А. О. ГЕЛЬФОНД

ИСЧИСЛЕНИЕ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено
Министерством высшего образования СССР
в качестве учебного пособия
для физико-математических
и физико-технических факультетов
государственных университетов

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1959

11-5-2

Александр Осипович Гельфонд.

Исчисление конечных разностей.

Редактор *Л. А. Соловьева.*

Техн. редактор *В. Н. Крючкова.* Корректор *З. В. Моисеева.*

Сдано в набор 21/IX 1959 г. Подписано к печати 14/XI 1959 г. Бумага 60×92/16.
Физ. печ. л. 25,0. Условн. печ. л. 25,0. Уч.-изд. л. 26,06. Тираж 8000 экз.
Т-11048. Цена книги 9 р. 30 к. Заказ 2258.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

2-я типография Издательства Академии наук СССР. Москва, Шубинский пер., 10

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Теория конечных разностей имеет большое значение как для приближенных вычислений, в том числе для численного интегрирования и приближенного решения дифференциальных уравнений, так и для конструктивной теории функций действительного и комплексного переменного, теории вероятностей и теории чисел. По своей современной проблематике теория конечных разностей ближе всего к конструктивной теории функций, с которой она в значительной степени и сливается. Исторически основные линии развития теории конечных разностей в действительной области были определены работами Л. Эйлера, П. Л. Чебышева, А. А. Маркова, а в наше время — работами С. Н. Бернштейна и его школы. За последние 20 лет получили у нас большое развитие и исследования в области комплексного переменного.

Предлагаемая читателям книга написана на основе книги «Конечные разности», часть 1, 1936 г., переработанной и дополненной рядом глав, в которых излагаются главным образом некоторые вопросы, относящиеся к проблематике конечных разностей для комплексного переменного с приложениями как в самой теории функций, так и в теории чисел. Если по конструктивной теории функций в действительной области существует большая отечественная литература, с которой можно познакомиться достаточно хорошо, например по книге И. П. Натансона «Конструктивная теория функций», то работы в области комплексного переменного рассеяны по различным статьям и книгам и представлены в нашей литературе значительно меньше. Для предлагаемой книги были использованы следующие учебники по конечным разностям: А. Марков «Исчисление конечных разностей», Д. Селиванов «Курс исчисления конечных разностей» и Н. Нёрлунд «Исчисление конечных разностей» (нем.), из которых был взят ряд задач и примеров. Новые главы книги излагают главным образом уже современную журнальную литературу. Для университетского курса конечных разностей можно взять главу I, кроме, может быть, § 5 и некоторых пунктов § 6, отдельные части, по выбору, главы II, главу IV и главу V без последнего параграфа. Остальные части книги могут служить

при случае для выбора тематики как дипломных работ, так и работ диссертационного порядка.

В заключение мы хотим отметить, так как в тексте это не оговаривается, что результаты в § 5, 6 (пункт 4) и § 7 главы I, теоремы IV, V и VI, VIII и доказательство IX § 3 главы II, все теоремы главы III, кроме теоремы I, и все теоремы § 7 главы V принадлежат автору этой книги.

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

После выхода первого издания появился ряд работ, продолжающих и развивающих вопросы, затронутые в настоящей книге. Часть из этих работ указана в дополнительной литературе к главе III. Во второе издание внесен ряд исправлений и некоторые дополнения, например § 7 главы I, в котором обобщается идея рассмотрения интерполяционных проблем как проблемы моментов для аналитических функций.

Можно отметить также, что за последние годы настоящая книга была переведена и издана в ГДР, Китае, Чехословакии, Румынии и других странах.

А. Гельфонд

ВВЕДЕНИЕ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

1. Задача интерполяции. Для того чтобы нагляднее представить себе одну из основных задач теории конечных разностей, мы рассмотрим следующий пример.

Предположим, что мы, не зная аналитического выражения зависимости $y = f(x)$, имеем возможность определить значения функции $f(x)$ при некоторых частных значениях независимого переменного x, находящегося в интервале (a, b). Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — те точки, в которых мы знаем значения функции $y_0 = f(x_0), \ldots, y_n = f(x_n)$. Говоря геометрическим языком, мы имеем дискретный ряд точек $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$, лежащих на кривой $y = f(x)$.

Задача состоит в том, чтобы найти аналитическое выражение $y = F(x)$, представляющее функцию $y = f(x)$ точно или приближенно и удовлетворяющее условиям

$$F(x_0) = y_0,\ F(x_1) = y_1, \ldots,\ F(x_n) = y_n.$$

Однозначного решения такая задача, конечно, не имеет, так как через $n+1$ точек $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ можно провести бесконечное множество кривых, даже если предположить, что эти кривые ведут себя достаточно хорошо в аналитическом смысле.

Но часто бывает необходимо провести через заданные точки какую-нибудь кривую, причем кривую достаточно гладкую, без большого количества максимумов и минимумов. В этом случае большую роль играет также достаточная простота аналитического выражения. Например, бывает желательно получить аналитическое выражение в виде многочлена или комбинации из многочленов и показательных функций.

Задача построения аналитического выражения и есть одна из основных задач теории конечных разностей — задача интерполирования. Ее можно сформулировать так: *построить приближенное аналитическое выражение функциональной зависимости, если о ней известно только соотношение между значением независимого переменного и значением функции в дискретном ряде точек.*

В некоторых случаях, когда много известно о характере искомой функциональной зависимости, нам удается построить аналитическое выражение для самой $f(x)$.

Например, пусть мы знаем, что $f(x)$ — многочлен степени не выше n, т. е.

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Тогда если нам известны значения $f(x)$ в $n+1$ различных точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$, то всегда и притом единственным образом можно определить его коэффициенты, потому что определителем линейной (относительно коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$) системы уравнений

$$\begin{aligned} a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \ldots + a_n &= y_0, \\ a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1} + \ldots + a_n &= y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0x_n^n + a_1x_n^{n-1} + \ldots + a_n &= y_n \end{aligned}$$

является определитель Вандермонда

$$D = \begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \ldots & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \ldots & 1 \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \ldots & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j),$$

отличный от нуля при отличных друг от друга x_i. Выражения для a_k будут

$$a_k = \frac{\begin{vmatrix} x_0^n \ldots x_0^{k+1} & y_0 & x_0^{k-1} \ldots 1 \\ x_1^n \ldots x_1^{k+1} & y_1 & x_1^{k-1} \ldots 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ x_n^n \ldots x_n^{k+1} & y_n & x_n^{k-1} \ldots 1 \end{vmatrix}}{D}.$$

Построение точного аналитического выражения для $f(x)$ оказалось в нашем примере возможным, так как мы потребовали от $f(x)$ очень многого, ведь класс многочленов степени не выше n — очень узкий класс функций. При решении задачи интерполяции обычно делают предположения о $f(x)$ более общего характера.

Такими предположениями являются обычно аналитичность $f(x)$ или существование у $f(x)$ производных достаточно высокого порядка.

При таких ограничениях на искомую функцию решением задачи интерполяции обычно является приближенное аналитическое

выражение искомой функции. В этом случае возникает очень важный вопрос о характере приближения и о степени его точности.

2. Суммирование функций и уравнения в конечных разностях. Обратимся к другим задачам теории конечных разностей. Очень важной задачей является задача суммирования функций, заключающаяся в следующем: *функция $f(x)$ задана для целых значений переменного x некоторым аналитическим выражением, найти в конечном виде точно или приближенно сумму*

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(n).$$

Многие частные случаи этой задачи хорошо известны в анализе. Действительно, формулы

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$1+a+a^2+\ldots+a^n=\frac{a^{n+1}-1}{a-1},$$

$$\ln n!=\ln 1+\ln 2+\ldots+\ln n\approx\ln\sqrt{2\pi n}+n(\ln n-1)$$

есть не что иное, как решение задачи суммирования для функций

$$f(x)=x,\quad f(x)=x^2,\quad f(x)=a^x,\quad f(x)=\ln x.$$

Задача суммирования тесно связана с другой задачей — задачей решения уравнений в конечных разностях.

Прежде чем говорить о решении уравнений в конечных разностях, нам, конечно, необходимо ввести понятие конечной разности.

Пусть функция $y=f(x)$ определена для всех значений x вида $x_n=a+nh$ (a, h — некоторые фиксированные числа, n — любое целое число). Мы можем образовать некоторый аналог производной $f(x)$:

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=\frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{x_{n+1}-x_n}=\frac{f(a+(n+1)h)-f(a+nh)}{h}.$$

Это выражение равно тангенсу угла наклона прямой, соединяющей точки (x_n, y_n) и (x_{n+1}, y_{n+1}).

Выражение $f(a+h(n+1))-f(a+nh)$ мы будем обозначать $\Delta_h f(x_n)$ и называть *конечной разностью первого порядка* функции $f(x)$ в точке x_n. Конечные разности первого порядка могут служить для образования конечных разностей второго порядка и т. д.:

$$\Delta_h f(x)=f(x+h)-f(x),$$

$$\Delta_h^{(2)} f(x)=\Delta_h f(x+h)-\Delta_h f(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta_h^{(k)} f(x)=\Delta_h^{(k-1)} f(x+h)-\Delta_h^{(k-1)} f(x).$$

Задачу решения уравнения в конечных разностях можно поставить следующим образом:

Дано соотношение

$$F[x,\ f(x),\ \Delta_h f(x),\ \Delta_h^{(2)} f(x), \ldots, \Delta^{(k)} f(x)] = 0,$$

найти функцию $f(x)$, обращающую это уравнение в тождество.

Простейшим примером уравнения в конечных разностях может служить уравнение

$$\Delta f(x) = \varphi(x) \quad [\Delta f(x) = \Delta_1 f(x) = f(x+1) - f(x)],$$

где x может принимать значение $0, 1, 2, \ldots$

Формально решением этого уравнения служит функция $f(x) = \varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(x-1)$, т. е. мы видим, что решение этого уравнения эквивалентно решению задачи о суммировании функции $\varphi(x)$.

3. Постановка задач теории конечных разностей для аналитических функций комплексного переменного. Теория конечных разностей, являющаяся частью классического анализа, играет большую роль в развитии приближенных методов в анализе — в приближенном интегрировании, в приближенном решении дифференциальных уравнений и других вопросах. Она тесно связана также с общей теорией приближения функций, которая в настоящее время получила название конструктивной теории функций. За несколько последних десятилетий сильно развилось другое направление в теории конечных разностей. Это направление тесно связано с теорией аналитических функций и имеет приложения как в этой последней теории, так и в теории чисел. В настоящей книге помимо основных классических результатов, относящихся к проблемам теории конечных разностей и смежной с этой теорией конструктивной теории функций, содержится также приложение ряда новых методов и результатов, относящихся ко второму из вышеуказанных направлений. Это второе направление в основном ставит и решает те же задачи конечных разностей, о которых шла речь выше, для аналитических функций. Новые по сравнению с классическими задачи, здесь возникающие, связаны с аналитичностью рассматриваемых функций. Например, предполагая, что мы рассматриваем класс целых функций, рост которых ограничен определенным образом, мы можем, естественно, поставить вопрос о нахождении процесса, восстанавливающего функцию нашего класса по ее значениям в последовательности точек комплексной плоскости, имеющих только одну предельную точку в бесконечности. При этом, как мы увидим в дальнейшем, необходимо накладывать ограничения на рост целых функций нашего класса в зависимости от плотности последовательности узлов интерполяции.

В качестве другого примера новых по сравнению с классическими задач, возникающих в теории конечных разностей, если рассматривать решения конечно-разностных задач в том или ином классе аналитических функций, можно рассмотреть задачу о решении уравнения вида $f(x+1)=f(x)$. Это уравнение имеет счетное множество целых аналитических решений, линейно независимых между собой. Естественно возникает вопрос о возможности представления любого аналитического решения этого уравнения с помощью его частных решений и о процессе, с помощью которого это представление можно осуществить.

Наконец, используя интерполяционные методы в теории аналитических функций, можно подойти к решению ряда числовых задач, главным образом проблем арифметической природы значений аналитических функций при алгебраических значениях аргумента. Эти методы будут показаны на примере доказательства трансцендентности чисел e и π.

Так как в основном в книге изложена проблематика конечных разностей в комплексной области, то ряд вопросов, которые обычно связывались с теорией конечных разностей в действительной области, например проблема моментов в действительной области, теория квадратур и т. д., в книге не затронут.

ГЛАВА I

ЗАДАЧА ИНТЕРПОЛЯЦИИ

§ 1. Общая постановка проблемы интерполяции

1. Понятие разделенных разностей. Обратимся непосредственно к первой задаче — интерполяции. Даны $n+1$ значений функции $f(x)$ в заданных точках, лежащих внутри интервала (a, b). Эти точки мы будем обозначать через $x_0, x_1, \ldots, x_n$[1]), а значения функции, им соответствующие, — через

$$f(x_0), \quad f(x_1), \ldots, f(x_n). \tag{1}$$

Числа $f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$ считаем заданными, функцию $f(x)$ — искомой. Это может быть либо просто неизвестная функция, либо известная, но значения которой можно получать или из слишком сложного опыта, или из слишком сложного аналитического выражения.

Задача интерполяции заключается в том, чтобы построить функцию, вообще говоря, отличную от функции $f(x)$, но принимающую в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ значения те же самые, что и наша функция, т. е. $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$.

В такой общей постановке эта задача имеет, конечно, неединственное решение. Мы займемся сейчас гораздо более частной задачей: определить многочлен $P(x)$ степени не выше n, принимающий в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ значения $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$.

Для решения этой задачи введем ряд условных обозначений. Будем обозначать прямыми скобками с буквой x между ними: $[x]$ — значение самой функции $f(x)$ в этой точке x, тогда

$$[x_0] = f(x_0), \; [x_1] = f(x_1), \ldots, \; [x_n] = f(x_n). \tag{2}$$

Далее, символом $[x_0x_1]$ мы будем обозначать частное от деления разности $[x_0] - [x_1]$ на $x_0 - x_1$, символом $[x_0x_1x_2]$ — частное от деления разности $[x_0x_1] - [x_1x_2]$ на $x_0 - x_2$ и т. д. Введенные

---

[1]) В дальнейшем мы будем называть эти точки интерполяции также узлами интерполяции.

выражения, составленные из значений функции $f(x)$ в заданных точках и значений независимого переменного в этих точках, будем называть разделенными разностями функции $f(x)$. На интервале (a, b) для рассматриваемых $n+1$ точек x_i возможно образование следующих разделенных разностей:

$$\left.\begin{aligned}
&[x_0x_1] = \frac{[x_0]-[x_1]}{x_0-x_1}, \quad [x_1x_2] = \frac{[x_1]-[x_2]}{x_1-x_2}, \ldots \\
&\qquad\qquad \ldots, \quad [x_{n-1}x_n] = \frac{[x_{n-1}]-[x_n]}{x_{n-1}-x_n}, \\
&[x_0x_1x_2] = \frac{[x_0x_1]-[x_1x_2]}{x_0-x_2}, \quad [x_1x_2x_3] = \frac{[x_1x_2]-[x_2x_3]}{x_1-x_3}, \ldots \\
&\qquad \ldots, \quad [x_{n-2}x_{n-1}x_n] = \frac{[x_{n-2}x_{n-1}]-[x_{n-1}x_n]}{x_{n-2}-x_n}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&[x_0x_1x_2\ldots x_n] = \frac{[x_0x_1x_2\ldots x_{n-1}]-[x_1x_2\ldots x_n]}{x_0-x_n}.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Постараемся теперь из-за рекуррентных соотношений (3) найти явное выражение n-й разделенной разности через $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и значения функции $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Для этого нужно последовательно вычислять наши разделенные разности, и закон составления разделенной разности $[x_0x_1\ldots x_n]$ станет сразу ясным. Доказать же его можно будет методом индукции.

Очевидно, имеем

$$[x_0x_1] = \frac{[x_0]-[x_1]}{x_0-x_1} = \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}. \tag{4}$$

Воспользовавшись определением третьей разделенной разности [соотношения (3)] и полученным уже выражением для разделенной разности второго порядка, легко найдем

$$[x_0x_1x_2] = \frac{[x_0x_1]-[x_1x_2]}{x_0-x_2} = \frac{\dfrac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} - \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}}{x_0-x_2} =$$
$$= \frac{\{f(x_0)-f(x_1)\}(x_1-x_2)-\{f(x_1)-f(x_2)\}(x_0-x_1)}{(x_0-x_1)(x_1-x_2)(x_0-x_2)}.$$

Полученную дробь разобьем на три дроби, выписав отдельно члены, содержащие $f(x_0)$, $f(x_1)$ и $f(x_2)$; тогда получим

$$[x_0x_1x_2] = \frac{f(x_0)(x_1-x_2)}{(x_0-x_1)(x_1-x_2)(x_0-x_2)} +$$
$$+ \frac{f(x_1)(-x_1+x_2-x_0+x_1)}{(x_0-x_1)(x_1-x_2)(x_0-x_2)} + \frac{f(x_2)(x_0-x_1)}{(x_0-x_1)(x_1-x_2)(x_0-x_2)}. \tag{5}$$

что после сокращений легко приводится к следующему виду:

$$[x_0x_1x_2] = \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x}$$

Соотношение (6) позволяет предположить, что разделенная ность $(n+1)$-го порядка может быть выражена через значения зависимого переменного и значения функции $f(x)$ в этих то в следующем виде:

$$[x_0x_1\ldots x_n] = \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} + \\ + \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} + \ldots \\ \ldots + \frac{f(x_n)}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}.$$

Это, действительно, легко доказывается по индукции, но лать этого мы не будем, так как несколько ниже доказат ство будет получено более коротким путем.

2. Формула Лагранжа. Одного построения разделенных ностей достаточно для получения так называемой интерполяц ной формулы Лагранжа, позволяющей построить многочлен P принимающий значения $f(x_i)$ при $x = x_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, и по ляющей при достаточно хорошем поведении функции $f(x)$ (в литическом смысле) оценить разность $f(x) - P(x)$. Для вы этой формулы развернем $(n+2)$-ю разделенную разность $[xx_0x_1\ldots$

Воспользовавшись соотношением (7), получим

$$[xx_0x_1\ldots x_n] = \frac{f(x)}{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)} + \\ + \frac{f(x_0)}{(x_0-x)(x_0-x_1)\ldots(x_0-x_n)} + \frac{f(x_1)}{(x_1-x)(x_1-x_0)\ldots(x_1-x_n)} + \\ \ldots + \frac{f(x_n)}{(x_n-x)(x_n-x_0)\ldots(x_n-x_{n-1})}.$$

Введем в рассмотрение функцию $\psi(x)$, определяемую равенст

$$\psi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n).$$

Очевидно, $\psi(x)$ — многочлен $(n+1)$-й степени с нулями

$$x_0,\ x_1, \ldots,\ x_n.$$

Нетрудно видеть, что в правой части соотношения (8) в з менателе первой дроби стоит $\psi(x)$, а в знаменателе остальн дробей — произведение $(x_i - x)\psi'(x_i)$; в самом деле, из соот

шения (9) легко найдем

$$\frac{\psi(x)}{x-x_i}=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n).$$

Предполагая, что $x\to x_i$, мы в левой части получим производную ψ' в точке x_i, в правой же части x нужно будет заменить через x_i, и мы получим

$$\psi'(x_i)=(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n),$$

$$\psi'(x_i)(x_i-x)=(x_i-x)(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots$$
$$\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n),$$

а это и есть как раз знаменатель $(i+2)$-й дроби в формуле (8). Таким образом, соотношение (8) принимает следующий вид:

$$[xx_0x_1\ldots x_n]=\frac{f(x)}{\psi(x)}+\frac{f(x_0)}{(x_0-x)\psi'(x_0)}+$$
$$+\frac{f(x_1)}{(x_1-x)\psi'(x_1)}+\ldots+\frac{f(x_n)}{(x_n-x)\psi'(x_n)},$$

или

$$[xx_0x_1\ldots x_n]=\frac{f(x)}{\psi(x)}+\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{(x_i-x)\psi'(x_i)}. \tag{10}$$

Из написанного соотношения $f(x)$ определится в виде

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)\psi(x)}{(x-x_i)\psi'(x_i)}+\psi(x)[xx_0x_1\ldots x_n]. \tag{11}$$

Посмотрим теперь, из каких выражений составлена функция $f(x)$ в соотношении (11). Так как разность $x-x_i$ для любого i от 0 до n входит в $\psi(x)$ множителем, то сумма

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)\psi(x)}{(x-x_i)\psi'(x_i)} \tag{12}$$

представляет собой многочлен n-й степени. Выражение $\psi(x)[xx_0\ldots\ldots x_n]$ мы будем называть остаточным членом. Займемся сначала исследованием свойств многочлена $P(x)$, определяемого соотношением (12).

Докажем, что при $x=x_k$, $k=0, 1,\ldots, n$,

$$P(x_k)=f(x_k).$$

В самом деле, при подстановке x_k вместо x обратятся в нуль все слагаемые, кроме $\frac{f(x_k)\psi(x)}{(x-x_k)\psi'(x_k)}$, так как в них разность $x-x_k$ входит в числитель, но не входит в знаменатель. Значение слагаемого

$\frac{f(x_k)\psi(x)}{(x-x_k)\psi'(x_k)}$ при $x = x_k$ не определено. Поэтому надо найти, к чему стремится выражение $\frac{f(x_k)\psi(x)}{(x-x_k)\psi'(x_k)}$, когда x стремится к x_k. Очевидно, что когда $x \to x_k$, то отношение $\frac{\psi(x)}{x-x_k}$ стремится к $\psi'(x_k)$ и, следовательно, последнее выражение стремится к $f(x_k)$. Итак,

$$P(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Таким образом, многочлен $P(x)$ степени n удовлетворяет условию, что значение этого многочлена в точках x_k есть $f(x_k)$ для всякого k от 0 до n.

Теперь перед нами стоит другая задача. Нам нужно оценить, если возможно, степень погрешности, т. е. степень приближения $f(x)$ к $P(x)$ на данном интервале (a, b), где расположены значения $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Иначе говоря, надо определить величину погрешности, которую мы допустим, если заменим функцию $f(x)$ многочленом $P(x)$.

Формально многочлен, принимающий в точках $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ значения $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$, нами построен, но сказать, насколько этот многочлен приближается к функции $f(x)$ в других точках, не совпадающих с $x_0, x_1, \ldots, x_n$, нельзя. Для того чтобы узнать степень приближения, нужно сделать некоторые дополнительные предположения о поведении функции $f(x)$ в рассматриваемом интервале изменения x. Предположим, что искомая функция имеет все производные до $(n+1)$-й включительно в рассматриваемом интервале изменения независимого переменного.

Возьмем внутри этого интервала, заключающего точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$, точку x, не совпадающую ни с одной из этих точек $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

При предположении, что функция $f(x)$ имеет все производные до $(n+1)$-й включительно, мы можем оценить разность между многочленом $P(x)$ и функцией $f(x)$ на всем рассматриваемом интервале (a, b).

Найденное нами выражение этой разности, равное $\psi(x)[xx_0 \ldots x_n]$, в данном случае бесполезно, потому что в эту разность входит $f(x)$; именно, $f(x)$ входит в разделенную разность, про величину которой мы ничего не можем сказать.

Поэтому мы постараемся дать другое выражение остаточного члена. Для этого рассмотрим функцию

$$u(x) = f(x) - P(x) - k\psi(x), \quad \text{где } k = \text{const}. \tag{13}$$

Ясно, что эта функция обращается в нуль в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$, потому что в этих точках значение $f(x)$ совпадает со значением

$P(x)$, а $\psi(x)$ для указанных значений независимого переменного обращается в нуль.

Пусть k есть некоторая постоянная величина, выбранная таким образом, чтобы эта разность обращалась в нуль, кроме точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$, еще в одной точке, а именно в некоторой фиксированной точке, выбранной нами. Обозначим эту точку для отличия от независимого переменного через $\bar{x}$. Постараемся найти такое k, чтобы это условие выполнялось.

Прежде всего очевидно, что такое k всегда можно выбрать, потому что $\psi(x)$ не имеет других нулей, кроме $x_0, x_1, \ldots, x_n$, а по предположению $\bar{x}$ не совпадает ни с одной из точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Таким образом, $\psi(\bar{x}) \neq 0$, и уравнение

$$f(\bar{x}) - P(\bar{x}) - k\psi(\bar{x}) = 0 \tag{13'}$$

всегда разрешимо относительно k.

Пусть k имеет значение, определенное уравнением (13'). Рассмотрим тогда функцию $u(x)$. Эта функция в интервале (a, b) имеет $n+2$ нуля. Производная $u'(x)$ имеет в этом же интервале от a до b нулей не меньше чем $n+1$, ибо $u(x)$ обращается в нуль в точках $x_0, x_1, \ldots, \bar{x}, \ldots, x_n$, а по теореме Ролля $u'(x)$ должна обращаться в нуль по меньшей мере один раз в каждом из интервалов

$$(x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_i, \bar{x}), (\bar{x}, x_{i+1}), \ldots, (x_{n-1} \; x_n),$$

таких же интервалов будет $n+1$. Также очевидно, что $u''(x)$ имеет не меньше чем n нулей. Точно так же мы можем идти дальше и сказать, что $u^{(n)}(x)$ имеет не менее чем два нуля в интервале (a, b), и, наконец, $u^{(n+1)}(x)$ имеет в интервале (a, b) не менее одного нуля.

Допустим теперь, что этот нуль $(n+1)$-й производной функции $u(x)$ будет ξ.

Найдем $u^{(n+1)}(x)$. Воспользовавшись соотношением (13) и тем, что $(n+1)$-я производная функция $f(x)$ существует, легко получим

$$u^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - k(n+1)!$$

По доказанному существует такое число ξ, для которого $u^{(n+1)}(x)$ обращается в нуль. Это число ξ лежит, очевидно, в интервале, заключающем точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и $\bar{x}$. Подставляя это значение ξ в полученном для $u^{(n+1)}(x)$ выражении, найдем

$$f^{(n+1)}(\xi) - k(n+1)! = 0,$$

откуда

$$k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad a < \xi < b.$$

Уравнение (11) теперь может быть записано следующим образом:

$$f(\bar{x}) = P(\bar{x}) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\psi(\bar{x}), \text{ где } a < \xi = \xi(\bar{x}) < b. \qquad (14)$$

Так как $\bar{x}$ произвольно, то последнее соотношение можно записать и так:

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\psi(x), \text{ где } a < \xi = \xi(x) < b. \qquad (15)$$

Таким образом, предполагая, что функция $f(x)$ имеет $(n+1)$-ю производную, мы получили уравнение (11) в новой форме, с помощью которой мы можем оценить и погрешность, которую мы делаем при замене $f(x)$ через $P(x)$. Величина этой погрешности, очевидно, зависит от того интервала, в котором лежат $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и x. Возьмем для иллюстрации простой пример.

Пусть имеется функция $\left(\frac{3}{2}\right)^x$. (Мы берем функцию аналитическую, вычислять значения которой достаточно просто.)

Пусть у нас имеется интервал (0, 1). Внутри этого интервала заданы точки: $\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}$. Итак, нам задано $n+1$ точек. Значения функции в этих точках нам известны (предположим их вычисленными хотя бы приближенно).

Перед тем, как построить многочлен $P(x)$, мы, задавшись точностью, с которой желательно приближение $P(x)$ к $f(x)$, найдем число n точек, делящих интервал (0, 1) на равные части.

Формула (15) дает сразу возможность записать величину погрешности при замене $\left(\frac{3}{2}\right)^x$ через $P(x)$, именно

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x - P(x) = \frac{\left(\ln\frac{3}{2}\right)^{n+1}\left(\frac{3}{2}\right)^{\xi}}{(n+1)!}\, x\left(x - \frac{1}{n}\right)\ldots(x-1),$$

откуда

$$\left|\left(\frac{3}{2}\right)^x - P(x)\right| = \frac{\left(\ln\frac{3}{2}\right)^{n+1}\left(\frac{3}{2}\right)^{\xi}}{(n+1)!}\, x\left|x - \frac{1}{n}\right|\ldots|x-1|.$$

Предполагая x лежащим внутри интервала (0, 1) и замечая, что при этом каждый множитель x, $\left|x - \frac{1}{n}\right|, \ldots, |x-1|$ меньше единицы, мы получим следующее неравенство:

$$\left|\left(\frac{3}{2}\right)^x - P(x)\right| < \frac{\left(\ln\frac{3}{2}\right)^{n+1}\left(\frac{3}{2}\right)^{\xi}}{(n+1)!};$$

ξ лежит, как и x, в интервале (0, 1), кроме того, $\ln\frac{3}{2} < \frac{1}{2}$, по-

этому оценка модуля разности $\left|\left(\frac{3}{2}\right)^x - P(x)\right|$, годная для практических подсчетов, получает следующий вид:

$$\left|\left(\frac{3}{2}\right)^x - P(x)\right| < \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\frac{3}{2}}{(n+1)!} < \frac{1}{2^n(n+1)!} \text{ для } 0 < x < 1.$$

Выбирая, например, $n = 5$, во всяком случае для любого x, лежащего в интервале (0, 1), будем иметь

$$\left|\left(\frac{3}{2}\right)^x - P(x)\right| < 0{,}00005,$$

г. е. вычислив значения функции $\left(\frac{3}{2}\right)^x$ в точках $0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1$, мы могли бы для любого x вычислять значения $\left(\frac{3}{2}\right)^x$ с точностью 0,00005 с помощью многочлена $P(x)$.

Полученную формулу Лагранжа мы будем записывать так:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)\,\psi(x)}{\psi'(x_i)(x - x_i)} + R_n(x), \tag{16}$$

где

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\psi(x), \quad a < \xi < b, \quad a < x < b, \tag{16'}$$
$$\psi(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n).$$

3. **Формула Ньютона.** Совершенно аналогично может быть выведена другая интерполяционная формула — формула Ньютона. Она по существу является той же формулой, только иначе записанной, чем формула Лагранжа; в этой другой записи имеются иногда и преимущества.

Для того чтобы получить эту формулу, мы должны вернуться к разделенным разностям, именно к разности $[xx_0x_1\ldots x_n]$.

Воспользовавшись определением разделенной разности, последовательно находим из системы равенств (3)

$$[xx_0x_1\ldots x_n] = -\frac{[x_0x_1\ldots x_n]}{x - x_n} + \frac{[xx_0x_1\ldots x_{n-1}]}{x - x_n},$$

$$\frac{[xx_0x_1\ldots x_{n-1}]}{x - x_n} = -\frac{[x_0x_1\ldots x_{n-1}]}{(x - x_n)(x - x_{n-1})} + \frac{[xx_0x_1\ldots x_{n-2}]}{(x - x_n)(x - x_{n-1})},$$

. . . . . .

$$\frac{[xx_0x_1]}{(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_2)} = -\frac{[x_0x_1]}{(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_2)(x - x_1)} +$$
$$+ \frac{[xx_0]}{(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_2)(x - x_1)},$$

$$\frac{[xx_0]}{(x-x_n)(x-x_{n-1})\ldots(x-x_1)} = -\frac{[x_0]}{(x-x_n)(x-x_{n-1})\ldots(x-x_1)(x-x_0)} + \\ + \frac{[x]}{(x-x_n)(x-x_{n-1})\ldots(x-x_1)(x-x_0)}.$$

Подставляя в предпоследнее соотношение последнее и т. д. до первого, мы получим выражение $(n+2)$-й разделенной разности в виде

$$[xx_0x_1\ldots x_n] = -\frac{[x_0x_1\ldots x_n]}{x-x_n} - \frac{[x_0x_1\ldots x_{n-1}]}{(x-x_n)(x-x_{n-1})} - \ldots \\ \ldots - \frac{[x_0x_1]}{(x-x_n)\ldots(x-x_1)} - \frac{[x_0]}{(x-x_n)\ldots(x-x_0)} + \\ + \frac{f(x)}{(x-x_n)\ldots(x-x_0)}.$$

Выражение для $f(x)$ получает следующий вид:

$$f(x) = [x_0] + [x_0x_1](x-x_0) + [x_0x_1x_2](x-x_0)(x-x_1) + \ldots \\ \ldots + [x_0\ldots x_n](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) + \\ + [xx_0x_1\ldots x_n](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n) \quad (17)$$

Остаточный член в выражении для $f(x)$ получился тот же, что и при выводе формулы Лагранжа; это указывает на то, что и многочлен, входящий в правую часть, также тождествен с многочленом $P(x)$, введенным в рассмотрение при выводе формулы Лагранжа. Формула (17) является, таким образом, той же интерполяционной формулой Лагранжа, только иначе записанной.

Указанные соображения о тождественности остаточного члена формулы (17) с остаточным членом формулы (16) Лагранжа позволяют формулу Ньютона записать так:

$$f(x) = [x_0] + [x_0x_1](x-x_0) + [x_0x_1x_2](x-x_0)(x-x_1) + \ldots \\ \ldots + [x_0\ldots x_n](x-x_0)\ldots(x-x_{n-1}) + R_n(x),$$

где

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\psi(x), \quad (18)$$

$$\psi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n),$$

а ξ лежит в одном интервале с точками x_i и x. В изображении функции $f(x)$ соотношением (18) имеется аналогия с формулой Тейлора. Произведение разностей $(x-x_0)\ldots(x-x_n)$ является обобщением степени бинома, а квадратные скобки (разделенные разности) являются как бы обобщенными производными. Формула Ньютона, таким образом, является формулой, которой в непре-

рывном анализе соответствует формула Тейлора. При этом формула Ньютона является обобщением формулы Тейлора, ибо нетрудно показать, что если точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ стягиваются в одну точку, например в точку x_0, то формула Ньютона обращается в формулу Тейлора.

Для доказательства этого положения, устанавливающего связь между анализом дискретным и непрерывным, обратимся к выражению $(n+1)$-й разделенной разности, которое легко может быть получено из выражения для остаточного члена, именно из соотношений (16′) и (10) получим

$$[xx_0x_1\ldots x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Изменяя индексы, найдем

$$[x_0x_1x_2\ldots x_{k+1}] = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}, \tag{19}$$

где ξ лежит в одном интервале с точками $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$. Полагая в формуле (19) последовательно k равным $1, 2, \ldots, n$, а затем предполагая, что все точки $x_0, x_1, \ldots,$ следовательно, вместе с ними и точка ξ, стягиваются к точке x_0, получим

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_0 \\ x_2 \to x_0 \\ \cdots\cdots \\ x_{n+1} \to x_0}} [x_0x_1x_2\ldots x_{k+1}] = \lim_{\xi \to x_0} \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} = \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!},$$

т. е. выражение коэффициента в формуле Тейлора при члене номера $k+1$.

Заметим, что формула Ньютона, очевидно, может быть записана также и в следующем виде:

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi_1)(x-x_0) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(x-x_0)(x-x_1) +$$
$$+ \frac{f'''(\xi_3)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) + R_n(x), \tag{20}$$

где $R_n(x)$ имеет уже указанное значение, а точки ξ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ лежат в одном интервале с точками $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$. При стягивании точек x_i в одну точки ξ_i стягиваются также в одну точку, именно в ту, в которую стягиваются точки x_i, и мы опять получим формулу Тейлора.

§ 2. Многочлены Чебышева

Теперь мы займемся исследованием величины остаточного члена с точки зрения возможности его уменьшения. Обозначая интерполяционный многочлен в формуле Лагранжа по-прежнему через $P(x)$:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)\,\psi(x)}{(x-x_k)\,\psi'(x_k)},$$

в формуле Ньютона

$$P(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} [x_0 x_1 \ldots x_k](x-x_0)\ldots(x-x_{k-1}),$$

мы получаем разность между неизвестной нам функцией $f(x)$ и интерполирующим ее многочленом $P(x)$ в следующем виде:

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\psi(x),$$

откуда

$$R_n = |f(x) - P(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|\psi(x)|, \tag{21}$$

где

$$\psi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n).$$

Предполагая, что в интервале (a, b) функция $f(x)$ вместе со своими производными до $(n+1)$-го порядка включительно остается ограниченной, мы можем поставить вопрос о том, какими способами можно строить многочлен $P(x)$, наиболее точно приближающий $f(x)$ на интервале (a, b). Иначе говоря, мы займемся вопросом, какими приемами можно уменьшить величину модуля остаточного члена в соотношении (21).

Вполне естественно, что мы можем добиваться все лучших приближений прежде всего тем, что будем брать большее число точек интерполяции $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Чем больше n, тем, вообще говоря, меньше R_n в рассматриваемом интервале.

Уменьшение R_n может быть произведено не только за счет увеличения числа точек интерполяции, но и за счет их выбора. Даже беглое рассмотрение этого вопроса подтверждает указанное обстоятельство. В самом деле, предположим, что точки интерполяции $x_0, x_1, \ldots, x_n$ на рассматриваемом интервале (a, b) сконцентрированы в каком-нибудь одном месте этого интервала; тогда абсолютная величина многочлена $\psi(x)$ (а следовательно, и величина R_n) для x, сильно отклоняющегося от точек интерполяции, может сильно возрасти по абсолютной величине, потому что значения многочлена $\psi(x)$ мы будем брать далеко от его корней. Это простое рассуждение показывает, что для лучшего прибли-

жения $f(x)$ к $P(x)$ мы должны расположить точки интерполяции в каком-то смысле равномерно на интервале (a, b).

Пусть число точек интерполяции фиксировано. Попытаемся подобрать точки интерполяции так, чтобы разность R_n была наименьшей на рассматриваемом интервале (a, b) — иначе, чтобы максимум R_n на интервале (a, b) был наименьшим.

Учесть изменение $|f^{(n+1)}(\xi)|$ в формуле (21) в связи с изменением точек интерполяции мы, очевидно, не можем, ибо хотя на неизвестную функцию $f(x)$ мы и наложили ограничения, но они имеют весьма общий характер. Поэтому задача сводится к нахождению из всех многочленов $\psi(x)$ (коэффициент при x в наивысшей степени равен единице, все корни действительны и различны), такого, который на интервале (a, b) имел бы возможно меньшие значения по модулю. Как говорят, нужно найти многочлен, «наименее отклоняющийся от нуля» на рассматриваемом интервале.

Для удобства дальнейших рассуждений мы изменим число нулей многочлена, именно мы предположим, что искомый многочлен $\psi(x) = T_n(x)$ имеет n нулей, которые мы обозначим через $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Кроме того, допустим, что заданным интервалом является интервал $(-1, +1)$. Ниже будет показано, что это второе предположение не нарушает общности постановки и решения задачи о нахождении многочлена, наименее отклоняющегося от нуля на данном интервале. Итак, допустим, что искомый многочлен имеет вид

$$T_n(x) = (x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}).$$

Этот многочлен $T_n(x)$ мы должны выбрать так, чтобы его максимум на замкнутом интервале $(-1, 1)$ был наименьшим.

Для решения этой задачи нужно либо найти нули $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, которые мы предполагаем неизвестными, либо дать для $T_n(x)$ явное выражение в виде

$$T_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n. \tag{22}$$

Поставленная задача была решена великим русским математиком П. Л Чебышевым, причем им было получено явное выражение для многочлена $T(x)$, наименее отклоняющегося от нуля на интервале $(-1, +1)$:

$$T_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2^n}. \tag{23}$$

Выражение (23) является, очевидно, многочленом от x. В самом деле, если мы возведем в n-ю степень первую и вторую скобки, то радикалы будут входить во все четные члены, причем в первой скобке с плюсом, а во второй — с минусом. При сложении все четные члены пропадут, и останутся только целые степени x.

Таким образом, функция $T_n(x)$, определенная соотношением (23),— действительно многочлен. Отметим также, что это многочлен n-й степени с коэффициентом при x^n, равным единице.

Для доказательства этого положения заметим, что старший коэффициент всякого многочлена $P_n(x)$ n-й степени можно определить так:

$$a_0 = \lim_{x\to\infty} \frac{P_n(x)}{x^n}.$$

Поэтому для определения коэффициента a_0 (и степени) многочлена, изображаемого правой частью соотношения (23), составим отношение

$$\frac{T_n(x)}{x^n}$$

и найдем предел этого отношения, когда $x \to \infty$. Очевидно, получим

$$\frac{T_n(x)}{x^n} = \frac{\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)^n + \left(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)^n}{2^n},$$

откуда

$$\lim_{x\to\infty} \frac{T_n(x)}{x^n} = 1.$$

Итак, многочлен $T_n(x)$ удовлетворяет требованиям поставленной задачи: это многочлен n-й степени с коэффициентом при x^n, равным единице.

Покажем теперь, что все нули многочлена $T_n(x)$ (который будем называть многочленом Чебышева) действительны и различны. С этой целью введем в соотношение (23) вместо x переменное t

$$x = \cos t; \tag{24}$$

тогда многочлен $T_n(x)$ преобразуется к следующему виду:

$$T_n(x) = \frac{(\cos t + i\sin t)^n + (\cos t - i\sin t)^n}{2^n}$$

или, так как

$$(\cos t \pm i\sin t)^n = \cos nt \pm i\sin nt,$$

к виду

$$T_n(x) = \frac{\cos nt}{2^{n-1}}. \tag{25}$$

Замечая, что $t = \arccos x$, многочлену Чебышева можно придать следующий вид:

$$T_n(x) = \frac{\cos(n\arccos x)}{2^{n-1}}. \tag{26}$$

Соотношение (25) позволяет легко определить нули и экстремумы многочлена Чебышева[1]).

Преобразование (24) интервал $(-1, +1)$ изменения x преобразует (притом взаимно однозначно и непрерывно) в интервал $(0, \pi)$ изменения t; поэтому, если мы найдем нули и экстремумы многочлена $T_n(x)$ для значений t, не выходящих из интервала $(0, \pi)$, то вместе с тем соотношение (24) определит значения x, для которых многочлен Чебышева обращается в нуль или принимает экстремальные значения. Из соотношения (25) видно, что $T_n(x) = 0$ для всякого t, удовлетворяющего уравнению

$$\cos nt = 0; \tag{27}$$

из написанного уравнения мы должны выбрать решения на интервале $(0, \pi)$. Итак, получаем решения уравнения (27), соответствующие нулям $T_n(x)$, в виде

$$a_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{28}$$

Значения x, соответствующие найденным значениям t, получим из соотношения (24):

$$x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{29}$$

Так как в интервале $(0, \pi)$ косинус изменяется монотонно (убывает), то все найденные корни многочлена $T_n(x)$ будут различны (и, очевидно, действительны).

Геометрически нули $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ при заданном n можно построить так: разделив два первых квадранта полуокружности, опирающейся на интервал $(-1, +1)$, как на диаметр, на $2n$ равных частей, проектировать на этот интервал все четные точки деления (считая от конца интервала $+1$ к концу -1). Проекции и будут геометрически соответствовать точкам x_k. Таким образом, расположение нулей многочлена Чебышева есть гармоническое — иначе, распределение их таково, что оно соответствует равномерному расположению точек на окружности.

Теперь исследуем экстремумы многочлена $T_n(x)$. Соотношение (25) указывает, что $T_n(x)$ проходит через экстремумы одновременно с $\cos nt$. Обозначая через β_k точки интервала $(0, \pi)$, в которых $\cos nt$ (следовательно, и многочлен Чебышева) проходит через экстремум, найдем

$$\beta_k = \frac{k\pi}{n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{30}$$

---

[1]) Экстремумами многочлена мы называем здесь для сокращения те значения многочлена, модуль которых имеет одну и ту же наибольшую возможную на отрезке $[-1, 1]$ величину.

Значения k мы берем от 0 до n, потому что при этом t не выходит из интервала $(0, \pi)$.

Геометрически точки β_k могут быть построены аналогично точкам α_k. Это будут точки, равномерно расположенные на окружности, построенной указанным способом. При этом β_k будут нечетными точками деления (опять считая справа налево). Проекции β_k на интервал $(-1, 1)$ дадут соответствующие им значения x, которые обозначим через x'_k. Значения x'_k определяются равенством (24):

$$x'_k = \cos\frac{k\pi}{n}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{31}$$

Значения $T_n(x)$ в точках x'_k найдутся по формуле (25):

$$T_n(x'_k) = \frac{\cos k\pi}{2^{n-1}}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

или

$$T_n(x'_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

При k четном $T_n(x)$ проходит через максимум, равный $\frac{1}{2^{n-1}}$, при k нечетном $T_n(x)$ проходит через минимум, равный $-\frac{1}{2^{n-1}}$, Таким образом, отклонение $|T_n(x)|$ от нуля на интервале $(-1, +1)$ не превышает величины $\frac{1}{2^{n-1}}$, иначе

$$|T_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}, \qquad -1 \leqslant x \leqslant +1. \tag{32}$$

Итак, форма и свойства кривой, изображаемой многочленом Чебышева, нами получены.

Покажем теперь, что многочлен Чебышева является многочленом, наименее отклоняющимся от нуля. Для этого допустим, что мы имеем многочлен $u(x)$ n-й степени вида

$$u(x) = x^n + a'_1 x^{n-1} + a'_2 x^{n-2} + \ldots + a'_n$$

такой, что

$$|u(x)| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \text{ для любого } x, \qquad -1 \leqslant x \leqslant +1.$$

Покажем, что тогда $u(x)$ и многочлен Чебышева будут между собой тождественно равны. Для доказательства рассмотрим разность

$$R(x) = T_n(x) - u(x). \tag{a}$$

Ясно, что $R(x)$ есть многочлен степени не выше $n-1$. Если мы обнаружим, что на некотором интервале этот многочлен имеет n

нулей, то мы докажем, что он равен нулю при всех x, и, следовательно, докажем тождество

$$T_n(x) \equiv u(x).$$

Рассмотрим значения $R(x)$ в тех точках x'_k, в которых многочлен Чебышева $T_n(x)$ принимает экстремальные значения

$$R(x'_k) = T_n(x'_k) - u(x'_k) \tag{b}$$

или

$$R(x'_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} - u(x'_k). \tag{c}$$

Так как по предположению на интервале $(-1, +1)$ $|u(x)| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$, то знак $R(x'_k)$ будет определяться следующим образом: если k четное, то $R(x'_k)$ будет неотрицательно, если k нечетное, то $R(x'_k)$ неположительно. Мы можем поэтому положить

$$R(x'_k) = (-1)^k c_k, \tag{d}$$

где

$$c_k \geqslant 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Выберем из $n+1$ чисел c_k такие, которые строго больше нуля; обозначим их через c_{k_q}, где q может принимать значения от 1 до некоторого числа p, меньшего или равного $n+1$:

$$q = 1, 2, \ldots, p \leqslant n+1.$$

[Заметим, что можно считать $p > 1$, ибо если все c_k или все без одного равны нулю, то число нулей $R(x)$ на интервале $(-1, +1)$ будет больше $n-1$, а это и значит, что $R(x)$ равен нулю тождественно.]

Соответствующие значения x, для которых c_{k_q} не равны нулю, обозначим через x'_{k_q}. Итак,

$$R(x'_{k_q}) \neq 0, \qquad q = 1, 2, \ldots, p \leqslant n+1.$$

Рассмотрим точки

$$x'_{k_1}, \; x'_{k_2}, \; x'_{k_3}, \; \ldots, \; x'_{k_p}.$$

Если $k_1 = 0$, то точка x'_{k_1} совпадает с левым концом интервала $(-1, +1)$; если $k_q = n$, то точка x'_{k_q} совпадает с правым концом того же интервала.

Рассмотрим теперь какой-нибудь интервал $(x'_{k_{q+1}}, x'_{k_q})$. Подсчитаем число нулей функции $R(x)$ в этом интервале. На основании условия выбора точек x'_{k_q} следует, что функция $R(x)$ в рассматриваемом интервале должна иметь нулей по крайней мере

$$k_{q+1} - k_q - 1.$$

Покажем, что кроме этих нулей непременно существует еще один. Условимся обозначать через $\operatorname{sign} A$ единицу, взятую со знаком некоторого числа A. Тогда ясно [см. равенства (c) и (d)], что

$$\operatorname{sign} R(x'_{k_{q+1}}) = (-1)^{k_{q+1}}, \quad \operatorname{sign} R(x'_{k_q}) = (-1)^{k_q}.$$

Пусть числа k_{q+1} и k_q одной четности, тогда знаки $R(x)$ на концах интервала $(x'_{k_{q+1}}, x'_{k_q})$ будут одинаковы, а это значит, что в данном интервале $R(x)$ должна обращаться в нуль четное число раз. Число тривиальных нулей $k_{q+1} - k_q - 1$ при условии одинаковой четности чисел k_{q+1} и k_q будет, очевидно, нечетным.

Итак, установлено наличие нечетного числа нулей функции $R(x)$ в интервале $(x'_{k_{q+1}}, x'_{k_q})$ и доказано, что их число должно быть четным; значит, в рассматриваемом интервале должен быть прибавлен по крайней мере еще один нуль к числу найденных.

Предположим, что числа k_{q+1} и k_q — разной четности, тогда знаки функции (x) на концах интервала $(x'_{k_{q+1}}, x'_{k_q})$ будут разные, и значит, внутри этого интервала должно лежать нечетное число нулей функции $R(x)$. С другой стороны, число тривиальных нулей функции $R(x)$ останется тем, каким оно было установлено выше, т. е. $k_{q+1} - k_q - 1$. Это число при условии, что числа k_{q+1} и k_q — различной четности, будет четным.

Итак, мы нашли в интервале $(x'_{k_{q+1}}, x'_{k_q})$ четное число нулей и доказали, что полное число нулей в этом интервале должно быть нечетным; значит, там должен быть по крайней мере еще один нуль функции $R(x)$.

Функция $R(x)$ имеет, таким образом, во всяком интервале вида

$$(x'_{k_{q+1}}, x'_{k_q})$$

не менее чем $k_{q+1} - k_q$ нулей.

После этих предварительных соображений перейдем к подсчету нулей функции $R(x)$ на всем интервале $(-1, +1)$. Если $k_1 = 0$, то счет нулей начнется с интервала (x'_{k_1}, x'_{k_2}) и затруднений не представит. Количество их выразится числом $k_2 - k_1$. Если же $k_1 > 0$, т. е. $R(x)$ обращается в нуль для $x = +1$, то встает еще вопрос о подсчете нулей в интервале $(+1, x'_{k_1})$. Оче-

видно, что число самих тривиальных нулей в рассматриваемом интервале будет $k_1 \neq 0$.

Обратимся также к рассмотрению последнего интервала

$$(x'_{k_{p-1}}, x'_{k_p}).$$

Если $k_p = n$, то число нулей в этом интервале будет по доказанному $n - k_{p-1}$. Если же $R(-1) = 0$, т. е. $k_p < n$, то число самих тривиальных нулей в интервале $(x'_{k_p}, -1)$ будет $n - k_p$. Сделанные замечания о концах интервала и доказанное положение о количестве нулей внутри всякого интервала вида $(x'_{k_{q+1}}, x'_{k_q})$ позволяют написать общее количество нулей функции $R(x)$ на всем интервале $(-1, +1)$:

$$k_1 + (k_2 - k_1) + (k_3 - k_2) + \ldots + (k_p - k_{p-1}) + (n - k_p) = n.$$

Итак, $R(x)$ имеет не менее n нулей на интервале $(-1, +1)$ и, следовательно, тождественно равна нулю.

Утверждение доказано: многочлена, отклоняющегося от нуля менее, чем многочлен Чебышева, не существует.

Решим поставленную задачу о многочлене, наименее отклоняющемся от нуля, на интервале (a, b), т. е. найдем из всех многочленов (22) такой, который на интервале (a, b) наименее отклонялся бы от нуля. С этой целью введем вместо x переменное $\bar{x}$, связанное со старым переменным x следующим соотношением:

$$x = \frac{b-a}{2}\bar{x} + \frac{b+a}{2}. \tag{33}$$

Ясно, что $\bar{x} = -1$ при $x = a$, $\bar{x} = +1$ при $x = b$, т. е. указанная замена преобразует интервал (a, b) изменения x в интервал $(-1, +1)$ изменения $\bar{x}$.

Многочленом от $\bar{x}$, наименее отклоняющимся от нуля на интервале $(-1, +1)$, будет

$$T_n(\bar{x}) = (\bar{x} - \bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_1)\ldots(\bar{x} - \bar{x}_{n-1}).$$

Заменяя $\bar{x}$ через x, из соотношения (33) получим многочлен относительно x:

$$T_n\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right).$$

Коэффициентом при x^n у этого многочлена, как показывает соотношение (9), будет число, равное $\left(\frac{2}{b-a}\right)^n$. Поэтому многочлен

$$\bar{T}_n(x) \equiv \frac{(b-a)^n}{2^n} T_n\left(\frac{2x-a-b}{a-b}\right) \tag{34}$$

будет иметь старшим коэффициентом единицу. Нетрудно показать, что многочлен $\overline{T}_n(x)$ наименее отклоняется от нуля на интервале (a, b). В самом деле, допустим, что существует многочлен $\overline{u}(x)$ n-й степени с коэффициентом при x^n, равным единице, удовлетворяющий условию

$$|\overline{u}(x)| \leqslant |\overline{T}_n(x)|, \qquad a \leqslant x \leqslant b.$$

Рассматривая тогда многочлены

$$u(\overline{x}) \equiv \frac{2^n}{(b-a)^n}\overline{u}\left(\frac{b-a}{2}\overline{x} + \frac{b+a}{2}\right),$$

$$T_n(\overline{x}) \equiv \frac{2^n}{(b-a)^n}\overline{T}_n\left(\frac{b-a}{2}\overline{x} + \frac{b+a}{2}\right)$$

на интервале $(-1, +1)$, мы должны будем заключить, что

$$|u(\overline{x})| \leqslant |T_n(\overline{x})|, \qquad -1 \leqslant \overline{x} \leqslant 1.$$

Многочлен $T_n(\overline{x})$ есть многочлен Чебышева, как это следует из соотношения (34), поэтому

$$u(\overline{x}) \equiv T_n(\overline{x}),$$

а следовательно,

$$\overline{u}(x) \equiv \overline{T}_n(x);$$

это показывает, что $\overline{T}_n(x)$ на интервале (a, b) в самом деле наименее отклоняется от нуля.

Проведенное уже исследование многочлена Чебышева для интервала $(-1, +1)$ легко позволяет перенести результат этого исследования на многочлен $\overline{T}_n(x)$, построенный для интервала (a, b). Нули многочлена $\overline{T}_n(x)$ будут расположены в точках x_k:

$$x_k = \frac{b-a}{2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} + \frac{b+a}{2}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \quad (29')$$

Экстремумы многочлена $\overline{T}_n(x)$ будут расположены в точках

$$x'_k = \frac{b-a}{2}\cos\frac{k\pi}{n} + \frac{b+a}{2}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n. \quad (31')$$

Величины экстремумов, т. е. значения $\overline{T}_n(x)$ в точках x'_k,

$$\overline{T}_n(x'_k) = \frac{(b-a)^n}{2^n} \cdot \frac{(-1)^k}{2^{n-1}},$$

так что

$$|\overline{T}_n(x_k)| \leqslant \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}, \qquad a \leqslant x \leqslant b. \quad (32')$$

То исследование, которое мы провели, носит скорее теоретический характер, чем практический. Улучшение точности результата, вносимое только что рассмотренным распределением точек интерполяции, не компенсирует той вычислительной работы, которую пришлось бы проделать, подсчитывая абсциссы точек, в которых пришлось бы измерять значения, интерполируемой функции $f(x)$. На практике гораздо проще бывает распределить точки интерполяции на рассматриваемом интервале через равные промежутки.

Симметрия и упрощение формул, которые получаются при равномерном распределении точек интерполяции, делают этот случай интересным как с теоретической, так и с практической стороны.

§ 3. Формула Ньютона для равноотстоящих значений независимого переменного

1. Первый вывод формулы Ньютона. Допустим, что абсциссы точек интерполяции x_k имеют следующий вид:

$$x_k = x_0 + kh, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Рассмотрим, как преобразуется при этом интерполирующий многочлен $P(x)$ в формуле Ньютона:

$$P(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} [x_0 x_1 \ldots x_k](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1}).$$

Найдем последовательные разности функции $f(x)$. Очевидно, имеем

$$\begin{aligned}
\Delta f(x) &= f(x+h) - f(x),\\
\Delta^2 f(x) &= f(x+2h) - f(x+h) - f(x+h) + f(x) =\\
&= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x),\\
\Delta^3 f(x) &= f(x+3h) - 2f(x+2h) +\\
&\quad + f(x+h) - f(x+2h) + 2f(x+h) - f(x) =\\
&= f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x).
\end{aligned}$$

Вообще, предполагая справедливость формулы

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(x+kh), \tag{35}$$

нетрудно показать, что

$$\Delta^{n+1} f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} C_{n+1}^k f(x+kh).$$

В самом деле, предполагая справедливость формулы (35) для n, найдем

$$\Delta^{n+1}f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(x+(k+1)h) -$$

$$- \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(x+kh) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n-k+1} C_n^{k-1} f(x+kh) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k+1} C_n^k f(x+kh).$$

Разобьем написанные суммы на три отдельных выражения, соответствующие изменению индекса $k=0$, $k=1, \ldots, n$ и $k=n+1$; тогда получим

$$\Delta^{n+1}f(x) = (-1)^{n+1} f(x) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k+1} \{C_n^k + C_n^{k-1}\} f(x+kh) + f(x+(n+1)h).$$

Так как

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k,$$

то

$$\Delta^{n+1}f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} C_{n+1}^k f(x+kh),$$

и справедливость формулы (35) доказана для $n+1$.

Преобразуем теперь в интерполирующем многочлене $P(x)$ выражение $(k+1)$-й разделенной разности, предполагая, что

$$x_j = x_0 + jh, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, k.$$

Возьмем для этого выражение $(k+1)$-й разделенной разности в виде формулы (7):

$$[x_0 x_1 \ldots x_k] = \sum_{p=0}^{k} \frac{f(x_p)}{(x_p - x_0)(x_p - x_1)\ldots(x_p - x_{p-1})(x_p - x_{p+1})\ldots(x_p - x_k)}.$$

Так как $x_j = x_0 + jh$, то $x_j - x_i = (j-i)h$ для всех j и i, меньших или равных k. Заменяя разности $x_p - x_0$, $x_p - x_1, \ldots, x_p - x_k$ их выражениями через h, получим

$$[x_0 x_1 \ldots x\ ] = \sum_{p=0}^{k} \frac{f(x_p)}{ph(p-1)h\ldots 2hh(-h)(-2h)\ldots(-(k-p)h)},$$

или

$$[x_0x_1\ldots x_k]=\sum_{p=0}^{k}\frac{(-1)^{k-p}f(x_p)}{h^k p!\,(k-p)!}.$$

Так как

$$\frac{k!}{p!\,(k-p)!}=C_k^p,$$

то окончательно выражение для $(k+1)$-й разделенной разности принимает следующий вид:

$$[x_0x_1\ldots x_k]=\sum_{p=0}^{k}\frac{(-1)^{k-p}C_k^p f(x_p)}{k!h^k}=\frac{1}{k!\,h^k}\sum_{p=0}^{k}(-1)^{k-p}C_k^p f(x_p).$$

Формула (35) позволяет представить $[x_0x_1\ldots x_k]$ в следующем наиболее простом виде:

$$[x_0x_1\ldots x_k]=\frac{\Delta^k f(x_0)}{k!h^k}.$$

Интерполирующий многочлен $P(x)$ будет

$$P(x)=f(x_0)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta^k f(x_0)}{k!\,h^k}(x-x_0)(x-(x_0+h))\ldots(x-x_0-(k-1)h). \quad (36)$$

Полагая $x_0=0$, получаем формулу

$$P(x)=f(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta^k f(0)}{k!\,h^k}x(x-h)(x-2h)\ldots(x-(k-1)h). \quad (37)$$

2. Второй вывод формулы Ньютона. Можно привести еще один интересный формальный вывод этой формулы. Условимся символом D (оператор) обозначать прибавление величины h к аргументу функции, так что $Df(x)=f(x+h)$. Будем рассматривать операцию взятия конечной разности от $f(x)$ как действие на эту функцию оператора Δ:

$$\Delta f(x)=f(x+h)-f(x).$$

Очевидно, имеем

$$\Delta f(x)=Df(x)-f(x)=(D-1)f(x).$$

Мы видим, что действие оператора Δ эквивалентно действию оператора $D-1$, поэтому естественно эти операторы считать равными

$$\Delta=D-1 \text{ или } \Delta+1=D.$$

Прибавление к аргументу функции $f(x)$ числа, содержащего h целое число раз, естественно обозначить соответствующей целой степенью оператора D (итерация). Прибавление же всякого другого числа p естественно обозначить оператором $D^{\frac{p}{h}}$, так что

$$D^{\frac{p}{h}} f(x) = f(x+p).$$

При $x = x_0$ имеем

$$D^{\frac{p}{h}} f(x_0) = f(x_0 + p).$$

Заменяя D через $1 + \Delta$, получим

$$(1+\Delta)^{\frac{p}{h}} f(x_0) = f(x_0 + p).$$

Разложим теперь формально бином $(1+\Delta)^{\frac{p}{h}}$ по известному правилу в бесконечный ряд (операторов). Тогда найдем

$$f(x_0+p) = \left\{1 + \frac{p}{h}\Delta + \frac{p}{h}\left(\frac{p}{h}-1\right)\frac{1}{2!}\Delta^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{p}{h}\left(\frac{p}{h}-1\right)\left(\frac{p}{h}-2\right)\frac{1}{3!}\Delta^3 \ldots\right\} f(x_0).$$

Раскрывая скобки, получим ряд, первые $n+1$ членов которого изображают интерполяционный многочлен $P(x)$:

$$f(x_0+p) = f(x_0) + \frac{p}{h}\Delta f(x_0) + \frac{p}{h}\left(\frac{p}{h}-1\right)\frac{1}{2!}\Delta^2 f(x_0) +$$
$$+ \frac{p}{h}\left(\frac{p}{h}-1\right)\left(\frac{p}{h}-2\right)\frac{1}{3!}\Delta^3 f(x_0) + \ldots$$

Полагая $x_0 + p = x$, следовательно, $p = x - x_0$, мы приведем эту формулу к прежним обозначениям:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{h^2 2!}(x-x_0)(x-x_0-h) +$$
$$+ \frac{\Delta^3 f(x_0)}{h^3 3!}(x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0-2h) + \ldots$$

т. е. первые $n+1$ членов ряда (36), составляющих интерполирующий многочлен $P(x)$, могут быть получены из равенства

$$f(x) = (1+\Delta)^{\frac{x-x_0}{h}} f(x_0).$$

Неточность этого вывода заключается в том, что разложимость $(1+\Delta)^{\frac{p}{h}}$ в бесконечный ряд по оператору остается не обоснованной. Кроме того, в таком формальном разложении отсутствует остаточный член, с помощью которого можно было бы судить о приближении к значениям функции при отбрасывании всех членов ряда, начиная с некоторого места. В этом случае, когда $f(x)$ — многочлен, этот вывод представляет собой обычный вывод, только проведенный формально.

3. Понятие обобщенной степени. Произведение

$$x(x-h)(x-2h)\ldots(x-(k-1)h)$$

играет особую роль в теории конечных разностей. Это произведение называется обобщенной степенью x и обозначается через $x^{\left(\frac{k}{h}\right)}$, так что по определению

$$x^{\left(\frac{k}{h}\right)} = x(x-h)\ldots(x-(k-1)h). \tag{38}$$

Обобщенная степень x играет по своим свойствам в теории конечных разностей ту же роль, что и обыкновенная степень x в дифференциальном исчислении. Если бы мы попытались вычислить конечную разность от x^n, т. е. Δx^n, то это выражение оказалось бы довольно сложным, а главное, совершенно не имеющим связи с самой функцией x^n по своей структуре $\left(\Delta x^n = hnx^{n-1} + h^2\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\times\right.$ $\left.\times x^{n-2} + \ldots + h^n\right)$. Взятие конечной разности от обобщенной степени x не разрушает ее структуры. В самом деле,

$$\begin{aligned}\Delta x^{\left(\frac{k}{h}\right)} &= (x+h)x\ldots(x-(k-2)h) - x(x-h)\ldots(x-(k-1)h) = \\ &= x(x-h)\ldots(x-(k-2)h)(x+h-x+kh-h) = \\ &= khx(x-h)\ldots(x-(k-2)h) = khx^{\left(\frac{k-1}{h}\right)}.\end{aligned}$$

Итак,

$$\Delta x^{\left(\frac{k}{h}\right)} = khx^{\left(\frac{k-1}{h}\right)}. \tag{39}$$

Написанная формула аналогична формуле дифференцирования обычной степени в непрерывном анализе.

Вводя в формулу (37) вместо произведения

$$x(x-h)\ldots(x-(k-1)h)$$

обобщенную степень x, получим

$$P(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta^k f(0)}{h^k k!}\,x^{\left(\frac{k}{h}\right)}. \tag{40}$$

Эта формула послужит нам для решения ряда задач теории конечных разностей.

4. Примеры. Рассмотрим теперь ряд примеров.

1. Пусть требуется построить интерполирующий многочлен n-й степени для заданного многочлена также n-й степени.

Очевидно, что интерполирующим многочленом будет заданный нам многочлен, потому что остаточный член интерполяционных формул есть выражение

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\psi(x),$$

которое для многочлена n-й степени тождественно обращается в нуль.

2. Разложим в сумму (на основании примера 1 она будет конечной) по обобщенным степеням x функцию x^n. Воспользовавшись формулой (40), получим тождество

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta^k 0^n}{h^k k!} x^{\left(\frac{k}{h}\right)}. \tag{41}$$

Разность $\Delta^k 0^n$, $k = 1, 2, \ldots, n$, можно построить по формуле (35), которая в данном случае будет

$$\Delta^k 0^n = \sum_{p=0}^{k} (-1)^{k-p} C_k^p (ph)^n.$$

При $k = 1$ находим разность первого порядка:

$$\Delta^1 0^n = \sum_{p=0}^{1} (-1)^{1-p} C_1^p (ph)^n = h^n;$$

при $k = 2$ находим разность второго порядка:

$$\Delta^2 0^n = \sum_{p=0}^{2} (-1)^{2-p} C_2^p (ph)^n = -2h^n + (2h)^n = h^n(2^n - 2);$$

при $k = 3$ найдем

$$\Delta^3 0^n = \sum_{p=0}^{3} (-1)^{3-p} C_3^p (ph)^n = 3h^n - 3(2h)^n + (3h)^n =$$
$$= h^n(3^n - 3\cdot 2^n + 3) \text{ и т. д.}$$

Рассмотрим для большей конкретности случай $n = 3$; тогда получаем

$$\Delta^1 0^3 = h^3, \qquad \Delta^2 0^3 = 6h^3, \qquad \Delta^3 0^3 = 6h^3,$$

и разложение x^3 по обобщенным степеням представится в следующем виде:

$$x^3 = h^2x + 3hx(x-h) + x(x-h)(x-2h). \tag{42}$$

Справедливость полученного тождества может быть, конечно, проверена и непосредственно.

3. Построить интерполирующий многочлен n-й степени для функции $f(x) = a^x$.

Нетрудно непосредственным подсчетом получить для $\Delta^k a^x$ следующее выражение:

$$\Delta^k a^x = (a^h - 1)^k a^x,$$

откуда

$$\Delta^k a^0 = (a^h - 1)^k,$$

так что применение формулы (40) дает

$$a^x \approx 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(a^h-1)^k}{h^k k!} x^{\left(\frac{k}{h}\right)}.$$

Ни при каком n (даже сколь угодно большом) построенный многочлен не будет точно изображать a^x. Вопрос может только ставиться о сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a^h-1)^k}{h^k k!} x^{\left(\frac{k}{h}\right)}.$$

Как естественно ожидать, сходимость этого ряда зависит от величины a и h. Можно показать, что для всякого h найдутся такие числа a_1 и a_2, что при $a_1 < a < a_2$ написанный ряд сходится и изображает функцию $a^x - 1$. Например, для $h = 1$ ряд будет сходящимся при условии $|\ln a| < \ln 2$. Исследование облегчается рассмотрением величины остаточного члена R_n, который имеет следующий вид:

$$R_n = \frac{(\ln a)^{n+1} a^{\xi}}{(n+1)!} x^{\left(\frac{n+1}{h}\right)}, \qquad 0 < \xi < nh.$$

§ 4. Различные представления разделенной разности в общем случае расположения узлов интерполяции

1. Первое представление разделенной разности. Различные представления разделенной разности используются в первую очередь для оценки остаточного члена в формуле Лагранжа. Мы уже видели выше, что при действительных $x, x_1, \ldots, x_n$ разделенная

разность может быть представлена в виде

$$[x, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \tag{43}$$

где ξ есть какая-то точка наименьшего сегмента $[a, b]$, содержащего все точки $x, x_1, \ldots, x_n$.

Весьма важное следствие этого представления есть то, что если $f^{(n)}(x)$ не меняет знака на некотором сегменте $[a, b]$, содержащем точки $x, x_1, \ldots, x_n$, то $[x, x_1, \ldots, x_n]$ имеет тот же знак, что и $f^{(n)}(x)$. Например, пусть $f(x) = \alpha^x$, $0 < \alpha < 1$. Предположим, что $x_0, x_1, \ldots, x_n$ имеют любые неотрицательные значения. Тогда для разделенной разности этой функции мы будем иметь неравенство

$$(-1)^n [x_0, x_1, \ldots, x_n] = \ln^n \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha^\xi}{n!} > 0. \tag{44}$$

2. Второе представление разделенной разности и формула Ньютона при произвольных узлах интерполяции. Первое представление разделенной разности имеет смысл для действительных $x, x_1, \ldots, x_n$. Допустим теперь, что $x, x_1, \ldots, x_n$ — произвольные комплексные числа, а $f(z)$ определена для z, изменяющегося в замкнутой области $\overline{D}$, — наименьшей выпуклой области комплексной плоскости, содержащей все точки $x, x_1, \ldots, x_n$. Эта область, очевидно, должна быть многоугольником, который в частном случае может выродиться в отрезок прямой. Допустим также что в области $\overline{D}$ $f(z)$ имеет ограниченную n-ю производную. Рассмотрим функции $u_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$:

$$u_k(x) = \int_0^1 \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{k-1} f^{(k)}[x_1 + (x_2 - x_1) t_1 + \ldots$$
$$\ldots + (x - x_k) t_k] \, dt_1 \ldots dt_k \tag{45}$$

и положим $u_0(x) = f(x)$.

Аргумент функции $f^{(k)}(z)$, стоящей под знаком k-кратного интеграла, как мы сейчас покажем, не выходит за пределы области $\overline{D}$. Этот аргумент имеет вид

$$\begin{aligned}\zeta_k &= x_1 + (x_2 - x_1) t_1 + \ldots + (x_k - x_{k-1}) t_{k-1} + (x - x_k) t_k = \\ &= (1 - t_1) x_1 + (t_1 - t_2) x_2 + \ldots + (t_{k-1} - t_k) x_k + t_k x = \\ &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x, \\ &\qquad 1 \leqslant k \leqslant n,\end{aligned}$$

где $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$ и $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, k+1$, так как

$$1 \geqslant t_1 \geqslant t_2 \geqslant \ldots \geqslant t_n \geqslant 0.$$

Докажем, что если $z_1, z_2, \ldots, z_k$ — любые точки комплексной плоскости, то точка

$$\zeta_k = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \ldots + \lambda_k z_k, \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,$$

лежит в наименьшем выпуклом многоугольнике, содержащем эти точки. Будем действовать по индукции. Для случая одной точки утверждение очевидно. Предположим, что оно уже доказано для $k-1$ точек. Напишем

$$\zeta_k = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \ldots + \lambda_k z_k = \mu_k (\lambda_1' z_1 + \ldots + \lambda_{k-1}' z_{k-1}) + \lambda_k z_k,$$

$$\lambda_i' = \frac{\lambda_i}{\mu_k}; \qquad \mu_k = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i;$$

так как $\lambda_i' \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i' = 1$, то согласно индуктивному предположению точка $\zeta_k' = \lambda_1' z_1 + \ldots + \lambda_{k-1}' z_{k-1}$ лежит внутри наименьшего выпуклого многоугольника, содержащего точки $z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}$. Далее,

$$\zeta_k = \mu_k \zeta_k' + \lambda_k z_k = \zeta_k' + \lambda_k (z_k - \zeta_k') \qquad (\mu_k \geqslant 0,\ \lambda_k \geqslant 0,\ \lambda_k + \mu_k = 1).$$

Значит, точка ζ_k лежит на отрезке прямой между ζ_k' и z_k. Но и ζ_k' и z_k лежат внутри наименьшего выпуклого многоугольника, содержащего точки $z_1, z_2, \ldots, z_k$, поэтому и ζ_k лежит внутри того же многоугольника. Тем самым наше утверждение доказано. Применяя его к точкам $x_1, x_2, \ldots, x_n$, убеждаемся, что ζ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ лежат внутри $\overline{D}$.

Произведем теперь в нашем интеграле $u_k(x)$ интегрирование по t_k. Мы получим, что

$$u_k(x) = \frac{1}{x - x_k} \Big\{ \int_0^1 \ldots \int_0^{t_{k-2}} f^{(k-1)} [x_1 + (x_2 - x_1) t_1 + \ldots$$
$$\ldots + (x_{k-1} - x_{k-2}) t_{k-2} + (x - x_{k-1}) t_{k-1}] \, dt_1 \ldots dt_{k-1} -$$
$$- \int_0^1 \ldots \int_0^{t_{k-2}} f^{(k-1)} [x_1 + (x_2 - x_1) t_1 + \ldots$$
$$\ldots + (x_{k-1} - x_{k-2}) t_{k-2} + (x_k - x_{k-1}) t_{k-1}] \, dt_1 \ldots dt_{k-1} \Big\}.$$

Выражая интегралы в правой части через $u_k(x)$, мы получим соотношения

$$u_k(x) = \frac{u_{k-1}(x) - u_{k-1}(x_k)}{x - x_k}, \quad u_0(x) = f(x), \quad k = 1, \ldots, n. \tag{46}$$

Сравнивая эти соотношения, последовательно определяющие $u_k(x)$, с соотношениями (3) § 1 настоящей главы, служившими для последовательного определения разделенных разностей, мы видим, что эти соотношения одинаковы. Отсюда следует, что

$$[x, x_1, \ldots, x_n] = \int_0^1 \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{n-1}} f^{(n)} [x_1 + (x_2 - x_1) t_1 + \ldots$$
$$\ldots + (x_n - x_{n-1}) t_{n-1} + (x - x_n) t_n] \, dt_1 \ldots dt_n. \quad (47)$$

До настоящего момента мы рассматривали разделенные разности только при действиях и различных $x, x_1, \ldots, x_n$. Рекуррентные соотношения (46) непосредственно дают возможность определить разделенные разности при произвольных комплексных $x, x_1, \ldots, x_n$. Соотношение же (47), верное при различных $x, x_1, \ldots, x_n$, может служить вместе с тем и определением разделенной разности при любом числе совпавших между собой точек среди точек $x, x_1, \ldots, x_n$ в предположении существования ограниченной производной n-го порядка у функции $f(z)$ в области $\overline{D}$.

Из соотношений (46) следует также формула

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\prod\limits_{\substack{s=0 \\ s \neq k}}^{n} (x_k - x_s)}, \quad (48)$$

справедливая при различных $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Действительно, допустив, что эта формула справедлива при $n = k$, мы из соотношений (46) сразу получаем ее справедливость при $n = k + 1$. При $n = 2$ эта формула очевидна. Значит, соотношение (48) имеет место при любом n. Это соотношение показывает, что в символе разделенной разности $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ любые перестановки узлов интерполяции не меняют величины разделенной разности. Действительно, при различных $x_0, x_1, \ldots, x_n$ это прямо следует из соотношения (48), а случай совпадения значений узлов интерполяции можно рассматривать как результат предельных переходов, что и позволяет доказать справедливость нашего утверждения в общем случае.

Вопрос о представлении конечной разности в общем случае при любом числе совпадений среди точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$ с помощью значений $f(z)$ и ее производных мы рассмотрим ниже.

Из соотношения (47) непосредственно следует неравенство

$$|[x, x_1, \ldots, x_n]| \leqslant \max_{x \in \overline{D}} |f^{(n)}(x)| \int_0^1 \ldots \int_0^{t_{n-1}} dt_1 \ldots dt_n =$$
$$= \frac{1}{n!} \max_{x \in \overline{D}} |f^{(n)}(x)|, \quad (49)$$

верное при любых $x, x_1, \ldots, x_n$.

Далее, из представления (47) следует также, что для z^k

$$[x, x_1, \ldots, x_n] = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant k \leqslant n-1, \\ 1, & k = n, \end{cases} \tag{50}$$

каковы бы ни были точки $x, x_1, \ldots, x_n$.

Вернемся к соотношениям (46). Из них следует, что разделенная разность $[x_1, x_2, \ldots, x_{k+s}, x]$ для $f(x)$ равна разделенной разности $[x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+s}, x]$ для $u_k(x)$, поэтому в силу (47) можем написать

$$u_{k+s}(x) = \int_0^1 \ldots \int_0^{t_{s-1}} u_k^{(s)} [x_{k+1} + (x_{k+2} - x_{k+1}) t_1 + \ldots$$
$$\ldots + (x - x_{s+k}) t_s] \, dt_1 \ldots dt_s.$$

Если $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+s}$ стремятся к x и $u_k(z)$ имеет в точке x s-ю производную, то при $x_{k+1} = \ldots = x_{k+s} = x$

$$u_{k+s}(x) = u_k^{(s)}(x) \int_0^1 \ldots \int_0^{t_{s-1}} dt_1 \ldots dt_s = \frac{u_k^{(s)}(x)}{s!}.$$

Чтобы получить для случая совпадения точек рекуррентные соотношения, аналогичные соотношениям (46), допустим, что среди наших n точек имеется лишь ν различных, скажем, $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$. Пусть x_1 повторяется p_1 раз, x_2 — p_2 раз и т. д., x_ν — p_ν раз ($p_1 + p_2 + \ldots + p_\nu = n$). В этом случае соотношения (46) примут вид

$$\left.\begin{aligned} & u_k(x) = \frac{1}{x - x_m}\left[u_{k-1}(x) - \frac{1}{(s-1)!} u_{q_m}^{(s)}(x_{m+1})\right], \\ & \qquad q_m < k \leqslant q_{m+1}, \\ & q_m = \sum_{k=1}^{m} p_k, \quad s = k - q_m - 1, \quad k = 1, 2, \ldots, n; \\ & \qquad m = 0, 1, \ldots, \nu. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Эти рекуррентные соотношения (51), отличающиеся от соотношений (46) только тем, что в них выполнен предельный переход, мы примем за общие соотношения, определяющие разделенные разности при допущении любого числа различных совпадений среди точек комплексной плоскости $z, z_1, \ldots, z_n$, которые с повторениями совпадают с точками $x_1, \ldots, x_\nu$. Из соотношений (51) непосредственно видно, что n-я разделенная разность в этом случае есть линейная однородная форма от значений $f(x)$, $f(x_k)$, $f'(x_k), \ldots, f^{(p_k-1)}(x_k)$, $k = 1, \ldots, \nu$, при кратности точки x_k, равной p_k. Итак, для формального последовательного определения

разделенных разностей в случае наличия одинаковых среди совокупности узлов интерполяции необходимо предположить в каждом узле интерполяции существование значений функции и ее производных до порядка, на единицу меньшего кратности узла. Из соотношений (46) следует опять, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} [x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0)\ldots(x - x_{k-1}) + \\ + [x, x_0, \ldots, x_n](x - x_0)\ldots(x - x_n), \quad (52)$$

где $x_0, x_1, \ldots, x_n$, x — уже произвольные комплексные числа, а $f(x)$ имеет определенные производные в каждой точке x_k до порядка, на единицу меньшего кратности узла интерполяции.

