi_1 + \ldots + a_n\varphi_n$$

выполняется равенство $(F, \psi) = 0$. Поэтому подпространство Ψ^0 в Φ' можно определить как подпространство линейных функционалов F, таких, что $(F, \Psi) = 0$ для любого элемента ψ из подпространства $\Psi \subset \Phi$, порожденного элементами $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Мы приходим, таким образом, к следующему определению цилиндрического множества в Φ'. Пусть Ψ — конечномерное подпространство в пространстве Φ. Обозначим через Ψ^0 линейное подпространство в Φ', состоящее из элементов F, таких, что

$$(F, \psi) = 0 \text{ при } \psi \in \Psi.$$

Это подпространство $\Psi^0 \in \Phi'$ называется *аннулятором* подпространства Ψ. Разобьем пространство Φ' на смежные классы, отнеся к одному и тому же классу функционалы F, принимающие одинаковые значения на подпространстве Ψ (или, что то же самое, функционалы, разность между которыми принадлежит подпространству Ψ^0). Мы получаем, таким образом, фактор-пространство Φ'/Ψ^0, элементами которого являются смежные классы. Сопоставляя каждому функционалу F из Φ' содержащий его смежный класс, мы получаем линейное отображение пространства Φ' на Φ'/Ψ^0. Выберем теперь в Φ'/Ψ^0 любое подмножество A. *Цилиндрическим множеством* Z *с основанием* A *и образующим подпространством* Ψ^0 называется совокупность всех элементов F из Φ', переходящих при отображении $\Phi' \to \Phi'/\Psi^0$ в элементы множества A*).

Это определение удобнее для использования, чем данное выше, поскольку оно не требует задания базиса $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ в подпространстве Ψ.

2. Простейшие свойства цилиндрических множеств. Прежде чем изучать свойства цилиндрических множеств, остановимся на некоторых простых утверждениях о линейных топологических пространствах. Мы будем рассматривать лишь *локально выпуклые* линейные топологические пространства Φ, т. е. такие пространства, в каждой окрестности нуля которых содержится абсолютно выпуклая окрестность нуля. Класс локально выпуклых пространств достаточно широк — к нему принадлежат, в частности, все счетно-нор-

*) Понятие цилиндрического множества можно ввести для любого линейного топологического пространства Φ. Именно, пусть Ψ — некоторое замкнутое линейное подпространство в Φ, а A — множество в фактор-пространстве Ψ/Φ. Тогда совокупность элементов φ в Φ, таких, что содержащий φ смежный класс принадлежит A, естественно назвать цилиндрическим множеством. Нам, однако, понадобятся лишь цилиндрические множества в Φ', соответствующие аннуляторам конечномерных подпространств.

мированные пространства. Для этих пространств справедлива следующая теорема о продолжении линейных функционалов.

Любой непрерывный линейный функционал F, заданный на подпространстве Ψ локально выпуклого линейного топологического пространства Φ, можно распространить с сохранением линейности и непрерывности на все пространство Φ.

В самом деле, из непрерывности функционала F вытекает, что в Φ существует окрестность нуля U, для всех элементов φ которой выполняется неравенство $|(F, \varphi)| \leqslant 1$. Выберем в U выпуклую окрестность нуля V и примем V за единичную сферу нормы $\|\varphi\|$ (т. е. положим $\|\varphi\| = 1/\sup|\lambda|$, где $\lambda\varphi \in V$).

Пополняя пространство Φ по норме $\|\varphi\|$, мы получим банахово пространство $\bar{\Phi}$. По теореме Хана — Банаха функционал F можно распространить с Ψ на все пространство $\bar{\Phi}$, причем на единичной сфере $\bar{V}$ выполняется неравенство $|(F, \varphi)| \leqslant 1$. Но это означает, что распространенный функционал $\bar{F}$ непрерывен относительно топологии пространства Φ.

Мы покажем сейчас, что *если пространство Φ локально выпукло, а Ψ — подпространство в Φ, то пространство Φ'/Ψ^0 сопряжено пространству Ψ.*

В самом деле, любой элемент F пространства Φ' является линейным функционалом в Φ и, следовательно, в Ψ. При этом функционалы F_1 и F_2 совпадают на подпространстве Ψ тогда и только тогда, когда они принадлежат одному и тому же смежному классу по Ψ^0, т. е. соответствуют одному и тому же элементу фактор-пространства Φ'/Ψ^0. Таким образом, каждому элементу $\tilde{F}$ фактор-пространства Φ'/Ψ^0 соответствует линейный функционал в пространстве Ψ, причем различным элементам из Φ'/Ψ^0 соответствуют различные линейные функционалы. Покажем, что при этом получаются все функционалы в Ψ. Пусть F_0 — линейный непрерывный функционал в пространстве Ψ. Так как пространство Φ локально выпукло, F_0 можно распространить на все пространство Φ с сохранением линейности и непрерывности. Различные продолжения являются функционалами в Φ, совпадающими на Ψ, и потому принадлежат одному и тому же смежному классу по подпространству Ψ^0. Таким образом, каждый линейный функционал в Ψ соответствует некоторому элементу из фактор-пространства Φ'/Ψ^0. Тем самым доказано, что пространство Φ'/Ψ^0 сопряжено пространству Ψ.

Из доказанного утверждения вытекает, что *если подпространство $\Psi \subset \Phi$ n-мерно, то и фактор-пространство Φ'/Ψ^0 тоже n-мерно.*

Перейдем к цилиндрическим множествам. Одно и то же цилиндрическое множество может быть задано различными образующими подпространствами и различными основаниями. Например, если

$$\psi = a_1\varphi_1 + \ldots + a_n\varphi_n,$$

то неравенства $(F, \psi) \leqslant a$ и

$$a_1(F, \varphi_1) + \ldots + a_n(F, \varphi_n) \leqslant a$$

задают одно и то же полупространство в Φ'.

Выясним теперь, при каком условии цилиндрическое множество Z_1, имеющее образующее подпространство Ψ_1^0 и основание A_1, совпадает с цилиндрическим множеством Z_2, имеющим образующее подпространство Ψ_2^0 и основание A_2. Заметим сначала, что цилиндрические множества Z_1 и Z_2 можно задать одним и тем же образующим подпространством Ψ_3^0. Это подпространство является аннулятором подпространства Ψ_3 в Φ, порожденного подпространствами Ψ_1 и Ψ_2, и совпадает с пересечением $\Psi_1^0 \cap \Psi_2^0$. Поскольку $\Psi_3^0 \subset \Psi_1^0$, то любой смежный класс по подпространству Ψ_3^0 принадлежит некоторому смежному классу по подпространству Ψ_1^0. Сопоставляя смежному классу по подпространству Ψ_3^0 содержащий его смежный класс по подпространству Ψ_1^0, мы получаем линейное отображение T_1 фактор-пространства Φ'/Ψ_3^0 на фактор-пространство Φ'/Ψ_1^0. Обозначим через $T_1^{-1}(A_1)$ полный прообраз множества A_1 при этом отображении. Очевидно, что цилиндрическое множество Z_1 может быть задано образующим подпространством Ψ_3^0 и основанием $T_1^{-1}(A_1)$.

Точно так же доказывается, что цилиндрическое множество Z_2 может быть задано образующим подпространством Ψ_3^0 и основанием $T_2^{-1}(A_2)$ (через T_2 мы обозначили линейное отображение фактор-пространства Φ'/Ψ_3^0 на фактор-пространство

Φ'/Ψ_2^0, при котором каждый смежный класс по Ψ_3^0 переходит в содержащий его смежный класс по Ψ_2^0).

Поскольку два цилиндрических множества с одним и тем же образующим подпространством совпадают тогда и только тогда, когда совпадают их основания, мы получаем следующий результат.

Пусть цилиндрическое множество Z_1 задано образующим подпространством Ψ_1^0 и основанием A_1, а цилиндрическое множество Z_2 задано образующим подпространством Ψ_2^0 и основанием A_2. Положим $\Psi_3^0 = \Psi_1^0 \cap \Psi_2^0$.

Для того чтобы множества Z_1 и Z_2 совпадали, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$T_1^{-1}(A_1) = T_2^{-1}(A_2), \tag{2}$$

где через T_1 обозначено естественное линейное отображение фактор-пространства Φ'/Ψ_3^0 на Φ'/Ψ_1^0, а через T_2 — естественное линейное отображение фактор-пространства Φ'/Ψ_3^0 на Φ'/Ψ_2^0 *).

Отметим еще следующие свойства цилиндрических множеств.

1) *Дополнение к любому цилиндрическому множеству Z является цилиндрическим множеством.* В самом деле, если цилиндрическое множество Z задается образующим подпространством Ψ^0 и основанием A, то множество $\Phi' - Z$ имеет то же образующее подпространство, а его основанием является дополнение к множеству A в фактор-пространстве Φ'/Ψ^0.

2) *Пересечение любых двух цилиндрических множеств является цилиндрическим множеством.* В самом деле, мы видели, что множества Z_1 и Z_2 можно задать общим образующим подпространством Ψ^0 в Φ'. Пусть при этом их основания равны A_1 и A_2 соответственно. Тогда $Z_1 \cap Z_2$ является цилиндрическим множеством с образующим подпространством Ψ^0 и основанием $A_1 \cap A_2$.

Совершенно так же доказывается следующее свойство.

*) Очевидно, что если фактор-пространства Φ'/Ψ_1^0 и Φ'/Ψ_2^0 конечномерны, то и $\Phi'/\Psi_1^0 \cap \Psi_2^0$ конечномерно.

3) *Сумма любых двух цилиндрических множеств является цилиндрическим множеством.*

Мы видим, таким образом что *цилиндрические множества образуют тело множеств* *) *в пространстве Φ'.*

3. Меры цилиндрических множеств. Мы будем в дальнейшем рассматривать лишь цилиндрические множества Z, основания которых являются борелевскими множествами в Φ'/Ψ^0. Если $Z_1, \ldots, Z_n, \ldots$ — цилиндрические множества с борелевскими основаниями, имеющие одно и то же образующее подпространство Ψ^0, то их сумма $\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$ и пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n$ также являются цилиндрическими множествами с борелевскими основаниями.

Назовем *мерой цилиндрических множеств* в пространстве Φ' числовую функцию $\mu(Z)$, заданную на множестве всех цилиндрических множеств с борелевскими основаниями и обладающую следующими свойствами:

1) для любого множества Z имеет место неравенство $0 \leqslant \mu(Z) \leqslant 1$,

2) $\mu(\Phi') = 1$,

3) если множество Z является объединением непересекающихся цилиндрических множеств $Z_1, \ldots Z_n, \ldots$ с борелевскими основаниями и общим образующим подпространством Ψ^0, то имеет место равенство

$$\mu(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Z_n),$$

4) для любого цилиндрического множества Z выполняется равенство

$$\mu(Z) = \inf \mu(U),$$

где U пробегает все открытые цилиндрические множества, содержащие множество Z.

Мера цилиндрических множеств $\mu(Z)$ определяет меру борелевских множеств в каждом фактор-пространстве Φ'/Ψ^0.

*) Система множеств называется телом, если она содержит вместе с любыми двумя множествами их сумму, пересечение и разность.

Именно, если A — некоторое борелевское множество в Φ'/Ψ^0 и Z — цилиндрическое множество с основанием A и образующим подпространством Ψ^0, то мы полагаем

$$\nu_\Psi(A) = \mu(Z). \tag{3}$$

Очевидно, что ν_Ψ является нормированной положительной мерой в Φ'/Ψ^0, регулярной в смысле Каратеодори *).

Меры, индуцированные мерой μ в различных фактор-пространствах Φ'/Ψ^0, не являются независимыми. Если одно и то же цилиндрическое множество Z может быть задано как образующим подпространством Ψ_1^0 и основанием A_1, так и образующим подпространством Ψ_2^0 и основанием A_2, то должно выполняться равенство

$$\nu_{\Psi_1}(A_1) = \nu_{\Psi_2}(A_2),$$

поскольку обе части этого равенства совпадают с $\mu(Z)$.

Принимая во внимание указанное в п. 2 условие совпадения цилиндрических множеств, задаваемых различными образующими подпространствами и основаниями, мы можем сформулировать это утверждение следующим образом. Если $\Psi_1 \subset \Psi_2$, то для любого множества A из фактор-пространства Φ'/Ψ_1^0 выполняется равенство

$$\nu_{\Psi_1}(A) = \nu_{\Psi_2}\left[T^{-1}(A)\right], \tag{4}$$

где через $T^{-1}(A)$ обозначен полный прообраз множества A при естественном отображении T фактор-пространства Φ'/Ψ_2^0 на фактор-пространство Φ'/Ψ_1^0 (это отображение сопоставляет каждому смежному классу по Ψ_2^0 содержащий его смежный класс по Ψ_1^0).

Мы нашли, таким образом, необходимое условие для того, чтобы система мер ν_Ψ в фактор-пространствах Φ'/Ψ^0 индуцировалась мерой цилиндрических множеств в Z. Это условие является также и достаточным. Иными словами, справедливо следующее утверждение.

*) Мера ν называется *регулярной в смысле Каратеодори*, если для любого борелевского множества A имеет место равенство

$$\nu(A) = \inf \nu(U),$$

где U пробегает все открытые множества, содержащие A.

Пусть $\{\nu_\Psi(A)\}$ — *система нормированных положительных регулярных в смысле Каратеодори мер в фактор-пространствах* Φ'/Ψ^0. *Если при* $\Psi_1 \subset \Psi_2$ *для любого множества* A *из* Φ'/Ψ_1^0 *выполняется равенство* (4), *то меры* ν_Ψ *индуцируются мерой цилиндрических множеств* $\mu(Z)$ *в пространстве* Φ'.

В самом деле, положим для любого цилиндрического множества Z с образующим подпространством Ψ^0 и основанием A

$$\mu(Z) = \nu_\Psi(A).$$

Из условия (4) вытекает, что значение $\mu(Z)$ не зависит от способа задания множества Z. Очевидно, что $\mu(Z)$ является мерой цилиндрических множеств в Φ' и что все меры ν_Ψ индуцируются мерой μ.

Условие (4) мы будем называть в дальнейшем *условием согласованности мер* ν_Ψ. Можно показать, что его достаточно проверять лишь для полупространств в Φ'. Это утверждение легко следует из следующей леммы:

Если значения положительных нормированным мер ν_1 *и* ν_2 *в конечномерном пространстве* R *совпадают для всех полупространств этого пространства, то меры* ν_1 *и* ν_2 *равны между собой.*

Относительно доказательства этой леммы см. [74].

4. Условие непрерывности для мер цилиндрических множеств. Мы будем рассматривать в дальнейшем лишь меры, удовлетворяющие некоторому условию непрерывности. Это условие формулируется следующим образом:

Мера цилиндрических множеств μ называется *непрерывной*, если при любом m задаваемое этой мерой соответствие $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \to \nu_m$ между наборами элементов пространства Φ и мерами в m-мерных пространствах непрерывно относительно топологии пространства Φ и слабой сходимости мер. Точнее говоря, условие непрерывности означает следующее. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_{jk} = \varphi_j$, $1 \leqslant j \leqslant m$, где φ_{jk}, φ_j — элементы из пространства Φ, а сходимость понимается в смысле топологии этого пространства. Тогда для любой непрерывной ограниченной функции $f(x) = f(x_1, \ldots, x_m)$ выполняется равенство

$$\lim_{k\to\infty} \int f(x)\, d\nu_{mk}(x) = \int f(x)\, d\nu_m(x),$$

где ν_{mk} — меры, соответствующие наборам элементов $\{\varphi_{1k}, \ldots, \varphi_{mk}\}$, а ν_m — мера, соответствующая набору элементов $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$.

В условии непрерывности элементы $\varphi_{1k}, \ldots, \varphi_{mk}$, равно как и элементы $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, могут быть линейно зависимыми.

Отметим следующее утверждение. *Если мера μ обладает свойством непрерывности, то для любых $\varepsilon > 0$ и $A > 0$ найдется такая окрестность нуля U в Φ, что при $\varphi \in U$ мера цилиндрического множества Z, задаваемого неравенством $|(F, \varphi)| \geqslant A$, меньше ε.*

В самом деле, любому элементу пространства Φ соответствует мера на прямой. Обозначим через μ_0 меру на прямой, соответствующую элементу $\varphi_0 = 0$. Поскольку отображение $F \to (F, \varphi_0)$ переводит все элементы пространства Φ' в нуль, эта мера сосредоточена в точке $x = 0$ и равна в этой точке единице. Зададим значения $\varepsilon > 0$ и $A > 0$ и рассмотрим любую положительную непрерывную ограниченную функцию $f(x)$, равную единице при $|x| \geqslant A$ и равную нулю при $|x| \leqslant \frac{A}{2}$. Очевидно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\mu_0(x) = 0.$$

Из условия непрерывности вытекает, что в пространстве Φ найдется такая окрестность нуля U, что для всех элементов φ из U выполняется неравенство

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\mu_\varphi(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\mu_0(x) \right| = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\mu_\varphi(x) < \varepsilon,$$

где через μ_φ обозначена мера, соответствующая элементу φ. Но

$$\mu(Z) = \int_{-\infty}^{-A} d\mu_\varphi(x) + \int_{A}^{\infty} d\mu_\varphi(x) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\mu_\varphi(x) < \varepsilon,$$

и тем самым наше утверждение доказано.

Справедливо и обратное утверждение: *если для любых $\varepsilon > 0$ и $A > 0$ найдется такая окрестность нуля U в Φ, что при $\varphi \in U$ имеет место неравенство $\mu(Z) < \varepsilon$, где через Z обозначено цилиндрическое множество $|(F, \varphi)| \geqslant A$, то мера μ удовлетворяет условию непрерывности.* Мы не будем останавливаться на доказательстве этого утверждения.

5. Индуцированные меры цилиндрических множеств. Пусть T — непрерывное линейное отображение линейного топологического пространства Φ_2 в линейное топологическое пространство Φ_1. Обозначим через T' сопряженное с T отображение пространства Φ_1' в пространство Φ_2', т. е. такое отображение, что $(T'F, \varphi) = (F, T\varphi)$ для любого элемента φ из пространства Φ_2 и любого функционала F из пространства Φ_1'. Очевидно, что если отображение T переводит конечномерное подпространство $\Psi_2 \subset \Phi_2$ в конечномерное подпространство $\Psi_1 \subset \Phi_1$, то отображение T' переводит подпространство Ψ_1^0 в подпространство Ψ_2^0. В самом деле, пусть функционал F принадлежит Ψ_1^0. Каков бы ни был элемент ψ из Ψ_2, элемент $T\psi \in \Psi_1$, и потому $(F, T\psi) = 0$. Но это означает, что $(T'F, \psi) = 0$ для всех элементов ψ из Ψ_2, т. е. что $T'F \in \Psi_2^0$.

Итак, мы доказали, что $T'\Psi_1^0 \subset \Psi_2^0$. Из этого соотношения вытекает, что отображение T' индуцирует отображение T_1' фактор-пространства Φ_1'/Ψ_1^0 в фактор-пространство Φ_2'/Ψ_2^0. При этом отображении смежный класс $F + \Psi_1^0$ переходит в смежный класс $T'F + \Psi_2^0$ (в силу включения $T'\Psi_1^0 \subset \Psi_2^0$ соответствие $F + \Psi_1^0 \to T'F + \Psi_2^0$ не зависит от выбора представителя F в смежном классе $F + \Psi_1^0$).

Итак, мы доказали, что *если T — непрерывное линейное отображение пространства Φ_2 в Φ_1, то для каждого конечномерного подпространства $\Psi_1 \subset \Phi_1$ существует линейное отображение T_1' фактор-пространства Φ_1'/Ψ_1^0 в фактор-пространство Φ_2'/Ψ_2^0, где через Ψ_1^0 обозначен аннулятор подпространства $\Psi_1 = T\Psi_2$ пространства Φ_1. При этом отображении смежный класс $F + \Psi_1^0$ переходит в смежный класс $T'F + \Psi_2^0$.*

Пусть теперь в пространстве Φ_1' задана мера цилиндрических множеств μ_1. Введем в пространство Φ_2' меру цилиндрических множеств следующим образом. Пусть цилиндрическое множество Z_2 из Φ_2' задается образующим подпространством Ψ_2 (в Φ_2) и основанием A_2. Обозначим через $\widetilde{A}_2$ пересечение множества A_2 с образом фактор-пространства Φ_1'/Ψ_1^0 при отображении T_1' и через A_1 — прообраз множества $\widetilde{A}_2$ в фактор-пространстве Φ_1'/Ψ_1^0. Положим

$$\mu_2(Z_2) = \mu_1(Z_1),$$

где через Z_1 обозначено цилиндрическое множество в Φ_1' с образующим подпространством $\Psi_1 = T\Psi_2$ и основанием A_1. Легко видеть, что μ_2 является мерой цилиндрических множеств в Φ_2', причем в силу непрерывности отображения T эта мера удовлетворяет условию непрерывности. Мы будем называть меру μ_2 *мерой, индуцированной мерой* μ_1 *при отображении* T.

Например, если Φ_m — пополнение счетно-гильбертова пространства Φ по норме $\|\varphi\|_m$, то каждой мере μ_m в пространстве Φ_m' соответствует мера μ в пространстве Φ' (и мера μ_n в любом пространстве Φ_n', где $n \geqslant m$). Мы будем называть меру μ в Φ' m-непрерывной, если она индуцирована непрерывной мерой в пространстве Φ_m'.

§ 2. СЧЕТНАЯ АДДИТИВНОСТЬ МЕР ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВ В ПРОСТРАНСТВАХ, СОПРЯЖЕННЫХ С ЯДЕРНЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ

1. Аддитивность мер цилиндрических множеств. Меры цилиндрических множеств обладают следующим свойством *конечной аддитивности*.

Если $Z_1, \ldots, Z_n$ — *конечная система непересекающихся цилиндрических множеств в* Φ', *то имеет место равенство*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} Z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(Z_k).$$

Действительно, поскольку, как это показано в § 1, п. 1, для любой *конечной* системы цилиндрических множеств мы можем выбрать общее образующее подпространство Ψ^0, то наше утверждение вытекает из аддитивности меры ν_Ψ в фактор-пространстве Φ'/Ψ^0.

Однако далеко не всегда мера μ обладает *счетной аддитивностью*: из того, что объединение счетной системы непересекающихся цилиндрических множеств $Z_1, \ldots, Z_k, \ldots$ является цилиндрическим множеством, не вытекает, вообще говоря, равенство

$$\mu(Z) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(Z_k)$$

(разумеется, это равенство выполняется, если все множества Z_k, $1 \leqslant k < \infty$, задаются одним и тем же образующим подпространством).

Для нас, однако, существенно, чтобы мера μ обладала свойством счетной аддитивности. Дело в том, что класс цилиндрических множеств в Φ' довольно узок*). Поэтому естественно желание распространить меру μ на более широкий класс множеств. Этим классом является класс всех *борелевских множеств* в Φ', порожденных (борелевскими) цилиндрическими множествами. При этом, как обычно, борелевскими множествами, порожденными цилиндрическими множествами, называют множества из наименьшего класса, содержащего все цилиндрические множества, и замкнутого относительно операций счетного суммирования и перехода к дополнению.

Класс борелевских множеств достаточно широк; если, например, в пространстве Φ есть счетное всюду плотное множество, то к классу борелевских множеств в Φ' принадлежат, в частности, поляры всех множеств A из Φ.

В случае, когда мера μ, заданная на цилиндрических множествах, счетно-аддитивна, мы можем распространить ее на все борелевские множества.

Это распространение выполняется следующим образом. Назовем цилиндрические множества борелевскими множествами нулевого класса. Пусть уже определены борелевские множества классов β, где β — трансфинитные числа, меньшие α. Назовем борелевскими множествами класса α все счетные суммы непересекающихся мно-

*) Например, поляры множеств A из Φ, вообще говоря, не являются цилиндрическими множествами в Φ' (*полярой* множества A называется совокупность всех функционалов F, таких, что $|(F, \varphi)| \leqslant 1$, когда φ пробегает A).

жеств меньших классов и дополнения к таким суммам. Тем самым борелевские множества определяются для всех трансфинитных чисел первого и второго классов. Если

$$B=\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$$

— разложение борелевского множества класса α на непересекающиеся борелевские множества меньших классов, то положим

$$\mu(B)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(B_k)$$

и

$$\mu(\Phi'-B)=1-\mu(B).$$

Покажем теперь, пользуясь счетной аддитивностью меры μ для цилиндрических множеств, что, исходя из любых двух разложений

$$B=\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$$

и

$$B=\bigcup_{k=1}^{\infty} B'_k \quad \left(\text{или } B=\Phi'-\bigcup_{k=1}^{\infty} B'_k\right)$$

одного и того же борелевского множества B на непересекающиеся борелевские множества меньших классов, мы всегда получим одно и то же значение меры $\mu(B)$. Это легко доказать для множеств первого класса: если

$$B=\bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k=\bigcup_{k=1}^{\infty} Z'_k$$

— два разложения такого множества на цилиндрические множества, то

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu(Z_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(Z'_k).$$

В самом деле,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu(Z_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\mu(Z_k\cap Z'_j)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mu(Z_k\cap Z'_j)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu(Z'_j).$$

Если же

$$B=\Phi'-\bigcup_{k=1}^{\infty} Z'_k=\bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k,$$

то $\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Z'_k\right)\cup\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k\right)=\Phi'$ является разложением пространства Φ' на непересекающиеся цилиндрические множества и потому

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu(Z_k)+\sum_{k=1}^{\infty}\mu(Z'_k)=1,$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu(Z_k)=1-\sum_{k=1}^{\infty}\mu(Z'_k).$$

Тем самым доказана непротиворечивость определения меры μ для борелевских множеств класса 1. Можно показать, что после этого распространения сохраняется счетная аддитивность меры μ. Для множеств высших классов доказательство проводится при помощи трансфинитной индукции.

Отметим, что мера борелевских множеств в Φ', получающаяся при таком распространении, обладает следующим свойством регулярности в смысле Каратеодори.

Для любого борелевского множества B из Φ' имеет место равенство

$$\mu(B)=\inf\mu(Z),$$

где Z пробегает все счетные суммы открытых цилиндрических множеств, содержащие множество B.

Доказательство этого утверждения легко проводится при помощи трансфинитной индукции.

Мы увидим дальше, что существуют пространства, в которых каждая нормированная положительная мера цилиндрических множеств, удовлетворяющая условию непрерывности, счетно-аддитивна и тем самым может быть продолжена на все борелевские множества. В то же время существуют пространства, в которых не все меры продолжаются на борелевские множества, а лишь меры, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям.