Многочлен

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} [x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0)\ldots(x - x_{k-1})$$

служит решением задачи, и притом единственным в силу соотношений (50), о нахождении многочлена степени не выше n, удовлетворяющего условиям

$$P^{(s)}(y_k) = f^{(s)}(y_k), \qquad s = 0, 1, \ldots, p_k - 1; \\ k = 1, \ldots, \nu; \qquad \sum_{s=1}^{\nu} p_s = n + 1, \quad (53)$$

если совокупность точек y_k с кратностями p_k совпадает с совокупностью точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Действительно, в силу соотношений (52) и того, что $[x, x_0, \ldots, x_n] \times (x - x_0)\ldots(x - x_n)$ обращается в нуль в точке y_k вместе со своими производными до порядка $p_k - 1$, соотношения (53) выполняются. Два многочлена степени не выше n должны иметь на основании условий (53) одинаковые разделенные разности $[x_0, x_1, \ldots, x_s]$, $s = 0, 1, \ldots, n$. Значит, $Q(x)$ — разность этих многочленов — тоже многочлен степени не выше n и должен иметь все разности $[x_0, x_1, \ldots, x_s]$ равными нулю. Но в силу соотношения (52) $Q(x)$ равен нулю тождественно:

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} [x_0, \ldots, x_k](x - x_0)\ldots(x - x_{k-1}) + \\ + [x, x_0, \ldots, x_n](x - x_0)\ldots(x - x_n) \equiv 0.$$

В самом деле, $[x_0, \ldots x_k] = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n$, по условию и $[x, x_0, \ldots, x_n] \equiv 0$, так как $Q(x)$ — многочлен степени не выше n (равенства (50)).

Существование и единственность многочлена $P(x)$, удовлетворяющего условиям (53), могут быть доказаны и непосредственно. В самом деле, условия (53) могут быть записаны в явной форме, если мы положим $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, именно

$$\sum_{k=s}^{n} k(k-1)\ldots(k-s+1)\, y_m^{k-s} a_k = f^{(s)}(y_m),$$

$$s = 0, \ldots, p_m - 1; \quad m = 1, \ldots, \nu; \quad \sum_{k=1}^{\nu} p_k = n+1.$$

Мы имеем, таким образом, систему из $n+1$ линейных уравнений для определения $n+1$ неизвестных a_k, $k = 0, \ldots, n$.

Определитель Δ этой системы может быть непосредственно получен из определителя Вандермонда:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_0 \ldots x_0^n \\ 1 & x_1 \ldots x_1^n \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 1 & x_n \ldots x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{j>i} (x_j - x_i),$$

если мы возьмем от D первую производную по x_1, вторую по x_2, $p_1 - 1$-ю по x_{p_1-1}, первую производную по $x_{p_1+1}, \ldots, p_2 - 1$-ю по $x_{p_2-1} \ldots$ и т. д. и положим $x_0 = x_1 \ldots = x_{p_1-1} = y_1$; $x_{p_1} = x_{p_1+1} = \ldots = x_{p_1+p_2-1} = y_2, \ldots$ и т. д. Простые вычисления показывают, что

$$\Delta = \pm \prod_{k=1}^{\nu} \prod_{n=0}^{p_k-1} n! \prod_{k>s} (y_k - y_s)^{p_k p_s},$$

откуда и следует, что $\Delta \neq 0$, так как $y_i \neq y_k$ при $i \neq k$. Значит, наша система разрешима относительно a_k и имеет единственное решение.

3. Третье представление разделенной разности и формула Эрмита. Мы дадим теперь представление разделенной разности в предположении, что $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — внутренние точки односвязной области D, в которой аналитическая функция $f(z)$ будет предполагаться регулярной.

Предположим сначала, что все точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ различны между собой. Пусть C — любой замкнутый спрямляемый контур в плоскости комплексного переменного z, целиком лежащий внутри области регулярности $f(z)$, внутри которого в свою очередь лежат все точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-x_0)\ldots(z-x_n)},$$

считая, что обход контура производится в положительном направлении. Вычислим этот интеграл с помощью вычетов. Подынтегральная функция имеет полюсы не выше первого порядка в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Пользуясь известным правилом для нахождения вычетов в случае простых полюсов, мы получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-x_0)\ldots(z-x_n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\prod\limits_{\substack{s=0\\ s\neq k}}^{n} (x_k - x_s)}.$$

Сопоставляя полученное выражение с (48), мы получаем новое представление разделенной разности:

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-x_0)\ldots(z-x_n)}. \tag{54}$$

Это представление доказано нами в предположении, что все $x_0, x_1, \ldots, x_n$ различны между собой. Но левая часть этого равенства на основании представления (47) есть аналитическая функция каждого из переменных x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, регулярная в области D_1, границей которой является контур C. То же самое обстоятельство имеет место и для правой части равенства (54). Это позволяет утверждать, что представление (54) будет оставаться верным, как бы мы ни перемещали $x_0, x_1, \ldots, x_n$, оставляя только их внутренними точками области D_1. Отсюда следует, что для регулярной в области D функции $f(z)$ представление (54) будет иметь место в общем случае при любых совпадениях точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Из представления (54) непосредственно следует оценка величины $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, если воспользоваться тем, что модуль интеграла не превышает максимума модуля подынтегральной функции, умноженного на длину пути интегрирования. Мы получаем благодаря этому неравенство

$$|[x_0, x_1, \ldots, x_n]| \leqslant \frac{L}{2\pi}\,\frac{\max\limits_{z\in C}|f(z)|}{\min\limits_{z\in C}|(z-x_0)\ldots(z-x_n)|}, \tag{55}$$

где L — длина контура C.

Представление (54) позволяет очень несложно получить в явном виде выражение разделенной разности и вид формулы Лагранжа в случае совпадения узлов интерполяции.

Пусть совокупность точек $x_0, \ldots, x_n$ совпадает с совокупностью точек z_k, причем кратность точки z_k мы предположим равной p_k,

$k = 0, 1, \ldots, \nu$; $\sum_{k=0}^{\nu} p_k = n + 1$. Из представления (54) следует тогда, что

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{p_0} \ldots (z - z_\nu)^{p_\nu}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\nu} \int_{C_k} \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{p_0} \ldots (z - z_\nu)^{p_\nu}},$$

где контуры C_k — окружности с центрами соответственно в точках z_k радиусов r_k, расположенные вне друг друга и внутри C. Возможность такого представления интеграла по замкнутому контуру есть простое следствие теоремы Коши.

Введем обозначение $q(z) = \prod_{k=0}^{\nu} (z - z_k)^{p_k}$ и рассмотрим интеграл

$$I_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{(z - z_k)^{p_k}}{q(z)} f(z) \frac{dz}{(z - z_k)^{p_k}}.$$

Функция $\frac{1}{q(z)}(z - z_k)^{p_k} f(z)$ регулярна в круге, границей которого является контур C_k. Поэтому, вспомнив известное из теории функций комплексного переменного выражение $(p_k - 1)$-й производной с помощью интеграла Коши, мы видим, что

$$I_k = \frac{1}{(p_k - 1)!} \frac{d^{p_k - 1}}{dz^{p_k - 1}} \left[\frac{(z - z_k)^{p_k}}{q(z)} f(z) \right] \Bigg|_{z = z_k}, \tag{56}$$

откуда, воспользовавшись известной формулой для производной любого порядка от произведения двух функций, мы получаем окончательное выражение для I_k:

$$I_k = \sum_{m=0}^{p_k - 1} \frac{f^{(m)}(z_k)}{m!\,(p_k - m - 1)!} \frac{d^m}{dz^m} \left[\frac{(z - z_k)^{p_k}}{q(z)} \right] \Bigg|_{z = z_k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, \nu.$$

Итак, мы можем записать теперь выражение $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ в явном виде, через значения $f(z)$ и ее производных в узлах интерполяции. Объединяя соотношения (56), получим

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{m=0}^{p_k - 1} \frac{f^{(m)}(z_k)}{m!(p_k - m - 1)!} \frac{d^m}{dz^m} \left[\frac{(z - z_k)^{p_k}}{q(z)} \right] \Bigg|_{z = z_k}. \tag{57}$$

Это представление получено нами в предположении аналитичности $f(z)$. Но оно имеет место для любой аналитической функции

$f(z)$, а отсюда легко получить, что это представление справедливо всегда, когда $f^{(m)}(z_k)$ имеют конечные и определенные значения.

Положив теперь $p_0 = 1$, $x_0 = x$, $q(z) = (z - x)\,Q(z)$, где $Q(z) = \prod_{k=1}^{\nu} (z - z_k)^{p_k}$ не зависит от x, мы из представления (57) получаем выражение для $[x, x_1, \ldots, x_n]$:

$$[x, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f(x)}{Q(x)} - \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{m=0}^{p_k-1} \frac{f^{(m)}(z_k)}{(p_k - m - 1)!} \sum_{s=0}^{m} \frac{1}{(m-s)!} \frac{d^{m-s}}{dz^{m-s}} \left[\frac{(z - z_k)^{p_k}}{Q(z)}\right]\Bigg|_{z=z_k} \frac{1}{(x - z_k)^{s+1}},$$

откуда и следует формула Эрмита:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{m=0}^{p_k-1} \sum_{s=0}^{m} \frac{f^{(m)}(z_k)}{(p_k - m - 1)!\,(m-s)!} \frac{d^{m-s}}{dz^{m-s}} \left[\frac{(z - z_k)^{p_k}}{Q(z)}\right]\Bigg|_{z=z_k} \frac{Q(x)}{(x - z_k)^{s+1}} + Q(x)\,[x, x_1, \ldots, x_n]. \quad (58)$$

Здесь интерполяционный многочлен $P(x)$, удовлетворяющий условиям (53), при замене n на $n - 1$ записан в явной форме.

§ 5. Интерполяционный процесс при треугольной таблице

1. Постановка задачи и основные формулы. В этом параграф мы займемся решением одной общей интерполяционной задачи Эта задача заключается в следующем.

Дана треугольная таблица произвольных чисел, конечная ил бесконечная:

$$\begin{array}{l} x_{0,0}, \\ x_{0,1}\ \ x_{1,1}, \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_{0,n}\ \ x_{1,n} \ldots x_{n,n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

определяющая последовательность разделенных разност $[x_{0,n}, x_{1,n}, \ldots, x_{n,n}]$, $n = 1, 2, \ldots$, *функции* $f(z)$.

Построить многочлен $P_n(z)$ *степени, не превосходящей удовлетворяющий условию: разделенные разности* $[x_{0,k}, x_{1,k}, \ldots, x_{k,k}]$ *для* $P_n(z)$ *равны соответствующим разделенным р*

ностям $[x_{0,k}, x_{1,k}, \ldots, x_{k,k}]$ *для* $f(z)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, *и исследовать поведение разности* $f(z) - P_n(z)$.

Для доказательства того, что

$$\lim_{n\to\infty} P_n(z) = f(z),$$

мы будем делать те или иные предположения об аналитическом характере $f(z)$.

Введем обозначения:

$$\zeta_k = x_{0,k} + (x_{1,k} - x_{0,k})\, t_{1,k} + \ldots$$
$$\ldots + (x_{k-1,k} - x_{k-2,k})\, t_{k-1,k} + (x_{k,k} - x_{k-1,k})\, t_{k,k} \tag{59}$$

и

$$\int_k F(\zeta_k)\, dt_k = k! \int_0^1 \int_0^{t_{1,k}} \ldots \int_0^{t_{k-1,k}} F(\zeta_k)\, dt_{1,k} \ldots dt_{k,k}, \tag{60}$$

где $x_{0,k}, x_{1,k}, \ldots, x_{k,k}$ — любые точки комплексной плоскости. Тогда, как мы уже видели, точка ζ_k не выходит за пределы области $\bar{D}_k$, являющейся наименьшей замкнутой выпуклой областью, содержащей точки $x_{0,k}, x_{1,k}, \ldots, x_{k,k}$. $\bar{D}_k$ будет некоторым многоугольником, который в частных случаях может свестись к отрезку прямой или даже к точке. Введем величину $R_n(z)$, которую, пользуясь обозначением (60), запишем в виде

$$R_n(z) = \int_1 \int_2 \ldots \int \int_{\zeta_0}^{z} \int_{\zeta_1}^{z_1} \int_{\zeta_n}^{z_n} f^{(n+1)}(z_{n+1})\, dz_1 \ldots dz_{n+1}\, dt_1 \ldots dt_n. \tag{61}$$

Производя интегрирование по z_{n+1}, мы получим соотношение

$$R_n(z) = \int_1 \ldots \int_{n-1} \int_{\zeta}^{z} \ldots \int_{\zeta_{n-1}}^{z_{n-1}} f^{(n)}(z_n)\, dz_1 \ldots dz_n\, dt_1 \ldots dt_{n-1} \int_n dt_n -$$
$$- \int_1 \ldots \int_{n-1} \int_{\zeta}^{z} \ldots \int_{\zeta_{n-1}}^{z_{n-1}} dz_1 \ldots dz_n\, dt_1 \ldots dt_{n-1} \int_n f^{(n)}(\zeta_n)\, dt_n. \tag{62}$$

Заметим, что

$$\int_n dt_n = n! \int_0^1 \ldots \int_0^{t_{n-1}} dt_1 \ldots dt_n = 1 \tag{63}$$

и что (см. стр. 42)

$$\int\limits_{n} f^{(n)}(\zeta_n)\,dt_n = n!\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^{t_{n-1}} f^{(n)}[x_{0,n}+\ldots+(x_{n,n}-x_{n-1,n})t_{n,n}]\,dt_1\ldots dt_n = \\ = n!\,[x_{0,n},\ x_{1,n},\ \ldots,\ x_{n,n}]. \qquad (64)$$

Положим теперь

$$p_n(z) = n!\int\limits_{n} \ldots \int\limits_{n-1}\int\limits_{\zeta_0}^{z} \ldots \int\limits_{\zeta_{n-1}}^{z_{n-1}} dz_1\ldots dz_n\,dt_1\ldots dt_{n-1}. \qquad (65)$$

Продифференцируем $p_n(z)$ n раз по z. Мы непосредственно получаем, что

$$p_n^{(n)}(z) = n!\int\limits_1 dt_1\ldots \int\limits_{n-1} dt_{n-1} = n!$$

Отсюда следует, что $p_n(z)$ — многочлен степени n относительно z со старшим коэффициентом, равным единице.

После этих замечаний мы можем записать соотношение (62) в виде

$$R_n(z) = R_{n-1}(z) - [x_{0,n},\ x_{1,n},\ \ldots,\ x_{n,n}]\,p_n(z). \qquad (66)$$

Из этого соотношения, верного при любом n, принимая во внимание, что $R_0(z) = f(z) - f(x_{0,0})$, уже непосредственно следует, что

$$R_n(z) = f(z) - \sum_{k=0}^{n} [x_{0,k},\ \ldots,\ x_{k,k}]\,p_k(z), \qquad (67)$$

или

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} [x_{0,k},\ \ldots,\ x_{k,k}]\,p_k(z) + R_n(z) = P_n(z) + R_n(z), \qquad (68)$$

где $P_n(z)$ есть многочлен степени не выше n относительно z. Возьмем k-ю разделенную разность от функции $R_n(z)$ в точках $x_{0,k},\ \ldots,\ x_{k,k}$. Пользуясь известным нам представлением k-й разделенной разности, мы будем тогда иметь, что для функции $R_n(z)$

$$[x_{0,k},\ \ldots,\ x_{k,k}] = \int\limits_0^1\int\limits_0^{t'_{1,k}} \ldots \int\limits_0^{t'_{k-1,k}} R_n^{(k)}[x_{0,k} + (x_{1,k} - x_{0,k})\,t'_{1,k} + \ldots \\ \ldots + (x_{k,k} - x_{k-1,k})\,t'_{k,k}]\,dt'_{1,k}\ldots dt'_{k,k} = k!\int\limits_{k}\int\limits_{k}\int\limits_{k+1} \ldots \int\limits_{n}\int\limits_{\zeta_k}^{\zeta'_k}\int\limits_{\zeta_{k+1}}^{z_{k+1}} \ldots \\ \ldots \int\limits_{\zeta_n}^{z_n} f^{(n+1)}(z_{n+1})\,dz_{k+1}\,dz_{n+1}\,dt'_k\,dt_k\ldots dt_n \equiv 0,$$

так как интеграл от ζ_k до ζ'_k может быть разбит на интегралы от ζ_k до нуля и от нуля до ζ'_k, после чего можно заменить ζ'_k на ζ_k, и весь наш интеграл будет равен разности тождественно совпадающих интегралов. Отсюда следует, что k-е разделенные разности при $k = 0, 1, \ldots, n$ с узлами интерполяции $x_{0,k}, \ldots, x_{k,k}$ для функции $f(z)$ и многочлена $P_n(n)$ совпадают. Итак, мы пришли к теореме.

Теорема. *Если задана треугольная таблица узлов интерполяции*

$$x_{0,k}, x_{1,k}, \ldots, x_{k,k}, \quad k = 0, 1, \ldots n,$$

и функция имеет конечные значения в этих точках (причем если совпадают s точек с одинаковыми вторыми индексами, то мы требуем существования в соответствующей точке производных $f(z)$ до $(s-1)$-го порядка), *то мы всегда можем построить с помощью формулы* (66) *единственный многочлен* $P_n(x)$, *значения разделенных разностей которого* $[x_{0,k}, \ldots, x_{k,k}]$, $k = 0, 1, \ldots, n$, *совпадают с теми же разделенными разностями* $f(z)$. *Если же* $f(z)$ *имеет в наименьшей замкнутой выпуклой области* $\bar{D}$, *содержащей все точки* $x_{s,k}$, $0 \leqslant s \leqslant k \leqslant n$ и z, *ограниченную* $(n+1)$-*ю производную, то остаточный член* $R_n(z)$ *имеет вид*

$$R_n(z) = f(z) - P_n(z) =$$

$$= \int_1 \ldots \int_n \int_{\zeta_0}^{z} \ldots \int_{\zeta_n}^{z_n} f^{(n+1)}(z_{n+1})\, dz_1 \ldots dz_{n+1}\, dt_1 \ldots dt_n, \tag{69}$$

где ζ_k, $k = 0, \ldots, n$ *и внешние интегралы в правой части равенства имеют ранее установленный смысл.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что два многочлена степени не выше n, имеющие одинаковые разделенные разности $[x_{0,k}, \ldots, x_{k,k}]$, $k = 0, 1, \ldots, n$, должны совпадать тождественно. Действительно, их разность, которую мы предположим отличной от нуля, будет многочленом степени $s \leqslant n$, имеющим соответствующие $n+1$ разделенных разностей, равных нулю. Возьмем s-ю разделенную разность этого многочлена. Она по условию должна быть равна нулю С другой стороны, как мы знаем, она равна a_s. где a_s — коэффициент при старшей степени s этого многочлена. Итак, степень нашего многочлена меньше s, и мы пришли к противоречию.

Наше основное представление (68) было доказано при предположении ограниченности $f^{(n+1)}(z)$ в области $\bar{D}$. Допустим теперь, что мы не делаем никаких предположений об аналитическом характере $f(z)$ в $\bar{D}$ и считаем только, что она сама и, в случае совпадений точек $x_{s,k}$ с одинаковыми вторыми индексами, ее производные

в нужном числе определены в этих точках $x_{s,k}$, $0 \leqslant s \leqslant k \leqslant n$. Тогда можно по формуле Эрмита построить многочлен $Q(z)$ степени не выше $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$, совпадающий с $f(z)$ (и ее производными, если совпадают $x_{s,k}$) в точках $x_{s,k}$, $0 \leqslant s \leqslant k \leqslant n$. Для этого многочлена представление (68) справедливо, так как его $(n+1)$-я производная безусловно ограничена в $\bar{D}$. Но коэффициенты $P_n(z)$ зависят только от $[x_{0,k}, \ldots, x_{k,k}]$, $k = 0, 1, \ldots, n$, другими словами, от значений $f(z)$ в $x_{0,k}, \ldots, x_{k,k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Соответствующие разделенные разности, как мы ранее доказали, у $P_n(z)$ и $Q(z)$ совпадают. С другой стороны, они совпадают у $f(z)$ и $Q(z)$ по построению $Q(z)$. Этим наша теорема полностью доказана.

Рассмотрим частные случаи общей задачи. Пусть

$$x_{k,k} = x_{k,k+1} = \ldots = x_{k,n} = x_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Тогда мы будем иметь простейшую интерполяционную задачу об определении $f(z)$ по ее значениям в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$, и в этом случае, хотя бы в силу единственности,

$$p_k(z) = (z - x_0) \ldots (z - x_{k-1}), \quad k = 1, \ldots, n; \quad p_0(x) = 1,$$

и

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} [x_0, x_1, \ldots, x_n](z - x_0) \ldots (z - x_{k-1}),$$

другими словами, мы получаем интерполяционный многочлен в форме отрезка интерполяционного ряда Ньютона.

Пусть теперь

$$x_{0,k} = x_{1,k} = \ldots = x_{k,k} = x_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Воспользовавшись представлением (65) многочлена $p_k(z)$ и принимая во внимание, что в этом случае $\zeta_k = x_k$, $0 \leqslant k \leqslant n$, и тем самым ζ_k — постоянные, мы получаем, что

$$p_k(z) = k! \int_{x_0}^{z} \ldots \int_{x_{k-1}}^{z_{k-1}} dz_1 \ldots dz_k; \quad [x_{0,k}, \ldots, x_{k,k}] = \frac{f^{(k)}(x_k)}{k!},$$

откуда следует, что

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_k) \int_{x_0}^{z} \ldots \int_{x_{k-1}}^{z_{k-1}} dz_1 \ldots dz_k.$$

Мы получили решение задачи о построении многочлена степени не выше n, у которого заданы значения последовательных

производных в точках x_k, другими словами,

$$P_n^{(k)}(x_k) = f^{(k)}(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Этот многочлен $P_n(z)$ есть отрезок *обобщенного интерполяционного ряда Абеля — Гончарова.*

В частности, когда $x_k = k$, мы можем найти более простое выражение для $p_k(z)$. Вычислим в этом случае интеграл

$$q_n(z) = \int_0^z \ldots \int_{n-1}^{z_{n-1}} dz_1 \ldots dz_n.$$

Делая последовательно замену переменных и полагая $z_2 = t_2 + 1$, $z_3 = t_3 + 1, \ldots, z_n = t_n + 1$, мы получаем соотношение

$$q_n(z) = \int_0^z \int_0^{z_1-1} \int_1^{t_2} \ldots \int_{n-2}^{t_{n-1}} dz_1\, dt_2 \ldots dt_n = \int_0^z q_{n-1}(z_1 - 1)\, dz_1.$$

Положив $q_{n-1}(z) = \frac{1}{(n-1)!} z(z - n + 1)^{n-2}$, мы получаем, интегрируя, что

$$q_n(z) = \frac{1}{n!} z(z - n)^{n-1}.$$

Так как $q_1(z) = z$, $q_2(z) = \frac{1}{2} z(z - 2)$, то мы нашли, пользуясь методом полной индукции, вид $q_n(z)$. В этом случае

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(k)}{k!} z(z - k)^{k-1}.$$

Подобный ряд, распространенный от нуля до бесконечности, носит название *интерполяционного ряда Абеля.* Исследованием сходимости этого ряда при известных предположениях относительно аналитического поведения $f(z)$ мы займемся позднее.

2. Оценки остаточного члена в общей интерполяционной формуле и основные теоремы о представлении функций интерполяционным рядом. В этом пункте мы дадим две оценки величины $R_n(z)$ остаточного члена общей интерполяционной формулы.

Первая оценка $R_n(z)$ будет получена нами в предположении, что все точки $x_{s,k}$, $0 \leqslant s \leqslant k \leqslant n$, не выходят за пределы круга радиуса r с центром в начале координат, другими словами, что

$|x_{s,k}| \leqslant r$. Оценим при этих предположениях интеграл

$$Q_p(z) = \int\limits_{\zeta_0}^{z} \ldots \int\limits_{\zeta_{p-1}}^{z_{p-1}} dz_1 \ldots dz_p;$$

$$\zeta_k = x_{0,k} + \sum_{s=1}^{k} (x_{s,k} - x_{s-1,k}) t_s. \qquad 1 \geqslant t_1 \geqslant t_2 \geqslant \ldots \geqslant t_k \geqslant 0. \quad (70)$$

При наших предположениях относительно $x_{s,k}$ мы получаем непосредственно, что $|\zeta_k| \leqslant r$, так как ζ_k не выходит за пределы наименьшего выпуклого многоугольника, содержащего точки $x_{0,k}, x_{1,k}, \ldots, x_{k,k}$. Последовательно интегрируя, мы получаем, что

$$Q_p(z) = \int\limits_{\zeta_0}^{z} \ldots \int\limits_{\zeta_{p-2}}^{z_{p-2}} z_{p-1}\, dz_{p-1}\, dz_{p-2} \ldots dz_1 - \zeta_{p-1} Q_{p-1}(z) =$$

$$= \int\limits_{\zeta_0}^{z} \ldots \int\limits_{\zeta_{p-3}}^{z_{p-3}} \frac{z_{p-2}^2}{2!}\, dz_{p-2}\, dz_{p-3} \ldots dz_1 - \frac{\zeta_{p-2}^2}{2!} Q_{p-2}(z) -$$

$$- \zeta_{p-1} Q_{p-1}(z) = \ldots = \frac{z^p}{p!} - \frac{\zeta_0^p}{p!} Q_0(z) - \frac{\zeta_1^{p-1}}{(p-1)!} Q_1(z) - \ldots$$

$$\ldots - \zeta_{p-1} Q_{p-1}(z). \qquad (71)$$

Отсюда, полагая $|z| = \rho$, пользуясь неравенствами $|\zeta_k| \leqslant r$ и беря справа и слева модули, мы получаем неравенства

$$|Q_p(z)| \leqslant \frac{\rho^p}{p!} + \frac{r^p}{p!} |Q_0(z)| + \ldots + \frac{r^2}{2!} |Q_{p-2}(z)| + r |Q_{p-1}(z)| \qquad (72)$$

для любого $p = 1, 2, \ldots, n$. Заметим также, что $Q_0(z) = 1$. Эти рекуррентные неравенства позволяют дать оценку для $|Q_n(z)|$. Действительно, определим величины z_k из рекуррентных соотношений

$$z_p = \frac{\rho^p}{p!} + \frac{r^p}{p!} z_0 + \frac{r^{p-1}}{(p-1)!} z_1 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{r^2}{p!} z_{p-2} + \frac{r}{1!} z_{p-1}; \; z_0 = 1, \; p = 1, 2, \ldots \qquad (73)$$

Для нахождения величин z_p возьмем функцию

$$F(z) = \sum_{p=0}^{\infty} z_p z^p$$

и рассмотрим выражение $e^{\rho z}+e^{rz}F(z)$. Разлагая e^{rz}, $e^{\rho z}$ и $F(z)$ в ряды Тейлора, мы получаем тогда, что

$$e^{\rho z}+e^{rz}F(z)=\sum_{p=0}^{\infty}\left[\frac{\rho^p}{p!}+\frac{r^p}{p!}z_0+\ldots+\frac{r}{1!}z_{p-1}+z_p\right]z^p=$$
$$=2\sum_{p=0}^{\infty}z_pz^p=2F(z). \tag{74}$$

Отсюда следует, что

$$F(z)=\frac{e^{\rho z}}{2-e^{rz}}=\frac{2^{\frac{\rho}{r}-1}}{\ln 2}\frac{1}{1-\frac{r}{\ln 2}z}+F_1(z),$$

причем ближайшими к началу полюсами $F_1(z)$, как нетрудно видеть, будут точки $\frac{\ln 2}{r}\pm 2\pi i$. Так как $2\pi>5\ln 2$, то

$$\left|\frac{\ln 2}{r}\pm 2\pi i\right|>\frac{5\ln 2}{r}.$$

Значит, разлагая $F(z)$ опять в ряд Тейлора, мы получим, что

$$z_p=\frac{2^{\frac{\rho}{r}-1}}{\ln 2}\left(\frac{r}{\ln 2}\right)^p+O\left[\left(\frac{r}{4\ln 2}\right)^p\right]<C_0(\rho)\left(\frac{r}{\ln 2}\right)^p. \tag{75}$$

Но в силу того что $|Q_p(z)|$ удовлетворяют неравенствам (72), а z_p определяются равенствами (73), мы получаем, очевидно, неравенства для $|Q_p(z)|$, $p=1,2,\ldots$,

$$|Q_p(z)|\leqslant z_p<C_0(\rho)\left(\frac{r}{\ln 2}\right)^p,\quad p=1,2,\ldots \tag{76}$$

Из этих неравенств можно получить теорему.

Теорема. *Если $f(z)$ — целая функция, удовлетворяющая условию, наложенному на ее рост,*

$$|f(z)|<C\rho^{\frac{1}{2}\varepsilon}2^{\frac{\rho}{r}},\quad |z|=\rho>\rho_0,\ \varepsilon>0, \tag{77}$$

где C — постоянная, ε сколь угодно мало, но фиксировано, а точки $x_{s,k}$, $0\leqslant s\leqslant k$; $k=0,1,2,\ldots$, не превосходят по модулю числа r, $|x_{s,k}|\leqslant r$, то $f(z)$ полностью определяется бесконечной последовательностью разделенных разностей $[x_{0,k},\ldots,x_{k,k}]$, $k=0,1,\ldots$, и $f(z)$ разлагается в интерполяционный ряд

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}[x_{0,k},\ldots,x_{k,k}]\,p_k(z) \tag{78}$$

[$p_k(z)$ определяется формулами (65)], *который равномерно сходится во всякой конечной части плоскости.*

Следствие. *Если при условиях нашей теоремы*

$$[x_{0,k}, \ldots, x_{k,k}] = 0, \ k = 0, 1, \ldots, \text{ то } f(z) \equiv 0.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f_{k,n}(z)$

$$f_{k,n}(\zeta) = \int_0^{\zeta} \int_0^{\zeta_1} \ldots \int_0^{\zeta_{k-1}} f^{(n)}(\zeta_k)\, d\zeta_1 \ldots d\zeta_k. \tag{79}$$

Оценивая по модулю правую часть и обозначая максимум модуля $f^{(n)}(\zeta)$ при $|\zeta| = r$ через $M_n(r)$, мы будем иметь неравенство

$$|f_{k,n}(\zeta)| \leqslant M_n(r) \int_0^{r} \int_0^{z_1} \ldots \int_0^{z_{k-1}} dz_1 \ldots dz_k = \frac{r^n}{n!} M_n(r). \tag{80}$$

Из формулы (69), интегрируя по частям, мы будем иметь, что

$$R_n(z) = \int_1 \ldots \int_n \int_{\zeta_0}^{z} \ldots \int_{\zeta_n}^{z_n} f^{(n+1)}(z_{n+1})\, dz_1 \ldots dz_{n+1}\, dt_1 \ldots dt_n =$$

$$= \int_1 \ldots \int_n \int_{\zeta_0}^{z} \ldots \int_{\zeta_{n-1}}^{z_{n-1}} f_{1,n+1}(z_n)\, dz_1 \ldots dz_n\, dt_1 \ldots dt_n -$$

$$- \frac{P_n(z)}{n!} \int_n f_{1,n+1}(\zeta)\, dt = f_{n+1,n+1}(z) - \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k(z)}{k!} \int_k f_{n-k,n+1}(\zeta_k)\, dt_k.$$

Воспользовавшись неравенством (76), мы будем иметь неравенство

$$\left| \frac{P_k(z)}{k!} \right| \leqslant |Q_k(z)| < C_0(\rho) \left(\frac{r}{\ln 2} \right)^k, \qquad |z| = \rho, \tag{81}$$

откуда уже следует, если воспользоваться неравенством (80), неравенство

$$|R_n(z)| < \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}(\rho) + C_0(\rho) \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{r}{\ln 2} \right)^k \frac{r^{n-k+1}}{(n-k+1)!} M_{n+1}(r) <$$

$$< \varepsilon_n(\rho) + C_1 \left(\frac{r}{\ln 2} \right)^{n+1} M_{n+1}(r); \qquad \varepsilon_n(\rho) \to 0, \quad n \to \infty, \tag{82}$$

где $C_1 > 0$ — постоянная и $\varepsilon_n(\rho)$ стремится к нулю не медленнее, чем $n^{-\frac{n}{2}}$, так как $f(z)$ — первого порядка и конечного типа. Оценим теперь $M_{n+1}(r)$ при условиях нашей теоремы.

Из интегрального представления

$$M_{n+1}(r) = \frac{(n+1)!}{2\pi}\left|\int\limits_{|z|=R}\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+2}}\right|, \qquad |z_0| = r < R,$$

где z_0 — та точка, в которой достигается максимум модуля $f^{(n+1)}(z)$ на круге $|z| = R$, следует при $R = \frac{r}{\ln 2}(n+1)$, что

$$M_{n+1}(r) < C_2(n+1)!\,\frac{e^{n+1}n^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}}{(n+1)^{n+1}\left(\frac{r}{\ln 2}\right)^{n+1}} < C_3 n^{-\varepsilon}\left(\frac{\ln 2}{r}\right)^{n+1}, \qquad (83)$$

где $C_3 > 0$ — постоянная.

Сопоставляя это неравенство с неравенством (82), мы получаем, что

$$|R_n(z)| < \varepsilon_n(\rho) + C_1C_3n^{-\varepsilon} < C_4n^{-\varepsilon}, \qquad n > n_0(\rho),\ \varepsilon > 0,$$

где $C_n > 0$ — постоянная. Это неравенство и доказывает нашу теорему, другими словами, равномерную сходимость ряда (78) в любом круге конечного радиуса. Дальнейшие уточнения и обобщения см. § 7 главы I.

Другую оценку остаточного члена $R_n(z)$, более удобную при иных расположениях точек $x_{i,k}$ на комплексной плоскости, можно получить, оценивая другим способом интеграл

$$\int\limits_{\zeta_0}^{z}\cdots\int\limits_{\zeta_n}^{z_n} f^{(n+1)}(z_{n+1})\,dz_1\ldots dz_{n+1} = T_n(z). \qquad (84)$$

Здесь мы будем предполагать, что $\zeta_0, \ldots, \zeta_n$ и z могут иметь любые комплексные значения, а $f(\zeta)$ — функция, регулярная в определенной выше области $\bar{D}_n$. Сделаем замену переменных, положив $z_k = z'_k + \zeta_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n+1$. Тогда мы получим, что

$$T_n(z) = \int\limits_0^{z-\zeta_0}\int\limits_0^{z'_1+\zeta_0-\zeta_1}\cdots\int\limits_0^{z'_n+\zeta_{n-1}-\zeta_n} f^{(n+1)}(z'_{n+1}+\zeta_n)\,dz'_1\ldots dz'_{n+1}. \qquad (85)$$

Так как $\zeta_k = x_{0k} + (x_{1,k} - x_{0,k})t_1 + \ldots + (x_{k,k} - x_{k-1,k})t_k$, $1 \geqslant t_1 \geqslant t_2 \geqslant \ldots \geqslant t_k \geqslant 0$, то, как мы уже отмечали, ζ_k не выходит за пределы наименьшего многоугольника, содержащего точки $x_{0,k}, \ldots, x_{k,k}$; обозначим его Δ_k. В частном случае Δ_k может быть отрезком. Пусть d_k будет диаметр наименьшей окружности, содержащей многоугольники Δ_k и Δ_{k-1}. Пусть также $d_0 = \max|z-\zeta_0| = \max|z - x_{0,0}|$, если z также изменяется в какой-либо

ограниченной области. Через $\overline{D}_n$ обозначим наименьшую замкнутую область, содержащую все области Δ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, область изменения z и точку $x_{0,0}$. Нетрудно заметить, что диаметр области $\overline{D}_n$, другими словами, диаметр наименьшего круга, в который может быть помещена область $\overline{D}_n$, не превзойдет величины $S_n = d_0 + d_1 + \ldots + d_n$.

Положим также

$$\max_{z \in D} |f^{(n+1)}(z)| = M_{n+1}(D), \tag{86}$$

где D — некоторая область изменения z.

Введем обозначения:

$$I_k = \int_0^{z_k+\zeta_{k-1}-\zeta_k} \ldots \int_0^{z_n+\zeta_{n-1}-\zeta_n} f^{(n+1)}(z_n + \zeta_n)\, dz_{k+1} \ldots dz_{n+1},$$

$$k = 0, 1, \ldots, n; \; z_0 = z; \; \zeta_{-1} = 0.$$

Считая, что интегрирование идет по прямолинейным отрезкам и пользуясь тем, что модуль интеграла не превосходит максимума модуля подынтегральной функции, умноженного на длину пути интегрирования, мы получим ряд неравенств

$$|I_n| \leqslant \int_0^{|z_n+\zeta_{n-1}-\zeta_n|} dt_{n+1} M_{n+1}(\overline{D}_n), \; |z_{n+1}| = t_{n+1},$$

$$|I_{n-1}| \leqslant \int_0^{|z_{n-1}+\zeta_{n-2}-\zeta_{n-1}|} |I_n|\, dt_n, \; |z_n| = t_n.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|I_0| \leqslant \int_0^{|z-\zeta_0|} |I_1|\, dt_1, \; |z_1| = t_1.$$

Из этих неравенств непосредственно следует, что

$$|I_0| = |T_n(z)| \leqslant M_{n+1}(\overline{D}_n) \int_0^{|z-\zeta_0|} \int_0^{t_1+|\zeta_1-\zeta_0|} \ldots \int_0^{t_n+|\zeta_n-\zeta_{n-1}|} dt_1 \ldots dt_{n+1}.$$

Далее, так как при $A > 0$, $a \geqslant 0$, $F(t) \geqslant 0$, $0 \leqslant t \leqslant A + a$,

$$\int_0^A dt_1 \int_0^{t_1+a} F(t_2)\, dt_2 = \int_a^{A+a} dt_1 \int_0^{t_1} F(t_2)\, dt_2 \leqslant \int_0^{A+a} dt_1 \int_0^{t_1} F(t_2)\, dt_2,$$

то наше неравенство для $|T_n(z)|$ может быть переписано в более

простой форме:

$$|T_n(z)| \leqslant M_{n+1}(\bar{D}_n) \int\limits_0^{|z-\zeta_0|+|\zeta_1-\zeta_0|+\ldots+|\zeta_n-\zeta_{n-1}|} \int\limits_0^{t_1} \ldots \int\limits_0^{t_n} dt_1 \ldots dt_{n+1} =$$

$$= M_{n+1}(\bar{D}_n) \frac{[|z-\zeta_0|+|\zeta_1-\zeta_0|+\ldots+|\zeta_n-\zeta_{n-1}|]^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant$$

$$\leqslant M_{n+1}(\bar{D}_n) \frac{S_n^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad (87)$$

где S_n имеет ранее определенное значение.

Воспользовавшись этим последним неравенством, мы уже можем дать оценку для $|R_n(z)|$:

$$|R_n(z)| = \left|\int\limits_1 \ldots \int\limits_n T_n(z)\, dt_1 \ldots dt_n\right| \leqslant M_{n+1}(\bar{D}_n) \frac{S_n^{n+1}}{(n+1)!}. \qquad (88)$$

Совершенно так же мы можем получить оценку и для $|R_n^{(\nu)}(z)|$. Действительно, мы будем иметь

$$R_n^{(\nu)}(z) = \int\limits_\nu \int\limits_{\nu+1} \ldots \int\limits_n \int\limits_{\zeta_\nu}^{z} \ldots \int\limits_{\zeta_n}^{z_n} f^{(n+1)}(z_{n+1})\, dz_{\nu+1} \ldots dz_{n+1}\, dt_\nu \ldots dt_n =$$

$$= \int\limits_\nu \ldots \int\limits_n T_n^{(\nu)}(z)\, dt_\nu \ldots dt_n. \qquad (89)$$

Но в этом случае областью изменения z_{n+1} будет наименьшая область, содержащая область изменения z, Δ_ν, $\Delta_{\nu+1}, \ldots, \Delta_n$. Эту область будем обозначать $\bar{D}_{n,\nu}$. Тогда получим неравенство для $T_n^{(\nu)}(z)$, аналогичное неравенству (87):

$$|T_n^{(\nu)}(z)| \leqslant M_{n+1}(\bar{D}_{n,\nu}) \frac{[|z-\zeta_\nu|+|\zeta_{\nu+1}-\zeta_\nu|+\ldots+|\zeta_n-\zeta_{n-1}|]^{n-\nu+1}}{(n-\nu+1)!} <$$

$$< M_{n+1}(\bar{D}_{n,\nu}) \frac{[|z-x|+\tau_\nu+S_n-S_\nu]^{n-\nu+1}}{(n-\nu+1)!},$$

$$\tau_\nu = \max|\zeta_\nu - x|, \qquad (90)$$

где S_n имеет прежнее значение, а x — любое число. Из этого неравенства следует неравенство для $|R_n^{(\nu)}(z)|$, так как

$$|R_n^{(\nu)}(z)| \leqslant \int\limits_\nu \ldots \int\limits_n |T_n^{(\nu)}(z)|\, dt_\nu \ldots dt_n \leqslant$$

$$\leqslant M_{n+1}(\bar{D}_{n,\nu}) \frac{[|z-x|+\tau_\nu+S_n-S_\nu]^{n-\nu+1}}{(n-\nu+1)!}. \qquad (91)$$

Сравнивая выражения (65) и (69), мы видим, что, положив в выражении (69) для $R_n^{(\nu)}(z)$, $f^{(n+1)}(z) \equiv 1$ и умножив его правую часть на $(n+1)!$, мы получаем $p_{n+1}^{(\nu)}(z)$. Это позволяет сразу дать оценку $|p_{n+1}^{(\nu)}(z)|$. Действительно, мы будем иметь неравенства

$$|p_{n+1}^{(\nu)}(z)| = (n+1)! \left| \int_{\nu} \ldots \int_{n} \int_{\zeta_\nu}^{z} \ldots \int_{\zeta_n}^{z_n} dz_{\nu+1} \ldots dz_{n+1}\, dt_\nu \ldots dt_n \right| \leqslant$$

$$\leqslant [|z-x| + \tau_\nu + S_n - S_\nu]^{n+1-\nu} \cdot (n+1)^\nu,$$

$$\tau_\nu = \max|\zeta_\nu - x|, \quad S_n - S_\nu = \sum_{k=\nu+1}^{n} d_k, \tag{92}$$

которые будут непосредственным следствием неравенств (91). Неравенства (87), (91) и (92) позволят нам доказать теоремы о представимости аналитических функций с помощью общих интерполяционных рядов. Отметим, что неравенства (87)—(92) для частного случая $x_{0,k} = x_{1,k} = \ldots = x_{k,k} = x_k$, $k = 0, 1, \ldots$, впервые были доказаны В. Л. Гончаровым.

3. Основные теоремы о представлении функций общим интерполяционным рядом.

Теорема I [1]). *Если существует предел*

$$\lim_{\substack{0 \leqslant s \leqslant k \\ k \to \infty}} x_{s,k} = x, \tag{93}$$

и, более того, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ *сходится, а аналитическая функция* $f(z)$ *регулярна в круге радиуса* R *с центром в точке* x, *внутри которого лежат все точки* $x_{s,k}$, $0 \leqslant s \leqslant k$; $k = 0, 1, 2, \ldots$, *то функция* $f(z)$ *представляется рядом*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} [x_{0,k}, x_{1,k}, \ldots, x_{k,k}]\, p_k(z), \tag{94}$$

равномерно сходящимся во всяком круге, внутреннем по отношению к кругу $|z-x| \leqslant R$.

Доказательство. Пусть R_1 — радиус круга с центром в точке x, $R_1 < R$, и пусть внутри этого круга лежат все точки $x_{s,k}$, $0 \leqslant s \leqslant k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Пусть также $R > R_2 > R_1$ и $\frac{R_2 - R_1}{8} > \varepsilon > 0$ сколь угодно мало. В силу существования преде-

---

[1]) Теорема I была доказана В. Л. Гончаровым [2] для случая $x_{0,k} = \ldots = x_{k,k}$.

ла (93) и сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ можно найти такое N, что при $k \geqslant N$

$$|x_{s,k-1} - x| \leqslant \varepsilon, \; 0 \leqslant s \leqslant k-1; \; \varepsilon_k = \sum_{n=k}^{\infty} d_n \leqslant \varepsilon. \tag{95}$$

Из третьего представления разделенной разности

$$[x_{0,k}, \ldots, x_{k,k}] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)\,dz}{\prod_{s=0}^{k} [(z-x) + (x - x_{s,k})]},$$

где Γ есть окружность $|z - x| = R_2$, при $k \geqslant N$ следует теперь неравенство

$$|[x_0, k, \ldots, x_{k,k}]| \leqslant \frac{R_2}{[R_2 - \varepsilon]^{k+1}} \max_{|z-x|=R_2} |f(z)| < MR_3^{-k},$$

$$R_3 = R_2 - \varepsilon > \frac{R_2 + R_1}{2}, \tag{96}$$

где M не зависит от k.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=N}^{\infty} [x_{0,k}, \ldots x_{k,k}]\, p_k^{(N)}(z). \tag{97}$$

Неравенства (92) в нашем случае дают

$$k^{-N} |p_k^{(N)}(z)| < [|z - x| + \tau_{N-1} + S_{k-1} - S_{N-1}]^{k-N} <$$
$$< [R_1 + 2\varepsilon]^{k-N} < \left[R_1 + \frac{R_2 - R_1}{4}\right]^{k-N}, \tag{98}$$

если только z не выходит за пределы круга $|z - x| \leqslant R_1$.

Из неравенств (96) и (98) непосредственно следует неравенство

$$|[x_{0,k}, \ldots, x_{k,k}]\, p_k^{(N)}(z)| < M_1 \left[\frac{R_1 + \frac{R_2 - R_1}{4}}{R_1 + \frac{R_2 - R_1}{2}}\right]^k k^N, \quad k \geqslant N,$$

при $|z - x| \leqslant R_1$, другими словами, равномерная сходимость ряда (97), если z не выходит за пределы круга $|z - x| \leqslant R_1$. Так как равномерно сходящийся ряд аналитических функций можно любое число раз интегрировать по любым конечным путям, не выходящим из области равномерной сходимости, то из равномерной сходимости ряда (97) следует непосредственно и равномерная сходимость ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} [x_{0,k}, \ldots, x_{k,k}]\, p_k(z) = f_1(z) \tag{99}$$

в круге $|z-x|\leqslant R_1$. Значит, $f_1(z)$ будет аналитической регулярной функцией в круге $|z-x|\leqslant R_1$ при любом $R_1<R$.

Докажем теперь, что $f_1(z)\equiv f(z)$.

Рассмотрим величину $R_n^{(N)}(z)$, $n\geqslant N$:

$$R_n^{(N)}(z)=f^{(N)}(z)-P_n^{(N)}(z), \tag{100}$$

где $P_n(z)$ определено равенствами (68).

Воспользовавшись оценкой (91), мы будем иметь неравенство

$$|R_n^{(N)}(z)|\leqslant M_{n+1}(\overline{D}_{n,N})\frac{[|z-x|+\tau_N+S_n-S_N]^{n-N+1}}{(n-N+1)!}. \tag{101}$$

Далее, так как $M_{n+1}(\overline{D}_{n,N})$ есть максимум $|f^{(n+1)}(\zeta)|$, где ζ не выходит за пределы наименьшей области, содержащей z и все $x_{s,k}$, $0\leqslant s\leqslant k$, $k\geqslant N$, то при условии, что $|z-x|\leqslant\varepsilon$, мы в силу неравенств (95) имеем неравенство

$$M_{n+1}(\overline{D}_{n,N})\leqslant\max|f^{(n+1)}(\zeta)|=\max\left|\frac{(n+1)!}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\eta)\,d\eta}{(\eta-\zeta)^{n+2}}\right|<$$

$$<\frac{R_2(n+1)!}{(R_2-\varepsilon)^{n+2}}\max_{|\eta-x|=R_2}|f(\eta)|<M'(n+1)!\,(R_2-\varepsilon)^{-n}, \tag{102}$$

где Γ есть окружность $|\eta-x|=R_2$, а M' не зависит от n. R_2 по-прежнему удовлетворяет условиям $R_1<R_2<R$, где R_1 имеет прежний смысл.

Теперь из неравенств (101) и (102), принимая во внимание, что $\tau_N\leqslant\varepsilon$ и $S_n-S_N\leqslant\varepsilon$, мы получаем, что при $|z-x|\leqslant\varepsilon$

$$|R_n^{(N)}(z)|<M'(n+1)!\,(R_2-\varepsilon)^{-n}\frac{(3\varepsilon)^{n-N+1}}{(n-N+1)!}<M''n^N\left[\frac{3\varepsilon}{R_2-\varepsilon}\right]^n, \tag{103}$$

где M'' опять не зависит от n.

Но ε можно взять сколь угодно малым, в частности, таким, чтобы выполнялось неравенство $6\varepsilon<R_2-\varepsilon$. Выбрав таким образом ε и найдя соответствующее этому ε число N, мы получаем неравенство

$$|R_n^{(N)}(z)|<M''\frac{(n+1)^N}{2^n},\quad |z-x|\leqslant\varepsilon. \tag{104}$$

Неравенство (104) показывает, что $R_n^{(N)}(z)$ равномерно стремится к нулю с ростом n при $|z-x|\leqslant\varepsilon$. Отсюда следует, что

$$f^{(N)}(z)=\sum_{k=M}^{\infty}[x_{0,k},\ldots,x_{k,k}]\,p_1^{(N)}(z)=f_1^{(N)}(z).$$

Из того, что N-е производные функций $f(z)$ и $f_1(z)$ совпадают, следует, что $f_1(z) - f(z) = q(z)$, где $q(z)$ — многочлен степени не выше $N-1$. Но разделенные разности $[x_{0,k}, \ldots, x_{k,k}]$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N, \ldots$, у функций $f(z)$ и $f_1(z)$ одинаковы, так как разделенная разность $[x_{0,k}, \ldots, x_{k,k}]$ для многочлена $p_s(z)$ равна нулю при $s \neq k$ и единице при $s = k$. Значит, для многочлена $q(z)$ все разделенные разности $[x_{0,k}, \ldots, x_{k,k}] = 0$ при $k = 0, 1, \ldots, N$. Отсюда следует, что $q(z) \equiv 0$ и $f_1(z) \equiv f(z)$. Таким образом наша теорема полностью доказана.

Пусть теперь $f(z)$ — целая функция, а точки $x_{s,k}$ уходят в бесконечность, когда k стремится к бесконечности. В этом случае как бы медленно ни стремились к бесконечности числа $x_{s,k}$, всегда можно построить целую функцию $f(z)$, для которой все коэффициенты ряда (94) будут нулями, другими словами, ряд (94) не может сходиться к функции $f(z)$ ни в какой сколь угодно малой области.

Докажем это утверждение для частного случая обобщенного ряда Абеля — Гончарова, когда $x_{s,k} = x_k$, $s = 0, 1, \ldots, k$[1]). В этом случае ряд (94) будет иметь вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(x_k) \int_{x_0}^{z} \int_{x_1}^{z_1} \cdots \int_{x_{n-1}}^{z_{n-1}} dz \ldots dz_n. \tag{105}$$

Зададим произвольную последовательность положительных чисел

$$a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots a_0 > 0, \quad \lim a_k = \infty,$$

и построим целую функцию

$$f(z) = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{\sum_{s=1}^{nk} \frac{z^s}{s a_k^s}},$$

где числа n_k выбраны так, чтобы произведение в правой части сходилось равномерно в любом конечном круге. Это, очевидно, можно сделать в силу условий $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Эта функция будет действительной при действительных значениях z, и по теореме Ролля в каждом интервале (a_k, a_{k+1}), $k = 0, 1, \ldots$, будет хотя бы один нуль производной $f'(z)$, который мы обозначим $a_k^{(1)}$, $a_k < a_k^{(1)} < a_{k+1}$. Совершенно так же в каждом интервале $(a_k^{(1)}, a_{k+1}^{(1)})$ будет нуль $f''(z)$, который мы обозначим $a_k^{(2)}$. Вообще, продолжая этот процесс, мы можем утверждать, что между каждыми двумя

[1]) Пример В. Л. Гончарова см. [2].

нулями $f^{(\nu)}(z)$, $a_k^{(\nu)}$ и $a_{k+1}^{(\nu)}$, находится хотя бы один нуль $a_k^{(\nu+1)}$, $a_k^{(\nu)} < a_k^{(\nu+1)} < a_{k+1}^{(\nu)}$, следующей производной, $f^{(\nu+1)}(z)$, нашей функции $f(z)$. Положим теперь $x_k = a_0^{(k)}$. Тогда, очевидно, имеют место неравенства $x_{n-1} < x_n$ и $x_n = a_0^{(n)} < a_1^{(n-1)} < \ldots < a_n$. Отсюда следует, что

$$\sum_{\nu=1}^{n} |x_{\nu-1} - x_\nu| = \sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - x_{\nu-1}) = x_n < a_n.$$

Но по способу выбора x_n мы будем иметь, что $f^{(n)}(x_n) = 0$, $n = 0, 1, \ldots$ Итак, ряд (105) не может сходиться к функции $f(z)$ ни в какой области и даже ни для какой последовательности точек, имеющей предельную точку на конечной части плоскости, так как в этом случае $f(z)$ должна была бы быть тождественным нулем. Произвольная медленность роста x_k гарантируется произвольностью выбора a_n.

Положим теперь

$$S_n - S_0 = S_n - \max_{|z| \leqslant R} |z - x_{0,0}| = \sum_{k=1} d_k = \tau_n$$

и введем в рассмотрение функцию $N(r)$, которая определяется условиями

$$\tau_n \leqslant r, \quad n \leqslant N(r); \quad \tau_n > r, \quad n > N(r). \tag{106}$$

Эта функция будет монотонно не убывающей кусочно-постоянной функцией, растущей неограниченно, если τ_n стремится к бесконечности с ростом n.

Теорема II[1]. *Обозначим через $M(r)$ максимум модуля целой функции $f(z)$, другими словами, пусть*

$$M(r) = \max_{|z| = r} f(z). \tag{107}$$

Если для этой функции $f(z)$ выполнены условия

$$\ln M(r) < \lambda N(\theta r), \quad 0 < \lambda < \ln \frac{1-\theta}{\theta}; \quad r > r_0, \tag{108}$$

где $N(r)$ определяется условиями (106), *а θ — какое-либо фиксированное действительное число $0 < \theta < \frac{1}{2}$, то $f(z)$ представляется*

---

[1]) Теорема II была для случая $x_{0,k} = \ldots = x_{k,k}$ и $F(z)$ конечного порядка доказана В. Л. Гончаровым [2], а для $F(z)$ — любой целой функции для того же случая — И. И. Ибрагимовым («О сходимости интерполяционного ряда Абеля — Гончарова», Матем. сборник 21 (63), 1947, стр. 49).

обобщенным интерполяционным рядом

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} [x_{0,k}, \ldots, x_{k,k}]\, p_k(z), \tag{109}$$

равномерно сходящимся к $f(z)$ *в любом круге конечного радиуса* [$p_k(z)$ *определяются равенством* (65)].

Величина τ_n по-прежнему определяется здесь соотношениями

$$\left.\begin{aligned} &\tau_n = \sum_{k=1}^{n} \max|\zeta_k - \zeta_{k-1}|, \quad \zeta_k = x_{0,k} + \sum_{s=1}^{k} x_{s,k} t_k, \\ &1 \geqslant t_1 \geqslant t_2 \geqslant \ldots \geqslant t_n \geqslant 0; \qquad \lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty. \end{aligned}\right\} \tag{110}$$

Доказательство. Рассмотрим поведение $R_n(z)$. Пусть z не выходит за пределы круга $|z| \leqslant \rho$. Тогда в силу неравенства (98) мы можем написать оценку

$$|R_n(z)| < M_{n+1}(\overline{D}_n) \frac{s_n^{n+1}}{(n+1)!} <$$

$$< M_{n+1}(\overline{D}_n) \frac{(\rho + a + \tau_n)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad a = |x_{0,0}|. \tag{111}$$

Область $\overline{D}_n$ есть наименьшая выпуклая область, содержащая область изменения z и все точки $x_{s,k}$, $0 \leqslant s \leqslant k$; $k = 0, 1, \ldots, n$. Так как d_k есть диаметр наименьшего круга, содержащего точки $x_{s,k}$, $0 \leqslant s \leqslant k$, и $x_{s,k-1}$, $0 \leqslant s \leqslant k-1$, то совершенно очевидно, что область $\overline{D}_n$ не выйдет за пределы круга с центром в начале и радиусом $\rho + a + \tau_n$. Выберем теперь число η, удовлетворяющее условиям $\theta < \frac{1}{\eta} < \frac{1}{2}$ и $\ln(\eta - 1) > \lambda$, что можно сделать, так как $\ln\left(\frac{1}{\theta} - 1\right) > \lambda$. Тогда, положив $\rho + a + \tau_n = \mu_n$, мы можем оценить величину $M_{n+1}(\overline{D}_n)$, так как

$$M_{n+1}(\overline{D}_n) < \frac{(n+1)!}{2\pi} \max_{|\zeta| \leqslant \mu_n} \left| \int_{\Gamma} \frac{f(z)\,dz}{(z-\zeta)^{n+2}} \right|,$$

где Γ есть окружность $|z| = \eta\mu_n$ Это неравенство дает возможность оценить величину $M_{n+1}(\overline{D}_n)$, воспользовавшись тем, что модуль интеграла не превышает максимума модуля подынтегральной функции, умноженного на длину пути интегрирования. Мы получаем, таким образом, неравенство

$$M_{n+1}(\overline{D}_n) < \eta(n+1)! \frac{M(\eta\mu_n)}{(\eta - 1)^{n+2}\mu_n^{n+1}}. \tag{112}$$

Из неравенств (111) и (112) мы непосредственно получаем

оценку $|R_n(z)|$ при $n > n_0(\rho)$:

$$|R_n(z)| < \eta(\eta-1)^{-n-2}M(\eta\mu_n) < \frac{\eta}{(\eta-1)^2}(\eta-1)^{-n}e^{\lambda N(\eta\theta\mu_n)} <$$
$$< \frac{\eta}{(\eta-1)^2}e^{-[\ln(\eta-1)-\lambda]n}, \qquad (113)$$

так как при $n \geqslant n_0(\rho)$, $\theta\eta(\rho+a+\tau_n) < \tau_n$, и поэтому

$$\ln M(\eta\mu_n) < \lambda N(\theta\eta\mu_n) < \lambda_n,$$

а $N(\eta\theta\mu_n)$ по определению меньше или равно n.

Неравенство (113), в силу того что $\ln(\eta-1)-\lambda > 0$, и доказывает равномерную сходимость ряда (109) в любом конечном круге.

В условиях этой теоремы величину θ мы предполагали меньшей половины. Это предположение существенно. Для частного случая $x_{s,k} = x_k$, $s = 0, 1, \ldots, k$, И. И. Ибрагимов показал, что всегда можно подобрать такую целую функцию $f(z)$ и точки x_k так, чтобы при $\frac{1}{2} < \theta < 1$ ряд (109) был расходящимся, несмотря на выполнение условия $M(r) < N(\theta r)$.

§ 6. Приближение функций

1. Постановка задач и свойства непрерывных функций. Формула Лагранжа, дающая многочлены, которые должны приближать функцию на отрезке, не всегда служит решением задачи о приближении функции многочленами. Известно [1]), что какова бы ни была треугольная таблица узлов интерполяции, в классе непрерывных на отрезке функций найдется функция, для которой интерполяционный процесс Лагранжа не будет сходящимся. Но несмотря на это, задача о приближении многочленами произвольной, непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции имеет положительное решение. Другими словами, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то, как бы ни было мало ε, всегда найдется многочлен $P_n(x)$, такой, что

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon.$$

Это свойство степеней x называется полнотой степеней x в классе непрерывных функций на любом конечном отрезке. Обратно, всякая равномерно сходящаяся на отрезке $[a, b]$ последовательность многочленов сходится к непрерывной функции на этом отрезке. Другими словами, совокупность всех многочленов всюду плотна в пространстве непрерывных функций. Теорема о полноте системы $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ была установлена Вейерштрассом и носит его имя.

---

[1]) См. И. П. Натансон [1]

Интерполяционный процесс Лагранжа, связанный с определенной треугольной таблицей узлов интерполяции

$$\begin{array}{l} x_{0,\,0}, \\ x_{1,\,0}\; x_{1,\,1}, \\ \dots\dots\dots \\ x_{n,\,0}\; x_{n,\,1} \dots x_{n,\,n}, \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

будет сходящимся процессом для более узкого класса функций, чем все непрерывные функции, причем этот класс определяется заданной бесконечной таблицей узлов. Если мы сохраним требование совпадения значений многочленов со значениями $f(x)$ в узлах $x_{n,\,0}, \dots, x_{n,\,n}$, то можно легко построить последовательность многочленов $P_n(x)$, равномерно сходящихся к произвольной непрерывной на отрезке функции, предполагая, что степень $P_n(x)$ не превышает $\varphi(n)$, $\varphi(n) > n$, где рост $\varphi(n)$ зависит только от треугольной таблицы узлов. Существуют и другие способы изменения условий, накладываемых на интерполяционный процесс для того, чтобы он был сходящимся для всех непрерывных функций. В качестве процесса, близкого по конструкции к интерполяционному, можно привести процесс восстановления непрерывной функции по ее значениям на отрезке $[0, 1]$ в точках $\frac{k}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n$, принадлежащий С. Н. Бернштейну. С. Н. Бернштейн показал, что для всякой непрерывной на отрезке $[0, 1]$ функции $f(x)$ последовательность многочленов

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n!}{k!\,(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k}$$

равномерно сходится к этой функции.

Мы остановимся лишь на некоторых из вопросов приближения функций, отсылая читателя для более глубокого изучения проблем приближения функций к книге И. П. Натансона «Конструктивная теория функций». Сходимость того или иного процесса приближения функций тесно связана с аналитическими свойствами, в частности с характеристиками непрерывности того класса функций, которые допускают равномерные приближения с помощью выбранного процесса. Поэтому мы введем понятие *модуля непрерывности* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, который мы будем обозначать $\omega(\delta)$, где

$$\omega(\delta) = \max_{|x-y| \leqslant \delta} |f(x) - f(y)|, \quad a \leqslant x;\ y \leqslant b. \tag{114}$$

Модуль непрерывности $\omega(\delta)$ непрерывной на отрезке функции $f(x)$ есть непрерывная функция δ в силу равномерной непрерывности $f(x)$ на этом отрезке. Кроме того, модуль непрерывности есть монотонно неубывающая функция δ, что непосредственно следует из его определения. Далее,

$$|f(d)-f(c)| \leqslant |f(c+\delta)-f(c)| + |f(c+2\delta) - f(c+\delta)| + \ldots + |f(d)-f(c+n\delta)| \leqslant$$
$$\leqslant (n+1)\,\omega(\delta), \quad n = \left[\frac{c-d}{\delta}\right].$$

В случае, если $\delta = \frac{c-d}{n}$, то

$$|f(d)-f(c)| \leqslant n\omega\left(\frac{c-d}{n}\right)$$

(так как $d = c + n\delta$).

Отсюда в силу определения и монотонного неубывания $\omega(\delta)$ следует

$$\omega(\delta) = \max_{|x-y|\leqslant\delta} |f(x)-f(y)| =$$
$$= |f(x')-f(y')| < n\omega\left(\frac{x'-y'}{n}\right) \leqslant n\omega\left(\frac{\delta}{n}\right). \quad (115)$$

В частном случае, когда $[c, d]$ совпадает со всем отрезком $[a, b]$,

$$|f(b)-f(a)| \leqslant n\omega\left(\frac{b-a}{n}\right). \quad (116)$$

Кроме того, так как $\delta \leqslant b-a$, можно написать

$$|f(b)-f(a)| < \left(\frac{b-a}{\delta}+1\right)\omega(\delta)$$

или

$$\omega(\delta) > \frac{|f(b)-f(a)|}{2(b-a)}\,\delta. \quad (116')$$

Разбивая отрезок $[a, b]$ на n равных частей точками

$$x_1, \ldots, x_{n-1}; \quad x_0 = a, \; x_n = b; \quad x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}, \; 0 \leqslant k \leqslant n-1$$

и соединяя отрезками прямых точки плоскости $[x_k, f(x_k)]$ и $[x_{k+1}, f(x_{k+1})]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, лежащие на кривой $y = f(x)$, мы получим некоторую непрерывную ломаную линию с уравнением $y = f_n(x)$. Функция $y = f_n(x)$ является ломаной, вписанной в кривую $y = f(x)$, причем тангенс угла наклона каждого из ее прямолинейных отрезков к оси x не превышает по абсолютной величине

$$\frac{n}{b-a}\left|f\left(x+\frac{b-a}{n}\right)-f(x)\right| \leqslant \frac{n}{b-a}\,\omega\left(\frac{b-a}{n}\right).$$

Поэтому $f_n(x)$ удовлетворяет условиям Липшица с той же константой $\frac{n}{b-a}\omega\left(\frac{b-a}{n}\right)$:

$$|f_n(x)-f_n(y)|\leqslant\frac{n}{b-a}\omega\left(\frac{b-a}{n}\right)|x-y| \tag{117}$$

С другой стороны, из элементарных геометрических соображений следует неравенство

$$|f(x)-f_n(x)|=$$
$$=|\alpha[f(x)-f(x_k)]+\beta[f(x)-f(x_{k+1})]|\leqslant\omega\left(\frac{b-a}{n}\right), \tag{118}$$

где $x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1}$, $\alpha\geqslant 0$; $\beta\geqslant 0$; $\alpha+\beta=1$.

Допустим теперь, что $f(x)$ — периодическая с периодом τ s раз дифференцируемая функция, а $f^{(s)}(x)$ имеет на всей оси модуль непрерывности $\omega(\delta)$.

Рассмотрим при произвольных $x, t_1, \ldots, t_{s+1}$ величину

$$\Delta_{s+1}(x, t)=\Delta_{s+1}(x, t_1, \ldots, t_{s+1})=$$
$$=(-1)^{s+1}\int_0^{t_1}\ldots\int_0^{t_s}[f^{(s)}(x+x_1+\ldots+x_s+t_{s+1})-$$
$$-f^{(s)}(x+x_1+\ldots+x_s)]\,dx_1\ldots dx_s. \tag{119}$$

Непосредственным интегрированием легко убедиться в справедливости равенства

$$\Delta_{s+1}(x, t)=f(x)-\sum_{k=1}^{s+1}f(x+t_k)+$$
$$+\sum_{1\leqslant k<l\leqslant s+1}f(x+t_k+t_l)-\ldots\pm f(x+t_1+\ldots+t_{s+1}). \tag{120}$$

Разделив интервал $[-p\tau, p\tau]$ на $2pn$ равных частей и соединив точки $\left[k\frac{\tau}{n}, f^{(s)}\left(k\frac{\tau}{n}\right)\right]$ и $\left[(k+1)\frac{\tau}{n}, f^{(s)}\left[(k+1)\frac{\tau}{n}\right]\right]$, $k=-pn, -pn+1, \ldots, 0, \ldots, pn-1$, отрезками прямых, мы получим функцию $f_n(x)$, удовлетворяющую неравенствам (117) и (118) с заменой в них $f(x)$ на $f^{(s)}(x)$, $b-a$ на $2p\tau$ и n на $2pn$. Если мы доопределим $f_n(x)$ на всей оси с помощью уравнения $f_n(x+\tau)=f_n(x)$, то мы получим, что $f_n(x)$ — периодическая функция [так как $f^{(s)}(x)$ имеет период τ] с периодом τ, для которой всегда будут выполнены неравенства (117) и (118). Равенство (119), положив

$$\xi=x+x_1+\ldots+x_s+t_{s+1},\quad \eta=x+x_1+\ldots+x_s,$$

мы можем переписать в виде

$$(-1)^{s+1}\Delta_{s+1}(x, t) = \\ = \int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_s}\{[f^{(s)}(\xi)-f_n(\xi)]+[f_n(\eta)-f^{(s)}(\eta)]\}\,dx_1\ldots dx_s + \\ + \int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_s}[f_n(\xi)-f_n(\eta)]\,dx_1\ldots dx_s. \qquad (121)$$

Предполагая, что $|t_{s+1}|<p\tau$, мы из этого равенства, воспользовавшись неравенствами (117) и (118), получаем неравенство

$$|\Delta_{s+1}(x, t)| < \\ < \int_0^{|t_1|}\cdots\int_0^{|t_s|}\left[2\omega\left(\frac{\tau}{n}\right)+\frac{n}{\tau}\omega\left(\frac{\tau}{n}\right)|t_{s+1}|\right]dx_1\ldots dx_s = \\ = |t_1\ldots t_s|\left[2\omega\left(\frac{\tau}{n}\right)+\frac{n}{\tau}\omega\left(\frac{\tau}{n}\right)|t_{s+1}|\right]. \qquad (122)$$

Мы пришли, таким образом, к вспомогательному предложению.

Лемма 1. *Если $f(x)$ — периодическая с периодом τ функция, s раз дифференцируемая, $f^{(s)}(x)$ имеет модуль непрерывности на всей оси $\omega(\delta)$ и $n\geqslant 1$ — произвольное целое число, то для $\Delta_{s+1}(x, t)$, определенного равенством* (120), *при произвольных $x, t_1, \ldots, t_{s+1}$ выполняется неравенство* (122).

2. Приближение функций многочленами. Пусть $f(x)$ — непрерывная периодическая функция с периодом 2π. Положим

$$E_n = \min_{P_n}\max_x|f(x)-P_n(x)|,$$

$$P_n(x) = a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx). \qquad (123)$$

Тригонометрический многочлен, при котором достигается минимум в правой части (123), называется *тригонометрическим многочленом наилучшего приближения*. Числа E_n, очевидно, монотонно не возрастают.

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Положим

$$E_n' = \min_{P_n}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P_n(x)|, \qquad P_n(x) = \sum_{k=0}^{n}a_kx^k. \qquad (124)$$

Многочлен $P_n(x)$, осуществляющий минимум в правой части (124), называется *многочленом наилучшего приближения*, а числа E_n' так-

же монотонно не возрастают. Вейерштрассом было доказано стремление к нулю чисел E_n и E_n'. Так как скорость убывания чисел E_n и E_n' связана с аналитическими свойствами приближаемых функций, то мы приведем здесь две теоремы, дающие не только чисто качественные факты стремления к нулю чисел E_n и E_n', но и порядки их убывания в зависимости от свойств функций. Эти оценки будут нам нужны и в дальнейшем.

Наибольшие заслуги в развитии стройной теории приближений принадлежат С. Н. Бернштейну, исходившему в своих исследованиях из замечательных общих положений, установленных основоположником теории наилучших приближений П. Л. Чебышевым.

Теорема I. *Если $f(x)$ — периодическая с периодом 2π s раз дифференцируемая функция и модуль непрерывности $f^{(s)}(x)$ будет $\omega_s(\delta)$, то*

$$E_n < e^{\lambda(s+1)} \frac{\omega_s\left(\frac{1}{n}\right)}{n^s}, \tag{125}$$

где λ — абсолютная постоянная.

Доказательство. Положим

$$\varphi_n(x) = \left[\frac{\sin\frac{nx}{2}}{n\sin\frac{x}{2}}\right]^4 = \frac{1}{n^4}\left[\frac{e^{-\frac{nix}{2}} - e^{\frac{nix}{2}}}{e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}}}\right]^4 =$$

$$= \frac{1}{n^4}\left[e^{-\frac{(n-1)ix}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx}\right]^4 = \frac{1}{n^4}\sum_{k=0}^{2n-2} a_k \cos kx.$$

Тогда

$$\varphi_n(t-x) = \sum_{k=0}^{2n-2} [a_k(t)\cos kx + b_k(t)\sin kx],$$

другими словами, $\varphi_n(t-x)$ — тригонометрический многочлен степени[1]) $2n-2$ относительно x. Заметим также, что период $\varphi_n(x)$ есть π. В силу этого обстоятельства, если $u(x)$ — периодическая

---

[1]) Степенью тригонометрического многочлена

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

мы называем число n, если $|a_n| + |b_n| > 0$.

функция с периодом 2π, то при $p \leqslant k$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} u(x+t_1+\ldots+t_p) \prod_{\nu=1}^{k} \varphi_n(t_\nu)\, dt_1 \ldots dt_k =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} u(t_1+\ldots+t_p) \prod_{\nu=2}^{k} \varphi_n(t_\nu)\, \varphi(t_1-x)\, dt_1 \ldots dt_k =$$

$$= \sum_{m=0}^{2n-2} [\alpha_k \sin mx + \beta_k \cos mx],$$

другими словами, наш интеграл будет тригонометрическим многочленом степени не выше $2n-2$. Теперь рассмотрим выражение

$$P_n(x) = \frac{1}{(2A_n)^{s+1}} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - \Delta_{s+1}(x, t)] \prod_{k=1}^{s+1} \varphi_n(t_k)\, dt_1 \ldots dt_{s+1};$$

$$A_n = \int_0^{\pi} \varphi_n(t)\, dt. \tag{126}$$

Согласно (120)

$$f(x) - \Delta_{s+1}(x, t) = \sum_{k=1}^{s+1} f(x+t_k) - \sum_{1 \leqslant k \leqslant l \leqslant s+1} f(x+t_k+t_l) + \ldots$$

$$\ldots \mp f(x+t_1+\ldots+t_{s+1}),$$

и, следовательно, в силу сказанного выше, $P_n(x)$ будет тригонометрическим многочленом степени не выше $2n-2$.

Оценим разность

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) =$$

$$= \frac{1}{(2A_n)^{s+1}} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_{s+1}(x, t) \prod_{k=1}^{s+1} \varphi_n(t_k)\, dt_1 \ldots dt_{s+1}, \tag{127}$$

$f(x)$ удовлетворяет условиям леммы 1, значит, мы можем воспользоваться неравенством (122) и получить неравенство

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{(2A_n)^{s+1}} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_{s+1}(x, t)| \prod_{k=1}^{s+1} \varphi_n(t_k)\, dt_1 \ldots dt_{s+1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(2A_n)^{s+1}} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} |t_1 \ldots t_s| \left[2\omega_s\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{n}{2\pi} \omega_s\left(\frac{2\pi}{n}\right) |t_{s+1}| \right] \prod_{k=1}^{s+1} \varphi_n(t_k)\, dt_1 \ldots dt_{s+1}.$$

Но $\varphi_n(t)$ имеет период π, поэтому

$$|R_n(x)| \leqslant 2\left(\frac{B_n}{A_n}\right)^s \omega_s\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \left(\frac{B_n}{A_n}\right)^{s+1} \cdot \frac{n}{2\pi}\,\omega_s\left(\frac{2\pi}{n}\right); \tag{128}$$

$$A_n = \int_0^\pi \varphi_n(t)\,dt, \quad B_n = \int_0^\pi t\varphi_n(t)\,dt.$$

Остается оценить отношение $\frac{B_n}{A_n}$. Имеем

$$A_n = \int_0^\pi \left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{n\sin\frac{t}{2}}\right)^4 dt > \frac{1}{n^4}\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4 dt =$$

$$= \frac{2}{n^5}\int_0^\pi \frac{\sin^4 t}{\sin^4\frac{t}{n}}\,dt > \frac{2}{n}\int_0^\pi \frac{\sin^4 t}{t^4}\,dt; \tag{129}$$

$$B_n = \int_0^\pi t\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{n\sin\frac{t}{2}}\right)^4 dt \leqslant \left(\frac{\pi}{n}\right)^4 \int_0^\pi \frac{\sin^4\frac{nt}{2}}{t^3}\,dt < \frac{\pi^4}{4}\cdot\frac{1}{n^2}\int_0^\infty \frac{\sin^4 t}{t^3}\,dt. \tag{130}$$

Из неравенств (129) и (130) непосредственно следует оценка

$$\frac{B_n}{A_n} < \frac{\pi^4\int_0^\infty \frac{\sin^4 t}{t^3}\,dt}{4\int_0^\pi \left[\frac{\sin t}{t}\right]^4 dt}\,\frac{1}{2n} = C\,\frac{1}{2n}. \tag{131}$$

Пользуясь неравенствами (128) и (131), мы получаем окончательно, что

$$|R_n(x)| < \left(2 + \frac{C}{4\pi}\right)C^s\,\frac{\omega_s\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{(2n)^s} < e^{\lambda(s+1)}\,\frac{\omega_s\left(\frac{1}{2n}\right)}{(2n)^s};$$

$$\omega_s\left(\frac{2\pi}{n}\right) < 14\omega_s\left(\frac{\pi}{7n}\right) < 14\omega_s\left(\frac{1}{2n}\right) \tag{132}$$

вследствие неравенства (115) и монотонности $\omega(\delta)$. Итак,

$$E_{2n-2} < e^{\lambda(s+1)}\,\frac{\omega_s\left(\frac{1}{2n}\right)}{(2n)^s} < e^{\lambda(s+1)}\,\frac{\omega_s\left(\frac{1}{2n-2}\right)}{(2n-2)^s}. \tag{133}$$

Так как $E_{2n-1} \leqslant E_{2n-2}$, то

$$E_{2n-1} < e^{\lambda(s+1)}\,\frac{\omega_s\left(\frac{1}{2n}\right)}{(2n)^s} < e^{\lambda(s+1)}\,\frac{\omega_s\left(\frac{1}{2n-1}\right)}{(2n-1)^s}, \tag{134}$$

другими словами, неравенство (125) будет выполнено как для четных, так и для нечетных n.

Переход в теореме I от периода 2π к любому периоду τ несложен, так как если $\varphi(x)$ — периодическая с периодом τ и удовлетворяет остальным условиям нашей теоремы, то $f(x) = \varphi\left(\frac{\tau x}{2\pi}\right)$ будет иметь период 2π, а модуль непрерывности $f^{(s)}(x)$ будет $\left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^s \omega_s\left(\frac{\tau\delta}{2\pi}\right)$, если $\omega_s(\delta)$ — модуль непрерывности $\varphi^{(s)}(x)$.

Приведем три следствия из доказанной общей теоремы.

Следствие 1. *Так как для всякой непрерывной функции на конечном отрезке* $\lim\limits_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, *то при периодичности* $f(x)$ *тригонометрические приближения равномерно сходятся к функции.* Это — первая теорема Вейерштрасса.

Следствие 2. *Если* $f(z)$ — *аналитическая функция в полосе, содержащей действительную ось* $|\operatorname{Im} z| \leqslant r$ *при сколь угодно малом* r, *то*

$$E_n < e^{-\theta n}, \ \theta > 0, \ n > n_0, \tag{135}$$

где θ *не зависит от* n.