Классом пространств, для которых любая нормированная положительная мера цилиндрических множеств, удовлетворяющая условию непрерывности, может быть продолжена до меры борелевских множеств, является класс пространств, сопряженных с ядерными пространствами. Это утверждение будет доказано в п. 4. Для доказательства этого основного утверждения нам понадобятся некоторые результаты из теории меры. Укажем в первую очередь следующий простой критерий счетной аддитивности меры.

Теорема 1. *Для того чтобы мера μ цилиндрических множеств в пространстве Φ' была счетно-аддитивной, необходимо и достаточно, чтобы для любого разбиения*

$$\Phi' = Z_1 + \ldots + Z_k + \ldots$$

пространства Φ' на непересекающиеся цилиндрические множества выполнялось равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(Z_k) = 1.$$

Доказательство. Необходимость этого условия очевидна — она вытекает из определения счетной аддитивности и нормированности меры μ. Докажем теперь достаточность этого условия. Пусть

$$Z = Z_1 + \ldots + Z_k + \ldots$$

— разбиение любого цилиндрического множества Z на непересекающиеся цилиндрические множества Z_k, $1 \leqslant k < \infty$. Тогда пространство Φ разбивается на непересекающиеся цилиндрические множества $\Phi' - Z$, $Z_1, \ldots, Z_k, \ldots$ и потому по условию теоремы имеет место равенство

$$\mu(\Phi' - Z) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(Z_k) = 1. \tag{1}$$

Из конечной аддитивности меры μ следует, что

$$\mu(\Phi' - Z) + \mu(Z) = 1. \tag{2}$$

Сравнивая равенства (1) и (2), мы получаем, что

$$\mu(Z) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(Z_k).$$

Тем самым счетная аддитивность меры μ доказана.

Доказанной теореме можно дать другие эквивалентные формулировки.

Теорема 1'. *Для того чтобы мера цилиндрических множеств μ была счетно-аддитивной, необходимо и*

достаточно, чтобы для любой убывающей последовательности цилиндрических множеств

$$Z_1' \supset Z_2' \supset \ldots \supset Z_n' \supset \ldots,$$

имеющей пустое пересечение, выполнялось равенство

$$\lim_{n \to \infty} \mu(Z_n') = 0. \tag{3}$$

В доказательстве нуждается лишь достаточность этого условия. Пусть

$$\Phi' = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k$$

— любое покрытие пространства Φ' непересекающимися цилиндрическими множествами. Тогда цилиндрические множества

$$Z_n' = \Phi' - \bigcup_{k=1}^{n} Z_k$$

образуют убывающую цепочку с пустым пересечением и потому по условию

$$\lim_{n \to \infty} \mu(Z_n') = 0.$$

В силу конечной аддитивности меры μ это означает, что

$$\lim_{n \to \infty} \left[1 - \sum_{k=1}^{n} \mu(Z_k) \right] = 0$$

или, иначе, что $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(Z_k) = 1$. Следовательно, по теореме 1 мера μ счетно-аддитивна.

Теорема 1''. *Для того чтобы мера μ была счетно-аддитивна, необходимо и достаточно, чтобы для любого покрытия пространства Φ цилиндрическими множествами (возможно и пересекающимися) Z_k, $1 \leqslant k < \infty$, выполнялось неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(Z_k) \geqslant 1. \tag{4}$$

Для доказательства достаточности этого условия заметим, что если множества Z_k, покрывающие пространство Φ', не пересекаются, то в силу конечной аддитивности меры μ имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(Z_k) \leqslant 1. \tag{5}$$

Но, поскольку они покрывают пространство Φ', для них выполнено и неравенство (4). Из неравенств (4) и (5) следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(Z_k) = 1$$

и потому по теореме 1 мера μ счетно-аддитивна. Необходимость условия очевидна.

Наконец, заметим, что *достаточно требовать выполнения неравенства*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(Z_k) \geqslant 1$$

не для всех покрытий пространства Φ' цилиндрическими множествами, а лишь для его покрытий открытыми цилиндрическими множествами. Это сразу вытекает из того, что в силу регулярности меры μ любое цилиндрическое множество Z можно погрузить в открытое цилиндрическое множество, мера которого сколь угодно мало отличается от меры множества Z.

2. Условие счетной аддитивности меры цилиндрических множеств в пространствах, сопряженных счетно-гильбертовым пространствам. Данное в предыдущем пункте условие счетной аддитивности цилиндрических множеств неудобно для применений. В этом пункте мы выведем более удобное для использования условие счетной аддитивности мер цилиндрических множеств в пространствах, сопряженных со счетно-гильбертовыми пространствами.

Пусть мера цилиндрических множеств $\mu(Z)$ в пространстве Φ', сопряженном со счетно-гильбертовым пространством Φ, счетно-аддитивна. Тогда, как мы видели выше, ее можно распространить на все борелевские множества в пространстве Φ'. Поэтому меру μ можно распространить на все

шары $S_n(R)$, задаваемые неравенствами $\|F\|_{-n} \leqslant R$ *). В самом деле, шар $S_n(R)$ состоит из линейных функционалов F, таких, что $|(F, \varphi)| \leqslant R$, если $\|\varphi\|_n \leqslant 1$. Выберем в шаре $\|\varphi\|_n \leqslant 1$ гильбертова пространства Φ_n счетное всюду плотное множество, состоящее из элементов $\{\psi_k\}$, и обозначим через A_k полосу в Φ'_n, задаваемую неравенством $|(F, \psi_k)| \leqslant R$. Очевидно, что

$$S_n(R) = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k,$$

т. е. что $S_n(R)$ является борелевским множеством в Φ' (более того, шары являются борелевскими множествами первого класса). Поэтому мера μ и может быть распространена на все шары.

Покажем теперь, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой шар $S_n(R)$, задаваемый неравенством вида $\|F\|_{-n} \leqslant R$, что мера дополнения к этому шару меньше ε. В самом деле, каждый элемент F пространства Φ' принадлежит одному из подпространств Φ'_n и потому удовлетворяет хотя бы одному из неравенств вида $\|F\|_{-n} \leqslant R$. Поэтому пространство Φ' является счетной суммой шаров

$$\Phi' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} S_n(k).$$

Поскольку для любого элемента F при $m \leqslant n$ выполнено неравенство $\|F\|_{-m} \geqslant \|F\|_{-n}$, то $S_n(n) \subset S_{n+1}(n+1)$. Следовательно, пространство Φ' является объединением возрастающей цепочки шаров $S_n(n)$, т. е.

$$\Phi' = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n(n),$$

причем

$$S_1(1) \subset S_2(2) \subset \ldots \subset S_n(n) \subset \ldots$$

*) Через Φ_n мы, как обычно, обозначаем пополнение счетно-гильбертова пространства Φ относительно нормы $\|\varphi\|_n$, а через Φ'_n — гильбертово пространство, сопряженное с Φ_n. Через $\|F\|_{-n}$ обозначена норма в Φ'_n.

Но так как $\mu(\Phi')=1$, то мы имеем

$$\lim_{n\to\infty}\mu[S_n(n)]=1.$$

Это и означает, что для любого $\varepsilon>0$ найдется такое n, что мера дополнения к шару $S_n(n)$ меньше ε.

Итак, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 2. *Если μ — положительная счетно-аддитивная нормированная мера цилиндрических множеств в пространстве Φ', сопряженном со счетно-гильбертовым пространством Φ, то для любого $\varepsilon>0$ найдется такой шар $S_n(R)$, что мера любого цилиндрического множества Z, лежащего вне этого шара, меньше ε.*

Докажем теперь, что справедливо и обратное утверждение.

Теорема 2′. *Пусть μ — положительная нормированная мера цилиндрических множеств в пространстве Φ', сопряженном со счетно-гильбертовым пространством Φ. Если для любого $\varepsilon>0$ найдется шар $S_n(R)$ в Φ', такой, что мера любого цилиндрического множества, лежащего вне этого шара, меньше ε, то мера μ счетно-аддитивна.*

Для доказательства теоремы 2′ нам сначала понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Из любого покрытия шара $S(R):\|\varphi\|\leqslant R$ в гильбертовом пространстве H открытыми цилиндрическими множествами Z можно извлечь конечное подпокрытие.*

При этом цилиндрические множества в гильбертовом пространстве H задаются условиями

$$\{(\varphi,\varphi_1),\ldots,(\varphi,\varphi_n)\}\in A,$$

где $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ — фиксированные элементы в H, а A — некоторое множество в n-мерном пространстве R_n. Так как (φ,φ_k) является линейным функционалом в H, то это определение согласуется с данным в § 1.

Поскольку открытые цилиндрические множества в гильбертовом пространстве образуют окрестности в слабой топологии пространства H, то лемму 1 можно кратко сформулировать, сказав, что *шары в гильбертовом пространстве слабо компактны**), (т. е. компактны в слабой топологии).

Лемма 1 доказывается следующим образом. Сопоставим каждому элементу φ, $\|\varphi\|\leqslant 1$, отрезок $-R\leqslant x\leqslant R$ вещественной оси и обозначим этот отрезок через I_φ. Пусть I — тихоновское произведение всех этих отрезков, отвечающих разным φ (см. например С. Лефшец, «Алгебраическая топология», ИЛ, 1949, стр. 23). Так как тихоновское произведение компактных множеств компактно (С. Лефшец, стр. 34), то I — компактное множество. Пусть теперь φ_0 — элемент из шара $S(R)$. Отметим на каждом отрезке I_φ точку (φ_0,φ). Мы получим, таким образом, что каждому элементу φ_0 отвечает точка из прямого произведения всех этих отрезков I_φ, т. е. точка из I. Простая проверка показывает, что отображение $\varphi_0\to(\varphi_0,\varphi)$ является гомеоморфным вложением шара $S(R)$ (рассматриваемого относительно слабой топологии) в пространство I, причем, образ этого шара замкнут в I. Так как замкнутое подмножество компактного множества компактно, то образ $\alpha(S)$ шара $S(R)$ компактен, а поскольку отображение α является гомеоморфизмом, то и сам шар $S(R)$ компактен. Иными словами, из любого покрытия шара $S(R)$ открытыми цилиндрическими множествами можно извлечь конечное подпокрытие. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 2′. Чтобы убедиться в счетной аддитивности меры μ, нам достаточно по замечанию к теореме 1″ доказать, что если

$$\Phi'=\bigcup_{k=1}^{\infty}\dot{Z}_k$$

— любое покрытие пространства Φ' открытыми цилиндрическими множествами, то имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}Z_k\geqslant 1.$$

*) Множество A, лежащее в топологическом пространстве X, называется *компактным*, если из любого его покрытия открытыми множествами можно извлечь конечное подпокрытие. Мы рассматриваем сейчас слабую топологию в гильбертовом пространстве H, в которой окрестностями нуля являются множества, задаваемые неравенствами вида

$$|(\varphi,\varphi_k)|<\varepsilon,\quad 1\leqslant k\leqslant n,$$

т. е. открытые цилиндрические множества гильбертова пространства H. Компактность множества A относительно такой топологии и означает, что из любого покрытия множества A открытыми цилиндрическими множествами можно извлечь конечное подпокрытие.

Зададим любое число $\varepsilon > 0$. По условию теоремы в пространстве Φ' существует такой шар $S_n(R): \|F\|_{-n} \leqslant R$, что мера любого цилиндрического множества, лежащего вне этого шара, меньше ε. Обозначим через Z_{nk} пересечения множеств Z_k с гильбертовым пространством Φ'_n в Φ'. Очевидно, что множества Z_{nk} являются открытыми цилиндрическими множествами в гильбертовом пространстве Φ'_n, покрывающими это пространство и, следовательно, покрывающими шар $S_n(R)$. По лемме 1 можно выбрать конечное число множеств $Z_{n1}, \ldots, Z_{nj}$, покрывающих шар $S_n(R)$. Поэтому мы имеем

$$S_n(R) \subset \bigcup_{k=1}^{j} Z_{nk} \subset \bigcup_{k=1}^{j} Z_k. \tag{6}$$

Обозначим через Z цилиндрическое множество

$$\Phi' - \bigcup_{k=1}^{j} Z_k.$$

Из включения (6) вытекает, что это множество лежит вне шара $S_n(R)$ и потому его мера меньше ε. Тогда

$$\varepsilon > \mu(Z) = \mu\left(\Phi' - \bigcup_{k=1}^{j} Z_k\right) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{j} \mu(Z_k)$$

(напомним, что множества Z_k могут пересекаться) и потому

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(Z_k) \geqslant \sum_{k=1}^{j} \mu(Z_k) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε отсюда вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(Z_k) \geqslant 1.$$

Тем самым доказано, что мера μ счетно-аддитивна. Теорема 2′ доказана.

Теоремы 2 и 2′ дают необходимое и достаточное условие для того, чтобы мера цилиндрических множеств в пространстве Φ', сопряженном со счетно-гильбертовым пространством Φ, была счетно-аддитивной. Это условие состоит

в возможности найти для любого $\varepsilon > 0$ такой шар $S_n(R)$ в Φ', что мера любого цилиндрического множества Z, лежащего вне этого шара, меньше чем ε.

3. Меры цилиндрических множеств в пространствах, сопряженных ядерным счетно-гильбертовым пространствам. В этом пункте мы докажем основной результат о мерах в пространствах, сопряженных с ядерными счетно-гильбертовыми пространствами. Этот результат формулируется следующим образом.

Теорема 3. *Пусть Φ' — пространство, сопряженное со счетно-гильбертовым ядерным пространством Φ. Тогда любая положительная нормированная мера цилиндрических множеств μ в пространстве Φ', удовлетворяющая условию непрерывности, счетно-аддитивна.*

Доказательству этой теоремы мы предпошлем некоторые леммы о связи между мерами полупространств и шаров в n-мерном пространстве. Пусть μ — положительная нормированная мера в n-мерном евклидовом пространстве. Обозначим через $\mu(r, \omega)$ меру полупространства $(x, \omega) \geqslant r$, которое ограничено плоскостью, перпендикулярной единичному вектору ω и отстоящей на расстояние r от начала координат (через (x, ω) обозначено скалярное произведение в рассматриваемом евклидовом пространстве). Далее обозначим через $\mu(R)$ меру шара радиуса R с центром в начале координат.

Для того чтобы установить связь между значениями $\mu(r, \omega)$ и $\mu(R)$, будем рассматривать не сами меры $\mu(r, \omega)$, а их средние значения по ω. Эти средние значения определяются следующим образом. Единичные векторы ω можно рассматривать как радиусы-векторы точек единичной сферы. Введем в множество Ω этих единичных векторов меру τ, задаваемую естественной нормированной мерой на единичной сфере.

В сферических координатах

$$\begin{array}{ll} x_1 = \rho \cos \varphi_1, & 0 \leqslant \rho < \infty, \\ x_2 = \rho \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, & 0 \leqslant \varphi_k \leqslant \pi, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-2, \\ \cdots\cdots\cdots & 0 \leqslant \varphi_{n-1} < 2\pi, \\ x_n = \rho \sin \varphi_1 \ldots \sin \varphi_{n-1}, & \end{array}$$

эта мера задается формулой

$$d\tau(\omega)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{n/2}}\sin^{n-2}\varphi_1\ldots\sin\varphi_{n-2}\,d\varphi_1\ldots d\varphi_{n-1}. \quad (7)$$

Если $f(\omega)$ — любая функция на сфере Ω (или, что то же самое, функция от единичного вектора ω), то ее средним значением мы назовем интеграл $\int_\Omega f(\omega)\,d\tau(\omega)$ и будем обозначать его через $\langle f(\omega)\rangle$. Таким образом,

$$\langle f(\omega)\rangle=\int_\Omega f(\omega)\,d\tau(\omega). \quad (8)$$

Выразим теперь через меру $\mu(R)$ среднее значение $\langle\mu(r, \omega)\rangle$ мер полупространств $(x, \omega)\geqslant r$. По определению мы имеем

$$\langle\mu(r, \omega)\rangle=\int_\Omega \mu(r, \omega)\,d\tau(\omega). \quad (9)$$

Но

$$\mu(r, \omega)=\int f(x, r, \omega)\,d\mu(x),$$

где через $f(x, r, \omega)$ обозначена характеристическая функция полупространства $(x, \omega)\geqslant r$, т. е. функция, равная единице при $(x, \omega)\geqslant r$ и нулю при $(x, \omega)<r$. Подставляя это значение в формулу (9), мы получим, что

$$\langle\mu(r, \omega)\rangle=\int f(x, r, \omega)\,d\mu(x)\,d\tau(\omega).$$

Отсюда следует равенство

$$\langle\mu(r, \omega)\rangle=\int \varphi(x, r)\,d\mu(x),$$

где через $\varphi(x, r)$ обозначено значение интеграла

$$\varphi(x, r)=\int_\Omega f(x, r, \omega)\,d\tau(\omega).$$

Из этой формулы видно, что $\varphi(x, r)$ равно τ-мере множества тех векторов ω, для которых $(x, \omega)\geqslant r$. Так как концы таких векторов образуют сегмент на единичной сфере, отрезаемый от сферы плоскостью $(x, \omega)=\frac{r}{|x|}$, отстоящей от начала координат на расстояние $\frac{r}{|x|}$, то

$$\varphi(x, r)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\pi}}\int_{\frac{r}{|x|}}^{1}(1-y^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dy, \text{ если } r<|x|,$$

и

$$\varphi(x, r)=0, \text{ если } r\geqslant|x|.$$

Отсюда вытекает, что

$$\langle\mu(r, \omega)\rangle=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\pi}}\int_{r\leqslant|x|}d\mu(x)\int_{\frac{r}{|x|}}^{1}(1-y^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dy.$$

Поскольку выражение $\int_{\frac{r}{|x|}}^{1}(1-y^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dy$ зависит только от $|x|$, то, переходя к сферическим координатам $\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, мы получаем формулу

$$\langle\mu(r, \omega)\rangle=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\pi}}\int_r^\infty\int_{\frac{r}{\rho}}^{1}(1-y^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dy\,d\mu(\rho), \quad (10)$$

где, как указывалось выше, через $\mu(\rho)$ обозначена μ-мера шара с радиусом ρ.

Мы установили, таким образом, связь между средним значением $\langle\mu(r, \omega)\rangle$ мер полупространств $(x, \omega)\geqslant r$ и мерами $\mu(\rho)$ шаров.

Поскольку функция

$$\psi(\rho)=\int_{\frac{r}{\rho}}^{1}(1-y^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dy$$

монотонно возрастает при увеличении ρ, мы получаем из соотношения (10), что при любых значениях r и $R\geqslant r$ имеет место неравенство

$$\langle\mu(r,\,\omega)\rangle\geqslant\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\pi}}\int_{\frac{r}{R}}^{1}(1-y^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dy\,[1-\mu(R)].$$

Из этого неравенства вытекает, что

$$1-\mu(R)\leqslant C\left(n,\,\frac{r}{R}\right)\cdot\langle\mu(r,\,\omega)\rangle, \tag{11}$$

где через $C\left(n,\,\frac{r}{R}\right)$ обозначено отношение

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\pi}\int_{\frac{r}{R}}^{1}(1-y^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dy}=\frac{2\int_0^1(1-y^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dy}{\int_{\frac{r}{R}}^{1}(1-y^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dy}.$$

Мы покажем сейчас, что если в $C(n,\,r/R)$ положить $\frac{r}{R}=\frac{1}{\sqrt{n}}$, то величины $C_n=C(n,\sqrt{n})$ будут ограничены в совокупности. Для этого примем во внимание, что

$$C_n=\frac{2\int_0^1(1-y^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dy}{\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1}(1-y^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dy}=\frac{2\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{y^2}{n}\right)^{\frac{n-3}{2}}dy}{\int_1^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{y^2}{n}\right)^{\frac{n-3}{2}}dy}.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}C_n=\frac{2\int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy}{\int_1^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy}<+\infty.$$

Поскольку все величины C_n, $n=1,\,2,\,\ldots$, больше нуля, а $\lim\limits_{n\to\infty}C_n<+\infty$, то эти величины ограничены в совокупности. Положим $C=\sup\limits_n C_n$. Тогда из неравенства (11) вытекает неравенство

$$1-\mu(R)\leqslant C\left\langle\mu\left(\frac{R}{\sqrt{n}},\,\omega\right)\right\rangle.$$

Итак, мы доказали следующую лемму, позволяющую оценивать меры $\mu(R)$ шаров радиуса R по мерам $\mu(r,\,\omega)$ полупространств $(x,\,\omega)\geqslant r$.

Лемма 2. *Пусть μ — положительная нормированная мера в n-мерном евклидовом пространстве. Тогда между мерами $\mu(R)$ шаров радиуса R и мерами $\mu\left(\frac{R}{\sqrt{n}},\,\omega\right)$ полупространств $(x,\,\omega)\geqslant\frac{R}{\sqrt{n}}$ имеет место неравенство*

$$1-\mu(R)\leqslant C\cdot\left\langle\mu\left(\frac{R}{\sqrt{n}},\,\omega\right)\right\rangle, \tag{12}$$

где C — постоянная, не зависящая ни от n ни от R.

Полупространства, о которых идет речь в лемме 2, ограничены плоскостями $(x,\,\omega)=\frac{R}{\sqrt{n}}$, касательными к шару радиуса $\frac{R}{\sqrt{n}}$ с центром в начале координат. Нам понадобится для доказательства теоремы 3 аналогичная лемма, в которой шар радиуса $\frac{R}{\sqrt{n}}$ заменен эллипсоидом. Предпошлем этой лемме следующее утверждение о среднем значении квадратов расстояний от начала координат до касательных плоскостей к эллипсоиду.

Лемма 3. *Пусть $r(\omega)$ — расстояние от начала координат до плоскости, касательной к эллипсоиду*

$$\frac{x_1^2}{\lambda_1^2}+\ldots+\frac{x_n^2}{\lambda_n^2}=1$$

и перпендикулярной единичному вектору ω. Тогда имеет место равенство

$$\langle r^2(\omega)\rangle=\frac{1}{n}(\lambda_1^2+\ldots+\lambda_n^2).$$

Доказательство. Простой подсчет показывает, что

$$r^2(\omega)=\lambda_1^2\omega_1^2+\ldots+\lambda_n^2\omega_n^2,$$

где $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — координаты вектора ω *).

Отсюда следует, что

$$\langle r^2(\omega)\rangle=\lambda_1^2\langle\omega_1^2\rangle+\ldots+\lambda_n^2\langle\omega_n^2\rangle.$$

Но так как $\omega_1^2+\ldots+\omega_n^2=1$, а все координаты $\omega_1, \ldots, \omega_n$ равноправны, то

$$\langle\omega_k^2\rangle=\frac{1}{n}\langle\omega_1^2+\ldots+\omega_n^2\rangle=\frac{1}{n}$$

и потому

$$\langle r^2(\omega)\rangle=\frac{1}{n}(\lambda_1^2+\ldots+\lambda_n^2).$$

Лемма доказана.

*) В самом деле, если координаты точки касания $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$, то уравнение касательной плоскости к эллипсоиду имеет вид

$$\frac{x_1x_1^{(0)}}{\lambda_1^2}+\ldots+\frac{x_nx_n^{(0)}}{\lambda_n^2}=1.$$

Приводя это уравнение к нормальному виду, мы получим, что $\omega_k=\frac{r(\omega)x_k^{(0)}}{\lambda_k^2}$ и потому $x_k^{(0)}=\frac{\omega_k\lambda_k^2}{r(\omega)}$. Но

$$\frac{x_1^{(0)2}}{\lambda_1^2}+\ldots+\frac{x_n^{(0)2}}{\lambda_n^2}=1$$

и, следовательно,

$$r^2(\omega)=\lambda_1^2\omega_1^2+\ldots+\lambda_n^2\omega_n^2.$$

Перейдем теперь к доказательству следующей леммы, являющейся (наряду с леммой 2) центральным пунктом в доказательстве теоремы 3.

Лемма 4. *Пусть в n-мерном пространстве R_n задана положительная нормированная мера μ. Пусть далее задан эллипсоид Q, такой, что для любой его касательной плоскости мера внешнего полупространства меньше ε. Тогда для любого шара $S(R)$ радиуса R, содержащего эллипсоид Q, мера внешней к нему области не превосходит значения $C\left(\varepsilon+\frac{H^2}{R^2}\right)$, где H^2 — сумма квадратов полуосей эллипсоида Q, а C — постоянная, не зависящая ни от n, ни от выбранных нами шара и эллипсоида.*

Доказательство. Проведем перпендикулярно каждому единичному вектору ω касательную плоскость $(x, \omega)=\frac{R}{\sqrt{n}}$ к шару радиуса $R/\sqrt{n}$. Параллельно каждой плоскости $(x, \omega)=R/\sqrt{n}$ проходит касательная плоскость $(x, \omega)=r(\omega)$ к эллипсоиду Q ($r(\omega)$ — расстояние этой плоскости от начала координат). Для некоторых из векторов ω выполнено неравенство $\frac{R}{\sqrt{n}}\leqslant r(\omega)$. Множество соответствующих векторов обозначим через Ω_1. Множество остальных единичных векторов, для которых, следовательно, имеет место неравенство $R/\sqrt{n}>r(\omega)$, мы обозначим через Ω_2.

Покажем, что мера $\tau(\Omega_1)$ множества Ω_1 единичных векторов не превосходит значения H^2/R^2 (напомним, что τ — это мера в множестве единичных векторов, соответствующая обычной нормированной мере на единичной сфере). В самом деле, из леммы 3 вытекает, что

$$\frac{H^2}{n}=\langle r^2(\omega)\rangle=\int\limits_{\Omega} r^2(\omega)\,d\tau\geqslant\int\limits_{\Omega_1} r^2(\omega)\,d\tau.$$

Но при $\omega\in\Omega_1$ мы имеем $r^2(\omega)\geqslant\frac{R^2}{n}$ и потому

$$\frac{H^2}{n}\geqslant\frac{R^2}{n}\tau(\Omega_1).$$

Но это и значит, что

$$\tau(\Omega_1)\leqslant\frac{H^2}{R^2}. \tag{13}$$

Обозначим теперь через $\mu\left(\frac{R}{\sqrt{n}},\ \omega\right)$ меру полупространства $(x,\omega)\geqslant\frac{R}{\sqrt{n}}$ и оценим среднее значение $\left\langle\mu\left(\frac{R}{\sqrt{n}},\ \omega\right)\right\rangle$ этой меры. Очевидно, что

$$\left\langle\mu\left(\frac{R}{\sqrt{n}},\ \omega\right)\right\rangle=\int_{\Omega}\mu\left(\frac{R}{\sqrt{n}},\ \omega\right)d\tau=$$
$$=\int_{\Omega_1}\mu\left(\frac{R}{\sqrt{n}},\ \omega\right)d\tau+\int_{\Omega_2}\mu\left(\frac{R}{\sqrt{n}},\ \omega\right)d\tau. \quad (14)$$

Из тривиальной оценки $\mu\left(\frac{R}{\sqrt{n}},\ \omega\right)\leqslant 1$ и неравенства (13) вытекает, что

$$\int_{\Omega_1}\mu\left(\frac{R}{\sqrt{n}},\ \omega\right)d\tau\leqslant\frac{H^2}{R^2}. \quad (15)$$

С другой стороны, при $\omega\in\Omega_2$, плоскость $(x,\omega)=R/\sqrt{n}$ дальше от начала координат, чем параллельная ей касательная плоскость к эллипсоиду Q. Поэтому при $\omega\in\Omega_2$ полупространство $(x,\omega)\geqslant R/\sqrt{n}$ лежит в полупространстве $(x,\omega)\geqslant r(\omega)$. Но по условию теоремы мера внешнего полупространства для касательной плоскости к эллипсоиду не превосходит ε. Тем более при $\omega\in\Omega_2$ выполняется неравенство $\mu(R/\sqrt{n},\ \omega)<\varepsilon$. Принимая во внимание тривиальную оценку $\tau(\Omega_2)\leqslant 1$, мы получаем, что

$$\int_{\Omega_2}\mu(R/\sqrt{n},\ \omega)\,d\tau\leqslant\varepsilon. \quad (16)$$

Из неравенств (15) и (16) и равенства (14) следует оценка

$$\langle\mu(R/\sqrt{n},\ \omega)\rangle\leqslant\frac{H^2}{R^2}+\varepsilon. \quad (17)$$

По лемме 3 отсюда вытекает, что

$$1-\mu(R)\leqslant C\left(\varepsilon+\frac{H^2}{R^2}\right), \quad (18)$$

где C — постоянная, не зависящая ни от n, ни от значений H и R, а $1-\mu(R)$ — мера внешней области для шара радиуса R. Лемма доказана.

Мы докажем теперь, что для пространств, сопряженных со счетно-гильбертовыми пространствами, справедлива лемма, аналогичная лемме 4. Предпошлем этой лемме следующее замечание. Пусть пространство $\Phi'=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Phi'_n$, сопряженно со счетно-гильбертовым пространством $\Phi=\bigcap_{n=1}^{\infty}\Phi_n$, и пусть Ψ — конечномерное подпространство в Φ, а Ψ^0 — его аннулятор. Зафиксируем любое значение n. Отображение T пространства Φ' на фактор-пространство Φ'/Ψ^0 индуцирует отображение T_n подпространства Φ'_n в Φ'/Ψ^0. Но каждое подпространство Φ'_n всюду плотно в Φ' (см. гл. I, § 3, п. 1) и потому образ Φ'_n в Φ'/Ψ^0 всюду плотен в Φ'/Ψ^0. Поскольку фактор-пространство Φ'/Ψ^0 конечномерно, а образ Φ'_n является линейным подпространством в Φ'/Ψ^0, то отсюда следует, что при отображении T'_n подпространство Φ'_n отображается на все фактор-пространство Φ'/Ψ^0. Поэтому справедливо равенство

$$\Phi'/\Psi^0=\Phi'_n/\Psi^0\cap\Phi'_n.$$

Обозначим теперь через Ψ^* ортогональное дополнение к подпространству $\Psi^0\cap\Phi'_n$ в гильбертовом пространстве Φ'_n (т. е. совокупность всех элементов F из Φ'_n, таких, что $(F,F_1)_{-n}=0$, если $F_1\in\Psi^0\cap\Phi'_n$). Очевидно, что при отображении Φ'_n на Φ'/Ψ^0 подпространство Ψ^* взаимно-однозначно отображается на Φ'/Ψ^0. Поэтому любой элемент F пространства Φ' может быть единственным образом записан в виде $F=F^0+F^*$, где $F^0\in\Psi^0$, $F^*\in\Psi^*$. Мы будем называть множество Ψ^* *ортогональным дополнением к* Ψ^0 *в подпространстве* Φ'_n.

Перейдем теперь к формулировке и доказательству аналога леммы 4.

Лемма 4′. *Пусть μ — нормированная положительная мера цилиндрических множеств в пространстве*

$$\Phi'=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Phi'_n,$$

сопряженном со счетно-гильбертовым пространством

$\Phi=\bigcap_{n=1}^{\infty}\Phi_n$. *Пусть* Q *) *— эллипсоид в гильбертовом пространстве* Φ'_n, *такой, что сумма квадратов его главных полуосей равна* H^2, *а мера любого полупространства в* Φ', *лежащего вне эллипсоида* Q, *меньше* ε. *Если* $S_n(R):\|F\|_{-n}\leqslant R$ *— любой шар в гильбертовом пространстве* Φ'_n, *содержащий эллипсоид* Q, *то мера любого цилиндрического множества* Z, *лежащего вне этого шара, меньше, чем* $C(\varepsilon+H^2/R^2)$, *где* C *— та же постоянная, что и в лемме* 4.

Доказательство. Выберем любое цилиндрическое множество Z, лежащее вне шара $S_n(R)$. Пусть его образующим подпространством является Ψ^0, а основанием — множество A в Φ'/Ψ^0. Обозначим через Ψ^* ортогональное дополнение подпространства $\Psi^0\cap\Phi'_n$ в пространстве Φ'_n.

Если F — любой элемент пространства Φ', то, как мы видели, он может быть единственным образом записан в виде $F=F^0+F^*$, где $F^0\in\Psi^0$, $F^*\in\Psi^*$. Обозначим через P отображение, переводящее элемент $F=F^0+F^*$ в F^*, $P(F)=F^*$. Так как подпространство Ψ^* по построению ортогонально подпространству $\Psi^0\cap\Phi'_n$, то для элементов F из подпространства Φ'_n отображение P является ортогональной проекцией Φ'_n на Ψ^*. При этой ортогональной проекции шар $S_n(R)$ переходит в шар $S_n^*(R)$ подпространства Ψ^*, а эллипсоид Q — в эллипсоид Q^*, лежащий в подпространстве Ψ^*. Так как цилиндрическое множество Z лежит вне шара $S_n(R)$, то его образ Z^* в Ψ^* лежит вне шара $S_n^*(R)$.

Введем теперь в пространство Ψ^* меру μ^*, определяемую равенством

$$\mu^*(X)=\mu\left[P^{-1}(X)\right]\equiv\mu(X+\Psi^0).$$

Применим к шару $S_n^*(R)$, эллипсоиду R^* и мере μ^* в конечномерном пространстве Ψ^* лемму 4. Для этого заметим, что

*) Эллипсоидом в гильбертовом пространстве Φ'_n мы называем образ единичного шара $\|F\|_{-n}=1$ при некотором линейном отображении T. Условие сходимости ряда, составленного из квадратов главных полуосей этого эллипсоида, означает, что оператор T является оператором типа Гильберта — Шмидта.

сумма квадратов главных полуосей эллипсоида Q^* не превосходит H^2. В самом деле, эллипсоид Q можно рассматривать как образ единичного шара в пространстве Φ'_n при отображении T, у которого норма Гильберта — Шмидта равна H. Эллипсоид же Q^* является образом единичного шара при отображении PT. Но норма Гильберта — Шмидта этого отображения не превосходит H*). Следовательно, сумма квадратов главных полуосей эллипсоида Q^* не превосходит H^2. Покажем, что мера любого полупространства в Ψ^*, не пересекающегося с эллипсоидом Q^*, меньше ε. В самом деле, если полупространство C^* в Ψ^* не пересекается с эллипсоидом Q^*, то $C=C^*+\Psi^0$ является полупространством в Φ', не пересекающимся с эллипсоидом Q, и потому

$$\mu^*(C^*)=\mu(C^*+\Psi^0)=\mu(C)\leqslant\varepsilon.$$

Наконец, так как $Q\subset S_n(R)$, то $Q^*\subset S_n^*(R)$. Поэтому, в силу леммы 4, μ^*-мера дополнения к шару $S_n^*(R)$ — не превосходит $C(\varepsilon+H^2/R^2)$. Но основание A^* множества Z лежит в дополнении к $S_n^*(R)$. Поэтому

$$\mu(Z)=\mu^*(A^*)\leqslant C(\varepsilon+H^2/R^2).$$

Перейдем теперь к нашей главной цели — доказательству теоремы 3. Иными словами, мы хотим доказать, что *положительная нормированная мера цилиндрических множеств в пространствах, сопряженных с ядерными пространствами, счетно-аддитивна.*

Доказательство теоремы 3. Как было показано в теореме 2′, для доказательства счетной аддитивности меры μ достаточно при любом $\varepsilon>0$ найти такие числа n и R, что мера любого цилиндрического множества Z, лежащего вне шара $S_n(R):\|F\|_{-n}\leqslant R$, меньше ε. Сначала мы воспользуемся условием непрерывности меры μ. Из этого

*) В самом деле, если $f_1,\ldots,f_k,\ldots$ — ортогональный нормированный базис в пространстве Φ'_n, то

$$\|PT\|_2=\left[\sum_{k=1}^{\infty}\|PTf_k\|^2\right]^{1/2}\leqslant\|P\|\left[\sum_{k=1}^{\infty}\|Tf_k\|^2\right]^{1/2}=\|P\|\,\|T\|_2=H\|P\|.$$

Так как P — проекционный оператор, то $\|P\|=1$ и потому $\|PT\|_2\leqslant H$.

условия вытекает существование такого шара $S_m(\rho)$: $\|F\|_{-m} \leqslant \rho$, что мера любого полупространства в Φ', не пересекающегося с этим шаром, меньше $\varepsilon/2C$, где C — постоянная из леммы 4′ (см. п. 2).

Так как пространство Φ ядерно, то найдется такое n, что шар $S_m(\rho)$, рассматриваемый в гильбертовом пространстве Φ'_n, является эллипсоидом, сумма квадратов главных полуосей которого конечна (для этого надо взять такое n, что отображение пространства Φ'_m в Φ'_n является отображением типа Гильберта — Шмидта).

Обозначим сумму квадратов главных полуосей эллипсоида $S_m(\rho)$ в Φ'_n через H^2 и выберем настолько большое значение R, что шар $S_n(R)$ в Φ'_n содержит эллипсоид $S_m(\rho)$, причем имеет место неравенство

$$\frac{H^2}{R^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2C}. \tag{19}$$

По лемме 4′ для любого цилиндрического множества Z в пространстве Φ', лежащего вне шара $S_n(R)$, справедлива оценка

$$\mu(Z) \leqslant C\left(\frac{\varepsilon}{2C} + \frac{H^2}{R^2}\right).$$

Из неравенства (19) следует тогда, что $\mu(Z) \leqslant \varepsilon$.

Итак, мы нашли такой шар $S_n(R)$, что мера любого цилиндрического множества Z, лежащего вне этого шара, меньше, чем заданное число $\varepsilon > 0$. Отсюда в силу теоремы 2′ вытекает счетная аддитивность меры μ.

Таким образом, доказательство теоремы 3 закончено.

Можно доказать, что ядерность пространства Φ является не только достаточным, но и необходимым условием для того, чтобы любая мера цилиндрических множеств в сопряженном к нему пространстве Φ' была счетно-аддитивной. Это утверждение доказывается путем построения для любого неядерного счетно-гильбертова пространства Φ положительной нормированной меры μ цилиндрических множеств в Φ', не обладающей свойством счетной аддитивности. Более того, эту меру μ можно выбрать так, чтобы она была так называемой гауссовой мерой (см. теорему 2 § 3).

Мы уже отмечали, что в некоторых вопросах можно вместо ядерных пространств рассматривать два гильбертовых пространства, связанные ядерным отображением. Укажем сейчас аналог теоремы 3, получающийся при такой замене.

Теорема 4. *Пусть H_1 и H_2 — гильбертовы пространства и T — ядерное отображение пространства H_2 в пространство H_1. Пусть в пространстве H'_1, сопряженном с H_1, задана мера цилиндрических множеств μ. Тогда индуцированная*) этой мерой при отображении T мера ν в пространстве H'_2 счетно-аддитивна.*

Доказательство этой теоремы является дословным повторением доказательства теоремы 3. Ведь в теореме 3 мы использовали лишь, что мера μ непрерывна в одном из гильбертовых пространств Φ'_m и что существует ядерное отображение этого пространства Φ'_m в одно из пространств Φ'_n.

Отметим, что, в то время как теорема 3 говорит о *всех* мерах в пространстве Φ', теорема 4 касается лишь мер в пространстве H'_2, индуцированных какой-либо мерой в пространстве H'_1.

4. Счетная аддитивность мер цилиндрических множеств в пространствах, сопряженных с точными объединениями ядерных пространств. Доказанная в предыдущем пункте теорема не является достаточной для некоторых приложений. Например, эта теорема не применима к мерам цилиндрических множеств в пространстве K', сопряженном к пространству K всех бесконечно дифференцируемых финитных функций. Дело в том, что пространство K не является счетно-гильбертовым. Оно является лишь объединением своих ядерных подпространств $K(a)$, состоящих из функций, которые обращаются в нуль вне шара $|x| \leqslant a$. При этом каждое подпространство $K(a)$ замкнуто в пространстве K, а последовательность функций $\{\varphi_m(x)\}$ из пространства K сходится к нулю тогда и только тогда, когда все функции $\varphi_m(x)$ принадлежат одному и тому же подпространству $K(a)$ и сходятся к нулю в этом подпространстве. Кроме того, из общего вида линейных функционалов в пространстве $K(a)$ следует, что каждый линейный функционал в пространстве $K(a)$ может быть распространен на все пространство K.

*) Относительно мер, индуцированных при заданном отображении, см. § 1, п. 4.

Чтобы получить теорему о счетной аддитивности мер цилиндрических множеств, пригодную и для пространства K', введем понятие точного объединения линейных топологических пространств.

Линейное топологическое пространство Φ называется *точным объединением* своих замкнутых подпространств $\Phi^{(1)}, \ldots, \Phi^{(m)}, \ldots$, если

1) пространство Φ является объединением подпространств $\Phi^{(1)}, \ldots, \Phi^{(m)}, \ldots$, т. е. $\Phi = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \Phi^{(m)}$;

2) последовательность элементов $\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots$ из пространства Φ сходится к нулю тогда и только тогда, когда все элементы φ_k принадлежат одному и тому же подпространству $\Phi^{(m)}$ и сходятся к нулю в этом подпространстве;

3) любой линейный функционал F в подпространстве $\Phi^{(m)}$ может быть распространен на все пространство Φ.

Не теряя общности, мы можем считать, что подпространства $\Phi^{(1)}, \ldots, \Phi^{(m)}, \ldots$, точным объединением которых является пространство Φ, образуют возрастающую цепочку

$$\Phi^{(1)} \subset \ldots \subset \Phi^{(m)} \subset \ldots$$

Рассмотрим линейный функционал F в этом пространстве. Очевидно, что, рассматривая функционал F на подпространстве $\Phi^{(1)}, \ldots, \Phi^{(m)}, \ldots$, мы получим линейные функционалы $F^{(1)}, \ldots, F^{(m)}, \ldots$ в этих пространствах, — образы функционала F. При этом в силу условия 3) каждый линейный функционал в пространстве $\Phi^{(m)}$ можно рассматривать как образ некоторого функционала в пространстве Φ. Функционалы $F^{(1)}, \ldots, F^{(m)}, \ldots$, соответствующие данному функционалу F в пространстве Φ, согласованы друг с другом в следующем смысле: если $m \leqslant n$, то для любого элемента φ из $\Phi^{(m)}$ выполняется равенство

$$(F^{(m)}, \varphi) = (F^{(n)}, \varphi)$$

(обе части этого равенства совпадают с (F, φ)).

Таким образом, мы видим, что элементы F пространства Φ', сопряженного с Φ, могут быть записаны в виде

$$F = \{F^{(1)}, \ldots, F^{(m)}, \ldots\},$$

где $F^{(m)} \in \Phi^{(m)'}$ и функционалы $F^{(1)}, \ldots, F^{(m)}, \ldots$ согласованы друг с другом.

Рассмотрим теперь цилиндрические множества в пространстве Φ'. Легко показать, что любое такое множество задается цилиндрическим множеством $Z^{(m)}$ в одном из пространств $\Phi^{(m)'}$ и состоит из всех элементов $F = \{F^{(1)}, \ldots$ $\ldots, F^{(m)}, \ldots\}$ пространства Φ', для которых $F^{(m)} \in Z^{(m)}$. Мы будем обозначать цилиндрическое множество в пространстве Φ', заданное цилиндрическим множеством $Z^{(m)}$ в пространстве $\Phi^{(m)'}$, через $Z(Z^{(m)})$.

Легко проверить, что слабые окрестности в пространстве Φ' совпадают с цилиндрическими множествами, задаваемыми слабыми окрестностями в пространствах $\Phi^{(m)'}$.

Мы будем в дальнейшем пользоваться отображениями T^m пространства Φ' в пространства $\Phi^{(m)'}$, $m = 1, 2, \ldots$ При этих отображениях элементу

$$F = \{F^{(1)}, \ldots, F^{(m)}, \ldots\}$$

из пространства Φ' сопоставляется его m-я координата $F^{(m)}$. Из согласованности функционалов $F^{(m)}$ вытекает, что, при $m \leqslant n$, $T^m (T^n)^{-1} F^{(n)} = F^{(m)}$. Поэтому, полагая $T^n_m = T^m (T^n)^{-1}$, мы получаем отображение пространства $\Phi^{(n)'}$ на пространство $\Phi^{(m)'}$, при котором каждый функционал $F^{(n)}$ переходит в согласованный с ним функционал $F^{(m)}$.

Рассмотрим теперь меру μ цилиндрических множеств в пространстве Φ'. Эта мера задает меры цилиндрических множеств в каждом из пространств $\Phi^{(m)'}$. В самом деле, положим для любого цилиндрического множества $Z^{(m)}$ из пространства $\Phi^{(m)'}$

$$\mu_m (Z^{(m)}) = \mu [Z(Z^{(m)})],$$

где $Z(Z^{(m)})$ — цилиндрическое множество в Φ', заданное цилиндрическим множеством $Z^{(m)}$. Очевидно, что μ_m является мерой цилиндрических множеств в пространстве $\Phi^{(m)}$. Получаемые при этом меры $\mu_1, \ldots \mu_m, \ldots$ согласованы друг с другом в том смысле, что при $m \leqslant n$ для любого множества $Z^{(m)}$ из $\Phi^{(m)'}$ имеет место равенство

$$\mu_m(Z^{(m)}) = \mu_n\left[(T_m^n)^{-1} Z^{(m)}\right]. \tag{20}$$

В самом деле, как легко видеть, множества $Z^{(m)}$ и $(T_m^n)^{-1} Z^{(m)}$ задают одно и то же цилиндрическое множество Z в Φ', а потому обе части равенства (20) совпадают с $\mu(Z)$.

Справедливо и обратное утверждение: если $\mu_1, \ldots \mu_m, \ldots$ — любая последовательность согласованных друг с другом мер цилиндрических множеств в пространствах $\Phi^{(1)'}, \ldots, \Phi^{(m)'}, \ldots$, то существует мера μ в пространстве Φ', такая, что

$$\mu[Z(Z^{(m)})] = \mu_m(Z^{(m)})$$

для всех m и всех множеств $Z^{(m)}$ из $\Phi^{(m)'}$.

Разумеется, поскольку меры μ_m конечно-аддитивны, то мера μ также конечно-аддитивна. Несколько сложнее показать, что из счетной аддитивности всех мер μ_m, соответствующих данной мере μ в Φ', вытекает при некоторых предположениях о Φ' счетная аддитивность меры μ. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть пространство Φ является точным объединением счетно-нормированных пространств $\Phi^{(1)}, \ldots, \Phi^{(m)}, \ldots$ Пусть далее в пространстве Φ', сопряженном с Φ, задана положительная нормированная мера μ. Если для любого m мера μ_m, индуцированная мерой μ в пространстве $\Phi^{(m)'}$, регулярна в смысле Каратеодори и счетно-аддитивна, то мера μ также счетно-аддитивна.*

Доказательство. Согласно теореме 1' нам надо показать, что любая убывающая последовательность цилиндрических множеств из Φ'

$$Z_1 \supset \ldots \supset Z_k \supset \ldots,$$

такая, что $\lim\limits_{k \to \infty} \mu(Z_k) = \varepsilon > 0$, имеет непустое пересечение. Каждое из цилиндрических множеств Z_k в Φ' задается цилиндрическим множеством $Z^{(m_k)}$ из пространства $\Phi^{(m_k)'}$. Если

множество чисел m_k ограничено в совокупности, то, не теряя общности, мы можем считать, что все эти числа равны друг другу: $m_1 = m_2 = \ldots = m_k = \ldots = m$. В этом случае непустота пересечения $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$ вытекает из счетной аддитивности меры μ_m.

Предположим теперь, что множество чисел m_k неограничено. В этом случае, не теряя общности, мы можем считать, что

$$m_1 < m_2 < \ldots < m_n < \ldots$$

По условию теоремы все меры μ_{m_k} регулярны в смысле Каратеодори. Поэтому в каждом пространстве $\Phi^{(m_k)'}$ найдется такое слабо замкнутое множество B_k, что $B_k \subset Z^{(m_k)}$ и

$$\mu_{m_k}\left[Z^{(m_k)} - B_k\right] \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}.$$

Далее, по теореме 2, в силу счетной аддитивности меры μ_{m_k} в пространстве $\Phi^{(m_k)'}$ найдется такое слабо компактное множество (шар) C_k, что $\mu_{m_k}(C_k) \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}$. Очевидно, что множество $D_k = B_k \cap C_k$ также слабо компактно, причем

$$\mu_{m_k}\left[Z^{(m_k)} - D_k\right] \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Положим теперь

$$E_k = \bigcap_{j \leqslant k} \left(T_{m_j}^{m_k}\right)^{-1} D_j.$$

Легко видеть, что $E_k \subset Z^{(m_k)}$, причем

$$\mu_{m_k}\left[Z^{(m_k)} - E_k\right] \leqslant \sum_{j=1}^{k} \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому

$$\mu_{m_k}(E_k) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее очевидно, что множества E_k слабо компактны.

Выберем теперь в каждом из множеств E_k по элементу $F^{(m_k)}$ $\left(\text{эти множества не пусты, поскольку } \mu_{m_k}(E_k) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Положим при $j \leqslant m_k$

$$F_k^{(j)} = T_{m_j}^{m_k} F^{(m_k)}.$$

Так как $T_{m_1}^{m_k}(E_k) \subset E^{(1)}$, то элементы

$$F_1^{(1)}, \ldots, F_k^{(1)}, \ldots$$

принадлежат слабо компактному множеству $E^{(1)}$. Следовательно, из них можно выбрать последовательность

$$F_{i_1}^{(1)}, \ldots, F_{i_k}^{(1)}, \ldots$$

слабо сходящуюся к некоторому элементу F_{m_1} из $\Phi^{(m_1)}$. Рассмотрим далее элементы

$$F_{i_1}^{(2)}, \ldots, F_{i_k}^{(2)}, \ldots$$

в множестве $E^{(2)}$, соответствующие этой подпоследовательности, и выберем из них подпоследовательность, слабо сходящуюся к элементу F_{m_2} из множества $\Phi^{(m_2)}$. Из слабой непрерывности отображения $T_{m_1}^{m_2}$ вытекает, что $T_{m_1}^{m_2}(F_{m_2}) = F_{m_1}$. Далее мы строим аналогичным образом элементы $F_{m_3}, \ldots, F_{m_k}, \ldots$, такие, что $F_{m_j} = T_{m_j}^{m_k} F_{m_k}$ при $j \leqslant k$, и положим $F_m = T_m^{m_k}(F_{m_k})$ при $m \leqslant m_k$. Тогда элемент

$$F = (F_1, \ldots, F_m, \ldots)$$

принадлежит пространству Φ', и, более того, всем множествам Z_k, поскольку $F_{m_k} \in Z^{(m_k)}$. Тем самым доказано, что последовательность цилиндрических множеств $Z_1, \ldots, Z_k, \ldots$ имеет непустое пересечение, а потому мера μ счетно-аддитивна. Теорема доказана.

Поскольку согласно теореме 3 в пространствах, сопряженных к ядерным, любая положительная нормированная мера цилиндрических множеств, удовлетворяющая условию непрерывности, счетно-аддитивна, мы получаем из теоремы 5 следующий вывод.

Теорема 6. *Пусть пространство Φ является точным объединением возрастающей цепочки*

$$\Phi^{(1)} \subset \ldots \subset \Phi^{(k)} \subset \ldots$$

ядерных пространств. Тогда любая положительная нормированная мера цилиндрических множеств в сопряженном с Φ пространстве Φ', удовлетворяющая условию непрерывности, счетно-аддитивна.

Поскольку пространство K является точным объединением своих ядерных подпространств $K(a)$, любая мера цилиндрических множеств в K', обладающая указанными свойствами, счетно-аддитивна.

5. Условие счетной аддитивности меры цилиндрических множеств в гильбертовом пространстве. Теорема 3 дает условие счетной аддитивности *всех* мер цилиндрических множеств в счетно-гильбертовом пространстве Φ. В этом пункте мы укажем условие счетной аддитивности конкретной меры μ, заданной в гильбертовом пространстве H.

Рассмотрим в пространстве H последовательность $B_1, \ldots, B_n, \ldots$ положительно определенных операторов. При помощи этой системы операторов введем в H новую топологию, приняв за базу окрестностей нуля систему множеств $U_n(R)$ в H, определяемую неравенствами вида

$$(B_n\varphi, \varphi) \leqslant R^2, \quad \varphi \in H.$$

Мы будем называть эту топологию *топологией, заданной операторами* $B_1, \ldots, B_n, \ldots$ Имеет место следующая теорема.

Теорема 7. *Для того чтобы положительная нормированная мера μ цилиндрических множеств**) *в гильбертовом пространстве H была счетно-аддитивной, необходимо и достаточно, чтобы эта мера удовлетворяла*

*) Под цилиндрическим множеством в гильбертовом пространстве H мы понимаем совокупность элементов φ, задаваемую включением вида

$$\{(\varphi, \varphi_1), \ldots, (\varphi, \varphi_k)\} \in A,$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ — элементы пространства H. Поскольку (φ, φ_j) является функционалом в H, это определение согласуется с данным в § 1.