Действительно, по теореме о среднем

$$\omega_s\left(\frac{1}{n}\right) = \max_{|x-y| < \frac{1}{n}} |f^{(s)}(x) - f^{(s)}(y)| = \max_x |f^{(s+1)}(x)| \frac{1}{n}, \tag{136}$$

где максимум берется по всем x из интервала периода. Но $f(z)$ — аналитическая функция в полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant r$. Поэтому в каждой точке x действительной оси будет справедлива оценка

$$|f^{(s+1)}(x)| = \frac{(s+1)!}{2\pi} \left| \int\limits_{|z-x| = \frac{r}{2}} \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{s+2}} \right| <$$

$$< M_0 (s+1)! \left(\frac{2}{r}\right)^{s+1} < M_0 (s+1)!\, e^{q(s+1)}. \tag{137}$$

Тогда по теореме I при любом целом s

$$E_n < e^{\lambda(s+1)} \frac{\omega_s\left(\frac{1}{n}\right)}{n^s} <$$

$$< M_0 \frac{(s+1)!}{n^{s+1}} e^{(\lambda+q)(s+1)} < M_0 \left(\frac{s+1}{n}\right)^{s+1} e^{\lambda_1(s+1)}, \ \lambda_1 \geqslant 0.$$

Беря s из интервала $ne^{-\lambda_1-1} - 2 < s \leqslant ne^{-\lambda_1-1} - 1$, мы получаем, что

$$E_n < Me^{-ne^{-\lambda_1-1}}, \ n > n_0.$$

Следствие 3. *Если $f(z)$ — целая функция, то*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{E_n} = 0. \tag{138}$$

Действительно, если $f(z)$ — целая функция, то r в неравенстве (137) можно взять сколь угодно большим, а значит, и q можно предполагать сколь угодно большим. Из неравенств (137) и (136) будет следовать тогда неравенство

$$E_n < e^{\lambda(s+1)} \frac{\omega_s\left(\frac{1}{n}\right)}{n^s} < M(r)\left(\frac{s+1}{n}\right)^{s+1} e^{(\lambda-q)(s+1)}.$$

Полагая $s = \left[\frac{n}{4}\right]$, мы из этого неравенства сразу получаем соотношение (138), так как $q > 0$ произвольно велико. Неравенство (135) и предельное соотношение (138) были впервые доказаны С. Н. Бернштейном.

Теорема II. *Если на отрезке $[a, b]$ $f(x)$ — s раз дифференцируемая функция и $f^{(s)}(x)$ имеет модуль непрерывности $\omega_s(\delta)$, то E'_n для этой функции удовлетворяет неравенству*

$$E'_n < e^{\lambda(s+1)} \left(\frac{b-a}{2}\right)^s \frac{\omega_s\left[\frac{b-a}{2(n-s)}\right]}{n(n-1)\ldots(n-s+1)}, \tag{139}$$

где λ — абсолютная постоянная.

Доказательство. Предположим сначала, что отрезок $[a, b]$ есть $[-1, 1]$. Для этого рассмотрим функцию $f_1(x) = f\left[a + \frac{b-a}{2}(x+1)\right]$. Если $f(x)$ была s раз дифференцируема на $[a, b]$, то и $f_1(x)$ будет также s раз дифференцируема и $\bar{\omega}_s(\delta)$ — модуль непрерывности $f_1(x)$ — будет удовлетворять соотношению

$$\bar{\omega}_s(\delta) = \left[\frac{b-a}{2}\right]^s \omega_s\left(\frac{b-a}{2}\delta\right), \tag{140}$$

так как

$$\max_{|x-y|\leqslant\delta} |f_1^{(s)}(x) - f_1^{(s)}(y)| =$$

$$= \left(\frac{b-a}{2}\right)^s \cdot \max_{|x-y|\leqslant\delta} \left|f^{(s)}\left(a + \frac{b-a}{2}x\right) - f^{(s)}\left(a + \frac{b-a}{2}y\right)\right|.$$

Если какая-либо функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[-1, 1]$ и имеет модуль непрерывности $\omega(\delta)$, то функция $\varphi_1(x) = \varphi(\cos x)$ будет непрерывной периодической функцией с периодом 2π. Так как $|\cos x - \cos y| < |x - y|$, то для модуля непрерывности $\omega_1(\delta)$

функции $\varphi_1(x)$ будут справедливы неравенства

$$\omega_1(\delta) = \max_{|x-y|\leqslant\delta} |\varphi(\cos x) - \varphi(\cos y)| < \omega(\delta), \tag{141}$$

где $\omega(\delta) = \omega(2)$ при $\delta \geqslant 2$.

По теореме I при $s = 0$ функция $\varphi_1(x)$ может быть приближена многочленом $P_m(x)$ степени не выше m с точностью

$$|\varphi_1(x) - P_m(x)| < e^{\lambda}\omega\left(\frac{1}{m}\right).$$

Так как $\varphi_1(-x) = \varphi(\cos x) = \varphi_1(x)$, то

$$|\varphi_1(x) - Q_m(x)| < e^{\lambda}\omega\left(\frac{1}{m}\right), \qquad Q_m(x) = \frac{P_m(x) + P_m(-x)}{2}.$$

и значит, $Q_m(x) = \sum_0^m A_k \cos kx$. Заменяя x на $\arccos x$, мы получаем, что $\varphi(x) = \varphi_1(\arccos x)$, откуда

$$|\varphi(x) - R_m(x)| < e^{\lambda}\omega\left(\frac{1}{m}\right);$$

$$R_m(x) = \sum_{k=0}^{m} A_k \cos(k \arccos x), \tag{142}$$

где $R_m(x)$ — многочлен степени не выше m, так как $\cos(k \arccos x)$, как мы знаем, только постоянным множителем отличается от многочлена Чебышева. Тогда существует многочлен степени не выше $n - s$, такой, что

$$|f^{(s)}(x) - P_{n-s}(x)| < e^{\lambda}\bar{\omega}_s\left(\frac{1}{n-s}\right). \tag{143}$$

Полагая

$$f_{s-1}(x) = \int_{-1}^{x} [f^{(s)}(t) - P_{n-s}(t)]\, dt$$

и замечая, что

$$|f_{s-1}(x) - f_{s-1}(y)| = \left|\int_x^y [f^{(s)}(t) - P_{n-s}(t)]\, dt\right| < e^{\lambda}\bar{\omega}_s\left(\frac{1}{n-s}\right)|x-y|,$$

мы можем утверждать, что $\omega_{s-1}(\delta)$—модуль непрерывности $f_{s-1}(x)$— не превосходит

$$e^{\lambda}\bar{\omega}_s\left(\frac{1}{n-s}\right)\delta.$$

Но тогда существует многочлен степени не выше $n - s + 1$ такой,

что

$$|f_{s-1}(x) - P_{n-s+1}(x)| < e^{2\lambda}\bar{\omega}_s\left(\frac{1}{n-s}\right)\frac{1}{n-s+1}.$$

Полагая опять

$$f_{s-2}(x) = \int_{-1}^{x} [f_{s-1}(t) - P_{n-s+1}(t)]\,dt,$$

мы убеждаемся, что ее модуль непрерывности $\omega_{s-2}(\delta)$ не превосходит величины

$$e^{2\lambda}\bar{\omega}_s\left(\frac{1}{n-s}\right)\frac{1}{n-s+1}\delta.$$

Приближая $f_{s-2}(x)$ многочленом степени не выше $n-s+2$, мы снова строим прежним образом функцию $f_{s-3}(x)$ и т. д. Продолжая этот процесс и замечая, что $f_{s-k}(x)$ отличается от $f^{(s-k)}(x)$ многочленом степени не выше $n-s+k$, мы придем к тому, что $f(x)$, которая отличается от $f_0(x)$ только многочленом степени не выше n, можно, наконец, приблизить многочленом степени n, так что

$$|f(x) - P_n(x)| < e^{\lambda(s+1)}\frac{\bar{\omega}_s\left(\frac{1}{n-s}\right)}{(n-s+1)\ldots n},$$

где λ — абсолютная постоянная теоремы I.

Переходя от интервала $[-1, 1]$ к интервалу $[a, b]$, воспользовавшись при этом неравенством (140), мы и получаем основное неравенство нашей теоремы (139). Теоремы I и II носят название теорем Т. Джексона.

Следствия из теоремы II.

1. *Всякая непрерывная на конечном отрезке функция может быть приближена равномерно сходящимся к ней рядом многочленов.* Это — теорема Вейерштрасса.

2. *Если функция $f(z)$ — аналитическая в каждой точке отрезка, то*

$$E'_n < e^{-\theta n}, \qquad \theta > 0, \tag{144}$$

где θ не зависит от n и растет вместе с минимальным радиусом круга $|z-a| = r$, a — любая точка отрезка, на котором $f(z)$ будет регулярной.

3. *Если $f(z)$ — целая функция, то*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{E'_n} = 0. \tag{145}$$

Доказательства следствий 2 и 3 ничем не отличаются от доказательств следствий 2 и 3 теоремы I. Неравенство (144) и предельное соотношение (145) принадлежат С. Н. Бернштейну.

Ниже мы дадим доказательство теоремы С. Н. Бернштейна, содержащей эти следствия.

3. Сходимость интерполяционного процесса Лагранжа и теорема С. Н. Бернштейна. Интерполяционный процесс Ньютона характеризуется заданием последовательности узлов интерполяции $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$, причем n-й интерполирующий многочлен строится по узлам интерполяции $x_0, x_1, \ldots, x_n$. В интерполяционном процессе Лагранжа мы имеем дело с треугольной таблицей узлов интерполяции:

$$\left.\begin{array}{llll} x_{0,0}, & & & \\ x_{1,0}, & x_{1,1}, & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n,0}, & x_{n,1}, & \ldots & x_{n,n}, \end{array}\right\} \tag{146}$$

расположенных на каком-либо отрезке $[a, b]$, причем n-й многочлен интерполяции строится по узлам $x_{n,0}, x_{n,1}, \ldots, x_{n,n}$. Для упрощения рассуждений мы будем рассматривать здесь случай $x_{n,i} \neq x_{n,k}$, $i \neq k$, при одном и том же n. Интерполируюший многочлен будет, как нам уже известно, иметь вид

$$P_n(x) = q_n(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_{n,k})}{q_n'(x_{n,k})(x - x_{n,k})}; \quad q_n(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_{n,k}). \tag{147}$$

Одну оценку [см. (18)] для разности между $P_n(x)$ и $f(x)$, когда $f(x)$ имеет ограниченную s-ю производную, мы уже вывели. Для получения аналогичных оценок только при предположении непрерывности $f(x)$ на $[a, b]$ введем некоторые вспомогательные характеристики расположения узлов интерполяции. Считая, что узлы расположены на $[a, b]$, положим

$$\lambda_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{q_n(x)}{q_n'(x_{n,k})(x - x_{n,k})} \right|, \quad \max_{a \leqslant x \leqslant b} \lambda_n(x) = \lambda_n. \tag{148}$$

Теорема III. *Если E_n' — величина отклонения $f(x)$ на $[a, b]$ от ее многочлена наилучшего приближения степени n, а $\lambda_n(x)$ определяется соотношениями* (148), *то при условии*

$$\lim_{n \to \infty} E_n' \lambda_n(x) = 0 \tag{149}$$

интерполяционные многочлены $P_n(x)$ сходятся к $f(x)$ в точке x Если же

$$\lim_{n \to \infty} E_n' \lambda_n = 0, \tag{150}$$

то интерполяционные многочлены равномерно сходятся к $f(x)$ на $[a, b]$.

Доказательство. Заметим, что для многочлена наилучшего приближения степени не выше n имеет место равенство

$$Q_n(x) = q_n(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{Q_n(x_{n,k})}{q_n'(x_{n,k})(x-x_{n,k})},$$

так как многочлен степени не выше n единственным образом определяется своими значениями в $n+1$ точках. Поэтому если $P_n(x)$ — n-й интерполирующий многочлен Лагранжа для $f(x)$, то

$$|f(x) - P_n(x)| < |f(x) - Q_n(x)| + \\ + \sum_{k=0}^{n} |f(x_{n,k}) - Q_n(x_{n,k})| \frac{|q_n(x)|}{|q_n'(x_{n,k})(x-x_{n,k})|}.$$

Отсюда следует неравенство

$$|f(x) - P_n(x)| < E_n' \left[1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{|q_n(x)|}{|q_n'(x_{n,k})(x-x_{n,k})|}\right] < E_n'[1 + \lambda_n(x)],$$

где $\lambda_n(x)$ определяется равенствами (148), откуда и следует наша теорема.

Верхнюю границу для E_n' дает теорема II. Из теоремы II и III мы, в частности, получаем следствие, если $f(x)$ имеет на $[a, b]$ модуль непрерывности $\omega(\delta)$ и

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n \omega\left(\frac{1}{n}\right) = 0, \tag{151}$$

то многочлены $P_n(x)$ равномерно сходятся к $f(x)$. Действительно в этом случае теорема II дает неравенство

$$E_n' < e^{\lambda} \omega\left(\frac{b-a}{2n}\right) < \frac{2e^{\lambda}}{b-a} \omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

откуда вследствие (150) и следует (151). В качестве примера рассмотрим интерполяционный процесс при

$$x_{n,k} = \cos\frac{2k+1}{2n}\pi, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

другими словами, интерполяционный процесс, когда матрица (146) составлена из узлов, которые являются корнями многочленов Чебышева. С. Н. Бернштейну принадлежит замечательное неравенство, именно он установил, что в этом случае

$$\lambda_n < 8 + \frac{4}{\pi} \ln(n+1).$$

Мы докажем менее точное неравенство, дающее тот же порядок роста границы для λ_n. В качестве $q(x)$ в нашем случае можно

взять $q_{n-1}(x) = \cos(n \arccos x)$, так как в формуле (148) $q_{n-1}(x)$ без изменения правой части можно умножать на любую постоянную C, не равную нулю. При таком выборе $q(x)$ получим

$$\lambda_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{|\cos(n \arccos x)| \sin \frac{2k-1}{2n}\pi}{n\left|x - \cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right|} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{|\cos \pi n\varphi| \sin \frac{2k-1}{2n}\pi}{n\left|\cos \pi\varphi - \cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right|} = \theta(\varphi),$$

где положено $x = \cos \pi\varphi$, а φ меняется в интервале $[0, 1]$. Заметим, что $\theta(1-\varphi) = \theta(\varphi)$, так как, заменив φ на $1-\varphi$, а k на $n-k+1$, мы получим то же выражение для $\theta(x)$. Поэтому при оценке сверху $\theta(\varphi)$ достаточно рассматривать только $\varphi \leqslant \frac{1}{2}$. Так как имеют место элементарные неравенства

$$\sin|\alpha| \leqslant |\alpha|; \quad \sin|\beta| \geqslant \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}|\beta|, \qquad |\beta| \leqslant \frac{3}{4}\pi,$$

$$\sin|\beta| \geqslant \frac{2}{\pi}|\beta|, \qquad |\beta| \leqslant \frac{\pi}{2},$$

то при $0 < \beta \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 < \alpha \leqslant \pi$

$$\frac{|\sin\alpha|}{|\cos\beta - \cos\alpha|} = \frac{|\sin\alpha|}{2\sin\left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right|\sin\left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|} < \frac{3\pi^2}{2\sqrt{2}}\frac{\alpha}{|\alpha-\beta||\alpha+\beta|},$$

откуда, если положить

$$\alpha = \frac{2k-1}{2n}\pi, \qquad \beta = \pi\varphi = \frac{\pi}{2}\frac{2m-1-2t}{n},$$

$$1 \leqslant m \leqslant \frac{n+2}{2}; \qquad 0 \leqslant t < \frac{1}{2},$$

следует, что

$$\frac{\sin\frac{2k-1}{2n}\pi}{\left|\cos\pi\varphi - \cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right|} < \frac{3\pi n}{4\sqrt{2}}\frac{2k-1}{|m+k-1-t||m-k-t|}. \tag{152}$$

Положить $\varphi = \frac{2m-1-2t}{2n}$, $1 \leqslant m \leqslant 1 + \frac{n}{2}$, мы имеем право, так как, давая m значения в этих пределах и изменяя t на $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, мы можем придать φ любое значение из отрезка $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Далее,

$$|\cos \pi n\varphi| = \left|\cos\frac{\pi}{2}(2k-1-2t)\right| = \sin \pi t < \pi t. \tag{153}$$

Пользуясь неравенствами (152) и (153), мы получаем для $\theta(\varphi)$ неравенство

$$\theta(\varphi) < \frac{3\pi^2}{4\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)\,t}{|m+k-1-t|\,|m-k-t|}.$$

Отсюда следует, что при $m = 1$

$$\theta(\varphi) < \frac{3\pi^2}{4\sqrt{2}} \left[\frac{1}{1-t} + t \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1+t} + \frac{1}{k-t}\right)\right] <$$

$$< \frac{3\pi^2}{4\sqrt{2}} \left(2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right) < \frac{3\pi^2}{4\sqrt{2}} \left(3 + \int_1^n \frac{dt}{t}\right) = \frac{3\pi^2}{4\sqrt{2}} (3 + \ln n).$$

При $m \geqslant 2$ $m \leqslant \frac{n}{2} + 1$

$$\theta(\varphi) < \frac{3\pi^2}{4\sqrt{2}} \left[\frac{2m-1}{2m-1-t} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{1}{m-k-t} - \frac{1}{m+k-1-t}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \sum_{k=m+1}^{n} \left(\frac{1}{m+k-1-t} + \frac{1}{k-m+t}\right)\right] <$$

$$< \frac{3\pi^2}{4\sqrt{2}} \left(4 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\right) < \frac{3\pi^2}{4\sqrt{2}} (4 + \ln n).$$

Итак, мы получили неравенство

$$\lambda_{n-1} = \max_{0 \leqslant \varphi \leqslant 1} \theta(\varphi) < \frac{3\pi^2}{4\sqrt{2}} (4 + \ln n).$$

Из соотношения (151) следует теперь условие сходимости интерполяционного процесса, если матрица узлов составлена из корней чебышевских многочленов, именно

$$\lim_{n \to \infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln n = 0, \tag{154}$$

где $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности $f(x)$ на $[-1, 1]$. Предположим теперь, что $f(x)$ аналитична в каждой точке отрезка $[-1, 1]$. Для того чтобы получить условие сходимости вне отрезка, рассмотрим поведение $T_n(z) = \cos(n \arccos z)$ при комплексных z и больших n. Если $z = x + iy$, то, положив

$$x = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos\varphi, \qquad y = \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\sin\varphi, \qquad \rho > 1,$$

мы получим, что z есть точка эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right); \qquad b = \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right). \tag{155}$$

Оси этого эллипса совпадают с осями координат, длины осей $2a$ и $2b$ и фокусы этого эллипса находятся в концах отрезка $[-1, 1]$. Пусть z есть точка эллипса параметра ρ. Тогда $z = \frac{1}{2}\left(\rho e^{i\varphi} + \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi}\right)$ и [см. (23)]

$$T_n(z) = \frac{1}{2^n}\left[(z + \sqrt{z^2 - 1})^n + (z - \sqrt{z^2 - 1})^n\right] = \frac{1}{2^n}\left(\rho^n e^{in\varphi} + \rho^{-n} e^{-in\varphi}\right).$$

Поэтому

$$|T_n(z)| = 2^{-n}\rho^n[1 + \theta\rho^{-2n}], \qquad |\theta| \leqslant 1. \tag{156}$$

Допустим теперь, что $f(z)$ регулярна в замкнутой области, границей которой является эллипс, определенный уравнением (155) при некотором фиксированном ρ. Обозначим этот эллипс буквой C. Пользуясь интегральным представлением в комплексной плоскости остаточного члена интерполяционной формулы Лагранжа:

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(z - x_0)\ldots(z - x_{n-1})}{(\zeta - x_0)\ldots(\zeta - x_{n-1})}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = f(z) - P_{n-1}(z), \tag{157}$$

где C — замкнутый контур, содержащий внутри все точки z, x_0, $x_1, \ldots, x_{n-1}$, и предполагая, что C есть эллипс (155) в плоскости ζ, а z не выходит за пределы такого же эллипса с параметром $\rho_0 < \rho$, мы получаем в нашем случае, что

$$|R_n(z)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_C \frac{T_n(z)}{T_n(\zeta)}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\right| < \frac{LM}{2\pi\delta}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^n \frac{1 + \rho_0^{-2n}}{1 - \rho^{-2n}}, \tag{158}$$

где $\delta = \min|\zeta - z| \geqslant k(\rho, \rho_0) > 0$, L — длина эллипса, а M — максимум $|f(\zeta)|$. Это неравенство показывает, что если $f(z)$ регулярна в замкнутой области с границей C, другими словами, в эллипсе $x = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos\varphi$, $y = \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\sin\varphi$, а z не выходит за пределы эллипса $x = \frac{1}{2}\left(\rho_0 + \frac{1}{\rho_0}\right)\cos\varphi$, $y = \frac{1}{2}\left(\rho_0 - \frac{1}{\rho_0}\right)\sin\varphi$, $\rho_0 < \rho$, то интерполяционные многочлены с чебышевскими узлами интерполяции равномерно сходятся к $f(z)$ в этом эллипсе.

Мы можем теперь доказать важную теорему о наилучших приближениях, принадлежащую С. Н. Бернштейну.

Теорема IV. *Если $f(z)$ — аналитическая функция, регулярная внутри эллипса $z = \frac{1}{2}[\rho e^{i\psi} + \rho^{-1}e^{-i\psi}]$, $0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi$, причем параметр ρ имеет при условии регулярности $f(z)$ максимальное значение, а E_n' — отклонение на $[-1, 1]$ многочлена наилучшего*

приближения от $f(z)$, *то*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{E'_n} = \frac{1}{\rho}.$$

Доказательство. Пусть $f(z)$ регулярна внутри эллипса $z = \frac{1}{2}\left[\rho e^{i\psi} + \frac{1}{\rho} e^{-i\psi}\right]$, где ρ имеет максимальное значение. Тогда $P_{n-1}(x)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа с узлами в корнях многочлена Чебышева — при $-1 \leqslant x \leqslant 1$ будет удовлетворять вследствие (156) неравенству

$$|f(x) - P_{n-1}(x)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C_1} \frac{T_n(x)}{T_n(z)} \frac{f(z)\,dz}{z-x}\right| < \frac{LM}{\pi\delta} \frac{\rho_1^{-n}}{1-\rho_1^{-2n}},$$

где C_1 есть эллипс $z = \frac{1}{2}\left[\rho_1 e^{i\psi} + \frac{1}{\rho_1} e^{-i\psi}\right]$, $1 < \rho_1 < \rho$, M — максимум модуля $f(z)$ на этом эллипсе, L — длина эллипса, а δ — минимум расстояния точек отрезка $[-1, 1]$ от этого эллипса. Так как $P_{n-1}(x)$ не может приближать $f(x)$ на $[-1, 1]$ лучше многочлена наилучшего приближения степени $n-1$ и ρ_1 сколь угодно близко к ρ, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{E'_n} \leqslant \rho^{-1}.$$

Допустим, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{E'_n} = \rho_1^{-1} < \rho^{-1}.$$

Тогда при $n > n_0$ $E'_n < \rho_2^{-n}$, $\rho_1 > \rho_2 > \rho$, и значит, для всякого $n > n_0$ существует многочлен $Q_{n-1}(x)$ степени $n-1$ такой, что

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |f(x) - Q_{n-1}(x)| < \rho_2^{-n+1}.$$

Рассмотрим функцию $u(x)$, определенную рядом

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos\varphi)\,d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n \arccos x) \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos\varphi)\,d\varphi + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} T_n(x) \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi.$$

Так как $Q_{n-1}(\cos\varphi)$ есть тригонометрический многочлен степени

не выше $n-1$, а $\cos n\varphi$ на интервале $[-\pi, \pi]$ ортогонален к $\sin k\varphi$, $\cos k\varphi$, $k<n$, то

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi\right| =$$

$$= \left|\int_{-\pi}^{\pi} [f(\cos\varphi) - Q_{n-1}(\cos\varphi)]\cos n\varphi\, d\varphi\right| < 2\pi\rho_2^{-n+1}, \quad n > n_0.$$

Если z не выходит за пределы эллипса

$$z = \frac{1}{2}\left[\rho_3 e^{i\psi} + \frac{1}{\rho_3}e^{-i\psi}\right], \quad \rho < \rho_3 < \rho_2,$$

то в силу (156) имеют место неравенства

$$|T_n(z)|\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi\right| < 2\pi\left(\frac{\rho_3}{\rho_2}\right)^{n-1}, \quad n > n_0.$$

Из этих неравенств следует, что $u(z)$ представляется равномерно сходящимся в эллипсе с параметром $\rho_3 < \rho$ рядом многочленов, и, значит, внутри этого эллипса $u(z)$ — регулярная аналитическая функция. Но из определения $u(z)$ следует, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} [u(\cos\varphi) - f(\cos\varphi)]\cos n\varphi\, d\varphi =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} [u(\cos\varphi) - f(\cos\varphi)]\sin n\varphi\, d\varphi = 0, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Отсюда следует, что все коэффициенты ряда Фурье для $F(\varphi) = u(\cos\varphi) - f(\cos\varphi)$ равны нулю. Покажем, что это обстоятельство имеет следствием обращение в нуль функции $F(\varphi)$, непрерывность которой следует из непрерывности $f(x)$. Действительно, пусть в точке a на $[-\pi, \pi]$ $F(a) \neq 0$. В силу непрерывности $F(\varphi)$ будет существовать отрезок $[a-\delta, a+\delta]$, на котором $|F(\varphi)| \geqslant \varepsilon > 0$, так как без нарушения общности можно считать $a > 0$. Рассмотрим функцию $\psi(x)$:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leqslant x \leqslant a-\delta, \\ \dfrac{x-a+\delta}{\delta}, & a-\delta \leqslant x \leqslant a, \\ \dfrac{a+\delta-x}{\delta}, & a \leqslant x \leqslant a+\delta, \\ 0, & a+\delta \leqslant x \leqslant \pi, \end{cases} \qquad \psi(-1) = \psi(1) = 0.$$

Эта функция будет непрерывной на $[-\pi, \pi]$, и значит, она может быть приближена равномерно сходящимся к ней на $[-\pi, \pi]$

рядом тригонометрических многочленов $R_n(x)$. Так как $F(x)$ ортогональна к любому многочлену $R_n(x)$, то

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\psi(x)\,dx\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,[\psi(x)-R_n(x)]\,dx\right| = 0.$$

Значит,

$$0 = \left|\int_{a-\delta}^{a+\delta} F(x)\psi(x)\,dx\right| > \varepsilon\int_{a-\delta}^{a+\delta}\psi(x)\,dx = \delta\varepsilon > 0,$$

откуда и следует $F(\varphi) = 0$. Итак, $u(z) = f(z)$ на отрезке $[-1, 1]$, а значит, $f(z)$, которая была регулярной на отрезке $[-1, 1]$, будет регулярной и внутри эллипса с параметром $\rho_3 > \rho$. Но по условию эллипс с параметром ρ был максимальным эллипсом этого рода, в котором $f(z)$ регулярна, т. е. предположение, что $\rho_1^{-1} < \rho^{-1}$, неверно, и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{E'_n} \geqslant \frac{1}{\rho}.$$

Этим мы полностью доказали теорему С. Н. Бернштейна.

В случае равномерного распределения узлов интерполяции на отрезке $[-1, 1]$, когда

$$x_{n,k} = \frac{k}{n}, \qquad k = 0, \pm 1, \ldots, \pm n; \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

на $f(x)$ приходится накладывать более сильные ограничения, чем в случае чебышевских узлов, для того чтобы интерполяционный процесс Лагранжа сходился. Это связано с тем обстоятельством, что $\dfrac{1}{\left|q'_{2n}\left(\frac{k}{n}\right)\right|}$ относительно велико. Действительно, в этом случае

$$\lambda_{2n}(x) = |x|\prod_{k=1}^{n}\left|x^2-\frac{k^2}{n^2}\right|\sum_{k=-n}^{n}\frac{n^{2n}}{(n+k)!\,(n-k)!}\,\frac{1}{\left|x-\frac{k}{n}\right|}.$$

Пусть $x = \dfrac{p+t}{n}$, $|t| \leqslant \dfrac{1}{2}$. Очевидно, что любое x на $[-1, 1]$ можно представить в этом виде. Можно также для определенности считать, что $0 \leqslant p \leqslant n$, так как $\lambda_{2n}(x) = \lambda_{2n}(-x)$. Тогда мы будем иметь неравенство

$$\lambda_{2n}(x) = \prod_{k=-n}^{k=n}\left|\frac{p-k+t}{n}\right|\sum_{k=-n}^{n}\frac{n^{2n}}{(n+k)!\,(n-k)!}\,\frac{n}{|p-k+t|} <$$

$$< 4n^3\,\frac{(n+p)!\,(n-p)!}{(n!)^2}$$

Воспользовавшись формулой Стирлинга $\ln n! = n \ln n - n + O(\ln n)$ [см. стр. 116], мы получаем, что

$$\begin{aligned}\ln \lambda_{2n}(x) &\leqslant (p+n)\ln(p+n) + \\ &+ (n-p)\ln(n-p) - 2\ln n + O(\ln n) = \\ &= n\left[\left(1+\frac{p}{n}\right)\ln\left(1+\frac{p}{n}\right) + \left(1-\frac{p}{n}\right)\ln\left(1-\frac{p}{n}\right)\right] + O(\ln n) = \\ &= n[(1+x)\ln(1+x) + (1-x)\ln(1-x)] + O(\ln n).\end{aligned}$$

Функция $u(x) = (1+x)\ln(1+x) + (1-x)\ln(1-x)$ — четная и монотонно растет с ростом модуля x, так как при $x > 0$

$$u'(x) = \ln\frac{1+x}{1-x} > 0.$$

Кроме того, $u(0) = 0$, $u(1) = 2\ln 2$. Отсюда следует, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[2n]{\lambda_{2n}} \leqslant 2.$$

Поэтому, для того чтобы по теореме III на $[-1, 1]$ интерполяционные многочлены равномерно сходились к функции $f(x)$, достаточно выполнения условия

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{E'_n} < 2^{-1},$$

другими словами, по теореме С. Н. Бернштейна, если $f(z)$ будет регулярна в эллипсе $z = \frac{1}{2}\left[\rho e^{i\psi} + \frac{1}{\rho}e^{-i\psi}\right]$ при $\rho > 2$. В силу теорем III и IV, если $f(z)$ регулярна в эллипсе с параметром ρ, то интерполяционные многочлены с узлами $x_{k,n} = \frac{k}{n}$, $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$ будут сходится к $f(x)$ на отрезке, определяемом неравенством

$$\frac{1}{2}\{(1+x)\ln(1+x) + (1-x)\ln(1-x)\} < \rho.$$

Если же $f(z)$ — целая функция, то прямо из интегрального представления остаточного члена интерполяционной формулы Лагранжа мы будем иметь, что

$$\begin{aligned}|f(z) - P_n(z)| &< \frac{1}{\pi}\prod_{k=-n}^{n}\left|z - \frac{k}{n}\right| \left|\int\limits_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\prod\limits_{k=-n}^{n}\left(\zeta - \frac{k}{n}\right)(\zeta - z)}\right| < \\ &< 2M(r)\left[\frac{|z|+1}{r-1}\right]^{2n+1}\end{aligned}$$

при произвольно большом r, откуда и следует равномерная сходимость $P_n(z)$ к $f(z)$ в любом конечном круге. Можно также показать, что достаточные условия сходимости интерполяционного процесса при равноотстоящих узлах интерполяции существенно не могут быть улучшены.

4. Многочлены С. Н. Бернштейна и их обобщение. Весьма существенный в различных вопросах анализа процесс приближения многочленами произвольной, непрерывной на [0, 1] функции был найден С. Н. Бернштейном. Как показал С. Н. Бернштейн, многочлены

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n!}{k!\,(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \tag{159}$$

равномерно сходятся к $f(x)$, если $f(x)$ на отрезке [0, 1] непрерывна. Оценка приближения дается неравенствами

$$|f(x) - P_n(x)| < \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

где $\omega(\delta)$ — модуль непрерывнести $f(x)$ на [0, 1], причем эта оценка, вообще говоря, не может быть улучшена. Хотя из-за этого обстоятельства многочлены С. Н. Бернштейна нельзя использовать в тех вопросах, где нужны многочлены наилучшего приближения, или другие достаточно хорошо приближающие функцию многочлены, многочлены Бернштейна играют большую роль в проблемах, где необходимо иметь простую связь приближающих многочленов с функцией. Особенно эффектно эти многочлены используются для решения задачи моментов на конечном интервале. Заметим, что многочлены Бернштейна были найдены благодаря некоторым проблемам теории вероятностей.

Мы рассмотрим обобщенные многочлены Бернштейна, с помощью которых непосредственно устанавливается полнота системы функций

$$\left.\begin{array}{l} 1,\ x^{\gamma_k} \ln^m x\ (m = 0, 1, \ldots, \nu_k - 1;\ k = 1, 2, \ldots); \\ 0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_n < \ldots;\ \lim \gamma_n = \infty, \end{array}\right\} \tag{160}$$

в классе всех непрерывных на отрезке [0, 1] функций при условии, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_k + 1}{\gamma_k} = \infty. \tag{161}$$

Пусть $\alpha_0 = 0$, $\alpha_0 < \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \alpha_3 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n \leqslant \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$. Пусть также $0 < x \leqslant 1$. Число повторений одного и того же α в ряде мы будем называть кратностью α. Для функции $f(x) = x^z$ мы

построим разделенную разность с узлами $\alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$. По формуле (57) настоящей главы

$$[\alpha_m, \ldots, \alpha_n] = \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{k=0}^{q_\nu} A_{\nu, k}\, x^{\beta_\nu} \ln^k x, \tag{162}$$

если $\beta_1, \ldots, \beta_s$ — не равные между собой числа последовательности $\alpha_m, \ldots, \alpha_n$, а $q_\nu + 1$ не превосходит кратности точки β_ν в нашей основной последовательности.

В силу неравенства (44) настоящей главы, которое остается в силе для нашей последовательности $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, так как x^z, $x > 0$, — любое число раз дифференцируемая функция,

$$(-1)^{n-m}[\alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n] > 0. \tag{163}$$

Многочлен $P(z)$, как мы уже знаем,

$$P(z) = [\alpha_n] + [\alpha_{n-1}, \alpha_n](z - \alpha_n) + \ldots$$
$$\ldots + [\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n](z - \alpha_n) \ldots (z - \alpha_1) \tag{164}$$

будет интерполяционным многочленом, удовлетворяющим условиям

$$P(\alpha_0) = x^0 = 1, \quad P^{(k)}(\alpha_s) = x^{\alpha_s} \ln^k x, \quad k = 0, 1, \ldots, \nu_s - 1, \tag{165}$$

где ν_s — частота точки α_s в ряду $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Вводя обозначения

$$p_{k, n}(x) = (-1)^{n-k} \alpha_{k+1}\alpha_{k+2} \ldots \alpha_n [\alpha_k, \ldots, \alpha_n],$$
$$k = 0, \ldots, n, \tag{166}$$

и полагая $z = 0$ в (164), мы получим тождество

$$1 = \sum_{k=0}^{n} p_{k, n}(x), \tag{167}$$

откуда следует, так как $p_{k,n}(x) > 0$, вследствие неравенства (163), что

$$0 < p_{k, n}(x) < 1, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{168}$$

Полагая в тождестве (164) $z = \alpha_1$, мы получаем тождество

$$x^{\alpha_1} = \sum_{k=0}^{n} [\alpha_n, \ldots, \alpha_k](\alpha_1 - \alpha_n)(\alpha_1 - \alpha_{k+1}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_{k+1}}\right) \ldots \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_n}\right) p_{k, n}(x).$$

Положим

$$\mu_{k,n} = \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_{k+1}}\right) \ldots \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_n}\right), \quad \mu_{n,n} = 1;$$

$$\tau_{k,n} = \mu_{k,n}^{1/\alpha_1}, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{169}$$

Тогда

$$x^{\alpha_1} = \sum_{k=0}^{n} \mu_{k,n} p_{k,n}(x). \tag{170}$$

Построим разделенные разности с узлами $\alpha_n, \ldots, \alpha_1, 2\alpha_1$ для функции x^z и рассмотрим интерполяционный многочлен

$$Q(z) = [\alpha_n] + [\alpha_{n-1}, \alpha_n](z - \alpha_n) + \ldots$$
$$\ldots + [\alpha_1, \ldots, \alpha_n](z - a_2) \ldots (z - \alpha_n) +$$
$$+ [2\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n](z - \alpha_1) \ldots (z - \alpha_n). \tag{171}$$

Положив $z = 2\alpha_1$, мы получаем, что

$$x^{2\alpha_1} = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{2\alpha_1}{\alpha_{k+1}}\right) \ldots \left(1 - \frac{2\alpha_1}{\alpha_n}\right) p_{k,n}(x) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2\alpha_1}{\alpha_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{2\alpha_1}{\alpha_n}\right) \theta_n(x), \tag{172}$$

где

$$\theta_n(x) = (-1)^{n+1} 2\alpha_1^2 \alpha_2 \ldots \alpha_n [2\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n];$$

к $\theta_n(x)$ применимы те же рассуждения, что и к $p_{k,n}(x)$, поэтому $0 < \theta_n(x) < 1$. Положив

$$\mu'_{k,n} = \left(1 - \frac{2\alpha_1}{\alpha_{k+1}}\right) \ldots \left(1 - \frac{2\alpha_1}{\alpha_n}\right), \quad \mu'_{n,n} = 1, \tag{173}$$

мы из (172) получаем тождество

$$x^{2\alpha_1} = \sum_{k=1}^{n} \mu'_{k,n} p_{k,n}(x) + \frac{1}{2} \mu'_{0,n} \theta_n(x), \quad 0 < \theta_n < 1. \tag{174}$$

Рассмотрим функцию

$$S_2(x) = \sum_{k=0}^{n} (x^{\alpha_1} - \mu_{k,n})^2 p_{k,n}(x). \tag{175}$$

Заметим прежде всего, что $S_2(x) > 0$.

Далее, в силу (167), (170) и (174)

$$S_2(x) = x^{2\alpha_1} - 2x^{\alpha_1} \sum_{k=1}^{n} \mu_{k,n} p_{k,n}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu'_{k,n} p_{k,n}(x) + \\ + \sum_{k=1}^{n-1} (\mu^2_{k,n} - \mu'_{k,n}) p_{k,n}(x) = \\ = \sum_{k=1}^{n-1} (\mu^2_{k,n} - \mu'_{k,n}) p_{k,n}(x) - \frac{\theta_n(x)}{2} \mu'_{0,n}. \tag{176}$$

Выбирая ν при условии, что $\alpha_{\nu-1} \leqslant 2\alpha_1 < \alpha_\nu$, полагая

$$\rho_n = \prod_{k=\nu}^{n-1} \left(1 - \frac{2\alpha_1}{\alpha_k}\right), \quad \mu_n = \max_{\nu \leqslant k \leqslant n-1} [\mu^2_{k,n} - \mu'_{k,n}] \tag{177}$$

и замечая, что

$$\mu'_{k,n} < \mu^2_{k,n}, \quad n-1 \geqslant k \geqslant \nu,$$

мы из соотношения (176) получаем неравенство

$$\lambda_n = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} S_2(x) < C_0 \rho_n + \mu_n, \tag{178}$$

где C_0 — постоянная, не зависящая от n и x. При условиях $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$, $\sum\limits_{k=\nu}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k} = \infty$ величина λ_n стремится к нулю с ростом n. Мы ниже это докажем, а пока будем ссылаться, как на известный факт.

Рассмотрим теперь сумму $S_1(x)$:

$$S_1(x) = \sum_{k=0}^{n} |x^{\alpha_1} - \mu_{k,n}| p_{k,n}(x). \tag{179}$$

Пользуясь неравенством Буняковского

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k b_k| < \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k^2\right)}$$

и полагая

$$a_k = |x^{\alpha_1} - \mu_{k,n}| \sqrt{p_{k,n}(x)}, \quad b_k = \sqrt{p_{k,n}(x)},$$

мы непосредственно получаем неравенство

$$S_1(x) < \sqrt{S_2(x)} \leqslant \sqrt{\lambda_n}. \tag{180}$$

Рассмотрим, наконец, сумму $S_0(x)$:

$$S_0(x) = \sum_{k=0}^{n} |x - \mu_{k,n}^{\frac{1}{\alpha_1}}| p_{k,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} |x - \tau_{k,n}| p_{k,n}(x). \tag{181}$$

Дадим две оценки величины этой суммы в зависимости от того, будет ли $\alpha_1 > 1$ и $\alpha_1 \leqslant 1$. Пусть $\alpha_1 \leqslant 1$. Тогда при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$\left|\frac{x - t^{\frac{1}{\alpha_1}}}{x^{\alpha_1} - t}\right| = \frac{1}{\alpha_1}\xi^{\frac{1}{\alpha_1}-1} < \frac{1}{\alpha_1}, \quad 0 < \xi < 1.$$

Поэтому

$$S_0(x) \leqslant \frac{1}{\alpha_1}\sum_{k=0}^{n} |x^{\alpha_1} - \mu_{k,n}|\, p_{k,n}(x) = \frac{1}{\alpha_1} S_1(x) < \frac{1}{\alpha_1}\sqrt{\lambda_n}. \quad (182)$$

Пусть теперь $\alpha_1 > 1$. Так как при $\alpha_1 > 1$

$$\left|\frac{x - t}{x^{\alpha_1} - t^{\alpha_1}}\right| < \frac{1}{|x - t|^{\alpha_1 - 1}},$$

то при любом δ, $0 < \delta < 1$,

$$|x - t| < \delta + \delta^{1-\alpha_1}|x^{\alpha_1} - t^{\alpha_1}|.$$

Значит,

$$S_0(x) = \sum_{k=0}^{n} |x - \mu_{k,n}^{\frac{1}{\alpha_1}}|\, p_{k,n}(x) < \delta + \delta^{1-\alpha_1} S_1(x) < \delta + \delta^{1-\alpha_1}\sqrt{\lambda_n}.$$

Полагая $\delta = \lambda_n^{\frac{1}{2\alpha_1}}$, мы получаем окончательно неравенство

$$S_0(x) < 2\lambda_n^{\frac{1}{2\alpha_1}}. \quad (182')$$

Считая, что $\lambda_n < 1$, и принимая во внимание (182), мы получаем, что при любом α_1, $\alpha_1 > 0$ имеет место неравенство

$$S_0(x) < \left(2 + \frac{1}{\alpha_1}\right)\lambda_n^{\frac{1}{2\alpha_1+2}}. \quad (183)$$

Определим *обобщенный многочлен С. Н. Бернштейна* для любой ограниченной на [0, 1] функции $f(x)$, положив

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\tau_{k,n})\, p_{k,n}(x). \quad (184)$$

Этот многочлен связан с последовательностью 0, $0 < a_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \ldots \leqslant \alpha_n \leqslant \ldots$ Если положить $\alpha_k = k$, $k = 0, 1, \ldots$, то простой подсчет показывает, что этот многочлен переходит в обыкновенный многочлен С. Н. Бернштейна (159).

Теорема V. *Если задана последовательность*

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_0 < \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n;$$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \infty; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} = \infty \tag{185}$$

и $f(x)$ *ограничена на* $[0, 1]$, *то в каждой точке непрерывности* $f(x)$ *многочлены* $B_n(x)$ *сходятся к* $f(x)$. *Если же* $f(x)$ *непрерывна на* $[0, 1]$ *и ее модуль непрерывности* $\omega(\delta)$, *то при условии* $\alpha_1 \leqslant 1$ *имеет место неравенство*

$$|f(x) - B_n(x)| < 2\left(1 + \frac{1}{\alpha_1}\right)\omega(\sqrt{\lambda_n}). \tag{186}$$

Наконец, если $f(x)$ *на* $[0, 1]$ *имеет производную, удовлетворяющую условию Липшица с константой* K, *и* $\alpha_1 = 1$, *то*

$$|f(x) - B_n(x)| < K\lambda_n. \tag{187}$$

Доказательство. Докажем первую часть теоремы. Рассмотрим неравенство

$$|f(x) - B_n(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |f(\tau_{k,n}) - f(x)|\, p_{k,n}(x), \tag{188}$$

имеющее место в силу соотношения (167) и неотрицательности $p_{k,n}(x)$. Если x — точка непрерывности $f(x)$, а M — максимум $|f(x)|$ на $[0, 1]$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое δ, что

$$|f(x) - f(t)| < \varepsilon + \frac{2M}{\delta}|x - t|. \tag{189}$$

Действительно, если $|x - t| \leqslant \delta$, то это неравенство следует из непрерывности $f(x)$ в точке x, а если $|x - t| > \delta$, то оно тривиально следует из ограниченности $|f(x)|$. Пользуясь этим неравенством, мы из (188) получаем неравенство

$$|f(x) - B_n(x)| \leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{n} p_{k,n}(x) + \frac{2M}{\delta} \sum_{k=0}^{n} |x - \tau_{k,n}|\, p_{k,n}(x),$$

откуда в силу (167) и (183) мы будем иметь

$$|f(x) - B_n(x)| \leqslant \varepsilon + \frac{2M(1 + 2\alpha_1)}{\alpha_1 \delta} \lambda_n^{\frac{1}{2\alpha_1 + 2}} < 2\varepsilon$$

при $n > n_0$, так как λ_n стремится к нулю с ростом n. Это и доказывает первую часть теоремы. Если же $f(x)$ имеет на $[0, 1]$ модуль непрерывности $\omega(\delta)$, то, построив при произвольном m ломаную линию, состоящую из отрезков, соединяющих точки

кривой $y=f(x)$ при $x=\frac{k}{m}$ и $x=\frac{k+1}{m}$, $k=0, 1, \ldots, m-1$, уравнение которой будет $y=f_m(x)$, мы будем иметь благодаря неравенствам (117) и (118), что

$$|f(x)-f(t)|<|f(x)-f_m(x)|+|f_m(x)-f_m(t)|+$$
$$+|f_m(t)-f(t)|<2\omega\left(\frac{1}{m}\right)+m\omega\left(\frac{1}{m}\right)|x-t|. \qquad (190)$$

Воспользовавшись этим неравенством, мы из неравенства (188) получаем неравенство

$$|f(x)-B_n(x)|<2\omega\left(\frac{1}{m}\right)+m\omega\left(\frac{1}{m}\right)\sum_{k=0}^{n}|x-\tau_{k,n}|p_{k,n}(x)<$$
$$<2\omega\left(\frac{1}{m}\right)+\frac{m}{\alpha_1}\omega\left(\frac{1}{m}\right)\sqrt{\lambda_n}.$$

Отсюда, беря m из интервала $\lambda_n^{-\frac{1}{2}}\leqslant m<\lambda_n^{-\frac{1}{2}}+1$, мы получаем, что

$$|f(x)-B_n(x)|<\left[2+\frac{1+\sqrt{\lambda_n}}{\alpha_1}\right]\omega(\sqrt{\lambda_n})<\frac{2(\alpha_1+1)}{\alpha_1}\omega(\sqrt{\lambda_n}),$$

другими словами, неравенство (186). При $\alpha_k=k$ из (169) и (166

$$\tau_{k,n}=\prod_{s=k+1}^{n}\left(1-\frac{1}{s}\right)=\frac{k}{n}, \quad p_{k,n}(x)=$$
$$=(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}[k, k+1, \ldots, n]=\frac{n!}{k!(n-k!)}x^k(1-x)^{n-k},$$

и $\lambda_n\geqslant S_2(x)$ непосредственно вычисляется. Действительно,

$$S_2(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}=$$
$$=x^2-2x^2+\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{n!}\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}x^k(1-x)^{n-1-k}=\frac{x-x^2}{n}\leqslant\frac{1}{4n}.$$

Поэтому для обыкновенных многочленов С. Н. Бернштейна неравенство (186) имеет вид

$$|f(x)-B_n(x)|<4\omega\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right).$$

Докажем вторую часть теоремы. Если $f'(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой K, то

$$|f'(x)-f'(t)|<K|x-t|$$

и

$$|f(t)-f(x)-f'(x)(t-x)| = \\ = |f'(\zeta)-f'(x)||t-x| < K|\zeta-x||t-x| < K(t-x)^2, \quad (191)$$

так как $|\zeta-x|<|t-x|$.

Из соотношения

$$|f(x)-B_n(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n}[f(x)-f(\tau_{k,n})]\,p_{k,n}(x)\right| = \\ = \left|\sum_{k=0}^{n}[f(x)-f(\tau_{k,n})+f'(x)(\tau_{k,n}-x)]\,p_{k,n}(x)\right| < \\ < K\sum_{k=0}^{n}(x-\tau_{k,n})^2 p_{k,n}(x) < K\lambda_n,$$

так как при $\alpha_1=1$, $\tau_{k,n}=\mu_{k,n}$ и

$$\sum_{k=0}^{n}(x-\mu_{k,n})\,p_{k,n}(x) = x-x=0, \quad n\geqslant 3, \quad (192)$$

следует последнее утверждение нашей теоремы. Для обыкновенных многочленов С. Н. Бернштейна тогда, так как $\lambda_n=\frac{1}{4n}$, будет иметь место неравенство

$$|f(x)-B_n(x)| < \frac{K}{4n}. \quad (193)$$

Теперь докажем, что $\lambda_n\to 0$. Из неравенства (178) следует, что

$$\lambda_n < C_0\prod_{k=\nu}^{n-1}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_{k+1}}\right)^2 + \max_{\nu\leqslant k\leqslant n-1}[\mu_{k,n}^2-\mu'_{k,n}]. \quad (194)$$

Прежде всего можно утверждать, что

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=\nu}^{n-1}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_{k+1}}\right) \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha_1\sum\limits_{k=\nu}^{n-1}\alpha_{k+1}^{-1}} = 0 \quad (195)$$

в силу расходимости ряда $\sum\limits_{k=\nu+1}^{\infty}\alpha_k^{-1}$.

Положим

$$\theta_k = \prod_{s=k}^{n-1}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_{s+1}}\right)^2 - \prod_{s=k}^{n-1}\left(1-\frac{2\alpha_1}{\alpha_{s+1}}\right),$$
$$k=\nu,\ \nu+1,\ \ldots,\ n-1.$$

Но тогда

$$\theta_\nu = \sum_{k=\nu}^{n-1}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_{k+1}}\right)^2 - \sum_{k=\nu}^{n-1}\left(1-\frac{2\alpha_1}{\alpha_{k+1}}\right), \quad \theta_{n-1} = \frac{\alpha_1^2}{\alpha_n^2}.$$

Поэтому, если максимальное из чисел $\theta_\nu, \ldots, \theta_{k-1}$ будет одним из крайних, то действительно

$$\theta_\nu < \frac{\alpha_1^2}{\alpha_n^2} + \prod_{k=\nu}^{n-1}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_{k+1}}\right)^2,$$

и значит,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\lambda_n = 0$$

в силу условий $\sum\limits_{k=\nu}^{\infty}\alpha_k^{-1} = \infty$, $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_k = \infty$. Допустим, что максимальное число в ряду $\theta_\nu, \ldots, \theta_{n-1}$ будет θ_p, $p < n-1$. Тогда из тождества

$$\theta_p = \left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_{p+1}}\right)^2\theta_{p+1} + \frac{\alpha_1^2}{\alpha_{p+1}^2}\prod_{k=p+1}^{n-1}\left(1-\frac{2\alpha_1}{\alpha_{k+1}}\right)$$

в силу максимальности θ_p следует неравенство

$$\theta_p \leqslant \left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_{p+1}}\right)^2\theta_p + \frac{\alpha_1^2}{\alpha_{p+1}^2}\prod_{k=p+1}^{n-1}\left(1-\frac{2\alpha_1}{\alpha_{k+1}}\right)$$

или неравенство

$$\theta_p < \frac{\alpha_1}{\left(2-\frac{\alpha_1}{\alpha_{p+1}}\right)\alpha_{p+1}}\prod_{k=p+1}^{n-1}\left(1-\frac{2\alpha_1}{\alpha_{k+1}}\right) < \frac{\alpha_1}{\alpha_{p+1}}\prod_{k=p+1}^{n-1}\left(1-\frac{2\alpha_1}{\alpha_{k+1}}\right).$$

Итак, максимальная из величин $\theta_\nu, \ldots, \theta_{n-2}$ не превышает максимального из чисел

$$\gamma_k = \frac{\alpha_1}{\alpha_{k+1}}\prod_{s=k+1}^{n-1}\left(1-\frac{2\alpha_1}{\alpha_{s+1}}\right), \quad k = \nu, \nu+1, \ldots, n-2.$$

Одно из двух неравенств при любом ε и $n > n(\varepsilon)$

$$\alpha_{k+1} < \frac{1}{\varepsilon}, \quad \prod_{s=k+1}^{n-1}\left(1-\frac{2\alpha_1}{\alpha_{s+1}}\right) > \varepsilon, \quad k = \nu, \ldots, n-2,$$

должно быть неверным в силу условий, наложенных на α_k.

Поэтому

$$\max \theta_s \leqslant \max \gamma_k \leqslant \alpha_1 \varepsilon, \quad n > n(\varepsilon)$$

при $n > n_0$. Итак,

$$\lim_{n\to\infty} \max_{\nu\leqslant k\leqslant n-1} [\mu^2_{k,n} - \mu'_{k,n}] = \lim_{n\to\infty} \max_{\nu\leqslant k\leqslant n-1} \theta_k = 0.$$

Рассмотрим пример. Пусть $\alpha_k = k^\gamma$, $0 < \gamma < 1$, $k = 0, 1, \ldots$ Тогда $\alpha_1 = 1$ и

$$\rho_n = \prod_{k=\nu}^{n-1} \left(1 - \frac{2}{k^\gamma}\right) < e^{-2\sum\limits_{k=\nu}^{n-1} k^{-\gamma}} < e^{-2\frac{2}{1-\gamma}[(n-1)^{1-\gamma} - \nu^{1-\gamma}]}.$$

Далее,

$$\gamma_k = \frac{1}{(k+1)^\gamma} \prod_{s=k+2}^{n-1} \left(1 - \frac{2}{s^\gamma}\right) < e^{-(1-2^{-\gamma})n^{1-\gamma} + o(n^{1-\gamma})}, \quad k \leqslant \frac{n}{2},$$

и

$$\gamma_k < \frac{2}{n^\gamma}, \quad k > \frac{n}{2}.$$

Поэтому

$$\lambda_n < C_1 n^{-\gamma},$$

где C_1 — постоянная.

Из теоремы V следует теорема V′.

Теорема V′. *Система функций*

$$1, \; x^{\beta_k} \ln^\nu x, \quad 0 \leqslant \nu \leqslant p_k - 1; \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{196}$$

где ν — *целые рациональные числа, полна в классе непрерывных функций на отрезке* $[0, 1]$, *если* $0 < \beta_1 < \ldots < \beta_n < \ldots$ *и*

$$\text{A)} \quad \lim_{k\to\infty} \beta_k = \infty; \qquad \text{B)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{\beta_k} = \infty. \tag{197}$$

Когда $p_k = 1$, $k = 1, 2, \ldots$, то мы получаем теорему Мюнца. Для полноты этой системы условие B необходимо. (Условие A, вообще говоря, необходимым не является.)

Действительно, пусть $p_k = 1$, $k = 1, 2, \ldots$ Тогда, если только теорема V′ верна без условия B, то для любого ε будет существовать квазиполином $P_n(x)$, такой, что

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon, \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k x^{\alpha_k}.$$

Но тогда

$$\int_0^1 [f(x) - P_n(x)]^2 dx \leqslant \varepsilon^2,$$

и значит,

$$\lim_{n\to\infty} \min_{P_n} \int_0^1 [f(x) - P_n(x)]^2 dx = 0, \tag{198}$$

где минимум берется по всем квазиполиномам степени не выше α_n. Решим точно эту задачу о минимуме при $\alpha_0 = 0$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{-1} < \infty$ для функции x^λ, $\lambda \neq a_k$, $k = 0, 1, \ldots$ Выберем числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ так, чтобы интеграл

$$I_n = \int_0^1 \left[x^\lambda + \sum_{k=0}^{n} a_k x^{\alpha_k}\right]^2 dx \tag{199}$$

достигал своего минимума. Для этого продифференцируем I_n по a_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, и найдем a_k, удовлетворяющие условиям

$$\frac{1}{2}\frac{\partial I_n}{\partial a_k} = \frac{1}{\lambda + \alpha_k + 1} + \sum_{s=0}^{n} \frac{a_s}{\alpha_s + \alpha_k + 1} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{200}$$

Положив

$$Q(z) = (z + \lambda + 1) \prod_{s=0}^{n} (z + \alpha_s + 1), \quad R(z) = \prod_{k=0}^{n} (z - \alpha_k),$$

мы будем иметь, что

$$\frac{1}{z + \lambda + 1} + \sum_{s=0}^{n} \frac{a_s}{\alpha_s + z + 1} = \frac{P(z)}{Q(z)} = C\frac{R(z)}{Q(z)}, \tag{201}$$

где C — постоянная, так как степень $P(z)$ не выше $n + 1$ и выполнены условия (200). Для определения C достаточно умножить обе части тождества (201) на $z + \lambda + 1$ и положить $z = -\lambda - 1$. Мы получим тогда, что

$$C = \frac{R(\lambda)}{Q(\lambda)}(2\lambda + 1). \tag{202}$$

Из (199) и (201) находим

$$I_n = \frac{1}{2\lambda + 1} + \sum_{s=0}^{n} \frac{a_s}{\alpha_s + \lambda + 1} = C\frac{R(\lambda)}{Q(\lambda)} = \left[\frac{R(\lambda)}{Q(\lambda)}\right]^2 (2\lambda + 1), \tag{203}$$

другими словами,

$$I_n = \frac{1}{(2\lambda+1)} \prod_{k=0}^{n} \left(\frac{\alpha_k - \lambda}{\alpha_k + \lambda + 1}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{(2\lambda+1)(\lambda+1)^2} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1 - \frac{\lambda}{\alpha_k}}{1 + \frac{\lambda+1}{\alpha_k}}\right)^2,$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{\lambda^2}{(\lambda+1)^2} \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \frac{\lambda}{\alpha_k}}{1 + \frac{\lambda+1}{\alpha_k}}\right)^2 > 0$$

в силу сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{-1}$. Это противоречит предельному соотношению (198), что и показывает необходимость условия B.

5. Приближение функций многочленами в комплексной плоскости. Многочлены Фабера. Мы знаем, что всякую непрерывную на отрезке функцию можно как угодно хорошо приблизить многочленами.

В комплексной плоскости имеет место аналогичное обстоятельство. Всякую регулярную в некоторой конечной односвязной области D функцию можно приблизить многочленами во всякой внутренней подобласти этой области. Возможность же равномерного приближения в замкнутой области $\overline{D}$ связана с некоторыми ограничениями, которые нужно накладывать на структуру границы.

Нас в дальнейшем будут интересовать только области с очень правильной границей.

Для приближения в комплексной области наиболее удобны *многочлены Фабера*.

Пусть D будет конечная односвязная область в плоскости z, ограниченная регулярной аналитической кривой. Из основной теоремы Римана относительно конформных отображений следует, что внешность области D, содержащую бесконечно удаленную точку, можно конформно отобразить на внутренность круга $|\zeta| = R$ в плоскости ζ с помощью функции

$$z = \varphi(\zeta) = \frac{1}{\zeta} + a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \ldots$$

Величина R определяется областью D, а бесконечно удаленная точка в плоскости z переходит в начало в плоскости ζ. Так как D по предположению имеет аналитическую границу, то $\varphi(\zeta) - \frac{1}{\zeta}$ будет функцией, регулярной в круге $|\zeta| = R$, другими словами, в круге $|\zeta| \leqslant R_1$, где $R_1 > R$. Рассмотрим функцию

$$f(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta) - t} = \frac{-\zeta^{-2} + a_1 + 2a_2\zeta + \ldots}{\zeta^{-1} + (a_0 - t) + a_1\zeta + \ldots}, \tag{204}$$

где t — некоторая внутренняя точка области D. Пусть эта точка t не выходит за пределы области $\overline{D}_1$, внутренней по отношению к D. Так как $\varphi(\zeta)$ регулярна на окружности $|\zeta| = R$, то, выбрав достаточно малое $\varepsilon > 0$, мы можем утверждать, что контур C_1, в который перейдет окружность $|\zeta| = R + \varepsilon$, не будет иметь общих точек с областью $\overline{D}_1$, так как окружность $|\zeta| = R$ переходит в контур C, аналитическую границу D, а $\overline{D}_1$ лежит внутри D. Отсюда следует, что $\varphi(\zeta) - t$ не будет обращаться в нуль при $|\zeta| \leqslant R + \varepsilon = \rho$, если t не выходит за пределы области $\overline{D}_1$. Функция $f(\zeta)$ есть логарифмическая производная от $\varphi(\zeta) - t$, имеющей в круге $|\zeta| \leqslant \rho$ только одну особенность — полюс первого порядка в точке $\zeta = 0$ и в нуль в этом круге не обращающейся. Поэтому $f(\zeta)$ регулярна в круге $|\zeta| \leqslant \rho$ всюду, за исключением точки $\zeta = 0$, где $f(\zeta)$ имеет полюс первого порядка с вычетом -1, откуда следует, что при $t \in \overline{D}_1$

$$f(\zeta) = -\frac{1}{\zeta} - \sum_{k=0}^{\infty} P_{k+1}(t)\,\zeta^k, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|P_n(t)|} \leqslant \frac{1}{\rho}, \tag{205}$$

где ρ от t не зависит.

Покажем, что $P_k(t)$ есть многочлен степени k от t. Действительно, из соотношения (204) непосредственно следует, что

$$f(\zeta) = -\frac{1}{\zeta} + \frac{a_0 - t + 2a_1\zeta + 3a_2\zeta^2 + \ldots}{1 + (a_0 - t)\zeta + a_1\zeta^2 + \ldots} =$$
$$= -\frac{1}{\zeta} - \left[t - a_0 - \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)\,a_k\zeta^k\right] \sum_{s=0}^{\infty}\left[(t - a_0)\,\zeta - \sum_{k=1}^{\infty} a_k\zeta^{k+1}\right]^s.$$

Так как в первом множителе t входит в свободный член, а во втором t умножается только на ζ, то эта формула непосредственно показывает, что $P_n(t)$ есть многочлен относительно t со старшим членом t^n.

Пусть теперь $F(z)$ регулярна в области D и непрерывна на ее границе. Относительно области D сохраняются прежние предположения. Пусть также t есть точка замкнутой области $\overline{D}_1$, все точки которой будут внутренними точками D.

Рассмотрим интеграл Коши

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(z)}{z - t}\,dt,$$

где C есть граница D. Так как замкнутый контур C есть регулярная аналитическая кривая и $z = \varphi(\zeta)$ однозначно отображает этот контур на окружность $|\zeta| = R$, то можно сделать замену

переменной в интеграле Коши, положив $z = \varphi(\zeta)$. Тогда, принимая во внимание, что положительное направление обхода контура заменится на обратное, мы будем иметь, что

$$F(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=R} \frac{F[\varphi(\zeta)]\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta) - t} d\zeta.$$

Отсюда, так как ряд (205) равномерно сходится при $|\zeta| \leqslant R + \frac{\varepsilon}{2} = \rho - \frac{\varepsilon}{2}$ и возможно почленное интегрирование по контуру $|\zeta| = R$, мы будем иметь окончательно представление

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k P_k(t), \quad P_0(t) = 1, \tag{206}$$

где

$$A_0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=R} \frac{F[\varphi(\zeta)]}{\zeta} d\zeta; \quad A_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=R} F[\varphi(\zeta)]\zeta^{k-1} d\zeta, \quad k \geqslant 1, \tag{207}$$

и $t \in \overline{D}_1$. Пользуясь неравенством (205), мы получаем, что при $t \in \overline{D}_1$

$$\left| F(t) - \sum_{k=0}^{N} A_k P_k(t) \right| < C_0(\varepsilon) \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(R + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-k} \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=R} F[\varphi(\zeta)]\zeta^k \frac{d\zeta}{\zeta} \right| < C_0(\varepsilon) M \left[\frac{R}{R + \frac{\varepsilon}{2}}\right]^N,$$

где M — максимум модуля $F(z)$ на границе D. Итак, мы доказали равномерную сходимость к $F(z)$ многочленов

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} A_k P_k(z) \tag{208}$$

во всякой внутренней по отношению к D области $\overline{D}_1$. Многочлены $P_k(z)$ носят название многочленов Фабера и зависят только от заданной области D.

Рассмотрим частные примеры. Пусть область D есть круг $|z - a| \leqslant r$. Тогда функция $\zeta = \frac{1}{z - a}$ переводит внешность этого круга во внутренность круга $|\zeta| \leqslant \frac{1}{r}$. В этом случае $\varphi(\zeta) = \frac{1}{\zeta} + a$ и

$$f(\zeta) = -\frac{1}{\zeta[1 - (t - a)\zeta]} = -\sum_{k=0}^{\infty} (t - a)^k \zeta^{k-1}.$$

Ряд (206) оказывается тогда рядом Тейлора. Функция

$$z = \varphi(\zeta) = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{C^2}{\zeta}\right), \quad C > 0, \tag{209}$$

конформно отображает круг $|\zeta| \leqslant \rho < C$ на внешность эллипса

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}\left(\rho + \frac{C^2}{\rho}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}\left(\rho - \frac{C^2}{\rho}\right)^2} = 1 \tag{210}$$

в плоскости $z = x + iy$, так как при $|\zeta| < C$ функция $\varphi(\zeta)$ однолистна, и если $\zeta = e^{i\psi}$, то

$$z = x + iy = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{C^2}{\rho}\right)\cos\psi + \frac{1}{2}i\left(\rho - \frac{C^2}{\rho}\right)\sin\psi.$$

Функция $f(\zeta)$ в этом случае будет

$$f(\zeta) = \frac{\zeta^2 - C^2}{\zeta(\zeta^2 - 2t\zeta + C^2)} = -\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta - t - \sqrt{t^2 - C^2}} + \frac{1}{\zeta - t + \sqrt{t^2 - C^2}}.$$

Так как

$$\frac{1}{\zeta - [t - \sqrt{t^2 - C^2}]} = -\sum_{n=0}^{\infty} [t - \sqrt{t^2 - C^2}]^{-n-1}\zeta^n =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} [t + \sqrt{t^2 - C^2}]^{n+1} C^{-2n-2}\zeta^n,$$

$$\frac{1}{\zeta - [t + \sqrt{t^2 - C^2}]} = -\sum_{n=0}^{\infty} [t + \sqrt{t^2 - C^2}]^{-n-1}\zeta^n =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} [t - \sqrt{t^2 - C^2}]^{n+1} C^{-2n-2}\zeta^n,$$

то

$$f(\zeta) = -\frac{1}{\zeta} - \sum_{n=0}^{\infty} C^{-2n-2}[(t + \sqrt{t^2 - C^2})^{n+1} + (t - \sqrt{t^2 - C^2})^{n+1}]\,\zeta^n,$$

и значит,

$$P_n(t) = C^{-2n}[(t + \sqrt{t^2 - C^2})^n + (t - \sqrt{t^2 - C^2})^n], \tag{211}$$

другими словами, $P_n(t)$ в нашем случае отличается от n-го многочлена Чебышева для отрезка $[C, -C]$ только постоянным множителем. Доказанная теорема о разложимости $F(z)$, регулярной в эллипсе (210), в ряд по многочленам Фабера приводит нас к уже установленному ранее факту представимости такой функции многочленами Чебышева.

Эллипс, заданный уравнением (210), имеет фокусы в точках $(\pm C, 0)$, малую полуось, равную $\frac{1}{2}\left(\frac{C^2}{\rho}-\rho\right)$, и большую полуось, равную $\frac{1}{2}\left(\frac{C^2}{\rho}+\rho\right)$. Фиксируя длину малой полуоси, полагая

$$\frac{C^2}{\rho}-\rho=2k, \quad C^2=\rho^2+2k\rho, \quad k>0,$$

и неограниченно увеличивая ρ, мы будем получать эллипсы с фиксированной малой полуосью k и неограниченно растущей большой полуосью $m=\rho+k$:

$$\frac{x^2}{(\rho+k)^2}+\frac{y^2}{k^2}=1. \tag{212}$$

Какова бы ни была точка (x_0, y_0), $|y_0|<k$, принадлежащая полосе $|y|<k$ плоскости $z=x+iy$, она при достаточно большом ρ должна будет попасть в эллипс (212), так как для внешних точек этого эллипса

$$|y|>k\sqrt{1-\frac{x^2}{(\rho+k)^2}}=k-\frac{kx^2}{(\rho+k)\left[\rho+k+\sqrt{(\rho+k)^2-x^2}\right]};$$

другими словами, каково бы ни было x_0 при достаточно большом ρ, величина $|y|$ для внешних точек будет сколь угодно близка к числу k. Отсюда следует, что регулярную в полосе $|y|<k$ функцию $F(z)$ можно приблизить как угодно хорошо в любой конечной внутренней подобласти полосы многочленами Чебышева (211).

§ 7. Интерполяционная задача и проблема моментов в комплексной плоскости

Интерполяционная задача в еще более общем случае, чем исследованные выше, может быть рассматриваема как проблема моментов в комплексной плоскости.

Пусть задана последовательность функций $\varphi_k(z)$

$$\varphi_k(z)=\frac{1}{z^{k+1}}+\sum_{n=k+1}^{\infty} a_{n,k}z^{-n-1}, \qquad k=0, 1, 2, \ldots, \tag{213}$$

регулярных соответственно вне конечных областей D_k.

Построим последовательность многочленов $P_r(z)$, $n=0, 1, \ldots$, ортогональную к последовательности функций $\varphi_k(z)$. Многочлены этой последовательности должны удовлетворять условиям

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_k} P_n(z)\varphi_k(z)\,dz=\begin{cases}1, & k=n\\ 0, & k\neq n\end{cases} \qquad (k=0, 1, 2, \ldots), \tag{214}$$

где C_k — окружность, содержащая внутри себя область D_k.

Эти условия однозначно определяют $P_n(z)$ для любого $n \geqslant 0$, так как для определения коэффициентов $p_0, \ldots, p_n$ многочлена $P_n(z)$ мы будем иметь систему линейных уравнений с треугольной матрицей. Действительно, если

$$P_n(z) = \sum_{q=0}^{n} p_q z^q, \qquad q \leqslant n,$$

то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} P_n(z) \varphi_k(z)\, dz = p_k + \sum_{\nu=k+1}^{n} p_\nu a_{\nu, k} = 0, \ k < n, \tag{215}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} P_n(z) \varphi_n(z) = p_n = 1.$$

Поэтому степень $P_n(z)$ есть n.

Пусть $f(z)$ регулярна, например, в круге $|z| < R$, причем все области D_k, вне которых регулярны функции $\varphi_k(z)$, находятся внутри круга $|z| = R_0 < R$.

Рассмотрим последовательность чисел A_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$,

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z| = R_1} f(z) \varphi_n(z)\, dz, \quad R_0 < R_1 < R. \tag{216}$$

Мы можем поставить теперь задачу определения функции $f(z)$ по заданным ее моментам A_n, $n=0, 1, 2, \ldots$ Решением этой задачи служит, очевидно, разложение функции $f(z)$ в ряд по многочленам $P_n(z)$:

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} A_n P_n(z), \quad A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z| = R_1} f(z) \varphi_n(z)\, dz, \tag{217}$$

если ряд справа равномерно сходится к $f(z)$ в каком-либо круге $|z| = R_1$, $R_0 < R_1 < R$. Действительно, в этом случае моменты A_n однозначно определяют функцию $f(z)$.

Следует отметить, что $f(z)$ однозначно определяется здесь своими моментами только в том классе, в котором сходится ряд по многочленам $P_n(z)$, и что класс функций, однозначно определяемых моментами A_n, вообще говоря, шире класса сходимости моментного ряда.

Проблема определения класса функций $f(z)$, которые могут быть представлены моментным рядом (217), равномерно сходящимся к $f(z)$ в области, где все $\varphi_k(z)$ регулярны, является естественным обобщением интерполяционной задачи. Действительно, в случае треугольной таблицы узлов интерполяции

$$\varphi_k(z) = \frac{1}{(z - x_{0,k})(z - x_{1,k}) \cdots (z - x_{k,k})}.$$

Мы рассмотрим теперь один общий подход к интерполяционной или моментной проблеме (217), опирающейся на непосредственную оценку многочленов $P_n(z)$ и до известной степени учитывающей расположение особенностей и рост $\varphi_n(z)$.

Пусть Δ_n — односвязная область с жордановой границей γ_n, внутри которой находятся все области D_k, $k \leqslant n$, вне которых $\varphi_k(z)$ регулярны, $f(z)$ регулярна в $\overline{\Delta}_n$ и A_n определяются равенствами (217). Тогда

$$R_n(z) = f(z) - \sum_{k=0}^{n} A_k P_k(z) =$$

$$= f_n(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2\pi i} P_k(z) \int_{\gamma_n} f_n(z)\, \varphi_k(z)\, dz, \tag{218}$$

где

$$f_n(z) = f(z) - Q_n(z), \tag{219}$$

причем $Q_n(z)$ есть многочлен степени не выше n, наилучшим образом приближающий $f(z)$ в $\overline{\Delta}_n$.

Равенство (218) имеет место, так как $R_n(z) \equiv 0$ при замене $f(z)$ на $Q_n(z)$. В частном случае, когда Δ_n есть круг $|z-a| \leqslant r$, мы будем иметь, как известно, неравенство

$$|f_n(z)| < \left(\frac{r}{R}\right)^n \frac{r}{R-r} \max_{|\zeta-a|=R} |f(\zeta)|, \qquad |z-a| = r < R, \tag{219'}$$

если $f(z)$ регулярна в круге $|\zeta - a| < R$ и непрерывна на его границе. Из представления (218) следует неравенство

$$|R_n(z)| < |f_n(z)| + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n} |P_k(z)| \left| \int_{\gamma_n} f_n(z)\, \varphi_k(z)\, dz \right|. \tag{220}$$

Эта общая оценка $R_n(z)$, требующая оценок $|P_k(z)|$, и будет использована нами в дальнейшем.

Для оценки $|P_n(z)|$ можно воспользоваться тождествами

$$(z-a)^q = P_q(z) + \sum_{\nu=0}^{q-1} a_{\nu,q} P_\nu(z);$$

$$a_{\nu,q} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_q} (z-a)^q \varphi_\nu(z)\, dz, \tag{221}$$

$$\nu \leqslant q, \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

Из этой системы уравнений для $P_q(z)$ с треугольной матрицей $P_q(z)$ могут быть непосредственно найдены. Ухудшая оценку, мы

можем воспользоваться следующими из (221) неравенствами

$$|P_q(z)| < \sum_{\nu=1}^{q-1} |a_{\nu,q}|\,|P_\nu(z)| + |z-a|^q, \qquad q \leqslant n, \tag{222}$$

из которых легко следует оценка $|P_q(z)|$, если уже известны оценки величин $|a_{\nu,q}|$.

Оценить числа $|a_{\nu,q}|$ можно только сделав некоторые конкретные предположения о поведении функций $|\varphi_k(z)|$. Сделав такие предположения, мы сможем оценить $|P_n(z)|$ и тем самым выяснить, при каких свойствах $f(z)$ остаточный член $R_n(z)$ в неравенстве (220) стремится к нулю.

Мы дадим теперь решение общей интерполяционной задачи (217), обладающее достаточной, в смысле порядка, точностью. Сделаем предположение, что функции $\varphi_n(z)$, помимо условий (213), удовлетворяют неравенствам

$$|\varphi_n(z)| \leqslant \frac{\omega_n}{r^{n-m_n+1}(r-r_n)^{m_n}}, \qquad |z| = r > r_n, \tag{223}$$

$$\omega_n \geqslant \omega_{n-1} \geqslant 1, \quad m_n \geqslant 1, \quad \lim_{n\to\infty} m_n = \infty.$$

Такие ограничения для роста $|\varphi_n(z)|$, естественно, возникают при предположении регулярности $\varphi_n(z)$ в бесконечности и выполнении условий (213). В этом случае, полагая в неравенствах (222) $a = 0$, $|z| = r$, мы будем иметь неравенства

$$|P_n(z)| < \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k r_k^{n-k} \frac{(n-k+m_k)^{n-k+m_k}}{(n-k)^{n-k} m_k^{m_k}} |P_n(z)| + r^n, \tag{224}$$

так как при $R = \dfrac{n-k+m_k}{n-k} r_k > r_k$,

$$|a_{k,n}| \leqslant \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z|=R} z^n \varphi_k(z)\,dz \right| < \frac{R^{n+1}\omega_k}{R^{k-m_k+1}(R-r_k)^{m_k}} =$$

$$= \omega_k r_k^{n-k} \frac{(n-k+m_k)^{n-k+m_k}}{(n-k)^{n-k} m_k^{m_k}}.$$

Полагая теперь

$$\rho_n = \max_{0\leqslant k\leqslant n} [\omega_k r_k m_k], \qquad \lim_{k\to\infty} r_k m_k \omega_k = \infty$$

и

$$\rho_n = \alpha, \quad \omega_k r_k m_k \leqslant \alpha, \quad n > n_0(\alpha), \ \alpha > 0.$$

мы из неравенств (224) получаем неравенства

$$|P_n(z)| < \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^{k-n+1} [\omega_k r_k m_k]^{n-k} \left(1 + \frac{n-k}{m_k}\right)^{n-k+m_k} \frac{|P_k(z)|}{(n-k)^{n-k}} +$$

$$+ r^n < \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^{k-n+1} \rho_k^{n-k} \left(1 + \frac{n-k}{m_k}\right)^{n-k+m_k} \frac{|P_k(z)|}{(n-k)^{n-k}} + r^n + C_0 n^q r'^n;$$

$$r' = \max_{k \leqslant n_1 - 1} r_k, \; n_1 \geqslant n_0 + 1, \tag{225}$$

где C_0 и q от n не зависят, а n_1 постоянная.

Полагая далее, при фиксированном z и произвольном θ, $\ln\theta > 1$

$$|P_n(z)| = P_n \theta^n \prod_0^{n-1} \rho_k, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{226}$$

и $\omega = 1$ или $1 \leqslant \omega < \omega_0$, где $\omega_0 = \lim\limits_{k \to \infty} \omega_k$, мы получаем неравенство

$$P_n < \sum_{k=n_2}^{n-1} \omega^{k-n+1} \frac{\rho^{n-k}}{\rho_{n-1} \cdots \rho_k} \theta^{k-n} \left(1 + \frac{n-k}{m_k}\right)^{n-k+m_k} \frac{P_k}{(n-k)^{n-k}} +$$

$$+ \frac{r^n + C_1 n^{q_1} r''^n}{\theta^n \prod\limits_0^{n-1} \rho_k}, \qquad r'' = \max_{k \leqslant n_1 - 1} r_k, \; n_2 \geqslant n_1 \geqslant n_0, \tag{227}$$

где C_1 и q_1 от n не зависят и $n > n_2$.

Так как $m_k \to \infty$, $k \to \infty$, $m_k \geqslant 1$ и $\ln\theta > 1$, то при любом $\varepsilon > 0$ и $n > n'(\varepsilon)$ существует такое $\nu \geqslant 2$, что

$$\theta^{-(n-k)} \left(1 + \frac{n-k}{m_k}\right)^{n-k+m_k} < 1, \qquad n - k \leqslant \nu,$$

$$\theta^{-(n-k)} \left(1 + \frac{n-k}{m_k}\right)^{n-k+m_k} (n-k)^{k-n} <$$

$$< \theta^{-(n-k)} \left(1 + \frac{1}{n-k}\right)^{n-k} \left(1 + \frac{n-k}{m_k}\right)^{m_k} < \varepsilon, \quad n - k > \nu. \tag{228}$$

Существование такого ν совершенно очевидно. Поэтому, усиливая неравенство (227), мы получаем неравенство

$$P_n < \omega \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_k \omega^{k-n}}{(n-k)^{n-k}} + \varepsilon \sum_{k=0}^{n-2} P_k + \frac{r^n + C_1 r''^n n^q}{\theta^n \prod\limits_0^{n-1} \rho_k}, \tag{229}$$

верное при $n \geqslant n_3(\varepsilon)$.