условию непрерывности относительно топологии в H, задаваемой некоторой последовательностью $B_1, \ldots, B_n, \ldots$ положительно определенных ядерных операторов.

Выполнение условия непрерывности меры μ означает следующее. Для любого $\varepsilon>0$ найдутся такие значения n и $\delta>0$, что из неравенства $(B_n\varphi, \varphi)\leqslant\delta$ вытекает неравенство $\mu(\Gamma_\varphi)\leqslant\varepsilon$, где через Γ_φ обозначена полоса, задаваемая неравенством $|(\varphi, \psi)|\geqslant 1$.

Доказательство. Докажем сначала, что условие теоремы необходимо. Пусть мера μ счетно-аддитивна. Построим тогда для любого n положительно определенный ядерный оператор B_n, такой, что из неравенства $(B_n\varphi, \varphi)\leqslant\frac{1}{2n}$ вытекает неравенство $\mu(\Gamma_\varphi)<\frac{1}{n}$. Этот оператор строится следующим образом. Так как мера μ счетно-аддитивна, то ее можно распространить на все шары в H. Но пространство H является объединением шаров, и потому найдется такой шар $S(R):\|x\|\leqslant R$, что мера дополнения к нему меньше, чем $\frac{1}{2n}$. Определим оператор B_n, положив

$$(B_n\varphi, \varphi)=\int\limits_{S(R)}|(\varphi, \psi)|^2\,d\mu(\psi).$$

Очевидно, что оператор B_n положительно определен. Чтобы доказать его ядерность, заметим, что для любого ортогонального нормированного базиса $\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}(B_n\varphi_k, \varphi_k)=\int\limits_{S(R)}\sum_{k=1}^{\infty}|(\varphi_n, \psi)|^2\,d\mu(\psi)=$$
$$=\int\limits_{S(R)}\|\psi\|^2\,d\mu(\psi)\leqslant R^2\int\limits_{S(R)}d\mu(\psi)\leqslant R^2.$$

Иными словами, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(B_n\varphi_k, \varphi_k)$ сходится для любого ортогонального нормированного базиса $\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots$ Как было показано в п. 3 § 2 главы I, отсюда вытекает, что B_n — ядерный оператор.

Рассмотрим теперь любой элемент φ, такой, что $(B_n\varphi, \varphi)\leqslant\frac{1}{2n}$, и оценим меру полосы Γ_φ, задаваемой неравенством $|(\varphi, \psi)|\geqslant 1$. Очевидно, что

$$\mu(\Gamma_\varphi)=\mu(\Gamma'_\varphi)+\mu(\Gamma''_\varphi),$$

где Γ'_φ — часть полосы Γ_φ, содержащаяся в шаре $S(R)$, а Γ''_φ — часть этой полосы, лежащая вне этого шара. В силу выбора шара $S(R)$ мы имеем, что $\mu(\Gamma''_\varphi)\leqslant\frac{1}{2n}$. С другой стороны, из неравенства $|(\varphi, \psi)|\geqslant 1$, имеющего место в полосе Γ_φ, а тем самым и в Γ'_φ, вытекает, что

$$\mu(\Gamma'_\varphi)=\int\limits_{\Gamma'_\varphi}d\mu(\psi)\leqslant\int\limits_{\Gamma'_\varphi}|(\varphi, \psi)|^2\,d\mu(\psi)\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{S(R)}|(\varphi, \psi)|^2\,d\mu(\psi)=(B_n\varphi, \varphi)\leqslant\frac{1}{2n}.$$

Отсюда следует, что $\mu(\Gamma_\varphi)\leqslant\frac{1}{n}$.

Итак, мы построили такую последовательность положительно определенных ядерных операторов $B_1, \ldots, B_n, \ldots$, что неравенство $(B_n\varphi, \varphi)\leqslant\frac{1}{2n}$ влечет за собой неравенство $\mu(\Gamma_\varphi)\leqslant\frac{1}{n}$, где Γ_φ — полоса, задаваемая соотношением $|(\varphi, \psi)|\geqslant 1$. Это означает, что мера μ удовлетворяет условию непрерывности относительно последовательности операторов $B_1, \ldots, B_n, \ldots$ Тем самым необходимость условия теоремы доказана.

Достаточность условия этой теоремы можно доказать, пользуясь леммой 4. Мы опускаем детали этого доказательства.

§ 3. ГАУССОВСКИЕ МЕРЫ В ЛИНЕЙНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

1. Определение гауссовских мер. Мы рассмотрим в этом параграфе гауссовские меры в линейных топологических пространствах. Сначала опишем гауссовские меры в конечномерном случае. Пусть R_n — n-мерное линейное пространство, *условию непрерывности относительно топологии в H, задаваемой некоторой последовательностью $B_1, \ldots, B_n, \ldots$ положительно определенных ядерных операторов.*

Выполнение условия непрерывности меры μ означает следующее. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие значения n и $\delta > 0$, что из неравенства $(B_n\varphi, \varphi) \leqslant \delta$ вытекает неравенство $\mu(\Gamma_\varphi) \leqslant \varepsilon$, где через Γ_φ обозначена полоса, задаваемая неравенством $|(\varphi, \psi)| \geqslant 1$.

Доказательство. Докажем сначала, что условие теоремы необходимо. Пусть мера μ счетно-аддитивна. Построим тогда для любого n положительно определенный ядерный оператор B_n, такой, что из неравенства $(B_n\varphi, \varphi) \leqslant \frac{1}{2n}$ вытекает неравенство $\mu(\Gamma_\varphi) < \frac{1}{n}$. Этот оператор строится следующим образом. Так как мера μ счетно-аддитивна, то ее можно распространить на все шары в H. Но пространство H является объединением шаров, и потому найдется такой шар $S(R): \|x\| \leqslant R$, что мера дополнения к нему меньше, чем $\frac{1}{2n}$. Определим оператор B_n, положив

$$(B_n\varphi, \varphi) = \int\limits_{S(R)} |(\varphi, \psi)|^2 \, d\mu(\psi).$$

Очевидно, что оператор B_n положительно определен. Чтобы доказать его ядерность, заметим, что для любого ортогонального нормированного базиса $\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} (B_n\varphi_k, \varphi_k) = \int\limits_{S(R)} \sum_{k=1}^{\infty} |(\varphi_n, \psi)|^2 \, d\mu(\psi) =$$
$$= \int\limits_{S(R)} \|\psi\|^2 \, d\mu(\psi) \leqslant R^2 \int\limits_{S(R)} d\mu(\psi) \leqslant R^2.$$

Иными словами, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (B_n\varphi_k, \varphi_k)$ сходится для любого ортогонального нормированного базиса $\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots$ Как было показано в п. 3 § 2 главы I, отсюда вытекает, что B_n — ядерный оператор.

Рассмотрим теперь любой элемент φ, такой, что $(B_n\varphi, \varphi) \leqslant \frac{1}{2n}$, и оценим меру полосы Γ_φ, задаваемой неравенством $|(\varphi, \psi)| \geqslant 1$. Очевидно, что

$$\mu(\Gamma_\varphi) = \mu(\Gamma'_\varphi) + \mu(\Gamma''_\varphi),$$

где Γ'_φ — часть полосы Γ_φ, содержащаяся в шаре $S(R)$, а Γ''_φ — часть этой полосы, лежащая вне этого шара. В силу выбора шара $S(R)$ мы имеем, что $\mu(\Gamma''_\varphi) \leqslant \frac{1}{2n}$. С другой стороны, из неравенства $|(\varphi, \psi)| \geqslant 1$, имеющего место в полосе Γ_φ, а тем самым и в Γ'_φ, вытекает, что

$$\mu(\Gamma'_\varphi) = \int\limits_{\Gamma'_\varphi} d\mu(\psi) \leqslant \int\limits_{\Gamma'_\varphi} |(\varphi, \psi)|^2 \, d\mu(\psi) \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{S(R)} |(\varphi, \psi)|^2 \, d\mu(\psi) = (B_n\varphi, \varphi) \leqslant \frac{1}{2n}.$$

Отсюда следует, что $\mu(\Gamma_\varphi) \leqslant \frac{1}{n}$.

Итак, мы построили такую последовательность положительно определенных ядерных операторов $B_1, \ldots, B_n, \ldots$, что неравенство $(B_n\varphi, \varphi) \leqslant \frac{1}{2n}$ влечет за собой неравенство $\mu(\Gamma_\varphi) \leqslant \frac{1}{n}$, где Γ_φ — полоса, задаваемая соотношением $|(\varphi, \psi)| \geqslant 1$. Это означает, что мера μ удовлетворяет условию непрерывности относительно последовательности операторов $B_1, \ldots, B_n, \ldots$ Тем самым необходимость условия теоремы доказана.

Достаточность условия этой теоремы можно доказать, пользуясь леммой 4. Мы опускаем детали этого доказательства.

§ 3. ГАУССОВСКИЕ МЕРЫ В ЛИНЕЙНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

1. Определение гауссовских мер. Мы рассмотрим в этом параграфе гауссовские меры в линейных топологических пространствах. Сначала опишем гауссовские меры в конечномерном случае. Пусть R_n — n-мерное линейное пространство, в котором задано скалярное произведение (x, y). Это скалярное произведение определяет метрику в пространстве R_n и, в частности, задает лебегову меру множеств в R_n. Введем гауссовскую меру в R_n, соответствующую скалярному произведению (x, y), положив

$$\mu(X) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_X e^{-\frac{1}{2}(x, x)} dx. \tag{1}$$

Таким образом, *каждая гауссовская мера в n-мерном пространстве определяется при помощи скалярного произведения.*

Если A — линейное преобразование в R_n, а (x, y) — скалярное произведение в R_n, то $(x, y)_1 = (Ax, Ay)$ также является скалярным произведением. Этому произведению соответствует гауссовская мера

$$\mu_1(X) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_X e^{-\frac{1}{2}(Ax, Ax)} d_1x,$$

где через d_1x обозначена лебегова мера, соответствующая скалярному произведению $(x, y)_1$. Легко видеть, что $d_1x = |\det A|\, dx$. Поэтому мера μ_1 может быть записана в виде

$$\mu_1(x) = \frac{|\det A|}{(2\pi)^{n/2}} \int_X e^{-\frac{1}{2}(Ax, Ax)} dx.$$

Отметим следующую лемму о гауссовских мерах в конечномерных пространствах, которой мы воспользуемся в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть R_n — n-мерное евклидово пространство со скалярным произведением (x, y), а R_m — m-мерное подпространство в R_n. Обозначим через μ_n гауссовскую меру в R_n, соответствующую скалярному произведению (x, y), а через μ_m — гауссовскую меру в R_m, соответствующую тому же скалярному произведению. Тогда для любого подмножества X из R_m имеет место условие согласованности мер μ_m и μ_n*

$$\mu_m(x) = \mu_n[Q^{-1}(x)], \tag{2}$$

где через Q обозначена ортогональная проекция пространства R_n на подпространство R_m.

Доказательство. Обозначим через R_{n-m} полный прообраз нуля при отображении Q. Очевидно, что пространство R_n является ортогональной суммой подпространств R_m и R_{n-m} и потому любой элемент x из R_n может быть представлен единственным образом в виде суммы $x = x' + x''$, где $x' \in R_m$ и $x'' \in R_{n-m}$. При этом, очевидно, имеет место равенство

$$(x, y) = (x', y') + (x'', y''),$$

а лебегова мера dx в R_n является произведением лебеговых мер dx' в R_m и dx'' в R_{n-m}, задаваемых скалярным произведением (x, y). Так как множество $Q^{-1}(X)$ является ортогональной суммой множеств X и R_{n-m}, то имеет место равенство

$$\mu_n[Q^{-1}(X)] = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{Q^{-1}(X)} e^{-\frac{1}{2}(x, x)} dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_X e^{-\frac{1}{2}(x', x')} dx' \int_{R_{n-m}} e^{-\frac{1}{2}(x'', x'')} dx''.$$

Так как

$$\mu_m(X) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_X e^{-\frac{1}{2}(x', x')} dx',$$

то для доказательства равенства (2) достаточно убедиться, что

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-m}{2}}} \int_{R_{n-m}} e^{-\frac{1}{2}(x'', x'')} dx'' = 1. \tag{3}$$

Но интеграл (3) в координатной форме имеет вид

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-m}{2}}} \int e^{-\frac{1}{2}\left[(x_1'')^2 + \ldots + (x_{n-m}'')^2\right]} dx_1'' \ldots dx_{n-m}''. \tag{3'}$$

Поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi},$$

то интеграл (3′) равен 1. Тем самым доказано равенство (2).

Наряду с описанными выше гауссовскими мерами μ рассматривают так называемые несобственные гауссовские меры. Они определяются формулой вида

$$\mu(X) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int\limits_{X \cap R_m} e^{-\frac{1}{2}(x, x)}\, dx, \tag{4}$$

где R_m — m-мерное линейное подпространство в R_n, (x, y) — скалярное произведение в R_m, а dx — лебегова мера в R_m, определяемая этим скалярным произведением.

Перейдем теперь к построению гауссовских мер в бесконечномерном случае. Эти меры мы будем строить в пространстве Φ', сопряженном локально выпуклому линейному топологическому пространству Φ. Как мы отмечали в § 1, п. 1, локальная выпуклость пространства Φ обеспечивает возможность распространения непрерывных линейных функционалов с любого подпространства Ψ в Φ на все пространство Φ с сохранением непрерывности и линейности. При этом пространство Ψ', сопряженное с любым конечномерным подпространством Ψ в Φ, изоморфно фактор-пространству Φ'/Ψ^0, где через Ψ^0 обозначен аннулятор подпространства Ψ в пространстве Φ' (т. е. совокупность всех линейных функционалов F, таких, что $(F, \psi) = 0$ при $\psi \in \Psi$).

Гауссовские меры в бесконечномерных пространствах задаются при помощи скалярных произведений $B(\varphi, \psi)$, заданных в пространстве Φ, которому сопряжено Φ'.

Итак, пусть в вещественном локально выпуклом линейном пространстве Φ задано невырожденное скалярное произведение $B(\varphi, \psi)$, непрерывное относительно топологии пространства Φ. Мы определим сначала при помощи $B(\varphi, \psi)$ гауссовские меры в каждом из конечномерных подпространств Ψ пространства Φ, а потом перенесем их в фактор-пространства Φ'/Ψ^0.

В n-мерном подпространстве Ψ из Φ мы определяем меру τ_Ψ равенством

$$\tau_\Psi(Y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_Y e^{-\frac{1}{2} B(\psi, \psi)}\, d\psi, \tag{5}$$

где $d\psi$ — лебегова мера в Ψ, соответствующая скалярному произведению $B(\varphi, \psi)$. В силу леммы 1 эти меры согласованы

друг с другом в следующем смысле: если $\Psi_1 \subset \Psi_2$, то для любого Y из Ψ_1 имеет место равенство

$$\tau_1(Y) = \tau_2\left[Q_1^{-1}(Y)\right], \tag{6}$$

где через Q_1 обозначена ортогональная проекция Ψ_2 на Ψ_1 [относительно скалярного произведения $B(\varphi, \psi)$], а через τ_1 и τ_2 — меры τ_{Ψ_1} и τ_{Ψ_2}.

Заметим, что конечномерные евклидовы пространства Ψ (со скалярным произведением $B(\varphi, \psi)$) изоморфны сопряженным им пространствам Ψ' *). Но, как было указано выше, пространства Ψ' изоморфны фактор-пространствам Φ'/Ψ^0. Тем самым устанавливается естественное изоморфное отображение A_Ψ пространства Ψ на фактор-пространство Φ'/Ψ^0. В силу изоморфизма A_Ψ мере τ_Ψ в Ψ соответствует мера ν_Ψ в Φ'/Ψ^0, определяемая равенством

$$\nu_\Psi(X) = \tau_\Psi\left[A_\Psi^{-1}(X)\right], \quad X \subset \Phi'/\Psi^0. \tag{7}$$

Покажем, что меры ν_Ψ определяют меру цилиндрических множеств в Φ', т. е. согласованы друг с другом. Для этого согласно п. 3 § 1 достаточно показать, что при $\Psi_1 \subset \Psi_2$ для любого множества X из Φ'/Ψ^0 имеет место равенство **)

$$\nu_1(X) = \nu_2\left[Q^{-1}(X)\right], \tag{8}$$

где через Q обозначено естественное отображение пространства Φ'/Ψ_2^0 в Φ'/Ψ_1^0.

Принимая во внимание равенство (7), мы можем записать подлежащее доказательству равенство (8) в следующем виде:

$$\tau_1\left[A_1^{-1}(X)\right] = \tau_2\left[A_2^{-1}Q^{-1}(X)\right].$$

Если положить $A_1^{-1}(X) = Y$, то это равенство примет вид

$$\tau_1(Y) = \tau_2\left[A_2^{-1}Q^{-1}A_1(Y)\right]. \tag{9}$$

*) Каждому элементу ψ из Ψ сопоставляется линейный функционал F_ψ, задаваемый равенством $F_\psi(\varphi) = B(\varphi, \psi)$. Из невырожденности $B(\varphi, \psi)$ вытекает, что образом Ψ является при этом все пространство Ψ'.

**) Мы обозначаем здесь через ν_1 меру ν_{Ψ_1}, через ν_2 — меру ν_{Ψ_2}, а далее через τ_1 — меру τ_{Ψ_1} и через τ_2 — меру τ_{Ψ_2}.

В силу соотношения (6) нам осталось показать, что отображение $Q_1 = A_1^{-1} Q A_2$ является ортогональной проекцией подпространства Ψ_2 на Ψ_1. Но это непосредственно вытекает из того, что оператор $A_1^{-1} Q A_2$ действует на элементы ψ из Ψ_1 согласно схеме

$$\psi \xrightarrow[A_2]{} A\psi + \Psi_2^0 \xrightarrow[Q]{} A\psi + \Psi_1^0 \xrightarrow[A_1^{-1}]{} \psi,$$

а на элементы φ из ортогонального дополнения к Ψ_1 согласно схеме *)

$$\varphi \xrightarrow[A_2]{} A\varphi + \Psi_2^{(0)} \xrightarrow[Q]{} \Psi_1^0 \xrightarrow[A_1^{-1}]{} 0.$$

Тем самым согласованность мер ν_Ψ доказана.

Обозначим через μ меру цилиндрических множеств в Φ', задаваемую мерами ν_Ψ.

Из того, что скалярное произведение $B(\varphi, \psi)$ непрерывно в топологии пространства Φ, легко вытекает, что мера μ удовлетворяет условию непрерывности. Мы опускаем простое доказательство этого утверждения, связанное с переходом к координатной записи меры.

Можно снять условие невырожденности, которое было наложено на скалярное произведение $B(\varphi, \psi)$. Предположим, что в пространстве Φ есть отличные от нуля элементы φ, такие, что $B(\varphi, \varphi) = 0$. В этом случае оператор A вырожден и прообраз нуля $A^{-1}(0) = X$ при отображении A отличен от нуля. Обозначим через X^0 подпространство в Φ', состоящее из линейных функционалов F, обращающихся в нуль на подпространстве X. Это подпространство X^0 сопряжено с фактор-пространством Φ/X, на котором $B(\varphi, \psi)$ индуцирует невырождающееся скалярное произведение $B_1(\varphi, \psi)$. Мы можем поэтому построить гауссовскую меру μ_1 в подпространстве X^0, задаваемую $B_1(\varphi, \psi)$. Мы будем называть *гауссовской мерой в* Φ' меру μ, определяемую для любого цилиндрического множества Y из Φ' формулой

$$\mu(Y) = \mu_1(Y \cap X^0).$$

Такие гауссовские меры, сосредоточенные на подпространствах пространства Φ', называются *вырожденными* или *несобственными*.

---

*) Так как $B(\varphi, \psi) = 0$ при $\psi \in \Psi_1$, то $A\varphi \in \Psi_1^0$, и потому $A\varphi + \Psi_2^0 \subset \Psi_1^0$.

Остановимся теперь на частном случае, когда пространство Φ является гильбертовым, а гауссовская мера μ задается скалярным произведением (φ, ψ) в пространстве Φ. В этом случае можно отождествить пространства Φ и Φ' и считать, что мера μ задана в самом пространстве Φ. Цилиндрические множества Z в пространстве Φ являются ортогональными суммами подпространств A^0 из Φ, имеющих конечномерные ортогональные дополнения A и множеств X, лежащих в этих дополнениях. Мера такого цилиндрического множества определяется равенством

$$\mu(Z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_X e^{-\frac{1}{2}(\varphi, \varphi)} \, d\varphi,$$

где (φ, φ) — скалярное произведение в конечномерном подпространстве A, индуцированное скалярным произведением в пространстве Φ, $d\varphi$ — соответствующая лебегова мера в A.

2. Условие счетной аддитивности гауссовских мер в пространствах, сопряженных счетно-гильбертовым. В теореме 4 из § 2 было показано, что если мера μ_1 в гильбертовом пространстве H_1 удовлетворяет условию непрерывности и если T — отображение типа Гильберта — Шмидта пространства H_1 в гильбертово пространство H_2, то мера μ_2, индуцированная при этом отображении мерой μ_1 в H_2, счетно-аддитивна. При помощи этой теоремы легко указать достаточное условие для того, чтобы гауссовская мера μ в пространстве Φ', сопряженном со счетно-гильбертовым пространством Φ, определяемая скалярным произведением $B(\varphi, \psi)$ в Φ, была счетно-аддитивной.

Рассмотрим скалярное произведение $B(\varphi, \psi)$ в счетно-гильбертовом пространстве Φ. Пополняя пространство Φ относительно этого скалярного произведения, мы получим гильбертово пространство Φ_B. Из непрерывности скалярного произведения $B(\varphi, \psi)$ относительно топологии пространства Φ вытекает, что естественное вложение пространства Φ в Φ_B непрерывно. Поэтому найдется такое m, что при $n \geqslant m$ вложение T_n гильбертовых пространств Φ_n в Φ_B непрерывны (Φ_n — пополнение Φ относительно скалярного произведения $(\varphi, \psi)_n$). Достаточное условие счетной аддитивности гауссовской меры μ в Φ' дается следующей теоремой.

Теорема 1. *Для того чтобы мера μ, заданная в пространстве Φ', сопряженном к счетно-гильбертову пространству Φ, при помощи скалярного произведения $B(\varphi, \psi)$ была счетно-аддитивной, достаточно, чтобы нашлось такое значение n, что отображение T_n пространства Φ_n в Φ_B является отображением типа Гильберта — Шмидта.*

Доказательство. Скалярное произведение $B(\varphi, \psi)$ в гильбертовом пространстве Φ_B задает гауссовскую меру μ_1 в сопряженном к нему пространстве Φ'_B. Эта мера удовлетворяет условию непрерывности. Отображению T_n пространства Φ_n в Φ_B сопряжено отображение T'_n пространства Φ'_B в Φ'_n, которое также является отображением типа Гильберта — Шмидта. Применим теперь к гильбертовым пространствам Φ'_B и Φ'_n и мере μ_1 в пространстве Φ'_B теорему 4 из § 2. Мы получим, что мера μ_1 индуцирует счетно-аддитивную меру μ_n в пространстве Φ'_n. Мера же μ_n индуцирует счетно-аддитивную меру в пространстве Φ'. Очевидно, что эта последняя мера совпадает с мерой, задаваемой в Φ' скалярным произведением $B(\varphi, \psi)$. Поэтому мера μ счетно-аддитивна. Теорема 1 доказана.

Мы доказали теорему 1, опираясь на теорему 4 из § 2. Центральным и наиболее сложным пунктом в доказательстве теоремы 4 из § 2 явился вывод неравенства

$$1-\mu(R) \leqslant C\left(\varepsilon+\frac{H^2}{R^2}\right)$$

(см. § 2, лемма 4). Для гауссовских мер можно обойтись без этого неравенства, воспользовавшись более просто доказываемым неравенством вида

$$\mu(\Omega) \equiv \frac{\sqrt{\det C}}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\Omega} e^{-\frac{1}{2} C(x,\, x)}\, dx \leqslant \frac{\operatorname{Tr}(C^{-1})}{r^2}. \qquad (10)$$

Здесь через $C(x, x)$ обозначена строго положительно определенная квадратичная форма в пространстве R_n, через $\operatorname{Tr}(C^{-1})$ — след матрицы C^{-1}, а через Ω — дополнение к шару радиуса r в R_n.

Чтобы доказать неравенство (10), заметим, что

$$\mu(\Omega) = \frac{\sqrt{\det C}}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{R_n} \chi(x)\, e^{-\frac{1}{2}(Cx,\, x)}\, dx,$$

где через $\chi(x)$ обозначена характеристическая функция области Ω. Поскольку функция $\chi(x)$ равна единице в тех точках, где $(x, x) \geqslant r^2$, и равна нулю в тех точках, где $(x, x) < r^2$, то неравенство

$$\chi(x) \leqslant \frac{(x,\, x)}{r^2}$$

имеет место во всех точках пространства R_n. Отсюда следует, что

$$\mu(\Omega) \leqslant \frac{\sqrt{\det C}}{(2\pi)^{n/2}\, r^2} \int\limits_{R_n} (x,\, x)\, e^{-\frac{1}{2}(Cx,\, x)}\, dx.$$

Применим к правой части этого неравенства формулу (4) (гл. III, § 2, п. 2). Мы получим, что

$$\mu(\Omega) \leqslant \frac{\operatorname{Tr}(C^{-1})}{r^2}.$$

Тем самым неравенство (10) доказано.

Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 2. *Если μ — гауссовская мера в гильбертовом пространстве H, заданная скалярным произведением (φ, ψ) в этом пространстве, а T — отображение типа Гильберта — Шмидта пространства H в гильбертово пространство H_1, то мера μ_1 в пространстве H_1, индуцированная при этом отображении мерой μ, счетно-аддитивна.*

По теореме 2 из § 2 для доказательства счетной аддитивности меры μ_1 достаточно при любом $\varepsilon > 0$ найти такой шар $S_1(r)$ радиуса r в H_1, что мера любого цилиндрического множества Z, лежащего вне этого шара, меньше ε. Этот шар строится следующим образом. Обозначим через T' отображение пространства H_1 в H, сопряженное с отображением T, и рассмотрим оператор $Q = T'T$. Так как T является отображением типа Гильберта — Шмидта, то по теореме 4 (гл. I, § 2, п. 3) Q является ядерным оператором. Обозначим теперь через r такое число, что $\operatorname{Tr} Q/r^2 < \varepsilon$, где $\operatorname{Tr} Q$ — след оператора Q. Шар $S_1(r)$ и будет искомым.

Для доказательства этого утверждения достаточно записать явное выражение меры μ_1 и применить неравенство (10). Мы опускаем детали этого рассуждения.

Теорема 1 непосредственно вытекает из леммы 2. В самом деле, скалярное произведение $B(\varphi, \psi)$ задает гауссову меру μ_B в пространстве Φ'_B, сопряженном с Φ_B. Но отображение T_n пространства Φ_n в Φ_B является, по условию, отображением типа Гильберта — Шмидта. Поэтому и сопряженное с ним отображение T'_n пространства Φ'_B в Φ'_n является отображением того же типа. Но тогда мера μ_n, индуцированная в Φ'_n мерой μ_B, является по лемме 2 счетно-аддитивной. Счетно-аддитивной будет и мера μ, индуцированная мерой μ_n в Φ'. Но эта мера является не чем иным, как мерой, заданной в Φ' скалярным произведением $B(\varphi, \psi)$. Тем самым теорема 1 доказана.

В силу теоремы 3 из § 2 *любая гауссовская мера* μ *в пространстве* Φ', *сопряженном с ядерным пространством* Φ, *счетно-аддитивна* (заметим, что и это утверждение можно для гауссовских мер доказать проще, чем в общем случае, воспользовавшись неравенством (10)).

Покажем теперь, что *требование ядерности пространства* Φ *является не только достаточным, но и необходимым условием того, чтобы всякая гауссова мера в пространстве* Φ', *сопряженном со счетно-гильбертовым пространством* Φ, *была счетно-аддитивна*. Для этого нам понадобится следующая оценка для гауссовской меры в евклидовом пространстве R_n.

Лемма 3. *Пусть* μ — *гауссовская мера в n-мерном евклидовом пространстве* R_n, *задаваемая скалярным произведением* (x, y) *в этом пространстве. Обозначим через* Ω *область, задаваемую неравенством*

$$\operatorname{Tr} C - 2\sqrt{\operatorname{Tr} C} \leqslant C(x, x) \leqslant \operatorname{Tr} C + 2\sqrt{\operatorname{Tr} C},$$

где $C(x, x)$ — *положительно определенная квадратичная форма в* R_n, *а* $\operatorname{Tr} C$ — *след матрицы, составленной из коэффициентов этой формы. Тогда имеет место неравенство*

$$\mu(\Omega) \geqslant 1 - \frac{\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2}{2 \operatorname{Tr} C}, \tag{11}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — *собственные значения матрицы* C *).

Доказательство. Обозначим через $\chi(x)$ характеристическую функцию области Ω. Очевидно, что во всех точках x пространства R_n выполняется неравенство

$$\chi(x) \geqslant 1 - \frac{[C(x, x) - \operatorname{Tr} C]^2}{4 \operatorname{Tr} C}.$$

Поэтому

$$\mu(\Omega) = \int_{R_n} \chi(x)\, d\mu(x) \geqslant \int_{R_n} \left\{ 1 - \frac{[C(x, x) - \operatorname{Tr} C]^2}{4 \operatorname{Tr} C} \right\} d\mu(x) =$$

$$= 1 - \int_{R_n} \frac{(C(x, x))^2 - 2 \operatorname{Tr} C\, C(x, x) + (\operatorname{Tr} C)^2}{4 \operatorname{Tr} C}\, d\mu(x). \tag{12}$$

*) Читатель без труда установит связь этой леммы с известным неравенством Чебышева в теории вероятностей.

Из формулы (4) п. 2 § 2 главы III следует, что

$$\int_{R_n} C(x, x)\, d\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R_n} C(x, x)\, e^{-\frac{1}{2}(x, x)}\, dx = \operatorname{Tr} C,$$

поэтому

$$\mu(\Omega) \geqslant 1 - \frac{1}{4 \operatorname{Tr} C} \int_{R_n} [(C(x, x))^2 - (\operatorname{Tr} C)^2]\, d\mu(x).$$

Чтобы оценить интеграл $\int_{R_n} (C(x, x))^2\, d\mu(x)$, выберем в R_n декартову систему координат, в которой форма $C(x, x)$ приводится к сумме квадратов

$$C(x, x) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2.$$

Тогда этот интеграл примет вид

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int (\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2)^2 e^{-\frac{1}{2}\left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)} dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{j, k=1}^{n} \lambda_j \lambda_k \int x_j^2 x_k^2 e^{-\frac{1}{2}\left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)} dx.$$

Но при $j \neq k$

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int x_j^2 x_k^2 e^{-\frac{1}{2}\left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)} dx = 1,$$

а

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int x_j^4 e^{-\frac{1}{2}\left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)} dx = 3,$$

и потому интеграл $\int (C(x, x))^2\, d\mu(x)$ равен

$$3 \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 + \sum_{\substack{j, k=1 \\ j \neq k}}^{n} \lambda_j \lambda_k.$$

Следовательно, в силу неравенства (11)

$$\mu(\Omega) \geqslant 1 - \frac{1}{4 \operatorname{Tr} C}\left[3\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2 + \sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\lambda_j\lambda_k - \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2 - \sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\lambda_j\lambda_k\right] = 1 - \frac{\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2}{2 \operatorname{Tr} C}.$$

Лемма 3 доказана.

Рассмотрим гауссовскую меру μ в (вещественном) гильбертовом пространстве H, заданную скалярным произведением (φ, ψ) в этом пространстве. Пусть T — оператор, отображающий H в другое гильбертово пространство H_1. Обозначим через μ_1 меру в H_1, индуцированную мерой μ при отображении T. Докажем следующую лемму.

Лемма 4. *Если T не является оператором типа Гильберта — Шмидта, то для любого $r > 0$ найдется цилиндрическое множество Z в H_1, лежащее вне шара $S_1(r)$ радиуса r, мера которого больше, чем $1/2$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда положительно определенный оператор $Q = T'T$ в пространстве H имеет дискретный спектр. Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ собственные значения этого оператора, а через $h_1, \ldots, h_n, \ldots$ — соответствующие собственные векторы. Очевидно, что прообразом шара $S_1(r)$ является множество Ω в H, задаваемое неравенством $(T\varphi, T\varphi) \leqslant r^2$ или, что то же самое, неравенством $(Q\varphi, \varphi) \leqslant r^2$. В координатной форме множество Ω задается неравенством

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(\varphi, h_k)^2 \leqslant r^2. \tag{13}$$

Заметим, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k$ расходится, так как по условию оператор T не является оператором типа Гильберта — Шмидта, а значит, Q не является ядерным оператором. Следовательно, найдется отрезок $\sum_{k=m+1}^{n}\lambda_k$ ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k$, такой, что

1) $$\sum_{k=m+1}^{n}\lambda_k - 2\sqrt{\sum_{k=m+1}^{n}\lambda_k} \geqslant r^2, \tag{14}$$

2) все λ_k, $m < k \leqslant n$, меньше, чем 1.

Укажем теперь в пространстве H цилиндрическое множество Z, лежащее вне области Ω и имеющее меру, большую $1/2$. Это множество в координатной форме задается неравенством

$$\sum_{k=m+1}^{n}\lambda_k(\varphi, h_k)^2 \geqslant r^2. \tag{15}$$

Сравнивая это неравенство с неравенством (13), мы убеждаемся, что Z действительно лежит вне области Ω. Оценим теперь меру множества Z.

В силу неравенства (14) множество Z содержит множество Z_1, задаваемое неравенствами

$$\Lambda - 2\sqrt{\Lambda} \leqslant \sum_{k=m+1}^{n}\lambda_k(\varphi, h_k)^2 \leqslant \Lambda + 2\sqrt{\Lambda},$$

где положено $\Lambda = \sum_{k=m+1}^{n}\lambda_k$. Поэтому $\mu(Z) \geqslant \mu(Z_1)$. Но для множества Z_1 согласно лемме 3 справедлива оценка

$$\mu(Z_1) \geqslant 1 - \frac{\lambda_{m+1}^2 + \ldots + \lambda_n^2}{2(\lambda_{m+1} + \ldots + \lambda_n)}.$$

Так как по условию 2) все $\lambda_k < 1$, $m < k \leqslant n$, то мы получаем, что

$$\mu(Z) \geqslant \mu(Z_1) > \frac{1}{2}.$$

Итак, мы доказали, что $\mu(Z) > 1/2$. Отображая множество Z в H_1, мы получим цилиндрическое множество в H_1, лежащее вне шара $S_1(r)$ радиуса r и имеющее меру, большую $1/2$. Тем самым лемма 4 доказана для случая, когда оператор $T'T$ имеет дискретный спектр.

В случае, когда спектр оператора $T'T$ не является дискретным, доказательство проводится аналогичным образом с заменой векторов $h_1, \ldots, h_k, \ldots$ ортогональными нормированными векторами $\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots$, такими, что $(T'T\varphi_k, \varphi_k) \geqslant C > 0$ (существование этих векторов сразу следует из того, что спектр оператора $T'T$ не является дискретным). Мы опускаем детали рассуждения.

Теперь можно доказать, что *если счетно-гильбертово пространство Φ не является ядерным, то существует* *гауссовская мера μ в сопряженном к нему пространстве Φ', не обладающая свойством счетной аддитивности.*

В самом деле, поскольку Φ не ядерно, то найдется такое m, что при всех $n \geqslant m$ отображения T_m^n пространства Φ_n в Φ_m не принадлежат к типу Гильберта — Шмидта. Тогда и сопряженные к ним отображения $(T_m^n)'$ не принадлежат к типу Гильберта — Шмидта.

Рассмотрим теперь в пространстве Φ_m' гауссовскую меру μ_m, задаваемую скалярным произведением $(F, G)_{-m}$. Эта мера индуцирует меры μ_n в каждом из пространств Φ_n' и меру μ в пространстве Φ'. Покажем, что мера μ не является счетно-аддитивной. В самом деле, поскольку $(T_m^n)'$ для любого $n \geqslant m$ не является отображением типа Гильберта — Шмидта, то по лемме 4 для любых n и r найдется цилиндрическое множество Z в Φ_n', лежащее вне шара $(F, F)_{-n} \leqslant r^2$, мера которого больше $1/2$. Но тогда по теореме 2 из § 2 мера μ не является счетно-аддитивной.

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. *Для того чтобы любая гауссовская мера в пространстве Φ', сопряженном со счетно-гильбертовым пространством Φ, была счетно-аддитивной, необходимо и достаточно, чтобы пространство Φ было ядерным.*

Очевидно, что условие ядерности пространства Φ тем более необходимо для счетной аддитивной любой (не только гауссовской) меры в Φ'.

§ 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ МЕР В ЛИНЕЙНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

1. Определение преобразования Фурье меры. Преобразование Фурье неотрицательной меры μ в n-мерном евклидовом пространстве R_n определяется как функция $f(x)$, задаваемая формулой

$$f(x) = \int e^{i(x, y)}\, d\mu(y). \tag{1}$$

Перенесем это определение с R_n на линейные топологические пространства.

Пусть Φ — линейное топологическое пространство и μ — мера цилиндрических множеств, заданная в пространстве Φ',

сопряженном с пространством Φ. Назовем *преобразованием Фурье меры* μ (нелинейный) функционал $L(\varphi)$ в пространстве Φ, определяемый равенством

$$L(\varphi) = \int e^{i(F, \varphi)}\, d\mu(F). \tag{2}$$

Заметим, что для вычисления функционала $L(\varphi)$ нам достаточно знать меры полупространств в пространстве Φ'. В самом деле, если φ — элемент пространства Φ, то неравенства $(F, \varphi) \leqslant x$ определяют полупространства в Φ'. Обозначим меру полупространства $(F, \varphi) \leqslant x$ через $\mu_\varphi(x)$. Тогда функционал $L(\varphi)$ может быть записан в виде

$$L(\varphi) = \int e^{ix}\, d\mu_\varphi(x). \tag{3}$$

Отметим, что при положительном λ полупространство $(F, \lambda\varphi) \leqslant x$ совпадает с полупространством $(F, \varphi) \leqslant \frac{x}{\lambda}$. Поэтому при всех положительных значениях λ мы имеем

$$L(\lambda\varphi) = \int e^{ix}\, d\mu_{\lambda\varphi}(x) = \int e^{ix}\, d\mu_\varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \int e^{i\lambda x}\, d\mu_\varphi(x). \tag{4}$$

Если же $\lambda < 0$, то полупространство $(F, \lambda\varphi) \leqslant x$ совпадает с полупространством $(F, \lambda\varphi) \geqslant \frac{x}{\lambda}$, и потому в точках непрерывности меры $\mu_{\lambda\varphi}(x)$ выполняется равенство

$$\mu_{\lambda\varphi}(x) = 1 - \mu_\varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

Поэтому и при $\lambda < 0$ мы имеем

$$L(\lambda\varphi) = \int e^{ix}\, d\mu_{\lambda\varphi}(x) = -\int e^{ix}\, d\mu_\varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \int e^{i\lambda x}\, d\mu_\varphi(x).$$

Легко показать, что если Ψ — конечномерное подпространство в Φ и μ_Ψ — мера в фактор-пространстве Φ'/Ψ^0, соответствующая мере μ, то для любого элемента φ из Ψ выполняется равенство

$$L(\varphi) = \int\limits_{\Phi'/\Psi^0} e^{i(F, \varphi)}\, d\mu_\Psi(F). \tag{5}$$

В самом деле, если $\varphi \in \Psi$, то полупространство $(F, \varphi) \leqslant x$ состоит из смежных классов по подпространству Ψ^0 в Φ'. Поэтому μ-мера полупространства $(F, \varphi) \leqslant x$ в Φ' совпадает с μ_Ψ-мерой полупространства $(F, \varphi) \leqslant x$ в Φ'/Ψ^0. Так как преобразование Фурье меры однозначно определяется мерами полупространств, то равенство (5) доказано.

Вычислим в качестве примера преобразование Фурье гауссовской меры μ, определяемой функционалом $B(\varphi, \psi)$ в Φ.

Поскольку гауссовская мера полупространства $(F, \varphi) \leqslant a$ равна

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi B(\varphi, \psi)}} \int_{-\infty}^{a} e^{\frac{-x^2}{2B(\varphi, \varphi)}} dx,$$

то функционал $L(\varphi)$ задается формулой

$$L(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi B(\varphi, \varphi)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} e^{-\frac{x^2}{2B(\varphi, \varphi)}} dx.$$

Но этот интеграл равен $e^{-\frac{1}{2} B(\varphi, \varphi)}$. Отсюда следует, что преобразование Фурье гауссовской меры имеет вид

$$L(\varphi) = e^{-\frac{1}{2} B(\varphi, \varphi)}. \tag{6}$$

2. Положительно определенные функционалы в линейных топологических пространствах. Пусть $L(\varphi)$ — функционал в линейном топологическом пространстве Φ. Этот функционал называется *положительно определенным*, если для любых элементов $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ пространства Φ и любых комплексных чисел $\xi_1, \ldots, \xi_m$ выполняется неравенство

$$\sum_{j, k=1}^{m} L(\varphi_j - \varphi_k) \xi_j \overline{\xi}_k \geqslant 0. \tag{7}$$

Примером положительно определенного функционала может служить любой функционал $L(\varphi)$, являющийся преобразованием Фурье меры цилиндрических множеств в сопряженном к Φ пространстве Φ' (напомним, что мы рассматриваем лишь положительные и нормированные меры). В самом деле, пусть функционал $L(\varphi)$ является преобразованием Фурье меры μ. Обозначим через Ψ конечномерное подпространство, натянутое на элементы $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, а через μ_Ψ — меру в фактор-пространстве Φ'/Ψ^0, соответствующую мере μ. Функционал $L(\varphi)$ задается на подпространстве Ψ формулой

$$L(\varphi) = \int_{\Phi'/\Psi^0} e^{i(F, \varphi)} d\mu_\Psi(F).$$

Но тогда мы имеем соотношение

$$\sum_{j, k=1}^{m} L(\varphi_j - \varphi_k) \xi_j \overline{\xi}_k = \sum_{j, k=1}^{m} \xi_j \overline{\xi}_k \int_{\Phi'/\Psi^0} e^{i(F, \varphi_j - \varphi_k)} d\mu_\Psi(F) =$$
$$= \int_{\Phi'/\Psi^0} \left| \sum_{j=1}^{m} \xi_j e^{i(F, \varphi_j)} \right|^2 d\mu_\Psi(F) \geqslant 0,$$

откуда и видно, что $L(\varphi)$ — положительно определенный функционал.

Отметим, что из выполнения условия непрерывности для меры μ вытекает непрерывность ее преобразования Фурье. В самом деле, пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ — сходящаяся к элементу φ последовательность элементов пространства Φ. Обозначим через μ_n меру на прямой, соответствующую элементу φ_n, а через μ_0 — меру, соответствующую элементу φ. Тогда имеют место равенства

$$L(\varphi_n) = \int e^{ix} d\mu_n(x), \quad n = 0, 1, \ldots$$

Но из условия непрерывности меры μ вытекает, что для любой непрерывной ограниченной функции $f(x)$ выполняется равенство

$$\lim_{n \to \infty} \int f(x) d\mu_n(x) = \int f(x) d\mu_0(x).$$

Применяя это равенство к функции $f(x) = e^{ix}$, мы получаем, что

$$\lim_{n \to \infty} L(\varphi_n) = L(\varphi_0).$$

Тем самым непрерывность функционала $L(\varphi)$ доказана. Отметим, наконец, что $L(0) = 1$, так как элементу $\varphi = 0$ соответствует единичная мера μ, сосредоточенная в точке $x = 0$, а для такой меры мы имеем

$$\int e^{ix} d\mu(x) = 1.$$

Итак, мы видим, что функционал $L(\varphi)$, являющийся преобразованием Фурье меры цилиндрических множеств в пространстве Φ', положительно определен, непрерывен и принимает на элементе $\varphi = 0$ значение 1. Мы покажем сейчас, что эти условия не только необходимы, но и достаточны для того, чтобы функционал $L(\varphi)$ был преобразованием Фурье меры цилиндрических множеств.

Теорема 1. *Для того чтобы функционал $L(\varphi)$ в линейном топологическом пространстве Φ был преобразованием Фурье меры цилиндрических множеств в сопряженном к Φ пространстве Φ', необходимо и достаточно, чтобы он был непрерывен, положительно определен и чтобы выполнялось равенство $L(0) = 1$.*

Доказательство. Необходимость указанных условий доказана выше. Покажем их достаточность. Пусть $L(\varphi)$ — положительно определенный непрерывный функционал, принимающий на элементе $\varphi = 0$ значение 1. Рассмотрим функционал $L(\varphi)$ на конечномерном подпространстве Ψ пространства Φ. Мы получим положительно определенную непрерывную функцию $L_\Psi(\varphi)$ в Ψ. По теореме Бохнера (см. гл. II, § 3, п. 2) эта функция является преобразованием Фурье положительной меры μ_Ψ, заданной на пространстве Ψ', сопряженном с Ψ. Но мы видели в п. 1 § 3, что пространство Ψ' естественным образом отождествляется с фактор-пространством Φ'/Ψ^0, где Ψ^0 состоит из всех функционалов F, для которых $(F, \psi) = 0$ при $\psi \in \Psi$. Отсюда следует, что функционалу $L(\varphi)$ соответствуют меры μ_Ψ в каждом из фактор-пространств Φ'/Ψ^0. Нам осталось показать, что эти меры согласованы друг с другом и что выполнено условие непрерывности.

Чтобы доказать согласованность мер μ_Ψ, рассмотрим два конечномерных подпространства Ψ_1 и Ψ_2, $\Psi_1 \subset \Psi_2$, в пространстве Φ и обозначим соответствующие им меры через μ_1 и μ_2. Нам надо доказать, что мера μ_1 совпадает с мерой ν, индуцированной в фактор-пространстве Φ'/Ψ_1^0 мерой μ_2. Иными словами, надо доказать, что для любого множества A в Φ'/Ψ_1^0 имеет место равенство

$$\mu_1(A) = \nu(A) = \mu_2\left[Q^{-1}(A)\right], \tag{8}$$

где через Q обозначено отображение фактор-пространства Φ'/Ψ_2^0 на фактор-пространство Φ'/Ψ_1^0, при котором смежный класс $F + \Psi_2^0$ переходит в смежный класс $F + \Psi_1^0$. Мы докажем равенство (8), показав, что преобразования Фурье этих мер совпадают.

По построению преобразованием Фурье меры μ_1 является функция $L_1(\varphi)$, заданная на подпространстве Ψ_1 и совпадающая на этом подпространстве с функционалом $L(\varphi)$. Преобразование же Фурье меры ν также определено на Ψ_1 и задается интегралом

$$\int\limits_{\Phi'/\Psi_1^0} e^{i(F,\varphi)}\, d\nu(F). \tag{9}$$

Если $\varphi \in \Psi_1$, то значения (F, φ) совпадают для всех функционалов F, принадлежащих одному и тому же смежному классу $F_0 + \Psi_1^0$. Так как, кроме того, меры ν и μ_2 связаны равенством (8), то мы можем переписать интеграл (9) в виде

$$\int\limits_{\Phi'/\Psi_2^0} e^{i(F,\varphi)}\, d\mu_2(F).$$

Таким образом, для элементов φ из подпространства Ψ_1 интеграл (9) равен преобразованию Фурье меры μ_2. По построению меры μ_2 это преобразование Фурье является функцией $L_2(\varphi)$, заданной на подпространстве Ψ_2 и совпадающей на этом подпространстве с функционалом $L(\varphi)$. Но функции $L_1(\varphi)$ и $L_2(\varphi)$ совпадают на подпространстве Ψ_1, так как на этом подпространстве $L_1(\varphi) = L(\varphi) = L_2(\varphi)$. Таким образом, преобразования Фурье мер μ_1 и ν совпадают. Но тогда и эти меры равны друг другу. Тем самым согласованность мер μ_Ψ доказана.

Итак, мы можем сопоставить функционалу $L(\varphi)$ меру μ цилиндрических множеств в Φ'. Нам осталось показать, что эта мера удовлетворяет условию непрерывности. Для этого воспользуемся следующей теоремой из теории интеграла Фурье.

Если последовательность положительных нормированных мер $\{\mu_n\}$ такова, что для любого значения λ

имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int e^{i\lambda x}\,d\mu_n(x)=\int e^{i\lambda x}\,d\mu_0(x),$$

то меры μ_n *слабо сходятся к мере* μ *).

Чтобы доказать выполнение условия непрерывности для меры μ, рассмотрим любую последовательность $\{\varphi_n\}$ элементов пространства Φ, сходящуюся к элементу φ_0, и обозначим через μ_n меру, соответствующую элементу φ_n, а через μ_0 — меру, соответствующую элементу φ. Тогда при любом вещественном значении λ имеют место равенства

$$L(\lambda\varphi_n)=\int e^{i\lambda x}\,d\mu_n(x),\quad n=0,\ 1,\ \ldots$$

[см. формулу (4)]. Поскольку в силу непрерывности функционала $L(\varphi)$ мы имеем $\lim\limits_{n\to\infty} L(\lambda\varphi_n)=L(\lambda\varphi_0)$, то при любом λ мы имеем

$$\lim_{n\to\infty}\int e^{i\lambda x}\,d\mu_n(x)=\int e^{i\lambda x}\,d\mu_0(x).$$

А отсюда, как говорилось, вытекает слабая сходимость мер μ_n к мере μ_0. Таким образом, мера цилиндрических множеств μ, которую мы построили, удовлетворяет условию непрерывности. Тем самым доказательство теоремы закончено.

Если пространство Φ ядерно, то по теореме 3 из § 2 любая мера цилиндрических множеств счетно-аддитивна. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Любой непрерывный положительно определенный функционал* $L(\varphi)$ *в ядерном пространстве* Φ, *такой, что* $L(0)=1$, *является преобразованием Фурье*

*) Мы говорим, что последовательность положительных мер μ_n слабо сходится к мере μ, если для любой ограниченной непрерывной функции $f(x)$

$$\lim_{n\to\infty}\int f(x)\,d\mu_n(x)=\int f(x)\,d\mu(x).$$

счетно-аддитивной положительной нормированной меры в пространстве Φ'.

Эта теорема является не чем иным, как теоремой Бохнера для ядерных пространств.

§ 5. КВАЗИИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ В ЛИНЕЙНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

1. Инвариантные и квазиинвариантные меры в конечномерных пространствах. Мы рассмотрим в этом параграфе вопросы, связанные с преобразованием мер в линейных топологических пространствах при параллельных переносах. Под термином «мера» мы понимаем здесь положительную счетно-аддитивную регулярную в смысле Каратеодори функцию $\mu(X)$, определенную на борелевских множествах, и такую, что все пространство является счетной суммой множеств конечной меры (последнее свойство называется *σ-конечностью меры* μ).

Начнем с рассмотрения мер в конечномерных линейных пространствах. В конечномерном линейном пространстве R_n существует лебегова мера $\mu_0(X)$, остающаяся *инвариантной* при всех параллельных переносах в пространстве R_n. Иными словами, мера $\mu_0(X)$ такова, что $\mu_0(X)=\mu_0(y+X)$ для всех векторов y из R_n и всех измеримых множеств X. *Свойство инвариантности относительно параллельных переносов является характеристическим для лебеговой меры* — все меры, инвариантные относительно любых параллельных переносов, отличаются друг от друга лишь постоянным множителем.

Рассмотрим теперь меры, эквивалентные лебеговой мере. Мы называем две меры μ и ν *эквивалентными*, если они обладают общим набором множеств нулевой меры (т. е. если из равенства $\mu(X)=0$ вытекает равенство $\nu(X)=0$ и обратно). Описание всех множеств, эквивалентных лебеговой мере, дается следующей теоремой:

Теорема 1. *Любая мера* μ *в* R_n, *эквивалентная лебеговой мере, имеет вид*

$$\mu(X)=\int_X f(x)\,dx,$$

где $f(x)$ — строго положительная функция, суммируемая на всех ограниченных множествах в R_n.