Определим теперь числа t_n из соотношений

$$t_n = \omega \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega^{k-n}}{(n-k)^{n-k}} t_k + \varepsilon \sum_{k=0}^{n-2} t_k + \frac{r^n + C_1 r'^n n^q}{\theta^n \prod\limits_0^{n-1} \rho_k}, \tag{230}$$

которые мы предположим выполняющимися при $n \geqslant n_3$, а $t_0, \ldots, t_{n_3-1}$ выбираем, полагая $t_k = P_k$, $k < n_3$. Очевидно, что при таком выборе t_k мы для любого k будем иметь неравенство $t_k > P_k$. Введем теперь в рассмотрение функцию

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k x^k.$$

Из соотношений (230) непосредственно следует, что

$$\psi(x)\left[1 - \omega \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}\left(\frac{x}{\omega}\right)^k - \frac{\varepsilon x^2}{1-x}\right] =$$

$$= U(x) + Q(x), \quad U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n + C_1 r'^n n^q}{\theta^n \prod\limits_{k=0}^{n-1} \rho_k} x^n, \tag{231}$$

где $Q(x)$ — многочлен степени не выше n_3. Наименьший корень μ уравнения

$$1 - x - \omega \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^k}\left(\frac{x}{\omega}\right)^k = 0 \tag{232}$$

при любом ω, $1 \leqslant \omega < \infty$, заведомо меньше единицы. Поэтому наименьший по модулю корень μ_1 уравнения

$$f_0(x) = 1 - x - \omega x^2\left[\frac{\varepsilon}{1-x} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^k} \frac{x^{k-2}}{\omega^k}\right] = 0 \tag{233}$$

будет также меньше единицы и при любом δ найдется такое ε_0, что $0 < \mu - \mu_1 < \delta$, $\delta > 0$, если $\varepsilon < \varepsilon_0(\delta)$. Из уравнений (231) следует, что

$$\psi(x) = \frac{U(x) + Q(x)}{f_0(x)}.$$

Но если $\rho_k \to \infty$, $k \to \infty$, то $U(x)$ — целая функция и $\psi(x)$ регулярна в круге $|x| < \mu_1$. Если же $\rho_k = \alpha$, то $U(x)$ регулярна в круге $|x| < R$,

$$R = \min\left[\frac{\theta\alpha}{r}, \frac{\theta\alpha}{r''}\right],$$

и $\psi(x)$ регулярна в круге $|x| < R_0$,

$$R_0 = \min\left[\mu_1, \frac{\theta\alpha}{r}, \frac{\theta\alpha}{r''}\right]. \tag{234}$$

Отсюда следует, что

$$P_n \leqslant t_n < e^{\varepsilon_n n}\left[\frac{1}{\mu_1 n} + \left(\frac{r}{\theta\alpha}\right)^n + \left(\frac{r''}{\theta\alpha}\right)^n\right], \tag{235}$$

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0,$$

если $\rho_n = \alpha$ и

$$P_n \leqslant t_n < e^{\varepsilon_n n}\mu_1 \qquad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0, \tag{236}$$

если $\rho_n \to \infty$, $n \to \infty$.

Но ω можно взять сколь угодно близким к ω_0, μ_1 к μ, а θ — к числу e. Поэтому при $\rho_n = \alpha$ из (226) мы имеем неравенство

$$|P_n(z)| < e^{\varepsilon_n n}\left[\left(\frac{e\alpha}{\mu}\right)^n + r^n + r''^n\right] \tag{237}$$

и при $\rho_n \to \infty$, $n \to \infty$

$$|P_n(z)| < e^{\varepsilon_n n}\left(\frac{e}{\mu}\right)^n \prod_0^{n-1} \rho_k, \tag{238}$$

где μ — наименьший корень уравнения (232) с заменой ω на ω_0, $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, $r = |z|$, а $r'' = \max\limits_{0\leqslant k<\infty} r_k$, так как в этом случае $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, r_k \leqslant \alpha$.

Неравенства (237) и (238) позволяют теперь доказать две теоремы.

Теорема I. *Если последовательность функций* $\varphi_n(z)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *удовлетворяет условиям* (213) *и* (223) *и*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, \omega_k r_k m_k = \alpha_0 < \infty, \tag{239}$$

а $f(z)$ *регулярна в круге* $|z| < R$ *и*

$$R > \frac{e\alpha}{\mu}, \quad R > R' \geqslant r_n, \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{240}$$

где μ — *корень уравнения* (232) *с заменой* ω *на* ω_0, *то имеет место разложение*

$$f(z) = \sum_0^\infty A_n P_n(z), \quad A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\sigma} f(z)\,\varphi_n(z)\,dz, \tag{241}$$

где $R' < \sigma < R$, $P_n(z)$ — *многочлены задачи, определяемые соотношениями* (215), *и ряд сходится равномерно во всяком круге* $|z| \leqslant R_1 < R$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что для $P_n(z)$ в этом случае будут справедливы неравенства

$$|P_n(z)| < e^{\varepsilon_n n}\left[\left(\frac{e\alpha}{\mu}\right)^n + r^n + r^{\varepsilon_n n}\right], \quad \varepsilon_n \to 0, \tag{242}$$

так как в неравенстве (237) вместо α, определяемого неравенствами $\alpha \geqslant \omega_n r_n m_n$, $n > n_0$, можно взять α_0, являющееся пределом (239), а μ имеет прежнее значение.

Далее, вводя в рассмотрение функцию $f_n(z)$, определяемую соотношением (219), и пользуясь неравенством (219′) при $|z| = \sigma < r < R$ и $\sigma > r_k$, мы получаем, при любом $k < n$, неравенство

$$|A_k'| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{|z|=\sigma} f_n(z)\,\varphi_k(z)\,dz\right| <$$

$$< \left(\frac{\sigma}{r}\right)^n \frac{\sigma}{r-\sigma}\,\frac{\omega_k M(r)}{\sigma^{k-m_k}(\sigma - r_k)^{m_k}}, \tag{243}$$

где $M(r)$ — постоянная. Если p фиксировано, то при $k < p$

$$|A_k'| < C(p)\left(\frac{\sigma}{r}\right)^n, \qquad \sigma < r < R,\ \sigma > R'. \tag{244}$$

При достаточно большом p и $k \geqslant p$ будет иметь место неравенство

$$r_k\,\frac{n-k+m_k}{n-k} \leqslant \omega_k m_k r_k\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{m_k}\right) \leqslant R_1 < R,$$

так как $\omega_k r_k m_k \to \alpha$, $m_k \to \infty$, $k \to \infty$.

Полагая в неравенстве (243) при $k \geqslant p$, $k \leqslant n-1$ $\sigma = r_k\,\dfrac{n-k+m_k}{n-k}$, мы получаем неравенство

$$|A_k'| < e^{o(n)} r^{-n} \omega_k r_k^{n-k}\,\frac{(n-k+m_k)^{n-k+m_k}}{m_k^{m_k}(n-k)^{n-k}} <$$

$$< e^{o(n)} r^{-n} \omega_k^{-n+k+1} (\omega_k m_k r_k)^{n-k}\,\frac{\left(1+\dfrac{n-k}{m_k}\right)^{n-k+m_k}}{(n-k)^{n-k}} <$$

$$< e^{o(n)} r^{-n} (\omega_k r_k m_k e)^{n-k} \tag{245}$$

в силу неравенств (228). Поэтому при любом, но фиксированном $q \geqslant p$, $k < q$ и $|z| = \rho < r < R$

$$|P_k(z)|\,|A_k'| < C(q)\left(\frac{\sigma}{r}\right)^n, \qquad \sigma < r < R,$$

и при $k \geqslant q$ в силу неравенств (237),

$$|P_k(z)|\,|A_k'| < e^{o(n)}\left[\left(\frac{e\alpha}{\mu}\right)^k + \rho^k + R'^k\right]\frac{(e\omega_k m_k r_k)^{n-k}}{r^n} <$$

$$< e^{o(n)} r^{-n}\left[\left(\frac{e\alpha_1}{\mu}\right)^n + \rho^k (e\alpha_1)^{n-k} + R'^k (e\alpha_1)^{n-k}\right] <$$

$$< e^{o(n)}\left(\frac{r_1}{r}\right)^n, \quad r_1 = \max\left[\rho,\ R',\ \frac{e\alpha_1}{\mu}\right], \qquad r_1 < r, \tag{246}$$

так как α_1 при достаточно большом q будет сколь угодно близко к α, другими словами, $\frac{e\alpha_1}{\mu} < R$ и $\rho < R$. Неравенства (245) и (246) доказывают нашу теорему, так как, используя их в неравенстве (220), мы получаем, что $R_n(z)$ для ряда (241) удовлетворяет неравенству

$$|R_n(z)| < e^{o(n)}\left(\frac{r_2}{r}\right)^n, \qquad r_2 < r.$$

Важное следствие из этой теоремы мы получаем, если предположим, что $\lim \omega_k r_k m_k = 0$. В этом случае $\alpha = 0$ и условие $R > \frac{e\alpha}{\mu}$ отпадает, заменяясь условием, что $f(z)$ регулярна в круге радиуса большего, чем все r_k. От этого последнего условия также легко освободиться, и остается только условие регулярности $f(z)$ в начале координат и условия существования всех A_n. Другими словами, $A_n = 0$, $n = 0, 1, \ldots$, то $f(z)$, регулярная в начале, должна быть тождественным нулем при условии

$$\lim_{k\to\infty} \omega_k m_k r_k = 0. \tag{247}$$

Пример функции $f(z) = \frac{z}{1-z^2}$ и $\varphi_n(z)$, где

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{(z-z_n)^{n+1}}, \qquad z_{2k} = 0,\ z_{2k-1} = -i\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4n},$$

в котором

$$A_n = \frac{2}{2\pi i}\int_C f(z)\,\varphi_n(z)\,dz = \frac{f^{(n)}(z_n)}{n!},$$

и $\omega_n = 1$, $m_n = n+1$, $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\,\omega_k m_k r_k = \frac{\pi}{2}$ показывает, что условие (247) не может быть существенно улучшено.

Теорема II. *Если последовательность функций $\varphi_n(z)$, $n = 0, 1, \ldots$, удовлетворяет условиям* (213) *и* (223) *и, кроме того,*

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = \infty, \qquad \rho_n = \max_{k\leqslant n} r_k m_k \omega_k, \tag{248}$$

где $m_k \geqslant 1$, $\omega_k \geqslant 1$, $m_k \to \infty$, $k \to \infty$, то для всякой целой функции $f(z)$ с модулем максимумом $M(r)$, удовлетворяющим условию,

при $r > r_0$,

$$M(r) < \psi(r), \qquad \psi(r) = \max_{n<\infty} \frac{r^n}{\theta^n e^n \mu^{-n} \prod\limits_1^n \rho_{k-1}}, \tag{249}$$

где $\theta > 1$ — *любое число, а* μ — *наименьший корень уравнения* (232), *с заменой в нем* ω *на* $\omega_0 = \lim\limits_{n\to\infty} \omega_n$, $\omega_k > \omega_{k-1}$, *ряд* (241) *равномерно сходится к* $f(z)$ *в любом конечном круге.*

Доказательство. Для $|P_n(z)|$ в этом случае будет иметь место неравенство (238).

Рассматривая функцию $f_n(z)$, определяемую соотношением (211), пользуясь неравенством (219′) при $a = 0$ и полагая

$$|z| = r = r_k m_k \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{m_k}\right) < 2r_k m_k < 2\rho_k,$$

$$R = \theta \frac{e}{\mu} \rho_{n-1}, \qquad \mu \leqslant 1, \ \theta > 1, \ n > n_0,$$

мы получаем при любом $k \leqslant n-1$ неравенство

$$|A_k'| = \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{|z|=r} f_n(z) \varphi_n(z)\, dz \right| < \left(\frac{r}{R}\right)^n \frac{r}{R-r} \frac{\omega_k M(R)}{r^{k-m_k} (r-r_k)^{m_k}} <$$

$$< C\omega_k (r_k m_k)^{n-k} \frac{1}{(n-k)^{n-k}} \left(1 + \frac{n-k}{m_k}\right)^{n-k+m_k} \frac{M(R)}{R^n} <$$

$$< \frac{e^{o(n)} \rho_k^{n-k}}{\theta^n e^n \mu^{-n} \prod\limits_1^n \rho_{k-1}}$$

в силу неравенств (228) и (249).

Из этого неравенства и неравенства (238) теперь уже следует неравенство

$$|A_k' P_k(z)| < e^{o(n)} \left(\frac{e}{\mu}\right)^k \rho_k^{n-k} \frac{\theta^{-n} \prod\limits_1^{k-1} \rho_\nu}{e^n \mu^{-n} \prod\limits_0^{n-1} \rho_k} < \theta^{-\frac{n}{2}}, \qquad n > n_1.$$

Используя для оценки $|R_n(z)|$ неравенство (220), мы получаем, что

$$|R_n(z)| < (n+2)\, \theta^{-\frac{n}{2}}, \qquad n > n_0, \ \theta > 1,$$

что и доказывает нашу теорему, так как $|R_n(z)|$ при фиксированном $|z| \leqslant \sigma$ убывает скорее любой геометрической прогрессии.

В частном случае, когда

$$\lim \frac{\rho_n}{n^\alpha} = \gamma, \qquad \alpha > 0,$$

для сходимости ряда (241) достаточно, чтобы $f(z)$ была целой функцией порядка не выше $\frac{1}{\alpha}$, а при порядке, равном $\frac{1}{\alpha}$, была бы типа σ,

$$\sigma < \frac{\alpha \mu^{\frac{1}{\alpha}}}{e^{\frac{1}{\alpha}} \gamma^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

ГЛАВА II

РЯД НЬЮТОНА

§ 1. Вспомогательные предложения

1. Некоторые часто встречающиеся оценки. В дальнейшем нам очень часто придется пользоваться приближенными выражениями двух сумм:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad \sum_{k=1}^{n} \ln k. \tag{1}$$

Общий способ нахождения приближенных значений с любой степенью точности, возрастающей с ростом n, для сумм такого типа будет рассмотрен в главе IV.

Так как приближенные значения этих двух сумм при больших значениях n, или, как принято обычно говорить, асимптотические представления этих простейших сумм, нам будут очень часто необходимы уже в этой главе, то, чтобы не затруднять читателя, мы дадим здесь простым методом оценки этих сумм с нужной в этой главе точностью.

Рассмотрим бесконечную сумму

$$C = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right] = \sum_{k=}^{\infty} \left(\frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3} + \ldots\right) > 0. \tag{2}$$

Но очевидно, что

$$\sum_{=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\nu k^{2\nu}} - \frac{1}{(2\nu+1)\,k^{2\nu+1}}\right) = \frac{1}{2k^2} - \left(\frac{1}{3k^3} - \frac{1}{4k^4}\right) - \left(\frac{1}{5k^5} - \frac{1}{6k^6}\right) - \ldots,$$

откуда следуют неравенства для C

$$0 < C < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2},$$

значит, наш ряд (2) для константы C — сходящийся. Эта константа носит название константы Эйлера. Тождество (2) может быть

переписано в другом виде, именно:

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{N-1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)+C+\ln\left(1+\frac{1}{N}\right)-\sum_{k=N+1}^{\infty}\left[\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]=$$

$$=\ln N+C+\ln\left(1+\frac{1}{N}\right)-\sum_{k=N+1}^{\infty}\left[\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right],$$

так как

$$\sum_{k=1}^{N-1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{N}{N-1}\right)=\ln N.$$

Из очевидных неравенств

$$\frac{1}{2k(k+1)}<\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)<\frac{1}{2k(k-1)},$$

$$k>1;\qquad \frac{1}{4}<1-\ln 2<\frac{1}{2}$$

следует

$$\frac{1}{2(N+1)}<\sum_{k=N+1}^{\infty}\left[\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]<\frac{1}{2N}$$

и, наконец, верное при всяком $N\geqslant 1$ соотношение

$$\sum_{k=1}\frac{1}{k}=\ln N+C+\frac{\theta_N}{N},\qquad \frac{1}{2}\leqslant\theta_N<\frac{N+2}{2(N+1)}<1. \tag{3}$$

Это и есть нужная нам оценка суммы обратных величин чисел натурального ряда.

Формула (3) может быть записана в другой форме. Пусть $x\geqslant 1$ — число из интервала $N\leqslant x<N+1$. Тогда соотношение (3) может быть записано в форме

$$\ln x=\ln\frac{x}{N}+\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}-C-\frac{\theta_N}{N}=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}-C+\frac{\theta'_N}{x},\qquad \theta'_N<2, \tag{3'}$$

так как

$$\ln\frac{x}{N}<\ln\left(1+\frac{1}{N}\right)<\frac{1}{N}\leqslant\frac{2}{N+1}<\frac{2}{x},$$

и

$$0<\frac{\theta_N}{N}<\frac{N+2}{2N(N+1)}\leqslant\frac{2}{N+1}<\frac{2}{x},\qquad N\geqslant 2;$$

$$\frac{\theta_1}{1}=1-C\leqslant 1\leqslant\frac{2}{x};\qquad 1\leqslant x\leqslant 2.$$

Рассмотрим теперь бесконечную сумму

$$\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k),$$

$$\psi(x) = -\ln(x+1) + (x+1)\ln(x+1) - x\ln x - 1 + \\ + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right). \qquad (4)$$

Докажем прежде всего, что наш ряд — сходящийся, для чего найдем оценки $\psi(x)$ сверху и снизу. Мы можем с помощью простых преобразований установить, что

$$\psi(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1 + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \\ = \sum_{k=1} (-1)^k \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2k}\right) x^{-k} = \frac{1}{12}\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{6(k-1)}{k(k+1)} x^{-k} > 0,$$

так как это — знакопеременный ряд с монотонно убывающими членами при $x \geqslant 1$.

Далее,

$$\frac{1}{12x(x+1)} - \psi(x) = \frac{1}{12}\left[\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x^k} - \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{6(k-1)}{k(k+1)} \frac{1}{x^k}\right] = \\ = \frac{1}{12}\sum_{k=4}^{\infty} (-1)^k \left[1 - \frac{6(k-1)}{k(k+1)}\right] x^{-k} > 0,$$

так как этот последний ряд будет при $k \geqslant 4$ или $x \geqslant 2$ знакопеременным рядом с монотонно убывающими членами вследствие неравенства

$$1 - \frac{6(k-1)}{k(k+1)} - \frac{1}{x}\left[1 - \frac{6k}{(k+1)(k+2)}\right] \geqslant \frac{1}{2} - 3\frac{k^2+2k-4}{k(k+1)(k+2)} \geqslant 0.$$

Отсюда следует окончательно, что

$$\frac{1}{12x(x+1)} > \psi(x) > 0 \qquad (5)$$

при $x \geqslant 2$ и что ряд (4) — абсолютно сходящийся. Преобразуя сумму (4), мы будем иметь теперь равенство

$$\sum_{k=1}^{N-1} \psi(k) = -\sum_{k=N}^{\infty} \psi(k) + \lambda,$$

или так как

$$\sum_{k=}^{N-} \phi(k) = \sum_{k=1}^{N-1} [(k+1)\ln(k+1) - k\ln k] - \sum_{k=1}^{N-1} 1 +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} [\ln(k+1) - \ln k] - \sum_{k=1}^{N-1} \ln(k+1) =$$

$$= N\ln N - N + \frac{1}{2}\ln N + 1 - \ln(N!)$$

и

$$0 < \sum_{k=N}^{\infty} \phi(k) < \frac{1}{12} \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{12} \sum_{k=N}^{\infty} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] = \frac{1}{12N},$$

то, выполняя суммирование, будем иметь равенство

$$N\ln N - N + \frac{1}{2}\ln N + 1 - \ln(N!) = \lambda - \frac{\theta_N}{12N}, \quad 0 < \theta_N < 1,$$

и окончательно равенство

$$\ln N! = N\ln N - N + \frac{1}{2}\ln N + C_0 + \frac{\theta_N}{12N}, \quad 0 < \theta_N < 1, \tag{6}$$

где C_0 — постоянное число. Это асимптотическое представление $\ln(N!)$ носит название формулы Стирлинга. Она может быть записана и в другой форме, именно:

$$N! = e^{C_0} N^{N+\frac{1}{2}} e^{-N+\frac{\theta_N}{12N}}, \quad 0 < \theta_N < 1. \tag{7}$$

Постоянная C_0, как мы сейчас покажем, равна $\frac{1}{2}\ln 2\pi$. Для этой цели рассмотрим интеграл

$$I_0 = \int_0^1 [x(1-x)]^n\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} [x(1-x)]^n dx.$$

Вычисляя его интегрированием по частям, мы будем иметь, что

$$I_n = \frac{n}{n+1}\int_0^1 (1-x)^{n-1}x^{n+1}dx =$$

$$= \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 (1-x)^{n-2}x^{n+2}\,dx = \cdots$$

$$\cdots = \frac{n(n-1)\ldots 1}{(n+1)\ldots 2n}\int_0^1 x^{2n}dx = \frac{[n!]^2}{(2n+1)!}.$$

Применяя формулу Стирлинга, мы получим отсюда выражение для

$$I_n = \frac{e^{2C_0} n^{2n+1} e^{-2n} e^{o\left(\frac{1}{n}\right)}}{e^{C_0} 2^{2n+\frac{3}{2}} n^{2n+\frac{3}{2}} e^{-2n} e^{o\left(\frac{1}{n}\right)}} = e^{C_0} 2^{-2n-\frac{3}{2}} n^{-\frac{1}{2}} e^{o\left(\frac{1}{n}\right)}. \tag{8}$$

С другой стороны, делая подстановку $x(1-x) = \frac{t}{4}$, на интервале $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ мы будем иметь, что

$$2^{2n+1} I_n = 2^{2n+2} \int_0^{\frac{1}{2}} [x(1-x)]^n dx = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t}} dt =$$

$$= \int_{e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}}^1 \frac{t^n dt}{\sqrt{1-t}} + \int_0^{e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}} \frac{t^n dt}{\sqrt{1-t}} = \int_{e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}}^1 \frac{t^n dt}{\sqrt{1-t}} + O\left(e^{-\frac{1}{2}\sqrt{n}}\right),$$

так как подынтегральная функция во втором интеграле достигает своего максимума при верхнем пределе. Наконец, делая новую замену $t = e^{-\frac{s}{n}}$, мы получаем окончательно, что

$$2^{2n+1} I_n = \frac{1}{n} \int_0^{\sqrt{n}} \frac{e^{-s-\frac{s}{n}}}{\sqrt{1-e^{-\frac{s}{n}}}} ds + O\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-s} \frac{ds}{\sqrt{s}} + \frac{1}{n} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-s} \left[\frac{e^{-\frac{s}{n}}}{\sqrt{1-e^{-\frac{s}{n}}}} - \sqrt{\frac{n}{s}}\right] ds + O\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-s} \frac{ds}{\sqrt{s}} + \frac{1}{n} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-s} \left[\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{s}}\left(1 + O\left(\frac{s}{n}\right)\right) - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{s}}\right] ds + O\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-s} \frac{ds}{\sqrt{s}} + O\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\infty} e^{-s} \frac{ds}{\sqrt{s}} + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{9}$$

Из соотношений (8) и (9) мы получаем, что

$$2^{2n+\frac{3}{2}} \sqrt{n} I_n = e^{C_0 + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \sqrt{2} \int_0^{\infty} e^{-s} \frac{ds}{\sqrt{s}} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, мы получаем, наконец, что

$$e^{C_0} = \sqrt{2}\int_0^\infty e^{-s}\frac{ds}{\sqrt{s}} = 2\sqrt{2}\int_0^\infty e^{-s^2}ds = \sqrt{2\pi}, \tag{10}$$

так как значение последнего интеграла, как хорошо известно из курса анализа, равно $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Заметим, что это значение нами будет несколько ниже получено при изучении функции $\Gamma(z)$.

2. Гамма-функция, ее определение и основные свойства. Гамма-функцией мы будем называть функцию

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt, \tag{11}$$

определенную сначала этим интегралом при комплексных z в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$, так как в этой полуплоскости наш интеграл абсолютно сходится. Разбивая этот интеграл на два, разлагая в первом интеграле e^{-t} в ряд Тейлора и интегрируя почленно, мы будем иметь, что

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt + \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt =$$

$$= \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{t^{k+z-1}}{k!}\right]dt + \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt =$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{z+k} + \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt.$$

Так как интеграл вместе со своей производной по z в этом представлении $\Gamma(z)$ абсолютно и равномерно сходится в любом конечном круге $|z| \leqslant R$, а подынтегральная функция является целой аналитической функцией z, то этот интеграл есть также целая функция z и $\Gamma(z)$ является функцией комплексного переменного z, имеющей особенности только в точках $z = -k$, $k = 0, 1, \ldots$ В этих точках $\Gamma(z)$ имеет полюсы первого порядка с вычетами $\frac{(-1)^k}{k!}$. Интегрируя по частям, мы из представления (11) получаем функциональное уравнение для $\Gamma(z)$, именно:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt = \frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-t}t^z dt = \frac{\Gamma(z+1)}{z},$$

или

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{12}$$

Это уравнение, которое нами было получено вначале лишь при условии $\operatorname{Re} z > 0$, верно в силу аналитичности $\Gamma(z)$ всюду, кроме точек $z = 0, -1, -2, \ldots$

Функция $\Gamma(z)$ связана с функцией $\sin \pi z$ соотношением

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \tag{13}$$

Для доказательства тождества (13) мы предположим сначала, что z действительно и $0 < z < 1$. Тогда мы можем написать, что

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^\infty e^{-t_1} t_1^{z-1} dt_1 \int_0^\infty e^{-t_2} t_2^{-z} dt_2 =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(t_1+t_2)} t_1^{z-1} t_2^{-z} dt_1\, dt_2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t_1(1+t)} t^{-z} dt_1\, dt =$$

$$= \int_0^\infty t^{-z} \int_0^\infty e^{-t_1(1+t)} dt_1\, dt = \int_0^\infty \frac{t^{-z}}{1+t}\, dt.$$

Все эти преобразования возможны в силу абсолютной сходимости интегралов при $0 < z < 1$.

Рассмотрим область D плоскости комплексного переменного t, граница которой состоит из окружности $|t| = R$ и отрезка действительной оси от 0 до R. В этой области D функция $\frac{t^{-z}}{1+t}$ будет однозначной. Она будет регулярной всюду внутри D, кроме точки $t = -1$. Будем считать, что эта функция принимает действительные значения. Так как по теореме Коши интеграл в положительном направлении по замкнутому контуру, являющемуся границей D, должен равняться вычету $\frac{t^{-z}}{1+t}$ в точке $t = e^{\pi i}$, умноженному на $2\pi i$, то

$$\int_0^R \frac{t^{-z}}{1+t}\, dt - \int_0^R \frac{e^{-2\pi i z} t^{-z}}{1+t}\, dt + Ri \int_0^{2\pi} \frac{R^{-z} e^{-i\varphi z}}{1+Re^{i\varphi}} e \quad d\varphi = 2\pi i e^{-\pi i z}.$$

Очевидная оценка

$$R^{-z} \int_0 \frac{i e^{i\varphi - iz\varphi} R}{1+Re^{i\varphi}}\, d\varphi = O(R^{-z})$$

приводит нас, таким образом, к соотношению

$$(1 - e^{-2\pi i z}) \int_0^R \frac{t^{-z}}{1+t}\, dt = 2\pi i e^{-\pi i z} + O(R^{-z}).$$

Переходя в этом соотношении к пределу при $R \to \infty$ и делая простые преобразования, мы найдем теперь выражение для $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$, именно:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{2\pi i e^{-\pi i z}}{1-e^{-2\pi i z}} = \pi \frac{2i}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}} = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

что и доказывает формулу (13), так как благодаря аналитичности правых и левых частей этого соотношения оно верно не только на интервале (0, 1), но и всюду. В частности, при $z = \frac{1}{2}$ мы получаем из этого соотношения, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-s} \frac{ds}{\sqrt{s}} = \sqrt{\pi},$$

другими словами,— новое доказательство равенства (10).

Найдем теперь представление $\Gamma(z)$ в виде бесконечного произведения.

Докажем прежде всего, что при $\operatorname{Re} z = \sigma > 0$

$$\Gamma(z) = \lim_{N\to\infty} I_N(z) = \lim_{N\to\infty} \int_0^N \left(1 - \frac{t}{N}\right)^N t^{z-1} dt. \tag{14}$$

Для этого рассмотрим разность ε_N:

$$\varepsilon_N = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt - \int_0^N \left(1 - \frac{t}{N}\right)^N t^{z-1} dt =$$

$$= \int_N^\infty e^{-t} t^{z-1} dt + \int_0^N \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{N}\right)^N\right] t^{z-1} dt = \varepsilon_N^{(1)} + \varepsilon_N^{(2)}.$$

Так как

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{N}\right)^N = e^{-t}\left[1 - e^{-\sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{kN^{k-1}}}\right] = e^{-t} R_N(t),$$

то эта разность неотрицательна и $R_N(t)$ монотонно возрастает на интервале $[0, N]$. Отсюда

$$|\varepsilon_N^{(2)}| < \int_0^N \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{N}\right)^N\right] t^{\sigma-1} dt =$$

$$= \int_0^{\ln^2 N} e^{-t} R_N(t)\, t^{\sigma-1} dt + \int_{\ln^2 N}^N e^{-t} R_N(t)\, t^{\sigma-1} dt <$$

$$< O\left(\frac{\ln^4 N}{N}\right)\int_0^{\ln^2 N} e^{-t}t^{\sigma-1}dt + \int_{\ln^2 N}^{N} e^{-t}t^{\sigma-1}dt <$$

$$< O\left(\frac{\ln^4 N}{N}\right)\int_0^{\infty} e^{-t}t^{\sigma-1}dt + e^{-\frac{\ln^2 N}{2}}\int_1^{\infty} e^{-\frac{1}{2}}t^{\sigma-1}dt =$$

$$= O\left(\frac{\ln^4 N}{N}\right) + O\left(e^{-\frac{\ln^2 N}{2}}\right) = O\left(\frac{\ln^4 N}{N}\right),$$

так как

$$R_N(t) < 1 - e^{-\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{\ln^{2k} N}{kN^{k-1}}} = O\left(\frac{\ln^4 N}{N}\right), \qquad 0 \leqslant t \leqslant \ln^2 N.$$

Далее имеет место очевидная оценка

$$|\varepsilon_N^{(1)}| < \int_N^{\infty} e^{-t}t^{\sigma-1}dt < e^{-\frac{N}{2}}\int_N^{\infty} e^{-\frac{t}{2}}t^{\sigma-1}dt = O(N^{-1}).$$

Из этих двух оценок уже непосредственно следует, что

$$\lim_{N\to\infty}\varepsilon_N = \lim_{N\to\infty} O\left(\frac{\ln^4 N}{N}\right) = O,$$

другими словами, что при $\operatorname{Re} z = \sigma > 0$ выполняется предельное соотношение (14). Вычислим интеграл $I_N(z)$ интегрированием по частям. Мы будем иметь

$$I_N(z) = \int_0^N \left(1 - \frac{t}{N}\right)^N t^{z-1}dt =$$

$$= \frac{N}{Nz}\int_0^N \left(1 - \frac{t}{N}\right)^{N-1} t^z dt = \frac{N(N-1)}{N^2 z(z+1)}\int_0^N \left(1 - \frac{t}{N}\right)^{N-2} t^{z+1}dt = \ldots$$

$$\ldots = \frac{N!N^{N+z}}{N^N z(z+1)\ldots(z+N)} = \frac{e^{z\left(\ln N - \sum\limits_1^N \frac{1}{k}\right)}}{z\prod\limits_{k=1}^{N}\left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-\frac{z}{k}}}.$$

Мы уже знаем, что $\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{k} = \ln N + C + \frac{\theta_N}{N}$, $0 < \theta_N < 1$, значит,

$$I_N(z) = \frac{N^z N!}{z(z+1)\ldots(z+N)} = \frac{e^{-Cz}}{z\prod\limits_{k=1}^{N}\left(1 + \frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}}\cdot e^{-\frac{\theta_N}{N}z},$$

$$0 < \theta_N < 1,$$

откуда непосредственно следует при $\operatorname{Re} z > 0$, что

$$\Gamma(z) = \lim_{N\to\infty} \frac{N^z N!}{z(z+1)\ldots(z+N)} = \frac{e^{-Cz}}{z\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}}. \qquad (15)$$

Но в многосвязной замкнутой области $\overline{D}(R, \varepsilon)$, определяемой неравенствами $|z| \leqslant R$, $|z+k| \geqslant \varepsilon$, $k = 0, 1, \ldots$, где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало, а $R > 0$ сколь угодно велико, имеют место неравенства

$$|I_N(z) - I_{N+1}(z)| < \left|\frac{e^{-Cz-\frac{\theta_N}{N}z}}{z\prod\limits_{k=1}^{N}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}}\right| \left|1-\left(1+\frac{1}{N}\right)^z \frac{N+1}{z+N+1}\right| <$$

$$< C_0(R, \varepsilon)\left|1-\left(1+\frac{z}{N}+\frac{z(z-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{N^2}+\ldots\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(1-\frac{z}{N+1}+\frac{z^2}{(N+1)^2}-\ldots\right)\right| < \frac{C_1(R, \varepsilon)}{N^2},$$

откуда и следует равномерная сходимость к пределу в области $\overline{D}(R, \varepsilon)$ интеграла $I_N(z)$. Но в области $\overline{D}(R, \varepsilon)$ $I_N(z)$ — регулярная функция, значит, $I_N(z)$ имеет в области $\overline{D}(R, \varepsilon)$ своим пределом также регулярную функцию, которая в этой области совпадает с $\Gamma(z)$ вследствие соотношения (15), верного при $\operatorname{Re} z > 0$. Итак, мы доказали равномерную сходимость $I_N(z)$ к $\Gamma(z)$ в области $\overline{D}(R, \varepsilon)$. Тем самым нами установлена равномерная сходимость $\prod\limits_{k=1}^{N}\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1} e^{\frac{z}{k}}$ в области $\overline{D}(R, \varepsilon)$.

3. **Асимптотическое представление $\Gamma(z)$.** Для нахождения приближенного выражения $\Gamma(z)$ при больших значениях $|z|$ в области $D(\varepsilon)$ с границей $|z+k| = \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $k = 0, 1, \ldots$, рассмотрим вспомогательную функцию $\tau_n(z)$, $\operatorname{Re} z > 0$, $|z| = r$,

$$\tau_n(z) = (z+n+1)\ln(z+n+1) - (z+n)\ln(z+n) - 1 -$$

$$- \ln(z+n+1) + \frac{1}{2}[\ln(z+n+1) - \ln(z+n)] =$$

$$= (z+n)\ln(z+n) + (z+n)\ln\left(1+\frac{1}{z+n}\right) -$$

$$- (z+n)\ln(z+n) + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{z+n}\right) - 1 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k(z+n)^{k-1}} - 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k(z+n)^k} =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k(k-1)}{2k(k+1)}\frac{1}{(z+n)^k}.$$

Отсюда следует при $n \geqslant 0$ и $|z| \geqslant r \geqslant 2$, $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, что

$$|\tau_n(z)| < \frac{1}{|z+n|^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2(k+2)} \frac{1}{|z+n|^k} < \frac{1}{|z+n|^2}.$$

Рассмотрим теперь сумму

$$R_N(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \tau_n(z).$$

Мы будем иметь неравенство

$$|R_N(z)| < \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{|z+n|^2} < \frac{1}{r^2} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{r^2+n^2} < \frac{1}{r^2} + \int_0^{\infty} \frac{dt}{r^2+t^2} =$$
$$= \frac{1}{r^2} + \frac{\pi}{2r} < \frac{3}{r}, \qquad r \geqslant 2,$$

так как при $\operatorname{Re} z > 0$ $|z+n|^2 > r^2 + n^2$.

Теперь, осуществляя суммирование, мы получаем соотношение

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tau_n(z) = \sum_{n=0}^{N-1} [(z+n+1)\ln(z+n+1) - (z+n)\ln(z+n)] -$$
$$- N + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} [\ln(z+n+1) - \ln(z+n)] - \ln[(z+1)\ldots$$
$$\ldots(z+N)] = \frac{\theta_N}{r},$$
$$|\theta_N| < 3,$$

откуда следует, что

$$-\ln[(z+1)\ldots(z+N)] = -(z+N)\ln(z+N) + z\ln z + N -$$
$$- \frac{1}{2}[\ln(z+N) - \ln z] + \frac{\theta_N}{r}. \qquad (16)$$

Но, воспользовавшись формулой Стирлинга, мы получим отсюда, что

$$\ln I_N = z\ln N + \ln N! - \ln z - \ln[(z+1)\ldots(z+N)] =$$
$$= z\ln N + N\ln N - N + \frac{1}{2}\ln N + \frac{1}{2}\ln 2\pi - \ln z -$$
$$- (z+N)\ln(z+N) + z\ln z + N - \frac{1}{2}\ln(z+N) +$$
$$+ \frac{1}{2}\ln z + \frac{\theta_N}{r} + O\left(\frac{1}{N}\right) = z\ln z - z - \frac{1}{2}\ln z +$$
$$+ \frac{1}{2}\ln 2\pi + \frac{\theta_N}{r} + \left[z - N\ln\left(1+\frac{z}{N}\right)\right] - z\ln\left(1+\frac{z}{N}\right) -$$
$$- \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{z}{N}\right) + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$ на основании предельного соотношения (15), мы получаем искомое асимптотическое представление $\ln \Gamma(z)$:

$$\ln \Gamma(z) = z \ln z - z - \frac{1}{2} \ln z + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \frac{\theta}{r}, \quad |\theta| \leqslant 3, \quad (17)$$

при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, $|z| \geqslant 2$. Для того чтобы показать справедливость этого асимптотического представления, правда, с другим остаточным членом, в области D с границей $|z+k| = \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$, $k = 0, 1, \ldots$), достаточно воспользоваться формулой (13) и функциональным уравнением (12). Пусть $\operatorname{Re} z < 0$. Когда мы рассматривали точки z правой полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, мы считали, что $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}$. Это предположение существенно, так как оно определяет значение $\ln z$. Если z мы будем предполагать любым числом, то условимся заранее по той же причине, что $-\pi \leqslant \arg z \leqslant \pi$. Поэтому если $\operatorname{Re} z < 0$, то $\arg(-z) = -\pi + \arg z$, если $\arg z > 0$ и $\pi + \arg z$, если $\arg z < 0$. По формулам (13) и (12) мы будем иметь при $\operatorname{Re} z < 0$, что

$$\ln \Gamma(z) = \ln \pi - \ln(-z) - \ln \Gamma(-z) - \ln \sin \pi z.$$

Применяя формулу (17) к $\Gamma(-z)$, что возможно, так как $\operatorname{Re}(-z) > 0$, мы получаем при $\arg z > 0$, что

$$\ln \Gamma(z) = \ln \pi + \pi i - \ln z + z \ln(-z) - z + \frac{1}{2} \ln(-z) -$$
$$- \frac{1}{2} \ln 2\pi - \frac{\theta(z)}{r} - \ln\left[-e^{-\pi i z} \frac{1 - e^{2\pi i z}}{2i}\right] =$$
$$= z \ln z - z - \frac{1}{2} \ln z + \ln \pi + \pi i - \pi i z - \frac{\pi i}{2} - \frac{1}{2} \ln 2\pi + \pi i z + \ln 2 -$$
$$- \frac{\pi i}{2} - \ln(1 - e^{2\pi i z}) - \frac{\theta}{r} =$$
$$= z \ln z - z - \frac{1}{2} \ln z + \frac{1}{2} \ln 2\pi - \frac{\theta(z)}{r} - \ln(1 - e^{2\pi i z}).$$

Если же $\arg z < 0$, то $\arg \bar{z} > 0$, и мы получаем, что

$$\ln \Gamma(\bar{z}) = \bar{z} \ln \bar{z} - \bar{z} - \frac{1}{2} \ln \bar{z} + \frac{1}{2} \ln 2\pi - \frac{\theta(z)}{r} - \ln(1 - e^{2\pi i \bar{z}}).$$

Взяв сопряженные величины от обеих частей равенства, получим

$$\ln \Gamma(z) = z \ln z - z - \frac{1}{2} \ln z + \frac{1}{2} \ln 2\pi - \frac{\theta(r)}{r} - \ln(1 - e^{-2\pi i z}),$$

так как $\overline{\Gamma(\bar{z})} = \Gamma(z)$. Итак, для $-\pi \leqslant \arg z \leqslant \pi$ имеет место

асимптотическая формула

$$\ln\Gamma(z) = z\ln z - z - \frac{1}{2}\ln z + \frac{1}{2}\ln 2\pi + Q(z). \tag{18}$$

где при $\operatorname{Re} z < 0$, $|z| = r$

$$Q(r) = \frac{\theta}{r} - \ln(1 - e^{2k\pi i z}), \qquad |\theta| < 3, \qquad r > 2, \tag{19}$$

$k = 1$, если $\arg z > 0$, $k = -1$, если $\arg z < 0$, и при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$

$$Q(z) = \frac{\theta}{r}, \qquad |\theta| < 3, \qquad r > 2. \tag{20}$$

Поэтому в области $D(\varepsilon)$ $|z + s| \geqslant \varepsilon$, $s = 0, 1, \ldots,$

$$Q(z) = O(1), \tag{21}$$

а в секториальной области с границей $|z| \geqslant \varepsilon$, $|\arg z| \leqslant \pi - \varepsilon$,

$$Q(z) = \frac{\theta}{r} + O(e^{-2\pi r \sin\varepsilon}) = O\left(\frac{1}{r}\right). \tag{22}$$

4. Некоторые общие характеристики поведения целых аналитических функций. Рассмотрим класс аналитических функций, которые не имеют особенностей ни в какой конечной части плоскости. Такие функции, как известно, называют целыми. К целым функциям принадлежат многочлены e^z, $\sin z$, $\cos z$. Класс целых функций достаточно широк. Любой ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \tag{23}$$

если его радиус сходимости равен бесконечности, т. е. если

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0, \tag{24}$$

будет изображать некоторую целую функцию, т. е. аналитическую функцию, не имеющую особенностей ни в каком круге любого сколь угодно большого радиуса. В самом деле, в круге любого фиксированного радиуса ряд (23) при условии (24) сходится равномерно, и раз каждая функция $a_k z^k$ ряда (23) регулярна в таком круге, то и сумма ряда изображает в рассматриваемом круге некоторую регулярную функцию. Обратно, аналитическая функция, не имеющая никаких особенностей в любой конечной части плоскости, разлагается в бесконечный ряд (23) с радиусом сходимости, равным бесконечности.

Одной из основных характеристик целой функции является ее рост. Введем в рассмотрение функцию $M(r)$, определив ее как

$$\max_{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi} |f(re^{i\varphi})| = M(r), \qquad r > 0.$$

С этой функцией мы уже встречались в предыдущей главе. Здесь мы более подробно изучим некоторые свойства этой характеристики целой функции.

Заметим прежде всего, что $M(r)$ монотонно растет вместе с r, так как аналитическая функция не может принимать внутри замкнутой области своего максимального по модулю значения в этой области. В дальнейшем мы будем называть $M(r)$ максимумом модуля целой функции.

Среди целых функций играет существенную роль подкласс функций *конечного порядка*. Функцию $f(z)$ мы будем называть функцией *порядка* ρ, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $r_0 = r_0(\varepsilon)$, что

$$|f(z)| < e^{|z|^{\rho+\varepsilon}}, \qquad |z| \geqslant r_0,$$

и в то же время

$$f(z) > e^{|z|^{\rho-\varepsilon}}$$

хотя бы по одной последовательности значений z, уходящей в бесконечность. Число ρ предполагаем конечным. Рассмотрим в качестве примера и исследуем рост функции e^z.

Рост этой функции зависит от того, по какой последовательности значений z мы будем уходить в бесконечность. Рассматривая поведение $|e^z|$ по прямым, исходящим из начала, легко заключаем, что $|e^z|$ при движении z по действительной оси в положительном направлении, т. е. e^x, $x > 0$, растет скорее всего, при движении в противоположном направлении скорее всего убывает. Если рассматривать движение z по мнимой оси, т. е. положить $z = iy$ и стремить y к ∞, то, так как

$$|e^{iy}| = |\cos y + i \sin y| = 1,$$

модуль e^z остается все время постоянным и равным единице. Если же z движется по прямой, наклоненной к действительной оси под углом α, т. е. $z = re^{i\alpha}$, то

$$e^z = e^{r\cos\varphi + ir\sin\varphi}$$

и, следовательно,

$$|e^z| = e^{r\cos\varphi}.$$

Мы видим, что рост функции e^z по прямой, наклоненной к действительной оси под углом α, зависит от этого угла. На приведенном примере мы видим, что функция e^z обладает в отношении роста некоторыми закономерностями, а так как, вообще говоря,

у других функций рост распределен по разным направлениям гораздо менее закономерно, то оказалось целесообразным определять рост функции по отношению к функции e^z, как это и дано выше. Нетрудно видеть, что порядок роста ρ для функции e^z равен единице. В самом деле, не может быть $\rho < 1$, потому что если мы это предположим, то, выбирая тогди ε так, чтобы еще было $\rho + \varepsilon < 1$, мы получим, что должно выполняться условие

$$|e^z| < e^{|z|^{\rho+\varepsilon}},$$

где $\rho + \varepsilon < 1$. Однако всегда можно указать такие значения для z, при которых это неравенство места не имеет. Стоит только положить $z = x > 0$ (действительному числу), и мы получим

$$e^x < e^{x^{\rho+\varepsilon}},$$

что не может иметь места ни для какого x в силу условия $\rho + \varepsilon < 1$. Предполагая $\rho > 1$, опять придем к противоречию. Выбирая в этом случае ε столь малым, чтобы еще было $\rho - \varepsilon > 1$, мы получим, что для какой-то последовательности z_n ($|z_n| \to \infty$) должно быть выполнено неравенство

$$|e^{z_n}| > e^{|z_n|^{\rho-\varepsilon}}, \tag{25}$$

где $\rho - \varepsilon > 1$, и опять придем к противоречию, так как для любого z

$$|e^z| \leqslant e^{|z|} < e^{|z|^{\rho-\varepsilon}}, \qquad \rho - \varepsilon > 1. \tag{26}$$

Итак, может быть только $\rho = 1$, а это, как нетрудно проверить, имеет место, так как

$$|e^z| < e^{|z|^{1+\varepsilon}}, \qquad e^x > e^{x^{1-\varepsilon}}, \qquad x > 0.$$

В качестве примера функции, имеющей порядок роста ρ, отличный от единицы, можно указать на функции e^{z^2}, e^{z^3}, имеющие соответственно порядки роста 2, 3, ... Существуют функции (и примеры их построены) любых дробных порядков (они даны в форме бесконечных произведений).

В качестве примера функции первого порядка мы можем взять также функцию

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{Cz}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}.$$

Нами была найдена выше асимптотическая формула для $\Gamma(z)$ при любых достаточно больших значениях z [см. (18)]; на основании этой формулы мы можем утверждать, что $\frac{1}{\Gamma(z)}$ — целая функция первого порядка.

Определить порядок целой функции можно с помощью $M(r)$. Неравенства (26), очевидно, эквивалентны предельному соотношению

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r} = \rho. \tag{27}$$

Для целой функции конечного порядка введем еще одну более тонкую характеристику роста целой функции — *тип* целой функции конечного порядка. Пусть $f(z)$ — целая функция конечного порядка ρ.

Рассмотрим предел

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r)}{r^\rho} = \sigma. \tag{28}$$

Это число σ называется *типом* функции. Если $\sigma = 0$, то $f(z)$ называют функцией *минимального* типа, если $0 < \sigma < \infty$, то $f(z)$ есть функция *нормального* типа, и если $\sigma = \infty$, то $f(z)$ есть функция *максимального* типа порядка ρ. Когда $\rho = 1$, то часто вместо термина «тип» употребляют по аналогии с показательными функциями термин «*степень*» и в случае $\sigma < \infty$ говорят, что $f(z)$ есть функция *конечной степени*.

Целая функция $\sin z$ есть функция первого порядка типа единица. $\frac{1}{\Gamma(z)}$ есть целая функция первого порядка максимального типа, целая функция

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left[1 - \frac{z^2}{k^2\ln^2(k+1)}\right],$$

как легко показать, сравнив ее с $\sin z$ есть целая функция первого порядка минимального типа.

Следующей, еще более глубокой характеристикой роста целой функции конечного порядка и нормального типа является ее *индикатриса* $h(\varphi)$. Она определяется предельным соотношением

$$h(\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^\rho}. \tag{29}$$

Сравнивая определение $h(\varphi)$ с определением типа $f(z)$, мы видим, что $h(\varphi) \leqslant \sigma$. Далее, непосредственно видно, что $h(2\pi+\varphi) = h(\varphi)$, другими словами, что $h(\varphi)$ — периодическая функция φ. Индикатриса e^z будет $h(\varphi) = \cos\varphi$, так как $|e^z| = e^{r\cos\varphi}$. Индикатриса $\sin z$ будет $h(\varphi) = |\sin\varphi|$, так как $|\sin z| = e^{r|\sin\varphi|}\left[\frac{1}{2} + O(e^{-2r\sin\varphi})\right]$.

Тип целой функции конечного порядка может быть определен и через коэффициенты ряда Тейлора целой функции $f(z)$. Так как в дальнейшем нам будет нужна связь между убыванием коэффициентов и ростом функции в основном для целых функций

первого порядка и конечного типа, то мы ограничимся при определении типа функции с помощью коэффициентов ряда Тейлора функциями этого класса.

Пусть $F(z)$ — целая функция первого порядка конечного типа σ. Положим

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n,\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\sigma_1. \tag{30}$$

Тогда имеет место равенство

$$\sigma_1=\sigma. \tag{31}$$

Доказательство. Докажем сначала, что $\sigma_1\geqslant\sigma$. Действительно, по определению σ_1 мы будем иметь, что при любом $\varepsilon>0\,|a_k|<C(\sigma_1+\varepsilon)^n$, где C — постоянная, зависящая только от ε и не зависящая от n. Отсюда следует, что

$$|F(z)|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|}{n!}r^n<C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sigma_1+\varepsilon)^n}{n!}r^n=Ce^{(\sigma_1+\varepsilon)r},\quad r=|z|.$$

Сравнивая это неравенство с определением типа σ (28), мы видим, что $\sigma\leqslant\sigma_1+\varepsilon$ при любом $\varepsilon>0$, другими словами, что $\sigma\leqslant\sigma_1$. Докажем теперь неравенство $\sigma\geqslant\sigma_1$, из него уже будет следовать, что $\sigma=\sigma_1$. Для этой цели воспользуемся хорошо известным из теории функций представлением коэффициентов ряда Тейлора с помощью интеграла Коши, именно:

$$\frac{a_n}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{F(z)\,dz}{z^{n+1}}, \tag{32}$$

где Γ — любая окружность $|z|=R$. Положим $R=\frac{n}{\sigma+\varepsilon}$, где $\varepsilon>0$ — любое сколь угодно малое число. Из определения типа σ следует также, что

$$|F(Re^{i\varphi})|<Ce^{(\sigma+\varepsilon)R},$$

где C зависит только от ε и не зависит от R. Оценивая по модулю правую и левую части равенства (32) и принимая во внимание, что модуль интеграла не превосходит максимума модуля подынтегральной функции, умноженного на длину пути интегрирования, а также и формулу Стирлинга (7), мы получим неравенство

$$|a_n|\leqslant n!\,R^{-n}\max_{0\leqslant\varphi\leqslant2\pi}|F(Re^{i\varphi})|<Cn!\,n^{-n}(\sigma+\varepsilon)^ne^n<C_1(\sigma+\varepsilon)^n\sqrt{n},$$

где C_1 не зависит от n, откуда и следует неравенство

$$\sigma_1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant (\sigma + \varepsilon) \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{C_1 \sqrt{n}} \leqslant \sigma + \varepsilon.$$

Так как это неравенство верно при всяком $\varepsilon > 0$, то, действительно, $\sigma_1 \leqslant \sigma$.

Если $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ — целая функция не выше первого порядка и нормального типа, представляющаяся рядом Тейлора (30), то функция

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}} \tag{33}$$

называется *ассоциированной с $F(z)$ по Борелю*. Доказанная нами теорема (31) позволяет утверждать, что радиус круга с центром в начале, вне которого ряд (33) абсолютно сходится, а $f(z)$ регулярна, равен σ. Между расположением особенностей $f(z)$ и индикатрисой $F(z)$, функцией $h(\varphi)$, существует тесная связь. Для установления этой связи нам придется изучить свойства выпуклых областей и их опорных функций.

5. Некоторые свойства выпуклых областей. Опорная функция выпуклой области. Будем называть *выпуклой областью* всякое ограниченное и замкнутое точечное множество на плоскости, содержащее вместе со всякими двумя точками и все точки прямолинейного отрезка, их соединяющего. Мы будем считать выпуклыми областями и одну точку или отрезок конечной длины. Очевидно, что если какая-нибудь точка прямолинейного отрезка, целиком принадлежащего области, не являющаяся ни одним из его концов, будет точкой границы выпуклой области, то и весь отрезок является частью границы этой выпуклой области.

Пусть d_1 и d_2 будут выпуклые области, лежащие в плоскости комплексного переменного z, $z = x + iy$. Тогда, как легко убедиться, сумма этих двух областей $d_3 = d_1 + d_2$, определяемая как множество точек, имеющих аффиксами комплексные числа $z_3 = z_1 + z_2$, где z_1 и z_2 — аффиксы любых двух точек, принадлежащих соответственно областям d_1 и d_2, будет также выпуклой областью. Пересечение, иначе говоря, общая часть, любого количества выпуклых областей будет также выпуклой областью. Пересечение всех выпуклых областей, содержащих некоторое ограниченное точечное множество, мы будем называть *выпуклой областью множества*. Легко видеть, что подобным образом мы определим наименьшую и при том единственную выпуклую область, содержащую данное множество.

Наряду с выпуклыми областями, определенными выше, мы будем рассматривать и *бесконечные выпуклые области*, которые можно определить как неограниченные замкнутые множества, содержащие вместе с двумя точками и соединяющий их отрезок. Если бесконечная выпуклая область содержит бесконечную прямую, то ее граница должна состоять из двух параллельных прямых. Действительно, если мы возьмем точку границы любой выпуклой области, то через эту точку всегда можно провести по крайней мере одну прямую, такую, что все точки области находятся по одну сторону этой прямой. Поэтому, если мы возьмем точку границы бесконечной выпуклой области, содержащей бесконечную прямую, и через эту точку проведем прямую так, чтобы все точки области лежали по одну ее сторону, то эта прямая должна будет проходить параллельно прямой, принадлежащей области. Отсюда уже непосредственно следует наше утверждение. Примеры бесконечных выпуклых областей: полуплоскость $\operatorname{Re} z \geqslant a$, полоса $-a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant a$, часть плоскости, содержащая положительную часть действительной оси и ограниченная гиперболой $x = \sqrt{a^2 + y^2}$.

Введем понятие опорной функции выпуклой конечной или бесконечной области. Пусть $z_D = x + iy$ есть точка конечной или бесконечной выпуклой области D. Тогда $L(\varphi, z_D)$ — длина (с соответствующим знаком) отрезка луча, идущего из начала под углом φ, считая от начала до основания перпендикуляра, опущенного из точки z_D на этот луч,— будет $x \cos\varphi + y \sin\varphi = \operatorname{Re}(z_D e^{-i\varphi})$.

Определим *опорную функцию* $K(\varphi)$ области D для каждого φ как $\max\limits_{z_D \in D} L(\varphi, z_D)$, т. е.

$$K(\varphi) = \max_{z_D \in D} \operatorname{Re} z_D e^{-i\varphi}, \quad K(\varphi + 2\pi) = K(\varphi), \quad -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi, \tag{34}$$

итак, для всякой точки z, $z \in D$, имеем

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi \leqslant K(\varphi).$$

Если D — конечная выпуклая область, то $K(\varphi)$ удовлетворяет некоторому функциональному неравенству, которое по аналогии с условиями выпуклости назовем условием *тригонометрической выпуклости* $K(\varphi)$. Действительно, если $K(\varphi)$ будет опорной функцией конечной выпуклой области D и аргументы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ будут подчинены неравенствам

$$\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3, \quad \varphi_2 - \varphi_1 < \pi, \quad \varphi_3 - \varphi_2 < \pi,$$

то, взяв $z = x + iy$ таким, что $x \cos\varphi_2 + y \sin\varphi_2 = K(\varphi_2)$, мы будем иметь систему неравенств:

$$\begin{aligned} K(\varphi_1) - x\cos\varphi_1 - y\sin\varphi_1 &\geqslant 0, \\ K(\varphi_2) - x\cos\varphi_2 - y\sin\varphi_2 &= 0, \\ K(\varphi_3) - x\cos\varphi_3 - y\sin\varphi_3 &\geqslant 0, \end{aligned}$$

из которой, умножая первое неравенство на

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \\ \cos\varphi_3 & \sin\varphi_3 \end{vmatrix} = \sin(\varphi_3 - \varphi_2) > 0,$$

второе на

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ \cos\varphi_3 & \sin\varphi_3 \end{vmatrix} = \sin(\varphi_3 - \varphi_1)$$

и третье на

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \end{vmatrix} = \sin(\varphi_2 - \varphi_1) > 0,$$

мы получим после сложения нужное нам неравенство, которому подчиняется $K(\varphi)$:

$$\begin{vmatrix} K(\varphi_1) & \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ K(\varphi_2) & \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \\ K(\varphi_3) & \cos\varphi_3 & \sin\varphi_3 \end{vmatrix} \geqslant 0. \tag{35}$$

Можно показать, что если $K(\varphi)$ — периодическая функция φ с периодом 2π и подчиняется этому последнему неравенству, то $K(\varphi)$ является опорной функцией некоторой выпуклой области. Неравенство (35), как легко убедиться, остается в силе и для опорной функции бесконечной выпуклой области, если $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ лежат в интервале непрерывности $K(\varphi)$.

Пусть D будет конечная или бесконечная выпуклая область в плоскости переменного $z = x + iy$. Взяв в этой плоскости луч $\arg z = \varphi$, идущий из начала, и опуская на него перпендикуляры из точек, принадлежащих области D, мы можем фиксировать на этом луче наиболее удаленную от начала точку z_φ, являющуюся основанием перпендикуляра, опущенного из точки, принадлежащей D. Если при данном φ $K(\varphi)$ положительна, то z_φ лежит на нашем луче, если же $K(\varphi)$ отрицательна, то z_φ лежит на луче $\arg z = \pi + \varphi$.

Для конечной выпуклой области D $K(\varphi)$ также всегда конечна, для бесконечной она неограниченна. Совокупность точек z_φ в том случае, когда область D содержит начало, и, значит, $K(\varphi)$ всегда положительна, мы будем называть *опорной кривой* выпуклой области. В случае конечности области D, содержащей начало, кривая $r = K(\varphi)$ в полярных координатах будет замкнутой кривой конечной длины. В случае же бесконечной области опорная кривая последней будет определена лишь для некоторых значений φ. Для других же значений, при которых она не определена, мы будем считать ее радиус-вектор равным бесконечности.

Примеры опорных функций выпуклых областей: опорная функция точки $a = |a|e^{i\alpha}$ есть $K(\varphi) = |a|\cos(\varphi - \alpha)$; опорная функция отрезка от точки $-i$ до точки i есть $K(\varphi) = |\sin\varphi|$; опор-

ная функция области $|z| \leqslant R$ есть $K(\varphi) = R$; опорная функция полуполосы, ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 1$, $y = -1$, есть

$$K(\varphi) = \begin{cases} |\sin\varphi|, & |\varphi| \geqslant \frac{\pi}{2}, \\ \infty, & |\varphi| < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Опорная функция бесконечной области $|\arg z| \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$ есть

$$K(\varphi) = \begin{cases} 0, & |\varphi| \geqslant \frac{\pi}{2} + \alpha, \\ \infty, & |\varphi| < \frac{\pi}{2} + \alpha. \end{cases}$$

Легко видеть, что опорная кривая выпуклой области D, содержащей начало, может быть рассматриваема как огибающая семейства кругов, диаметрами которых будут отрезки, соединяющие начало с точками границы области D. Обратно, если кривая $r = K(\varphi)$ есть опорная функция выпуклой области D, содержащей начало, то граница области D будет огибающей семейства прямых, перпендикулярных к радиусам-векторам кривой $r = K(\varphi)$ и проходящих через концы этих радиусов-векторов.

Докажем теперь две теоремы, нужные нам в дальнейшем.

Теорема I. *Если D — конечная или бесконечная выпуклая область, $H(\varphi)$ — ее опорная функция, d — конечная выпуклая область, лежащая строго внутри D с опорной функцией $K(\varphi)$, то $H(\varphi) > K(\varphi)$, $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$.*

Доказательство. Пусть D — наша область и пусть точка $z = 0$ лежит внутри D. Возьмем выпуклую область D_ε, представляющую совокупность точек $(1-\varepsilon) z_D$, $0 < \varepsilon < 1$, где z_D пробегает все точки области D. Тогда всюду, где $H(\varphi)$ конечна, $H_\varepsilon(\varphi) = (1-\varepsilon) H(\varphi)$, где $H_\varepsilon(\varphi)$ — опорная функция D_ε, а $H(\varphi)$ — опорная функция D.

Действительно, если D содержит d, то можно выбрать ε так, чтобы $d \subset D_\varepsilon$, а тогда

$$K(\varphi) = \max_{z \in d} \operatorname{Re}(ze^{-i\varphi}) \leqslant \max_{z \in D_\varepsilon} \operatorname{Re}(ze^{-i\varphi}) = H_\varepsilon(\varphi).$$

Следовательно, $K(\varphi) < H(\varphi)$ для тех φ, для которых $H(\varphi)$ конечна. Но для остальных неравенство тем более справедливо, так как $K(\varphi)$ всюду конечна.

Если же точка $z = 0$ не лежит внутри D, то мы получим утверждение теоремы, проведя те же рассуждения относительно точки z_0, лежащей внутри D, так как

$$H(\varphi) = \max_{z \in D} \operatorname{Re}(ze^{-i\varphi}) = \max_{z \in D} \operatorname{Re}[(z - z_0) e^{-i\varphi}] + \operatorname{Re}(z_0 e^{-i\varphi}).$$

Теорема I'. *Если для всех значений* φ, $H(\varphi) > K(\varphi)$, *где* $H(\varphi)$ — *опорная функция выпуклой области* D, *а* $K(\varphi)$ — *опорная функция выпуклой области* d, *то область* D *содержит область* d, *причем все точки последней являются внутренними точками области* D.

Доказательство. Допустив существование хотя бы одной точки z_d, принадлежащей области d и лежащей вне или на границе D, мы можем провести через эту точку z_d такую прямую, что все точки D будут находиться по одну ее сторону. Беря луч $\arg z = \alpha$, перпендикулярный к этой прямой, мы получим, что

$$\max_{z \in D} \operatorname{Re}(ze^{-i\alpha}) \leqslant \max_{z \in d} \operatorname{Re}(ze^{-i\alpha}),$$

т. е. что $K(\alpha) \geqslant H(\alpha)$. А это находится в противоречии с предположением теоремы.

6. Связь между индикатрисой роста целой аналитической функции первого порядка нормального типа и расположением особенностей ассоциированной с ней функции. Пусть $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ — целая функция первого порядка и нормального типа σ, т. е.

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln \ln \max |F(re^{i\varphi})|}{\ln r} = 1, \quad \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln \max |F(re^{i\varphi})|}{r} = \sigma. \tag{36}$$

Пусть, далее, $h(\varphi)$ — ее индикатриса роста

$$h(\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln |F(re^{i\varphi})|}{r}, \quad h(\varphi) \leqslant \sigma, \ |\varphi| \leqslant \pi. \tag{37}$$

Рассмотрим функцию $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}$, ассоциированную по Борелю с функцией $F(z)$. Мы уже знаем, что функция $f(z)$ будет регулярна вне круга $|z| = \sigma$, где σ — тип $F(z)$.

Возьмем наименьшую выпуклую область, содержащую все особенности $f(z)$. Такую область мы будем называть *выпуклой областью функции* $f(z)$. Построим опорную функцию $K(\varphi)$ этой ограниченной выпуклой области и назовем $K(\varphi)$ *диаграммой функции* $f(z)$. Мы можем доказать теперь теорему, связывающую индикатрису $h(\varphi)$ и диаграмму $K(\varphi)$.

Теорема II. *Если* $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ — *целая функция первого порядка и конечного типа* σ, *то ее индикатриса*

$$h(\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln |F(re^{i\varphi})|}{r}, \quad |\varphi| \leqslant \pi \tag{38}$$

связана с диаграммой $K(\varphi)$ *функции* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^{n+1}}$ *соотношением*

$$K(\varphi)=h(-\varphi). \tag{39}$$

Доказательство. Рассмотрим прежде всего интегральное представление функции $F(z)$ с помощью $f(z)$:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{z\zeta}f(\zeta)\,d\zeta, \tag{40}$$

где контур C может быть любым замкнутым контуром в плоскости комплексного переменного ζ, не проходящим через начало и содержащим внутри себя все особенности регулярной в бесконечности функции $f(z)$.

Интеграл в правой части этой формулы действительно равен $F(z)$.

В этом мы можем убедиться, проинтегрировав почленно ряд Лорана, представляющий $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки.

Пусть D — выпуклая область функции $f(z)$, D_ε — выпуклая область, состоящая из точек $z_0+(z_D-z_0)(1+\varepsilon)$ ($z_0\in D$, D строго внутри D_ε), C_ε — граница D_ε. Вне D_ε $f(z)$ ограничена, поэтому, полагая $z=re^{i\varphi}$, будем иметь

$$|F(re^{i\varphi})|<Ae^{r\max\limits_{\zeta\in C_\varepsilon}\operatorname{Re}(\zeta e^{i\varphi})}.$$

Но если ζ лежит на контуре C_ε, то по свойствам опорных функций этого контура и выпуклой области особенностей $f(z)$

$$\max_{\zeta\in D}\operatorname{Re}(\zeta e^{i\varphi})<K(-\varphi)(1+\varepsilon)$$

для всякого $\varepsilon>0$. Отсюда следует, что

$$h(\varphi)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|F(re^{i\varphi})|}{r}\leqslant K(-\varphi). \tag{41}$$

Обратно, мы можем представить функцию $f(z)$ с помощью функции $F(z)$ интегралом

$$f(z)=\int_0^\infty e^{-ze^{-i\varphi}t}F(te^{-i\varphi})e^{-i\varphi}\,dt, \tag{42}$$

который будет абсолютно сходиться при заданном φ, если только $\operatorname{Re}(ze^{-i\varphi})>h(-\varphi)$ и, значит, $f(z)$ регулярна для всякого z, для

которого $\operatorname{Re}(ze^{-i\varphi}) > h(-\varphi)$ по крайней мере для одного значения φ.

Покажем справедливость интегрального представления (42) функции $f(z)$. Заметим, что $|F(te^{-i\varphi})| < Ae^{\sigma_1 t}$, $\sigma_1 > \sigma$. Положим $z = \rho e^{i\psi}$, $\rho > 2\sqrt{2}\sigma_1$, $\zeta = te^{i\varphi}$. Возьмем в плоскости комплексного переменного ζ сектор с центром в начале, ограниченный лучами $\varphi = -\psi$ и $\varphi = -\psi + \frac{\pi}{4}$ и дугой окружности $|\zeta| = R$. Границу этого сектора обозначим через C. Тогда по теореме Коши

$$\int_C e^{-z\zeta} F(\zeta)\, d\zeta = 0. \tag{43}$$

Но подынтегральная функция удовлетворяет на контуре C неравенству

$$|e^{-z\zeta} F(\zeta)| < Ae^{t\left(\sigma_1 - \rho\cos\frac{\pi}{4}\right)} < Ae^{-\sigma_1 t}. \tag{44}$$

Увеличивая R до бесконечности, мы видим из неравенства (44), что часть интеграла (43), взятая по дуге $|\zeta| = R$, стремится к нулю и, значит,

$$\int_0^\infty e^{-zte^{-i\psi}} F(te^{-i\psi})\, e^{-i\psi}\, dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-zte^{-i\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right)}} F\left(te^{-i\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right)}\right) e^{i\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right)} dt. \tag{45}$$

Но интеграл в левой части равенства (45) на основании неравенства (44) будет равномерно сходяшимся при $|z| \geqslant 2\sqrt{2}\sigma_1$, $|\arg z - \psi| \leqslant \frac{\pi}{4}$, а интеграл в правой части будет равномерно сходящимся при $|z| \leqslant 2\sqrt{2}\sigma_1$, $\left|\arg z - \psi + \frac{\pi}{4}\right| \leqslant \frac{\pi}{4}$.

Итак, интеграл в левой части (45) определяет аналитическую функцию z, регулярную вне круга $|z| \leqslant 2\sqrt{2}\sigma_1$ и внутри угла $|\arg z - \psi| \leqslant \frac{\pi}{4}$ с раствором $\frac{\pi}{2}$. Аналогично, правая часть соотношения (45) есть аналитическая функция z, регулярная вне круга $|z| \leqslant 2\sqrt{2}\sigma_1$ и внутри угла $\left|\arg z - \psi + \frac{\pi}{4}\right| \leqslant \frac{\pi}{4}$ тоже раствора $\frac{\pi}{2}$. Но обе эти области имеют общую часть и, значит, интегралами в левой и правой частях равенства (45) определяется при любом ψ одна и та же функция $f(z)$, регулярная вне круга $|z| \leqslant 2\sqrt{2}\sigma_1$. Отсюда следует, что правая часть равенства (42) не зависит от φ. Полагая $\varphi = 0$, $z = \rho$, $\rho > 2\sqrt{2}\sigma_1$ и интегрируя почленно, мы

получим

$$f(z)=\int_0^\infty e^{-tz}F(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^{n+1}}.$$

Этим представление $f(z)$ с помощью $F(z)$ равенством (42) окончательно доказано.

Вернемся к полученному нами результату, что $f(z)$ регулярна для всякого z, для которого $\operatorname{Re}(ze^{-i\varphi})>h(-\varphi)$. При фиксированном φ уравнение $\operatorname{Re}(ze^{-i\varphi})=x\cos\varphi+y\sin\varphi=h(-\varphi)$ представляет прямую, так как $h(-\varphi)$ ни при каком φ не может быть равно ∞. Действительно, в противном случае соотношение (42) дает регулярность $f(z)$ во всей плоскости, что влечет за собой тождественное равенство нулю и $f(z)$ и $F(z)$. Плоскость комплексного переменного z разбивается прямой $\operatorname{Re}(ze^{-i\varphi})=h(-\varphi)$ на две полуплоскости, причем $f(z)$ регулярна в той из этих полуплоскостей, для всех точек z которой $\operatorname{Re}(ze^{-i\varphi})>h(-\varphi)$. Если d есть наименьшая выпуклая область, содержащая все особенности $f(z)$, то прямая $\operatorname{Re}(ze^{-i\varphi})=h(-\varphi)$ не может разбивать d на две части так, чтобы существовали точки d, находящиеся по обе стороны этой прямой. Действительно, допустив, что наша прямая разбивает d на две подобные части, мы приходим к тому, что все особенности $f(z)$ должны находиться в одной из этих частей, назовем ее d_1. Но прямая делит любую выпуклую область только на выпуклые же области. Значит, выпуклая область d_1 содержит все особенности $f(z)$, и мы приходим к противоречию, так как d_1 есть лишь часть d. Итак, d должна целиком лежать в полуплоскости, точки которой подчинены неравенству $\operatorname{Re}(ze^{-i\varphi})\leqslant h(-\varphi)$. Отсюда мы получаем неравенство $K(\varphi)=\max\limits_{z\in d}\operatorname{Re}(ze^{i\varphi})\leqslant h(-\varphi)$. Из неравенства (41) и этого последнего неравенства непосредственно следует, что $K(\varphi)=h(-\varphi)$. Этим теорема II доказана.

Более подробные сведения о целых функциях читатель может найти, например, в книге А. И. Маркушевича «Теория аналитических функций», Гостехиздат, 1950 г.

7. Плотность последовательности и показатель сходимости. Пусть последовательность не убывающих по модулю чисел x_0, $x_1,\ldots,x_n,\ldots$ будет иметь точку накопления только в бесконечности, другими словами, пусть она удовлетворяет условиям

$$|x_0|\leqslant|x_1|\leqslant\ldots\leqslant|x_n|\leqslant\ldots,\quad \lim_{n\to\infty}|x_n|=\infty. \tag{46}$$

Введем *функцию плотности* $n(r)$, характеризующую плотность этой последовательности на комплексной плоскости, определив $n(r)$ как число точек x_k, попавших в круг $|z|\leqslant r$. Эта функция будет удовлетворять условиям

$$|x_k|\leqslant r \text{ при } k\leqslant n(r);\quad |x_k|>r \text{ при } k>n(r). \tag{47}$$

Это определение показывает, что $n(r)$ есть кусочно-постоянная монотонно неубывающая функция r.

Выделим особо последовательности конечной верхней или нижней плотности, определив *верхнюю плотность* ν_1 и *нижнюю плотность* ν_2 предельными соотношениями

$$\nu_1 = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln n(r)}{\ln r}, \quad \nu_2 = \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln n(r)}{\ln r}. \tag{48}$$

Если при этом $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, то мы будем говорить, что последовательность имеет *плотность* ν.

Далее, пусть последовательность имеет плотность ν. Определим по аналогии с типом целой функции конечного порядка *верхний* и *нижний типы* последовательности соответственно τ_1 и τ_2 как пределы

$$\tau_1 = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r)}{r^\nu}, \quad \tau_2 = \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r)}{r^\nu} \tag{49}$$

и в случае $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ будем говорить, что последовательность имеет *конечную плотность* ν и *тип* τ.

Для последовательности чисел an^λ, $a > 0$, $\lambda > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, функция $n(r)$ будет иметь вид

$$n(r) = \left[\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right],$$

где знак [ ] означает, что мы берем целую часть числа в этих скобках. Эта последовательность будет иметь плотность $\frac{1}{\nu}$ и тип $a^{-\frac{1}{\lambda}}$. Совокупность всех целых чисел, находящихся в интервалах $2^{2k} \leqslant n < 2^{2k+1}$, $k = 0, 1, \ldots$, является последовательностью плотности $\nu = 1$ с верхним типом $\frac{2}{3}$ и нижним типом $\frac{1}{3}$, так как для этой последовательности

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{n(r)}{r} \leqslant \frac{2r+1}{3r}.$$

Возьмем теперь совокупность всех целых чисел, лежащих в интервалах $2^{2^{2k}} \leqslant n < 2^{2^{2k+1}}$. Эта последовательность будет иметь верхней плотностью единицу, а нижней — половину, как показывает простой подсчет.

Рассмотрим еще одну существенную характеристику последовательности, имеющей конечную верхнюю плотность, именно *показатель сходимости* последовательности. Определим показатель сходимости μ условиями для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{|x_n|^{\mu+}} < \infty, \quad \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{|x_n|^{\mu-\varepsilon}} = \infty. \tag{50}$$

Не для всех последовательностей существует показатель сходимости. Например, для последовательности

$$x_n = \ln n$$

ряд с общим членом

$$\frac{1}{[\ln n]^{\mu+\varepsilon}}$$

расходится при любых μ и ε (кстати, в таких случаях вводят другую характеристику). Дадим примеры последовательностей, имеющих показатель сходимости, причем его значение находится просто. Последовательность с общим членом $\sqrt{n}$ имеет показатель сходимости $\mu = 2$, потому что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n})^{2+\varepsilon}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}$$

при $\varepsilon > 0$ сходится, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n})^{2-\varepsilon}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-\frac{\varepsilon}{2}}}$$

(также при $\varepsilon > 0$), члены которого больше соответствующих им членов гармонического ряда, расходится. Последовательность с общим членом

$$\frac{1}{n^{\alpha}}, \ \alpha > 0,$$

имеем показатель сходимости $\mu = \frac{1}{\alpha}$ и т. д.

Для последовательности, общий член которой

$$\frac{1}{n \ln^{\nu} n},$$

показатель сходимости будет, очевидно, $\mu = 1$.

Докажем, что показатель сходимости μ равен ν_1 — верхней плотности последовательности. Положим $|x_n| = r_n$, $n = 0, 1, \ldots$ Тогда по определению функции $n(r)$ мы будем иметь неравенства

$$\frac{\ln n(r_n)}{\ln r_n} \geqslant \frac{\ln n}{\ln r_n}, \ n = m, \ m+1, \ldots,$$

где r_m — первое отличное от нуля число в ряду $r_0, r_1, \ldots$ Эти неравенства будут равенствами для бесчисленного множества n, именно для тех n, для которых $r_n < r_{n+1}$. Обозначим такие n

буквами n_k, $k=0,1,\ldots$ Для этих n_k верно соотношение

$$\frac{\ln n(r_{n_k})}{\ln r_{n_k}}=\frac{\ln n_k}{\ln r_{n_k}}. \tag{51}$$

Для остальных n выполняются неравенства

$$\frac{\ln n_k}{\ln r_{n_k}}>\frac{\ln n}{\ln r_n}=\frac{\ln n}{\ln r_{n_k}},$$
$$n_k>n\geqslant n_{k-1}+1$$

Из этих неравенств непосредственно следует, что верхние пределы левой и правой частей равенства (51) достигаются по каким-то подпоследовательностям последовательности n_k, по которой сохраняется равенство (51). Из этого соображения уже непосредственно следует, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln n}{\ln r_n}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln n(r_n)}{\ln r_n}=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln n(r)}{\ln r}=\nu_1. \tag{52}$$

Далее, по определению верхнего предела мы можем отсюда утверждать, что $\ln n<(\nu_1+\varepsilon)\ln r_n$ или что

$$n^{-\frac{1}{\nu_1+\varepsilon}}>\frac{1}{r_n} \tag{53}$$

при любом $\varepsilon>0$ и $n>n_0(\varepsilon)$.

Из этого неравенства уже следует, что

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{r_n^{\nu_1+2\varepsilon}}<\sum_{n=n_0}^{\infty}n^{-\frac{\nu_1+2\varepsilon}{\nu_1+\varepsilon}}<\infty,$$

другими словами, что $\nu_1-\mu+2\varepsilon>0$ и, так как $\varepsilon>0$ произвольно, что $\nu_1\geqslant\mu$.

Обратное неравенство также легко устанавливается. Из того, что μ — показатель сходимости, следует при $\varepsilon>0$, что

$$A=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{r_n^{\mu+\varepsilon}}>\sum_{n=m}^{n_k}\frac{1}{r_n^{\mu+\varepsilon}}>\frac{n_k-m}{r_{n_k}^{\mu+\varepsilon}},$$

или, логарифмируя обе части неравенства, получаем, что

$$\mu+\varepsilon>\frac{\ln(n_k-m)-\ln A}{\ln r_{n_k}}.$$

Беря верхний предел в правой части этого неравенства при $k=\infty$,

мы получаем неравенство $\mu+\varepsilon \geqslant \nu_1$ вследствие (52). Но так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то отсюда уже следует, что $\mu \geqslant \nu_1$. Итак, мы доказали, что $\mu = \nu_1$.

§ 2. Ряд Ньютона с узлами интерполяции 1, 2, 3, . . .

1. **Абсцисса сходимости**. Аналогично тому как для степенного ряда в комплексной плоскости границей области сходимости служит окружность, радиус которой называется радиусом сходимости степенного ряда, для ряда Ньютона

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-1)\ldots(x-n)}{n!} \tag{54}$$

подобную роль играет прямая, параллельная мнимой оси, $\operatorname{Re} x = \lambda$, причем это число λ называется *абсциссой сходимости* ряда Ньютона.

Прежде чем исследовать сходимость ряда Ньютона, мы докажем сейчас одну вспомогательную теорему, имеющую большое значение при исследовании сходимости рядов.

Теорема I. *Пусть произвольные числа* $b_0, \ldots, b_k, \ldots, c_0, \ldots$ $\ldots, c_k, \ldots$ *удовлетворяют следующим двум условиям*:

$$\text{а) } \textit{ряд } \sum_{k=0}^{\infty} b_k \textit{ сходится}, \tag{55}$$

$$\text{б) } \textit{ряд } \sum_{k=0}^{\infty} |c_k - c_{k+1}| \textit{ сходится}. \tag{56}$$

Тогда сходится и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} b_k c_k$.

Доказательство. Обозначим $\sum_{k=0}^{n} b_k$ через S_n и $\sum_{k=0}^{n} b_k c_k$ через u_n. С помощью преобразования Абеля мы можем преобразовать величину u_n к следующему виду:

$$u_n = S_0 c_0 + \sum_{k=1}^{n} (S_k - S_{k-1}) c_k = S_n c_n + \sum_{k=0}^{n-1} S_k (c_k - c_{k+1}).$$

Так как ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_k (c_k - c_{k+1})$$

сходится и притом абсолютно на основании условий а) и б) нашей теоремы, а S_n и c_n на основании тех же условий имеют

конечные и определенные пределы, то очевидно, что u_n имеет предел при n, стремящемся к бесконечности. Этим и доказывается наша теорема I.

Перейдем к исследованию ряда Ньютона

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-1)\ldots(x-n)}{n!}. \tag{57}$$

Допустим, что этот ряд сходится при $x = x_0$, $x_0 \neq 0, 1, 2, \ldots$ Докажем, что он будет сходиться и при всяком x, таком, что $\operatorname{Re} x > \operatorname{Re} x_0$. Для доказательства этого, заметив, что ряд (57) можно переписать в форме

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x_0-1)\ldots(x_0-n)}{n!} \frac{(x-1)\ldots(x-n)}{(x_0-1)\ldots(x_0-n)},$$

мы положим

$$b_n = a_n \frac{(x_0-1)\ldots(x_0-n)}{n!}, \qquad \frac{(x-1)\ldots(x-n)}{(x_0-1)\ldots(x_0-n)}. \tag{58}$$

Предположив, что $\operatorname{Re} x > \operatorname{Re} x_0$, мы покажем сейчас, что числа b_n и c_n удовлетворяют условиям теоремы (1). Действительно,

$$\begin{aligned} |c_n - c_{n+1}| &= \left|\frac{(x-1)\ldots(x-n)}{(x_0-1)\ldots(x_0-n)}\right| \left|1 - \frac{x-n-1}{x_0-n-1}\right| = \\ &= \left|\frac{(x-1)\ldots(x-n)}{(x_0-1)\ldots(x_0-n)}\right| \left|\frac{x-x_0}{n+1-x_0}\right|. \end{aligned} \tag{59}$$

Далее, совершив простые преобразования, мы получим

$$|c_n - c_{n+1}| = \frac{1}{n} e^{-\operatorname{Re}(x-x_0)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}} \left|\prod_{k=1}^{n} \frac{\left(1-\frac{x}{k}\right)e^{\frac{x}{k}}}{\left(1-\frac{x_0}{k}\right)e^{\frac{x_0}{k}}}\right| \left|\frac{n(x-x_0)}{n+1-x_0}\right|. \tag{60}$$

Так как произведение, как мы уже знаем [см. формулу (15)],

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{\left(1-\frac{x}{k}\right)e^{\frac{x}{k}}}{\left(1-\frac{x_0}{k}\right)e^{\frac{x_0}{k}}}$$

при $n \to \infty$ и $x_0 \neq 1, 2, \ldots$ будет сходиться к конечному значению, а число $\left|\frac{n(x-x_0)}{n+1-x_0}\right|$ будет оставаться ограниченным при стремлении n к бесконечности, то мы, очевидно, можем написать

неравенство

$$|c_n - c_{n+1}| < \frac{A_1}{n} e^{-\operatorname{Re}(x-x_0)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}, \tag{61}$$

где A_1 не зависит от n и положительно.

Воспользовавшись тем, что

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} > \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln n, \tag{62}$$

и вспомнив, что $\operatorname{Re}(x-x_0) > 0$, мы можем с помощью неравенства (62) еще упростить неравенство (61):

$$|c_n - c_{n+1}| < \frac{A_1}{n} e^{-\operatorname{Re}(x-x_0)\ln n} = \frac{A_1}{n^{1+\operatorname{Re}(x-x_0)}}, \tag{63}$$

откуда следует, что при нашем предположении $\operatorname{Re}(x-x_0) > 0$ для чисел b_n и c_n действительно выполнены условия теоремы I.

Значит, действительно, ряд (57), сходящийся при $x = x_0$, сходится и при всяком другом x, для которого $\operatorname{Re} x > \operatorname{Re} x_0$.

Итак, всегда существует такое конечное или бесконечное число λ, что при $\operatorname{Re} x > \lambda$ ряд сходится, а при $\operatorname{Re} x < \lambda$ ряд расходится.

Из неравенства (63) также вытекает следующая основная

Теорема II. *Если ряд Ньютона* (57) *имеет конечную абсциссу сходимости* λ, *то он равномерно сходится в области* $\overline{D}(\varepsilon, R)$, *определяемой неравенствами*

$$\operatorname{Re} x \geqslant \lambda + \varepsilon, \quad |x - \lambda| \leqslant R,$$

при любом сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ *и любом сколь угодно большом* $R > 0$ *и тем самым его сумма будет регулярной аналитической функцией комплексного переменного* x *в любой конечной части полуплоскости* $\operatorname{Re} x > \lambda$.

Доказательство. Пусть $x_0 = \lambda + \delta$, где $0 < \delta < \varepsilon$ и δ выбрано так, чтобы число x_0 не было целым. Пусть теперь величины b_k и $c_k(x)$ определяются соотношениями (58). Тогда ряд $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ будет сходящимся, так как λ — абсцисса сходимости, а $x_0 = \lambda + \delta$ лежит правее этой абсциссы сходимости. Заметим также, что число A_1 в неравенстве (63)

$$|c_n(x) - c_{n+1}(x)| < \frac{A_1}{n^{1+\operatorname{Re}(x-x_0)}} < \frac{A_1}{n^{1+\varepsilon-\delta}}$$

зависит, как это непосредственно следует из соотношений (59) и (60), только от x_0 и R, если комплексное переменное x не выходит за пределы области $\overline{D}(\varepsilon, R)$. Положив опять $S_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ и заметив, что

$$|c_n(x)| = \left|\frac{(x-1)\ldots(x-n)}{(x_0-1)\ldots(x_0-n)}\right| =$$

$$= e^{-\operatorname{Re}(x-x_0)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}} \left|\prod_{k=1}^{n} \frac{\left(1-\frac{x}{k}\right)e^{\frac{x}{k}}}{\left(1-\frac{x_0}{k}\right)e^{\frac{x_0}{k}}}\right| < \frac{B}{n^{\varepsilon-\delta}},$$

где B зависит только от ε и R, если x не выходит за пределы области $\overline{D}(\varepsilon, R)$, так как произведения в правой части сходящиеся.

Рассмотрим теперь сумму

$$\sum_{k=n}^{N} a_k \frac{(x-1)\ldots(x-k)}{k!} = \sum_{k=n}^{N} b_k c_k(x) = \sum_{k=n}^{N} (S_k - S_{k-1}) c_k(x) =$$

$$= \sum_{k=n}^{N-1} S_k [c_k(x) - c_{k+1}(x)] + S_N c_N(x) - S_{n-1} c_n(x).$$

Отсюда следует в силу неравенства (63) и ограниченности чисел S_k, $|S_k| < S$, $k = 0, 1, \ldots,$ неравенство

$$\left|\sum_{k=n}^{N} a_n \frac{(x-1)\ldots(x-k)}{k!}\right| < S\left[A_1 \sum_{k=n}^{N-1} \frac{1}{k^{1+\varepsilon-\delta}} + \frac{2B}{n^{\varepsilon-\delta}}\right] <$$

$$< S\left[A_1 \int_{n-1}^{\infty} \frac{dt}{t^{1+\varepsilon-\delta}} + \frac{2B}{n^{\varepsilon-\delta}}\right] = S\left[\frac{A_1}{\varepsilon-\delta} + 2B\right]\frac{1}{(n-1)^{\varepsilon-\delta}} < \frac{C}{n^{\varepsilon-\delta}},$$

где C зависит только от ε и R, если x принадлежит области $\overline{D}(\varepsilon, R)$. Но это неравенство, как хорошо известно из анализа, и доказывает равномерную сходимость ряда (57) в области $\overline{D}(\varepsilon, R)$. Ряд (57) есть ряд многочленов и тем самым регулярных в любой конечной области функций. Ряд же регулярных аналитических функций, равномерно сходящихся в конечной области, имеет своей суммой аналитическую же функцию. Этим наша теорема II полностью доказана.

Ряд Ньютона, сходящийся при некотором значении x, может сходиться, естественно, и не абсолютно. Более того, если ряд

Ньютона сходится при $x = x_0$, то из этого еще не следует, что он будет абсолютно сходиться при $\operatorname{Re} x > \operatorname{Re} x_0$. Как мы увидим из дальнейшего, для ряда Ньютона существует кроме абсциссы сходимости и абсцисса абсолютной сходимости, которая, очевидно, не может быть меньше абсциссы сходимости.

Для того чтобы это показать, мы покажем, что существует связь между сходимостью ряда Ньютона (57) и сходимостью ряда Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n^x}. \tag{64}$$

Рассмотрим опять ряд (57), записав его в форме

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n e^{-x \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x}{k}\right) e^{\frac{x}{k}}.$$

Положим

$$b_n = (-1)^n a_n e^{-x \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}, \quad d_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x}{k}\right) e^{\frac{x}{k}}, \quad d_0 = 1.$$

Тогда с помощью простых преобразований мы получим неравенство

$$|d_n - d_{n+1}| = d_n \left| 1 - \left(1 - \frac{x}{n+1}\right) e^{\frac{x}{n+1}} \right| < \frac{A_2}{n^2},$$

где A_2 будет постоянной, не зависящей от n, потому что произведение

$$d_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x}{k}\right) e^{\frac{x}{k}}$$

будет, очевидно, сходящимся.

Если мы теперь допустим, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n e^{-x \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \tag{65}$$

при данном значении x будет сходиться, то числа b_n и d_n будут подчинены условиям теоремы I и, значит, при этом значении x окажется сходящимся и ряд (57).

Итак, из сходимости ряда (65) следует сходимость ряда (57).

Обратно, предположив сходимость ряда (57) при данном x, мы тем же самым приемом можем доказать сходимость ряда (65), так как числа d'_n при $x = 1, 2, \ldots$

$$d'_n = \frac{1}{d_n}$$

удовлетворяют неравенствам

$$|d'_n - d'_{n+1}| < \frac{A_3}{n^2}.$$

Итак, ряды (65) и (57) сходятся и расходятся при одних и тех же значениях x за исключением $x = 1, 2, \ldots$

Будем теперь дальше преобразовывать ряд (65). Запишем его в форме

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n e^{-x \ln n} e^{x\left(\ln n - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)} \tag{66}$$

и положим

$$b_n = (-1)^n a_n e^{-x \ln n}, \qquad c_n = e^{x\left[\ln n - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right]}.$$

Допустим теперь, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n e^{-x \ln n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n^{nx}} \tag{67}$$

при данном значении x сходится. Покажем теперь, что числа c_n удовлетворяют условию б) теоремы I. Действительно,

$$|c_n - c_{n+1}| = \left| e^{x\left[\ln n - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\right]} \right| \left| 1 - e^{x\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}\right]} \right| <$$

$$< e^{x\left[\ln n - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right]} \frac{A_4}{n^2}.$$

Отсюда непосредственно следует неравенство

$$|c_n - c_{n+1}| < \frac{A_5}{n^2},$$

где A_5 — константа, не зависящая от n, так как выражение

$$\ln n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = -C + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

при растущем n ограничено по абсолютной величине.

Таким образом, при сделанном предположении о сходимости ряда (67) оказались выполненными условия а) и б) теоремы I, и

значит, при том же значении x ряд (65) будет также сходящимся.

Обратно, записав ряд (67) в форме

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n e^{-x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}} e^{x\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right]}$$

и положив

$$b_n=(-1)^n a_n e^{-x\sum_{1}^{n}\frac{1}{k}}, \qquad c_n=e^{x\left(\sum_{1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)},$$

мы можем заключить, что эти числа c_n удовлетворяют неравенствам

$$|c_n-c_{n+1}|<\frac{A_6}{n^2}.$$

Допустив теперь, что сходится ряд (65), мы получим опять, что числа b_n и c_n подчиняются условиям теоремы I, иначе говоря, что сходится ряд (67).

Мы установили, что ряды (65) и (67) сходятся и расходятся при одних и тех же значениях x.

Из этого следует, что ряд Ньютона (57) сходится или расходится одновременно с рядом Дирихле (67).

Переходя к вопросу об абсолютной сходимости ряда Ньютона, можно заметить, что ряд Ньютона (57) абсолютно сходится также одновременно с рядом Дирихле (67). Действительно, из представления (57) непосредственно следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n!}|(x-1)\ldots(x-n)|=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|e^{-\operatorname{Re}x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}\left|\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x}{k}\right)e^{\frac{x}{k}}\right|$$

или, так как произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{k}\right)e^{\frac{x}{k}}$$

при $x\neq 1, 2, \ldots$ сходится к конечному и отличному от нуля числу, что ряд Ньютона (57) абсолютно сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|e^{-\operatorname{Re}x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}},$$

Но этот ряд в свою очередь сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\operatorname{Re} x}} = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\operatorname{Re} x \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} e^{-\operatorname{Re} x \left[\ln n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right]}, \tag{68}$$

так как величина

$$e^{-\operatorname{Re} x \left[\ln n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right]}$$

стремится к конечному отличному от нуля пределу при n, стремящемся к бесконечности. Но ряд (68) есть не что иное как ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда Дирихле (67). Мы уже видели, что для ряда (67) существует число λ такое, что ряд (67) сходится или расходится в зависимости от того, будет ли $\operatorname{Re} x > \lambda$ или $\operatorname{Re} x < \lambda$. Поэтому для ряда (68) существует такое μ, что при $\operatorname{Re} x > \mu$ этот ряд сходится, а при $\operatorname{Re} x < \mu$ ряд расходится. Это число μ мы и будем называть *абсциссой абсолютной сходимости* ряда (67).

По доказанному это же число μ будет обладать тем свойством, что при $\operatorname{Re} x > \mu$ будет абсолютно сходиться ряд (57), а при $\operatorname{Re} x < \mu$ он не будет абсолютно сходиться.

Итак, мы можем считать доказанной теорему:

Теорема III. *Ряд Ньютона*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} (x-1) \ldots (x-n) \tag{54}$$

и ряд Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n^x} \tag{64}$$

имеют одни и те же абсциссы сходимости и абсолютной сходимости.

Допустим теперь, что ряд (64) сходится при $\operatorname{Re} x > \lambda$ и расходится при $\operatorname{Re} x < \lambda$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{n^{\lambda+\varepsilon}} = 0$, $\varepsilon > 0$, иначе говоря, что абсолютная величина a_n удовлетворяет неравенству $|a_n| < A_7 n^{\lambda+\varepsilon}$, A_7 не зависит от n. Но если это неравенство выполнено, то при $\operatorname{Re} x > \lambda + 1 + 2\varepsilon$ ряд Дирихле (64) будет сходиться абсолютно, так как его члены по абсолютной величине будут меньше членов сходящегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_7}{n^{1+\varepsilon}},$$

Иначе говоря, должно быть выполнено неравенство $\mu < \lambda + 1 + 2\varepsilon$, где μ — абсцисса абсолютной сходимости ряда Дирихле (67). Так как это неравенство будет верно при любом сколь угодно малом ε, то мы окончательно получим неравенство, связывающее абсциссы сходимости и абсолютной сходимости ряда Дирихле (67), а значит, по теореме III и ряда Ньютона

$$\lambda \leqslant \mu \leqslant \lambda + 1.$$

Пользуясь теоремой III, мы можем свести задачу определения абсцисс сходимости и абсолютной сходимости ряда Ньютона к аналогичной задаче для ряда Дирихле, задаче, решающейся для ряда Дирихле значительно более просто, чем для ряда Ньютона.

Теорема IV. *Абсцисса сходимости ряда Ньютона*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}(x-1)\ldots(x-n)$$

определяется равенством

$$\lambda = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\left|\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k a_k\right|}{\ln n}, \tag{69}$$

если $\lambda \geqslant 0$, *и равенством*

$$\lambda = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\left|\sum\limits_{k=n}^{\infty}(-1)^k a_k\right|}{\ln n}, \tag{70}$$

если $\lambda < 0$[1]).

Для того чтобы узнать, какую из этих формул нужно применить при нахождении абсциссы сходимости ряда Ньютона, достаточно проверить, будет ли сходиться ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$$

или нет. Если он будет сходиться, то для определения абсциссы сходимости нужно взять формулу (70), а если он будет расходиться, то абсцисса сходимости будет даваться формулой (69).

Докажем, что формулами (69) и (70) определяется абсцисса сходимости ряда Дирихле (67). Этим мы и докажем нашу теорему IV, так как по теореме III абсциссы сходимости рядов Дирихле и Ньютона совпадают.

---

[1]) Если предел (70) равен нулю, то и предел (69) равен нулю.

Рассмотрим сначала случай $\lambda \geqslant 0$. Если λ есть абсцисса сходимости ряда (67), то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n^{\lambda+\varepsilon}} \tag{71}$$

будет сходиться при всяком $\varepsilon > 0$. Обозначим теперь через S_n и B_n величины

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k, \qquad B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k a_k}{k^{\lambda+\varepsilon}}, \quad B_0 = 0.$$

Тогда мы будем иметь с помощью преобразования Абеля следующее выражение для S_n:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k a_n}{k^{\lambda+\varepsilon}} k^{\lambda+\varepsilon} = \sum_{k=1}^{n} (B_k - B_{k-1}) k^{\lambda+\varepsilon} =$$

$$= B_n (n+1)^{\lambda+\varepsilon} + \sum_{k=1}^{n} B_k [k^{\lambda+\varepsilon} - (k+1)^{\lambda+\varepsilon}],$$

откуда мы получим неравенство

$$|S_n| < B \left\{ (n+1)^{\lambda+\varepsilon} + \sum_{k=1}^{n} [(k+1)^{\lambda+\varepsilon} - k^{\lambda+\varepsilon}] \right\} < 3Bn^{\lambda+\varepsilon},$$

так как ряд (71) сходится и, значит, $|B_n| < B$, где B — положительная константа, не зависящая от n. Это неравенство может быть теперь сразу переписано в форме предельного соотношения

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln |S_n|}{\ln n} \leqslant \lambda + \varepsilon.$$

Так как это неравенство справедливо при всяком $\varepsilon > 0$, то оно справедливо и при $\varepsilon = 0$. Мы показали, что абсцисса сходимости λ не может быть меньше величины, даваемой формулой (69). Обратно, если величина λ определяется равенством

$$\lambda = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln |S_n|}{\ln n}, \tag{72}$$

где $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k a_k}{k^{\lambda+\varepsilon}} \tag{73}$$

будет сходящимся при всяком $\varepsilon > 0$.

Действительно,

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{(-1)^k a_k}{k^{\lambda+\varepsilon}} = \sum_{k=}^{m} \frac{S_k - S_{k-1}}{k^{\lambda+\varepsilon}} =$$

$$= \sum_{k=n}^{m-1} S_k \left(\frac{1}{k^{\lambda+\varepsilon}} - \frac{1}{(k+1)^{\lambda+\varepsilon}} \right) - \frac{S_{n-1}}{n^{\lambda+\varepsilon}} + \frac{S_m}{m^{\lambda+\varepsilon}}.$$

Отсюда, так как на основании условий (72) $|S_n| < A_8 n^{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}$ для всякого $\varepsilon > 0$ и, кроме того, $\frac{1}{n^{\lambda+\varepsilon}} - \frac{1}{(n+1)^{\lambda+\varepsilon}} < A_9 n^{-\lambda-1-\varepsilon}$, где константы A_8 и A_9 не зависят от n, мы получим неравенство

$$\left| \sum_{k=n}^{m} \frac{(-1)^k a_k}{k^{\lambda+\varepsilon}} \right| < A_8 A_9 \sum_{k=n}^{m} \frac{k^{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}}{k^{\lambda+1+\varepsilon}} + A_8 \left[\frac{n^{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}}{n^{\lambda+\varepsilon}} + \frac{m^{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}}{m^{\lambda+\varepsilon}} \right],$$

которое легко упрощается и с помощью замены суммы интегралом преобразуется в неравенство

$$\left| \sum_{k=n}^{m} \frac{(-1)^k a_k}{k^{\lambda+\varepsilon}} \right| < \frac{A_{10}}{n^{\frac{\varepsilon}{2}}}.$$

где A_{10} не зависит от n и m.

Это последнее неравенство позволяет утверждать, что ряд (73) сходится.

Таким образом, мы доказали нашу теорему IV для случая $\lambda \geqslant 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\lambda < 0$. Положим $S_n = \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k a_k$, что возможно, так как в этом случае ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ сходится, и $B_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k a_k}{k^{\lambda+\varepsilon}}$, где $\varepsilon > 0$ столь мало, что $\lambda + \varepsilon$ продолжает быть меньше нуля. Тогда мы будем иметь совершенно аналогично предыдущим рассуждениям, что

$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{k=n}^{m} (B_k - B_{k+1}) k^{\lambda+\varepsilon} \right| <$$

$$< |B_n n^{\lambda+\varepsilon}| + |B_m m^{\lambda+\varepsilon}| + \sum_{k=n}^{m-1} |B_{k+1}| (k^{\lambda+\varepsilon} - (k+1)^{\lambda+\varepsilon}), \qquad (74)$$

откуда, допустив, что ряд (67) имеет абсциссой сходимости число $\lambda < 0$ и, значит, $|B_n| < B$, где $B > 0$ не зависит от n, мы получим, перейдя к пределу при m, стремящемся к бесконечности, что

$$|S_n| < 3Bn^{\lambda+\varepsilon} \tag{75}$$

или что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|S_n|}{\ln n} \leqslant \lambda + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad \lambda + \varepsilon < 0.$$

Обратно, допустив, что

$$\lambda = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|S_n|}{\ln n} < 0,$$

где $S_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} (-1)^k a_k$, мы сразу получим, что $|S_n|$ удовлетворяет неравенству

$$|S_n| < A_{11} n^{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}, \quad \lambda + \varepsilon < 0$$

для всякого $\varepsilon > 0$.

Далее, имеем, что

$$\left|\sum_{k=n}^{m} \frac{(-1)^k a_k}{k^{\lambda+\varepsilon}}\right| = \left|\sum_{k=n}^{m} \frac{S_k - S_{k+1}}{k^{\lambda+\varepsilon}}\right| <$$

$$< \frac{|S_n|}{n^{\lambda+\varepsilon}} + \frac{|S_{m+1}|}{m^{\lambda+\varepsilon}} + \sum_{k=n}^{m-1} |S_{k+1}| \left[\frac{1}{(k+1)^{\lambda+\varepsilon}} - \frac{1}{k^{\lambda+\varepsilon}}\right],$$

или, упрощая это неравенство,

$$\left|\sum_{k=n}^{m} \frac{(-1)^k a_k}{k^{\lambda+\varepsilon}}\right| < A_{12} \sum_{k=n}^{m-1} \frac{k^{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}}{k^{1+\lambda+\varepsilon}} + 2A_{11} n^{-\frac{\varepsilon}{2}},$$

откуда окончательно с помощью легких оценок, аналогичных тем, которые служили нам для перехода от неравенства (74) к неравенству (75), мы получим неравенство

$$\left|\sum_{k=n}^{m} \frac{(-1)^k a_k}{k^{\lambda+\varepsilon}}\right| < A_{13} n^{-\frac{\varepsilon}{2}},$$

где A_{13} не зависит от n, что и доказывает сходимость ряда (67) при $\operatorname{Re} x > \lambda + \varepsilon$ и любом $\varepsilon > 0$.

Мы доказали таким образом, что когда $\lambda < 0$, то формула (70) дает величину, которая не может быть ни больше, ни меньше

абсциссы сходимости, т. е. мы показали, что формула (70) действительно дает эту абсциссу сходимости при $\lambda < 0$.

Итак, теорема IV доказана полностью.

Теперь мы докажем теорему V, дающую величину абсциссы абсолютной сходимости ряда Ньютона.

Теорема V. *Абсцисса абсолютной сходимости ряда Ньютона* (57) μ *дается формулой*

$$\mu = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|}{\ln n}, \tag{76}$$

если $\mu \geqslant 0$, *и формулой*

$$\mu = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \sum\limits_{k=n}^{\infty} |a_k|}{\ln n}, \tag{77}$$

если $\mu < 0$.

Доказательство. По теореме III абсцисса абсолютной сходимости ряда Дирихле (67), очевидно, совпадает с абсциссой сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^x}. \tag{78}$$

Но по теореме IV величина абсциссы сходимости ряда (78) как раз и записывается выражениями (76) и (77), так как она совпадает с абсциссой сходимости ряда Ньютона

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k |a_k|}{k!} (x-1)\ldots(x-k).$$

Рассмотрим пример, показывающий, что абсцисса абсолютной сходимости действительно может отличаться от абсциссы сходимости на любое число, меньшее единицы. Пусть σ будет любое число, находящееся в интервале $0 < \sigma < 1$. Составим последовательность действительных чисел $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$, которые мы определим последовательно из соотношений

$$\varphi_1 = 0, \ |1 - 2^\sigma e^{i\varphi_2}| = 1, \ldots, \ |n^\sigma e^{i\varphi_n} - (n+1)^\sigma e^{i\varphi_{n+1}}| = 1, \ldots$$

Из этих соотношений определяется не одна последовательность чисел φ_n, а бесчисленное множество таких последовательностей. Мы возьмем какую-нибудь из них. Положим теперь $a_n = (-1)^n \times \times [n^\sigma e^{i\varphi_n} - (n+1)^\rho e^{i\varphi_{n+1}}]$ и составим ряд Ньютона

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} (x-1)\ldots(x-n).$$

Этот ряд будет иметь абсциссой сходимости число σ, так как по теореме IV

$$\lambda = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\left|\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_k\right|}{\ln n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|n^\sigma e^{i\varphi} n|}{\ln n} = \sigma,$$

и абсциссой абсолютной сходимости число $\mu = 1$, так как по теореме V

$$\mu = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln n} = 1.$$

То, что $\mu - \lambda \leqslant 1$, — тривиальное следствие преобразования Абеля.

2. Свойства функций, представляемых рядом Ньютона. Мы уже знаем, что функция $f(z)$, представленная рядом Ньютона

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}(z-1)\ldots(z-n),$$

с абсциссой сходимости λ будет правильной в правой полуплоскости $\lambda < \operatorname{Re} z$.

Докажем теорему, дающую рост этой функции в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \lambda$.

Теорема VI. *Пусть α — действительное число, $\alpha > \lambda$. Тогда функция*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}(z-1)\ldots(z-n), \tag{79}$$

регулярная в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \lambda$, где λ есть абсцисса сходимости ряда Ньютона, представляющего в этой полуплоскости функцию $f(z)$, будет удовлетворять неравенству

$$|f(re^{i\varphi})| < Ce^{rh(\varphi)} r^{\lambda+\frac{1}{2}+\varepsilon}, \quad r\cos\varphi \geqslant \alpha, \tag{80}$$

где $\varepsilon > 0$, $C = C(\alpha - \lambda, \varepsilon)$, а $h(\varphi) = \cos\varphi \ln(2\cos\varphi) + \varphi\sin\varphi$.

Доказательство. Приведем с помощью преобразования Абеля ряд (79) к виду

$$f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n S_n \frac{z(z-1)\ldots(z-n+1)}{n!}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_k,$$

если ряд $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ расходится, и к виду

$$f(z)=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n S_n\frac{z(z-1)\ldots(z-n+1)}{n!},\qquad S_n=\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k a_k,$$

если ряд $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ сходится.

В обоих случаях мы будем иметь по теореме IV

$$\lambda=\overline{\lim_{n=\infty}}\frac{\ln|S_n|}{\ln n},$$

что даст нам неравенство

$$|S_n|<An^{\lambda+\varepsilon(n)},\qquad \varepsilon(n)>0,\qquad \lim_{n\to\infty}\varepsilon(n)=0.$$

Благодаря этому неравенству мы можем оценить члены ряда (79) и написать неравенство

$$|f(z)|\leqslant A_1+A_2\sum_{n=1}^{\infty}n^{\lambda+\varepsilon}\left|\frac{z(z-1)\ldots(z-n+1)}{n!}\right|,\quad \varepsilon<\frac{1}{4}. \tag{81}$$

Из этого неравенства следует далее, что $|f(z)|$ удовлетворяет неравенству

$$|f(z)|<A_1+A_2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\max_{1\leqslant n<\infty}n^{\lambda+2\varepsilon}\frac{|z(z-1)\ldots(z-n+1)|}{(n-1)!}$$

или в окончательной форме неравенству

$$|f(z)|<A_0\max_{1\leqslant n<\infty}n^{\lambda+2\varepsilon}\frac{|z(z-1)\ldots(z-n+1)|}{(n-1)!}, \tag{82}$$

где A_0 от z и n не зависит и ε — сколь угодно малое положительное число.

Найдем теперь максимум, стоящий в правой части неравенства (82).

Так как простой заменой можно перейти от абсциссы сходимости λ к абсциссе сходимости 0, именно положив $z=z'+\lambda$ и записав соотношение

$$n^{\lambda+2\varepsilon}\frac{|(z'+\lambda)\ldots(z'+\lambda+1-n)|}{(n-1)!}=$$

$$=n^{\lambda+2\varepsilon}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}|z'-k|}{(n-1)!}\prod_{k=0}^{n-1}\left|1+\frac{\lambda}{z'-k}\right|=$$

$$= \frac{n^{\lambda+2\varepsilon}}{(n-1)!} e^{-\operatorname{Re}\left(\lambda \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k-z'}\right)} \prod_{k=0}^{n-1} |z'-k| \left| \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{\lambda}{z'-k}\right) e^{\frac{\lambda}{k-z'}} \right| <$$

$$< C \frac{n^{2\varepsilon}}{(n-1)!} \prod_{k=0}^{n-1} |z'-k| \, |z'|^{\lambda}, \quad |z'-k| \geqslant \delta, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

так как $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \ln n + O(1)$ [см. § 1, (3)],

$$n^{\lambda} \left| e^{\lambda \sum\limits_{1}^{n-1} \frac{1}{z'-k}} \right| = n^{\lambda} \left| e^{\lambda \sum\limits_{1}^{n-1} \ln \frac{z'-k+1}{z'-n} + O\left(\frac{1}{|z'-k|^2}\right)} \right| <$$

$$< n^{\lambda} \left| e^{\lambda \ln z' - \lambda \ln (z'-n) + O(1)} \right| = |z'|^{\lambda} \left| e^{\lambda \ln \frac{n}{z'-n} + O(1)} \right| < C |z|^{\lambda},$$

$\operatorname{Re} \ln \frac{n}{z'-n} < \sigma < \infty$, а произведение, как нетрудно видеть, будет сходящимся и ограниченным при больших z', то мы будем для простоты вычислений в дальнейшем рассматривать случай $\lambda = 0$ и при этом предположении искать максимум (82). Положим $z = re^{i\varphi}$, $r \cos \varphi \geqslant \alpha > 0$, где $\alpha > 2\varepsilon$ и произвольно, а $r > r_0(\alpha, \varepsilon)$. Введем также обозначение

$$d_n(z) = \frac{n^{2\varepsilon}}{(n-1)!} \prod_{k=0}^{n-1} (z-k) = \frac{n^{2\varepsilon}}{(n-1)!} \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z-n+1)}. \tag{83}$$

Рассмотрим величину $\left| \frac{d_{n+1}(z)}{d_n(z)} \right|$, характеризующую изменение $d_n(z)|$ при переходе от n к $n+1$:

$$\left| \frac{d_{n+1}(z)}{d_n(z)} \right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2\varepsilon} \left| 1 - \frac{z}{n} \right|. \tag{84}$$

В зависимости от того, будет ли эта величина больше или меньше единицы, будут соответственно справедливы неравенства $|d_{n+1}(z)| > |d_n(z)|$ или $|d_{n+1}(z)| < |d_n(z)|$. Для определения n_0, дающего максимум $|d_n(z)|$, рассмотрим уравнение

$$\left| \frac{d_{n+1}(z)}{d_n(z)} \right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2\varepsilon} \left| 1 - \frac{z}{n} \right| = 1. \tag{85}$$

Это уравнение есть уравнение окружности с центром в точке n и радиуса $n\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2\varepsilon}$. Рассмотрим точки пересечения такой

окружности C_n с прямой $z = \alpha \pm si$, $s > 0$ — действительное число. Из уравнения окружности C_n мы найдем, что

$$\left|1 - \frac{\alpha \pm si}{n}\right|^2 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-4\varepsilon},$$

откуда, делая простые вычисления, мы получаем соотношения

$$\frac{s_n^2}{n^2} = \frac{2\alpha - 4\varepsilon}{n} + \frac{2\varepsilon(1 + 4\varepsilon) - \alpha^2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

или, далее, так как $\alpha > 2\varepsilon$,

$$s_n = \sqrt{2\alpha - 4\varepsilon}\sqrt{n} + \frac{2\varepsilon(1 + 4\varepsilon) - \alpha^2}{2\sqrt{2\alpha - 4\varepsilon}}\frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Отсюда следует, что

$$s_{n+1} - s_n = \frac{\sqrt{\alpha - 2\varepsilon}}{\sqrt{2n}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) > 0$$

при $n > n'(\alpha, \varepsilon)$. Итак, мы можем утверждать, что наши окружности C_n, $n > n'(\alpha, \varepsilon)$, не пересекаются в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant \alpha > 2\varepsilon$ и разбивают полуплоскость на ряд областей D_n, границами которых будут окружности C_n и прямая $\operatorname{Re} z = \alpha$. Если z находится в области D_n, то по свойству уравнения окружности

$$\left|\frac{d_{k+1}(z)}{d_k(z)}\right| > 1, \quad n'(\alpha, \varepsilon) \leqslant k \leqslant n - 1, \quad \left|\frac{d_{n+1}(z)}{d_n(z)}\right| \geqslant 1,$$

$$\left|\frac{d_{k+1}(z)}{d_k(z)}\right| < 1, \qquad k > n + 1, \quad \left|\frac{d_{n+2}(z)}{d_{n+1}(z)}\right| \leqslant 1.$$

Эти неравенства показывают, что для каждого z в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant \alpha\,[|z| \geqslant r_0(\alpha, \varepsilon)]$ целое число n_0, дающее максимум $d_n(z)$, однозначно определяется. Далее, отсюда следует, что n_1, корень уравнения (85), отличается от n_0 меньше чем на единицу: $n_1 = n_0 + \delta$, $0 \leqslant \delta < 1$.

Найдем оценку для величины корня уравнения (85). Это уравнение можно переписать в форме

$$(n - z)^2 = n^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-4\varepsilon},$$

или подробнее

$$n^2 - 2rn\cos\varphi + r^2 = n^2 - 4\varepsilon n + 2\varepsilon(1 + 4\varepsilon) + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

откуда

$$n_1 = \frac{r^2}{2(r\cos\varphi - 2\varepsilon)} - \frac{\varepsilon(1 + 4\varepsilon)}{r\cos\varphi - 2\varepsilon} + O\left[\frac{1}{n_1(r\cos\varphi - 2\varepsilon)}\right]. \qquad (86)$$

Но $\operatorname{Re} z \geqslant \alpha > 2\varepsilon$, значит, $r\cos\varphi - 2\varepsilon \geqslant \alpha - 2\varepsilon > 0$. Отсюда прямо следует, что $n_1 = O(r^2)$ и

$$n_1 > \frac{r^2}{2(r\cos\varphi - 2\varepsilon)} > \frac{}{2}, \quad r > r'(\alpha, \varepsilon).$$

Далее, из этого выражения для n_1 следует, что

$$z - n_1 = re^{i\varphi} - \frac{r^2}{2(r\cos\varphi - 2\varepsilon)} + \frac{\varepsilon(1+4\varepsilon)}{r\cos\varphi - 2\varepsilon} + O\left[\frac{1}{n_1(r\cos\varphi - 2\varepsilon)}\right] =$$

$$= \frac{r^2 e^{2i\varphi}}{2(r\cos\varphi - 2\varepsilon)} - \frac{2\varepsilon r e^{i\varphi} - \varepsilon(1+4\varepsilon)}{r\cos\varphi - 2\varepsilon} + O\left[\frac{1}{n_1(r\cos\varphi - 2)\varepsilon}\right] =$$

$$= \frac{r^2 e^{2i\varphi}}{2(r\cos\varphi - 2\varepsilon)}\left[1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right].$$

Это соотношение позволяет получить важное следствие. Именно:

$$\ln(z - n_1) = \ln|z - n_1| + i\arg(z - n_1) =$$

$$= \ln\frac{r^2}{2(r\cos\varphi - 2\varepsilon)} + 2i\varphi + O\left(\frac{1}{r}\right),$$

откуда следует, что

$$\arg(z - n_1) = 2\varphi + O\left(\frac{1}{r}\right). \tag{87}$$

Из уравнения (85) непосредственно следует также, что

$$\ln\left|1 - \frac{z}{n_1}\right| = \ln\left(1 + \frac{1}{n_1}\right)^{-2\varepsilon} = O\left(\frac{1}{n_1}\right). \tag{88}$$

Из соотношения (86) мы, логарифмируя, получим, что

$$\ln n_1 = \ln\frac{r}{2\cos\varphi - \frac{4\varepsilon}{r}} + \ln\left[1 + O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right] =$$

$$= \ln r - \ln 2\cos\varphi - \ln\left(1 - \frac{2\varepsilon}{r\cos\varphi}\right) + O\left(\frac{1}{r^2}\right). \tag{89}$$

Так как $|d_n(z)| = |d_n(\bar{z})|$, то будем считать в дальнейших вычислениях, что $z = re^{i\varphi}$, $\varphi \geqslant 0$, и, кроме того, так как $\operatorname{Re} z \geqslant \alpha$, т. е. $r\cos\varphi \geqslant \alpha$, что $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \geqslant \frac{\alpha}{r}$, другими словами, $\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{\alpha}{r} \geqslant \varphi$. Для оценки величины $|d_{n_0}(z)|$ воспользуемся представлением (83) и оценками $\ln|\Gamma(\zeta)|$ [см. § 1 формула (18)].

Мы получим тогда

$$\ln|d_{n_0}(z)| = 2\varepsilon\ln n_0 - \ln\Gamma(n_0) + \ln|\Gamma(z+1)| - \ln|\Gamma(z-n_0+1)| =$$
$$= 2\varepsilon\ln n_0 - n_0\ln n_0 + n_0 + \frac{1}{2}\ln n_0 + \operatorname{Re}\Big[z\ln z - z +$$
$$+ \frac{1}{2}\ln z - (z-n_0)\ln(z-n_0) + z - n_0 - \frac{1}{2}\ln(z-n_0)\Big] + O(1) =$$
$$= 2\varepsilon\ln(n_1-\delta) - (n_1-\delta)\ln(n_1-\delta) + n_1 - \delta + \frac{1}{2}\ln(n_1-\delta) +$$
$$+ \operatorname{Re}\Big[z\ln z + \frac{1}{2}\ln z - (z-n_1+\delta)\ln(z-n_1+\delta) - n_1 + \delta -$$
$$- \frac{1}{2}\ln(z-n_1+\delta)\Big] + O(1) = \frac{1+4\varepsilon}{2}\ln n_1 - (n_1-\delta)\ln n_1 + n_1 +$$
$$+ \operatorname{Re}\Big[z\ln z + \frac{1}{2}\ln\frac{z}{z-n_1} - n_1 - (z-n_1+\delta)\ln(z-n_1)\Big] + O(1).$$

Перегруппируя члены в последней сумме и отделяя действительные части, мы получим, что

$$\ln|d_{n_0}(z)| = -n_1\ln n_1 + 2\varepsilon\ln n_1 + r\cos\varphi\ln r - r\varphi\sin\varphi +$$
$$+ \frac{1}{2}\ln r - \operatorname{Re}(z-n_1)\ln|z-n_1| + \operatorname{Im}[(z-n_1)\arg(z-n_1)] + O(1)$$

так как $\frac{1}{2} < \left|\frac{z-n_1}{n_1}\right| < 1$, $\ln\left(1+\frac{1}{A}\right) = O\left(\frac{1}{A}\right)$ и

$$\delta\ln n_1 - \delta\ln|z-n_1| = -\delta\ln\left|\frac{z-n_1}{n_1}\right| = O(1).$$

Далее, продолжая вычисление, получим, что

$$\ln|d_{n_0}(z)| = 2\varepsilon\ln n_1 - n_1\ln n_1 + r\cos\varphi\ln r - r\varphi\sin\varphi +$$
$$+ \frac{1}{2}\ln r - (r\cos\varphi - n_1)\ln n_1 - (r\cos\varphi - n_1)\ln\left|1 - \frac{z}{n_1}\right| -$$
$$- r\sin\varphi\arg(z-n_1) + O(1).$$

Производя дальнейшие сокращения и применяя соотношения (87), (88) и (89), придем к результату

$$\ln|d_{n_0}(z)| < 5\varepsilon\ln r + r\cos\varphi\ln r - r\varphi\sin\varphi + \frac{1}{2}\ln r - r\cos\varphi\ln r +$$
$$+ r\cos\varphi\ln(2\cos\varphi) + r\cos\varphi\ln\left(1 - \frac{2\varepsilon}{r\cos\varphi}\right) + 2\varphi r\cos\varphi + O(1) =$$
$$= \left(\frac{1}{2} + 5\varepsilon\right)\ln r + r(\cos\varphi\ln(2\cos\varphi) + \varphi\sin\varphi) + O(1),$$

так как функция $t\ln\left(1-\frac{1}{t}\right)$ при $1-\frac{1}{t} \geqslant 1 - \frac{2\varepsilon}{\alpha} > 0$ ограничена.

Последнее неравенство, ограничивающее $|d_{n_0}(z)|$, может теперь быть записано в форме

$$|d_{n_0}(z)| < C(\alpha, \varepsilon) r^{\frac{1}{2}+5\varepsilon} e^{rh(\varphi)}, \; h(\varphi) = \cos\varphi \ln(2\cos\varphi) + \varphi \sin\varphi,$$

причем $C(\alpha, \varepsilon)$ зависит только от ε и α при $\operatorname{Re} z \geqslant \alpha > 2\varepsilon > 0$ и ε произвольно малом.

Это последнее неравенство и доказывает полностью нашу теорему.

3. Разложение аналитических функций в ряд Ньютона. Ряд Ньютона с коэффициентами, отличными от нуля, в отличие от ряда Тэйлора может представлять в полуплоскости своей сходимости функцию, тождественно равную нулю. Для исследования этого обстоятельства займемся вопросом единственности определения аналитической функции, регулярной в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \lambda$, по ее значениям при целых положительных значениях аргумента, т. е. в точках $z = 0, 1, 2, \ldots$

Мы докажем теорему, дающую в известном смысле необходимые и достаточные условия, при которых аналитическая функция, регулярная в некоторой полуплоскости, может быть единственным образом определена по ее значениям в точках, образующих арифметическую прогрессию. Эта теорема представляет достаточно большой интерес также и с функциональной точки зрения.

Теорема VII. *Если функция $f(z)$, регулярная в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$, непрерывная на мнимой оси и удовлетворяющая в этой полуплоскости неравенству*

$$|f(z)| < Ae^{|z|h(\varphi)}, \; h\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) \leqslant \gamma < \pi, \; \varphi = \arg z, \tag{90}$$

где $h(t)$ — любая действительная и непрерывная на сегменте $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ функция, обращается в нуль при всех целых и положительных значениях аргумента, т. е. $z = 1, 2, \ldots$, то она должна быть тождественно равна нулю.

Доказательство. Допустим, что существует функция $f(z)$, удовлетворяющая всем условиям нашей теоремы и не обращающаяся в нуль тождественно. Рассмотрим тогда функцию $\frac{f(z)e^{uz}z}{\sin \pi z}$. Эта функция, рассматриваемая как функция комплексного переменного z, будет регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ и непрерывна на прямой $\operatorname{Re} z = 0$, так как нули числителя и знаменателя будут совпадать, причем знаменатель имеет однократные нули только в целых рациональных точках. По теореме Коши, считая x действительным числом, имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)e^{uz}z}{\sin \pi z}\frac{dz}{z-x} = \frac{f(x)e^{ux}x}{\sin \pi x}, \tag{91}$$

где C — замкнутый контур, состоящий из отрезка мнимой оси $\operatorname{Re} z = 0$, $-R \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant R$, и полуокружности $|z| = R$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}$, причем $R = n + \frac{1}{2}$, где $n > x$ — сколь угодно большое целое положительное число. Положим $z = re^{it}$. Тогда подынтегральная функция при действительном u будет на мнимой оси удовлетворять неравенству

$$\left| \frac{f(z)\, e^{uz} z}{\sin \pi z\, (z - x)} \right| < A_1 e^{-(\pi - \gamma) r}, \tag{92}$$

где A_1 не зависит от r, так как при $r > 1$ имеем $|\sin \pi i r| > \frac{1}{4} e^{\pi r}$ и $h\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) \leqslant \gamma$, а на полуокружности $|z| = R = n + \frac{1}{2}$, $|t| \leqslant \frac{\pi}{2}$, — неравенству

$$\left| \frac{f(z)\, e^{uz} z}{\sin \pi z\, (z - x)} \right| < A_2 e^{R[h(t) + u \cos t - \pi |\sin t|]}, \tag{93}$$

где A_2 также от R и t не зависит, так как при $R = n + \frac{1}{2}$

$$|\sin \pi R e^{it}| > \frac{1}{3} e^{\pi R |\sin t|}, \quad |e^{uz}| = e^{uR \cos t}.$$

Вследствие того что $h(t)$ — непрерывная функция t на сегменте $|t| \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $h\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) \leqslant \gamma < \pi$, можно найти такое число t_0, $t_0 > 0$, что $\cos t_0 > 1 - \frac{\pi - \gamma}{4\pi}$ и что при всяком t, $|t| \geqslant \frac{\pi}{2} - t_0$, будет выполнено неравенство $h(t) < \gamma + \frac{n - \gamma}{2} = \frac{n + \gamma}{2}$. Положив $h_0 = \max\limits_{|t| \leqslant \frac{\pi}{2}} |h(t)|$ и считая, что u — действительное число, $u < -\frac{4h_0 + \pi - \gamma}{4 \sin t_0}$, мы сразу увидим, что неравенство (93) перейдет в неравенство

$$\left| \frac{f(z)\, e^{uz} z}{\sin \pi z\, (z - x)} \right| < A_2 e^{-\frac{\pi - \gamma}{4} R},$$

так как на интервале $|t| \leqslant \frac{\pi}{2} - t_0$ мы будем иметь $h(t) + u \cos t - \pi |\sin t| < h_0 + u \sin t_0 < -\frac{n - \gamma}{4}$, а на двух сегментах $\frac{\pi}{2} \geqslant |t| \geqslant \frac{\pi}{2} - t_0$ аналогичным образом

$$h(t) + u \cos t - \pi |\sin t| < \frac{\pi + \gamma}{2} - \pi \cos t_0 < -\frac{n - \gamma}{4}.$$

Из этого последнего неравенства непосредственно следует, что часть интеграла (91), взятая по дуге $|z| = R$, стремится к нулю, если R стремится к бесконечности. Поэтому, устремляя R к бесконечности, мы получим из соотношения (91), что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{is\,f(is)\,e^{uis}}{\sin\pi is}\,\frac{ds}{is-x}=\frac{f(x)e^{ux}x}{\sin\pi x}. \tag{94}$$

Интеграл, стоящий в левой части (94), сходится абсолютно при всяком комплексном u, лежащем в плоскости комплексного переменного u в полосе $-(\pi-\gamma)<\operatorname{Im}u<\pi-\gamma$. Это следует из неравенства (92). Значит, левая часть соотношения (94), рассматриваемая как функция u, есть регулярная аналитическая функция u и в полосе $-(\pi-\gamma)<\operatorname{Im}u<\pi-\gamma$. Правая же часть соотношения (94) есть целая функция u. Поэтому равенство (94), установленное нами до сих пор только для действительных u, $u<-\frac{4h_0+4\pi-\gamma}{4\sin t_0}$, должно быть справедливо по теореме единственности аналитических функций и для всякого u в полосе $-(\pi-\gamma)<\operatorname{Im}u<\pi-\gamma$.

Считая теперь u действительным и положительным, мы получим из равенства (94) неравенство

$$\left|\frac{f(x)\,x}{\sin\pi x}\right|<e^{-ux}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|s|\,|f(is)|\,ds}{|\sin\pi is|\sqrt{s^2+x^2}}.$$

Так как это неравенство имеет место при всяком сколь угодно большом положительном u, а интеграл в правой части от u не зависит, то отсюда следует, что $f(x)=0$. Мы таким образом доказали, что $f(z)=0$ при всяком действительном и положительном x. Отсюда следует, что регулярная в правой полуплоскости функция $f(z)$ должна быть равна нулю тождественно.

Перейдем теперь к вопросу существования рядов Ньютона с коэффициентами, отличными от нуля, сходящихся в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re}z>\lambda$ и представляющих в этой полуплоскости тождественно равную нулю функцию.

Рассмотрим ряд Ньютона

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)\ldots(z-n)}{n!}. \tag{95}$$

Абсциссы его сходимости λ и μ определяются по теоремам IV и V, и мы получаем, что $\lambda=\mu=1$. Из теоремы IV следует, что $f_1(z)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re}z>1$ и рост ее в этой

полуплоскости определяется неравенством $|f_1(\sigma + re^{it})| < e^{\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)r}$, $\sigma > 1$, при всяком как угодно малом $\varepsilon > 0$. Но при всяком целом положительном $k \geqslant 2$

$$f_1(k) = \sum_{n=0}^{n=k-1} (-1)^n \frac{(k-1)\ldots(k-n)}{n!} = (1-1)^{k-1} = 0,$$

а значит, по теореме VII $f_1(z)$ должна быть тождественно равна нулю.

Совершенно так же ряд при s целом и положительном

$$f_{s+1}(z) = \frac{(z-1)\ldots(z-s)}{s!} f_1(z-s) =$$

$$= \sum_{n=s}^{\infty} (-1)^{n+s} \frac{n(n-1)\ldots(n-s+1)}{s!} \frac{(z-1)\ldots(z-n)}{n!},$$

имеющий абсциссами сходимости числа $\lambda = \mu = s+1$ и представляющий поэтому в полуплоскости $\operatorname{Re} z > s+1$ регулярную функцию, представляет в этой полуплоскости тождественно равную нулю функцию.

Если мы захотим выяснить, какова должна быть в самом общем случае структура ряда Ньютона, представляющего тождественно равную нулю функцию, то мы придем к теореме:

Теорема VIII. *Если ряд Ньютона*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z-1)\ldots(z-n)}{n!}, \tag{96}$$

сходящийся в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \lambda$, *представляет в этой полуплоскости тождественно равную нулю функцию, то* λ *должно быть целым положительным числом, а сам ряд Ньютона может быть представлен в виде*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z-1)\ldots(z-n)}{n!} =$$

$$= \sum_{s=0}^{\lambda-1} C_s \sum_{n=s}^{\infty} (-1)^{n+s} \frac{n!}{s!\,(n-s)!} \frac{(z-1)\ldots(z-n)}{n!}, \tag{97}$$

где C_s $(s = 0, 1, \ldots, \lambda-1)$ — *произвольные постоянные.*

Доказательство. Обозначим через p максимальное целое число, не большее λ. Тогда $p \leqslant \lambda < p+1$. В силу тождественного равенства нулю нашей функции $f(z)$ мы получим, что

$f(z)=0,\ z=p+1,\ p+2,\ldots$ Но

$$f(p+k)=\sum_{n=0}^{p+k-1} a_n \frac{(p+k-1)!}{n!\,(p+k-n-1)!},\quad k=1,\ 2,\ldots \tag{98}$$

Пользуясь обозначениями конечных разностей, имеем

$$\Delta^n\varphi(x)=\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\varphi(x+n-s)\frac{n!}{s!\,(n-s)!},$$

и, обратно,

$$\varphi(x+n)=\sum_{s=0}^{n}\frac{n!}{s!\,(n-s)!}\Delta^s\varphi(x).$$

Поэтому из формулы (98) мы можем получить, что

$$a_t=\sum_{s=0}^{t}(-1)^{t+s}f(s+1)\frac{t!}{s!\,(t-s)!}=$$
$$=\sum_{s=0}^{p-1}(-1)^{t+s}f(s+1)\frac{t!}{s!\,(t-s)!}, \tag{99}$$

так как $f(s+1)=0$ при $s\geqslant p$.

Числа $f(1),\ldots,f(p)$ можно считать произвольными постоянными ввиду того, что функция $f(z)$ налево от абсциссы сходимости не определена, и мы получим формулу (97), вставив вместо коэффициентов ряда Ньютона (96) их выражения из равенства (99). Из этого равенства следует также, что λ должно быть целым числом, а также и что $\lambda>0$, так как при $\lambda<1$ $p=0$, $p+1=1,\ldots$ и, значит, $a_t=0,\ t=0,\ 1,\ldots$

Существование подобных разложений, носящих название нулевых разложений, на первый взгляд затрудняет определение абсциссы сходимости ряда Ньютона, представляющего данную функцию $f(z)$, так как эта функция может иметь бесчисленное множество различных представлений ее рядом Ньютона. Но если $f(z)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} z>\alpha$, а абсцисса сходимости ряда Ньютона, представляющего эту функцию, будет λ, $\lambda\geqslant\alpha$, то при $\lambda<1$ или λ, не равном целому положительному числу, мы никаким образом не можем изменить эту абсциссу сходимости вычитанием из членов данного ряда членов ряда нулевого разложения, так как ряд, являющийся нулевым разложением, имеет целочисленную и притом положительную абсциссу сходимости. Если же $\lambda=1,\ 2,\ldots$, то мы можем заранее допустить, что

$$f(z)=\sum_{k=0}^{z-1}a_k\frac{(z-1)\ldots(z-k)}{k!}=\sum_{k=0}^{z-1}\Delta^k f(0)\frac{(z-1)\ldots(z-k)}{k!}$$

для всякого целочисленного z, при котором функция будет регулярна. Такие ряды мы будем называть *приведенными* рядами Ньютона. Конечно, коэффициенты разложения функции в приведенный ряд Ньютона будут не всегда однозначно определены, так как к этому приведенному разложению может быть можно будет прибавить нулевые разложения, имеющие абсциссами сходимости числа λ_i, такие, что в точке λ_i $f(z)$ не имеет определенного значения.

Так как понятия приведенного разложения естественно вводить для случая $\lambda \geqslant 1$, то абсцисса сходимости λ в подобном случае определяется равенством

$$\lambda = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\left|\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_k\right|}{\ln n}.$$

Но благодаря нашим условиям, накладываемым на приведенное разложение, мы будем иметь по теореме VIII относительно нулевых разложений

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k a_k = -\sum_{k=1}^{q}(-1)^k \frac{n!}{k!\,(n-k)!} C_k - \sum_{k=q+1}^{n}(-1)^k \frac{n!}{k!\,(n-k)!} f(k),$$

где q есть максимальное целое число, не большее α (α — абсцисса регулярности функции), а C_k, $k = 1, 2, 3, \ldots, q$, есть коэффициенты нулевого разложения [см. равенство (97)].

Так как $\lambda \geqslant \alpha$, $q \leqslant \alpha \leqslant \lambda$, а

$$\left|\sum_{k=1}^{q}(-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} C_k\right| < Cn^q,$$

то

$$\lambda = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\left|\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{k!}{k!(n-k)!} f(k)\right|}{\ln n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|\Delta^n f(0)|}{\ln n}, \quad (100)$$

где положено $f(k) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, q$.

Итак, в случае $\lambda \geqslant 1$ абсцисса сходимости приведенного ряда Ньютона определяется равенством (100) однозначно. Эта формула справедлива, как легко проверить, и в случае $\lambda < 1$.

Докажем теорему, дающую условия разложения аналитической функции в ряд Ньютона.

Теорема IX. *Пусть $f(z)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \alpha$, непрерывна на прямой $\operatorname{Re} z = \alpha$ и в этой полуплоскости*

удовлетворяет неравенству

$$|f(\alpha + re^{it})| < (1 + r)^{\beta+\varepsilon(r)} e^{rh(t)},$$
$$h(t) = \cos t \ln(2\cos t) + t \sin t, \tag{101}$$

где $\varepsilon(r) > 0$ *стремится к нулю при* r, *стремящемся к бесконечности равномерно на всем сегменте изменения* t, $|t| \leqslant \frac{\pi}{2}$. *Тогда* $f(z)$ *может быть разложена в ряд Ньютона*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!}(z-1)\ldots(z-k),$$

абсцисса сходимости которого не может превышать наибольшего из чисел α *и* $\beta + \frac{1}{2}$.

Доказательство. Для упрощения допустим, что α не есть целое число. Если бы α было целым числом, то его можно было бы заменить числом $\alpha + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ как угодно мало, и, так как оценка роста $f(z)$, даваемая неравенством (101), оставалась бы верной при замене α на $\alpha + \varepsilon$, то можно было бы доказать, что λ не превышает чисел $\alpha + \varepsilon$ и $\beta + \frac{1}{2}$. Но так как это верно при всяком $\varepsilon > 0$, то верно и при $\varepsilon = 0$.

Воспользовавшись тождеством [1])

$$\frac{1}{x-z} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(z-1)\ldots(z-k+1)}{(x-1)\ldots(x-k)} + \frac{(z-1)\ldots(z-n)}{(x-1)\ldots(x-n)} \frac{1}{x-z},$$

мы можем умножить его на $f(x)$ и, предполагая, что $\operatorname{Re} z > \alpha$, проинтегрировать обе части полученного равенства по любому замкнутому пути C_n, лежащему в полуплоскости $\operatorname{Re} x > \alpha$ и содержащему внутри себя точку z и все целые и положительные числа, бо́льшие α и меньшие или равные n. Тогда мы получим

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k!}(z-1)\ldots(z-k) + R_n(z), \tag{102}$$

где

$$a_k = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{f(x)\,dx}{(x-1)\ldots(x-k-1)},$$
$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{(z-1)\ldots(z-n)}{(x-1)\ldots(x-n)} \frac{f(x)\,dx}{x-z}.$$

---

[1]) Это тождество для $n = 1$ очевидно, а для произвольного n легко доказывается по индукции.

Для тех значений z, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(z) = 0$, ряд Ньютона (102) будет сходящимся. Поэтому, если мы установим, что для некоторого z, $z \neq 1, 2, \ldots$, ряд (102) сходится, то его абсцисса сходимости λ не может быть больше, чем действительная часть этого числа z, т. е. $\operatorname{Re} z \geqslant \lambda$.

Положим $z = \sigma + i\tau$ и заменим в выражении $R_n(z)$ под знаком интеграла x на $x + \alpha$. Тогда мы будем иметь, что

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_n'} \frac{(z-1)\ldots(z-n)}{(x+\alpha-1)\ldots(x+\alpha-n)} \frac{f(x+\alpha)}{x-(z-\alpha)}\, dx =$$

$$= \frac{(-1)^n \Gamma(n+1-z)}{2\pi i \Gamma(1-z)} \int\limits_{C_n'} \frac{\Gamma(\alpha+x-n) f(x+\alpha)\, dx}{\Gamma(\alpha+x)(x-z+\alpha)},$$

или, воспользовавшись функциональным уравнением $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$,

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(n+1-z)}{\Gamma(1-z)} \int\limits_{C_n'} \frac{\Gamma(1-x-\alpha)}{\Gamma(n+1-x-\alpha)} \frac{f(x+\alpha)\, dx}{x-(z-\alpha)}, \qquad (103)$$

где C_n' — замкнутый контур, лежащий в полуплоскости $\operatorname{Re} x > 0$ и содержащий внутри себя точки $z-\alpha$, $k-\alpha, \ldots, n-\alpha$, и k — наименьшее целое число, большее α.

При заданном z, $\operatorname{Re} z > \alpha$, мы можем взять в качестве контура C_n' окружность $|x-n| = n$, так как при достаточно большом n все нужные нам точки попадут внутрь этой окружности.

Пусть $x = re^{it}$. Тогда уравнение контура C_n' можно записать в виде $r = 2n\cos t$ или также $x = 2n\cos t e^{it}$. Оценим величину

$$\frac{\Gamma(n+1-z)\Gamma(1-x-\alpha)}{\Gamma(n+1-x-\alpha)}$$

при $x = 2n\cos t e^{it}$, z фиксированном, $z = \sigma + i\tau$, $\sigma > \alpha$ и n неограниченно растущем, пользуясь формулой Стирлинга для $\Gamma(z)$. Мы будем иметь

$$\ln\left|\frac{\Gamma(n+1-z)\Gamma(1-x-\alpha)}{\Gamma(n+1-x-\alpha)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \ln \frac{\left|(n+1-z)^{n+\frac{1}{2}-z}\right| \left|(1-x-\alpha)^{\frac{1}{2}-x-\alpha}\right|}{\left|(n+1-x-\alpha)^{n-x-\alpha+1/2}\right|} + C_1, \qquad (104)$$

где $C_1 > 0$ не зависит ни от n, ни от x.

Мы легко можем получить оценки всех величин, стоящих в числителе и знаменателе неравенства (104), причем величины

$O(1)$, которые будут входить в неравенства (105) — (108), не будут зависеть ни от t, ни от x. Прежде всего имеем

$$\ln|(n+1-z)^{n-z+\frac{1}{2}}| = \left(n-z+\frac{1}{2}\right)\ln n + O(1). \tag{105}$$

Далее, так как $n-x = n-2n\cos te^{it} = -ne^{2it}$,

$$\ln|n-x-\alpha+1|^n = n\ln n + O(1). \tag{106}$$

Наконец, мы получим

$$\ln\left|\left(\frac{1-x-\alpha}{n-x+1-\alpha}\right)^{\frac{1}{2}-x-\alpha}\right| = \ln\left|\left(\frac{1-\alpha-2n\cos te^{it}}{1-\alpha-ne^{2it}}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha-x}\right| =$$

$$= \left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\ln\left|\frac{1}{n}+\cos t\right| + \ln\left|\left(\frac{1-\alpha-2n\cos te^{it}}{1-\alpha-ne^{2it}}\right)^{-x}\right| + O(1) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\ln\left|\frac{1}{2}+\cos t\right| + \ln\left|\left(\frac{2\cos te^{it}}{e^{2it}}\right)^{-x}\right| +$$

$$+ \ln\left|\left[\frac{1-\dfrac{(1-\alpha)e^{-it}}{2n\cos t}}{1-\dfrac{1}{n}(1-\alpha)e^{-2it}}\right]^{-x}\right| + O(1) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\ln\left(\frac{1}{n}+\cos t\right) + \ln|(2\cos te^{-it})^{-2n\cos te^{it}}| + O(1), \tag{107}$$

откуда, полагая $h(t) = \cos t\ln(2\cos t) + t\sin t$,

$$\ln\left|\left(\frac{1-x-\alpha}{n-x+1-\alpha}\right)^{\frac{1}{2}-x-\alpha}\right| = \left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\ln\left(\frac{1}{n}+\cos t\right) -$$

$$-2n\cos th(t) + O(1). \tag{108}$$

Вставляя оценки (105), (106) и (108) в неравенство (104), мы получим

$$\left|\frac{\Gamma(n+1-z)\Gamma(1-x-\alpha)}{\Gamma(n+1-x-\alpha)}\right| < C_2\left(\cos t+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha} n^{\frac{1}{2}-\sigma} e^{-2n\cos th(t)}. \tag{109}$$

Возвратимся к $R_n(z)$. Благодаря неравенствам (101) и (109) и формуле (103) придем к оценке

$$|R_n(z)| < \frac{C_2 n^{\frac{1}{2}-\sigma}}{|\Gamma(1-z)|}\int\limits_{C_n'}\left(\cos t+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha}(1+2n\cos t)^{\beta+\varepsilon}\frac{|dx|}{|x-z+\alpha|},$$

или, так как $x = 2n\cos te^{it}$ и $dx = 2ine^{2it}dt$,

$$|R_n(z)| < C_3 n^{\frac{1}{2}-\sigma} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos t + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha} (1 + n\cos t)^{\beta+\varepsilon} \frac{n\,dt}{1 + n\cos t}, \quad (110)$$

для всякого сколь угодно малого ε, большего нуля, где C_3 зависит только от ε.

Но интеграл в правой части (110) (так как подынтегральная функция — четная) после замены t на $\frac{\pi}{2} - t$ равен

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin t + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha} (1 + n\sin t)^{\beta+\varepsilon} \frac{n\,dt}{1 + n\sin t} <$$

$$< C_4 \max\left[n^{\beta+\varepsilon},\ n^{\alpha-\frac{1}{2}}\right], \quad (111)$$

где C_4 не зависит от n, так как

$$2n \int_0^{\arcsin\frac{1}{n}} \left(\sin t + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha} (1 + n\sin t)^{\beta-1+\varepsilon} dt = O\left(n^{\alpha-\frac{1}{2}}\right)$$

и

$$2n \int_{\arcsin\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin t + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha} (1 + n\sin t)^{\beta-1+\varepsilon} dt <$$

$$< C_5 n^{\beta+\varepsilon} \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\frac{1}{n} + t\right)^{\beta+\varepsilon-\alpha-\frac{1}{2}} dt <$$

$$< C_6 n^{\beta+\varepsilon}\left(1 + n^{-\beta-\varepsilon+\alpha-\frac{1}{2}}\right) < 2C_6 \max\left[n^{\beta+\varepsilon},\ n^{\alpha-\frac{1}{2}}\right].$$

Из неравенств (110) и (111) получим окончательно, что

$$|R_n(z)| < C_7 n^{-\sigma+\frac{1}{2}} \max\left[n^{\alpha-\frac{1}{2}},\ n^{\beta+\varepsilon}\right], \quad (112)$$

откуда следует, что при $\sigma - \frac{1}{2} > \max\left[\alpha - \frac{1}{2},\ \beta + \varepsilon\right]$ $R_n(z) \to 0$. Так как $\varepsilon > 0$ можно было взять сколь угодно малым, то мы можем утверждать, что $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(z) = 0$ и при $\sigma > \max\left[\alpha,\ \beta + \frac{1}{2}\right]$.

Теорема IX может быть непосредственно использована для доказательства одного теоретико-числового предложения.

Теорема X[1]). *Если функция $f(z)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \alpha$, удовлетворяет в этой полуплоскости неравенству*

$$|f(\alpha + re^{it})| < e^{r\varphi(t)}(1+r)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \tag{113}$$

где $\varphi(t) = \cos t \ln(2\cos t) + t \sin t$, *и целочисленна при* $z = k$, $k+1, \ldots, k > \alpha$, *т. е.* $f(n)$ — *целые числа при всех целых* n, $n \geqslant k$, *то она должна быть многочленом.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $u(z) = f(k+z)$. Эта функция регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \alpha - k$, в этой полуплоскости она удовлетворяет неравенству

$$|u(\alpha - k + re^{it})| = |f(\alpha + re^{it})| < (1+r)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} e^{r\varphi(t)}, \quad \varepsilon > 0,$$

где $\varphi(t) = \cos t \ln(2\cos t) + t \sin t$.

По теореме IX функция $u(z)$ может быть разложена в ряд Ньютона (57), абсцисса сходимости которого γ не может быть больше максимального из чисел $\alpha - k < 0$ и $-\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \varepsilon$. Итак, абсцисса сходимости ряда Ньютона (57), представляющего нашу функцию $u(z)$, должна быть отрицательна. Значит, ряд Ньютона для функции $u(z)$ должен сходиться при $z = 0$, т. е. ряд $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots$ должен быть сходящимся. Но мы знаем, что $a_n = \Delta^n u(1) = u(n+1) - nu(n) + \ldots \pm u(1)$, откуда следует, что все a_n, $n = 0, 1, \ldots$, должны быть целыми числами, так как по условию нашей теоремы числа $u(n) = f(k+n)$, $n = 0, 1, \ldots$, — целые рациональные. Поэтому ряд $a_0 - a_1 + a_2 - \ldots$, раз он сходится, должен обрываться, т. е. $a_n = 0$ при $n \geqslant n_0$ и

$$f(z+k) = \sum_{n=0}^{n=n_0-1} \frac{a_n}{n!}(z-1)\ldots(z-n),$$

т. е. функция $f(z+k)$ — многочлен.

Так как функция $\varphi(t) = \cos t \ln(2\cos t) + t \sin t$ будет четной, растущей на сегменте $\frac{\pi}{2} \geqslant t \geqslant 0$ и принимающей при $t = 0$ свое минимальное значение $\varphi(0) = \ln 2$, а при $t = \pm\frac{\pi}{2}$ — максимальное значение $\varphi\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, то, взяв произвольную функцию $f(z)$, регулярную в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ и удовлетворяющую

[1]) Теорема Г. Полиа.

там неравенству

$$|f(z)| < e^{|z|h(t)}(1+|z|)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \quad t = \arg z, \quad (114)$$

где $h(t)$ непрерывна на сегменте $|t| \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $h\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) < \frac{\pi}{2}$, и умножив ее на e^{-uz}, мы можем по теореме IX при действительном и достаточно большом u разложить функцию $e^{-uz}f(z)$ в ряд Ньютона (57), так как при достаточно большом u будет выполнено неравенство

$$h(t) - u\cos t < \varphi(t).$$

Но коэффициенты ряда Ньютона (57) для функции $e^{-uz}f(z)$ должны иметь вид

$$a_n = e^{-u(n+1)}f(n+1) - ne^{-un}f(n) + \ldots \pm e^{-u}f(1).$$

Коэффициенты эти, так как u — известное постоянное число, будут зависеть только от значений функции $f(z)$ в точках $z = 1, 2, \ldots$, и значит, с помощью ряда Ньютона (57) мы получили решение задачи о представлении аналитической функции, регулярной в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ по ее значениям в точках $z = 1, 2, 3, \ldots$, если в этой полуплоскости рост рассматриваемой функции ограничен неравенством (114). Эта задача, задача представления функции по ее значениям в точках, образующих арифметическую прогрессию, решается с помощью ряда Ньютона при слишком узких предположениях относительно роста аналитической функции в полуплоскости ее регулярности. В самом деле, ограничения (114), накладываемые на рост функции $f(z)$, достаточные, а в силу теоремы VI и необходимые, для разложимости функции $e^{-uz}f(z)$ в ряд Ньютона, значительно жестче ограничений, накладываемых на рост $f(z)$ теоремой VII. Но при выполнении условий теоремы VII задача о нахождении целой функции $f(z)$ по ее значениям в целых точках решается единственным образом при любых ограничениях, достаточных для единственности функции, хотя ряд Ньютона может и не давать нам этого решения.

Мы вернемся к этой задаче в дальнейшем и дадим ее решение при ограничениях теоремы VII.

§ 3. Ряд Ньютона при произвольных узлах интерполяции

1. Область сходимости ряда Ньютона. В этом параграфе мы рассмотрим различные случаи расположения узлов интерполяции.

Мы будем предполагать, что приближаемая функция $f(z)$ будет аналитической в той области, в которой лежат узлы интерполяции. В частности, если узлы интерполяции имеют точку накопления в бесконечности, $f(z)$ мы будем предполагать целой

функцией. В предыдущем параграфе мы подробно рассмотрели тот случай, когда узлы интерполяции — целые неотрицательные числа. В этом случае областью сходимости ряда Ньютона была полуплоскость. В общем случае ряда Ньютона область сходимости может быть произвольной областью комплексной плоскости, в частности всей плоскостью без бесконечно удаленной точки. Этот последний случай мы рассмотрим в первую очередь. Докажем теорему:

Теорема I. *Если узлы интерполяции x_n, $n = 0, 1, \ldots$, имеют точку накопления только в бесконечности,*

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{|x_n|} < \infty,$$

и ряд Ньютона

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - x_0) \ldots (z - x_{k-1}) \tag{115}$$

сходится для какого-нибудь $z_0 \neq x_k$, $k = 0, 1, \ldots$, то он сходится равномерно в любом круге $|z| \leqslant R$ и $f(z)$ будет целой функцией.

Доказательство. Действительно,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z_0 - x_0) \ldots (z_0 - x_{k-1}) \frac{(z - x_0) \ldots (z - x_{k-1})}{(z_0 - x_0) \ldots (z_0 - x_{k-1})} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} b_k c_k(z); \quad b_k = a_k \prod_{s=0}^{k-1} (z_0 - x_s), \quad c_k(z) = \prod_{s=0}^{k-1} \frac{z - x_s}{z_0 - x_s}.$$

Числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ по условию нашей теоремы — сходящийся, а $c_k(z)$ при $|z| \leqslant R$ удовлетворяют, очевидно, неравенствам

$$|c_k(z)| < AR^m \prod_{s=m}^{k} \frac{1 + \frac{R}{|x_s|}}{1 - \frac{|z_0|}{|x_s|}} < AR^m \prod_{s=m}^{\infty} \frac{1 + \frac{R}{|x_s|}}{1 - \frac{|z_0|}{|x_s|}} = U(R)$$

(A не зависит от k и R, число m определяется условиями $|x_s| > |z_0|$, $s \geqslant m$) и неравенствам

$$|c_k(z) - c_{k+1}(z)| < U(R) \left| 1 - \frac{z - x_k}{z_0 - x_k} \right| <$$

$$< U(R) \frac{R + |z_0|}{1 - \frac{|z_0|}{|x_k|}} \frac{1}{|x_k|} < \frac{U_1(R)}{|x_k|}, \quad k > m,$$

где $U_1(R)$ не зависит от k. Эти неравенства уже позволяют доказать нашу теорему.

Это доказательство ничем не отличается от доказательства теоремы II § 2 настоящей главы Так же как и в том доказательстве, пользуясь нашими неравенствами и положив $S_n = \sum_{k=n}^{\infty} b_k$, мы получим при $|z| \leqslant R$ неравенство

$$\left|\sum_{k=n}^{N} b_k c_k(z)\right| = \left|\sum_{k=n}^{N} (S_k - S_{k+1}) c_k(z)\right| \leqslant$$

$$\leqslant |S_n||c_n(z)| + |S_{N+1}||c_N(z)| + \sum_{n}^{N-1} |c_k(z) - c_{k+1}(z)||S_{k+1}| \leqslant$$

$$\leqslant U(R)(|S_n| + |S_{N+1}|) +$$

$$+ SU_1(R) \sum_{k=n}^{N-1} \frac{1}{|x_k|}; \quad S = \max_{0 \leqslant n < \infty} |S_n|.$$

Так как последняя сумма, зависящая от R, при $|z| \leqslant R$ может быть сделана меньше любого $\varepsilon > 0$ при достаточно большом n и произвольном $N \geqslant n$ в силу сходимости ряда $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|x_k|}$ и стремления к нулю S_n, то, действительно, ряд Ньютона (115) равномерно сходится в круге $|z| \leqslant R$ при любом R и $f(z)$ — целая функция.

Покажем теперь, что *областью сходимости ряда Ньютона*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - x_0) \ldots (z - x_{n-1}) \tag{116}$$

может быть произвольная односвязная область с аналитической границей. Пусть D будет односвязная область в плоскости z, граница которой имеет не менее двух точек и $z = 0$ будет внутренней точкой D. По теореме Римана всегда существует аналитическая функция $\zeta = \varphi(z)$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$, конформно отображающая область D на круг $|\zeta| \leqslant \rho$ в плоскости ζ. Число ρ называется, как известно, радиусом конформности D. При этом отображении всякая внутренняя точка D переходит во внутреннюю точку круга $|\zeta| \leqslant \rho$. Обратная функция $z = \psi(\zeta)$ переводит круг $|\zeta| \leqslant \rho$ конформно в область D. Каждой окружности $|\zeta| = r$, $r < \rho$, будет при этом отображении в плоскости z соответствовать замкнутый аналитический контур $L(r)$. Итак, каждой точке z, являющейся внутренней точкой D, можно сопоставить область $D(z)$,

внутреннюю по отношению к D, на границе которой $L(r)$ лежит точка z.

Положим теперь

$$r_k = \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right)\rho, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

и рассмотрим последовательность областей D_k с границами $L(r_k)$, каждая из которых является частью следующей. По теореме о равномерном приближении функций в комплексной области многочленами функцию $\varphi(z)$, регулярную в замкнутой области $\overline{D}_k$, можно приблизить многочленом $q_k(z)$ так, чтобы в этой области выполнялось неравенство

$$|\varphi(z) - q_k(z)| < \frac{\rho}{2^{k+2}}, \quad z \in \overline{D}_k. \tag{117}$$

Положим $Q_k(z) = \prod_{s=0}^{s} q_s(z)$ и рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k Q_k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \prod_{s=0}^{k} q_r(z). \tag{118}$$

Так как $q_k(z)$ — многочлен, то $q_k(z) = b_k \prod_{\nu} (z - a_k, \nu)$, откуда следует, что ряд (118) отличается от ряда (116) только формой записи. Какую бы внутреннюю точку z области D мы ни взяли, она будет внутренней точкой всех областей D_k при $k \geqslant k_0(z)$. Если точке z соответствует контур $L(r)$, то $|\varphi(z)| = r$ и вследствие неравенств (117)

$$q_k(z) = r + \theta_k \frac{\rho}{2^{k+1}}, \quad k > k_0(z), \quad |\theta_k| \leqslant 1. \tag{119}$$

Допустив, что $q_k(z) \neq 0$, $k > k_0(z)$, мы из соотношений (119) получаем, что

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[k]{|Q_k(z)|} = \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{|Q_{k_0 - 1}(z)|} \sqrt[k]{\prod_{k_0}^{k} \left(r + \frac{\rho\theta_s}{2^{s+1}}\right)} = r. \tag{120}$$

Итак, если ряд (118) сходится при $z = z_0$, $z_0 \in D$ и $q_k(z_0) \neq 0$, $k \geqslant k_0(z_0)$, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k Q_k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k Q_k(z_0) \frac{Q_k(z)}{Q_k(z_0)},$$

и значит, этот ряд сходится для всякого z, являющегося внут-

ренней точкой области $D(z_0)$ с границей $L(r_0)$, соответствующей точке z_0, так как в силу сходимости ряда (118) при $z = z_0$ и соотношения (120)

$$\lim_{n\to\infty} c_k Q_k(z_0) = 0, \qquad \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\frac{Q_k(z)}{Q_k(z_0)}} \leqslant \frac{r}{r_0}, \; r < r_0.$$

Совершенно так же, если $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = \frac{1}{r}$, то областью сходимости ряда (118) будет область $D(r)$ с границей $L(r)$. Это утверждение есть прямое следствие предельных соотношений (120). При $r = \rho$ областью сходимости ряда (118) будет область D.