Доказательство. Так как из равенства $\mu_0(X)=0$ вытекает, что $\mu(X)=0$, то по теореме Радона — Никодима *) существует такая конечная измеримая неотрицательная функция $f(x)$, что

$$\mu(X)=\int_X f(x)\,dx$$

для всех измеримых множеств X в R_n. Обозначим через X_0 множество точек, в которых $f(x)=0$. Очевидно, что

$$\mu(X_0)=\int_{X_0} f(x)\,dx=0;$$

так как меры μ и μ_0 эквивалентны, то $\mu_0(X)=0$. Следовательно, функция $f(x)$ почти всюду строго положительна. Так как функцию $f(x)$ можно изменить на множестве меры нуль, не нарушая равенства (1), то можно считать, что она строго положительна при всех значениях x.

Покажем, наконец, что функция $f(x)$ суммируема на каждом ограниченном множестве. Так как меры μ и μ_0 эквивалентны, а лебегова мера любой точки x из R_n равна нулю, то $\mu(x)=0$ для всех x из R_n. Но в силу того, что мера μ регулярна по Каратеодори, из равенства $\mu(x)=0$ вытекает существование у точки x окрестности $V(x)$, имеющей конечную меру. Поскольку любое замкнутое ограниченное множество X в R_n можно покрыть конечным числом окрестностей $V(x)$, то μ-мера множества X конечна. Теорема доказана.

*) Теорема Радона — Никодима формулируется следующим образом.

Пусть μ и ν — такие меры, что $\mu(X)=0$ для всех множеств X нулевой ν-меры. Тогда существует такая конечная измеримая неотрицательная функция $f(x)$, что для любого ν-измеримого множества X выполняется равенство

$$\mu(X)=\int_X f(x)\,d\nu(x).$$

Функция $f(x)$ определена с точностью до значений на множестве нулевой ν-меры.

Заметим, что лебегова мера $\mu_0(X)$ выражается через меру μ формулой

$$\mu_0(X)=\int_X \frac{d\mu(x)}{f(x)}.$$

Вообще, если μ и ν — меры, эквивалентные лебеговой мере, то они эквивалентны друг другу, и, как показывают рассуждения, аналогичные проведенным выше, мы имеем

$$\nu(X)=\int_X f_{\mu\nu}(x)\,d\mu(x),$$

где $f_{\mu\nu}(x)$ — суммируемая (по мере μ) в каждой ограниченной области функция, строго положительная для всех значений x.

Меры μ, эквивалентные лебеговой мере, обладают следующим ослабленным свойством инвариантности относительно параллельных переносов.

Если множество X имеет нулевую μ-меру, то все сдвиги множества X имеют нулевую μ-меру. В самом деле, пусть $\mu(X)=0$. По теореме 1 это означает, что $\int_X f(x)\,dx=0$, где $f(x)$ — строго положительная функция. Обозначим через X_n подмножество X, на котором выполняется неравенство $\frac{1}{n}\leqslant f(x)$. Очевидно, что

$$\mu(X_n)=\int_{X_n} f(x)\,dx=0,$$

и поскольку $f(x)\geqslant\frac{1}{n}$ при $x\in X_n$, то $\mu_0(X_n)=0$. В силу инвариантности лебеговой меры для любого $y\in R_n$ имеет место равенство $\mu_0(y+X_n)=0$, из которого вытекает, что

$$\mu(y+X_n)=\int_{y+X_n} f(x)\,dx=0.$$

Поскольку функция $f(x)$ строго положительна, то $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n$, и потому

$$\mu(y+X)=\lim_{n\to\infty}\mu(y+X_n)=0.$$

Тем самым доказано, что все сдвиги множества X нулевой μ-меры имеют нулевую μ-меру.

Мы будем называть меры μ, обладающие тем свойством, что $\mu(y+X)=0$ для всех y, если $\mu(X)=0$, *квазиинвариантными* (относительно параллельных переносов). Мы доказали, таким образом, что *все меры, эквивалентные лебеговой мере, квазиинвариантны.*

Имеет место и обратное утверждение.

Теорема 2. *Если мера μ квазиинвариантная, то она эквивалентна лебеговой мере.*

Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 1. *Если мера μ квазиинвариантна, то мера любого ограниченного множества конечна.*

Доказательство. Из квазиинвариантности меры μ вытекает, что μ-мера любой точки x в R_n равна нулю. В самом деле, если бы имело место неравенство $\mu(x_0)>0$, то и для всех остальных точек x мы имели бы $\mu(x)>0$ и пространство R_n нельзя было бы разбить на счетную сумму множеств конечной μ-меры.

Так как $\mu(x)=0$ для всех $x\in R_n$, то в силу регулярности меры μ у любой точки x из R_n найдется окрестность $V(x)$, имеющая конечную меру. Поскольку любое ограниченное замкнутое множество X в R_n можно покрыть конечным числом окрестностей $V(x)$, то все такие множества имеют конечную μ-меру, $\mu(X)<+\infty$.

Перейдем к доказательству теоремы. Пусть μ — квазиинвариантная мера. Сопоставим любому элементу y из R_n меру μ_y, положив

$$\mu_y(X)=\mu(y+X).$$

Из квазиинвариантности меры μ вытекает, что $\mu_y(X)=0$, если $\mu(X)=0$. Следовательно, по теореме Радона — Никодима найдется такая неотрицательная конечная функция $f(x, y)$, что для любого y и любого множества X в R_n выполняется равенство

$$\mu(y+X)=\int_X f(x, y)\,d\mu(x). \tag{2}$$

Заметим, что функция $f(x, y)$ при всех значениях y строго положительна почти при всех значениях x (относительно меры μ). В противном случае нашлось бы множество X, такое, что $\mu(X)>0$, но $\mu(y+X)=0$, вопреки предположению о квазиинвариантности меры μ.

Изменив при каждом y значения $f(x, y)$ на множестве нулевой μ-меры, мы можем добиться выполнения неравенства $f(x, y)>0$ при всех x и y.

Покажем теперь, что из равенства $\mu_0(X)=0$, где X — ограниченное множество, вытекает равенство $\mu(X)=0$. С этой целью запишем равенство (2) в виде

$$\mu(y+X)=\int \chi(x)\,f(x, y)\,d\mu(x), \tag{3}$$

где $\chi(x)$ — характеристическая функция множества X. Возьмем далее любое ограниченное множество Y, такое, что $\mu_0(Y)>0$, и проинтегрируем равенство (3) по множеству Y относительно лебеговой меры. Мы получим, что

$$\int_Y \mu(y+X)\,dy=\int\int \chi(x)\,\chi_1(y)\,f(x, y)\,d\mu(x)\,dy, \tag{4}$$

где через $\chi_1(y)$ обозначена характеристическая функция множества Y. Интеграл, стоящий в левой части этого равенства, сходится. В самом деле, точки вида $y+x$, где $y\in Y$, $x\in X$, образуют ограниченное множество Z в пространстве R_n и потому для всех значений y мы имеем $\mu(y+X)\leqslant\mu(Z)$. Следовательно,

$$\int_Y \mu(y+X)\,dy\leqslant\mu(Z)\,\mu_0(Y).$$

Заметим теперь, что

$$\mu(y+X)=\int_{y+X} d\mu(x)=\int \chi(x-y)\,d\mu(x),$$

и потому равенство (4) можно переписать в виде

$$\int\int \chi_1(y)\,\chi(x-y)\,d\mu(x)\,dy=$$
$$=\int\int \chi(x)\,\chi_1(y)\,f(x, y)\,d\mu(x)\,dy.$$

Заменим в левой части этого равенства y на $x-y$ и применим теорему Фубини. Мы получим, что

$$\int\left[\int \chi_1(x-y)\,d\mu(x)\right]dy=\int_X\left[\int_Y f(x, y)\,dy\right]d\mu(x).$$

Отсюда вытекает, что если $\mu_0(X)=0$, то

$$\int\limits_X \left[\int\limits_Y f(x, y)\,dy\right] d\mu(x) = 0. \tag{5}$$

Но из неравенств $f(x, y) > 0$ и $\mu_0(Y) > 0$ вытекает, что $\int\limits_Y f(x, y)\,dy > 0$ при всех значениях x. Поэтому из равенства (5) следует, что $\mu(X)=0$.

Итак, доказано, что для ограниченных множеств равенство $\mu_0(X)=0$ влечет за собой равенство $\mu(X)=0$. Поскольку любое множество X нулевой лебеговой меры разлагается в счетную сумму ограниченных множеств нулевой меры, а мера μ счетно-аддитивна, то равенство $\mu(X)=0$ имеет место для всех множеств нулевой лебеговой меры. По теореме Радона—Никодима отсюда следует, что

$$\mu(X) = \int\limits_X f(x)\,dx,$$

где $f(x)$ — положительная функция, суммируемая на любом ограниченном множестве.

Нам осталось показать, что функция $f(x)$ строго положительна. Обозначим через X_0 множество, на котором функция $f(x)$ равна нулю. Предположим, что его лебегова мера отлична от нуля. Выберем в пространстве R_n счетное всюду плотное множество точек $x_1, \ldots, x_k, \ldots$ и обозначим через Z объединение всех множеств

$$Z = \bigcup_{k=1}^{\infty} (x_k + X_0).$$

Нетрудно показать, что дополнение Z_1 к множеству Z имеет нулевую лебегову меру. Но $R_n = Z \cup Z_1$ и потому

$$\mu(R_n) = \mu(Z) + \mu(Z_1) \leqslant \mu(Z_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(x_k + X_0). \tag{6}$$

Так как на множестве X_0 выполняется равенство $f(x)=0$, то $\mu(X_0)=0$. Поскольку мера μ квазиинвариантна, то для всех k мы имеем $\mu(x_k + X_0)=0$. Кроме того, $\mu(Z_1)=0$, так как $\mu_0(Z_1)=0$. Поэтому, в силу соотношения (6), $\mu(R_n)=0$.

Итак, функция $f(x)$ может обращаться в нуль на множестве положительной лебеговой меры лишь в случае, когда μ — нулевая мера. Теорема 2 доказана.

Итак, мы доказали, что *класс квазиинвариантных мер в пространстве R_n совпадает с классом мер, эквивалентных лебеговой мере*. Поэтому *в пространстве R_n все квазиинвариантные меры эквивалентны друг другу.*

2. Квазиинвариантные меры в линейных топологических пространствах. Перейдем теперь к рассмотрению мер в бесконечномерных линейных топологических пространствах. Определение квазиинвариантности можно формально перенести и на этот случай, назвав меру в линейном топологическом пространстве квазиинвариантной, если параллельные сдвиги переводят множества нулевой меры во множества нулевой меры. Однако такое формальное перенесение оказывается неудачным. Дело в том, что для наиболее важных классов бесконечномерных пространств отсутствуют ненулевые меры, квазиинвариантные в указанном смысле.

Рассмотрим меры μ в пространстве Φ', сопряженном со счетно-нормированным пространством Φ. Покажем, что *если $\Phi = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Phi_n$, причем $\Phi_n \supset \Phi_{n+1}$, и для любого n пространства Φ_n и Φ_{n+1} различны, то в Φ' нет квазиинвариантной меры.* В самом деле, пространство Φ' является объединением подпространств Φ'_n сопряженных с пространствами Φ_n, $\Phi' = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Phi'_n$, где $\Phi'_1 \subset \ldots \subset \Phi'_1 \subset \ldots$

Поэтому

$$\mu(\Phi') = \lim_{n\to\infty} \mu(\Phi'_n)$$

(подпространства Φ'_n являются борелевскими множествами в Φ' и потому мера μ для них определена). Поскольку $\mu(\Phi') \neq 0$, то найдется такое n, что $\mu(\Phi'_n) \neq 0$. Но по условию пространства Φ_n и Φ_{n+1} отличны друг от друга, а потому Φ'_n отлично от Φ'. Разобьем пространство Φ' на смежные классы по подпространству Φ'_n. Каждый из этих смежных классов получается при параллельном переносе

29 Зак. 1281. И. М. Гельфанд и Н. Я. Виленкин

подпространства Φ'_n, имеющего ненулевую меру, и в силу квазиинвариантности меры μ имеет ненулевую меру. Поскольку множество таких смежных классов имеет континуальную мощность, мы приходим к противоречию с σ-конечностью меры μ. Тем самым наше утверждение доказано.

Это утверждение остается справедливым и для пространств Φ', сопряженных с нормированными пространствами, имеющими счетное всюду плотное подмножество. В частности, нет ненулевых квазиинвариантных мер в гильбертовом пространстве (см. п. 3).

Как и во многих аналогичных случаях, возникшее затруднение удается разрешить путем рассмотрения оснащенных гильбертовых пространств. Итак, пусть $\Phi \subset H \subset \Phi'$ — оснащенное гильбертово пространство, т. е. ядерное пространство Φ, в котором задано скалярное произведение (φ, ψ) (через H мы, как и в § 4 гл. I, обозначаем пополнение пространства Φ по норме $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$. Сопоставим каждому элементу ψ из Φ функционал F_ψ в Φ, задаваемый формулой

$$(F_\psi, \varphi) = (\varphi, \psi).$$

Мы получим (антилинейное) вложение $\psi \to F_\psi$ пространства Φ в Φ'. Очевидно, что элементы вида F_ψ, $\psi \in \Phi$, всюду плотны в Φ'.

Назовем меру μ в пространстве Φ' *квазиинвариантной*, если для любого множества X из Φ', такого, что $\mu(X) = 0$, и любого элемента ψ из Φ выполняется равенство $\mu(F_\psi + X) = 0$. Таким образом, мы отказываемся от требования, чтобы все сдвиги в Φ' переводили множества нулевой меры во множества нулевой меры, а требуем этого лишь для сдвигов на элементы вида F_ψ, $\psi \in \Phi$.

Отметим, что, поскольку элементы вида F_ψ всюду плотны в Φ', *сдвигов на элементы F_ψ «достаточно много»*. Это означает, что если $\Phi'/\Psi^0 = R$ — конечномерное фактор-пространство, то любой сдвиг в R может быть индуцирован сдвигом в Φ', соответствующим элементу F_ψ, где $\psi \in \Phi$. Это утверждение вытекает из того, что образ пространства Φ в R всюду плотен и в силу конечномерности R совпадает с R.

Докажем теперь, что *в пространствах Φ', сопряженных ядерным пространствам, существуют квазиинвариантные меры* (при этом, разумеется, квазиинвариантность понимается в указанном сейчас смысле). Именно, мы покажем, что если вложение пространства Φ в пространство Φ' определяется непрерывным эрмитовым функционалом $B(\varphi, \psi)$, то гауссовская мера μ, определяемая этим функционалом, квазиинвариантна.

Иными словами, будет доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $B(\varphi, \psi)$ — непрерывный по каждому аргументу невырожденный положительно определенный эрмитов функционал в ядерном пространстве Φ и μ — гауссовская мера в пространстве Φ', задаваемая этим функционалом. Если X — такое множество в Φ', что $\mu(X) = 0$, и ψ — любой элемент в пространстве Φ, то $\mu(F_\psi + X) = 0$, где через F_ψ обозначен функционал в Φ, определяемый формулой*

$$(F_\psi, \varphi) = B(\varphi, \psi).$$

Доказательство этой теоремы опирается на следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть μ — гауссовская мера в пространстве Φ', сопряженном ядерному (комплексному) счетно-гильбертову пространству Φ, а $B(\varphi, \psi)$ — эрмитов функционал, задающий эту меру. Если основание A цилиндрического множества Z в Φ' принадлежит проекции шара $\|F\|_{-n} \leqslant R$ в фактор-пространстве Φ'/Ψ^0, где Ψ^0 — образующее подпространство для Z, то для любого элемента ψ из Ψ выполняется неравенство*

$$\frac{\mu(F_\psi + Z)}{\mu(Z)} \leqslant e^{R\|\psi\|_n}. \tag{7}$$

Доказательство. По определению гауссовской меры мы имеем *)

$$\mu(Z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_A \exp\left[-\frac{1}{2} B_\Psi(\tilde{F}, \tilde{F})\right] d_\Psi \tilde{F}$$

*) Ради краткости записи через $\tilde{F}$ обозначается смежный класс по Ψ^0, содержащий элемент F из Φ', а через $\tilde{F}_\psi + A$ — проекция в Φ'/Ψ^0 цилиндрического множества $F_\psi + Z$.

и

$$\mu(F_\psi+Z)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\tilde F_\psi+A}\exp\left[-\frac{1}{2}B_\Psi(\tilde F,\tilde F)\right]d_\Psi\tilde F=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_A\exp\left[-\frac{1}{2}B_\Psi(\tilde F-\tilde F_\psi,\ \tilde F-\tilde F_\psi)\right]d_\Psi\tilde F,$$

где $B_\Psi(\tilde F_1, \tilde F_2)$ — функционал в Φ'/Ψ^0, определяемый функционалом $B(\varphi, \psi)$, а $d_\Psi\tilde F$ — лебегова мера в Φ'/Ψ^0, соответствующая скалярному произведению $B_\Psi(\tilde F_1, \tilde F_2)$. Поэтому

$$\frac{\mu(F_\psi+Z)}{\mu(Z)}\leqslant\sup_F\frac{\exp\left[-\frac{1}{2}B_\Psi(\tilde F-\tilde F_\psi,\ \tilde F-\tilde F_\psi)\right]}{\exp\left[-\frac{1}{2}B_\Psi(\tilde F,\tilde F)\right]}=$$
$$=\sup_F\exp\left[B_\Psi(\tilde F,\tilde F_\psi)-\frac{1}{2}B_\Psi(\tilde F_\psi,\tilde F_\psi)\right]\leqslant$$
$$\leqslant\sup_F\exp\left[B_\Psi(\tilde F,\tilde F_\psi)\right].$$

Из определения функционала $B_\Psi(\tilde F_1, \tilde F_2)$ (см. § 3, п. 2) вытекает, что для любого элемента $\tilde F$ из Φ'/Ψ^0 выполняется равенство

$$B_\Psi(\tilde F, \tilde F_\psi)=(F, \psi),$$

где через (F, ψ) обозначено значение функционала F для элемента ψ. Если $\tilde F\in A$, то по условию леммы можно выбрать F в $\tilde F$ так, чтобы выполнялось неравенство $\|F\|_{-n}\leqslant R$. Тогда

$$|B_\Psi(\tilde F, \tilde F_\psi)|\leqslant|(F, \psi)|\leqslant\|F\|_{-n}\|\psi\|_n\leqslant R\|\psi\|_n.$$

Поэтому

$$\frac{\mu(F_\psi+Z)}{\mu(Z)}\leqslant e^{R\|\psi\|_n}$$

и тем самым лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 3. Пусть X — множество нулевой μ-меры и ψ — любой элемент из пространства Φ. Нам надо показать, что множество $F_\psi+X$ — сдвиг множества X на элемент F_ψ — также имеет нулевую

μ-меру. Для этого достаточно установить, что при любом $\varepsilon>0$ выполняется неравенство $\mu(F_\psi+X)<\varepsilon$.

Итак, пусть задано $\varepsilon>0$. Так как мера μ счетно-аддитивна, а пространство Φ' является объединением шаров $\|F\|_{-n}\leqslant R$, то найдутся такие числа n и R, что μ-мера дополнения к шару S: $\|F\|_{-n}\leqslant R$ меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2}$. Обозначим через X_1 множество $X\cap S_1$, где через S_1 обозначен шар $\|F\|_{-n}\leqslant R+\|F_\psi\|_{-n}$, а через X_2 — дополнение к множеству X_1 в X. Очевидно, что множество $F_\psi+X_2$ лежит в дополнении к шару S, и потому в силу выбора этого шара имеет место неравенство

$$\mu(F_\psi+X_2)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Покажем, что и $\mu(F_\psi+X_1)<\frac{\varepsilon}{2}$. В самом деле, так как множество X_1 имеет нулевую μ-меру, то его можно так покрыть счетной суммой $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}Z_k$ цилиндрических множеств, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu(Z_k)<\frac{\varepsilon}{2}\exp\left[-(R+\|F_\psi\|_{-n})\|\psi\|_n\right].$$

При этом, поскольку множество X_1 лежит в шаре S, цилиндрические множества Z_k, $1\leqslant k<\infty$, можно выбрать так, чтобы основание A_k множества Z_k лежало в проекции шара S_1 в Φ'/Ψ_k^0 (через Ψ_k^0 обозначено образующее подпространство множества Z_k). Не теряя общности, можно считать, что при всех k выполняется соотношение $\psi\in\Psi_k$. Так как A_k принадлежит проекции шара S_1 : $\|F\|_{-n}\leqslant R+\|F_\psi\|_{-n}$, то по лемме 2

$$\mu(F_\psi+Z_k)\leqslant\exp\left[(R+\|F_\psi\|_{-n})\|\psi\|_n\right]\mu(Z_k)$$

и потому

$$\mu(F_\psi+X_1)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mu(F_\psi+Z_k)\leqslant$$
$$\leqslant\exp\left[(R+\|F_\psi\|_{-n})\|\psi\|_n\right]\sum_{k=1}^{\infty}\mu(Z_k)<\frac{\varepsilon}{2},$$

Таким образом, $\mu(F_\psi + X_1) < \frac{\varepsilon}{2}$. Но это означает, что

$$\mu(F_\psi + X) = \mu(F_\psi + X_1) + \mu(F_\psi + X_2) < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Итак, гауссовские меры в пространстве Φ', сопряженном с ядерным пространством Φ, квазиинвариантны. Можно сказать, что каждому непрерывному положительно определенному эрмитову функционалу $B(\varphi, \psi)$ в Φ соответствует квазиинвариантная мера. При этом, если пространство Φ бесконечномерно, то в Φ' существует бесконечно много попарно неэквивалентных квазиинвариантных мер (напомним, что в конечномерных пространствах все квазиинвариантные меры эквивалентны друг другу).

В самом деле, рассмотрим в ядерном пространстве Φ положительно определенные эрмитовы функционалы $B_1(\varphi, \psi)$ и $B_2(\varphi, \psi)$ и обозначим через μ_1 и μ_2 гауссовы меры в пространстве Φ', задаваемые этими функционалами. Предположим, что функционал $B_2(\varphi, \psi)$ ограничен относительно скалярного произведения, задаваемого функционалом $B_1(\varphi, \psi)$, т. е. что существует $M > 0$, при котором неравенство

$$|B_1(\varphi, \varphi)| \leqslant M |B_2(\varphi, \varphi)|$$

выполняется для всех элементов φ пространства Φ. Тогда функционал $B_2(\varphi, \psi)$ определяет положительно определенный линейный оператор A в пространстве H (пополнении Φ по норме $\|\varphi\| = \sqrt{B_1(\varphi, \varphi)}$), задаваемый формулой

$$B_1(A\varphi, \psi) = B_2(\varphi, \psi). \tag{8}$$

Имеет место следующее утверждение: *если оператор A, определяемый формулой (8), имеет дискретный спектр, причем ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$, составленный из собственных значений оператора A, сходится, то меры μ_1 и μ_2 неэквивалентны.*

Доказательство этого утверждения основано на леммах 2 и 3 из § 3. Именно, рассмотрим в пространстве Φ шар S, задаваемый неравенством $B_1(\varphi, \varphi) \leqslant R^2$, и обозначим через S' образ этого шара в пространстве Φ'. Легко показать, пользуясь леммой 3 из § 3, что μ_1-мера этого шара равна нулю. В то же время, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n$ сходится, то, пользуясь оценками из леммы 2 § 3, можно показать, что μ_2 — мера этого шара при достаточно большом значении R отлична от нуля. Тем самым доказано, что меры μ_1 и μ_2 неэквивалентны *).

Пользуясь этим утверждением, нетрудно построить бесконечное множество попарно неэквивалентных квазиинвариантных мер в Φ. Для этого достаточно рассмотреть последовательность $B_1(\varphi, \psi), \ldots, B_n(\varphi, \psi), \ldots$ положительно определенных эрмитовых функционалов в Φ, таких, что оператор A_n, задаваемый формулой

$$B_n(A_n\varphi, \psi) = B_{n+1}(\varphi, \psi),$$

имеет дискретный спектр, причем ряды, составленные из собственных значений операторов A_n, сходятся.

Было бы весьма интересно дать полное описание всех квазиинвариантных мер в ядерных пространствах.

3. Квазиинвариантные меры в полных метрических пространствах. В п. 2 было доказано, что в пространствах Φ', сопряженных со счетно-нормированными пространствами, нет квазиинвариантных мер. Сейчас аналогичное утверждение будет доказано для полных метрических линейных пространств.

Теорема 4. *Пусть Λ — полное метрическое линейное пространство, содержащее счетное всюду плотное множество, и такое, что абсолютно выпуклая оболочка любого компактного множества **) X из Λ нигде не плотна в Λ. Тогда единственной квазиинвариантной мерой в Λ является нулевая мера.*

---

*) Можно показать, что если произведение $\prod_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ сходится, то меры μ_1 и μ_2 эквивалентны. В этом случае оператор A является суммой единичного и ядерного операторов.

**) Абсолютно выпуклой оболочкой множества X называется множество $\tilde{X}$, состоящее из линейных комбинаций вида $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$, где $x_k \in X$, $1 \leqslant k \leqslant n$, и $|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n| \leqslant 1$.

Доказательство. Покажем сначала, что если в пространстве Λ нет нормированных квазиинвариантных мер (т. е. таких квазиинвариантных мер, что $\mu(\Lambda)=1$), то единственной квазиинвариантной мерой в Λ является нулевая мера. В самом деле, пусть μ — квазиинвариантная мера в Λ. Так как мера μ σ-конечна, то пространство Λ можно разбить на счетную сумму множеств $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k, \ldots$, имеющих конечную меру $\mu(\Lambda_k)$. Обозначим через $f(x)$ функцию в пространстве Λ, такую, что $f(x)=\frac{1}{2^k\mu(\Lambda_k)}$, если $x\in\Lambda_k$, и положим

$$\nu(X)=\int\limits_X f(x)\,d\mu(x). \tag{9}$$

Так как

$$\nu(\Lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}\nu(\Lambda_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1,$$

то ν является нормированной мерой в пространстве Λ. При этом из квазиинвариантности меры μ легко следует, что мера ν также квазиинвариантна. Но мы предположили, что в пространстве Λ нет нормированных квазиинвариантных мер. Следовательно, $\mu(\Lambda)=0$.