В качестве примера на определение области сходимости интерполяционного ряда рассмотрим область сходимости ряда Стирлинга. Интерполяционный ряд называется рядом Стирлинга, если узлы интерполяции будут: $x_0 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$, $x_4 = 2, \ldots, x_{2k-1} = -k$, $x_{2k} = k, \ldots$ Мы будем записывать ряд Стирлинга в форме

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z),$$

$$C_{2k}(z) = a_{2k} z (z^2 - 1) \ldots [z^2 - (k-1)^2](z + k),$$
$$C_{2k+1}(z) = a_{2k+1} z (z^2 - 1) \ldots (z^2 - k^2).$$

Положим также $b_{2k} = (-1)^{k-1} k [(k-1)!]^2 a_{2k}$, $k > 0$ и $b_{2k+1} = (-1)^k (k!)^2 a_{2k+1}$. Тогда при $z \neq 0, \pm 1, \ldots, \pm n, \ldots$ одновременно будут сходиться или расходиться ряды

$$C(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(z), \quad A(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(z),$$

где $A_{2k}(z) = b_{2k}\left(1 + \frac{z + z^2}{k}\right)$, $A_{2k+1}(z) = b_{2k+1}\left(1 + \frac{z^2}{k}\right)$. Заметим прежде всего, что из сходимости ряда $A(z)$ непосредственно следует, что

$$\lim_{k\to\infty} b_{2k} = \lim_{k\to\infty} b_{2k+1} = 0.$$

Это же обстоятельство является также непосредственным следствием сходимости и ряда $C(z)$, так как

$$\lim_{k\to\infty} z \prod_{s=1}^{k-1}\left(1 - \frac{z^2}{s^2}\right)\left(1 + \frac{z}{k}\right) = \lim_{k\to\infty} z \prod_{s=1}^{k-1}\left(1 - \frac{z^2}{s^2}\right) = \frac{\sin \pi z}{\pi} \neq 0,$$
$$z \neq 0, \pm 1, \ldots$$

Рассмотрим теперь разности

$$C_{2k}(z)-\frac{\sin\pi z}{\pi}A_{2k}(z)=$$

$$=\frac{b_{2k}}{\pi}\sin\pi z\left[\left(1-\frac{z}{k}\right)^{-1}\prod_{\nu=k+1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\nu^2}\right)^{-1}-1-\frac{z+z^2}{k}\right],$$

$$C_{2k+1}(z)-\frac{\sin\pi z}{\pi}A_{2k+1}(z)=$$

$$=\frac{b_{2k+1}}{\pi}\sin\pi z\left[\prod_{\nu=k+1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\nu^2}\right)^{-1}-1-\frac{z^2}{k}\right].$$

Положив $|z|=\rho$ и считая, что $k>2\rho$, получим оценку

$$\ln\prod_{\nu=k+1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\nu^2}\right)^{-1}=-\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{z^2}{\nu^2}\right)=$$

$$=z^2\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}-\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\left[\ln\left(1-\frac{z^2}{\nu^2}\right)+\frac{z^2}{\nu^2}\right]=\frac{z^2}{k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

так как

$$\frac{1}{k}-\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}=\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu(\nu-1)}-\frac{1}{\nu^2}\right)=\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2(\nu-1)}<\frac{1}{k^2}$$

и

$$\left|\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\left[\ln\left(1-\frac{z^2}{\nu^2}\right)+\frac{z^2}{\nu^2}\right]\right|<$$

$$<\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\rho^{2n}}{n\nu^{2n}}<\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\frac{\rho^4}{\nu^4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{\nu}\right)^{2n}<$$

$$<2\rho^4\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\frac{1}{\nu^4}<\frac{2\rho^4}{k^2}\sum_{\nu=k}^{\infty}\frac{1}{\nu(\nu+1)}=\frac{2\rho^4}{k^3}.$$

Отсюда следует, что

$$\prod_{\nu=k+1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\nu^2}\right)^{-1}=e^{\frac{z^2}{k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)}=1+\frac{z^2}{k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

и что

$$\left(1-\frac{z}{k}\right)^{-1}\prod_{\nu=k+1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\nu^2}\right)^{-1}=$$

$$=\left[1+\frac{z}{k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right]\left[1+\frac{z^2}{k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right]=1+\frac{z+z^2}{k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Из этих оценок теперь уже следует непосредственно, что при сходимости хотя бы одного из рядов $C(z)$ или $A(z)$ и $z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ мы будем иметь неравенства

$$\left| C_{2k}(z) - \frac{\sin \pi z}{\pi} A_{2k}(z) \right| < |b_{2k}| O\left(\frac{1}{k^2}\right) = o\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

$$\left| C_{2k+1}(z) - \frac{\sin \pi z}{\pi} A_{2k+1}(z) \right| < |b_{2k+1}| O\left(\frac{1}{k^2}\right) = o\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

так как в этом случае $\sin \pi z \neq 0$ и $|b_{2k}| + |b_{2k+1}|$ стремится к нулю с ростом k, причем эти оценки равномерны по z при $|z| \leqslant \rho$.

Из этих неравенств уже следует равномерная сходимость при $|z| \leqslant \rho$, где ρ — любое, ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[C_k(z) - \frac{\sin \pi z}{\pi} A_k(z) \right] = \sum_{k=1}^{\infty} o\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Итак, ряды $C(z)$ и $A(z)$ одновременно сходятся или расходятся. Условимся считать, что в дальнейшем мы будем давать переменной z частные значения, не равные $0, \pm 1, \ldots$, другими словами, такие, что ряд Стирлинга не обрывается и его сходимость эквивалентна сходимости ряда $A(z)$.

Докажем, что если ряд $C(z)$ сходится в двух точках z_0 и z_1, $z_0 \neq z_1$, то он сходится при любом конечном z. В дальнейшем мы неоднократно будем пользоваться теоремой I § 2 настоящей главы, которая утверждает, что из сходимости рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k - c_{k+1}|$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k c_k$. Эту теорему для сокращения записи мы будем называть теоремой умножения.

Итак, допустим, что ряды $C(z_0)$ и $C(z_1)$, $z_0 \neq z_1$, сходятся. Значит, сходятся и ряды $A(z_0)$ и $A(z_1)$. По теореме умножения будут сходиться и ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} [A_{2k}(z_0) + A_{2k+1}(z_0)] \left(1 + \frac{z_1^2}{k}\right),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} [A_{2k}(z_1) + A_{2k+1}(z_1)] \left(1 + \frac{z_0^2}{k}\right),$$

а значит, и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{[A_{2k}(z_0)+A_{2k+1}(z_0)]\left(1+\frac{z_1^2}{k}\right)-\right.$$

$$\left.-[A_{2k}(z_1)+A_{2k+1}(z_1)]\left(1+\frac{z_0^2}{k}\right)\right\}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_{2k}}{k}\left(z_0-z_1+\frac{z_1^2z_0-z_0^2z_1}{k}\right)=$$

$$=(z_0-z_1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_{2k}}{k}-z_0z_1(z_0-z_1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_{2k}}{k^2}.$$

Отсюда уже следует в силу стремления b_{2k} к нулю, что сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{b_{2k}}{k}$. Совершенно так же, умножая члены ряда $A(z_0)$ соответственно на величины $1+\frac{z_1+z_1^2}{k}$, а члены ряда $A(z_1)$ на $1+\frac{z_0+z_0^2}{k}$, что возможно в силу теоремы умножения, и вычитая полученные ряды почленно, мы получим сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{b_{2k+1}}{k}$. Из сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_{2k}}{k},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_{2k+1}}{k},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\left[b_{2k}\left(1+\frac{z_0+z_0^2}{k}\right)+b_{2k+1}\left(1+\frac{z_0^2}{k}\right)\right]$$

непосредственно следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(b_{2k}+b_{2k+1})$, а значит, и равномерная сходимость в любом круге ряда

$$A(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[b_{2k}\left(1+\frac{z+z^2}{k}\right)+b_{2k+1}\left(1+\frac{z^2}{k}\right)\right]$$

при произвольном $|z|\leqslant\rho$, что эквивалентно равномерной сходимости ряда Стирлинга при произвольном z, $|z|\leqslant\rho$. Ряды $A(z)$ и $B(z)$:

$$B(z)=\sum_{k=1}^{\infty}B_k(z),\quad B_{2k}(z)=b_{2k}\left(1+\frac{z}{k}\right),\quad B_{2k+1}(z)=b_{2k+1}$$

по теореме умножения одновременно сходятся или расходятся, так как, например,

$$\sum_{k=k_0}^{\infty}A_k(z)\left(1+\frac{z^2}{\left[\frac{k}{2}\right]}\right)^{-1}=\sum_{k=k_0}^{\infty}B_k(z)+\sum_{k=k_0}^{\infty}b_{2k}O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Так же устанавливается и обратная связь между этими рядами. Итак, $B(z)$ и $C(z)$ одновременно сходятся или расходятся при $z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Положим теперь

$$b_{2k} = \frac{1}{\ln k}, \quad b_{2k+1} = -\frac{1}{\ln k} - \frac{z_0}{k \ln k}, \quad k > 1.$$

Тогда ряд $B(z_0)$ будет сходящимся, так как

$$\sum_{k=2}^{\infty} B_k(z_0) = 0, \quad \frac{1}{\ln\left[\frac{N}{2}\right]}\left(1 + \frac{z_0}{\left[\frac{N}{2}\right]}\right) \to 0,$$

где знак $\left[\frac{N}{2}\right]$ обозначает целую часть от $\frac{N}{2}$, откуда следует сходимость ряда $C(z_0)$. Но если мы допустим, что $C(z)$ сходится в точке z_1, $z_1 \neq z_0$, то мы придем к противоречию, так как тогда будет сходиться ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} [B_k(z_0) - B_k(z_1)] = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z_0 - z_1}{k \ln k}.$$

Итак, *областью сходимости ряда Стирлинга будет вся плоскость без бесконечно удаленной точки. Сходимости этого ряда в одной точке недостаточно для сходимости где-либо еще. Сходящийся в двух точках ряд Стирлинга представляет целую функцию.* Из ранее полученных оценок непосредственно следует, что

$$\left|\left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} \prod_{\nu=1}^{k-1} \left(1 - \frac{z^2}{\nu^2}\right)^{-1}\right| = \left|1 + \frac{z + z^2}{k}\right| + O\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

$$\left|\prod_{\nu=1}^{k-1} \left(1 - \frac{z^2}{\nu^2}\right)^{-1}\right| = \left|1 + \frac{z^2}{k}\right| + O\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

с помощью чего легко получить, что

$$|C_k(z)| - \frac{|\sin \pi z|}{\pi} |A_k(z)| = O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Это последнее соотношение показывает, что ряды $\sum_{k=1}^{\infty} |C_k(z)|$ и $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k(z)|$ одновременно сходятся или расходятся. Легко построить ряд $A(z)$, сходящийся при любом z, сумма модулей членов которого будет при любом z расходящейся. Для этого

достаточно положить

$$b_{2k} = \frac{1}{\ln^2 k}, \quad b_{2k+1} = -\frac{1}{\ln^2 k},$$

Тогда, как легко проверить, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(z)$ будет сходящимся, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k(z)|$ будет расходящимся при любом z. Значит, соответствующий ряд Стирлинга будет при любом z сходиться, но не абсолютно.

Во всех дальнейших теоремах этого параграфа мы будем считать, что ряд Ньютона дается равенством (115), где $a_k = [x_0, x_1, \ldots, x_k]$, и что формула Ньютона имеет вид

$$f(z) = P_n(z) + R_n(z), \tag{121}$$

где

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} [x_0, \ldots, x_k](z - x_0)\ldots(z - x_{k-1}), \tag{122}$$

и вследствие представления (54) гл. I

$$R_n(z) = [z, x_0, \ldots, x_n](z - x_0)\ldots(z - x_n) = \\ = \frac{1}{2\pi i}\int_C \prod_{k=0}^{n} \frac{z - x_k}{\zeta - x_k}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \tag{123}$$

где C — замкнутый спрямляемый контур, лежащий в области регулярности $f(\zeta)$, причем узлы интерполяции $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и z будут внутренними точками конечной области, границей которой является контур C. Мы переходим к рассмотрению различных типов расположения узлов интерполяции и установлению достаточных условий представимости в некоторой области функции $f(z)$ рядом (115) или сходимости к $f(z)$ в некоторой области подпоследовательности многочленов $P_n(z)$, имеющих вид (122).

2. Случай конечного числа предельных точек последовательности узлов интерполяции на конечной части плоскости. Займемся теперь случаем, когда последовательность узлов интерполяции $\{x_k\}$ имеет конечное число предельных точек $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$. Мы докажем две теоремы, одна из которых относится к сходимости подпоследовательности частных сумм ряда Ньютона, другая — к сходимости самого ряда. Для того чтобы несколько облегчить доказательство этих теорем, мы выделим предварительные рассуждения и условимся о некоторых обозначениях.

Возьмем $\varepsilon_0 > 0$ настолько малым, чтобы круги

$$|z - a_s| \leqslant \varepsilon, \quad s = 1, 2, \ldots, \nu, \quad \varepsilon < \varepsilon_0, \tag{124}$$

лежали вне друг друга. Для любых $m, n > m$ и $\varepsilon < \varepsilon_0$ определим число $\alpha_{n,m,\varepsilon}^{(s)}$ как отношение числа точек из $x_m, \ldots, x_n$, попавших в круг $|z - a_s| \leqslant \varepsilon$, к $n - m + 1$. Будем рассматривать ν чисел $\alpha_{n,m,\varepsilon}^{(1)}, \ldots, \alpha_{n,m,\varepsilon}^{(\nu)}$ как координаты точки в ν-мерном пространстве. Обозначим точки этого пространства через $\tau = \tau(\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu)$.

При фиксированных m и ε точки $\tau_{n,m,\varepsilon} = \tau(\alpha_{n,m,\varepsilon}^{(1)}, \ldots, \alpha_{n,m,\varepsilon}^{(\nu)})$ лежат внутри ν-мерного единичного куба, так как $\alpha_{n,m,\varepsilon}^{(s)} \geqslant 0$ и $\sum_{s=1}^{\nu} \alpha_{n,m,\varepsilon}^{(s)} \leqslant 1$. Как всякое ограниченное бесконечное множество, множество точек $\tau_{n,m,\varepsilon}$ имеет предельные точки. *Множество этих предельных точек обозначим* L. Как нетрудно убедиться, оно не зависит от m и ε. Для каждой точки τ этого множества существует последовательность $\{n_k\}$, такая, что $\tau_{n_k,m,\varepsilon} \to \tau$ при $k \to \infty$. Заметим, далее, что если $\tau = \tau(\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu)$ — точка этого множества, то $\alpha_s \geqslant 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu = 1$.

Изучим теперь *множества* $\overline{\Delta}(\tau, r)$ — *множества точек, удовлетворяющих неравенству*

$$|(z - a_1)^{\alpha_1} \ldots (z - a_\nu)^{\alpha_\nu}| \leqslant r, \quad \alpha_s \geqslant 0, \quad \sum_{s=1}^{\nu} \alpha_s = 1. \tag{125}$$

Как нетрудно убедиться, $\overline{\Delta}(\tau, r)$ состоит не более чем из ν областей, каждая из которых содержит внутри себя по меньшей мере одну из точек a_s. Далее, если $r_1 < r_2$, то $\overline{\Delta}(\tau, r_1)$ лежит строго внутри $\overline{\Delta}(\tau, r_2)$. Естественно также ввести такое обозначение (z и τ заданы):

$$r(\tau, z) = |(z - a_1)^{\alpha_1} \ldots (z - a_\nu)^{\alpha_\nu}|. \tag{126}$$

Введем еще одно обозначение. Пусть нам дана некоторая область D. *Обозначим через* $R(\tau, D)$ *верхнюю грань чисел* ρ, *таких, что* $\overline{\Delta}(\tau, \rho)$ *лежит внутри* D.

Теперь мы легко сформулируем и докажем первую из теорем.

Теорема II. *Пусть* $f(z)$ — *функция, аналитическая внутри области* D. $\{x_k\}$ — *последовательность узлов интерполяции, имеющая конечное число предельных точек* $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ *причем как сами узлы интерполяции, так и их предельные точки лежат строго внутри* D. $\tau = \tau(\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu)$ — *точка множества* L, *а* $\{n_k\}$ — *соответствующая этой точке последовательность. Тогда для* z, *принадлежащих множеству* $(\overline{\Delta}\tau, r)$, $r < R(\tau, D)$,

$$\lim_{k \to \infty} P_{n_k}(z) = f(z),$$

где $P_{n_k}(z)$ — n_k*-й интерполяционный многочлен Ньютона.*

Доказательство. Как нам уже известно, остаточный член ряда Ньютона $R_n(z) = f(z) - P_n(z)$ можно записать в виде

$$R_n(z) = \frac{(z-x_0)\ldots(z-x_n)}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-x_0)\ldots(\zeta-x_n)(\zeta-z)}; \tag{127}$$

контур C лежит внутри D и содержит внутри себя все точки $\{x_k\}$ и точку z.

Оценим $R_{n_k}(z)$. Зададимся произвольно малыми ε и δ и выберем m и k_0 так, чтобы

$$|x_k - a_{i_k}| < \varepsilon \text{ при } k > m \ (i_k = 1, 2, \ldots, \nu),$$

$$(1-\delta)\,\alpha_s < \alpha^{(s)}_{n_k,\,m,\,\varepsilon} < (1+\delta)\,\alpha_s \text{ при } k > k_0.$$

Введем обозначения: d — диаметр области; $d_1 = \max(d, 1)$; ρ — наименьшее расстояние от точек $x_0, x_1, \ldots, z$ до контура C; $\rho_1 = \min(\rho, 1)$. Теперь нужную нам оценку провести легко. Имеем

$$|R_n(z)| \leqslant \frac{lM}{2\pi}\cdot\frac{|(z-x_0)\ldots(z-x_n)|}{\min\limits_{\zeta\in C}|(\zeta-z)(\zeta-x_0)\ldots(\zeta-x_n)|} \tag{128}$$

($M = \max\limits_{\zeta\in C}|f(z)|$, l — длина C). Но

$$\min_{\zeta\in C}|(\zeta-z)(\zeta-x_0)\ldots(\zeta-x_n)| \geqslant$$

$$\geqslant \rho_1^{m+1}\min_{\zeta\in C}|(\zeta-x_m)\ldots(\zeta-x_n)|. \tag{129}$$

Далее, при $k \geqslant m$

$$|\zeta - x_k| = |\zeta - a_{i_k} - (x_k - a_{i_k})| \geqslant$$

$$\geqslant |\zeta - a_{i_k}|\left(1 - \frac{|x_k - a_{i_k}|}{|\zeta - a_{i_k}|}\right) > |\zeta - a_{i_k}|\left(1 - \frac{\varepsilon}{\rho_1}\right). \tag{130}$$

Согласно определению $\alpha^{(s)}_{n,\,m,\,\varepsilon}$

$$\min_{\zeta\in C}|(\zeta-x_m)\ldots(\zeta-x_n)| > \left(1-\frac{\varepsilon}{\rho_1}\right)^{n-m+1}\times$$

$$\times\left\{\min_{\zeta\in C}|(\zeta-a_1)^{\alpha^{(1)}_{n,\,m,\,\varepsilon}}\ldots(\zeta-a_\nu)^{\alpha^{(\nu)}_{n,\,m,\,\varepsilon}}|\right\}^{n-m+1}; \tag{131}$$

положим теперь $n = n_k$. Тогда при $k > k_0$

$$|\zeta - a_s|^{\alpha^{(s)}_{n_k,\,m,\,\varepsilon}} > |\zeta - a_s|^{\alpha_s}\rho_1^{\delta\alpha_s} \tag{132}$$

и, следовательно,

$$\min_{\zeta \in C} |(\zeta - a_1)^{\alpha^{(1)}_{n_k, m, \varepsilon}} \ldots (\zeta - a_\nu)^{\alpha^{(\nu)}_{n_k, m, \varepsilon}}| >$$
$$> \rho_1^\delta \min_{\zeta \in C} |(\zeta - a_1)^{\alpha_1} \ldots (\zeta - a_\nu)^{\alpha_\nu}| = \rho_1^\delta R(\tau, C). \quad (133)$$

Таким образом, при $k > k_0$

$$\min_{\zeta \in C} |(\zeta - z)(\zeta - x_0) \ldots (z - x_{n_k})| >$$
$$> \rho_1^{m+1} \rho_1^{\delta(n_k - m + 1)} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\rho_1}\right)^{n_k - m + 1} [R(\tau, C)]^{n_k - m + 1}. \quad (134)$$

Перейдем к оценке числителя. Предположим для простоты, что $z \neq a_s$ $(s = 1, 2, \ldots, \nu)$. Обозначим

$$\rho_2 = \min(|z - a_1|, \ldots, |z - a_\nu|).$$

Совершенно аналогично предыдущему получим

$$|(z - x_0) \ldots (z - x_n)| \leqslant d_1^m |(z - x_m) \ldots (z - x_n)| <$$
$$< d_1^m \left(1 + \frac{\varepsilon}{\rho_2}\right)^{n-m+1} (z - a_1)^{\alpha^{(1)}_{n, m, \varepsilon}} \ldots (z - a_\nu)^{\alpha^{(\nu)}_{n, m, \varepsilon}}|^{n-m+1}. \quad (135)$$

Точно так же при $k > k_0$

$$(z - x_0) \ldots (z - x_{n_k})| <$$
$$< d_1^m d_1^{\delta(n_k - m + 1)} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\rho_2}\right)^{n_k - m + 1} [r(\tau, z)]^{n_k - m + 1}. \quad (136)$$

Отсюда

$$|R_n(z)| <$$
$$< \frac{lM}{2\pi} \frac{d_1^{m + \delta(n_k - m + 1)}}{\rho_1^{m + 1 + \delta(n_k - m + 1)}} \left(\frac{1 + \frac{\varepsilon}{\rho_2}}{1 - \frac{\varepsilon}{\rho_1}}\right)^{n_k - m + 1} \left[\frac{r(\tau, z)}{R(\tau, C)}\right]^{n_k - m + 1}. \quad (137)$$

Но по условию $r(\tau, z) < R(\tau, D)$, значит, можно выбрать контур C так близко к границе области D, чтобы $r(\tau, z) < R(\tau, C)$, а так как ε и δ можно выбрать сколь угодно малыми, то отсюда следует, что

$$\lim_{k \to \infty} |R_{n_k}(z)| = 0, \quad \text{т. е. } f(z) = \lim_{k \to \infty} P_{n_k}(z).$$

Это доказано нами для точек z, не совпадающих ни с одной из точек a_s.

Если $z = a_s$ лежит внутри $\Delta(\tau, R)$, то мы можем взять, окружность $|z - a_s| = \gamma$, на которой $R_{n_k}(z)$ равномерно по z стремится к нулю. Но по принципу максимума $R_{n_k}(z)$ стремится к нулю равномерно и по всем z внутри круга $|z - a_s| \leqslant \gamma$.

Это и доказывает наше утверждение в общем случае.

Вторая теорема несколько сложнее и потребует от нас более тщательного изучения множеств $\overline{\Delta}(\tau, r)$.

Отметим прежде всего такое свойство множеств $\overline{\Delta}(\tau, r)$: *если* $a_s \neq 0$, *то* $\overline{\Delta}(\tau, r)$ *содержит внутри себя круг* $|z - a_s| < \rho$, ρ — *радиус этого круга — удовлетворяет уравнению*

$$\rho^{\alpha_s}(K+\rho)^{1-\alpha_s} = r, \qquad K = \max_{1 \leqslant i \leqslant \nu} |a_i - a_s|.$$

Действительно, если $|z - a_s| < \rho$, то, так как $\alpha_1 + \ldots + \alpha_\nu = 1$,

$$|(z-a_1)^{\alpha_1} \ldots (z-a_\nu)^{\alpha_\nu}| \leqslant (|z-a_s| + |a_1 - a_s|)^{\alpha_1} \ldots$$
$$\ldots (|z-a_s| + |a_\nu - a_s|)^{\alpha_\nu} \leqslant \rho^{\alpha_s}(K+\rho)^{1-\alpha_s}.$$

Заметим, что если $r \to \infty$, то ρ также стремится к бесконечности. Из этого немедленно следует, что если D — некоторая замкнутая область, отличная от всей плоскости, а τ — любая точка L, то числа $R(\tau, D)$ ограничены в совокупности.

Пусть теперь $\overline{\Delta}_\alpha$ — общая часть всех множеств $\overline{\Delta}(\tau, \alpha R)$, где τ — любая точка L, $R = R(\tau, D)$, $\alpha > 0$ — некоторое фиксированное число. $\overline{\Delta}_\alpha$ состоит не более чем из ν замкнутых областей. Соответствующие открытые множества будем обозначать Δ_α. Из отмеченного выше свойства множеств $\overline{\Delta}(\tau, r)$ следует, что *если* α *взять достаточно большим, то* $\overline{\Delta}_\alpha$ *будет содержать любую конечную часть плоскости*. Отметим некоторые свойства множеста $\overline{\Delta}_\alpha$, непосредственно следующие из свойств $\overline{\Delta}(\tau, r)$ и из замкнутости L.

1. *Если* $\alpha_1 < \alpha_2$, *то* $\overline{\Delta}_{\alpha_1} \subset \Delta_{\alpha_2}$.
2. *Если* $z \in \overline{\Delta}_\alpha$, *то для любого* $\tau \in L$, $r(\tau, z) \leqslant \alpha R(\tau, D)$.
3. *Если* $z \in \Delta_{\alpha_1}$, *то найдется* $\alpha_2 < \alpha_1$, *такое, что* $z \in \overline{\Delta}_{\alpha_2}$.

Введем в рассмотрение множества $\overline{D}_\alpha$, устроенные следующим образом. Пусть дана область D; возьмем область $\overline{D}' \subset D$ и содержащую строго внутри все точки $\{x_k\}$ и $a_1, \ldots, a_\nu$. Положим

$$\overline{D}_\alpha = \overline{D}' + \sum_{\tau \in L} \overline{\Delta}(\tau, \alpha R), \qquad R = R(\tau, D).$$

Из построения легко убедиться, что $\overline{D}_\alpha$ — замкнутая область, обладающая свойствами:

1'. $\overline{D}_\alpha \subset D$, $\quad 0 \leqslant \alpha < 1$.

2'. $D_{\alpha_1} \subset \overline{\Delta}_{\alpha_2}$, $\quad \alpha_1 > \alpha_2$.

3'. $R(\tau, D_\alpha) = \alpha R(\tau, D)$.

Границу D_α обозначим C_α.

Теперь мы можем сформулировать и доказать теорему о сходимости ряда Ньютона.

Теорема II'. *Если последовательность $\{x_k\}$ узлов интерполяции имеет конечное число предельных точек и D — область регулярности функции $f(z)$ содержит внутри себя все точки $\{x_k\}$ и их предельные точки $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$, то ряд Ньютона сходится в каждой точке множества Δ_1.*

Доказательство. Определим множество L_δ для любого $\delta > 0$ следующим образом. Если $\tau = \tau(\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu)$ — точка множества L, то все точки с координатами $x_1, \ldots, x_\nu$, удовлетворяющими неравенствам

$$(1-\delta)\alpha_s < x_s < (1+\delta)\alpha_s \quad (s = 1, 2, \ldots, \nu),$$

принадлежат L_δ. Так как при любых фиксированных m и ε множество L есть множество предельных точек $\tau_{n,m,\varepsilon}$, то найдется такое n_0, зависящее от m, ε и δ, что при $n > n_0$

$$\tau_{n,m,\varepsilon} \in L_\delta .$$

Рассмотрим остаточный член $R_n(z)$:

$$R_n(z) = \frac{(z-x_0)\ldots(z-x_n)}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-x_0)\ldots(\zeta-x_n)(\zeta-z)}$$

(C лежит внутри D и содержит точки $\{x_k\}$ и z). Зададимся ε и δ и выберем m, n_0 и $\tau^{(n)} \in L$, такие, что

$$|x_k - a_{i_k}| < \varepsilon \quad \text{при} \quad k \geqslant m \qquad (i_k = 1, 2, \ldots, \nu),$$

$$(1-\delta)\alpha_s^{(n)} < \alpha_{n,m,\varepsilon}^{(s)} < (1+\delta)\alpha_s^{(n)} \quad \text{при } n > n_0, \ \tau^{(n)} = \tau(\alpha_1^{(n)}, \ldots, \alpha_\nu^{(n)}).$$

Совершенно аналогично тому, что делалось при доказательстве теоремы II, получим при $n > n_0$

$$|R_n(z)| \leqslant \frac{Ml}{2\pi} \cdot \frac{|(z-x_0)\ldots(z-x_n)|}{\min\limits_{\zeta\in C}|(\zeta-z)(\zeta-x_0)\ldots(\zeta-x_n)|},$$

$$\min_{\zeta\in C}|(\zeta-z)(\zeta-x_0)\ldots(\zeta-x_n)| >$$

$$> \rho_1^{m+1}\rho_1^{\delta(n-m+1)}\left(1-\frac{\varepsilon}{\rho_1}\right)^{n-m+1}[R(\tau^{(n)}, C)]^{n-m+1}, \tag{138}$$

$$|(z-x_0)\ldots(z-x_n)| <$$

$$< d_1^m d^{\delta(n-m+1)}\left(1+\frac{\varepsilon}{\rho_2}\right)^{n-m+1}[r(\tau^{(n)}, z)]^{n-m+1}, \tag{139}$$

или

$$|R_n(z)| < \frac{Ml}{2\pi\rho_1}\left(\frac{d_1}{\rho_1}\right)^{m+\delta(n-m+1)}\left(\frac{1+\frac{\varepsilon}{\rho_2}}{1-\frac{\varepsilon}{\rho_1}}\right)^{n-m+1}\left[\frac{r(\tau^{(n)}, z)}{R(\tau^{(n)}, C)}\right]^{n-m+1}. \quad (140)$$

Но $z \in \Delta_1$, поэтому в силу свойств 2 и 3 найдется такое $\alpha_1 < 1$, что

$$r(\tau^{(n)}, z) < \alpha_1 R(\tau^{(n)}, D)$$

(α_1 от n не зависит). Возьмем α_2, $\alpha_1 < \alpha_2 < 1$ и выберем за контур интегрирования ${}_{\alpha}C_{\alpha_2}$ границу $\overline{D}_{\alpha_2}$. Согласно свойству 3′

$$R(\tau^{(n)}, C_{\alpha_2}) = \alpha_2 R(\tau^{(n)}, D)$$

(α_2 от n не зависит). Следовательно, при $n > n_0$

$$|R_n(z)| < \frac{Ml}{2\pi\rho_1}\cdot\left(\frac{d_1}{\rho_1}\right)^{m+\delta(n-m+1)}\left(\frac{1+\frac{\varepsilon}{\rho_2}}{1-\frac{\varepsilon}{\rho_1}}\right)^{n-m+1}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{n-m+1}. \quad (141)$$

Так как α_1, α_2 и m — фиксированные числа, а ε и δ могли быть выбраны сколь угодно малыми, то отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} R_n(z) = 0 \quad \text{при} \quad z \in \Delta_1,$$

т. е. в каждой точке множества Δ_1 ряд Ньютона сходится. Это и доказывает нашу теорему.

В частном случае, когда множество L состоит только из одной точки $\tau = \tau(\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu)$, областью сходимости ряда (115) будет множество $\Delta(\tau, R)$. Действительно, по теореме II′ ряд (115) будет сходиться в точках множества $\Delta(\tau, R)$ к $f(z)$. Допустим теперь, что ряд (115) сходится в точке z_0, лежащей вне множества $\overline{\Delta}|\tau, R|$, и что z_0 не совпадает ни с одной из точек $\{x_k\}$, $a_1, \ldots, a_\nu$. Тогда

$$|z_0 - a_1|^{\alpha_1}\ldots|z_0 - a_\nu|^{\alpha_\nu} = R_1, \quad R_1 > R(\tau, D),$$

и ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n(z_0)\frac{Q_n(z)}{Q_n(z_0)}, \qquad Q_n(z) = \prod_{k=0}^{n-1}(z - x_k),$$

будет равномерно сходиться в точках множества $\overline{\Delta}(\tau, R_2)$,

$R(\tau, D) \leqslant R_2 < R_1$, так как в силу его сходимости при $z = z_0$

$$\lim_{n\to\infty} a_n Q_n(z_0) = 0$$

и

$$\left|\frac{Q_n(z)}{Q_n(z_0)}\right| < \left(\frac{1+\frac{\varepsilon}{\rho_2}}{1-\frac{\varepsilon}{\rho_0}}\right)^{n-m+1} \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{n-m+1}$$

при $n > n_0$.

Так как ряд многочленов, равномерно сходящийся в области $\Delta(\tau, R_2)$, должен сходиться к регулярной в этой области функции, то $f(z)$ должна быть регулярна в $\Delta(\tau, R_2)$, что противоречит максимальности области $\Delta(\tau, R)$, $R = R(\tau, D)$. Значит, ряд (115) не может сходиться ни в одной точке дополнения к $\bar{\Delta}(\tau, R)$, не совпадающей с каким-либо узлом интерполяции или, может быть, предельной точкой узлов интерполяции. В другом частном случае, когда $\nu = 1$, область $\bar{\Delta}(\tau, R)$ будет кругом $|z - a_1| \leqslant R$, на границе которого должна лежать хотя бы одна особая точка $f(z)$.

В этом случае ряд (115) ведет себя так же, как ряд Тейлора.

3. Интерполяционный процесс Ньютона в случае, когда узлы интерполяции имеют точку накопления только в бесконечности. Выше мы рассматривали случай нескольких предельных точек у последовательности узлов интерполяции, причем эти предельные точки были внутренними точками области регулярности интерполируемой функции. Теперь мы рассмотрим случай одной предельной точки, являющейся особой точкой интерполируемой функции $f(z)$. Мы ограничимся при этом рассмотрением только целых функций.

Прежде всего докажем общую теорему III.

Теорема III. *Если $n(r)$ — функция плотности последовательности узлов интерполяции $\{x_n\}$, $|x_n| = \rho_n$, $\rho_n \leqslant \rho_{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = \infty$, $f(z)$ — целая функция с максимумом модуля $M(r)$ и неравенства*

$$\ln M(r) < \lambda n(\theta r), \tag{142}$$

$$0 < \lambda < \ln\frac{1-\theta}{\theta} \tag{143}$$

при некотором фиксированном θ, $0 < \theta < \frac{1}{2}$, будут выполняться для последовательности неограниченно растущих значений $r_k = \theta^{-1}\rho_{n_k}$, $\rho_{n_k} < \rho_{n_{k+1}}$, $k = 0, 1, \ldots$, то последовательность многочленов $P_{n_k}(z)$ [см. (122)] будет при неограниченном росте k равномерно сходиться к $f(z)$ в любом круге конечного радиуса. Если же

равенства (142) *будут выполнены для любого* $r > r_0$, *то в любом круге конечного радиуса ряд Ньютона* (115) *будет равномерно сходиться к* $f(z)$.

Доказательство. Оценим величину $|R_n(z)|$ при $|z| \leqslant \rho$, взяв за контур интегрирования C в представлении (123) окружность $|\zeta| = r$, $r > \rho_n > \rho$. Положив $|x_k| = \rho_k$, $k = 0, 1, \ldots$, получим

$$|R_n(z)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{|\zeta|=r} \prod_{k=0}^{n} \frac{z - x_k}{\zeta - x_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\right| <$$

$$< \frac{r}{r-\rho} \prod_{k=0}^{n} \frac{\rho + \rho_k}{r - \rho_k} M(r) < \frac{r}{r-\rho} \frac{(\rho + \rho_n)^{n+1}}{(r - \rho_n)^{n+1}} M(r). \qquad (144)$$

Положим $n = n_k$, $k = 0, 1, \ldots$, и $r = \theta^{-1}\rho_{n_k}$. Из неравенства (144) мы придем при $n_k > n_0$ к неравенству

$$|R_{n_k}(z)| < \frac{\rho_{n_k}}{\rho_{n_k} - \theta\rho} \frac{\left(1 + \frac{\rho}{\rho_{n_k}}\right)^{n_k+1}}{\left(\frac{1}{\theta} - 1\right)^{n_k+1}} M\left(\frac{\rho_{n_k}}{\theta}\right) <$$

$$< 2\exp\left\{\frac{\rho(n_k+1)}{\rho_{n_k}} - (n_k+1)\ln\frac{1-\theta}{\theta} + \lambda\right\} n(\rho_{n_k}) <$$

$$< 2\exp\left\{\frac{\rho(n_k+1)}{\rho_{n_k}} - (n_k+1)\left[\ln\frac{1-\theta}{\theta} - \lambda\right]\right\}, \qquad (145)$$

так как $n(\rho_{n_k}) = n_k + 1$ при $\rho_{n_k} < \rho_{n_k+1}$. Неравенство (145) и доказывает первую часть нашей теоремы. Для доказательства второй ее части выбираем число η из интервала $\frac{1}{\theta} > \eta > e^{\lambda} + 1$, что можно сделать, так как по условию нашей теоремы $\frac{1}{\theta} > e^{\lambda} + 1$, и полагаем $r = \eta\rho_n$; при $n > n_0$ и $|z| \leqslant \rho$ мы получим из (144) неравенство

$$|R_n(z)| < \frac{\eta\rho_n}{\eta\rho_n - \rho} \frac{\left(1 + \frac{\rho}{\rho_n}\right)^{n+1}}{(\eta - 1)^{n+1}} M(\eta\rho_n) < 4e^{\frac{\rho^n}{\rho^n} - n[\ln(\eta-1) - \lambda]}, \qquad (146)$$

так как

$$\ln M(\eta\rho_n) < \lambda n(\eta\theta\rho_n) < \lambda n,$$

вследствие того, что $\eta\theta < 1$. Но в неравенстве (146) $\ln(\eta - 1) - \lambda > 0$, так как $\eta > e^{\lambda} + 1$. Значит, неравенство (146), справед-

ливое при любом $n > n_0$, доказывает равномерную сходимость $P_n(z)$ к $f(z)$ в круге $|z| \leqslant \rho$.

М. В. Келдыш и И. И. Ибрагимов, доказавшие эту теорему в несколько иной формулировке, построили пример, показывающий, что константу θ, $0 < \theta < \frac{1}{2}$ нельзя, вообще говоря, брать из интервала $\frac{1}{2} < \theta < 1$[1]).

Прямым следствием теоремы III является теорема IV.

Теорема IV. *Пусть $f(z)$ — целая функция порядка не выше ρ; μ — показатель сходимости последовательности $\rho_n = |x_n|$. Если $\mu > \rho$, то существует последовательность $\{n_k\}$, такая, что многочлены $P_{n_k}(z)$ равномерно сходятся к $f(z)$ в круге $|z| \leqslant R$ при любом фиксированном R. Если же $\rho < \nu_1$, где ν_1 — нижняя плотность последовательности $\rho_k = |x_k|$, то ряд* (115) *равномерно сходится к $f(z)$ в любом конечном круге.*

Доказательство. Мы знаем (см. § 1, п. 7), что $\mu = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\ln n(\rho_n)}{\ln \rho_n}$.

Возьмем последовательность $\{n_k\}$, по которой достигается этот верхний предел. Можно считать, что $\rho_{n_k} < \rho_{n_k+1}$.

При $\varepsilon < \frac{\mu - \rho}{4}$ и $k > k_0$ мы будем иметь неравенство

$$M(\theta^{-1}\rho_{n_k}) < e^{(\theta^{-1}\rho_{n_k})^{\rho+\varepsilon}} < e^{\rho_{n_k}^{\mu-\varepsilon}} < e^{n(\rho_{n_k})}$$

для любого $\theta > 0$, т. е. будут выполнены условия первой части теоремы III. Далее, если

$$\rho < \nu_1 = \underline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{\ln n(r)}{\ln r},$$

то при $0 < \varepsilon < \frac{\nu_1 - \rho}{4}$ и $r > r_0$

$$M(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}} < e^{(\theta r)^{\nu_1-\varepsilon}} < e^{n(\theta r)} \tag{147}$$

для любого фиксированного $\theta > 0$. Последние неравенства показывают, что в этом случае выполнены условия второй части теоремы III.

Следующая далее теорема V значительно точнее теоремы III, но менее наглядна и проста. Эта теорема относится только к сходимости ряда (115).

---

[1]) И. И. Ибрагимов и М. В. Келдыш, Об интерполяции целых функций, Матем. сборник 20 (62), 1947, стр. 283.

Теорема V. *Пусть $M(r)$ — максимум модуля целой функции $f(z)$, $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ — последовательность узлов интерполяции $|x_n| = \tau_n$, $\tau_{n+1} \geqslant \tau_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = \infty$. Пусть, далее, $\tau_n \leqslant \rho_n$, $n(r)$ — функция плотности последовательности $\{\rho_n\}$. Тогда, если*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\ln M(2\rho_n+\rho) - 2(\rho_n+\rho)\int_{\rho_0}^{\rho_n}\frac{n(t)\,dt}{(\rho+t)(2\rho_n+\rho-t)}\right] = -\infty, \quad (148)$$

каково бы ни было $\rho > 0$, то $f(z)$ может быть представлена рядом (115), *равномерно сходящимся в любой конечной части плоскости z.*

Доказательство. Если воспользоваться формулами

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\ln(r-\rho_k) &= (n+1)\ln(r-\rho_n) + \int_{\rho_0}^{\rho_n}\frac{n(t)\,dt}{r-t}, \quad r>\rho_n,\\ \sum_{k=0}^{n}\ln(\rho+\rho_k) &= (n+1)\ln(\rho+\rho_n) - \int_{\rho_0}^{\rho_n}\frac{n(t)}{\rho+t}\,dt, \quad \rho>0,\end{aligned}\right\} \quad (149)$$

получаемыми интегрированием на интервалах (ρ_k, ρ_{k+1}) [на этих интервалах $n(t)$ постоянна], и неравенством (144), то мы получим для $\ln|R_n(z)|$, $|z| \leqslant \rho < \rho_n$, неравенства

$$\ln|R_n(z)| < -\ln\left(1-\frac{\rho}{r}\right) + \ln M(r) + \sum_{k=0}^{n}\ln\frac{\rho+\tau_k}{r-\tau_k} \leqslant$$

$$\leqslant -\ln\left(1-\frac{\rho}{r}\right) + \ln M(r) + \sum_{k=0}^{n}\ln\frac{\rho+\rho_k}{r-\rho_k} = -\ln\left(1-\frac{\rho}{r}\right) + \ln M(r) +$$

$$+ (n+1)\ln\frac{\rho+\rho_n}{r-\rho_n} - (\rho+r)\int_{\rho_0}^{\rho_n}\frac{n(t)\,dt}{(\rho+t)(r-t)}, \quad (150)$$

где $r > \rho_n$ произвольно, так как при $\tau_k \leqslant \rho_k$ и $r > \rho_k$

$$\ln\frac{\rho+\tau_k}{r-\tau_k} = \ln\left(\frac{\rho+r}{r-\tau_k} - 1\right) \leqslant \ln\frac{\rho+\rho_k}{r-\rho_k}. \quad (151)$$

Полагая $r = 2\rho_n + \rho$ и принимая во внимание, что

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(1-\frac{\rho}{2\rho_n+\rho}\right) = 0, \quad (152)$$

мы и получаем теорему V.

Следующая теорема показывает, что условие (148) теоремы V, вообще говоря, не может быть существенно ослаблено, если мы характеризуем рост $f(z)$ функцией $M(r)$.

Теорема VI. *Если целая функция $f(z)$ представляется рядом* (115), *сходящимся при любом действительном z, то ее рост вдоль положительной части действительной оси в точках $x = 2\rho_k + \rho$, где $\rho > 0$ — любое число, а $\rho_k = x_k$, $\rho_k \leqslant \rho_{k+1}$, $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_k = \infty$ — узлы интерполяции, подчиняется условию*

$$\ln|f(2\rho_n+\rho)| - \ln\rho_n - 2(\rho_n+\rho)\int\limits_{\rho_0}^{\rho} \frac{n(t)\,dt}{(\rho+t)(2\rho_n+\rho-t)} < C(\rho), \quad (153)$$

где $C(\rho)$ не зависит от n, а $n(t)$ — функция плотности последовательности $\{\rho_k\}$.

Доказательство. Если ряд (115) сходится при любом действительном x, то, положив $x = -\rho'$, $\rho' = \rho + 1$, $\rho > 0$,

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k (\rho' + \rho_0)\ldots(\rho' + \rho_{k-1}), \qquad \sigma_0 = a_0, \qquad \sigma_{-1} = 0,$$

имеем при любом n неравенство $|\sigma_n| < C(\rho)$, где $C(\rho)$ — некоторая постоянная. Произведя преобразование Абеля, получим, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-\rho_0)\ldots(x-\rho_{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k (\rho' + \rho_0)\ldots(\rho' + \rho_{k-1}) \prod_{\nu=0}^{k-1} \frac{\rho_\nu - x}{\rho' + \rho_\nu} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\sigma_k - \sigma_{k-1}) \prod_{\nu=0}^{k-1} \frac{\rho_\nu - x}{\rho' + \rho_\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\rho_k - x}{\rho' + \rho_k}\right) \sigma_k \prod_{\nu=0}^{k-1} \frac{\rho_\nu - x}{\rho' + \rho_\nu} =$$

$$= (\rho' + x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma_k}{\rho' + \rho_k} \prod_{\nu=0}^{k-1} \frac{\rho + \rho_\nu}{\rho' + \rho_\nu} \prod_{\nu=0}^{k-1} \frac{\rho_\nu - x}{\rho + \rho_\nu}.$$

Но $\rho' = \rho + 1$, $\rho > 0$ и $\rho_k \geqslant 0$, $k = 0, 1, \ldots$, поэтому

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\rho' + \rho_{k+1}} \prod_{\nu=0}^{k} \frac{\rho + \rho_\nu}{\rho' + \rho_\nu} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\prod_{\nu=0}^{k} \frac{\rho + \rho_\nu}{\rho' + \rho_\nu} - \prod_{\nu=0}^{k+1} \frac{\rho + \rho_\nu}{\rho' + \rho_\nu}\right] =$$

$$= \frac{\rho + \rho_0}{\rho' + \rho_0} - \prod_{\nu=0}^{N} \frac{\rho + \rho_\nu}{\rho' + \rho_\nu} < \frac{\rho + \rho_0}{\rho' + \rho_0} < 1. \quad (154)$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$|f(x)| < 2C(\rho)(\rho + 1 + x) \max_{0<k<\infty} \prod_{\nu=0}^{k} \frac{|x - \rho_\nu|}{\rho + \rho_\nu}, \quad (155)$$

так как $|\sigma_k| < C(\rho)$ ($C(\rho)$ зависит только от ρ). Полагая $x = 2\rho_n + \rho$ и принимая во внимание, что

$$\frac{\rho_n + \rho}{\rho + \rho_\nu} \geqslant 1, \qquad \nu \leqslant n, \qquad \frac{\rho_n + \rho}{\rho + \rho_\nu} \leqslant 1, \qquad \nu \geqslant n,$$

мы видим, что максимум в правой части неравенства (155) достигается при $k = n$, откуда и следует неравенство

$$\ln |f(2\rho_n + \rho)| < C_0(\rho) + \ln(2\rho_n + 2\rho + 1) + \sum_{\nu=0}^{n} \ln \frac{2\rho_n + \rho - \rho_\nu}{\rho + \rho_\nu}.$$

Из этого неравенства, если воспользоваться формулами (149), следует неравенство (153) теоремы VI.

Рассмотрим одно следствие из теоремы V. *Пусть $M(r)$ — максимум модуля функции $f(z)$ — удовлетворяет неравенству*

$$\ln M(r) < (\sigma + \varepsilon) r^{\frac{1}{\mu}}, \qquad \mu > 0, \tag{156}$$

при любом $\varepsilon > 0$ и $r > r_0(\varepsilon)$, другими словами, пусть $f(z)$ — целая функция порядка не выше $\frac{1}{\mu}$ с типом, не превышающим σ.

Пусть также последовательность $|x_k| = \tau_k$ удовлетворяет условиям

$$\tau_{n-1} \leqslant \tau_n < \lambda n^\mu, \qquad \varepsilon > 0, \qquad n > n_0. \tag{157}$$

Тогда имеет место теорема VII.

Теорема VII. *Пусть выполнены условия* (156) *и* (157) *относительно целой функции $f(z)$ и последовательности узлов интерполяции $\{x_k\}$. Тогда $f(z)$ представляется рядом Ньютона* (115), *если имеет место неравенство*

$$\sigma (2\lambda)^{\frac{1}{\mu}} < 2 \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{\mu} - 1}}{2 - t} dt, \tag{158}$$

причем это неравенство нельзя заменить более слабым без изменения остальных условий теоремы.

Доказательство. Эта теорема является простым следствием теоремы V.

В самом деле, возьмем $\rho_k = \tau_k = |x_k|$. Согласно (157) $n(r) > \left(\frac{r}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\mu}}$ при $r > r_0$. Рассмотрим выражение

$$U_n(\rho) = \ln M(\rho + 2\rho_n) - 2(\rho + \rho_n) \int_{\rho_0}^{\rho_n} \frac{n(t)\, dt}{(\rho + t)(2\rho_n + \rho - t)} \tag{159}$$

Согласно (156) при любом фиксированном ρ

$$\ln M(\rho+2\rho_n) \leqslant (2\rho_n+\rho)^{\frac{1}{\mu}}(\sigma+\varepsilon_n) \leqslant 2^{\frac{1}{\mu}}\rho_n^{\frac{1}{\mu}}(\sigma+\varepsilon_n'), \quad \varepsilon_n' \to 0$$

при $n \to \infty$,

$$2\left(\rho+\rho_n\int_{\rho_0}^{\rho_n}\frac{n(t)\,dt}{(\rho+t)(2\rho_n+\rho-t)}\right. = 2\left(1+\frac{\rho}{\rho_n}\right)\int_{\frac{\rho_0}{\rho_n}}^{1}\frac{n(t\rho_n)\,dt}{\left(t+\frac{\rho}{\rho_n}\right)\left(2+\frac{\rho}{\rho_n}-t\right)} \geqslant$$

$$\geqslant 2\lambda^{-\frac{1}{\mu}}\rho_n^{\frac{1}{\mu}}(1-\gamma_n)\int_0^1\frac{t^{\frac{1}{\mu}-1}}{2-t}\,dt, \quad \gamma_n \to 0 \text{ при } n\to\infty. \tag{160}$$

Отсюда

$$U_n(\rho) \leqslant \lambda^{-\frac{1}{\mu}}\rho_n^{\frac{1}{\mu}}\left\{(2\lambda)^{\frac{1}{\mu}}(\sigma+\varepsilon_n') - 2(1-\gamma_n)\int_0^1\frac{t^{\frac{1}{\mu}-1}\,dt}{2-t}\right\}. \tag{161}$$

В силу (158) $U_n(\rho) \to -\infty$ при $n \to \infty$ и при любом фиксированном ρ. По теореме V ряд Ньютона сходится к $f(z)$ равномерно в любой конечной части плоскости.

Далее, границу для σ в теореме VII нельзя увеличить в случае сходимости ряда (115) в любой точке действительной оси, так как, взяв в качестве последовательности узлов интерполяции $\{x_k\}$ последовательность $\rho_n = \lambda n^\mu$, $n = 0, 1, \ldots$, мы получим по теореме VI, что

$$\ln|f(2\lambda n^\mu+\rho)| < C(\rho) + 2(\rho_n+\rho)\int_0^{\rho_n}\frac{n(t)\,dt}{(\rho+t)(2\rho_n+\rho-t)} + \ln\rho_n =$$

$$= C(\rho) + 2(\rho+\lambda n^\mu)\int_0^{\lambda n^\mu}\frac{t^{\frac{1}{\mu}}\,dt}{\lambda^{\frac{1}{\mu}}(\rho+t)(2\lambda n^\mu+\rho-t)} +$$

$$+ \ln\lambda n^\mu = 2n\int_0^1\frac{t^{\frac{1}{\mu}-1}}{2-t}\,dt + O(n^{1-\mu}+\ln n),$$

откуда следует предельное соотношение

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln|f(2\lambda n^\mu+\rho)|}{(2\lambda n^\mu+\rho)^{\frac{1}{\mu}}} \leqslant 2^{1-\frac{1}{\mu}}\lambda^{-\frac{1}{\mu}}\int_0^1\frac{t^{\frac{1}{\mu}-1}}{2-t}\,dt. \tag{162}$$

Неравенство (162) показывает, что при любом $\varepsilon > 0$ можно

построить сколько угодно целых функций порядка $\frac{1}{\mu}$ и типа σ, где

$$\sigma \leqslant \lambda^{-\frac{1}{\mu}} 2^{1-\frac{1}{\mu}} \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{\mu}-1}}{2-t} dt + \varepsilon,$$

которые не могут быть разложены в сходящийся в любой конечной точке действительной оси ряд (115).

В качестве примера найдем условие разложимости целой функции $f(z)$ в ряд Стирлинга:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} [a_{2k} + a_{2k+1}(z-k)]\, z(z+k) \prod_{\nu=1}^{k-1} (z^2 - \lambda^2). \tag{163}$$

Если этот ряд сходится хотя бы в двух точках, не совпадающих с целыми числами, то, как мы уже знаем (см. стр. 179), он будет сходиться при любом конечном значении z. Из этого следует, что вопрос о представимости $f(z)$ рядом (163) эквивалентен вопросу о представимости двух функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$:

$$\left.\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{f(z)+f(-z)-2f(0)}{z^2} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \prod_{\nu=1}^{k-1} [z^2 - \nu^2], \\ f_2(z) &= \frac{f(z)-f(-z)-2a_1 z - 2a_2 z}{2z} = \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} (a_{2k-1} + k a_{2k}) \prod_{\nu=1}^{k-1} (z^2 - \nu^2). \end{aligned}\right\} \tag{164}$$

Так как $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — четные функции, то $f_1(\sqrt{z})$ и $f_2(\sqrt{z})$ будут целыми функциями, если $f(z)$ — целая или ряд (163) сходится в двух точках, так как тогда $f(z)$ будет также целой функцией.

Итак, условия разложимости $f(z)$ совпадают с условиями разложимости двух функций

$$\left.\begin{aligned} f_1(\sqrt{z}) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \prod_{\nu=1}^{k-1} (z - \nu^2), \\ f_2(\sqrt{z}) &= \sum_{k=2}^{\infty} (a_{2k-1} + k a_{2k}) \prod_{\nu=1}^{k-1} (z - \nu^2). \end{aligned}\right\} \tag{165}$$

Обозначая через $M_1(r)$ и $M_2(r)$ максимумы модулей $f_1(\sqrt{z})$ и $f_2(\sqrt{z})$, мы по теореме VII будем иметь в качестве достаточного

условия разложимости $f_1(z)$ и $f_2(z)$ неравенство

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln M_i(r)}{\sqrt{r}}<\sqrt{2}\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t}\,(2-t)}=2\ln(1+\sqrt{2}),\quad i=1,2. \tag{166}$$

Из этого неравенства следует, что неравенство

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln M(r)}{r}=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\max\limits_{i=1,2}[\ln M_i(r^2)]}{r}<\ln(3+2\sqrt{2}) \tag{167}$$

будет достаточным условием представимости $f(z)$ рядом Стирлинга. Теорема VII показывает также, что увеличить постоянную в условии (167) нельзя.

Рассмотрим еще один пример на получение достаточных условий представимости $f(z)$ рядом Ньютона. Пусть $x_k=e^{\lambda k}$, $\lambda>0$, $k=0, 1,..$ Для оценки остаточного члена ряда (115) в этом случае удобнее всего воспользоваться непосредственно неравенством (144):

$$|R_n(z)|<\frac{r}{r-\rho}\prod_{k=0}^{n}\frac{\rho+x_k}{r-x_k}M(r),\quad \rho=|z|,\quad r>x_k>\rho.$$

Из этого неравенства при $r=2e^{\lambda n}$ следует, что

$$\ln|R_n(z)|<-\ln\left(1-\frac{\rho}{2}e^{-\lambda n}\right)+\sum_{k=0}^{n}\ln\frac{\rho+e^{\lambda k}}{2e^{\lambda n}\left[1-\frac{1}{2}e^{-\lambda(n-k)}\right]}+$$

$$+\ln M(2e^{\lambda n})=\ln M(2e^{\lambda n})-\lambda\frac{n(n+1)}{2}-n\ln 2+$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\ln(1+\rho e^{-\lambda k})-\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1-\frac{1}{2}e^{-\lambda(n-k)}\right)+O(e^{-\lambda n})=$$

$$=\ln M(2e^{\lambda n})-\frac{\lambda}{2}(n+1)n-n\ln 2+O(1). \tag{1}$$

Отсюда следует достаточное условие сходимости ряда Ньютона к $f(z)$ при узлах интерполяции $x_k=e^{\lambda k}$, именно:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\ln M(2e^{\lambda n})-\frac{\lambda}{2}n(n+1)-n\ln 2\right]=-\infty. \tag{168}$$

Если предположить, что

$$\ln M(r)<\frac{1}{2\lambda}\ln^2 r+\frac{1}{2}\ln r-\omega(r),\quad \lim_{r\to\infty}\omega(r)=\infty, \tag{169}$$

где $\omega(r)$ — любая сколь угодно медленно растущая функция, то условие (168) будет выполнено и неравенство (169) является условием разложимости $f(z)$ в ряд Ньютона с узлами интерполяции $x_n=e^{\lambda n}$.

Полагая

$$f_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - e^{-\lambda k} z), \quad f_0(e^{\lambda k}) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

мы видим, что максимум модуля функции $f_0(z)$ на окружности $|z| = r$ достигается при $z = -r$, поэтому

$$M(r) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 + e^{-\lambda k} r).$$

Полагая $r = e^{\lambda n + \theta}$, $0 \leqslant \theta < \lambda$, мы будем иметь, так как $n = \frac{1}{2}(-\theta + \ln r)$,

$$\ln M(r) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left[1 + e^{\lambda(n-k)+\theta}\right] + \sum_{k=n+1}^{n} \ln[1 + e^{-\lambda(k-n)+\theta}] =$$
$$= \frac{\lambda}{2} n(n+1) + \theta n + O(1) = \frac{1}{2\lambda}(\ln r - \theta)(\ln r - \theta + \lambda) +$$
$$+ \frac{\theta}{\lambda} \ln r + O(1) = \frac{1}{2\lambda} \ln^2 r + \frac{1}{2} \ln r + O(1).$$

Рост $M(r)$ для целой функции $f_0(r)$ показывает, что условие разложимости (169), налагаемое на рост $f(z)$, нельзя ослабить, так как, если бы $f_0(z)$ могла быть представлена рядом Ньютона с узлами интерполяции $e^{\lambda k}$, $k = 0, 1, \ldots$, то мы имели бы тождество $f_0(z) \equiv 0$ вследствие обращения в нуль всех коэффициентов ряда Ньютона.

4. Приложение интерполяционных процессов к решению некоторых вопросов теории чисел. Мы дадим два приложения интерполяционных процессов к вопросам теории чисел. Первая из двух теорем, которые мы докажем, относится к тому же кругу вопросов, что и теорема X § 2 настоящей главы.

Рассмотрим функции, принимающие целые значения в точках геометрической прогрессии, знаменатель которой есть целое число, большее единицы, т. е. такие функции $f(z)$, что значения $f(\beta^n)$ при $n = 0, 1, \ldots$ — целые числа, где β — целое число, большее единицы.

Функции, целочисленные в этом смысле, не могут обладать ростом меньшим, чем некоторый предельный рост. В противном случае такая функция должна быть многочленом.

Докажем прежде всего, что отношение

$$B_k^n(t) = \frac{(1-t^n)(1-t^{n-1})\ldots(1-t^{n-k})}{(1-t)(1-t^2)\ldots(1-t^{k+1})}, \quad n \geqslant k,$$

есть многочлен относительно t с целыми рациональными коэффициентами.

Знаменатель $B_k^n(t)$ обращается в нуль в точках

$$t = e^{2\pi i \frac{p}{q}}, \quad 1 \leqslant q \leqslant k+1, \quad 0 \leqslant p \leqslant q-1.$$

Если p и q взаимно просты, то кратность нуля $e^{2\pi i \frac{p}{q}}$ будет $\left[\frac{k+1}{q}\right]$. Нули числителя будут также вида $e^{2\pi i \frac{p}{q}}$, где p и q находятся в интервалах $n \geqslant q \geqslant n-k$, $0 \leqslant p \leqslant q-1$. Легко убедиться, что всякий нуль знаменателя будет нулем и числителя $B_k^n(t)$, и притом не меньшей кратности, чем $\left[\frac{k+1}{q}\right]$. Поэтому числитель делится на знаменатель, и $B_k^n(t)$ есть многочлен. Коэффициенты этого многочлена — целые числа вследствие того, что коэффициент при высшей степени t в знаменателе — единица.

Относительно функций, целочисленных в точках геометрической прогрессии, мы можем доказать теперь теорему:

Теорема VIII. *Если $g(\beta^n)$ (β — целое число, большее единицы) — целые числа, $n = 1, 2, \ldots$, и целая функция $g(z)$ удовлетворяет неравенству*

$$\ln|g(z)| < \frac{\ln^2 r}{4 \ln \beta} - \frac{1}{2} \ln r - \omega(r), \qquad r = |z|, \quad \lim_{r\to\infty} \omega(r) = \infty,$$

то $g(z)$ есть многочлен.

Доказательство. Так как $g(z)$ удовлетворяет условию (169), то она может быть разложена в ряд, сходящийся для всех z:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-\beta) \ldots (z-\beta^n),$$

где

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_n} \frac{g(z)\,dz}{(z-\beta)\ldots(z-\beta^{n+1})}.$$

Для оценки величины A_n возьмем за контур интеграции окружность $|z| = \beta^{2n}$ и воспользуемся неравенством Коши. Это даст нам оценку

$$|A_n| < \frac{\beta^{2n} \max\limits_{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi} |g(\beta^{2n} e^{i\varphi})|}{\prod\limits_{k=1}^{n+1} (\beta^{2n} - \beta^k)} < C \frac{e^{n^2 \ln\beta + n \ln\beta}}{\beta^{2n(n+1)}} e^{-\omega(\beta^{2n})} =$$

$$= C\beta^{-n(n+1)} e^{-\omega(\beta^{2n})}.$$

Но, с другой стороны, интеграл для A_n равен сумме вычетов подынтегральной функции:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{g(\beta^k)}{\prod\limits_{\substack{s=1\\ s\neq k}}^{n+1} (\beta^k - \beta^s)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \beta^{-\frac{k(2n-k+1)}{2}} \frac{(-1)^{k-1} g(\beta^k)}{(1-\beta)\ldots(1-\beta^{k-1})(1-\beta)\ldots(1-\beta^{n-k+1})}.$$

Умножим A_n на R_n:

$$R_n = \beta^{\frac{n(n+1)}{2}} (\beta - 1)\ldots(\beta^n - 1), \quad R_n < \beta^{n(n+1)}.$$

Это произведение A_n и R_n будет опять целой линейной функцией значений $g(z)$, но коэффициенты ее будут, как мы сейчас убедимся, целыми числами.

Действительно,

$$\beta^{\frac{n(n+1)}{2} - \frac{k(2n-k+1)}{2}} \frac{(\beta-1)\ldots(\beta^n-1)}{(\beta-1)\ldots(\beta^{k-1}-1)(\beta-1)\ldots(\beta^{n-k+1}-1)} =$$

$$= \beta^{\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}} \frac{(\beta^n-1)\ldots(\beta^{n-k+2}-1)}{(\beta-1)\ldots(\beta^{k-1}-1)},$$

как мы уже знаем, будет целым числом.

Так как $g(\beta^k)$ — целые числа, то и A_nR_n будет также целым рациональным числом.

Пользуясь оценкой A_n, мы будем иметь неравенство

$$|A_nR_n| < C\beta^{-n(n+1)}\beta^{n(n+1)} e^{-\omega(\beta^{2n})} = Ce^{-\omega(\beta^{2n})}.$$

Так как правая часть этого неравенства с ростом n стремится к нулю, а левая — целое число, то очевидно, что, начиная с некоторого N, $A_n = 0$. Значит, $g(z)$ должна быть многочленом

$$g(z) = \sum_{n=0}^{N-1} A_n (z-\beta)\ldots(z-\beta^n).$$

Нижняя граница роста целой трансцендентной функции, принимающей целые значения в точках β^k, не может быть заменена меньшей, так как существуют целочисленные функции, растущие как

$$O\left(e^{4\frac{\ln^2 r}{\ln\beta}} r^{-\frac{1}{2}}\right), \quad |z| = r.$$

Примером такой функции может служить функция

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z-\beta)\ldots(z-\beta^k)}{(\beta-1)\ldots(\beta^k-1)} \beta^{-\frac{k(k-1)}{2}}$$

(β — целое положительное число, большее единицы).

Эта целая функция будет в точках β^k, $k = 1, 2, \ldots$ принимать целые значения. Действительно,

$$\varphi(\beta^m) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\beta^m-\beta)\ldots(\beta^m-\beta^k)}{(\beta-1)\ldots(\beta^k-1)} \beta^{-\frac{k(k+1)}{2}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(\beta^m-\beta)\ldots(\beta^m-\beta^k)}{(\beta-1)\ldots(\beta^k-1)} \beta^{-\frac{k(k+1)}{2}}$$

есть сумма целых чисел.

Найдем рост функции $\varphi(z)$. Положим $|z| = r$, $r = \beta^{m+\delta}$, $0 \leqslant \delta < 1$, m — целое число. Из этих соотношений найдем

$$m + \delta = \frac{\ln r}{\ln \beta}.$$

Непосредственно видно, что $|\varphi(z)|$ удовлетворяет неравенству:

$$|\varphi(z)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(r+\beta)\ldots(r+\beta^k)}{(\beta-1)\ldots(\beta^k-1)} \beta^{-\frac{k(k+1)}{2}}.$$

Разобьем эту бесконечную сумму на две части; от 1 до $m-1$, где m — определенное выше число, и от m до ∞.

Оценим первую сумму, заменив в ней r через $\beta^{m+\delta}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{(r+\beta)\ldots(r+\beta^k)}{(\beta-1)\ldots(\beta^k-1)} \beta^{-\frac{k(k-1)}{2}} <$$

$$< \sum_{k=1}^{m-1} r^k \beta^{-k(k+1)} \frac{(1+\beta^{-m+1})\ldots(1+\beta^{-m+k})}{(1-\beta^{-1})\ldots(1-\beta^{-k})} <$$

$$< C_1 \sum_{k=1}^{m-1} r^k \beta^{-k(k+1)} = C_1 \sum_{k=1}^{m-1} \beta^{k(m+\delta-k-1)},$$

где

$$C_1 = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1+\beta^{-k}}{1-\beta^{-k}}.$$

Но $\beta^{k(m+\delta-k-1)}$ имеет максимум при $k = \frac{m+\delta-1}{2}$, равный

$$\beta^{\left(\frac{m+\delta-1}{2}\right)^2}.$$

Теперь имеем, что

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{(r+\beta)\ldots(r+\beta^k)}{(\beta-1)\ldots(\beta^k-1)} \beta^{-\frac{k(k+1)}{2}} < C_2 \beta^{\left(\frac{m+\delta-1}{2}\right)^2} =$$

$$= C_2 e^{\frac{1}{4}\ln\beta\left(\frac{\ln r}{\ln\beta}-1\right)^2} = C_3 e^{\frac{1}{4}\frac{\ln^2 r}{\ln\beta}} r^{-\frac{1}{2}},$$

так как

$$\beta^{-\left(\frac{m+\delta-1}{2}\right)^2} \sum_{k=1}^{m-1} \beta^{k(m+\delta-k-1)} = \sum_{k=1}^{m-1} \beta^{-\frac{1}{4}(m-2k+\delta-1)^2} = O(1).$$

Оценим вторую сумму, заменив в ней r через $\beta^{m+\delta}$.

Мы получим путем нетрудных преобразований неравенство

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{(r+\beta)\ldots(r+\beta^k)}{(\beta-1)\ldots(\beta^k-1)} \beta^{-\frac{k(k+1)}{2}} <$$

$$< C_4 \sum_{k=m}^{\infty} \beta^{(m+1)^2+\frac{1}{2}(k-m-1)(k+m+2)-k(k+1)},$$

где

$$C_4 = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1+\beta^{-k})^2}{(1-\beta^{-k})}.$$

Воспользуемся тождеством

$$(m+1)^2+\frac{1}{2}(k-m-1)(k+m+2)-k(k+1) =$$

$$= -\frac{1}{2}(k-m)(k+m+1)$$

и продолжим наше неравенство. Получим

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{(r+\beta)\ldots(r+\beta^k)}{(\beta-1)\ldots(\beta^k-1)} \beta^{-\frac{k(k+1)}{2}} < C_4 \sum_{k=m}^{\infty} \beta^{-\frac{1}{2}(k-m)(k+m+1)} < C_5.$$

Соединяя оценки обеих частей первоначальной суммы, мы получим верхнюю границу $|\varphi(z)|$, $|z| = r$,

$$\ln|\varphi(z)| < \frac{1}{4\ln\beta}\ln^2 r - \frac{1}{2}\ln r + O(1).$$

Другое числовое приложение интерполяционных процессов, на котором мы остановимся, относится к области трансцендентных чисел.

Применение интерполяционных процессов сыграло за последние двадцать лет очень большую роль в развитии теории транс-

цендентных чисел. Теорема, которую мы докажем ниже, принадлежит как раз к этому кругу идей.

Прежде чем формулировать эту теорему, мы дадим необходимые определения. *Алгебраическим числом* называется всякий корень алгебраического уравнения с целыми рациональными коэффициентами

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0, \qquad a_n \neq 0. \tag{170}$$

Любое число ω, не являющееся корнем какого-либо уравнения с целыми коэффициентами, называется *трансцендентным*. Если многочлен (170) *неприводим*, другими словами, не равен произведению двух многочленов ненулевых степеней также с целыми рациональными коэффициентами, то любой корень α уравнения (170) называется *алгебраическим числом степени* n. Все остальные корни этого уравнения называются *сопряженными* с α. Мы можем также предположить, что наибольший общий делитель коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$ равен единице, так как в противном случае, разделив все коэффициенты многочлена (170) на этот наибольший общий делитель, мы опять получили бы многочлен с целыми рациональными коэффициентами и не изменили бы величины его корней. При этом предположении корень нашего уравнения α будет *целым алгебраическим числом*, если $a_n = 1$. *Если α — алгебраическое, то $\alpha_1 = a_n\alpha$* (a_n — коэффициент при старшей степени x в уравнении для α) *при любом целом a_n будет целым алгебраическим числом*. Действительно, α_1 удовлетворяет уравнению

$$P_1(\alpha_1) = a_n^{n-1} P(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k a_n^{n-k-1} (a_n\alpha)^k = 0.$$

Приведем некоторые элементарные свойства алгебраических чисел и порождаемых ими алгебраических полей. Если мы расширим поле рациональных чисел путем присоединения к нему алгебраических чисел, $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, другими словами, рассмотрим совокупность всех многочленов с рациональными коэффициентами от чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, то мы получим алгебраическое поле K, которое называется *приведенным алгебраическим полем чисел* $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$. Это же алгебраическое поле может быть получено путем расширения поля рациональных чисел присоединением к нему некоторого одного числа α степени ν, неоднозначно определяемого числами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$. Другими словами, *совокупность всех многочленов с рациональными коэффициентами от чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ совпадает с совокупностью всех многочленов степени не выше $\nu - 1$ с рациональными же коэффициентами от числа α*, так как всякая степень α может быть представлена в виде многочлена от α

степени не выше $\nu - 1$. Эта степень ν не превышает произведения $n_1 n_2 \ldots n_s$, где n_i есть степень числа α_i и называется *степенью поля* K. Если $\bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_\nu$ — корни уравнения, которому α удовлетворяет, другими словами, сопряженные с $\alpha = \bar{\alpha}_1$ числа, то от присоединения к полю рациональных чисел числа $\bar{\alpha}_k$ мы получаем поле, сопряженное с K, которые мы будем обозначать K_p. Каждому числу A поля K, другими словами, многочлену от α с рациональными коэффициентами, будет соответствовать сопряженное число A_p в поле K_p, $p = 2, \ldots, \nu$. Это число получается заменой в многочлене от α, которым является число A числа α на $\bar{\alpha}_p$. Если число A не было равно нулю, то и число A_p также не будет нулем. Это следует из того, что любой многочлен с рациональными коэффициентами, обращающийся в нуль при $x = \bar{\alpha}_p$, должен нацело делиться на неприводимый многочлен степени ν, корнем которого является $\bar{\alpha}_p$, а степень A относительно α не превышает $\nu - 1$. Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ — целые алгебраические числа, а многочлен $A_p = P(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ имеет целые рациональные коэффициенты, то A будет целым алгебраическим числом, а произведение $A A_2 \ldots A_\nu$ будет целым рациональным числом. Так как $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ сами являются числами поля K, другими словами, многочленами от α, то каждому числу α_i соответствует $\nu - 1$ сопряженных чисел $\bar{\alpha}_{i,m}$, $m = 2, \ldots, \nu$. Все эти элементарные сведения из теории алгебраических чисел читатель может найти в любом курсе по теории алгебраических чисел, например, в книге Э. Гекке «Лекции по теории алгебраических чисел».

Докажем одно неравенство, необходимое нам в дальнейшем. Пусть $P(x_1, \ldots, x_s)$ будет многочлен с целыми рациональными коэффициентами степеней $n_1, n_2, \ldots, n_s$ относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_s$. Пусть максимум модуля коэффициентов этого многочлена, который мы будем называть *высотой* многочлена, будет H. Число $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_s$ мы будем называть *степенью* многочлена. Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ — произвольные алгебраические числа, то $d_1\alpha_1, \ldots, d_s\alpha_s$ будут целыми алгебраическими числами, где $d_1, d_2, \ldots, d_s$ — коэффициенты при старших степенях x в уравнениях с целыми коэффициентами, корнями которых являются $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$. Поэтому число A

$$A = d_1^{n_1} \ldots d_s^{n_s} P(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$$

будет целым числом поля K степени ν, причем ν зависит только от чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$.

Так как произведение $AA_2 \ldots A_\nu$ есть целое рациональное число, другими словами, при $A \neq 0$ будет не меньше 1, то

$$|A| > \frac{1}{|A_2 \ldots A_\nu|}.$$

Но мы имеем неравенство

$$\prod_{k=2}^{\nu} |A_k| = \prod_{k=2}^{\nu} d_1^{n_1} \ldots d_s^{n_s} |P(\bar{\alpha}_{1,k}, \ldots, \bar{\alpha}_{s,k})| < C^n H^{\nu-1},$$

где C не зависит от n и H, так как $d_1, \ldots, d_s$, $\bar{\alpha}_{i,k}$, $1 \leqslant i \leqslant s$, $2 \leqslant k \leqslant \nu$, от n и H не зависят, а число членов многочлена $P(x_1, \ldots, x_s)$ меньше чем n^s. Поэтому имеет место утверждение: *если $P(x_1, \ldots, x_s)$ — многочлен с целыми рациональными коэффициентами степени n и высоты H, $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ — произвольные алгебраические числа, то или $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) = 0$ или*

$$|P(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)| > e^{-\mu n} H^{-\nu}, \tag{171}$$

где постоянные ν и μ не зависят от n и H, а зависят только от алгебраических чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$.

В дальнейшем нам будет нужна оценка величины общего наименьшего кратного Ω_n всех целых чисел от 2 до n. Всякое целое число, не превосходящее N, является произведением степеней простых чисел, не превышающих N. Если p — простое число, то наивысшая степень этого числа p^s, на которую может делиться число, не превышающее N, определяется неравенством $p^s \leqslant N$ или эквивалентным неравенством

$$s \leqslant \frac{\ln N}{\ln p}.$$

Итак, показатель этой степени s есть наибольшее целое число, не превышающее $\frac{\ln N}{\ln p}$. Вводя в рассмотрение числовую функцию $[x]$, значение которой для любого действительного x определяется как наибольшее целое число, не превышающее x, мы получаем, что $s = \left[\frac{\ln N}{\ln p}\right]$. Отсюда следует, что Ω_N определяется равенством

$$\Omega_N = \prod_{p \leqslant N} p^{\left[\frac{\ln N}{\ln p}\right]}, \tag{172}$$

где произведение в правой части взято по всем простым числам, не превышающим N. Наибольшее возможное значение s будет $\left[\frac{\ln N}{\ln 2}\right]$, так как $p \geqslant 2$. Совершенно очевидно, что из равенства (172) следует также представление

$$\psi(N) = \ln \Omega_N = \sum_{s=1}^{\left[\frac{\ln N}{\ln 2}\right]} \sum_{p^s \leqslant x} \ln p = \sum_{s=1}^{\left[\frac{\ln N}{\ln 2}\right]} \sum_{p \leqslant x^{1/s}} \ln p. \tag{173}$$

Для того чтобы оценить величину функции $\psi(N) = \sum_{p^s \leqslant x} \ln p$, нам

нужно установить некоторые свойства и оценки числовых функций $[x]$ и $\mu(N)$. Для функции $[x]$ согласно ее определению справедливо тождество

$$[x]+\{x\}=x, \qquad 0\leqslant\{x\}<1, \tag{174}$$

где функция $\{x\}$ есть дробная доля числа x. Кроме этого, из определения следует, что $[x]=0$, $0\leqslant x<1$. Функция $\mu(n)$, носящая название функции Мёбиуса определяется для любого целого положительного числа n следующим образом:

$$\mu(n)=\begin{cases} 1, & n=1; \\ (-1)^s, & n=p_1p_2\ldots p_s; \\ 0, & n=p^2k, \end{cases} \tag{175}$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — различные простые числа, а k — целое число. Из этого определения функции Мёбиуса непосредственно следует ее *мультипликативность*, другими словами, что

$$\mu(n)\mu(m)=\mu(nm),$$

если целые числа n и m взаимно просты.

Исключительно важным свойством функции $\mu(n)$, определяющим ее значение для теории чисел, является соотношение

$$\sum_{d/n}\mu(d)=\begin{cases} 1, & n=1, \\ 0, & n>1, \end{cases} \tag{176}$$

где сумма в левой части взята по всем целым делителям числа n от 1 до n включительно.

Действительно, если $n=p_1^{\alpha_1}\ldots p_s^{\alpha_s}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — различные простые числа, входящие в состав n, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ — целые числа, не меньшие единицы, то всякий делитель числа n имеет вид $p_1^{\beta_1}\ldots p_s^{\beta_s}$, $0\leqslant\beta_i\leqslant\alpha_i$, $i=1, \ldots, s$. Тогда в силу определения $\mu(n)$ и мультипликативности этой функции будет справедливо соотношение

$$\sum_{d/n}\mu(d)=\sum_{\substack{0\leqslant\beta_i\leqslant\alpha_i\\ 1\leqslant i\leqslant s}}\mu(p_1^{\beta_1}\ldots p_s^{\beta_s})=\sum_{\substack{0\leqslant\beta_i\leqslant\alpha_i\\ 1\leqslant i\leqslant s}}\mu(p_1^{\beta_1})\ldots\mu(p_s^{\beta_s})=$$

$$=\prod_{i=1}^{s}[1+\mu(p_i)+\ldots+(p_i^{\alpha_i})]=\prod_{i=1}^{s}[1+\mu(p_i)]. \tag{177}$$

Это соотношение и показывает, что если $n\neq 1$, другими словами, делится хотя бы на одно простое число, то последнее произведение в правой части (177) равно нулю, так как $\mu(p)=-1$.

Другое свойство функций $\mu(n)$ и $[x]$ заключается в том, что

$$U(x)=\sum_{n=1}^{[x]}\mu(n)\left[\frac{x}{n}\right]=\begin{cases}1, & x\geqslant 1,\\ 0, & 0\leqslant x<1.\end{cases} \tag{178}$$

Действительно, если определить функцию $U(x)$ равенствами

$$U(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 1,\\ 0, & 0\leqslant x<1,\end{cases}$$

то совершенно очевидно, что для любого неотрицательного x будет справедливо тождество

$$[x]=\sum_{k=1}^{\infty}U\left(\frac{x}{k}\right)=\sum_{k=1}^{[x]}U\left(\frac{x}{k}\right).$$

Заменяя в этом тождестве x на $\frac{x}{s}$, умножая обе его части на $\mu(s)$ и суммируя затем по всем целым значениям s от 1 до ∞, мы получим, что

$$\sum_{s=1}^{\infty}\mu(s)\left[\frac{x}{s}\right]=\sum_{s=1}^{\infty}\mu(s)\sum_{k=1}^{\infty}U\left(\frac{x}{ks}\right).$$

Располагая суммирование в правой части этого равенства по функциям $U\left(\frac{x}{N}\right)$, мы получаем, наконец, что благодаря свойству $\mu(n)$ (176)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu(k)\left[\frac{x}{k}\right]=\sum_{N=1}^{\infty}U\left(\frac{x}{N}\right)\sum_{d/N}\mu(d)=U(x),$$

другими словами, тождество (178).

Из тождества (178) при $x\geqslant 1$ следует тождество

$$1=\sum_{n=1}^{N}\mu(n)\left[\frac{N}{n}\right]=\sum_{N=1}^{N}\frac{N}{n}\mu(n)-\sum_{n=1}^{N}\mu(n)\left\{\frac{N}{n}\right\},$$

которое позволяет установить неравенство

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{\mu(n)}{n}\right|\leqslant\frac{1}{N}+\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-1}\left\{\frac{N}{n}\right\}<1, \tag{179}$$

так как $|\mu(n)|\leqslant 1$ и $0\leqslant\left\{\frac{N}{n}\right\}<1$,

Далее, докажем соотношение

$$f(n)=\sum_{d/n}\mu(d)\ln d=\begin{cases}-\ln p, & n=p^s,\\ 0. & n=p_1p_2k,\end{cases} \tag{180}$$

где p, p_1, p_2, $p_1 \neq p_2$ — простые, а k — целое число, и сумма взята по всем делителям числа n. Действительно, если p — простое, то $f(p^s) = -\ln p$, так как $d = 1, p, \ldots, p^s$ и $\mu(p^k) = 0$, $k > 1$; $\ln 1 = 0$. Если же $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s}$, где $p_1, \ldots, p_s$, $s > 1$ — различные простые и все α_k, $k = 1, \ldots, s$, отличны от нуля, то, продифференцировав по z очевидное тождество

$$\prod_{k=1}^{s} [1 - p_k^z] = \prod_{k=1}^{s} [1 + \mu(p_k) p_k^z + \ldots + \mu(p_k^{\alpha_k}) p_k^{\alpha_k z}] =$$

$$= \sum_{\substack{0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i \\ 1 \leqslant i \leqslant s}} \mu(p_1^{\beta_1} \ldots p_s^{\beta_s}) [p_1^{\beta_1} \ldots p_s^{\beta_s}]^z = \sum_{d/n} \mu(d) d^z,$$

где сумма в правой части взята по делителям n, мы получим тождество

$$-\sum_{k=1}^{s} p_k^z \ln p_k \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k}}^{s} (1 - p_\nu^z) = \sum_{d/n} \mu(d) d^z \ln d.$$

Положив в этом тождестве $z = 0$, мы приходим к соотношению (180).

Непосредственным следствием формул (176) и (180) является важное представление функции $\psi(N)$, именно:

$$\psi(N) = \sum_{p^s \leqslant N} \ln p = \sum_{n=1}^{N} \sum_{d/n} \mu(d) \ln \frac{N}{d} - \ln N. \tag{181}$$

Член $\mu(d) \ln \frac{N}{d}$ в нашей двойной сумме встречается столько раз, сколько чисел, не превышающих N, делится на d. Но все эти числа имеют вид kd, $k = 1, \ldots, s$, где s есть максимальное целое число, не превышающее $\frac{N}{d}$, т. е. $s = \left[\frac{N}{d}\right]$. Это позволяет дать другое выражение для двойной суммы в представлении (181). Меняя порядок суммирования, мы получаем, что

$$\psi(N) = \sum_{d=1}^{N} \mu(d) \left[\frac{N}{d}\right] \ln \frac{N}{d} - \ln N =$$

$$= \sum_{d=1}^{N} \mu(d) \frac{N}{d} \ln \frac{N}{d} - \sum_{d=1}^{N} \mu(d) \left\{\frac{N}{d}\right\} \ln \frac{N}{d} - \ln N. \tag{182}$$

Прямым следствием того, что $|\mu(d)| \left\{\frac{N}{d}\right\} < 1$ и монотонного убы-

вания функции $\ln\frac{N}{t}$ на интервале $1\leqslant t\leqslant N$, является неравенство

$$\left|\sum_{d=1}^{N}\mu(d)\left\{\frac{N}{d}\right\}\ln\frac{N}{d}\right|<\sum_{d=2}^{N-1}\ln\frac{N}{d}<\int^{N}\ln\frac{N}{t}\,dt<$$

$$<N\int_{0}^{1}\ln\frac{1}{t}\,dt=N. \qquad (183)$$

Воспользовавшись формулой (3′) § 1 настоящей главы, мы придем к неравенству

$$\sum_{d=1}^{N}\frac{\mu(d)}{d}\ln\frac{N}{d}\Big|<$$

$$<\left|\sum_{d=1}^{N}\frac{\mu(d)}{d}\sum_{k=1}^{\left[\frac{N}{d}\right]}\frac{1}{k}\right|+C\left|\sum_{d=1}^{N}\frac{\mu(d)}{d}\right|+\sum_{d=1}^{N}\left|\frac{\mu(d)}{d}\frac{d}{N}\theta'_{\left[\frac{N}{d}\right]}\right|, \qquad (184)$$

где C — константа Эйлера, $0<C<0{,}6$. Но меняя порядок суммирования, мы будем иметь соотношение

$$\sum_{d=1}^{N}\frac{\mu(d)}{d}\sum_{k=1}^{\left[\frac{N}{d}\right]}\frac{1}{k}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\sum_{d/n}\mu(d)=1. \qquad (185)$$

Далее мы непосредственно получаем из неравенства для $\theta'_{\left[\frac{N}{d}\right]}$, что

$$\sum_{d=1}^{N}\left|\frac{\mu(d)}{d}\frac{d}{N}\theta'_{\left[\frac{N}{d}\right]}\right|<2. \qquad (186)$$

Из (182), пользуясь неравенствами (183), (184), (185) и (186), мы получаем окончательно неравенство для $\psi(N)$:

$$\psi(N)<5N, \qquad N\geqslant 1. \qquad (187)$$

Так как [см. (173)]

$$\psi(N)=\ln\Omega_N, \qquad (188)$$

то вследствие неравенства (187)

$$\Omega_n<e^{5N}. \qquad (189)$$

Неравенства типа (187) для $\psi(N)$ сверху и снизу значительно более точные были впервые найдены гениальным русским математиком П. Л. Чебышевым. Нам для дальнейших рассмотрений вполне достаточно неравенства (189).

Опираясь на неравенства (181) и (189), мы докажем теорему, являющуюся частным случаем классической теоремы Линдемана. Из приводимой нами теоремы следует трансцендентность классических констант e и π.

Теорема IX. *Числа α и $\beta = e^{\alpha}$ (e — основание натуральных логарифмов) одновременно не могут быть алгебраическими числами, исключая случай $\alpha = 0$.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что $\alpha \neq 0$ и $\beta = e^{\alpha}$ — алгебраические числа. Пусть $q \geqslant 2$ — произвольное целое положительное число, которое мы будем считать большим некоторых постоянных, зависящих только от алгебраических чисел α и β. Разложим функцию $f(z) = e^{\alpha z}$ в интерполяционный ряд Ньютона с узлами интерполяции $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$, где

$$x_0 = x_1 = \ldots = x_{q-1} = 0, \ \ldots, \ x_{kq} = x_{kq+1} = \ldots$$
$$\ldots = x_{(k+1)q-1} = k, \ldots \tag{190}$$

Тогда, как мы уже знаем, имеет место представление

$$e^{\alpha z} = \sum_{n=0}^{\infty} [x_0, x_1, \ldots, x_n](z - x_0)\ldots(z - x_n), \tag{191}$$

причем ряд будет равномерно сходиться к $e^{\alpha z}$ в любом конечном круге, если выполнено условие (158) теоремы VII. В нашем случае $\sigma = |\alpha|$, $\lambda = \frac{1}{q}$, $\mu = 1$, поэтому условие (158) дает для q неравенство

$$|\alpha| < q \ln 2. \tag{192}$$

Мы предположим, что это неравенство будет выполнено, для чего достаточно только выбрать q достаточно большим. Отсюда будет уже следовать равномерная сходимость ряда (191) к $e^{\alpha z}$. Воспользовавшись интегральным представлением конечной разности (см. § 4 главы I), мы будем иметь, что

$$A_{kq+s} = [x_0, \ldots, x_{kq+s}] = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \frac{e^{\alpha z} dz}{[z(z-1)\ldots(z-k+1)]^q (z-k)^s},$$

где $r < k$, откуда следует неравенство

$$|A_{kq+s}| < \frac{r^{\sigma r}}{[r(r-1)\ldots(r-k+1)]^q (r-k)^s}. \tag{193}$$

Полагая $r = kq$, мы получаем, воспользовавшись формулой Стир-

линга [см. (6), § 1], неравенство, справедливое при $k > k_0(q)$:

$$\ln|A_{kq+s}| < \ln qk + \sigma qk - q\ln(qk)! + q\ln[(q-1)k]! = q\sigma k - \\ - q^2k\ln qk + q^2k + q(q-1)k\ln(q-1)k - q(q-1)k + O(\ln k) = \\ = -qk\ln k - q[\ln q - \sigma - 1]k + qk(q-1)\ln\left(1-\frac{1}{q}\right) + \\ + O(\ln k) < -qk\ln k - q[\ln q - \sigma - 1]k, \quad (194)$$

так как $q(q-1)\ln\left(1-\frac{1}{q}\right) < 0$. Воспользовавшись опять формулой Стирлинга и неравенством (189), получим

$$q!\,[k!]^q\,\Omega_k^{q-1}|A_{kq+s}| < k^{qk}e^{5qk}e^{-qk\ln k - qk[\ln q - \sigma - 1]}, \quad k > k_1(q), \quad (195)$$

откуда следует окончательно, что

$$q!\,[k!]^q\,\Omega_k^{q-1}|A_{kq+s}| < e^{-qk[\ln q - \sigma - 6]}, \\ k > k_1, \quad 0 \leqslant s < q. \quad (196)$$

Воспользовавшись другим представлением конечной разности [см. (57) § 4 главы I], мы будем иметь в нашем случае представление

$$A_{kq+s} = \sum_{n=0}^{k}\sum_{m=0}^{p_n-1}\frac{\alpha^m e^{\alpha n}}{m!\,(p_n-m-1)!}\times \\ \times\frac{d^m}{dt^m}\left[\frac{(t-n)^{p_n}}{[t(t-1)\ldots(t-k+1)]^q(t-k)^s}\right]\Bigg|_{t=n} = \\ = \sum_{n=0}^{k}\sum_{m=0}^{p_n-1}B_{k,n,m}\,\alpha^m\beta^n, \quad (197)$$

$$p_0 = \ldots = p_{k-1} = q, \quad p_k = s.$$

Оценим прежде всего величину $B_{k,n,m}$. Воспользовавшись интегралом Коши, мы получим для $B_{k,n,m}$ выражение

$$B_{k,n,m} = \\ = \frac{1}{2\pi i\,(p\ -m-1)!}\int\limits_{|z-n|=\frac{1}{2}}\frac{(z-n)^{p_n-m-1}dz}{[z(z-1)\ldots(z-k+1)]^q(z-k)^s}, \\ p_n \leqslant q.$$

Оценивая модуль этого интеграла на окружности $|z-n| = \frac{1}{2}$,

получим неравенство

$$|B_{k,n,m}| < 2^{2q} \prod_{\nu=2}^{n} \left(\nu - \frac{1}{2}\right)^{-q} \prod_{\nu=2}^{k-n-1} \left(\nu - \frac{1}{2}\right)^{-q} <$$

$$< (2k)^{3q} [n!(k-n)!]^q < (2k)^{3q} 2^{qk} [k!]^{-q}. \qquad (198)$$

Далее, полагая

$$C_{k,n,m} = q! [k!]^q \Omega_k^{q-1} B_{k,n,m},$$

мы для $C_{k,n,m}$ получаем неравенство

$$|C_{k,n,m}| < q! (2k)^{3q} \Omega_k^{q-1} 2^{qk} < e^{6qk}, \qquad k > k_2, \qquad (199)$$

которое является прямым следствием неравенств (189) и (198).

Нетрудно убедиться, что числа $C_{k,n,m}$ будут целыми рациональными числами. Действительно, воспользовавшись формулой производной от произведения, мы будем иметь, что

$$B_{k,n,m} = \frac{1}{m!(p_n - m - 1)!} \frac{d^m}{dt^m} (t-k)^{-s} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq n}}^{k-1} (t-i)^{-q} \Big|_{t=n} =$$

$$= (-1)^m \frac{(k-n)^{s-q}}{m!(p_n - m - 1)! [n!(k-n)!]^q} \times$$

$$\times \sum \frac{m!(q+\nu_0)! \ldots (q+\nu_{k-1})!(s+\nu_k)!}{\nu_0! \ldots \nu_k! [(q-1)!]^{k-1} (s-1)! \prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq n}}^{k} (n-i)^{\nu_i}},$$

где сумма взята по всем неотрицательным значениям целых чисел $\nu_0, \ldots, \nu_{n-1}, \nu_{n+1}, \ldots, \nu_k$, таким, что $\nu_0 + \ldots + \nu_{n-1} + \nu_{n+1} + \ldots + \nu_k = m \leqslant q - 1$. Так как в знаменатели членов суммы целые числа от 1 до k входят в степенях, сумма которых не превышает $q - 1$, а числа

$$\frac{m!}{\nu_0! \ldots \nu_k!}, \qquad \nu_0 + \ldots + \nu_k = m$$

— все целые, то действительно число $C_{k,n,m}$ будет целым числом.

Итак, величина

$$\left.\begin{aligned} q! [k!]^q \Omega_k^{q-1} A_{kq+s} &= \sum_{n=0}^{k} \sum_{m=0}^{p_n - 1} C_{k,n,m} \alpha^m \beta^n, \\ p_0 = \ldots = p_{k-1} &= q, \qquad p_k = s \leqslant q - 1, \end{aligned}\right\} \qquad (200)$$

будет многочленом относительно α и β, высота которого вследствие (199) не превышает при $k > k_2$ величины e^{6qk}, а степень не

больше $k+q-1$, т. е. при $k \geqslant q$ не больше $2k$. Если $A_{kq+s} \neq 0$, то в силу алгебраичности α и β должно быть выполнено неравенство (171), другими словами, неравенство

$$q!\,[k!]^q\,\Omega_k^{q-1}\,|A_{kq+s}| > e^{-(2\mu+6q\nu)k}, \quad k > k_3, \tag{201}$$

где числа μ и ν не зависят от q и k.

До сих пор мы предполагали, что $q \geqslant 2$ — произвольное число, удовлетворяющее только неравенству (192). Если мы предположим, что кроме этих условий целое число q удовлетворяет и неравенству

$$\ln q - \sigma - 6 > 7\nu + \frac{2\mu}{q},$$

а такое q всегда можно выбрать благодаря тому, что σ, ν и μ зависят только от α и β, то при $k > k_4$ неравенства (196) и (201) будут противоречивы. Из этого следует, что $A_{kq+s} = 0$, $0 \leqslant s \leqslant q-1$, при $k > k_5$. Значит,

$$e^{az} = \sum_{n=0}^{n_0} [x_0, \ldots, x_n]\,(z-x_0)\ldots(z-x_n),$$

другими словами, из предположения, что $\alpha \neq 0$ и e^α — алгебраические числа, мы вывели в качестве следствия, что трансцендентная функция e^{az} есть многочлен. Но при $\alpha \neq 0$ e^{az} — не многочлен, в чем весьма легко убедиться дифференцированием. Значит, наше предположение неверно, и теорема доказана. Положив $a = 1$, мы получаем, что e трансцендентно, а положив $a = 2\pi i$, мы получаем, что $e^{2\pi i} = 1$, значит, $2\pi i$ не может быть алгебраическим числом, что эквивалентно трансцендентности числа π. Прямым следствием доказанной теоремы является трансцендентность чисел $\ln\alpha$, $\alpha \neq 0, 1$; $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\alpha \neq 0$ при алгебраическом α.

Из трансцендентности числа π следует, что задача о квадратуре круга, другими словами, о построении с помощью циркуля и линейки квадрата с площадью, равной площади данного круга, неразрешима. С помощью циркуля и линейки можно строить только корни некоторых типов алгебраических уравнений, коэффициенты которых будут целыми числами, если мы примем радиус круга за единицу.

ГЛАВА III

ПОСТРОЕНИЕ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ С ЗАДАННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

§ 1. Постановка задач и построение целой функции по ее значениям

1. Построение целой функции по ее значениям в некоторой последовательности точек. Задача о построении целой функции, удовлетворяющей условиям

$$F(a_n) = A_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty, \tag{1}$$

всегда имеет решение, каковы бы ни были числа a_n и A_n. Сейчас мы решим эту задачу и выясним степень неопределенности ее решения. Без нарушения общности мы можем допустить, что $a_1 \neq 0$.

Возьмем целую функцию $f(z)$, имеющую нулями числа a_k:

$$|a_k| \leqslant |a_{k+1}|, \quad a_i \neq a_k, \quad \lim_{k\to\infty} |a_k| = \infty, \tag{2}$$

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{\sum\limits_{s=1}^{n_k} \frac{z^s}{s a_k^s}}$$

(числа n_k подобраны так, чтобы произведение сходилось при любом z).

Построим теперь функцию

$$F_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_n}{f'(a_n)} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{\mu_n} \frac{f(z)}{z - a_n}, \tag{3}$$

где целые неотрицательные числа μ_n будут наименьшими, удов-

етворяющими неравенствам

$$\left|\frac{A_n}{f'(a_n)}\right|\left|\frac{\ln|a_n|}{a_n}\right|^{\mu_n} < n^{-1-\delta}, \quad \delta > 0, \quad n \geqslant n_0, \tag{4}$$

це δ — некоторая фиксированная постоянная. Так как μ_n удовлеворяют условиям (4), то, очевидно, ряд целых аналитических функций (3) будет равномерно сходиться в круге $|z| \leqslant R$ при любом и $F_0(z)$ будет целой аналитической функцией.

Так как $f(z)$ имеет нули в точках a_n, то

$$F_0(a_n) = A_n, \; n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Итак, $F_0(z)$ служит решением поставленной задачи об определении целой функции, принимающей заданные значения в заданой последовательности точек с точкой накопления в бесконечости [1]).

Пусть $F(z)$ — любая целая функция, удовлетворяющая условиям (5). Тогда

$$\varphi(z) = \frac{F(z) - F_0(z)}{f(z)}$$

удет целой аналитической функцией, так как все нули знаменателя являются нулями и числителя и

$$F(z) = F_0(z) + f(z)\varphi(z). \tag{6}$$

аков вид любой целой функции, удовлетворяющей условиям (5). ы определили, таким образом, все целые функции, принимаюие заданные значения в заданной последовательности точек. адача об определении целой функции по ее значениям на мноестве точек, не имеющем предельной точки на конечной части оскости, имеет всегда бесчисленное множество решений.

Другие задачи этого типа, например задача о нахождении ех функций по значениям ее последовательных производных в данной последовательности точек, не имеют столь простых ешений. Ниже мы рассмотрим одну из таких задач.

Возвратимся к задаче построения целой функции по ее значеиям. Для различных приложений подобных интерполяционных дач весьма важно знать, как будет расти функция $F(z)$, удовтворяющая условиям (5) и имеющая наименьший рост в классе ех таких функций. Если не накладывать никаких ограничений а числа A_n, то рост наименее быстро растущей функции, вообще

---

[1]) Исследование сходимости ряда (3) при различных предположениях носительно a_n и A_n и наилучшем выборе чисел μ_n было проведено Ф. Леонтьевым [1], который доказал ряд интерполяционных теорем, опирающихся на формулу (3).

говоря, определить трудно, грубые же границы для этого роста, связанные с ростом $|A_n|$ и $|a_n|$, написать легко. В ряде случаев мы знаем, к какому классу целых функций в смысле роста должна принадлежать интерполируемая функция $F(z)$. Отсюда и возникает задача об определении целой функции, рост которой ограничен определенным образом, по ее значениям в точках $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n, \ldots$ Эта задача нами уже ранее рассматривалась, и теоремы V и VI § 3 главы II давали частичные решения этой общей задачи. Но интерполяционные процессы, в частности процесс Ньютона, вообще говоря, не могут давать полного решения подобных задач. В качестве примера рассмотрим задачу об определении целой функции по ее значениям в точках 0, 1, 2, ... Мы уже знаем (см. теорему IX § 2 главы II), что интерполяционный ряд Ньютона для целой функции $F(z)$:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n F(0)}{n!} z(z-1)\ldots(z-n+1), \tag{7}$$

будет сходящимся, если

$$h(t) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|F(re^{it})|}{r} < \cos t \ln(2\cos t) + t\sin t, \quad |t| \leqslant \frac{\pi}{2}, \tag{8}$$

причем, если, хотя бы для одного t, $|t| \leqslant \frac{\pi}{2}$, $h(t) > \cos t \ln \times$ $\times (2\cos t) + t\sin t$, то ряд (7) будет сходиться заведомо не при любом конечном z.

С другой стороны, мы уже видели, что если $F(n) = 0$, $n = 0$, 1, 2, ..., и рост $F(z)$ подчинен условиям

$$h\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) < \pi, \quad h(t) < A, \quad |t| \leqslant \frac{\pi}{2}, \tag{9}$$

где A — любая постоянная, то $F(z)$ тождественно равна нулю. Условия (9) не могут быть существенно усилены, так как рост функций $\sin \pi z$, $\sin n\pi = 0$ подчиняется ограничениям

$$h(t) = \pi|\sin t|, \quad h\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pi. \tag{10}$$

Итак, интерполяционный процесс (7) будет сходящимся для значительно более узкого класса целых функций, чем класс целых функций, единственным образом определяющихся своими значениями в точках 0, 1, 2, 3, ... Класс целых функций (в смысле роста), единственным образом определяющихся по своим элементам определенного типа, в частности по своим значениям в заданной последовательности точек, мы будем называть *классом единственности* для данной интерполяционной задачи. Так как не всегда можно наложить на рост целой функции необходимые

и достаточные условия, для того чтобы она единственным образом определялась по своим элементам определенного типа, то в качестве класса единственности мы будем брать любой класс функций, определяемый ограничениями, наложенными на их рост в случае, если эти достаточные ограничения в том или ином смысле близки к необходимым.

Пусть числа a_k, $k = 1, 2, \ldots, n, \ldots, a_1 \neq 0$, удовлетворяют условиям (2). Положим $|a_k| = \rho_k$, $k = 1, 2, \ldots$, и, предположив, что $n(r)$ есть число точек ρ_k, удовлетворяющих неравенству $\rho_k \leqslant r$, другими словами, что $n(r)$ — функция плотности последовательности a_k, рассмотрим интеграл

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt, \quad n(0) = 0. \tag{11}$$

Так как $n(t)$ постоянна на отрезках $\rho_k \leqslant t < \rho_{k+1}$, то можно, совершая интегрирование, прийти к другому выражению для $N(r)$:

$$N(r) = \sum_{k=0}^{n-1} n(\rho_k) \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \frac{dt}{t} + n(\rho_n) \int_{\rho_n}^{r} \frac{dt}{t} =$$

$$= n(\rho_n) \ln r - \sum_{k=1}^{n} [n(\rho_k) - n(\rho_{k-1})] \ln \rho_k = \sum_{\rho_k \leqslant r} \ln \frac{r}{\rho_k}. \tag{12}$$

Эта функция $N(r)$, также являющаяся характеристикой плотности последовательности чисел ρ_k, носит название *функции Неванлинна*.

Пусть целая функция $F(z)$ с максимумом модуля $M(r)$ имеет нули в точках $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Тогда функция

$$\Phi(z) = F(z) \prod_{|a_k| \leqslant R} \frac{R^2 - \bar{a}_k z}{R(a_k - z)} \tag{13}$$

при любом $R > 0$ будет также целой функцией.

По принципу максимума для аналитических функций максимум модуля $\Phi(z)$ на окружности $|z| = R$ больше ее значения в нуле. Значит,

$$|\Phi(0)| < |F(0)| \prod_{\rho_k < R} \frac{R}{\rho_k} M(R) \max_{|z|=R} \prod_{\rho_k \leqslant R} \left| \frac{R^2 - \bar{a}_k z}{R(a_k - z)} \right| = M(R), \tag{14}$$

так как при $|z| = R$

$$\left| \frac{R^2 - \bar{a}_k R e^{i\varphi}}{R(a_k - R e^{i\varphi})} \right| = \left| \frac{\bar{a}_k - R e^{-i\varphi}}{a_k - R e^{i\varphi}} \right| = 1.$$

Из неравенства (14) следует, предполагая $F(0) \neq 0$, что

$$\ln M(R) > \ln|F(0)| + \sum_{\rho_k < R} \ln \frac{R}{\rho_k} = \ln|F(0)| + N(R). \qquad (15)$$

Если бы $F(z)$ имела при $z = 0$ нуль порядка q, то $F_1(z) = z^{-q}F(z)$ имела бы максимум модуля $M_1(r)$, равный $r^{-q}M(r)$, и неравенство (15) давало бы для $M(r)$ неравенство

$$\ln M(r) > N(r) + q \ln r + \ln|F_1(0)|. \qquad (15')$$

Итак, если целая функция $F(z)$ имеет нули в точках $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и

$$\lim_{r\to\infty} [\ln M(r) - N(r)] = -\infty, \qquad (16)$$

то $F(z) \equiv 0$. Класс K целых функций, определяемых условием (16), где $N(r)$ — функция Неванлинна для последовательности $\{a_k\}$, будет классом единственности для интерполяционной задачи определения целой функции $F(z)$ по ее значениям в точках $\{a_k\}$. Действительно, если $F_1(z)$ и $F_2(z)$ принадлежат к этому классу и $F_1(a_k) = F_2(a_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, то $F(z) = F_1(z) - F_2(z)$ имеет нули в точках $a_1, a_2, \ldots$ и для нее выполняется условие (16). Отсюда следует, что $F(z) \equiv 0$ или что $F_1(z) \equiv F_2(z)$. Сузим теперь несколько этот функциональный класс K, взяв его подкласс K_0, содержащий все целые функции $F(z)$, удовлетворяющие условию

$$\ln M(r) - N(\theta r) < C, \quad r > r_0, \qquad (17)$$

где θ, $0 < \theta < 1$, — некоторое фиксированное число, а C — произвольная постоянная. Все функции этого класса принадлежат к классу K, так как из неравенства (17) следует неравенство

$$\ln M(r) - N(r) < [N(\theta r) - N(r)] + C = \int_r^{\theta r} n(t) \frac{dt}{t} + C,$$

из которого в свою очередь следует условие (16), так как

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\theta r}^{r} n(t) \frac{dt}{t} \geqslant \lim_{r\to\infty} n(\theta r) \ln \frac{1}{\theta} = \infty.$$

Для функций класса K_0 может быть решена задача о построении функции по ее значениям в точках $\{a_k\}$, последовательность которых определяет класс K_0.

Теорема I[1]) (М. В. Келдыша и И. И. Ибрагимова). *Если задана последовательность узлов интерполяции* $a_1, a_2, \ldots$

[1]) См. ссылку на стр. 218.

..., a_n, ... с функцией Неванлинна $N(r)$ и целая функция $f(z)$ с максимумом модуля $M(r)$ удовлетворяет при $r > r_0$ условию

$$\ln M(r) - N(\theta r) < C, \tag{18}$$

где θ, $0 < \theta < 1$ и $C > 0$ — постоянные, то интерполяционные многочлены

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f(a_k)\, p_{n,k}(z),$$

$$p_{n,k}(z) = \frac{\prod\limits_{s=1}^{n}(z - a_s)\left[1 - \dfrac{\theta^2 \bar{a}_s (a_k - z)}{|a_n|^2}\right]}{(z - a_k)\prod\limits_{\substack{s=1\\ s\neq k}}^{n}(a_k - a_s)} \tag{19}$$

сходятся равномерно в любом конечном круге к $f(z)$ и при любом θ', $1 > \theta' > \theta$.

$$|f(z) - P_n(z)| < \theta'^n, \quad n > n_0(\theta', r_0), \ |z| \leqslant r_0. \tag{20}$$

Доказательство. Положим $|a_k| = \rho_k$, $k = 1, 2, \ldots$, и рассмотрим вспомогательную функцию двух комплексных переменных $F_n(z, \zeta)$:

$$F_n(z, \zeta) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(z - a_k)}{\rho_n^{2n}} \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}[\rho_n^2 - \theta^2 \bar{a}_k(\zeta - z)]}{(\zeta - z)\prod\limits_{k=1}^{n}(\zeta - a_k)}. \tag{21}$$

Функция $F_n(z, \zeta)$ есть рациональная функция ζ, степень числителя на единицу ниже степени знаменателя, и все нули знаменателя различны между собой, так как $a_i \neq a_k$, $i \neq k$ и z можно предполагать не совпадающим ни с одним из чисел a_k. Находя вычеты по всем простым полюсам $F_n(z, \zeta)$, мы получаем представление $F_n(z, \zeta)$ в виде суммы простых дробей

$$F_n(z, \zeta) = \frac{1}{\zeta - z} - \sum_{k=1}^{n} \frac{p_{n,k}(z)}{\zeta - a_k}, \tag{22}$$

так как вычет в точке $\zeta = z$ равен единице, а вычет в точке $\zeta = a_k$, как легко видеть, равен $p_{n,k}(z)$, где $p_{n,k}(z)$ — многочлен, определенный равенством (19).

Умножая обе части тождества (22) на $f(\zeta)$ и интегрируя его почленно по окружности C_n, $|\zeta| = \theta^{-1}\rho_n$, мы получим, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \sum_{k=1}^{n}\frac{p_{n,\,k}(z)}{2\pi i}\int\limits_{C_n}\frac{f(\zeta)}{\zeta - a_k}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n} f(\zeta)\,F_n(z,\zeta)\,d\zeta, \qquad (23)$$

но $\theta^{-1}\rho_n > |z|$, $n > n_0(z)$ и $\theta^{-1}\rho_n > \rho_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Значит, точки $z, a_1, a_2, \ldots, a_n$ лежат внутри C_n. Поэтому

$$f(z) - P_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n} f(\zeta)\,F_n(z,\zeta)\,d\zeta. \qquad (24)$$

Для доказательства нашей теоремы необходимо оценить по модулю правую часть тождества (24) на окружности $|\zeta| = \theta^{-1}\rho_n$. Заметим прежде всего, что при $|\zeta| = \theta^{-1}\rho_n$

$$\left|\frac{\rho_n^2\theta^{-2} - \bar{a}_k\zeta}{\rho_n\theta^{-1}(\zeta - a_k)}\right| = 1, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Воспользовавшись этими равенствами из представления (21) $F_n(z,\zeta)$, мы получаем новое выражение для $|F_n(z,\zeta)|$ при $|\zeta| = \theta^{-1}\rho_n$:

$$F_n(z,\zeta)| = \frac{\theta^n}{|\zeta - z|}\prod_{k=1}^{n}\frac{\rho_k}{\rho_n}\prod_{k=1}^{n}\left|1 - \frac{z}{a_k}\right|\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{\rho_n^2\theta^{-2} - (\zeta - z)\,\bar{a}_k}{\rho_n\theta^{-1}(\zeta - a_k)}\right| =$$

$$= \frac{\theta^n}{|\zeta - z|}\prod_{k=1}^{n}\frac{\rho_k}{\rho_n}\prod_{k=1}^{n}\left|1 - \frac{z}{a_k}\right|\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{\rho_n^2\theta^{-2} - (\zeta - z)\,\bar{a}_k}{\rho_n^2\theta^{-2} - \zeta\bar{a}_k}\right| =$$

$$= \frac{\theta^n}{|\zeta - z|}\prod_{k=1}^{n}\frac{\rho_k}{\rho_n}\prod_{k=1}^{n}\left|1 - \frac{z}{a_k}\right|\prod_{k=1}^{n}\left|1 + \frac{\theta^2 z\bar{a}_k}{\rho_n^2 - \theta^2\zeta\bar{a}_k}\right|. \qquad (25)$$

При $|z| \leqslant \rho$ и $|\zeta| = \theta^{-1}\rho_n$ имеют место очевидные неравенства

$$\left|1 + \frac{\theta^2 z\bar{a}_k}{\rho_n^2 - \theta^2\zeta\bar{a}_k}\right| < 1 + \frac{\theta^2\rho}{\rho_n(1-\theta)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (26)$$

Из этих неравенств непосредственно следует неравенство

$$\prod_{k=1}^{n}\left|1 + \frac{\theta^2 z\bar{a}_k}{\rho_n^2 - \theta^2\zeta\bar{a}_k}\right| < \left[1 + \frac{\theta^2\rho}{\rho_n(1-\theta)}\right]^n < e^{\frac{\theta^2\rho}{\rho_n(1-\theta)}n} < e^{\frac{\varepsilon}{2}n}, \qquad (27)$$

если $\rho_n > \frac{2\theta^2\rho}{\varepsilon(1-\theta)}$, что будет, очевидно, выполнено при $n > n_1(\rho, \varepsilon)$ и любом $\varepsilon > 0$.

Далее, имеем неравенство

$$\prod_{k=1}^{n}\left|1-\frac{z}{a_k}\right|\leqslant\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\rho}{\rho_k}\right)<e^{\rho\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\rho_k}}<2^{-1}e^{-C+\frac{\varepsilon}{2}n}, \tag{28}$$

если

$$\frac{C+\ln 2}{n}+\frac{\rho}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\rho_k}<\frac{\varepsilon}{2},$$

что также будет иметь место при $n>n_2(\rho,\varepsilon)$ вследствие условия $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n=\infty$. Наконец, при $\theta^{-1}\rho_n>2\rho$, другими словами, при $n>n_3(\rho)$,

$$\frac{1}{|\zeta-z|}<\frac{1}{\theta^{-1}\rho_n-\rho}<\frac{2\theta}{\rho_n}. \tag{29}$$

Воспользовавшись неравенствами (27), (28) и (29), мы из соотношения (25) получаем неравенство

$$|F_n(z,\zeta)|<\frac{\theta^{n+1}e^{\varepsilon n-C}}{\rho_n}\prod_{k=1}^{n}\frac{\rho_k}{\rho_n}<\frac{e^{-C}}{\rho_n}[\theta e^{\varepsilon}]^n e^{-N(\rho_n)}, \tag{30}$$

справедливое при $n\geqslant\max[n_1,\ n_2,\ n_3]$. Так как ε может быть выбрано сколь угодно малым, то, каково бы ни было θ, $\theta<1$, можно положить $\theta e^{\varepsilon}=\theta_1<1$. Из неравенства (30) следует оценка

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\theta^{-1}\rho_n}F_n(z,\zeta)f(\zeta)\,d\zeta\right|<e^{-C}\theta_1^n e^{-N(\rho_n)}M\left(\frac{\rho_n}{\theta}\right)<$$

$$<\theta_1^n e^{\ln M(\theta^{-1}\rho_n)-N(\rho_n)-C}\leqslant\theta_1^n, \tag{31}$$

справедливая для всех $n>n_0$. Из этой оценки немедленно следует наша теорема.

Заметим, что расширение класса функций, для которых сходится интерполяционный процесс, достигается здесь благодаря тому, что степень n-го интерполяционного многочлена уже не n, а может достигать величины $2n-1$. Насколько шире класс функций, для которого верна эта теорема, чем тот кла с, для которого обеспечена сходимость ряда Ньютона, видно из сравнения неравенства (17) с условием (153) теоремы VI § 3 главы II.

Методом, использованным в этой теореме, можно было решить задачу о построении целой функции по ее значениям в точках a_k и для класса функций более широкого, чем K_0. Для этого достаточно было бы заменить постоянную $\theta<1$ величиной θ_n, стремя-

щейся к единице, правда, быстроту стремления θ_n к единице пришлось бы выбирать в зависимости от ρ_n.

2. Интерполяция рациональными дробями и одна теорема о целых функциях. Введем в рассмотрение функцию $N_1(r)$, связанную с монотонно неубывающей и неограниченно растущей последовательностью чисел $\rho_1 > 1$, $\rho_1 \leqslant \rho_2 \leqslant \ldots \leqslant \rho_n \leqslant \ldots$, определив эту функцию интегралом

$$N_1(r) = \int_0^r n(t)\left[\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right] dt, \tag{32}$$

где $n(r)$ — по-прежнему число точек последовательности $\{\rho_n\}$, удовлетворяющих неравенству $\rho_n \leqslant r$.

Разбивая в правой части этого равенства интеграл на сумму интегралов по отрезкам, где $n(t)$ сохраняет постоянное значение, после простых вычислений получим

$$N_1(r) = \sum_{\rho_k < r}\left[\frac{1}{\rho_k} - \frac{\rho_k}{r^2}\right].$$

Предполагая, что $|z| \leqslant \rho$, $2\rho < r$ и $|a_k| = \rho_k$, придем к неравенству

$$\prod_{\rho_k \leqslant r}\left|\frac{r(z-a_k)}{r^2 - \bar{a}_k z}\right| = \prod_{\rho_k < r}\frac{\rho_k}{r}\prod_{\rho_k < r}\left|\frac{1 - \dfrac{z\bar{a}_k}{\rho_k^2}}{1 - \dfrac{z\bar{a}_k}{r^2}}\right| =$$

$$= e^{-N(r)}\prod_{\rho_k < r}\left|1 - \frac{z\bar{a}_k(\rho_k^{-2} - r^{-2})}{1 - z\bar{a}_k r^{-2}}\right| <$$

$$< e^{-N(r)}\prod_{\rho_k < r}\left[1 + 2\rho\rho_k\left(\frac{1}{\rho_k^2} - \frac{1}{r^2}\right)\right] <$$

$$< e^{-N(r) + 2\rho\sum\limits_{\rho_k < r}\left(\frac{1}{\rho_k} - \frac{\rho_k}{r^2}\right)} = e^{2\rho N_1(r) - N(r)}. \tag{33}$$

Неравенство (33) позволяет теперь доказать одну теорему об интерполяции рациональными дробями.

Теорема II. *Если функции $N(r)$ и $N_1(r)$ определяются монотонно неубывающей последовательностью чисел $\rho_k = |a_k|$, $\rho_1 > 0$, $\lim\limits_{r\to\infty}\rho_n = \infty$, и $M(r)$ — максимум модуля целой функции $f(z)$, то при выполнении условия*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln M(r) - N(r)}{N_1(r)} = -\infty \tag{34}$$

рациональные интерполяционные дроби

$$Q(z, r) = \prod_{|a_k|<r} \frac{z-a_k}{r^2 - z\bar{a}_k} \sum_{|a_q|<r} \frac{\prod\limits_{|a_k|<r} (r^2 - a_q\bar{a}_k)}{\prod\limits_{\substack{|a_k|<r \\ k\neq q}} (a_q - a_k)} \frac{f(a_q)}{z-a_q} \tag{35}$$

равномерно сходятся к $f(z)$ в любом конечном круге $|z| \leqslant \rho$ при $r \to \infty$.

Дроби $Q(z, r)$, как легко видеть, удовлетворяют условиям

$$Q(a_s, r) = f(a_s), \quad |a_s| < r.$$

Доказательство. Заметим, что имеет место соотношение

$$R(z, r) = f(z) - Q(z, r) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r} \prod_{\rho_n<r} \frac{r(z-a_n)}{r^2 - z\bar{a}_n} \frac{r^2 - \zeta\bar{a}_n}{r(\zeta - a_n)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \tag{36}$$

где C_r есть окружность $|\zeta| = r$ и $|z| \leqslant \rho < \frac{1}{2} r$. Это соотношение можно получить непосредственно, если вычислить интеграл с помощью вычетов, приняв во внимание, что подынтегральная функция имеет простые полюса в точках $a_i, \ldots, a_s$, $|a_s| < r$, и z. Оценим величину $R(z, r)$. Воспользовавшись неравенством (33) и тем, что при $|\zeta| = r$

$$\left| \frac{r(\zeta - a_n)}{r^2 - \zeta\bar{a}_n} \right| = 1,$$

придем к неравенству

$$|R(z, r)| < e^{2\rho N_1(r) - N(r)} 2M(r).$$

Условие (34) непосредственно дает стремление к нулю $|R(z, r)|$ с ростом r

В условиях (18) и (34) теорем I и II пределы по r и n могут быть заменены пределами по любой последовательности $\theta^{-1}\rho_k$ и ρ_k соответственно. Эта замена приводит к сходимости к $f(z)$ некоторых подпоследовательностей $P_n(z)$ и $Q(z, \rho_n)$.

Воспользуемся приближением рациональными дробями (35) для доказательства одной теоремы, относящейся к теории функций комплексного переменного, которая нам понадобится в дальнейшем.

Теорема II′. *Если $f(z)$ — целая функция, растущая не скорее показательной,*

$$\ln|f(z)| < \sigma_1 |z|, \quad \sigma_1 > \sigma, \quad |z| > r_0(\sigma_1),$$

то, каковы бы ни были $\rho > \rho_0$ и $\delta = \delta(\rho) > 0$, всегда существует окружность радиуса R, $\rho \leqslant R \leqslant [1 + \delta(\rho)]\rho$, на которой

выполняется неравенство

$$|f(Re^{i\varphi})| > e^{-\lambda\rho}, \quad \lambda = 4\sigma_1[1+\delta(\rho)]\ln 3\frac{1+\delta(\rho)}{\delta(\rho)}. \tag{37}$$

Доказательство. Положим $f(z) = z^m \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k$, $A_0 \neq 0$, $r = 3(1+\delta)\rho$ и $n = [3\sigma_1(1+\delta)\rho]$, $\sigma_1 = \sigma + \varepsilon$, где знак $[a]$ есть обозначение целой части числа a. Рассмотрим $n+1$ окружность в плоскости ζ:

$$|\zeta| = \rho + \frac{k\delta\rho}{n} = \rho_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \quad \delta = \delta(\rho),$$

и допустим, что на каждой из этих окружностей имеется точка a_k, в которой выполняется для $f(z)$ неравенство, обратное неравенству (37). Найдем функции $n(t)$ и $N(t)$ для последовательности точек a_k, расположенных на этих окружностях $|\zeta| = \rho + k\rho\delta(\rho)n^{-1}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Нетрудно заметить, что

$$n(t) = \begin{cases} 0 & t < \rho; \\ 1 + \left[n\dfrac{t-\rho}{\delta\rho}\right], & \rho \leqslant t < (1+\delta)\rho, \quad \delta = \delta(\rho); \\ n+1, & t \geqslant (1+\delta)\rho. \end{cases}$$

Поэтому при $r = 3(1+\delta)\rho$

$$N(r) = \int_{\rho}^{r} \frac{n(t)}{t}\,dt = \int_{\rho}^{(1+\delta)\rho} \left(1 + \frac{n(t-\rho)}{\delta\rho} - \left\{\frac{n(t-\rho)}{\delta\rho}\right\}\right)\frac{dt}{t} +$$

$$+ (n+1)\int_{\rho(1+\delta)}^{r} \frac{dt}{t} > (n+1)\ln\frac{r}{(1+\delta)\rho} = (n+1)\ln 3.$$

Заменяя в формуле (36) $f(z)$ на $z^{-m}f(z)$ и полагая $z = 0$, мы будем иметь соотношение

$$A_0 = Q(0, r) + R(0, r),$$

где $R(z, r)$ определяется формулой (36), а $Q(z, r)$ — формулой (35). Найдем оценки для $Q(0, r)$ и $R(0, r)$ при выбранных n и r и в предположении, что выполняется неравенство, обратное (37) в каждой точке a_k, $k = 0, 1, \ldots, n$. Мы получим, что при $\rho > \rho_0(\varepsilon)$, $\varepsilon = \sigma_1 - \sigma$,

$$|R(0, r)| < \frac{3}{2} r^{-m} e^{\sigma_1 r} \prod_{k=0}^{n} \frac{\rho_k}{r} = \frac{3}{2} r^{-m} e^{\sigma_1 r - N(r)} <$$

$$< \frac{3}{2} r^{-m} e^{-(n+1)\ln\frac{3}{e}} < \frac{3}{2} p^{-m} \left(\frac{e}{3}\right)^{3\sigma_1\rho},$$

$$\lim_{\rho\to\infty} R(0, r) = 0$$

и что

$$|Q(0, r)| < \frac{2^n}{n!}\prod_{k=0}^{n}\frac{\rho_k}{r}\frac{n^n r^{-n-1}}{2\rho(\rho\delta)^n}[r^2+\rho^2(1+\delta)^2]^{n+1}\max_{0\leqslant k\leqslant n}|f(a_k)| <$$

$$< \left[\frac{20e}{9}\right]^n e^{-N(r)\delta-n}(1+\delta)^{n+1}e^{-4\sigma_1\rho(1+\delta)\ln\frac{3(1+\delta)}{\delta}} < \left[\frac{20e}{81}\right]^n < \left[\frac{11}{16}\right]^{2\sigma_1\rho},$$

$$\lim_{\rho\to\infty} Q(0, r) = 0.$$

Объединяя эти неравенства, мы получаем неравенство

$$|A_0| < \frac{3}{2}\left(\frac{14}{15}\right)^{2\sigma_1\rho}.$$

Так как ρ неограниченно растет, а $A_0 \neq 0$, то это неравенство невозможно при $\rho > \rho_0(\varepsilon)$. Значит, хотя бы на одной окружности $|\zeta| = \rho + \frac{k\delta(\rho)}{n}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, должно выполняться неравенство (37), что и доказывает нашу теорему.

3. Определение целой функции по значениям последовательных производных. Если заданы величины последовательных производных целой функции в одной и той же точке, например в точке $z = 0$, т. е.

$$f^{(n)}(0) = a_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{38}$$

то

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n,$$

и значит, эти условия определяют только одну целую функцию $f(z)$, если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}} = 0$. Если же этот верхний предел отличен от нуля, то не существует ни одной целой функции, удовлетворяющей условиям (38). Если мы хотим найти целую функцию, удовлетворяющую условиям

$$f^{(n)}(a_n) = A_n, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{39}$$

в случае, когда числа a_n имеют точку накопления на конечной части плоскости, то на A_n, как легко видеть, необходимо накладывать определенные ограничения. Если же $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, то всегда существует бесчисленное множество целых функций, удовлетворяющих условиям (39). Это утверждение может быть без труда доказано с помощью некоторого обобщения формулы (3) § 1. Найти же представление всех целых функций, удовлетворяющих

условиям (39), в сколько-нибудь обозримой форме в общем случае трудно. Мы остановимся на этой задаче для частного случая $a_n = n$ и решим ее до конца.

Определим прежде всего все целые функции, удовлетворяющие условиям

$$F^{(n)}(n) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{40}$$

Рассмотрим функцию двух комплексных переменных

$$U(z, \zeta) = z\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)^{\zeta-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\zeta)\ldots(n-\zeta)}{n!\zeta^n} z^{n+1} \tag{41}$$

при $|z| < |\zeta|$. Эта функция является регулярной в бесконечности функцией ζ.

Далее, имеем

$$U(z, \zeta) = ze^{-z}e^{z+(\zeta-1)\ln\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)} = ze^{-z}e^{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k+1-kz}{k(k+1)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{zq_n(z)\,e^{-z}}{\zeta^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_k(z)}{\zeta^k}, \tag{42}$$

где $q_n(z)$, как легко видеть,—многочлен степени $2n$ относительно z. Так как $U(z, \zeta)$ имеет особенности только в точках $\zeta = 0$ и $\zeta = z$, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|q_n(z)|} = |z|. \tag{43}$$

Дифференцируя n раз $U(z, \zeta)$ по z и полагая $z = n$, мы получаем, что при $|\zeta| > n$

$$U^{(n)}(n, \zeta) = n\frac{(1-\zeta)\ldots(n-\zeta)}{\zeta^n}\left(1 - \frac{n}{\zeta}\right)^{\zeta-n-1} +$$

$$+ \frac{(1-\zeta)\ldots(n-1-\zeta)}{\zeta^{n-1}} n\left(1 - \frac{n}{\zeta}\right)^{\zeta-n} = 0. \tag{44}$$

Отсюда следует на основании соотношений (42), что $\varphi_k(z)$ при любом $k \geqslant 0$ удовлетворяет условиям (40), так как всегда можно взять $|\zeta| > k$.

Пусть целая функция $F(z)$ принадлежит к классу функций K_0, для которых выполняются условия (40) и

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n. \tag{45}$$

Рассмотрим функцию $f(\zeta)$:

$$f(\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\zeta^{n-1}}{(1-\zeta)\ldots(n-\zeta)}, \tag{46}$$

ассоциированную с $F(z)$. Так как $F(z)$ — целая функция, то вследствие $\overline{\lim}\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}}=0$ ряд (46) равномерно сходится в области $|\zeta|\leqslant R$, $|\zeta-k|\geqslant\varepsilon$, $k=1,2,\ldots$, при любых $R>0$, $\varepsilon>0$, и значит, $f(\zeta)$ регулярна в любой точке $\zeta\neq k$, $k=1,2,\ldots$ В точках $\zeta=k$ $f(\zeta)$ может иметь полюса первого порядка. Подсчитаем вычет $f(\zeta)$ в полюсе $\zeta=k$. Находя вычеты каждого члена ряда (46) при $\zeta=k$ и суммируя их, мы получаем величину этого вычета

$$\frac{(-1)^k}{(k-1)!}k^{k-1}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{a_{k+s}k^s}{s!}=(-1)^k\frac{k^{k-1}}{(k-1)!}F^{(k)}(k)=0,$$
$$k=1,2,\ldots, \tag{47}$$

так как $F(z)$ удовлетворяет условиям (40). Итак, если $F(z)$ принадлежит к классу K_0, то $f(\zeta)$ — целая функция. В этом случае между $F(z)$ и $f(\zeta)$ существует связь, даваемая соотношением

$$F(z)=\frac{z}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)^{\zeta-1}\frac{d\zeta}{\zeta}, \tag{48}$$

где C — любая окружность $|\zeta|=r>|z|$. Действительно,

$$\frac{z}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)^{\zeta-1}\frac{d\zeta}{\zeta}=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(n-1)!}\int_{C_n}\frac{(1-\zeta)\ldots(n-1-\zeta)}{\zeta^n}f(\zeta)\,d\zeta=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_nz^n}{n!}=F(z),$$

где C_n — окружность $|\zeta|=n-\frac{1}{2}$, так как

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{(1-\zeta)\ldots(n-1-\zeta)}{\zeta^n}f(\zeta)\,d\zeta=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{(1-\zeta)\ldots(n-1-\zeta)}{(1-\zeta)\ldots(k-\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta^{n-k+1}},$$

а

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{(1-\zeta)\ldots(n-1-\zeta)}{(1-\zeta)\ldots(k-\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta^{n-k+1}}=\begin{cases}\frac{1}{n}, & k=n;\\ 0, & k\neq n.\end{cases}$$

Замена контура C контуром C_r возможна, так как $f(\zeta)$ — целая функция.

Пользуясь соотношениями (42), из представления (48) мы найдем

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} zq_n(z)e^{-z}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty} f_n\varphi_n(z). \tag{49}$$

Этот ряд равномерно сходится в любой конечной области плоскости z вследствие того, что $f(\zeta)$ — целая функция и выполняется предельное соотношение (43). Обратно, если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n|}=0$, то ряд (49) представляет целую функцию $F(z)$, удовлетворяющую условиям (40), так как все $\varphi_n(z)$ этим условиям удовлетворяют. Мы нашли, таким образом, представление любой целой функции класса K_0.

Теорема III. *Каковы бы ни были числа A_n, $n=0,1,\ldots$, всегда существует целая функция $F(z)$, удовлетворяющая условиям*

$$F^{(n)}(n)=A_n,\quad n=0,1,\ldots, \tag{50}$$

причем любая такая функция может быть представлена в виде

$$F(z)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^{n-1}}{n!}A_n\left[z\left(1-\frac{z}{n}\right)^{n-1}-\sum_{k=1}^{\nu_n}\frac{\varphi_k(z)}{n^k}\right]+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}C_n\varphi_n(z), \tag{51}$$

где C_n подчинены только условию $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|}=0$, ν_n — целые положительные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$\nu_n\geqslant 2+\frac{2}{\ln n}\ln[1+e^n|A_n|], \tag{52}$$

а $\varphi_n(z)$ определяются соотношением (42).

Доказательство. Многочлены $p_n(z)=\frac{1}{n!}z(z-n)^{n-1}$ связаны с функцией $U(z,\zeta)$ соотношением

$$p_n(z)=\frac{(-1)^{n-1}n^{n-1}}{n!}U(z,n).$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$p_n^{(k)}(k)=\begin{cases}1, & k=n;\\ 0, & k\neq n.\end{cases} \tag{53}$$

Далее, из (42) следует, что при $|z| \leqslant \rho < \sqrt{n} - 1$, $n > n(\rho)$,

$$\left| z\left(1 - \frac{z}{n}\right)^{n-1} - \sum_{k=0}^{\nu_n} \frac{\varphi_k(z)}{n^k} \right| < \sum_{=\nu_n+1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(z)|}{n^k} < \sum_{k=\nu_n+1}^{\infty} \frac{(1+\rho)^k}{n^k} < \sum_{k=\nu_n+1}^{\infty} n^{-\frac{k}{2}}.$$

Выбрав ν_n удовлетворяющими неравенствам (52), мы можем утверждать, что функция

$$F_1(z) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^{n-1}}{n!} A_n \left[z\left(1 - \frac{z}{n}\right)^{n-1} - \sum_{k=0}^{\nu_n} \frac{\varphi_k(z)}{n^k} \right]$$

— целая функция. Эта функция будет подчиняться условиям (50) в силу (53) и (44). Всякая другая целая функция, подчиняющаяся условиям (50), будет суммой $F_1(z)$ и целой функции класса K_0. Это доказывает нашу теорему.

Задачей определения целой функции в классах единственности по значениям ее последовательных производных в точках натурального ряда мы займемся ниже.

4. Постановка общей задачи определения целой функции по заданным элементам. Все рассмотренные нами в этом параграфе задачи можно рассматривать как частные случаи одной задачи, задачи определения функции по заданным элементам.

Назовем *элементом целой функции* $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ линейный функционал $f_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n C_{n,k}$, где $\|C_{n,k}\|$ — заданная бесконечная матрица. Тогда задача заключается в следующем: f_k — *элементы целой функции* $F(z)$ — *заданы* ($k = 0, 1, 2, \ldots$), *построить* $F(z)$.

Как нетрудно убедиться, эта формулировка содержит все задачи, поставленные выше.

Приведенные примеры решения задач на определение целых функций с заданными элементами показывают, что решение этих задач имеет сходство с решением краевых задач в теории дифференциальных уравнений. С каждой такой задачей в широком классе случаев связана система собственных функций. Например, для задачи определения целой функции с заданными значениями в точках $a_1, a_2, \ldots$ собственными функциями служат функции

$$\varphi(z) z^k, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где $\varphi(z)$ имеет нули только в точках $a_1, a_2, \ldots$ Для задачи определения целой функции с заданными значениями последовательных

производных в точках 0, 1, 2,... собственными функциями служат $\varphi_n(z)$ и т. д. Общее решение такой задачи состоит в определении одного частного решения и всех ее собственных функций. Еще одним примером того же рода может служить задача определения всех целых функций с заданными значениями

$$F^{(n)}(t^n), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где t фиксировано, $|t| \geqslant 1$.

Собственными функциями этой задачи, подробного решения который мы приводить не будем, будут функции $f^{(s)}(d_k z)$, где

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!} z^n,$$

числа d_k пробегают всю совокупность корней уравнения $f(z) = 0$, а s принимает значения от нуля до величины кратности корня, уменьшенной на единицу (если у этого уравнения есть кратные корни).

§ 2. Проблема моментов в комплексной области для целых функций не выше первого порядка нормального типа

Ряд задач на определение целых функций по заданным элементам в классе единственности данной задачи может быть сведен к решению некоторой проблемы моментов.

Если $F(z)$ — целая функция первого порядка нормального типа, а $f(z)$ — ассоциированная с ней по Борелю функция

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n, \; f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}, \; \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \sigma < \infty,$$

то, как мы уже знаем, $f(z)$ регулярна вне круга $|z| = \sigma$ и эти функции связаны соотношением

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=\sigma_1} e^{z\zeta} f(\zeta)\, d\zeta,$$

где $\sigma_1 > \sigma$. Из этого соотношения следует, например, что

$$F(n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C e^{n\zeta} f(\zeta)\, d\zeta, \quad F^{(n)}(n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C [\zeta e^{\zeta}]^n f(\zeta)\, d\zeta. \tag{54}$$

Поэтому, если заданы числа $F(n)$ или $F^{(n)}(n)$, $n = 0, 1, \ldots$, то определение целой функции при таких заданиях может быть сведено к решению проблем моментов в комплексной области, заданных соотношениями (54) при $n = 0, 1, \ldots$ Мы в дальнейшем рас-

смотрим проблему моментов типа (54) в общем случае. В дальнейшем $F(z)$ будет целой функцией не выше первого порядка нормального типа, а $f(z)$ — функция, ассоциированная с $F(z)$ по Борелю.

Допустим, что заданы связанные с $F(z)$ функционалы

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C [u(\zeta)]^n f(\zeta)\,d\zeta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{55}$$

где $u(z)$ [$u(0) = 0$, $u'(0) = 1$]—регулярная в конечной или бесконечной области $\overline{D}$ функция, причем все особые точки функции $f(\zeta)$ являются внутренними точками $\overline{D}$, а замкнутый контур C лежит внутри $\overline{D}$ и содержит внутри себя все особенности $f(\zeta)$.

Пусть D— односвязная содержащаяся в $\overline{D}$ область, в которой функция $u(z)$ будет не только регулярна, но и однолистна. Предположим также, что область D содержит внутри все особенности $f(z)$.

Пусть область D переходит в плоскости комплексного переменного w при отображении $w = u(z)$ в односвязную область D_1. С помощью функции $\tau = \lambda(w)$ [$\lambda(0) = 0$, $\lambda'(0) = 1$] мы можем конформно отобразить область D_1 в плоскости w на круг $|\tau| \leqslant \rho$ в плоскости τ.

Докажем теперь основную теорему, дающую представление функции $F(z)$[1]) с помощью чисел A_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Теорема IV. *Пусть $F(z)$ — целая функция не выше первого порядка нормального типа τ, и пусть заданы числа*

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C [u(\zeta)]^n f(\zeta)\,d\zeta, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{56}$$

где $f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\zeta^{n+1}}$ — *регулярная в бесконечности функция,* $u(\zeta)$ [$u(0) = 0$, $u'(0) = 1$] *регулярна в области $\overline{D}$, однолистна и регулярна в конечной или бесконечной области D, для которой точка $\zeta = 0$ является внутренней точкой, $\overline{D} \supset D$, а замкнутый контур C содержит внутри себя все особенности функции $f(\zeta)$ и сам находится внутри области $\overline{D}$.*

Тогда, если все особенности функции $f(\zeta)$ лежат внутри D, функция $F(z)$ представляется сходящимся для всякого конечного

---

[1]) В дальнейшем, говоря о функциях не выше первого порядка и нормального типа, или, что то же самое, о функциях, растущих не скорее показательной, мы будем считать, что наша целая функция или имеет порядок, меньший единицы, или, если ее порядок равен единице, она не бесконечного типа.

значения z рядом многочленов $P_n(z)$:

$$\left.\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(z), \\ P_n(z) &= \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\zeta^n}\left\{\frac{\lambda'[u(\zeta)]\,u'(\zeta)\,\zeta^{n+1}e^{z\zeta}}{\{\lambda[u(\zeta)]\}^{n+1}}\right\}\Bigg|_{\zeta=0}, \\ c_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \{\lambda[u(\zeta)]\}^n f(\zeta)\,d\zeta, \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

где $\tau = \lambda(w)$ $[\lambda(0) = 0,\ \lambda'(0) = 1]$ *конформно отображает область* D_1 *в плоскости* w, *получающуюся из области* D *с помощью отображения* $w = u(z)$ *на круг* $|\tau| \leqslant \rho$, *причем существуют числа* $B_{n,\,p,\,m}$, $0 \leqslant n < \infty$, $0 \leqslant p \leqslant m$, $0 \leqslant m < \infty$, *не зависящие от* $F(z)$, *такие, что*

$$\left|c_n - \sum_{p=0}^{m} B_{n,\,p,\,m} A_p\right| < \delta^m, \quad \delta < 1. \tag{58}$$

Непосредственным следствием этой общей теоремы является следующая теорема о единственности целой функции:

Теорема IV′. *Если при выполнении всех условий теоремы* IV $A_n = 0$, $n = 0, 1, \ldots$, *то* $F(z)$ *равна нулю тождественно.*

Другим следствием теоремы IV является теорема IV″, связанная с разложением функции $F(z)$ в обычные интерполяционные ряды:

Теорема IV″. *Пусть выполнены все условия теоремы* IV *и, кроме того, функция* $u(z)$ *отображает область* D *на круг* $|\tau| \leqslant \rho'$. *Тогда в теореме* IV *можно взять* $\lambda(w)$ *равным* w, *и мы получим, что*

$$\left.\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(z), \\ P_n(z) &= \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\zeta^n}\left[\frac{u'(\zeta)\,\zeta^{n+1}e^{z\zeta}}{[u(\zeta)]^{n+1}}\right]\Bigg|_{\zeta=0} \end{aligned}\right\}. \tag{59}$$

Доказательство теоремы IV. Заметим прежде всего, что все особенности $f(z)$ лежат внутри области D.

Рассмотрим интегральное представление функции $e^{z\eta}$:

$$e^{z\eta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{\lambda'[u(\zeta)]\,u'(\zeta)\,e^{z\zeta}}{\lambda[u(\zeta)] - \lambda[u(\eta)]}\,d\zeta, \tag{60}$$

где $u(\zeta)$ и $\lambda(w)$ удовлетворяют условиям теоремы IV, η есть точка замкнутого контура Γ_2 в плоскости комплексного переменного η, содержащего внутри точку $\eta = 0$ и все особые точки

функции $f(\eta)$ и переходящего в плоскости τ, $\tau=\lambda[u(\eta)]$, в контур Γ_2', содержащий внутри точку $\tau=0$ и находящийся внутри круга $|\tau|\leqslant\rho_2<\rho$, а Γ_1 есть односвязный и замкнутый контур в плоскости ζ, в который переходит окружность $|\tau|=\rho_1$, $\rho_2<\rho_1<\rho$, при отображении $\tau=\lambda[u(\zeta)]$. Очевидно, что Γ_1 находится внутри области D и все точки контура Γ_2 лежат внутри контура Γ_1.

При этих условиях представление (60) функции $e^{z\eta}$ следует из однолистности функции $\tau=\lambda[u(\zeta)]$ внутри области D.

Из представления (60) непосредственно получается разложение функции $e^{z\eta}$ в ряд, именно

$$e^{z\eta}=\sum_{m=0}^{n}\{\lambda[u(\eta)]\}^m\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\lambda'[u(\zeta)]\,u'(\zeta)\,e^{z\zeta}}{\{\lambda[u(\zeta)]\}^{m+1}}d\zeta+R_n(z,\eta),\tag{61}$$

где

$$R_n(z,\eta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\left\{\frac{\lambda[u(\eta)]}{\lambda[u(\zeta)]}\right\}^{n+1}\frac{\lambda'[u(\zeta)]\,u'(\zeta)\,e^{z\zeta}}{\lambda[u(\zeta)]-\lambda[u(\eta)]}d\zeta.\tag{62}$$

Если η — точка контура Γ_2, ζ — точка контура Γ_1, то по условию выбора этих контуров $|\lambda[u(\eta)]|\leqslant\rho_2$, $\rho_2<\rho_1$ и $|\lambda[u(\zeta)]|=\rho_1$. Отсюда следует, что должно быть выполнено неравенство

$$|R_n(z,\eta)|<K\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^n,$$

где K не зависит от n.

Далее, вследствие отсутствия внутри D нулей у функции $\zeta^{-1}\lambda[u(\zeta)]$ мы получаем, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\lambda'[u(\zeta)]\,u'(\zeta)\,e^{z\zeta}\zeta^{n+1}}{\{\lambda[u(\zeta)]\}^{n+1}}\frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}}=$$

$$=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\zeta^n}\left[\frac{\lambda'[u(\zeta)]\,u'(\zeta)\,e^{z\zeta}\zeta^{n+1}}{\{\lambda[u(\zeta)]\}^{n+1}}\right]_{\zeta=0}=P_n(z),\tag{63}$$

где $P_n(z)$, как это непосредственно видно, есть многочлен степени n относительно z.

Умножим обе части равенства (61) на $f(\eta)$. Имея в виду, что $F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}e^{z\eta}f(\eta)\,d\eta$, мы после интегрирования по контуру Γ_2 в плоскости η получим

$$\left.\begin{aligned}F(z)&=\sum_{m=0}^{n}P_m(z)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\{\lambda[u(\eta)]\}^m f(\eta)\,d\eta+R_n(z),\\ R_n(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}R_n(z,\eta)\,f(\eta)\,d\eta.\end{aligned}\right\}\tag{64}$$

Но так как при z, находящемся в любой ограниченной области D плоскости комплексного переменного z, и η, находящемся на контуре Γ_2, имеем $|R_n(z, \eta)| < K\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^n$, $\rho_2 < \rho_1$, где K зависит только от D, но не от n и z, то

$$|R_n(z)| < K_1\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^n, \quad \rho_2 < \rho_1, \tag{65}$$

где K_1 опять зависит только от D и, значит,

$$\begin{gathered} F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) c_n, \\ c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \{\lambda[u(\eta)]\}^n f(\eta) d\eta\}. \end{gathered} \tag{66}$$

На основании сделанных замечаний можно утверждать, что ряд (66) равномерно сходится к функции $F(z)$, если только z находится в некоторой ограниченной области D плоскости комплексного переменного z. Область D в плоскости η переходит в область D_1 в плоскости w при отображении с помощью функции $w = u(\eta)$. Контур Γ_1, лежащий внутри D и содержащий внутри себя контур Γ_2, перейдет при этом конформном преобразовании в контур $\overline{\Gamma}_1$, который будет лежать внутри области D_1 и содержать внутри себя все точки контура $\overline{\Gamma}_2$, в который при этом же конформном преобразовании перейдет контур Γ_2. Функция $[\lambda(w)]^n$ по условию будет регулярна в области D_1. Так как все точки $\overline{\Gamma}_1$ будут внутренними точками области D_1, то всегда можно, как мы уже знаем (см. п. 5 § 6 главы I), найти такой многочлен степени m, $Q_m(\omega) = \sum_{p=0}^{m} B_{n,p,m} w^p$, что будет выполнено неравенство

$$|[\lambda(\omega)]^n - Q_m(\omega)| < \delta^m, \quad \delta < 1, \tag{67}$$

для всякого w, находящегося в замкнутой области D_2, границей которой является контур $\overline{\Gamma}_1$, произвольного $m > m_0$ и некоторого δ, $\delta < 1$, не зависящего от n, m и ω.

Но контур $\overline{\Gamma}_2$ обладает тем свойством, что все его точки являются внутренними точками области D_2. Значит, воспользовавшись неравенством (67), мы можем получить неравенство

$$\left|c_n - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} Q_m[u(\eta)] f(\eta)\, d\eta\right| < \delta^m \int_{\Gamma_2} |f(\eta)|\,|d\eta| \tag{68}$$

или неравенство

$$\left| c_n - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_2} \left\{ \sum_{p=0}^{m} B_{n,\,p,m} [u(\eta)]^p \right\} f(\eta)\, d\eta \right| =$$

$$= \left| c_n - \sum_{p=0}^{m} B_{n,\,p,\,m} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_2} [u(\eta)]^p f(\eta)\, d\eta \right| =$$

$$= \left| c_n - \sum_{p=0}^{m} B_{n,\,p,\,m} A_p \right| < \delta_1^m, \quad 1 > \delta_1 > \delta \tag{69}$$

для всякого m, большего m_1 и δ_1, не зависящего от m.

Этим теорема IV доказана полностью. Более того, мы установили и характер сходимости нашего разложения функции $F(z)$.

Действительно [см. равенство (63)], выполняются неравенства

$$|c_n| \leqslant q_2 \rho_2^n, \quad |P_n(z)| \leqslant q_1 \rho_1^{-n}, \tag{70}$$

где q_1 и q_2 от n не зависят и q_1 зависит от z.

Многочлены $P_n(z)$ можно представить в более простой форме, чем это сделано равенствами (63). Так как $P_n(z)$ определяются с помощью равенств

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_2} \frac{\lambda'[u(\zeta)]\, u'(\zeta)\, e^{z\zeta}}{\{\lambda[u(\zeta)]\}^{n+1}}\, d\zeta, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{71}$$

где Γ_2 — любой замкнутый контур, содержащий внутри начало, лежащий в области однолистности функции $\tau(\zeta) = \lambda[u(\zeta)]$, то, вводя обратную функцию $\zeta = \theta(\tau)$, мы можем представить многочлены $P_n(z)$ в форме

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_2} \frac{e^{z\zeta}\, d\tau(\zeta)}{[\tau(\zeta)]^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{e^{z\theta(\tau)}}{\tau^{n+1}}\, d\tau, \tag{72}$$

где C — замкнутый контур, содержащий внутри начало, в который перейдет контур Γ_2 при отображении $\zeta = \theta(\tau)$, или в форме

$$P_n(z) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\tau^n} e^{z\theta(\tau)} \Big|_{\tau=0}. \tag{73}$$

Из этого последнего представления многочленов $P_n(z)$ следует, что они будут порождаться функцией $e^{z\theta(\tau)}$, т. е.

$$e^{z\theta(\tau)} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)\, \tau^n, \tag{74}$$

и, далее, что должно выполняться неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|P_n(z)|} \leqslant \bar{\rho}^{-1}, \tag{75}$$

где $\bar{\rho}$ — радиус круга сходимости ряда $\theta(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \tau^n$, причем равенство должно иметь место почти для всех z.

Возникает вопрос, будет ли условие теоремы IV, требующее, чтобы все особенности функции $f(z)$ находились внутри области однолистности D функции $u(z)$, в общем случае естественным? Иначе говоря, можно ли дать более широкие условия для расположения особенностей функции $f(z)$ в общем случае, такие, что при выполнении их функция $F(z)$ будет определяться единственным образом при задании чисел

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C [u(\zeta)]^n f(\zeta)\, d\zeta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ответ на этот вопрос дает теорема V.

Теорема V. *Пусть функция $u(z)$ регулярна в области $\bar{D}$, содержащей внутри начало. Пусть также точки α_1, α_2 или β будут внутренними точками области $\bar{D}$, причем в этих точках будут выполняться соотношения $u(\alpha_1) = u(\alpha_2)$ или $u'(\beta) = 0$. Тогда*

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C [u(\zeta)]^n f(\zeta)\, d\zeta = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{76}$$

где C — контур в области $\bar{D}$, внутри которой лежат α_1 и α_2 или β, если $f(z)$ — функция, ассоциированная по Борелю соответственно с функцией $F(z) = e^{\alpha_1 z} - e^{\alpha_2 z}$, или $F(z) = ze^{\beta z}$.

Доказательство. Если $F(z) = e^{\alpha_1 z} - e^{\alpha_2 z}$, то $f(z) = \frac{1}{z-\alpha_1} - \frac{1}{z-\alpha_2}$, а если $F(z) = ze^{\beta z}$, то $f(z) = (z-\beta)^{-2}$. В первом случае при $n = 0, 1, 2, \ldots$ имеем

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C [u(\zeta)]^n \left[\frac{1}{\zeta-\alpha_1} - \frac{1}{\zeta-\alpha_2}\right] d\zeta = [u(\alpha_1)]^n - [u(\alpha_2)]^n = 0,$$

а во втором случае при $n = 0, 1, 2, \ldots$ имеем

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{[u(\zeta)]^n}{(\zeta-\rho)^2}\, d\zeta = n[u(\beta)]^{n-1} u'(\beta) = 0.$$

Теорема V показывает, что условия теоремы IV существенным образом расширены быть не могут.

Теоремы IV и V показывают, что если для возможности единственного решения интерполяционной задачи определения функции $F(z)$ по заданным числам $A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C [u(\zeta)]^n f(\zeta)\, d(\zeta)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$,

накладывать ограничения на область, в которой находятся особенности $f(\zeta)$, то необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости этой интерполяционной задачи будет условие существования конечной и односвязной области D однолистности $u(\zeta)$, содержащей все особенности $f(\zeta)$. При выполнении этого условия интерполяционная задача решается единственным образом в классе рассматриваемых функций с помощью процесса, данного теоремой IV.

Так как рост функции $F(z)$, иначе говоря, ее индикатриса $h(\varphi)$, связан однозначно только с наименьшей выпуклой областью особенностей $f(z)$, то, накладывая ограничения на рост $F(z)$, вообще говоря, можно получить только некоторые достаточные условия разрешимости рассматриваемой интерполяционной задачи. Это утверждение станет очевидным, если взять невыпуклую область однолистности функции $u(\zeta)$, не являющуюся частью какой-либо выпуклой области однолистности $u(\zeta)$.

Теорема VI. *Если функция $F(z)$ представлена рядом многочленов*

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(z), \quad P_n(z)=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\tau^n}e^{z\theta(\tau)}\Big|_{\tau=0}, \tag{77}$$

где $\zeta=\theta(\tau)$, $\theta(0)=0$, — *регулярная в круге $|\tau|\leqslant\rho$ функция, конформно отображающая этот круг на область D, далее, $|c_n|<\rho_1^{n(1+\varepsilon_n)}$, $\rho_1<\rho$ [$\varepsilon_n\to 0$, при $n\to\infty$], то $F(z)$ должна быть целой функцией, все особенности функции $f(z)$, ассоциированной по Борелю с $F(z)$, должны лежать внутри D, а индикатриса $h(\varphi)$ должна удовлетворять неравенству*

$$h(-\varphi)\leqslant\max_{|\tau|\leqslant\rho_1}\operatorname{Re}\left[e^{-\varphi i}\theta(\tau)\right], \quad -\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi. \tag{78}$$

Доказательство. Так как $\rho_1<\rho$, то благодаря неравенству (75) ряд (77) будет сходиться равномерно в любой конечной части плоскости комплексного переменного z и поэтому будет представлять целую аналитическую функцию z.

Пусть число ρ_2 находится в интервале $\rho_1<\rho_2<\rho$. Рассмотрим функцию

$$f(\eta)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\tau^{-n-1}}{\eta-\theta(\tau)}\,d\tau, \tag{79}$$

где контур Γ есть окружность $|\tau|=\rho_2$. Эта функция $f(\eta)$ регулярна для всякого η, лежащего вне конечной односвязной области D_2, в которую перейдет круг $|\tau|\leqslant\rho_2$ при отображении $\zeta=\theta(\tau)$. Действительно, если η находится в области $\overline{D}_2$, все точки которой будут внешними точками для области D_2, причем все точки этой

области $\bar{D}_2$ будут отстоять от точек области D_2 на величину, не меньшую δ, $\delta > 0$, то для всех таких η ряд (79) будет сходиться равномерно, как это следует из неравенства

$$\left|\frac{c_n}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\tau^{-n-1}}{\eta-\theta(\tau)}\,d\tau\right| < \left[\frac{\rho_1^{1+\varepsilon_n}}{\rho_2}\right]^n\frac{1}{\delta}, \quad [\varepsilon_n \to 0 \text{ при } n\to\infty].$$

Поэтому мы можем, умножив обе части равенства (79) на $e^{z\eta}$, проинтегрировать их по замкнутому контуру Γ_1 в плоскости η, содержащему область D_2 внутри; тогда мы получим

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{e^{z\eta}}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\tau^{-n-1}}{\eta-\theta(\tau)}\,d\tau\,d\eta.$$

Меняя в каждом члене последнего равенства порядок интегрирования, мы приходим к равенству (77) и тем самым устанавливаем, что функция $f(z)$, регулярная вне конечной области D_2, находящейся внутри области D, будет ассоциированной по Борелю с целой функцией $F(z)$.

Далее, мы будем иметь из равенства (77) и условия нашей теоремы неравенство

$$|F(z)| < \max_{0\leqslant n\leqslant\infty}|\rho_2^n P_n(z)|\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{\rho_2^n}\right| < c\max_{0\leqslant n<\infty}|\rho_2^n P_n(z)|. \tag{80}$$

Оценивая максимум, стоящий в правой части неравенства (80), мы получим

$$\rho_2^n|P_n(z)| = \frac{\rho_2^n}{2\pi}\left|\int\limits_{|\tau|=\rho_2}\tau^{-n-1}e^{z\theta(\tau)}\,d\tau\right| \leqslant \max_{|\tau|=\rho_2}|e^{z\theta(\tau)}|, \tag{81}$$

или, полагая $z = re^{-i\varphi}$,

$$|\rho_2^n P_n(z)| \leqslant \max_{|\tau|=\rho_2} e^{r\operatorname{Re}[e^{-i\varphi}\theta(\tau)]}. \tag{82}$$

Но ρ_2 может быть взято сколь угодно близким к ρ_1. Значит, объединяя неравенства (80) и (81) и полагая $\rho_2 = \rho_1$, мы получим, что

$$h(-\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|F(re^{-i\varphi})|}{r} \leqslant \max_{|\tau|=\rho_1}\operatorname{Re}[e^{-i\varphi}\theta(\tau)]. \tag{83}$$

Из теорем IV и VI следуют при некоторых ограничениях на функцию $u(z)$ необходимые и достаточные условия представления целой функции $F(z)$ рядами типа (77), накладываемые на рост этой функции.

Теорема VII. *Пусть функция* $u(\zeta)$ $[u(0) = 0,\ u'(0) = 1]$ *регулярна и однолистна в конечной или бесконечной выпуклой обла-*

сти D, для которой точка $\zeta = 0$ является внутренней точкой. Отображая эту область с помощью функции $\tau = \lambda[u(\zeta)]$ $[\lambda(0) = 0,\ \lambda',\ (0) = 1]$ конформно на круг $|\tau| \leqslant \rho$, мы предположим, что на окружности $|\tau| = \rho$ лежит хотя бы одна особая точка функции $\zeta = \theta(\tau)$. Обозначим опорную функцию области D через $H(\varphi)$.

Тогда необходимым и достаточным условием представимости целой функции $F(z)$ не выше первого порядка и нормального типа σ_1 с индикатрисой $h(\varphi)$ рядом многочленов $P_n(z)$:

$$\left.\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(z), \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \rho_1, \quad \rho_1 < \rho, \\ P_n(z) &= \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\zeta^n}\frac{\lambda'[u(\zeta)\,u'(\zeta)\,e^{z\zeta}\zeta^{n+1}}{\{\lambda[u(\zeta)]\}^{n+1}}\Bigg|_{\zeta=0} = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\tau^n}e^{z\theta(\tau)}\Bigg|_{\tau=0}, \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

будет выполнение неравенства

$$h(-\varphi) < H(\varphi).$$

Доказательство. Достаточность условия доказывает теорема IV, так как из него следует, на основании теоремы I § 1 главы II, что все особенности функции $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n-1}$ лежат внутри D. Необходимость его может быть непосредственно установлена с помощью теоремы VI. Из теоремы VI следует неравенство

$$h(-\varphi) < \max_{|\tau|=\rho_1} \operatorname{Re}[e^{-i\varphi}\theta(\tau)]. \tag{85}$$

Но выпуклая область D переходит конформно в круг $|\tau| \leqslant \rho$ с помощью функции $\tau = \lambda[u(\zeta)]$. Значит, круг $|\tau| \leqslant \rho_1$, $\rho_1 < \rho$, с помощью функции $\zeta = \theta(\tau)$ перейдет в область D', обязательно конечную и лежащую внутри области D. Так как всякую конечную область D', находящуюся внутри выпуклой области D, можно считать частью конечной и выпуклой области D'', точки которой будут внутренними точками области D, то. обозначая опорную функцию выпуклой области D'' через $H_1(\varphi)$, мы получим неравенство

$$\max_{|\tau|=\rho_1} \operatorname{Re}[e^{-i\varphi}\theta(\tau)] \leqslant \max_{\zeta \in D''} \operatorname{Re}[e^{-i\varphi}\zeta]. \tag{86}$$

По теореме I § 1 главы II $H_1(\varphi) < H(\varphi)$, так как $D'' \subset D$ и граница области D'' не имеет общих точек с границей области D. Значит, $h(-\varphi) < H(\varphi)$.