Таким образом, наша задача сводится к тому, чтобы доказать, что в пространстве Λ нет нормированных квазиинвариантных мер. Пусть μ — счетно-аддитивная мера в Λ, такая, что $\mu(\Lambda)=1$. Покажем, что для любого n найдется такое компактное множество X_n в Λ, что $\mu(X_n)\geqslant 1-\frac{1}{n}$. В самом деле, выберем в пространстве Λ счетное всюду плотное множество, состоящее из точек $x_1, \ldots, x_k, \ldots$, и рассмотрим замкнутые шары S_{kp} с центрами в точках x_k и радиусами $\frac{1}{p}$. Так как при любом фиксированном p шары $S_{1p}, S_{2p}, \ldots, S_{kp}, \ldots$ покрывают пространство Λ (множество точек $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ всюду плотно в Λ), то в силу счетной аддитивности меры μ найдется такое $k(p)$, что мера множества

$$X_{np}=\bigcup_{j=1}^{k(p)} S_{jp}$$

не меньше, чем $1-\frac{1}{2^pn}$. Обозначим через X_n множество $\bigcap_{p=1}^{\infty}X_{np}$ и покажем, что X_n является искомым компактным множеством. В самом деле, очевидно, что

$$\mu(\Lambda-X_n)\leqslant\sum_{p=1}^{\infty}\mu(\Lambda-X_{np})\leqslant\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{2^pn}=\frac{1}{n}, \tag{10}$$

откуда вытекает, что мера множества X_n не меньше, чем $1-\frac{1}{n}$. Далее, при любом p множество X_n покрывается конечным числом шаров $S_{1p}, \ldots, S_{k(p)p}$ радиуса $\frac{1}{p}$. Наконец, множество X_n замкнуто, поскольку замкнуты шары S_{kp} и, следовательно, множества X_{np} как объединения конечного числа этих шаров. Но в полном метрическом пространстве Λ всякое замкнутое множество Z, которое можно покрыть конечным числом шаров сколь угодно малого радиуса, компактно *). Следовательно, компактно и множество X_n.

Обозначим теперь через X множество $\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n$. Из соотношения $\mu(X_n)\geqslant 1-\frac{1}{n}$ вытекает, что X является множеством полной меры, т. е. что $\mu(X)=1$. Но тогда и (незамкнутая) линейная оболочка $\hat{X}$ множества X имеет полную меру **). Покажем, что множество $\hat{X}$ не совпадает со всем пространством Λ. Для этого рассмотрим в пространстве Λ компактные множества Y_n вида $Y_n=\bigcup_{k=1}^{n}X_k$. Обозначим через $\tilde{Y}_n$ абсолютно выпуклую оболочку множества Y_n.

*) Доказательство этого утверждения протекает так же, как и доказательство компактности ограниченного замкнутого множества в конечномерном пространстве, с той лишь разницей, что роль разбиений играют покрытия множества Z шарами сколь угодно малого радиуса.

**) Линейной оболочкой множества X мы называем множество $\hat{X}$, состоящее из конечных линейных комбинаций

$$\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_nx_n$$

элементов множества X.

По условию теоремы множества $\tilde{Y}_n$ нигде не плотны в Λ. Поэтому и множества $k\tilde{Y}_n$, состоящие из элементов вида ky, $y \in \tilde{Y}_n$, нигде не плотны в Λ. Так как полное метрическое пространство нельзя разбить в счетную сумму нигде не плотных множеств (см. гл. I, § 1, п. 1), то объединение $Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} k\tilde{Y}_n$ множеств $k\tilde{Y}_n$ не совпадает с Λ. Но $\hat{X} \subset Y$, так как если $x \in \hat{X}$, то $x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_p x_p$, где $x_j \in X_{n(j)}$, и потому $x \in \tilde{Y}_n$, где $n = \max_{1 \leqslant j \leqslant p} n(j)$ и $k \geqslant \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|$. Тем самым доказано, что множество $\hat{X}$, имеющее меру 1, не совпадает с Λ.

Пусть теперь y — любой элемент пространства Λ, не принадлежащий $\hat{X}$. Так как множество $\hat{X}$ линейно, то пересечение множеств $\hat{X}$ и $y + \hat{X}$ пусто. Так как $y + \hat{X}$ лежит в дополнении к $\hat{X}$, а $\mu(\hat{X}) = 0$, то $\mu(y + X) = 0$. Поскольку множество $y + \hat{X}$ получается из $\hat{X}$ параллельным переносом, то мера μ не является квазиинвариантной. Теорема доказана.

Покажем теперь, что из этой теоремы вытекает отсутствие ненулевых квазиинвариантных мер в бесконечномерных нормированных пространствах Λ, содержащих счетное всюду плотное множество. В самом деле, нам надо лишь показать, что в таких пространствах абсолютно выпуклая оболочка любого компактного множества нигде не плотна. Пусть X — компактное множество в Λ, а $S(x_0, r)$ — шар в пространстве Λ с центром в точке x_0 и радиусом r. Так как множество X компактно, его можно покрыть конечным числом шаров $S(x_k, r/2)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, радиуса $r/2$. Поэтому абсолютно выпуклая оболочка $\tilde{X}$ множества X лежит в абсолютно выпуклой оболочке $\tilde{S}$ множества $S = \bigcup_{k=1}^{n} S(x_k, r/2)$. Любой элемент y из множества $\tilde{S}$ может быть представлен в виде

$$\lambda_1(x_1 + y_1) + \ldots + \lambda_n(x_n + y_n),$$

где $|\lambda_1| + \ldots + |\lambda_n| = 1$ и $\|y_1\| = \ldots = \|y_n\| = r/2$.

Но все элементы $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$ принадлежат подпространству L, натянутому на элементы $x_1, \ldots, x_n$, а

$$\|\lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_n y_n\| \leqslant \frac{r}{2}(|\lambda_1| + \ldots + |\lambda_n|) \leqslant \frac{r}{2}.$$

Поэтому все элементы из $\tilde{S}$ могут быть записаны в виде $y = l + z$, где $l \in L$, а $\|z\| \leqslant \frac{r}{2}$.

Чтобы показать, что замыкание $\tilde{S}$ не совпадает с шаром $S(x_0, r)$, достаточно найти в шаре $S(0, r)$ элемент y_1, который нельзя представить в виде $y_1 = l - x_0 + z$, где $l \in L$, $\|z\| \leqslant \frac{r}{2}$. Но существование такого элемента сразу вытекает из конечномерности подпространства L и бесконечномерности пространства Λ. По теореме 4 из доказанного утверждения вытекает отсутствие в Λ ненулевой квазиинвариантной меры. Точно так же доказывается отсутствие ненулевых квазиинвариантных мер в счетно-нормированных пространствах, содержащих всюду плотное счетное множество.

4. Ядерные группы Ли и их унитарные представления. Коммутационные соотношения в квантовой теории поля. Построенные нами в п. 2 квазиинвариантные меры находят приложения в теории бесконечномерных групп Ли. Пусть G — некоторая группа. Мы будем называть ее *ядерной группой Ли*, если существует окрестность единичного элемента в G, гомеоморфная окрестности нуля счетно-гильбертова ядерного пространства Φ. Обычно будут рассматриваться ядерные группы Ли, для которых Φ является оснащенным гильбертовым пространством, т. е. такие, что в Φ задано скалярное произведение (φ, ψ). Каждое ядерное пространство Φ можно рассматривать как коммутативную ядерную группу Ли.

Приведем несколько более сложный пример ядерной группы Ли. Пусть $\Phi \subset H \subset \Phi'$ — оснащенное гильбертово пространство. Назовем элементами группы G_0 всевозможные тройки $g = (\varphi, \psi; \alpha)$, где φ и ψ — элементы из Φ, а α — комплексное число, равное по модулю единице. Введем в группу G_0 умножение, положив

$$g_1 g_2 = (\varphi_1, \psi_1; \alpha_1)(\varphi_2, \psi_2; \alpha_2) = \\ = (\varphi_1 + \varphi_2, \psi_1 + \psi_2; e^{i(\varphi_2, \psi_1)}\alpha_1\alpha_2) \quad (11)$$

[(φ, ψ) — скалярное произведение в Φ].

Эта группа связана с коммутационными соотношениями в квантовой теории поля. В квантовой механике систем с одной степенью свободы изучаются операторы p и q, связанные коммутационным соотношением

$$pq - qp = 1.$$

Это коммутационное соотношение является коммутационным соотношением для операторов Ли группы G, элементами которой являются тройки чисел (x, y, α), $\alpha \neq 0$, а умножение задается формулой

$$(x_1, y_1, \alpha_1)(x_2, y_2, \alpha_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, e^{ix_2y_1}\alpha_1\alpha_2). \quad (12)$$

Точно так же рассмотрение систем с n степенями свободы приводит к системе коммутационных соотношений

$$p_jq_j - q_jp_j = 1, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n. \quad (13)$$

Они являются коммутационными соотношениями для операторов Ли группы G, элементы которой имеют вид (x, y, α), где x и y — векторы n-мерного пространства, а умножение задается формулой, аналогичной формуле (12), с той лишь разницей, что вместо x_2y_1 надо взять скалярное произведение (x_2, y_1). Наконец, рассмотрение квантовых полей (систем с бесконечным числом степеней свободы) приводит к бесконечным системам коммутационных соотношений вида (13). Естественно рассматривать эти соотношения как коммутационные соотношения ядерной группы Ли G_0.

Мы рассмотрим в этом пункте унитарные представления групп Φ и G_0. *Унитарным представлением* любой группы G называют заданную на ней непрерывную операторную функцию $U(g)$, значениями которой являются унитарные операторы в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, такую, что

$$U(g_1g_2) = U(g_1)U(g_2)$$

для любых двух элементов g_1 и g_2 из G. Унитарное представление $U(g)$ называют *циклическим*, если в пространстве $\mathfrak{H}$ существует такой вектор h, что наименьшее замкнутое подпространство в $\mathfrak{H}$, содержащее все векторы $U(g)h$, $g \in G$, совпадает с $\mathfrak{H}$. Не теряя общности, можно считать, что $\|h\| = 1$. Вектор h называют циклическим вектором представления $U(g)$.

Начнем с рассмотрения циклических представлений группы Φ. Иными словами, рассматриваем непрерывную операторную функцию $U(\varphi)$, где $U(\varphi)$ — унитарные операторы в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, причем $U(\varphi_1 + \varphi_2) = U(\varphi_1)U(\varphi_2)$. Из того, что группа G коммутативна, вытекает выполнение равенства $U(\varphi_1)U(\varphi_2) = U(\varphi_2)U(\varphi_1)$ для любых элементов φ_1 и φ_2 из Φ. Из унитарности же операторов U следует, что $U(-\varphi) = U^{-1}(\varphi) = U^*(\varphi)$.

Сопоставим каждому циклическому унитарному представлению $U(\varphi)$ группы G функционал $L(\varphi)$ в Φ, положив

$$L(\varphi) = (U(\varphi)h, h)_1,$$

где h — циклический вектор представления $U(\varphi)$, а через $(h, h)_1$ обозначено скалярное произведение в $\mathfrak{H}$. Этот функционал положительно определен. В самом деле, для любых элементов $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ из Φ и любых комплексных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ выполняется равенство

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L(\varphi_j - \varphi_k)\alpha_j\bar{\alpha}_k = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (U(\varphi_j - \varphi_k)h, h)_1\alpha_j\bar{\alpha}_k.$$

Но

$$(U(\varphi_j - \varphi_k)h, h)_1 = (U^*(\varphi_k)U(\varphi_j)h, h)_1 = (U(\varphi_j)h, U(\varphi_k)h)_1$$

и потому

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L(\varphi_j - \varphi_k)\alpha_j\bar{\alpha}_k = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (U(\varphi_j)h, U(\varphi_k)h)_1\alpha_j\bar{\alpha}_k = \left\|\sum_{j=1}^{n}\alpha_jU(\varphi_j)h\right\|_1^2 \geqslant 0$$

($\|h\|_1$ — норма в пространстве $\mathfrak{H}$).

Тем самым положительная определенность функционала $L(\varphi)$ доказана. Очевидно далее, что $L(0) = (h, h)_1 = 1$ и что в силу непрерывности операторной функции $U(\varphi)$ функционал $L(\varphi)$ непрерывен. Применим к функционалу $L(\varphi)$ теорему Бохнера для бесконечномерных пространств (см. теорему 1 из § 4). В силу этой теоремы найдется такая нормированная мера μ в пространстве Φ', что $L(\varphi)$ является преобразованием Фурье этой меры

$$L(\varphi) = \int e^{i(F, \varphi)}\, d\mu(F). \quad (14)$$

Точно так же, как в спектральном анализе операторов (см. добавление к § 4 главы I), доказывается, что пространство $\mathfrak{H}$ можно реализовать в виде пространства L^2_μ функций $f(F)$, заданных на пространстве Φ' и имеющих интегрируемый квадрат модуля относительно меры μ, причем операторам $U(\varphi)$ соответствуют при этой реализации операторы умножения на $e^{i(F,\varphi)}$.

Указанная реализация состоит в том, что вектору

$$h_1 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k U(\varphi_k) h \tag{15}$$

из $\mathfrak{H}$ сопоставляется функция

$$f_1(F) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e^{i(F,\varphi_k)} \tag{16}$$

на Φ'. Из формулы (14) следует, что это соответствие изометрично. Так как h — циклический вектор, то векторы вида (15) всюду плотны в $\mathfrak{H}$, а потому построенное соответствие можно распространить на все векторы из $\mathfrak{H}$. Оператор $U(\varphi)$ переводит вектор вида (15) в вектор

$$U(\varphi) h_1 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k U(\varphi_k + \varphi) h,$$

которому соответствует функция

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e^{i(F,\varphi_k+\varphi)} = e^{i(F,\varphi)} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e^{i(F,\varphi_k)}.$$

Следовательно, на функциях вида (16) оператору $U(\varphi)$ соответствует оператор умножения на $e^{i(F,\varphi)}$. Но легко доказать, что эти функции всюду плотны в L^2_μ. Поэтому оператору $U(\varphi)$ соответствует в L^2_μ оператор умножения на $e^{i(F,\varphi)}$.

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть $U(\varphi)$ — унитарное циклическое представление группы Φ и $h \in \mathfrak{H}$ — циклический вектор этого представления. Тогда в пространстве Φ' существует такая нормированная мера μ, что*

$$L(\varphi) \equiv (U(\varphi) h, h) = \int e^{i(F,\varphi)} d\mu(F). \tag{17}$$

При этом пространство $\mathfrak{H}$ можно так реализовать в виде пространства L^2_μ функций $f(F)$, $F \in \Phi'$, имеющих интегрируемый квадрат модуля относительно меры μ, что операторам $U(\varphi)$ соответствуют при этой реализации операторы умножения на $e^{i(F,\varphi)}$.

Если выбрать в пространстве $\mathfrak{H}$ вектор h_1, отличный от h (вообще говоря, не циклический), то ему также соответствует положительно определенный непрерывный функционал $L_1(\varphi)$, определяемый равенством

$$L_1(\varphi) = (U(\varphi) h_1, h_1)_1.$$

Функционал $L_1(\varphi)$ является преобразованием Фурье положительной меры μ_1 в Φ'

$$L_1(\varphi) = \int e^{i(F,\varphi)} d\mu_1(F). \tag{18}$$

Эта мера связана с мерой μ соотношением

$$d\mu_1(F) = |f(F)|^2 d\mu(F), \tag{19}$$

где $f(F)$ — функция, соответствующая в силу теоремы 4 вектору h_1. В самом деле, поскольку оператору $U(\varphi)$ соответствует в Φ' оператор умножения на $e^{i(F,\varphi)}$, а соответствие между пространствами $\mathfrak{H}$ и L^2_μ изометрично, то

$$L_1(\varphi) = (U(\varphi) h_1, h_1)_1 = \int e^{i(F,\varphi)} |f(F)|^2 d\mu(F).$$

Сравнивая это равенство с равенством (18), мы убеждаемся в справедливости соотношения (19).

Из формулы (19) следует, что если $\mu(X) = 0$, то и $\mu_1(X) = 0$. Если вектор h_1 также является циклическим вектором, то справедливо и обратное утверждение. Таким образом, *меры, соответствующие различным циклическим векторам в $\mathfrak{H}$, эквивалентны друг другу.*

Заметим, наконец, что если в пространстве Φ' задана любая нормированная мера μ, то существует такое унитарное представление $U(\varphi)$ группы Φ и такой вектор h в пространстве представления, что

$$(U(\varphi) h, h) = \int e^{i(F,\varphi)} d\mu(F).$$

В самом деле, обозначим через L^2_μ пространство всех функций $f(F)$ на Φ', имеющих интегрируемый квадрат модуля по мере μ, и сопоставим элементу φ из Φ оператор $U(\varphi)$ в L^2_μ, переводящий функцию $f(F)$ в функцию $e^{i(F,\varphi)}f(F)$. Очевидно, что $U(\varphi)$ и будет искомым представлением.

Рассмотрим унитарные представления группы Φ, не являющиеся циклическими. В этом случае можно указать счетный набор $\mu_1, \ldots, \mu_n, \ldots$ мер в пространстве Φ', такой, что пространство $\mathfrak{H}$ является прямой ортогональной суммой пространств $L^2_{\mu_n}$, причем операторам $U(\varphi)$ соответствуют в каждом из пространств $L^2_{\mu_n}$ операторы умножения на $e^{i(F,\varphi)}$. Отсюда вытекает, что пространство $\mathfrak{H}$ можно реализовать в виде непрерывной прямой суммы гильбертовых пространств

$$\mathfrak{H} = \int_{\Phi'} \oplus H(F)\, d\mu(F)$$

так, чтобы операторам $U(\varphi)$ соответствовали операторы умножения на $e^{i(F,\varphi)}$. Мы не будем подробно проводить соответствующие рассуждения.

Перейдем теперь к унитарным представлениям группы G_0. Напомним, что эта группа состоит из элементов вида $(\varphi, \psi; \alpha)$, где φ и ψ — векторы ядерного пространства Φ, в котором задано скалярное произведение (φ, ψ), а α — комплексное число, равное по модулю единице. Умножение в группе G_0 задается формулой

$$(\varphi_1, \psi_1; \alpha_1)(\varphi_2, \psi_2; \alpha_2) = (\varphi_1+\varphi_2, \psi_1+\psi_2; e^{i(\varphi_2, \psi_1)}\alpha_1\alpha_2). \quad (20)$$

Рассмотрим в группе G_0 множество Φ_1 элементов вида $(\varphi, 0; 1)$. Так как

$$(\varphi_1, 0; 1)(\varphi_2, 0; 1) = (\varphi_1+\varphi_2, 0; 1),$$

то это множество элементов образует подгруппу в G_0, изоморфную группе Φ. Точно так же и элементы вида $(0, \psi; 1)$ образуют подгруппу Ψ_1 в G_0, которая также изоморфна группе Φ. Наконец, элементы вида $(0, 0; \alpha)$ образуют подгруппу A в G_0, изоморфную мультипликативной группе T комплексных чисел, равных по модулю единице.

Пусть $U(g)$ — унитарное представление группы G_0. Рассматривая это представление на подгруппе Φ, мы получим унитарное представление $U(\varphi)$ группы Φ. Точно так же, рассматривая это представление на Ψ_1, мы получим другое унитарное представление $V(\psi)$ для Φ (через $V(\psi)$ обозначен оператор $U(g)$, соответствующий элементу $(0, \psi; 1)$ из G_0). Наконец, операторы $U(g)$, соответствующие элементам $g=(0, 0; \alpha)$ подгруппы A, образуют унитарное представление $W(\alpha)$ группы T. Поскольку любой элемент $g=(\varphi, \psi; \alpha)$ группы G_0 можно записать в виде произведения

$$(\varphi, \psi; \alpha) = (\varphi, 0; 1)(0, \psi; 1)(0, 0; \alpha) \quad (21)$$

элементов подгрупп Φ_1, Ψ_1 и A, то оператор $U(g)$, соответствующий элементу g, можно записать в виде

$$U(g) = U(\varphi)V(\psi)W(\alpha).$$

Поэтому для задания представления $U(g)$ достаточно указать представления $U(\varphi)$, $V(\psi)$ и $W(\alpha)$.

Ради простоты мы ограничимся случаем, когда представление $W(\alpha)$ группы T имеет вид $W(\alpha)=\alpha$, а представление $U(\varphi)$ — циклическое (общий случай легко сводится к этому). Покажем, что в этом случае полное описание всех представлений группы G_0 сводится к описанию всех пар $(U(\varphi), V(\psi))$ представлений группы Φ, удовлетворяющих коммутационному соотношению

$$V(\psi)U(\varphi) = e^{i(\varphi, \psi)}U(\varphi)V(\psi). \quad (22)$$

В самом деле, пусть $U(g)$ — унитарное представление группы G_0. Из равенства (20) вытекает, что

$$(0, \psi; 1)(\varphi, 0; 1) = (\varphi, 0; 1)(0, \psi; 1)(0, 0; e^{i(\varphi, \psi)}). \quad (23)$$

Поскольку по условию $W(\alpha)=\alpha$, то из равенства (23) непосредственно вытекает доказываемое соотношение (22).

Обратно, если унитарные представления $U(\varphi)$ и $V(\psi)$ удовлетворяют коммутационному соотношению (22), то, полагая при $g=(\varphi, \psi; \alpha)$

$$U(g) = \alpha U(\varphi)V(\psi),$$

мы получаем унитарное представление группы G_0. В самом деле, если $g_1=(\varphi_1, \psi_1; \alpha_1)$, $g_2=(\varphi_2, \psi_2; \alpha_2)$, то

$$\begin{aligned} U(g_1)U(g_2) &= \alpha_1\alpha_2 U(\varphi_1)V(\psi_1)U(\varphi_2)V(\psi_2) = \\ &= e^{i(\varphi_2, \psi_1)}\alpha_1\alpha_2 U(\varphi_1)U(\varphi_2)V(\psi_1)V(\psi_2) = \\ &= e^{i(\varphi_2, \psi_1)}\alpha_1\alpha_2 U(\varphi_1+\varphi_2)V(\psi_1+\psi_2) = U(g_1g_2). \end{aligned}$$

Перейдем к описанию всех пар $(U(\varphi),\ V(\psi))$ представлений группы Φ, удовлетворяющих коммутационному соотношению (22). Так как мы рассматриваем лишь случай, когда $U(\varphi)$ является циклическим представлением, то по теореме 4 в пространстве Φ' существует такая нормированная мера μ, что

$$(U(\varphi)h,\ h)=\int e^{i(F,\varphi)}\,d\mu(F)$$

для всех элементов φ из Φ (h — циклический вектор представления $U(\varphi)$). Пространство $\mathfrak{H}$, в котором действуют операторы $U(g)$, можно реализовать в виде пространства L^2_μ функций $f(F)$, $F\in\Phi'$, имеющих интегрируемый квадрат модуля относительно меры μ, причем операторам $U(\varphi)$ соответствуют в L^2_μ операторы умножения на $e^{i(F,\varphi)}$.

Мы докажем сейчас, что при указанной реализации операторы $V(\psi)$ задаются формулами

$$V(\psi)f(F)=a_\psi(F)f(F+F_\psi), \tag{24}$$

где через $a(F)$ обозначен образ функции $f_0(F)\equiv 1$ при преобразовании $V(\psi)$, а через F_ψ — линейный функционал в Φ, задаваемый формулой

$$(F_\psi,\ \varphi)=(\varphi,\ \psi).$$

В самом деле, рассмотрим функцию $f(F)$ вида

$$f(F)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e^{i(F,\varphi_k)}. \tag{25}$$

Так как операторам $U(\varphi)$ соответствуют в L^2_μ операторы умножения на $e^{i(F,\varphi)}$, эту функцию можно записать в виде

$$f(F)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k U(\varphi_k)f_0(F).$$

Следовательно, в силу коммутационных соотношений имеем

$$\begin{aligned}V(\psi)f(F)&=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k V(\psi)U(\varphi_k)f_0(F)=\\&=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e^{i(\varphi_k,\psi)}U(\varphi_k)V(\psi)f_0(F)=\\&=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e^{i(\varphi_k,\psi)}e^{i(F,\varphi_k)}a_\psi(F).\end{aligned}$$

Поскольку $e^{i(\varphi_k,\psi)}=e^{i(F_\psi,\varphi_k)}$, это равенство можно записать в виде

$$V(\psi)f(F)=a_\psi(F)\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e^{i(F+F_\psi,\varphi_k)}=a_\psi(F)f(F+F_\psi).$$

Так как функции вида (25) всюду плотны в L^2_μ, то равенство

$$V(\psi)f(F)=a_\psi(F)f(F+F_\psi) \tag{26}$$

справедливо для всех функций $f(F)$ из L^2_μ.

Функции $a_\psi(F)$ удовлетворяют функциональному уравнению

$$a_{\psi_1+\psi_2}(F)=a_{\psi_1}(F)a_{\psi_2}(F+F_{\psi_1}). \tag{27}$$

В самом деле, в силу равенства (26)

$$\begin{aligned}a_{\psi_1+\psi_2}(F)&=V(\psi_1+\psi_2)f_0(F)=V(\psi_1)V(\psi_2)f_0(F)=\\&=V(\psi_1)a_{\psi_2}(F)=a_{\psi_1}(F)a_{\psi_2}(F+F_{\psi_1}).\end{aligned}$$

Мы нашли реализацию операторов $U(\varphi)$ и $V(\psi)$ в L^2_μ. Покажем теперь, что *мера μ, соответствующая представлению $U(\varphi)$ в Φ', квазиинвариантна*. Для этого примем во внимание унитарность операторов $V(\psi)$. Так как $V(\psi)$ — унитарные операторы, то для любой функции $f(F)$ из L^2_μ должно выполняться равенство

$$(f,\ f)_1=(V(\psi)f,\ V(\psi)f)_1.$$

Это равенство можно записать в следующем виде

$$\int|f(F)|^2d\mu(F)=\int|f(F+F_\psi)|^2|a_\psi(F)|^2d\mu(F).$$

Заменим в левой части этого равенства переменную F на $F+F_\psi$. Мы получим, что

$$\int|f(F+F_\psi)|^2\,d\mu(F+F_\psi)=\\=\int f(F+F_\psi)|^2|a_\psi(F)|^2\,d\mu(F). \tag{28}$$

Так как равенство (28) выполняется для всех функций $f(F)$ из L^2_μ, то

$$d\mu_\psi(F)\equiv d\mu(F+F_\psi)=|a_\psi(F)|^2\,d\mu(F). \tag{29}$$

Таким образом, при сдвиге на вектор F_ψ, соответствующий элементу ψ из Φ, мера μ переходит в меру μ_ψ, задаваемую формулой

$$\mu_\psi(X) = \int\limits_X |a_\psi(F)|^2 \, d\mu(F).$$

Очевидно, что $\mu_\psi(X) = 0$, если $\mu(X) = 0$. Но это и означает, что мера μ квазиинвариантна.

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 6. *Пусть $U(g)$ — унитарное представление группы G_0 в пространстве H, индуцирующее циклическое унитарное представление подгруппы Φ_1, состоящей из элементов вида $(\varphi, 0; 1)$ и представление $W(\alpha) = \alpha$ подгруппы, состоящей из элементов вида $(0, 0; \alpha)$. Тогда в пространстве Φ' существует такая квазиинвариантная нормированная мера μ, что*

$$(U(\varphi)h, h) = \int e^{i(F, \varphi)} \, d\mu(F),$$

где φ — элемент подгруппы Φ_1, а h — циклический вектор представления. Гильбертово пространство H можно реализовать в виде пространства L^2_μ функций на Φ', имеющих интегрируемый квадрат модуля относительно меры μ, таким образом, чтобы операторы $U(\varphi)$ стали операторами умножения на $e^{i(F, \varphi)}$, а операторы $V(\psi)$ — операторами вида

$$V(\psi) f(F) = a_\psi(F) f(F + F_\psi),$$

где $a_\psi(F)$ — функция на Φ', удовлетворяющая функциональному уравнению

$$a_{\psi_1 + \psi_2}(F) = a_{\psi_1}(F) \, a_{\psi_2}(F),$$

а F_ψ — элемент пространства Φ', такой, что $(F_\psi, \varphi) = (\varphi, \psi)$.

Мера μ преобразуется при сдвиге на вектор F_ψ в Φ' по формуле

$$\mu_\psi(X) = \int\limits_X |a_\psi(F)|^2 \, d\mu(F).$$

ПРИМЕЧАНИЯ И ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

К главе I

§ 1. Теорема 1 принадлежит И. М. Гельфанду [41]. Он доказал также теорему 2, публикуемую здесь впервые. Теорема о ядре для пространств K и S доказана Л. Шварцем [27], указавшим на важность этой теоремы для анализа; относительно других доказательств см. А. Гротендик [7], Л. Эренпрейс [4].

§ 2. Общий вид норм в пространстве матриц рассматривал Дж. фон Нейман [16]. Следовая норма операторов в банаховых пространствах изучалась Р. Шэттеном [21], [22], а также Шэттеном и фон Нейманом [23], [24]. См. также работу А. Растона [20]. Определение ядерного отображения дано Л. Шварцем [28] и А. Гротендиком [7]. Теорема 6 о следе принадлежит В. Б. Лидскому [62].

§ 3. Общее определение ядерных пространств дано Гротендиком [7]. Определение ядерности, совпадающее с определением Гротендика в случае счетно-нормированных пространств, дано в связи с теорией собственных элементов самосопряженных операторов И. М. Гельфандом и А. Г. Костюченко [42]. Большинство результатов этого параграфа принадлежит Гротендику. Теорема 1 доказана Д. А. Райковым [69]. А. С. Дынин [46], воспользовавшись одним результатом Гротендика, доказал теорему 2. Приводимое в тексте доказательство, не опирающееся на результаты Гротендика, принадлежит Н. Я. Виленкину. Ядерность пространств S_α^β доказана Б. С. Митягиным [64]. Результаты п. 7 принадлежат Б. С. Митягину [65]. Оценки, близкие к использованным в этом пункте, получены В. И. Арнольдом (см. [53] § 6). Примыкающий к результатам Б. С. Митягина материал п. 8 принадлежит Н. Я. Виленкину. Основные идеи, связанные с изучением бесконечномерных пространств путем оценки наименьшего числа элементов в ε-сетях компактов, даны А. Н. Колмогоровым [51], [52]. В статье А. Н. Колмогорова и В. М. Тихомирова [53] вычислены эти оценки для многих конкретных пространств. Некоторые важные результаты о ядерных пространствах принадлежат Ч. Бессага и А. Пилчинскому. Они доказали, в частности, что любое ядерное пространство может быть вложено в пространство всех бесконечно дифференцируемых функций [36].

§ 4. Понятие оснащенного гильбертова пространства по существу введено И. М. Гельфандом и А. Г. Костюченко в работе [42] в связи со спектральной теорией самосопряженных операторов. Ими

Таким образом, при сдвиге на вектор F_ψ, соответствующий элементу ψ из Φ, мера μ переходит в меру μ_ψ, задаваемую формулой

$$\mu_\psi(X) = \int_X |a_\psi(F)|^2 \, d\mu(F).$$

Очевидно, что $\mu_\psi(X) = 0$, если $\mu(X) = 0$. Но это и означает, что мера μ квазиинвариантна.

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 6. *Пусть $U(g)$ — унитарное представление группы G_0 в пространстве H, индуцирующее циклическое унитарное представление подгруппы Φ_1, состоящей из элементов вида $(\varphi, 0; 1)$ и представление $W(\alpha) = \alpha$ подгруппы, состоящей из элементов вида $(0, 0; \alpha)$. Тогда в пространстве Φ' существует такая квазиинвариантная нормированная мера μ, что*

$$(U(\varphi) h, h) = \int e^{i(F, \varphi)} \, d\mu(F),$$

где φ — элемент подгруппы Φ_1, а h — циклический вектор представления. Гильбертово пространство H можно реализовать в виде пространства L^2_μ функций на Φ', имеющих интегрируемый квадрат модуля относительно меры μ, таким образом, чтобы операторы $U(\varphi)$ стали операторами умножения на $e^{i(F, \varphi)}$, а операторы $V(\psi)$ — операторами вида

$$V(\psi) f(F) = a_\psi(F) f(F + F_\psi),$$

где $a_\psi(F)$ — функция на Φ', удовлетворяющая функциональному уравнению

$$a_{\psi_1 + \psi_2}(F) = a_{\psi_1}(F) \, a_{\psi_2}(F),$$

а F_ψ — элемент пространства Φ', такой, что $(F_\psi, \varphi) = (\varphi, \psi)$.

Мера μ преобразуется при сдвиге на вектор F_ψ в Φ' по формуле

$$\mu_\psi(X) = \int_X |a_\psi(F)|^2 \, d\mu(F).$$

ПРИМЕЧАНИЯ И ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

К главе I

§ 1. Теорема 1 принадлежит И. М. Гельфанду [41]. Он доказал также теорему 2, публикуемую здесь впервые. Теорема о ядре для пространств K и S доказана Л. Шварцем [27], указавшим на важность этой теоремы для анализа; относительно других доказательств см. А. Гротендик [7], Л. Эренпрейс [4].

§ 2. Общий вид норм в пространстве матриц рассматривал Дж. фон Нейман [16]. Следовая норма операторов в банаховых пространствах изучалась Р. Шэттеном [21], [22], а также Шэттеном и фон Нейманом [23], [24]. См. также работу А. Растона [20]. Определение ядерного отображения дано Л. Шварцем [28] и А. Гротендиком [7]. Теорема 6 о следе принадлежит В. Б. Лидскому [62].

§ 3. Общее определение ядерных пространств дано Гротендиком [7]. Определение ядерности, совпадающее с определением Гротендика в случае счетно-нормированных пространств, дано в связи с теорией собственных элементов самосопряженных операторов И. М. Гельфандом и А. Г. Костюченко [42]. Большинство результатов этого параграфа принадлежит Гротендику. Теорема 1 доказана Д. А. Райковым [69]. А. С. Дынин [46], воспользовавшись одним результатом Гротендика, доказал теорему 2. Приводимое в тексте доказательство, не опирающееся на результаты Гротендика, принадлежит Н. Я. Виленкину. Ядерность пространств S_α^β доказана Б. С. Митягиным [64]. Результаты п. 7 принадлежат Б. С. Митягину [65]. Оценки, близкие к использованным в этом пункте, получены В. И. Арнольдом (см. [53] § 6). Примыкающий к результатам Б. С. Митягина материал п. 8 принадлежит Н. Я. Виленкину. Основные идеи, связанные с изучением бесконечномерных пространств путем оценки наименьшего числа элементов в ε-сетях компактов, даны А. Н. Колмогоровым [51], [52]. В статье А. Н. Колмогорова и В. М. Тихомирова [53] вычислены эти оценки для многих конкретных пространств. Некоторые важные результаты о ядерных пространствах принадлежат Ч. Бессага и А. Пилчинскому. Они доказали, в частности, что любое ядерное пространство может быть вложено в пространство всех бесконечно дифференцируемых функций [36].

§ 4. Понятие оснащенного гильбертова пространства по существу введено И. М. Гельфандом и А. Г. Костюченко в работе [42] в связи со спектральной теорией самосопряженных операторов. Ими доказана теорема о существовании полной системы обобщенных собственных векторов у самосопряженного оператора. Ю. М. Березанский ([31], [32], [33], [34], [35]) несколько упростил доказательство этой теоремы и указал ее дальнейшие приложения к теории уравнений в частных производных и теории положительно определенных функций. См. также работы Г. И. Каца [48], [49], Л. Гординга [5], К. Морена [12], [13], [14]. Дальнейшие библиографические указания читатель найдет в вып. 3. При написании п. 3 и 4 использована остроумная идея доказательства теоремы И. М. Гельфанда и А. Г. Костюченко, принадлежащая Морену и Гордингу [14]. Непрерывные прямые суммы гильбертовых пространств впервые изучал Дж. фон Нейман [17].

К главе II

§ 2. Теорема об общем виде линейного функционала в пространстве непрерывных функций принадлежит Ф. Риссу [18]. Теорема об общем виде положительных обобщенных функций в пространстве K указана Л. Шварцем [26].

§ 3. Основная теорема теории непрерывных положительно определенных функций (теорема 2) доказана С. Бохнером [3]. Положительно определенные обобщенные функции введены Л. Шварцем, доказавшим в [26] теорему 3. Здесь дается новый вариант доказательства этой теоремы, полученный в результате упрощения и систематизации доказательства Шварца.

§ 4. Условно положительно определенные функции одного переменного рассматривались в связи с безгранично делимыми законами распределения и теорией случайных процессов со стационарными приращениями (см. Б. В. Гнеденко [45], А. М. Яглом и М. С. Пинскер [77]). Ряд интересных результатов, относящихся к этому кругу вопросов, приведен в заметке М. Г. Крейна [58]. Условно положительно определенные функции первого порядка многих переменных рассмотрены А. М. Ягломом [76]. Общая теорема доказана Н. Я. Виленкиным (см. теорему 2). Результат публикуется впервые.

§ 5. Непрерывные четно-положительно определенные функции одного переменного были изучены М. Г. Крейном [57]. Условия единственности в теореме Крейна получены Б. М. Левитаном и Н. Н. Мейманом [60], [61]. См. также работы Е. Б. Вул [38] и Ю. М. Березанского [33], [34].

Для обобщенных функций четно-положительная определенность изучалась в работах И. М. Гельфанда и Ся-до-шина [44] для случая одного переменного и Н. Я. Виленкиным [37] для случая многих переменных. Значительное обобщение этих результатов дано А. Г. Костюченко и Б. С. Митягиным [54].

§ 6. Теорема о распространении положительных функционалов в частично упорядоченных линейных пространствах принадлежит М. Г. Крейну [55], развившему идею М. Рисса [19]. Описание четно-положительно определенных обобщенных функций одного переменного дано Ся-до-шином в [44]. Ему же принадлежит пример неединственности меры.

§ 7. Теорема о положительно определенных функционалах в коммутативных нормированных кольцах доказана И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком [43]. Положительно определенные линейные функционалы в кольце многочленов от двух переменных рассмотрены Р. Б. Зархиной [47]. Пример положительного многочлена, не являющегося суммой квадратов многочленов, см. Д. Гильберт [8].

Теорема о разложении целой функции экспоненциального типа, положительной на вещественной оси, доказана М. Г. Крейном [56], см. также Б. Я. Левин [59].

К главе III

Понятие обобщенного случайного процесса, равно как и основные результаты этой главы (в частности, теория процессов с независимыми в каждой точке значениями) принадлежат И. М. Гельфанду [39]. Корреляционная теория обобщенных случайных процессов построена К. Ито [9]. См. также интересную книгу С. Бохнера [2]. Другое определение обобщенного случайного процесса принадлежит А. Урбанику [73]. См. также Л. Шварц [29]. Характеристические функционалы введены А. Н. Колмогоровым [11], изучались С. Бохнером [1].

Распределение вероятностей в нормированных пространствах рассматривали А. Н. Колмогоров [11], Ю. В. Прохоров [68], Е. Мурье [15].

Относительно рассмотренных в § 4 безгранично делимых случайных величин см. А. Я. Хинчин [75]. Теорема 4 доказана Шенбергом в [25] в связи с вопросом о погружении метрических пространств в гильбертово пространство.

Теория обобщенных случайных полей, изложенная в § 5, построена А. М. Ягломом [76]. Результаты о полях с однородными приращениями n-го порядка принадлежат Н. Я. Виленкину. См. также Ито [10].

К главе IV

§ 1. Определение меры через меру цилиндрических множеств введено А. Н. Колмогоровым [50].

§ 2. Основной результат этого параграфа, теорема 3, получен Р. А. Минлосом [63], доказавшим справедливость ранее сделанного предположения И. М. Гельфанда [40]. Близкими вопросами занимались Ю. В. Прохоров [68] и В. Сазонов [71], изучавшие распределения вероятностей в линейных нормированных пространствах. Как показал А. Н. Колмогоров, из некоторых оценок, полученных Ю. В. Прохоровым, вытекают занимающие центральное место в доказательстве Р. А. Минлоса леммы 4 и 4′. Изложенное в тексте доказательство является упрощением доказательства, данного Р. А. Минлосом. Теоремы 2 и 2′ принадлежат В. Д. Ерохину (не опубликованы). Теоремы 5 и 6 доказаны Н. Я. Виленкиным. Теорема 7 принадлежит В. Сазонову [71].

§ 3. Вопрос об условиях счетной аддитивности гауссовских мер цилиндрических множеств рассмотрен В. А. Голубевой (не опубликовано) до общей теоремы Р. А. Минлоса. Необходимость условия ядерности пространства для счетной аддитивности любой меры цилиндрических множеств в сопряженном пространстве доказана Р. А. Минлосом [63].

§ 4. Результаты этого параграфа непосредственно вытекают из результатов § 2. Обобщениями теоремы Бохнера на банаховы пространства занимались Ю. В. Прохоров [68] и В. Сазонов [71].

§ 5. Исследование коммутационных соотношений в квантовой теории поля проведено Гордингом и Уайтменом [6]. В другой форме аналогичные результаты получены Сигалом [30]. В форме, изложенной в тексте, эти результаты принадлежат И. М. Гельфанду и публикуются впервые.

Впервые ряд нетривиальных представлений коммутационных соотношений получен Фридрихом [78], Ва Ховом [80] и Хаагом [79]. Интересная форма представления коммутационных соотношений имеется в обстоятельной принстонской диссертации Дж. Лью [81].

Некоторые результаты о квазиинвариантных мерах см. в работах В. Н. Судакова [72] и Б. С. Митягина [66].

БИБЛИОГРАФИЯ

[1] Bochner S., Stochastic processes, Ann. of Math., 48 (1947), 1014—1061.

[2] Bochner S., Harmonic analysis and the theory of probability, 1955.

[3] Bochner S., Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig, 1932.

[4] Ehrenpreis L., On the theory of kernels of Schwartz., Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956), 713—718. Русский перевод в журнале «Математика» 3, № 3 (1959), 81—85.

[5] Gårding L., Eigenfunction expansions, Seminar in Appl. Math., Boulder, Colorado, June 29 — July 19, 1957, 1—30.

[6] Gårding L. и Wightman, Representations of the commutation relations., Proc. Nat. Acad. Sci. 40, № 7 (1954), 622—626.

[7] Grothendieck A., Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Memoirs of the American mathematical Society, № 16 (1955).

[8] Hilbert D., Über die Darstellung definiter Formen als Summen von Formenquadraten, Math. Ann. 32 (1888), 342—350.

[9] Itô K., Stationary random distributions, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto 28 (1954), 209.

[10] Itô K., Isotropic random current, Proc. 3-d Berkeley Simposium on Math. Stat. and Probab., Berkeley and Los Angeles (1956), т. II, 125—132.

[11] Kolmogoroff A., La transformation de Laplace dans les espaces linéaires. C. R. Acad. Sci. 200 (1935), 1717.

[12] Maurin K., Entwicklung positiv definiter Kerne nach Eigendistributionen. Differenzierbarkeit der Spektralfunktion eines hypermaximalen Operators, Bull. Acad. Polonaise Sci., Ser. Math., astr. et phys. 6, № 3 (1958), 149—155.

[13] Maurin K., Spektraldarstellung der Kerne. Eine Verallgemeinerung der Sätze von Källén — Lehman und Herglotz — Bochner., Bull. Acad. Polonaise Sci., Ser. Math., astr. et phys. 7, № 8 (1959), 461—470.

[14] Maurin K., Allgemeine Eigenfunktionentwicklungen. Spektraldarstellung abstrakter Kerne. Eine Verallgemeinerung der Distributionen auf Lie'schen Gruppen., Bull. Acad. Polonaise Sci. 7, № 8 (1959), 471—479.

[15] Mourier E., Les éléments aléatoires dans un espace de Banach, Ann. Inst. Henri Poincaré 13 (1953), 161.

[16] Neumann J. von, Some Matrix Inequalities and Metrization of Matrix-Space., Известия НИИ мат. и мех. при Томском университете им. В. В. Куйбышева 1, № 3 (1937), 286—300.

[17] Neumann J. von, On rings of operators, IV, Reduction theory, Ann. of Math. 50, № 2 (1949), 401—485.

[18] Riesz F., Sur les opérations fonctionelles linéaires, C. R. de l'Acad. des Sc. Paris 149 (1909), 974—977.

[19] Riesz M., Sur le problème des moments I, II, III, Arkiv för mathematik, astron. och fys.: 16—17, (1922—1923).

[20] Ruston A. F., On the Fredholm theory of integral equations for operators belonging to the trace class of a general Banach space, Proc. of the London Math. Soc. 53 (сер. 2), № 2 (1951) 109—124.

[21] Schatten R., On the Direct Product of Banach Spaces., Trans. Amer. Math. Soc. 53, 1 (1943), 195—217.

[22] Schatten R., The Cross-Space of Linear Transformations, Ann. of Math. 47, № 1 (1946), 73—84.

[23] Schatten R. и Neumann J. von, The Cross-Space of Linear Transformations II, Ann. of math. 47, № 3 (1946), 608—630.

[24] Schatten R. и Neumann J. von, The Cross-Space of Linear Transformations III, Ann. of math. 49, № 3 (1948), 557—582.

[25] Schoenberg I. J., Metric spaces and positive definite functions, Trans. Amer. Soc. 44, (1938), 522—536.

[26] Schwartz L., Théorie des distributions, т. 1 и 2, Paris, 1950.

[27] Schwartz L., Théorie des noyaux, Proceedings of the international congress of mathematicians 1 (1952), 220—230. Русский перевод в журнале «Математика» 3, № 3 (1959), 69—79.

[28] Schwartz L., Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Séminaire Institut H. Poincaré, 1953—1954.

[29] Schwartz L., La fonction aléatoire du mouvement brownien, Séminaire Bourbaki (февраль 1958) 161—01—161—23.

[30] Segal, Distributions in Hilbert space and canonical systems of operators, Trans. Amer. Math. Soc. 88, № 1, 12—42.

[31] Березанский Ю. М., О разложении по собственным функциям общих самосопряженных дифференциальных операторов, ДАН СССР 108, № 3 (1956), 379—382.

[32] Березанский Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Матем. сб. 43, № 1 (1957), 75—126.

[33] Березанский Ю. М., Обобщение теоремы Бохнера на разложения по собственным функциям уравнений в частных производных, ДАН СССР **110**, № 6 (1956), 893—896.

[34] Березанский Ю. М., Представление положительно определенных ядер через собственные функции дифференциальных уравнений, Матем. сб. **47**, № 2 (1959), 145—176.

[35] Березанский Ю. М., О разложении по собственным функциям самосопряженных операторов, Укр. матем. журнал **11**, № 1 (1959), 16—24.

[36] Бессага Ч. и Пилчинский А., О вложении ядерных пространств в пространство всех бесконечно дифференцируемых функций, печатается в ДАН СССР.

[37] Виленкин Н. Я., К теории положительно определенных обобщенных ядер, УМН, т. XV, вып. 3 (93), 139—146.

[38] Вул Е. Б., О единственности представления положительных обобщенных функций. Печатается.

[39] Гельфанд И. М., Обобщенные случайные процессы, ДАН СССР **100**, № 5 (1955), 853—856.

[40] Гельфанд И. М., О некоторых проблемах функционального анализа, УМН, т. XI, вып. 6 (72) (1956), 3—12.

[41] Гельфанд И. М. Sur un lemme de la théorie des espaces linéaires, Зап. Наук. досл. інст. матем. и мех. Хрк. матем. тов. (4) 13 (1937), 35—48.

[42] Гельфанд И. М. и Костюченко А. Г., О разложении по собственным функциям дифференциальных и других операторов, ДАН СССР **103**, № 3 (1955), 349—352.

[43] Гельфанд И. М. и Наймарк М. А., Нормированные кольца с инволюцией и их представления, Известия АН СССР **12**, № 5 (1948), 445—480. См. также приложение к книге И. М. Гельфанда, Д. А. Райкова и Г. Е. Шилова «Коммутативные нормированные кольца», М., 1960.

[44] Гельфанд И. М. и Ся-до-шин, О положительно определенных обобщенных функциях, УМН, т. XV, вып. 1 (91).

[45] Гнеденко Б. В., Об одном характеристическом свойстве безгранично делимых законов распределения, Бюлл. МГУ, сер. А, 1937.

[46] Дынин А. С., О пространствах, ядерных в различных смыслах, ДАН СССР **121**, № 5 (1958), 790—792.

[47] Зархина Р. Б., О двумерной проблеме моментов, ДАН СССР **124**, № 4 (1959), 743—746.

[48] Кац Г. И., О разложении по собственным функциям самосопряженных операторов, ДАН СССР **119**, № 11 (1958), 19—22.

[49] Кац Г. И., Обобщенные элементы гильбертовых пространств и спектральное разложение самосопряженных операторов, Труды сем. по функц. анализу при Воронежском ун-те (1958).

[50] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, М. — Л., 1936.

[51] Колмогоров А. Н., Асимптотические характеристики некоторых вполне ограниченных метрических пространств, ДАН СССР **108**, № 3 (1956), 585—589.

[52] Колмогоров А. Н., О линейной размерности топологических векторных пространств, ДАН СССР **120**, № 2 (1958), 239—241.

[53] Колмогоров А. Н. и Тихомиров В. М., ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах, УМН, XIV, № 2 (86) (1959), 3—86.

[54] Костюченко А. Г. и Митягин Б. С., Положительно определенные функционалы на ядерных пространствах, Труды Моск. матем. об-ва, т. 9.

[55] Крейн М. Г., Общие теоремы о позитивных функционалах. В книге Н. Ахиезера и М. Г. Крейна «О некоторых вопросах теории моментов», Харьков, 1938.

[56] Крейн М. Г., О представлении функций интегралами Фурье — Стильтьеса, Уч. зап. Куйбышевского пед. ин-та, **7** (1943).

[57] Крейн М. Г., Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные произведения, ДАН СССР **53**, № 1 (1946), 3—6.

[58] Крейн М. Г., Об интегральном представлении эрмитово-индефинитной функции с конечным числом отрицательных квадратов, ДАН СССР, 125 : 1 (1959), 31—34.

[59] Левин Б. Я., Распределение корней целых функций, М.—Л., 1956.

[60] Левитан Б. М., Об одной теореме единственности, ДАН СССР **76**, № 4 (1951), 485—488.

[61] Левитан Б. М. и Мейман Н. Н., О теореме единственности, ДАН СССР **81**, № 5 (1951), 729—731.

[62] Лидский В. Б., Несамосопряженные операторы, имеющие след, ДАН СССР **125**, № 3 (1959), 485—487.

[63] Минлос Р. А., Обобщенные случайные процессы и их продолжение до меры, Труды Моск. матем. об-ва **8** (1959), 497—518.

[64] Митягин Б. С., Ядерность и другие свойства пространств типа S, Труды Моск. матем. об-ва, 9 (1960).

[65] Митягин Б. С., Связь между ядерностью, скоростью аппроксимации и ε-энтропией компакта в банаховом пространстве, ДАН СССР **133** (1960).

[66] Митягин Б. С., Замечание о квазиинвариантной мере, печатается в УМН.

[67] Повзнер А. Я., Об уравнениях типа Штурма — Лиувилля и позитивных функциях, ДАН СССР **43** (1944), 387—391.

[68] Прохоров Ю. В., Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, Теория вероятностей и ее применения 1, № 2 (1956), 177—237.

[69] Райков Д. А., Об одном свойстве ядерных пространств, УМН, т. XII, № 5 (77), (1957), 231—236.

[70] Розанов Ю. А., К экстраполяции обобщенных случайных стационарных процессов, Теория вероятностей и ее применения 4, № 4 (1959), 465—471.

[71] Сазонов В., Замечание о характеристических функционалах, Теория вероятностей и ее применения **3**, № 2 (1958), 201—205.

[72] Судаков В. Н., Линейные множества с квазиинвариантной мерой, ДАН СССР, 127, № 3 (1959), 524—525.

[73] Урбаник К., Случайные процессы, реализации которых являются обобщенными функциями, Теория вероятностей и ее применения 1, № 1 (1956), 146—149.

[74] Хачатуров А. А., Определение значения меры для области n-мерного евклидова пространства по ее значениям для всех полупространств, УМН 9, № 3 (61) (1954), 205—212.

[75] Хинчин А. Я., Zur Theorie der unbeschränktteilbaren Verteilungsgesetzen, Матем. сб. 2, 44 (1937), 79—120.

[76] Яглом А. М., Некоторые классы случайных полей в n-мерном пространстве, родственные стационарным случайным процессам, Теория вероятностей и ее применения 2, № 3 (1957), 292—338.

[77] Яглом А. М. и Пинскер М. С., Случайные процессы со стационарными приращениями n-го порядка, ДАН СССР, 90, № 5 (1953), 731—734.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ БИБЛИОГРАФИЯ

[78] Friedrichs K., Mathematical aspects of the quantum theory of fields, New York, Interscience Publishers (1953).

[79] Haag R., Dan. Mat. Fys. Medd., 29, № 12 (1955).

[80] Van Hove L., Physica, 18, 195 (1952).

[81] Lew John S., The structure of representations of the canonical commutation relations, Принстон, диссертация, март 1960.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