Если D, область однолистности функции $u(z)$, будет максимальной, иначе говоря, не будет существовать никакой другой выпуклой области D', $D \subset D'$, в которой функция $u(z)$ была бы однолистна, то мы будем называть ее областью единственности.

В частности, это будет иметь место, если функция $w = u(z)$ будет отображать область D на плоскость w, разрезанную вдоль любых непересекающихся кривых. Если, кроме того, область D будет выпуклой, то будем называть опорную функцию $H(\varphi)$ этой области *D индикатрисой единственности*.

Если же D' — максимальная выпуклая область однолистности функции $u(z)$ $[u(0) = 0,\ u'(0) = 1]$, конформно отображающаяся с помощью функции $w = u(z)$ на круг $|w| = \rho'$, то опорную функцию $H'(\varphi)$ этой области D' мы будем называть *индикатрисой интерполяции*. Совершенно естественно, что индикатрис единственности может быть бесчисленное множество.

Для дальнейшего будет полезно привести общие условия выпуклости области и аналитическое определение опорной функции выпуклой области.

Если функция $\zeta = \theta(\tau)$, где $\tau = \lambda[u(\zeta)]$ — однолистная в области D функция, конформно отображает круг $|\tau| \leqslant \rho$ на область D, то область D будет тогда и только тогда выпукла, когда для всех значений τ, $|\tau| = \rho$,

$$\operatorname{Re}\left[\tau \frac{\theta''(\tau)}{\theta'(\tau)}\right] \geqslant -1, \tag{87}$$

или же, записывая этот критерий выпуклости так, чтобы в него входила функция $\tau = \lambda[u(\zeta)] = \tau(\zeta)$, когда при $|\tau(\zeta)| = \rho$

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\tau(\zeta)\,\tau''(\zeta)}{[\tau'(\zeta)]^2}\right] \leqslant 1. \tag{88}$$

Действительно, если $\tau = \rho e^{i\varphi}$ и $\zeta = \theta(\tau)$, то, давая φ приращение $d\varphi$, другими словами, двигая τ по окружности $|\tau| = \rho$ в положительном направлении, мы получим, что величина

$$re^{i\psi}\,d\varphi = \frac{d\theta(\tau)}{d\varphi}\,d\varphi = i\tau\theta'(\tau)\,d\varphi$$

характеризует величину и направление изменения вектора $\zeta = \theta(\tau)$ в плоскости ζ. Величина $\psi = \operatorname{Im}\,[\ln i\tau\theta'(\tau)]$ есть угол поворота приращения, а $r = |\tau\theta'(\tau)|$ — его величина.

Как известно из дифференциальной геометрии, кривизна кривой определяется как

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{d\psi}{ds} = \frac{\dfrac{d\psi}{d\varphi}}{\dfrac{ds}{d\varphi}} = \frac{\dfrac{d\psi}{d\varphi}}{r} = \frac{1}{r}\operatorname{Im}\left[\frac{d}{d\varphi}\ln i\tau\theta'(\tau)\right] =$$

$$= \frac{1}{r}\operatorname{Im}\left[\frac{i\theta'(\tau)\,\tau + i\tau^2\theta''(\tau)}{\tau\theta'(\tau)}\right] = \operatorname{Im}\left\{\frac{i}{r}\left[1 + \tau\frac{\theta''(\tau)}{\theta'(\tau)}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{r}\left\{1 + \operatorname{Re}\left[\tau\frac{\theta''(\tau)}{\theta'(\tau)}\right]\right\},$$

где $ds = \frac{ds}{d\varphi}\, d\varphi$ есть изменение длины дуги, очевидно, равное $r\, d\varphi$. Для того чтобы кривизна была неотрицательной, что и соответствует выпуклости кривой $\zeta = \theta(\tau)$, очевидно, необходимо выполнение неравенства (87).

Опорная функция $H(\varphi)$ выпуклой области D, на которую конформно отображается круг $|\tau| \leqslant \rho$ с помощью функции $\zeta = \theta(\tau)$, может быть определена как

$$H(\varphi) = \frac{\operatorname{Re}[\tau\theta'(\tau)\overline{\theta(\tau)}]}{|\tau\theta'(\tau)|}, \quad \varphi = \operatorname{Im}\{\ln[\tau\theta'(\tau)]\}, \quad |\tau| = \rho, \tag{89}$$

если только $\theta'(\tau) \neq 0$ при $|\tau| = \rho$. Действительно, если $\zeta = \theta(\tau)$ — вектор в плоскости ζ, $\tau = \rho e^{i\alpha}$ и $d\zeta = i\tau\theta'(\tau)\, d\alpha = \mu e^{i\beta}$ — приращение этого вектора $\zeta = \sigma e^{i\psi}$, то угол между вектором и его приращением, другими словами, угол между отрезком, соединяющим начало с точкой ζ и касательной к кривой $\zeta = \theta(\tau)$ в точке ζ, будет, как нетрудно видеть,

$$\arcsin \frac{\operatorname{Im}\left[\frac{i\tau\theta'(\tau)}{|\theta(\tau)|}\right]}{\left|\frac{i\tau\theta'(\tau)}{\theta(\tau)}\right|} = \arcsin \frac{\operatorname{Re}[\tau\theta'(\tau)\overline{\theta(\tau)}]}{|\tau\theta'(\tau)\overline{\theta(\tau)}|}.$$

Проектируя ζ на перпендикуляр к касательной, мы получим длину этой проекции

$$|\theta(\tau)| \sin(\psi - \beta) = |\theta(\tau)| \frac{\operatorname{Re}[\tau\theta'(\tau)\overline{\theta(\tau)}]}{|\tau\theta'(\tau)\overline{\theta(\tau)}|} = \frac{\operatorname{Re}[\tau\theta'(\tau)\overline{\theta(\tau)}]}{|\tau\theta'(\tau)|}.$$

Если φ есть угол перпендикуляра к касательной к кривой $\zeta = \theta(\tau)$ в точке ζ с положительным направлением оси x, то

$$\varphi = \operatorname{Im}[\ln i\tau\theta'(\tau)] - \frac{\pi}{2} = \operatorname{Im}[\ln \tau\theta'(\tau)].$$

В том случае, когда выпуклая область D имеет угловые точки, $H(\varphi)$ состоит из дуг окружностей, построенных, как на диаметрах, на отрезках, соединяющих эти угловые точки с началом, и дуг кривой $r = H(\varphi)$, даваемой уравнениями (89), находящихся вне кругов, порождаемых угловыми точками.

Переписывая уравнения (89) так, чтобы в них входила функция $\tau = \tau(\zeta)$, мы получим

$$H(\varphi) = \left|\frac{\tau'(\zeta)}{\tau(\zeta)}\right| \operatorname{Re}\left[\frac{\tau(\zeta)}{\tau'(\zeta)}\bar{\zeta}\right], \quad \varphi = \operatorname{Im}\left[\ln \frac{\tau(\zeta)}{\tau'(\zeta)}\right] \tag{90}$$

при $|\tau| = \rho$.

§ 3. Частные случаи общей интерполяционной задачи

Обозначения предыдущего параграфа сохраняются при рассмотрении всех приводимых далее частных случаев. Кроме того, условия разложения в интерполяционные ряды, которые будут получены в дальнейшем, во всех рассматриваемых случаях будут не только достаточными, но по теореме V и необходимыми.

1. Заданы числа $F(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Так как

$$F(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{n\zeta} f(\zeta)\, d\zeta, \tag{91}$$

то функцией $u(\zeta)$ для данной задачи будет e^{ζ}.

Найдем общий вид области однолистности функции e^{ζ}. Пусть $y = \psi(x)$ — однозначная, непрерывная и определенная для всех значений x, $A < x < B$, кривая, где A и B — любые числа, причем $A \geqslant -\infty$, $B \leqslant \infty$.

Рассмотрим область D, границей которой будут кривые $y = \psi(x)$ и $y = 2\pi + \psi(x)$. В этой области функция e^z будет однолистна. Поэтому мы получаем теорему: *если функция $f(\zeta)$, регулярная в бесконечности, имеет все особенности внутри области D, то функция $F(z)$ однозначно определяется числами $F(n)$, $n = 0, 1, \ldots$, причем, если при этом условии $F(n) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, то $F(z) \equiv 0$.*

Если заданы числа $F(n)$, то это значит, что заданы числа

$$\Delta^n F(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} F(k), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Но

$$A_n = \Delta^n F(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C (e^{\zeta} - 1)^n f(\zeta)\, d\zeta. \tag{92}$$

Полагая $\zeta = re^{i\varphi}$ и $u(\zeta) = e^{\zeta} - 1$ и замечая, что $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$, а также, что $u(\zeta)$ однолистна в любой полосе, ограниченной прямыми $r\cos(\alpha - \varphi) = \pi \sin\alpha$ и $r\cos(\alpha - \varphi) = -\pi\sin\alpha$, $\pi > \alpha \geqslant 0$, мы можем считать доказанной как частный случай теоремы VII теорему: *если индикатриса $h(\varphi)$, $h(\varphi) \leqslant \sigma$, целой функции $F(z)$ удовлетворяет неравенствам $h(-\alpha) < \pi\sin\alpha$, $h(\pi - \alpha) < \pi\sin\alpha$, то эта функция $F(z)$ представляется рядом многочленов*

$$\left.\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(z), \\ P_n(z) &= \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\tau^n}\left[\frac{4ie^{\alpha i}\sin\alpha - \tau}{4ie^{\alpha i}\sin\alpha + r}\right]^{-2ie^{\alpha i}z\sin\alpha}\Bigg|_{\tau=0}, \end{aligned}\right\} \tag{93}$$

равномерно сходящимся во всякой конечной части плоскости z.

Действительно, так как

$$\theta(\tau) = -2ie^{i\alpha}\sin^{\alpha}\ln\frac{4ie^{i\alpha}\sin\alpha-\tau}{4ie^{i\alpha}\sin\alpha+\tau},$$

$$\tau = \lambda[u(\zeta)] = -4ie^{\alpha i}\sin\alpha\,\frac{e^{\frac{ie^{-i\alpha}}{2\sin\alpha}\zeta}-1}{e^{\frac{ie^{-\alpha i}}{2\sin\alpha}\zeta}+1} =$$

$$= \frac{-4ie^{\alpha i}\sin\alpha\left([1+u(\zeta)]^{\frac{ie^{-i\alpha}}{2\sin\alpha}}-1\right)}{[1+u(\zeta)]^{\frac{ie^{-i\alpha}}{2\sin\alpha}}+1}, \tag{94}$$

с помощью функции $\tau = \lambda[u(\zeta)]$ полоса, ограниченная прямыми $r\cos(\alpha-\varphi) = \pm\pi\sin\alpha$, переходит в круг $|\tau| \leqslant 4\sin\alpha$. Так как опорная функция этой полосы будет $H(\alpha) = \pi\sin\alpha$, $H(\alpha-\pi) = \pi\sin\alpha$, $H(\varphi) = \infty$, $\varphi \neq \alpha$, $\alpha-\pi$, то наша теорема как частный случай теоремы VII доказана.

Положим $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$P_n(z) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\tau^n}\left[\frac{4+\tau}{4-\tau}\right]^{2z}_{\tau=0} = \frac{2z}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2z-k+1)\ldots(2z+n-k-1)}{k!\,(n-k)!}, \tag{95}$$

и мы получаем, что если $h\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) < \pi$, $h(\varphi) < \infty$, то $F(z)$ представляется рядом этих многочленов.

Функция $w = e^{\zeta}-1$ отображает конформно область, ограниченную контуром $|e^{\zeta}-1| = 1$, на круг $|w| \leqslant 1$. Обратно, $\zeta = \ln(1+w)$ переводит круг $|w| \leqslant 1$ в бесконечную выпуклую область D', ограниченную кривой $x = \ln(2\cos y)$, $\zeta = x+iy$, в плоскости ζ. Опорной функцией $H'(\varphi)$ этой выпуклой области D' будет

$$H'(\varphi) = \cos\varphi\ln(2\cos\varphi)+\varphi\sin\varphi, \quad |\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2};$$

$$H(\varphi)\,\infty, \quad |\varphi| > \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому мы на основании теоремы VII получаем уже ранее доказанную теорему: *если целая функция не выше первого порядка*

нормального типа σ имеет индикатрису $h(\varphi)$, удовлетворяющую неравенствам

$$h(\varphi) < \cos\varphi \ln(2\cos\varphi) + \varphi\sin\varphi, \quad |\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2};$$

$$h(\varphi) < \infty, \quad |\varphi| > \frac{\pi}{2}, \tag{96}$$

то она представляется рядом многочленов $P_n(z)$, равномерно сходящимся во всякой конечной части плоскости z:

$$\left.\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^n F(0) P_n(z), \\ P_n(z) &= \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dw^n}(1+w)^z = \frac{z(z-1)\ldots(z-n+1)}{n!}. \end{aligned}\right\} \tag{97}$$

Этот ряд есть интерполяционный ряд Ньютона.

2. Заданы числа $F^{(n)}(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Так как

$$F^{(n)}(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \zeta^n e^{n\zeta} f(\zeta)\, d\zeta, \tag{98}$$

то функцией $u(z)$ будет ze^z. Функция $w = \zeta e^{\zeta}$ конформно отображает область D в плоскости ζ, ограниченную кривой $r_\varphi = \frac{\pi - |\varphi|}{\sin|\varphi|}$ $(-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi,\ \zeta = re^{i\varphi})$, на разрезанную от точки $-e^{-1}$ вдоль отрицательной части действительной оси до бесконечности плоскость w.

Область D поэтому есть максимальная область единственности функции $u(\zeta) = \zeta e^{\zeta}$. Область D, кроме того, выпукла. Ее опорная функция $H(\varphi)$, являющаяся индикатрисой единственности, может быть записана в параметрической форме:

$$H(\varphi) = \frac{y^2}{\sqrt{y^2 + \sin^2 y - y\sin 2y}},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2y - \sin 2y}{2\sin^2 y}, \quad |y| \leqslant \pi, \tag{99}$$

при $\pi \geqslant |\varphi| \geqslant \frac{\pi}{2}$ и $H(\varphi) = \infty$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$.

В частности, $H(\pm\pi) = 1$, $H(\varphi) > 1$ при $|\varphi| < \pi$ и $H\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pi$, $H(-\varphi) = H(\varphi)$.

Область D с помощью функции

$$\left.\begin{aligned} \tau &= \lambda[\zeta e^{\zeta}] = \frac{4}{e}\frac{\sqrt{1+\zeta e^{\zeta+1}}-1}{\sqrt{1+\zeta e^{\zeta+1}}+1}, \\ \zeta e^{\zeta} &= \theta(\tau)\, e^{\theta(\tau)} = \frac{\tau}{\left(1-\frac{e\tau}{4}\right)^2}, \end{aligned}\right\} \tag{100}$$

конформно отображается на круг $|\tau| \leqslant \frac{4}{e}$.

Мы приходим, таким образом, к теореме: *если индикатриса $h(\varphi)$ целой функции $F(z)$ первого порядка и нормального типа σ удовлетворяет неравенству $h(\varphi) < H(\varphi)$, где $H(\varphi)$ определена соотношениями* (99), *то $F(z)$ разлагается в ряд многочленов, равномерно сходящийся в любой конечной части плоскости*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(z), \quad P_n(z) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\tau^n} e^{z\theta(\tau)}\Big|_{\tau=0}, \tag{101}$$

где $\theta(\tau)$ определена неявно соотношением (100), *или*

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k-1)!\, e^{n-k}\, 4^{k-n}}{k!\,(n-k)!\,(2k-1)!}\, z\,(z-k)^{k-1}. \tag{102}$$

Если при этих предположениях относительно функции $F(z)$ $F^{(n)}(n) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, то $F(z) \equiv 0$.

В частности, так как $H(\varphi) \geqslant 1$, мы получаем теорему, что при выполнении неравенства

$$|F(z)| < Ae^{\alpha|z|}, \quad \alpha < 1,$$

и условий $F^{(n)}(n) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $F(z) \equiv 0$.

Функция ζe^{ζ} конформно отображает выпуклую область D' с границей, даваемой в неявной форме уравнением $|\zeta e^{\zeta}| = e^{-1}$ на круг $|w| \leqslant e^{-1}$. Опорная функция кривой $re^{r\cos\varphi+1} = 1$, пересекающей в точке $\zeta = -1$ ось $\operatorname{Im}\zeta = 0$ под углом $\frac{\pi}{4}$, в неявной форме будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} &H'(\varphi) = y, \\ &2y^2 e^{1+2y\cos\varphi+\sqrt{1-4y^2\sin^2\varphi}} - \sqrt{1-4y^2\sin^2\varphi} - 1 = 0, \\ &0 \leqslant |\varphi| \leqslant \frac{3\pi}{4}, \end{aligned}\right\} \tag{103}$$

и $H'(\varphi) = -\cos\varphi$ при $\pi \geqslant |\varphi| > \frac{3\pi}{4}$. Поэтому мы получаем

теорему[1]): *если* $h(\varphi) < H'(\varphi)$, *то целая функция* $F(z)$ *разлагается в ряд*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(n) P_n(z), \quad P_n(z) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\zeta^n} \frac{(1+\zeta) e^{(z+1)\zeta}}{e^{(n+1)\zeta}} \Bigg|_{\zeta=0} = \frac{z(z-n)^{n-1}}{n!}. \tag{104}$$

Ряд этот есть ряд Абеля.

3. **Заданы числа** $\Delta^n F(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Так как

$$\Delta^n F(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\zeta n} (e^{\zeta} - 1)^n f(\zeta)\, d\zeta,$$

то $u(\zeta) = e^{\zeta}(e^{\zeta} - 1)$.

Функция $w = e^{\zeta}(e^{\zeta} - 1)$ конформно отображает выпуклую область D с границей $x = -\ln(2\cos y)$, $\zeta = x + iy$, $|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}$ в плоскости ζ на плоскость w, разрезанную вдоль отрицательной части действительной оси от точки $-\frac{1}{4}$ до минус бесконечности. Так как D — максимальная выпуклая область, то $H(\varphi)$ будет индикатрисой единственности. Опорной функцией выпуклой области D будет

$$H(\varphi) = \cos(\pi - \varphi) \ln[2\cos(\pi - \varphi)] + (\pi - |\varphi|) \sin|\varphi|, \quad |\varphi| \geqslant \frac{\pi}{2},$$

и $H(\varphi) = \infty$ при $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$. С помощью функции

$$\tau = \lambda[u(\zeta)]:$$

$$\tau = \frac{\sqrt{1 + 4u(\zeta)} - 1}{\sqrt{1 + 4u(\zeta)} + 1} = 1 - e^{-\zeta}, \quad \zeta = \theta(\tau) = -\ln(1 - \tau), \tag{105}$$

мы конформно отображаем нашу область D на круг $|\tau| \leqslant 1$.

Таким образом, мы получаем теорему: *если индикатриса* $h(\varphi)$ *целой функции подчинена неравенствам*

$$\left.\begin{aligned} &h(\varphi) < \cos(\pi - \varphi) \ln[2\cos(\pi - \varphi)] + (\pi - |\varphi|) \sin|\varphi|, \\ &|\varphi| \geqslant \frac{\pi}{2}, \quad h(\varphi) < \infty, \quad |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{106}$$

---

[1]) В. Л. Гончаров, О сходимости ряда Абеля, Матем. сборник 42, стр. 473, 1935.

то $F(z)$ представляется равномерно сходящимся рядом:

$$\left.\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(z), \\ P_n(z) &= \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\tau^n}(1-\tau)^{-z} = \frac{z(z+1)\ldots(z+n-1)}{n!}, \\ c_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_C (1-e^{-\zeta})^n f(\zeta)\,d\zeta = \Delta^n F(-n), \end{aligned}\right\} \tag{107}$$

причем при выполнении неравенства (106) *числа $\Delta^n F(-n)$ могут быть приближены с любой степенью точности линейными формами от чисел $\Delta^n F(n)$ с коэффициентами, не зависящими от функции $F(z)$. В частном случае, когда $\Delta^n F(n) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, функция $F(z)$ тождественно равна нулю.*

Так как $H(\varphi) \geqslant \ln 2$, то $F(z) \equiv 0$, если только $|F(z)| < Ae^{\alpha|z|}$, $\alpha < \ln 2$, $\Delta^n F(n) = 0$, $n = 0, 1, \ldots$

Функция $w = e^{\zeta}(e^{\zeta} - 1)$ однолистна в выпуклой области D', переходящей в круг $|w| < \frac{1}{4}$. Эта область D' будет максимальной среди областей, конформно отображаемых функцией $w = e^{\zeta}(e^{\zeta} - 1)$ на круги $|w| \leqslant \rho$. Поэтому мы будем иметь теорему: *если $h(\varphi) < H'(\varphi)$, где $H'(\varphi)$ определяется в неявной форме соотношениями*

$$\left.\begin{aligned} H'(\varphi) &= \operatorname{Re}\left(e^{i\varphi}\ln\frac{1+\sqrt{1+e^{-i\psi}}}{2}\right), \\ \varphi &= \frac{\psi}{2} - \operatorname{Im}\left[\ln\frac{1+\sqrt{1+e^{i\psi}}}{2}\right], \quad -\pi \leqslant \psi \leqslant \pi, \end{aligned}\right\} \tag{108}$$

то $F(z)$ разлагается в равномерно сходящийся в любой конечной части плоскости z ряд многочленов

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^n F(n) P_n(z), \quad P_n(z) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\zeta^n}\left[\frac{1+\sqrt{1+4\zeta}}{2}\right]^z\Bigg|_{\zeta=0}, \tag{109}$$

или в явной форме

$$P_n(z) = \frac{z(z-n-1)\ldots(z-2n+1)}{n!}.$$

4. Заданы числа $\Delta^n F\left(-\frac{n}{2}\right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ В этом случае $u(\zeta) = e^{\frac{\zeta}{2}} - e^{-\frac{\zeta}{2}}$, так как

$$\Delta^n F\left(-\frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left(e^{\frac{\zeta}{2}} - e^{-\frac{\zeta}{2}}\right)^n f(\zeta)\,d\zeta. \tag{110}$$

Функция $w = e^{\frac{\zeta}{2}} - e^{-\frac{\zeta}{2}}$ конформно отображает область D с границей $\left|e^{\frac{\zeta}{2}} - e^{-\frac{\zeta}{2}}\right| = 2$ на круг $|w| \leqslant 2$. Область D выпукла, и граница ее имеет в развернутой форме уравнение

$$x = \pm 2 \ln\left[\cos\frac{y}{2} + \sqrt{1 + \cos^2\frac{y}{2}}\right], \quad 0 \leqslant |y| \leqslant \pi. \tag{111}$$

Так как эта кривая состоит из двух симметричных относительно обеих осей дуг, пересекающихся в точках $x = 0$, $x = \pm\pi$ под углом $\frac{\pi}{2}$, то опорная функция $H(\varphi)$ области D будет иметь вид

$$H(\varphi) = \cos\varphi \ln[\sqrt{\cos 2\varphi} + \sqrt{2}\cos\varphi]^2 + 2\sin\varphi \arcsin[\sqrt{2}\sin\varphi], \tag{112}$$

$$\left|\frac{\pi}{2} - |\varphi|\right| \geqslant \frac{\pi}{4},$$

и $H(\varphi) = \pi \sin|\varphi|$ при $\left|\frac{\pi}{2} - |\varphi|\right| < \frac{\pi}{4}$.

Функция $\zeta = \theta(\tau)$ будет иметь вид

$$\theta(\tau) = 2\ln\left[\frac{\tau}{2} + \sqrt{\frac{\tau^2}{4} + 1}\right]. \tag{113}$$

Поэтому мы получаем теорему: *если индикатриса $h(\varphi)$ целой функции $F(z)$ удовлетворяет неравенству $h(\varphi) < H(\varphi)$, $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$, то $F(z)$ представляется всюду сходящимся рядом многочленов:*

$$\left.\begin{aligned} F(r) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^n F\left(-\frac{n}{2}\right) P_n^{\tau}(z), \\ P_n(z) &= \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\tau^n}\left(\frac{\tau}{2} + \sqrt{\frac{\tau^2}{4} + 1}\right)^{2z}\Bigg|_{\tau=0}, \end{aligned}\right\} \tag{114}$$

где $P_n(z)$ имеют вид

$$P_{2n}(z) = \frac{z^2(z^2-1)\ldots(z^2-n^2)}{2n!};$$

$$P_{2n+1}(z) = \frac{z^2\left[z^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\ldots\left[z^2 - \left[n + \frac{1}{2}\right]^2\right]}{(2n+1)!}.$$

Этими четырьмя примерами, естественно, не исчерпываются приложения теорем IV — VII. Но существует ряд задач, которые непосредственно не получаются в качестве частных случаев теорем IV — VII. К этим задачам мы и переходим в следующем параграфе.

§ 4. Линейные дифференциальные уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами и некоторые интерполяционные задачи, приводящиеся к решению подобных уравнений

1. Общие теоремы. Здесь мы займемся *линейными дифференциальными уравнениями бесконечного порядка с постоянными коэффициентами, т. е. функциональными уравнениями вида*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n F^{(n)}(z) = \Phi(z), \tag{115}$$

где $\Phi(z)$ — заданная целая функция не выше первого порядка и нормального типа, $w(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \zeta^n$ — регулярная в начале функция, A_n — постоянные числа и $F(z)$ — искомая функция.

Если $w(\zeta)$ регулярна в некоторой области D, содержащей начало внутри, и в области D нет ни одного нуля функции $w(\zeta)$, то, допустив, что все особенности регулярной в бесконечности функции $\Phi_0(z)$, ассоциированной по Борелю с $\Phi(z)$, находятся внутри D, мы можем доказать существование единственного решения дифференциального уравнения (115), обладающего тем свойством, что все особенности $f(z)$, ассоциированной по Борелю с $F(z)$, лежат внутри D. Если область D выпукла, то из этого утверждения следует, что уравнение (115) будет иметь единственное решение в том случае, если мы допустим, что выполнено неравенство $h(-\varphi) < H(\varphi)$, где $H(\varphi)$ — опорная функция области D, а $h(\varphi)$ — индикатриса $F(z)$.

Докажем теорему, дающую решение уравнения (115) в виде ряда многочленов.

Теорема VIII. *Если все особенности $\Phi_0(z)$ находятся внутри области D, в которой $w(z)$ регулярна и не имеет нулей, то существует единственное решение $F(z)$ уравнения* (115), *обладающее тем свойством, что все особенности $f(z)$ находятся внутри D, причем разность*

$$f(\zeta) - \frac{\Phi_0(\zeta)}{w(\zeta)} \tag{116}$$

будет регулярной внутри D функцией и $F(z)$ представляется рядом многочленов, равномерно сходящимся во всякой конечной части плоскости z:

$$\left.\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(z), \quad P_n(z) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\tau^n} e^{z\theta(\tau)}\Big|_{\tau=0}, \\ c_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{[\lambda(\zeta)]^n}{w(\zeta)}\Phi_0(\zeta)\,d\zeta, \end{aligned}\right\} \tag{117}$$

где $\tau = \lambda(\zeta)$ $[\lambda(0) = 0,\ \lambda'(0) = 1]$ *отображает конформно область* D *на круг* $|\tau| \leqslant \rho$, $\zeta = \theta(\tau)$, *а* C — *замкнутый контур, лежащий в области* D *и содержащий внутри себя все особенности функции* $\Phi_0(\zeta)$. *Кроме того, существуют числа* $B_{n,\,m,\,s}$ *такие, что для бесчисленного множества* m

$$\left| c_n - \sum_{s=0}^{m} B_{n,\,m,\,s}\, \Phi^{(s)}(0) \right| < \delta^m, \quad \delta < 1, \tag{118}$$

где δ *не зависит от* m.

Если область D *выпукла, то условие, что все особые точки функции* $f(z)$ *находятся внутри области* D, *можно заменить неравенством* $h(-\varphi) < H(\varphi)$, *где* $h(\varphi)$ — *индикатриса* $F(z)$, *а* $H(\varphi)$ — *опорная функция выпуклой области* D.

Доказательство. Если все особенности функции $f(z)$ и $\Phi_0(z)$ находятся внутри D, то уравнение (115) может быть переписано в форме

$$\int_C e^{z\zeta}[w(\zeta) f(\zeta) - \Phi_0(\zeta)]\, d\zeta = 0, \tag{119}$$

где C — замкнутый контур, находящийся в области D и содержащий внутри себя все особенности функций $f(\zeta)$ и $\Phi_0(\zeta)$. Так как уравнение (119) должно иметь место при всех z, то при наших предположениях относительно $f(\zeta)$ и $\Phi_0(\zeta)$ из него сразу следует, что разность $f(\zeta) - \dfrac{\Phi_0(\zeta)}{w(\zeta)}$ должна быть регулярна в области D.

Полагая в равенствах (60), (61) и (62) § 3 $u(z) = z$ и считая, что функция $\tau = \lambda(\zeta)$ конформно отображает область D на круг $|\tau| \leqslant \rho$, мы получим

$$\left.\begin{aligned} e^{z\eta} &= \sum_{m=0}^{n} [\lambda(\eta)]^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\lambda'(\zeta)\, e^{z\zeta}}{[\lambda(\zeta)]^{m+1}}\, d\zeta + R_n(z,\ \eta), \\ R_n(z,\ \eta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \left[\frac{\lambda(\eta)}{\lambda(\zeta)}\right]^{n+1} \frac{\lambda'(\zeta)\, e^{z\zeta} d\zeta}{\lambda(\zeta) - \lambda(\eta)}, \end{aligned}\right\} \tag{120}$$

где η есть точка замкнутого контура Γ_2, лежащего внутри области D, содержащего все особенности функции $\Phi_0(\eta)$ внутри и переходящего при отображении с помощью функции $\tau = \lambda(\eta)$ внутрь круга $|\tau| \leqslant \rho_2$, $\rho_2 < \rho_1$, а контур Γ_1 соответствует окружности $|\tau| = \rho_1$, $\rho_2 < \rho_1 < \rho$ при отображении $\zeta = \theta(\tau)$.

Равенство (120) можно переписать также в форме

$$\left.\begin{aligned} e^{z\eta} &= \sum_{m=0}^{n} [\lambda(\eta)]^m P_m(z) + R_n(z, \eta), \\ P_n(z) &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\tau^n} e^{z\theta(\tau)} \Big|_{\tau=0}. \end{aligned}\right\} \tag{121}$$

Умножая обе части равенства (121) на $f(\eta)$, интегрируя по контуру Γ_2 в плоскости η и пользуясь регулярностью разности $f(\eta)-\frac{\Phi_0(\eta)}{w(\eta)}$ в области D, мы легко получим, что

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2} f(\eta)\,e^{z\eta}\,d\eta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{\Phi_0(\eta)}{w(\eta)}\,e^{z\eta}\,d\eta=$$

$$=\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{[\lambda(\eta)]^m}{w(\eta)}\,\Phi_0(\eta)\,d\eta\,P_m(z)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{\Phi_0(\eta)}{w(\eta)}\,R_n(z,\ \eta)\,d\eta. \qquad (122)$$

Так как

$$\left|\int\limits_{\Gamma_2}\frac{\Phi_0(\eta)}{w(\eta)}\,R_n(z,\ \eta)\,d\eta\right|<\gamma\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^n,\ \rho_1>\rho_2, \qquad (123)$$

где γ от n не зависит, то представление $F(z)$, даваемое равенством (117) теоремы VIII, нами доказано, причем доказано также, что ряд (117) сходится как геометрическая прогрессия. Неравенство (118) теоремы VIII доказывается непосредственно на основании теоремы Фабера, причем доказательство ничем не отличается от доказательства неравенства (58) теоремы IV § 2.

Не внося в доказательство теоремы VIII никаких существенных изменений, можно доказать теорему VIII′, являющуюся дополнением к теореме VIII.

Теорема VIII′. *Если выполнены все условия теоремы* VIII, *то функция* $F(z)$ *представляется рядом многочленов*

$$\left.\begin{aligned} F(z)&=\sum_{n=0}^{\infty}c_n P_n(z),\ \ P_n(z)=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\tau^n}\frac{e^{z\theta(\tau)}}{w[\theta(\tau)]}\Big|_{\tau=0},\\ c_n&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\Phi_0(\eta)\,[\lambda(\eta)]^n\,d\eta.\end{aligned}\right\} \qquad (124)$$

2. Заданы числа $F^{(np+s)}(s)$, $0\leqslant s\leqslant p-1$, $n=0,\ 1,\ 2,\ldots$ Для решения этой интерполяционной задачи введем в рассмотрение функции $w(\zeta)$, $w(\eta,\ \zeta)$, $w_s(\zeta)$:

$$\left.\begin{aligned} \omega_s&=e^{\frac{2\pi(s-1)i}{p}},\ s=1,\ 2,\ldots,p,\ w_1=1,\\ w(\zeta)&=(e^{\zeta}-\omega_2 e^{\omega_2\zeta})\ldots(e^{\zeta}-\omega_p e^{\omega_p\zeta}),\ w(0)=p,\\ w(\eta,\ \zeta)&=\left(\frac{\eta}{\zeta}e^{\zeta}-\omega_2 e^{\omega_2\zeta}\right)\ldots\left(\frac{\eta}{\zeta}e^{\zeta}-\omega_p e^{\omega_p\zeta}\right),\\ w_s(\zeta)&=\frac{1}{s!}\frac{d^s}{dx^s}(x-\omega_2 e^{\omega_2\zeta})\ldots(x-\omega_p e^{\omega_p\zeta})\Big|_{x=0},\\ &s=0,1,\ldots,p-1,\ w_0(\zeta)=(-1)^{p-1}e^{-\zeta},\end{aligned}\right\} \qquad (125)$$

связанные соотношениями

$$w(\zeta, \zeta) = w(\zeta), \quad w(\eta, \zeta) = \sum_{s=0}^{p-1} \eta^s e^{s\eta} \zeta^{-s} w_s(\zeta). \tag{126}$$

Нули целой функции $w(\zeta)$ будут находиться в точках

$$\zeta = e^{\frac{k\pi i}{p}} \frac{\pi\left(m - \left|\frac{k}{p}\right|\right)}{\sin\left|\frac{k}{p}\right|\pi},$$

$$k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm (p-1), \ m = 1, 2, \ldots \tag{127}$$

Рассмотрим представление функции $w(\eta) e^{z\eta}$:

$$w(\eta) e^{z\eta} = \frac{p}{2\pi i} \int_C w(\eta, \zeta) \frac{e^{z\zeta} \zeta^{p-1}}{\zeta^p - \eta^p} d\zeta, \tag{128}$$

где C — любой замкнутый контур, содержащий внутри себя точку $\zeta = \eta$, например окружность $|\zeta| = \sigma$, $\sigma > |\eta|$.

Представление (128) имеет место, так как

$$w(\eta, \omega_s \eta) = 0, \ s = 2, 3, \ldots, p-1; \ w(\eta, \eta) = w(\eta).$$

Из этого представления мы получим, умножая обе его части на функцию $f(\eta)$, ассоциированную по Борелю с целой функцией не выше первого порядка нормального типа $F(z)$ и интегрируя по любому замкнутому контуру C_2 в плоскости η, содержащему внутри себя все особенности функции $f(\eta)$, что

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} f(\eta) w(\eta) e^{z\eta} d\eta = \frac{p}{(2\pi i)^2} \int_{C_2} f(\eta) d\eta \int_{C_1} w(\eta, \zeta) \frac{e^{z\zeta} \zeta^{p-1} d\zeta}{\zeta^p - \eta^p} \tag{129}$$

представляется рядом, коэффициенты которого непосредственно определяются с помощью чисел

$$F^{(np+s)}(s); \ s = 0, 1, 2, \ldots, p-1; \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Действительно, с помощью формулы (126) мы пожем получить, предполагая $|\zeta| = \rho$, $\rho > \max\limits_{\eta \in C_2} |\eta|$, что

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{p-1} F^{(np+s)}(s) \frac{p}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{e^{z\zeta} w_s(\zeta)}{\zeta^{np+s+1}} d\zeta. \tag{130}$$

Для этого умножим обе части равенства

$$\frac{p}{2\pi i} \int_{C_1} w(\eta, \zeta) \frac{e^{z\zeta} \zeta^{p-1} d\zeta}{\zeta^p - \eta^p} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{p-1} \eta^{s+np} e^{s\eta} \frac{p}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{e^{z\zeta} w_s(\zeta)}{\zeta^{np+s+1}} d\zeta$$

на $f(\eta)$ и проинтегрируем по контуру C_2 в плоскости η, что возможно, так как в правой части стоит равномерно сходящийся функциональный ряд. Но так как

$$F^{(np+s)}(s) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2} \eta^{np+s} e^{s\eta} f(\eta)\, d\eta, \tag{131}$$

то мы и получим равенство (130).

Так как $F(z)$ по предположению — функция не выше первого порядка и нормального типа, то из представления $\Phi(z)$ (130) следует, что и $\Phi(z)$ должна быть функцией не выше первого порядка и нормального типа.

Функция $\Phi(z)$ может быть представлена также рядом Тейлора:

$$\Phi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{m!} z^m, \quad a_m = p \sum_{\substack{n=0 \\ np+s \geqslant m}}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} F^{(np+s)}(s) \frac{w_s^{(np+s-m)}(0)}{(np+s-m)!}. \tag{132}$$

Значит, ассоциированная по Борелю с $\Phi(z)$ регулярная в бесконечности функция $\Phi_0(z)$ имеет вид

$$\Phi_0(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^{-m+1}.$$

Пусть C — любой замкнутый контур, содержащий внутри все особенности функций $\Phi_0(z)$ и $f(z)$. Тогда будем иметь

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C e^{z\zeta} \Phi_0(\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C e^{z\zeta} w(\zeta) f(\zeta) d\zeta, \tag{133}$$

или

$$\int\limits_C e^{z\zeta} [\Phi_0(\zeta) - w(\zeta) f(\zeta)]\, d\zeta = 0, \tag{134}$$

откуда следует, что разность $\Phi_0(\zeta) - w(\zeta) f(\zeta)$ будет целой функцией ζ, т. е. что $\Phi_0(\zeta)$ может иметь особенности только в тех точках, которые будут особыми для $f(\zeta)$. Во всякой области D, где $w(\zeta)$ не имеет нулей, особенности $f(\zeta)$ и $\Phi_0(\zeta)$ должны совпадать.

Мы можем дать теперь общее решение поставленной ранее интерполяционной задачи.

Теорема. *Если $F(z)$ — целая функция не выше первого порядка нормального типа σ и заданы числа*

$$F^{(np+s)}(s) = \frac{d^{np+s}}{ds^{np+s}} F(z)\Big|_{=s}, \; 0 \leqslant s \leqslant p-1, \; n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{135}$$

то эти числа полностью определяют $F(z)$ в том и только в том

случае, когда все особенности функции $f(z)$, ассоциированной по Борелю с $F(z)$, находятся в односвязной области D, симметричной относительно действительной оси, в которой нет нулей функции

$$w(z) = (e^z - \omega_2 e^{\omega_2 z}) \ldots (e^z - \omega_p e^{\omega_p z}), \tag{136}$$

и $F(z)$ может быть представлена равномерно сходящимся в любой конечной части плоскости z рядом

$$\left.\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(z), \quad P_n(z) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\tau^n} e^{z\theta(\tau)}\Big|_{\tau=0}, \\ c_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Phi_0(\zeta)[\lambda(\zeta)]^n}{w(\zeta)}\, d\zeta \end{aligned}\right\} \tag{137}$$

или рядом

$$\left.\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(z), \quad P_n(z) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\tau^n}\frac{e^{z\theta(\tau)}}{w[\theta(\tau)]}\Big|_{\tau=0}, \\ c_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \Phi_0(\zeta)[\lambda(\zeta)]^n\, d\zeta, \end{aligned}\right\} \tag{138}$$

где C есть замкнутый односвязный контур, содержащий все особенности $f(\zeta)$ внутри и находящийся внутри области D; функция $\tau = \lambda(\zeta)$ конформно отображает область D в плоскости ζ на круг $|\tau| = \rho$ в плоскости τ, $\zeta = \theta(\tau)$, а $\Phi_0(\zeta)$ ассоциирована с $\Phi(\zeta)$, определяющейся формулами (130) *и* (132) *и строящейся непосредственно с помощью чисел $F^{(np+s)}(s)$, $0 \leqslant s \leqslant p-1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$*

Когда область D выпукла, то представления (137) *и* (138 *функции $F(z)$ будут иметь место, если выполнено неравенство $h(-\varphi) < H(\varphi)$, $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$, где $h(\varphi)$ — индикатриса $F(z)$, а $H(\varphi)$ — опорная функция области D.*

Доказательство. Вспомним, что всякая точка, правильная для $f(z)$, будет правильной для $\Phi_0(z)$. Функция $F(z)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению бесконечного порядка с постоянными коэффициентами:

$$\int_C e^{z\zeta}[w(\zeta) f(\zeta) - \Phi_0(\zeta)]\, d\zeta = 0, \tag{139}$$

откуда и следуют на основании теорем VIII и VIII′ представления (137) и (138) функции $F(z)$.

Пусть в область D попал нуль z_0 функции $w(z)$. Так как область D предположена симметричной относительно действительной оси, а $w(z)$ имеет нулем также и число $\bar{z}_0$, то в области D

будут лежать два нуля $w(z)$, именно z_0 и $\bar{z}_0$. Эти нули будут иметь вид

$$z_0 = e^{\frac{k\pi i}{p}} \frac{\pi(mp-k)}{p\sin\frac{\pi k}{p}}, \quad \bar{z}_0 = e^{-\frac{k\pi i}{p}} \frac{\pi(mp-k)}{p\sin\frac{\pi k}{p}}, \tag{140}$$

где m — любое целое положительное число, а k — целое число, заключенное между 1 и $p-1$, т. е. $1 \leqslant k \leqslant p-1$.

Тогда целая функция $F_0(z) = e^{\bar{z}_0 z} - e^{z_0 z}$ будет иметь числа $F_0^{(np+s)}(s) = 0$, $0 \leqslant s \leqslant p-1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, так как

$$f(z) = \frac{1}{z-z_0} - \frac{1}{z-\bar{z}_0}$$

и

$$F^{(np+s)}(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \zeta^{np+s} e^{\zeta s} f(\zeta)\,d\zeta = \operatorname{Re}\left(\frac{2}{i} z_0^{np+s} e^{sz_0}\right) =$$

$$= (-1)^n \left[\frac{\pi(mp-k)}{p\sin\frac{k\pi}{p}}\right]^{np+s} e^{s\frac{\pi(mp-k)}{p\operatorname{tg}\frac{k\pi}{p}}} (e^{\pi i m} - e^{-\pi i m}) = 0. \tag{141}$$

Этим наша теорема доказана полностью.

Рассмотрим частные случаи областей D. Заметим прежде всего, что $w(z)$ не имеет нулей внутри круга $|z| \leqslant \frac{\pi}{p\sin\frac{\pi}{p}}$.

Тогда $F(z)$, если только $h(\varphi) < \frac{\pi}{p\sin\frac{\pi}{p}}$, представляется на основании доказанной нами теоремы при $\lambda(\zeta) = \zeta$ рядом

$$F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m}{m!} z^m, \quad c_m = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{p-1} \frac{F^{(np+s)}(s)}{(np+s)!} \frac{d^{np+s}}{d\zeta^{np+s}} \frac{\zeta^m w_s(\zeta)}{w(\zeta)}\Bigg|_{\zeta=0} \tag{142}$$

или после легких преобразований рядом[1])

$$\left.\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{p-1} \frac{F^{(np+s)}(s)}{(np+s)!} P_{np+s}(z), \\ P_{np+s}(z) &= \frac{d^{np+s}}{d\zeta^{np+s}} \frac{p w_s(\zeta) e^{z\zeta}}{w(\zeta)}\Bigg|_{\zeta=0}. \end{aligned}\right\} \tag{143}$$

---

[1]) В. Л. Гончаров, Sur un procédé d'iteration, Сообщения Харьковского математического общества, серия 4, т. 5, стр. 32, 1932.

Функция $w(\zeta)$ не имеет также нулей внутри бесконечной выпуклой области D, ограниченной кривой, имеющей в полярных координатах r и φ уравнение

$$r = \frac{\pi - \varphi}{|\sin\varphi|}, \quad 0 \leqslant |\varphi| \leqslant \pi.$$

Область D в плоскости ζ конформно отображается на круг $|\tau| \leqslant \frac{4}{e}$ в плоскости τ с помощью функции

$$\tau = \lambda(\zeta) = \frac{4}{e} \frac{\sqrt{1 + \zeta e^{\zeta+1}} - 1}{\sqrt{1 + \zeta e^{\zeta+1}} + 1}. \tag{144}$$

Значит, $F(z)$ представляется при выполнении неравенств $h(\varphi) < H(\varphi)$, $0 \leqslant |\varphi| \leqslant \pi$, где $H(\varphi)$ — опорная функция области D даваемая соотношениями (99) § 4, рядом многочленов

$$\left.\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(z), \\ P_n(z) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+k-1)!\, e^{n-k} 4^{k-n}}{k!\,(n-k)!\,(2k-1)!} z\,(z-k)^{k-1}, \\ c_n &= \frac{4^n e^{-n}}{2\pi i} \int_C \frac{\Phi_0(\zeta)}{w(\zeta)} \left(\frac{\sqrt{1+\zeta e^{\zeta+1}} - 1}{\sqrt{1+\zeta e^{\zeta+1}} + 1}\right)^n d\zeta. \end{aligned}\right\} \tag{145}$$

3. Заданы числа $F^{(np)}(s)$, $0 \leqslant s \leqslant p-1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Пусть $F(z)$ — целая функция не выше первого порядка нормального типа, $h(\varphi)$ — ее индикатриса, $f(z)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $F(z)$. Для решения этой интерполяционной задачи рассмотрим функцию $w(z)$, $w(\eta, \zeta)$, $w_s(\zeta)$:

$$\left.\begin{aligned} &\omega_s = e^{\frac{2\pi(s-1)i}{p}}, \quad s = 1, 2, \ldots, p, \\ &w(\zeta) = \zeta^{-p+1}(e^{\zeta} - e^{\omega_2\zeta}) \ldots (e^{\zeta} - e^{\omega_p\zeta}), \\ &w(\eta, \zeta) = \zeta^{-p+1}(e^{\eta} - e^{\omega_2\zeta}) \ldots (e^{\eta} - e^{\omega_p\zeta}), \\ &w_s(\zeta) = \frac{\zeta^{-p+s+1}}{s!} \frac{d^s}{dx^s} [(x - e^{\omega_2\zeta} + 1) \ldots (x - e^{\omega_p\zeta} + 1)]\Big|_{x=0}, \\ &\qquad s = 0, 1, \ldots, p-1, \end{aligned}\right\} \tag{146}$$

причем

$$\left.\begin{aligned} &w(0)=p, \quad w_s(0)=1, \quad w(\eta, \eta)=w(\eta), \\ &w(\eta, \quad \omega_s\eta)=0, \quad s=2, 3, \ldots, p-1, \\ &w(\eta, \zeta)=\sum_{s=0}^{p-1}(e^{\eta}-1)^s w_s(\zeta)\zeta^{-s}. \end{aligned}\right\} \tag{147}$$

Совершенно так же, как в предыдущей задаче, мы определяем целую функцию

$$\Phi(z)=\frac{p}{(2\pi i)^2}\int_{C_2} f(\eta)\,d\eta\int_{C_1} w(\eta, \zeta)\frac{\zeta^{p-1}e^{z\zeta}}{\zeta^p-\eta^p}\,d\zeta, \tag{148}$$

где C_1 и C_2 — замкнутые контуры, причем C_2 содержит внутри себя все особенности $f(\eta)$, а C_1 есть окружность $|\zeta|=\rho$, $\rho>\max\limits_{\eta\in C_2}|\eta|$, откуда

$$\Phi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{p-1}\Delta^s F^{(np)}(0)\frac{p}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{e^{z\zeta}w_s(\zeta)}{\zeta^{np+s+1}}\,d\zeta, \tag{149}$$

или

$$\Phi(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m}{m!}z^m, \quad a_m=p\sum_{\substack{n=0\\ np+s\geqslant m}}^{\infty}\sum_{s=0}^{p-1}\frac{\Delta^s F^{(np)}(0)}{(np+s-m)!}w_s^{(np+s-m)}(0). \tag{150}$$

Тогда $\Phi_0(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a^n z^{-n-1}$.

Функции $f(z)$ и $\Phi_0(z)$, регулярные в бесконечности, связаны соотношением

$$\int_C e^{z\zeta}[w(\zeta)f(\zeta)-\Phi_0(\zeta)]\,d\zeta=0, \tag{151}$$

где C — замкнутый контур, лежащий внутри области D, в которой нет нулей функции $w(\zeta)$ и которая содержит внутри себя все особенности $f(\zeta)$ и $\Phi_0(\zeta)$, причем всякая регулярная точка $f(\zeta)$, естественно, будет регулярной и для $\Phi_0(\zeta)$.

Мы можем доказать теорему: *если $F(z)$ — целая функция не выше первого порядка нормального типа σ и заданы числа*

$$F^{(np)}(s)=\left.\frac{d^{np}F(z)}{dz^{np}}\right|_{z=s}, \quad 0\leqslant s\leqslant p-1, \quad n=0, 1, 2, \ldots, \tag{152}$$

то эти числа полностью определяют $F(z)$ в том и только в том случае, когда все особенности $f(z)$ находятся в односвязной области D, предполагаемой симметричной относительно действительной

оси и не содержащей нулей функции

$$w(\zeta) = \zeta^{-p+1}(e^{\zeta} - e^{\omega_2\zeta})\ldots(e^{\zeta} - e^{\omega_p\zeta}), \tag{153}$$

и $F(z)$ может быть представлена равномерно сходящимися в любой конечной части плоскости z рядами

$$\left.\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(z), \quad P_n(z) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\tau^n} e^{z\theta(\tau)}\Big|_{\tau=0}, \\ c_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Phi_0(\zeta)[\lambda(\zeta)]^n}{w(\zeta)}\,d\zeta, \end{aligned}\right\} \tag{154}$$

$$\left.\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(z), \quad P_n(z) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\tau^n}\frac{e^{z\theta(\tau)}}{w[\theta(\tau)]}\Big|_{\tau=0}, \\ c_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \Phi_0(\zeta)[\lambda(\zeta)]^n\,d\zeta, \end{aligned}\right\} \tag{155}$$

где C — замкнутый контур, лежащий внутри D и содержащий внутри себя все особенности $f(\zeta)$; функция $\tau = \lambda(\zeta)$ конформно отображает область D на круг $|\tau| \leqslant \rho$ в плоскости τ, $\zeta = \theta(\tau)$, а $\Phi_0(z)$ ассоциирована по Борелю с $\Phi(z)$, определяющейся формулами (149) и (150) и строящейся непосредственно с помощью чисел $F^{(np)}(s)$, $0 \leqslant s \leqslant p-1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

При условии выпуклости области D представления (154) и (155) будут иметь место, если выполнено неравенство $h(-\varphi) < H(\varphi)$, где $h(\varphi)$ — индикатриса $F(z)$, а $H(\varphi)$ — опорная функция выпуклой области D.

Доказательство. Так как $f(z)$ и $\Phi_0(z)$ связаны соотношением (151), то справедливость представления $F(z)$ рядами (154) и (155) непосредственно следует из теорем VIII и VIII'.

Нули функции $w(\zeta)$ будут находиться в точках

$$z = e^{\frac{\pi k i}{p}}\frac{m\pi}{\sin\frac{|k\pi|}{p}}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(p-1), \quad m = 1, 2, \ldots$$

Все числа $F^{(np)}(s)$, $0 \leqslant s \leqslant p-1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, для функции

$$F(z) = e^{z_0 z} - e^{\bar{z}_0 z},$$

где z_0 и $\bar{z}_0$ — комплексно сопряженные нули $w(z)$, будут, как легко проверить, равны нулю. Этим наша теорема полностью доказана.

Частным случаем области D будет круг $|\zeta| \leqslant \pi$ при p четном и круг $|\zeta| \leqslant \frac{\pi}{\cos\frac{\pi}{2p}}$ при p нечетном, так как в таких кругах $w(\zeta)$

не имеет нулей. Тогда $F(z)$, если только $h(\varphi) < \pi$ или $h(\varphi) < \frac{\pi}{\cos\frac{\pi}{2p}}$ при p соответственно четном или нечетном представляется рядом

$$\left.\begin{aligned} F(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m}{m!} z^m, \\ c_m &= p \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{p-1} \frac{\Delta^s F^{(np)}(0)}{(np+s)!} \frac{d^{np+s}}{d\zeta^{np+s}} \frac{\zeta^m w_s(\zeta)}{w(\zeta)} \Big|_{\zeta=0} \end{aligned}\right\} \tag{156}$$

или после легких преобразований рядом[1])

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{p-1} \frac{\Delta^s F^{(np)}(0)}{(np+s)!} P_{np+s}(z), \\ P_{np+s}(z) &= \frac{d^{np+s}}{d\zeta^{np+s}} \frac{p w_s(\zeta) e^{z\zeta}}{w(\zeta)} \Big|_{\zeta=0}. \end{aligned} \tag{157}$$

Функция $w(z)$ не имеет нулей внутри полосы $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$. Опорная функция этой выпуклой области будет $H\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pi$, $H(\varphi) = \infty$, $\varphi \neq \pm\frac{\pi}{2}$. Поэтому, если только $h\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) < \pi, h(\varphi) < \infty$, $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$, функция $F(z)$ представляется рядом

$$\left.\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(z), \quad P_n(z) = \\ &= \frac{2z}{4^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2z-k+1)\ldots(2z+n-k-1)}{k!\,(n-k)!}, \\ c_n &= \frac{4^n}{2i} \int_C \frac{\Phi_0(\zeta)}{w(\zeta)} \left(\frac{e^{\frac{\zeta}{2}}-1}{e^{\frac{\zeta}{2}}+1}\right)^n d\zeta, \end{aligned}\right\} \tag{158}$$

так как полоса $-\pi < \operatorname{Im}\zeta < \pi$ перейдет в круг $|\tau| \leqslant 4$ с помощью функции $\tau = 4\frac{e^{\frac{\zeta}{2}}-1}{e^{\frac{\zeta}{2}}+1}$.

---

[1]) H. Poritsky, On certain polynomial и т. д. Trans. Amer. Mat. Soc., т. 34, стр. 274, 1932.

4. Заданы числа $A_{np,s} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C u_s(\zeta)\zeta^{np} f(\zeta)\,d\zeta$, $1 \leqslant s \leqslant p$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Эта общая интерполяционная задача, частными случаями которой являются две ранее рассмотренные интерполяционные задачи, решается тем же методом,, что и они.

Допуская, что функции $u_s(z)$, $s = 1, 2, \ldots, p$, регулярны в некоторой области $\overline{D}$, содержащей начало внутри, мы строим вспомогательные функции

$$w(\zeta) = \zeta^{-\alpha_p}\begin{vmatrix} u_1(\zeta) & \ldots u_p(\zeta) \\ u_1(\omega_2\zeta) & \ldots u_p(\omega_2\zeta) \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ u_1(\omega_p\zeta) & \ldots u_p(\omega_p\zeta) \end{vmatrix},$$

$$w(\eta, \zeta) = \begin{vmatrix} u_1(\eta) & \ldots u_p(\eta) \\ u_1(\omega_2\zeta) & \ldots u_p(\omega_2\zeta) \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ u_1(\omega_p\zeta) & \ldots u_p(\omega_p\zeta) \end{vmatrix},$$

где число α_p выбрано так, чтобы функция $w(\zeta)$ не имела нуля в начале.

С помощью этих функций, так же как и раньше, строим функции $\Phi(z)$ и $\Phi_0(z)$, причем $\Phi_0(z)$ должна быть связана с $F(z)$ уравнением

$$\int\limits_C e^{z\zeta}[w(\zeta)f(\zeta) - \Phi_0(\zeta)]\,d\zeta = 0.$$

Кроме того, функция $\Phi_0(z)$ непосредственно определяется с помощью чисел $A_{np,s}$. Решая это уравнение относительно $F(z)$, мы получим, что общая интерполяционная задача решается единственным образом в том случае, когда все особенности функции $f(z)$, ассоциированной по Борелю с $F(z)$, находятся в некоторой области D, в которой $w(z)$ регулярна и не имеет нулей.

В заключение отметим одно вполне осуществимое обобщение последних параграфов. Пусть задана последовательность не равных нулю чисел $n_0, n_1, \ldots, \lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|n_k|} = \infty$.

Рассмотрим класс целых функций $F(z)$:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

обладающих тем свойством, что ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k n_k z^{-n-1}$$

будет иметь отличный от бесконечности радиус сходимости. Если между ростом $F(z)$ и расположением особенностей $f(z)$ при заданной последовательности $\{n_k\}$ можно установить обозримую связь, то можно с помощью вышеизложенных рассмотрений решать задачу об определении целой функции $F(z)$ по ее моментам

$$A_k = \frac{1}{2\pi i}\int_C [u(\zeta)]^k f(\zeta)\, d\zeta, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

так как между $F(z)$ и $f(z)$ будет иметь место связь

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(z\zeta) f(\zeta)\, d\zeta,$$

$$\varphi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^k}{n_k},$$

где C — замкнутый контур, содержащий внутри все особенности $f(z)$ [1]).

---

[1]) В ряде работ были использованы и развиты идеи, изложенные в этой главе. См., например, работы:

Bick R. C., Interpolation and uniqueness of entire functions, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 33, 1947, 288—292.

Евграфов М. А., Метод близких систем в пространстве аналитических функций и его применение к интерполяции, Тр. Моск. матем. о-ва 5, 89, 1956; Интерполяционная задача Абеля — Гончарова, Гостехиздат, 1954.

Евграфов М. А. и Соловьев А. Д., Об одном общем критерии базиса, ДАН СССР 113, 3, 493, 1957.

Лохин И. Ф., Ассоциированные функции и их применение, Докт. диссертация, М., 1951, стр. 298.

Маркушевич А. И., О базисе в пространстве аналитических функций, Матем. сб. 17 (59): 2, 1945, 211—252.

Соловьев А. Д., Проблема моментов для целых аналитических функций, Канд. диссертация, М., МГУ, 1955, стр. 88.

ГЛАВА IV

СУММИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ. ЧИСЛА И МНОГОЧЛЕНЫ БЕРНУЛЛИ

§ 1. Постановка задачи. Случаи элементарного суммирования

1. Связь между задачами суммирования и нахождения функции по заданной разности. Эта глава посвящена одной важной задаче теории конечных разностей — задаче суммирования функций. Задача эта ставится так.

Нам дана некоторая функция $f(x)$. Найти в конечном виде, точно или приближенно, сумму

$$S_n = f(x_0) + f(x_0 + h) + \ldots + f(x_0 + nh)$$

при фиксированных x_0 и h и большом n, если известны некоторые аналитические свойства $f(x)$.

Трудность этой задачи состоит не в том, чтобы найти значение этой суммы при каждом фиксированном n, а в том, чтобы исследовать ее поведение как функции от n при n, неограниченно растущих, как часто говорят, исследовать асимптотическое поведение S_n.

В дальнейшем мы для удобства всегда будем считать $x_0 = 0$, $h = 1$. Это, естественно, не повлияет на общность наших рассуждений, так как, положив $\varphi(x) = f(x_0 + hx)$, мы получим, что

$$f(x_0) + f(x_0 + h) + \ldots + f(x_0 + nh) = \varphi(0) + \varphi(1) + \ldots + \varphi(n).$$

Итак, наша задача, грубо говоря, состоит в нахождении суммы

$$S_n = \varphi(0) + \varphi(1) + \ldots + \varphi(n)$$

как функции от n. Мы сейчас покажем, что эта задача может быть сведена к такой задаче: дана функция $\varphi(x)$, найти функцию $F(x)$, такую, что $F(x+1) - F(x) = \varphi(x)$. (В формулировке этой задачи выражение «найти» можно понимать, конечно, по-разному, и это может привести нас к другим интересным задачам, но для применения к задаче суммирования «найти» следует понимать

в том же смысле, в каком мы говорили о «нахождении» S_n как функции n.)

Действительно, пусть мы нашли $F(x)$, такую, что $\Delta F(x) = \varphi(x)$ [по-прежнему $\Delta F(x)$ равно $F(x+1) - F(x)$], тогда

$$F(1) - F(0) = \varphi(0),$$
$$F(2) - F(1) = \varphi(1), \ldots, F(n+1) - F(n) = \varphi(n).$$

Складывая эти равенства, получим

$$\varphi(0) + \varphi(1) + \ldots + \varphi(n) = F(n+1) - F(0), \tag{1}$$

а это и есть решение нашей задачи о суммировании функции $\varphi(x)$.

Полной эквивалентности этих задач нет, так как S_n определена лишь для целых значений n, но если мы умеем найти не только S_n, а и сумму

$$S(x, n) = \varphi(x) + \varphi(x+1) + \ldots + \varphi(x+n)$$

при любом x, то мы можем найти и $F(x)$. В самом деле, тогда мы можем определить $F(x)$ следующим образом: при $n \leqslant x < n+1$ $F(x) = S(x-n, n-1)$. Найдем $\Delta F(x)$:

$$\begin{aligned}\Delta F(x) &= F(x+1) - F(x) = \\ &= S(x+1-n-1, n) - S(x-n, n-1) = \\ &= S(x-n, n) - S(x-n, n-1) = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \varphi(x-n+k) - \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(x-n+k) = \varphi(x),\end{aligned}$$

т. е. $F(x)$, определенная таким образом, будет решением уравнения $\Delta F(x) = \varphi(x)$.

Можно провести далеко идущую аналогию между этими задачами теории конечных разностей и интегральным исчислением. Если считать, что операция взятия конечной разности соответствует взятию производной, то решение уравнения $\Delta F(x) = \varphi(x)$ как операция, обратная взятию конечной разности, соответствует нахождению первообразной, т. е. неопределенному интегрированию, а задача суммирования функции соответствует задаче нахождения определенного интеграла. Формула (1) есть прямой аналог формулы Ньютона — Лейбница, выражающей связь между первообразной и определенным интегралом. Как в интегральном исчислении неопределенное интегрирование служит лишь средством для нахождения определенного интеграла, так и в теории конечных разностей (по крайней мере в тех задачах, о которых мы сейчас говорим) отыскание функции по заданной разности является лишь средством для решения задачи о суммировании функции. (Речь идет, конечно, о роли этих задач в приложениях; с точки зрения теории оба вида задач совершенно равноправны.)

2. Случаи элементарного суммирования. Если функция $\varphi(x)$ является какой-то комбинацией элементарных функций, то можно по аналогии с интегральным исчислением пытаться привести задачу суммирования функции $\varphi(x)$ к суммированию, так сказать, «табличных функций», т. е. к суммированию функций, суммы для которых нам известны. В интегральном исчислении для этой цели служат табличные интегралы, т. е. таблица интегралов от простейших элементарных функций, и огромное количество всяких приемов. Мы продемонстрируем этот метод на небольшом числе примеров, так как метод элементарного суммирования в теории конечных разностей играет значительно меньшую роль, чем в интегральном исчислении, как из-за меньшей применимости, так и из-за другого характера задач.

Из определения конечной разности $\Delta F(x) = F(x+1) - F(x)$ мы с помощью несложных вычислений легко получим формулы:

1) $\Delta a^x = a^x(a-1)$,

2) $\Delta \sin \alpha x = 2 \sin \frac{\alpha}{2}\left(\alpha x + \frac{\alpha}{2}\right)$,

3) $\Delta \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(x+1)}$,

4) $\Delta \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{1+x(x+1)}$.

Обращая эти формулы, легко получаем формулы:

1) $\sum\limits_{x=0}^{n} a^x = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$,

2) $\sum\limits_{x=0}^{n} \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \alpha x\right) = \frac{\sin(n+1)\alpha x}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$,

3) $\sum\limits_{x=1}^{n} \frac{1}{x(x+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$,

4) $\sum\limits_{x=0}^{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{1+x(x+1)} = \operatorname{arctg}(n+1)$.

Таких формул можно было бы привести очень много, но уже из приведенных видно, что формулы суммирования являются более громоздкими и менее удобными в обращении, чем формулы интегрального исчисления. Так, например, формула суммирования обычной степени, которую мы получим несколько ниже, имеет уже очень громоздкий вид.

Большую роль в теории конечных разностей играет известная нам обобщенная степень $x^{(k)} = x(x-1)\ldots(x-k+1)$ (k — целое). Для обобщенной степени формулы суммирования выглядят очень просто. Как мы уже знаем,

$$\Delta x^{(k)} = kx^{(k-1)}, \tag{2}$$

поэтому

$$\sum_{x=0}^{n} x^{(k)} = \frac{(n+1)^{(k+1)}}{k+1}. \tag{3}$$

Аналогично можно определить обобщенные отрицательные степени $x^{(-k)}$ (k — целое положительное число):

$$x^{(-k)} = \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+k-1)}. \tag{4}$$

Найдем $\Delta x^{(-k)}$:

$$\Delta x^{(-k)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+k)} - \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+k-1)} =$$
$$= \frac{x-(x+k)}{x(x+1)\ldots(x+k)} = -\frac{k}{x(x+1)\ldots(x+k)} = -kx^{(-k-1)}. \tag{5}$$

Отсюда получим соответствующую формулу

$$\sum_{x=1}^{n-1} x^{(-k)} = -\frac{1}{k-1} n^{(-k+1)}. \tag{6}$$

Из приемов элементарного суммирования отметим только преобразование Абеля — аналог интегрирования по частям. Преобразованием Абеля называется тождество

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{x=m}^{n} u(x+1)\,v(x+1) = \\ &\quad = U(n+1)\,v(n+1) - U(m)\,v(m) - \sum_{x=m}^{n} U(x)\,\Delta v(x), \\ &\qquad U(x) = \sum_{k=1}^{n} u(k). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Для доказательства этого тождества заметим, что

$$\Delta[U(x)\,v(x)] = \Delta U(x)\,v(x+1) + U(x)\,\Delta v(x) =$$
$$= u(x+1)\,v(x+1) + U(x)\,\Delta v(x),$$

или

$$u(x+1)\,v(x+1) = \Delta[U(x)\,v(x)] - U(x)\,\Delta v(x).$$

Суммируя от m до n, получаем (7).

С помощью преобразования Абеля можно просуммировать, например, функцию $\varphi(x) = xa^x$. Положим $u(x) = a^{x-1}$, $v(x) = x - 1$, тогда $U(x) = \frac{a^x - 1}{a - 1}$, $\Delta v(x) = 1$, поэтому

$$\sum_{x=1}^{n} xa^x = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} n - \sum_{x=1}^{n} \frac{a^x - 1}{a - 1} =$$

$$= n \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} + \frac{n}{a - 1} - \frac{a^{n+1} - a}{(a - 1)^2} = n \frac{a^{n+1}}{a - 1} - \frac{a^{n+1} - a}{(a - 1)^2}.$$

Пока мы действовали по аналогии с интегральным исчислением, но эта аналогия прекращается, как только мы сталкиваемся со случаем, когда среди элементарных функций нельзя найти такую функцию $F(x)$, чтобы $\Delta F(x) = \varphi(x)$. Такие случаи встречаются уже для самых простых функций $\varphi(x)$. Например, уравнения $\Delta F(x) = \frac{1}{x}$, $\Delta F(x) = \ln x$ не имеют решения среди элементарных функций. Специфика задачи суммирования функций не позволяет нам в таких случаях пойти по пути интегрального исчисления, т. е. составить с помощью приближенных вычислений таблицу значений такой функции и пользоваться ею по мере надобности. Задача суммирования требует знания поведения суммы как функции от числа слагаемых, когда оно неограниченно возрастает, а такого знания таблица значений дать не может. Решением этой «неэлементарной» задачи суммирования мы и займемся в дальнейшем.

Мы уже видели, что задача о суммировании функции $\varphi(x)$ решается легко, если найдено решение уравнения $\Delta F(x) = \varphi(x)$. Поэтому мы в дальнейшем будем заниматься решением уравнения

$$\Delta F(x) = \varphi(x), \tag{α}$$

причем, хотя решение задачи о суммировании будет нашей основной целью, мы будем иногда говорить и о других возможных постановках задачи о решении уравнения (α).

3. Общие замечания о решении уравнения $\Delta F(x) = \varphi(x)$. Сейчас мы несколько отвлечемся от того, что решение уравнения (α) нам нужно лишь для решения задачи о суммировании функции $\varphi(x)$, и выясним следующие вопросы.

1. Всегда ли уравнение (α) имеет хотя бы одно решение, если $\varphi(x)$ — непрерывная функция.

2. Какова степень неопределенности решения уравнения (α).

Первый вопрос уже был решен нами в положительном смысле в п. 1 настоящего параграфа. Там мы показали, что функция $F(x) = S(x - n, n - 1)$ при $n \leqslant x < n + 1$, где

$$S(x, n) = \varphi(x) + \varphi(x + 1) + \ldots + \varphi(x + n)$$

является решением уравнения $\Delta F(x) = \varphi(x)$. Очевидно, что если $\varphi(x)$ непрерывна, то и $F(x)$, определенная таким образом, также непрерывна в любой нецелой точке.

Для решения второго вопроса предположим, что у нас есть два решения: $F_1(x)$ и $F(x)$. Положим $u(x) = F(x) - F_1(x)$. Тогда получим

$$\Delta u(x) = \Delta[F(x) - F_1(x)] = \Delta F(x) - \Delta F_1(x) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0,$$

отсюда

$$u(x+1) = u(x),$$

т. е. $u(x)$ — периодическая функция с периодом, равным единице. Итак, если мы имеем два решения уравнения (α), то они могут отличаться лишь на периодическую функцию с периодом, равным единице.

С другой стороны, если $F_1(x)$ — решение уравнения (α), то функция $F(x) = F_1(x) + C(x)$, где $C(x)$ — любая периодическая функция, с периодом единица, также будет решением уравнения (α), так как

$$\Delta F(x) = \Delta(F_1(x) + C(x)) = \Delta F_1(x) + \Delta C(x) = \varphi(x).$$

Из этих двух замечаний мы можем сделать вывод: *общее решение уравнения $\Delta F(x) = \varphi(x)$ можно представить в виде $F(x) = F_1(x) + C(x)$, где $F_1(x)$—какое-нибудь решение нашего уравнения, а $C(x)$— произвольная периодическая функция с периодом, равным единице.*

Для того чтобы из всех решений уравнения (α) выделить какое-нибудь одно, очевидно, нужно задать его значения на целом интервале длиной единица.

Такая задача, конечно, большого интереса не представляет. Выделять из всех решений одно можно и другими способами. Например, можно искать монотонное или выпуклое решение или решение, стремящееся к нулю при $x \to \infty$. Обычно, накладывая такие условия, мы находим решение или единственное, или с точностью до произвольной постоянной. Из задач такого рода мы немного остановимся лишь на одной. Эта задача состоит в следующем: $\varphi(x)$ — многочлен; найти многочлен $F(x)$, удовлетворяющий уравнению (α). В § 7 главы V мы столкнемся с обобщением этой задачи. Там $\varphi(x)$ мы будем предполагать не многочленом, а целой аналитической функцией, да и уравнения будут иметь более сложный вид.

4. Решение уравнения $\Delta F(x) = \varphi(x)$ для случая, когда $\varphi(x)$ — многочлен. Целью этого пункта является подробное исследование решения задачи, состоящей в следующем: дан многочлен $\varphi(x)$; найти многочлен $F(x)$, такой, что

$$\Delta F(x) = \varphi(x).$$

Эта задача имеет и самостоятельный интерес, но, кроме того, мы на ее примере постараемся найти те пути, которые позволили бы нам подойти к решению задачи о суммировании функций.

Как нетрудно видеть, многоч ен $F(x)$, решающий поставленную задачу, может быть определен с точностью до произвольной постоянной. В самом деле, если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — два многочлена, удовлетворяющих условию $\Delta F(x) = \varphi(x)$, то их разность $u(x) = F_1(x) - F_2(x)$ — также многочлен и удовлетворяет условию $\Delta u(x) = 0$. Рассмотрим $p(x) = u(x) - u(0)$. Имеем

$$p(0) = 0, \quad p(1) = 0, \ldots, p(n) = 0, \ldots;$$

следовательно, $p(x) \equiv 0$ и $u(x) \equiv u(0) = C$, т. е.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Мы дадим три способа решения поставленной задачи.

I способ. Разложим $\varphi(x)$ в ряд по обобщенным степеням. По формуле Ньютона (см. главу I, § 3)

$$\varphi(x) = \sum_{x=0}^{n} \Delta^k \varphi(0) \frac{x^{(k)}}{k!}. \tag{8}$$

Оператор Δ — линейный, т. е.

$$\Delta(\lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_k f_k(x)) = \lambda_1 \Delta f_1(x) + \ldots + \lambda_k \Delta_k f_k(x).$$

Поэтому, если $f_s(x)$ — решение уравнения $\Delta F(x) = \varphi_s(x)$, то решением уравнения

$$\Delta F(x) = \lambda_1 \varphi_1(x) + \ldots + \lambda_k \varphi_k(x)$$

будет функция

$$f(x) = \lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_k f_k(x).$$

Но мы знаем, что многочлен $\frac{x^{(k+1)}}{k+1}$ является решением уравнения

$$\Delta F(x) = x^{(k)}.$$

Отсюда многочлен, удовлетворяющий уравнению (α), может быть записан в виде

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^{(k)}\varphi(0)}{(k+1)!} x^{(k+1)} + C. \tag{9}$$

Это решение, несмотря на его внешнюю простоту, не очень удобно, так как нахождение чисел $\Delta^{(k)}\varphi(0)$ требует довольно больших вычислений, причем для каждого $\varphi(x)$ эти вычисления приходится проделывать заново.

Для обобщения на классы функций, более широкие, чем многочлены, этот способ мало пригоден, так как мы знаем (см. главу II),

что ряд Ньютона сходится лишь для целых аналитических функций с сильными ограничениями на рост, причем даже в случае сходимости ряда Ньютона он не может быть использован для исследования поведения представляемой им функции при больших x, так как, где бы мы его ни оборвали, следующий член будет иметь при $x \to \infty$ более высокий порядок, чем все предыдущие.

Перейдем ко второму способу, который хотя бы в одном отношении будет более удобен.

II способ. Пусть $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Пользуясь первым способом, мы можем для любого k найти многочлен $P_k(x)$, удовлетворяющий условиям

$$\Delta P_k(x) = x^k, \quad P_k(0) = 0. \tag{10}$$

Такой многочлен определяется единственным образом. В силу линейности задачи многочлен $F(x)$, удовлетворяющий уравнению (α), можно записать в виде

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x) + C. \tag{11}$$

Второй способ несколько лучше первого тем, что многочлены $P_k(x)$ подсчитываются раз навсегда. Кроме того, мы увидим дальше, что соответствующий ряд сходится для целых функций несколько более широкого класса. Что же касается последнего недостатка, то второму способу он присущ в той же степени, что и первому.

Естественно, что многочлены, получающиеся в первом и во втором способах, одинаковы и отличаются лишь иной группировкой слагаемых. Третий способ, конечно, тоже не дает в этом смысле ничего нового, но мы сгруппируем слагаемые так, чтобы самую высокую степень имел первый, а не последний многочлен.

III способ. Рассмотрим функцию $g(t, z) = \dfrac{te^{tz}}{e^t - 1}$. Эта функция относительно z — целая функция, а относительно t может иметь особенности в точках $t = 2k\pi i$, так как в этих точках знаменатель обращается в нуль. Легко убедиться, что точка $t = 0$ — регулярная точка для $g(t, z)$.

Разложим эту функцию в ряд по степеням t:

$$g(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B_n(z). \tag{12}$$

Посмотрим, что представляют собой функции $B_n(x)$. Напишем

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}t^n,\quad e^{tz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^nz^n}{n!}. \tag{12'}$$

Согласно правилу о коэффициентах степенного ряда, являющегося произведением двух степенных рядов, получим, что

$$\frac{B_n(z)}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{B_{n-k}z^k}{k!\,(n-k)!}, \tag{13}$$

или

$$B_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!\,B_{n-k}}{k!\,(n-k)!}z^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^kB_{n-k}z^k. \tag{14}$$

Найдем $\Delta B_n(z)$. Для этой цели рассмотрим выражение

$$g(t,z+1)-g(t,z)=\sum_{n=0}^{\infty}[B_n(z+1)-B_n(z)]\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\Delta B_n(z)\frac{t^n}{n!}. \tag{15}$$

С другой стороны,

$$g(t,z+1)-g(t,z)=\frac{te^{t(z+1)}}{e^t-1}-\frac{te^{tz}}{e^t-1}=te^{tz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}z^n}{n!}. \tag{16}$$

Сопоставляя (15) и (16), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Delta B_n(z)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}z^n}{n!}.$$

Сравнивая коэффициенты при t^n, придем к соотношению

$$\Delta B_n(z)=nz^{n-1}. \tag{17}$$

Это соотношение показывает, что $B_n(z)$ — многочлен, удовлетворяющий условиям

$$\Delta B_n(z)=nz^{n-1},\quad B_n(0)=B_n,$$

где B_n определяются разложением (12′).

Многочлены $B_n(z)$ называются *многочленами Бернулли*, а числа B_n — *числами Бернулли*. Функцию $g(t,z)=\frac{te^{tz}}{e^t-1}$ мы будем называть *производящей функцией многочленов Бернулли*, а функцию $\frac{t}{e^t-1}=g(t)$ — *производящей функцией чисел Бернулли*. Метод изучения свойств чисел или многочленов посредством изучения свойств соответствующей производящей функции имеет большое значение во многих областях анализа.

Вернемся к решению нашей задачи. Согласно второму способу, если $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, то многочлен $F(x)$, удовлетворяющий уравнению $\Delta F(x) = \varphi(x)$, можно записать в виде

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{B_{k+1}(x)}{k+1} + C. \tag{18}$$

Подставляя вместо $B_{k+1}(x)$ его выражение из (14), получим

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} \sum_{s=0}^{k+1} \frac{(k+1)!}{s!\,(k+1-s)!} B_{k+1-s}\, x^s + C =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{s=0}^{k+1} \frac{k!\, B_s}{s!\,(k+1-s)!} x^{k+1-s} + C. \tag{19}$$

Соберем члены с одинаковыми B_s $(a_{-1} = 0)$:

$$F(x) = \sum_{s=0}^{n+1} \frac{B_s}{s!} \sum_{k=s-1}^{n} \frac{a_k k!}{(k+1-s)!} x^{k+1-s} + C =$$

$$= \sum_{s=0}^{n+1} \frac{B_s}{s!} \sum_{k=0}^{n-s+1} a_{k+s-1} x^k \cdot \frac{(k+s-1)!}{k!} + C. \tag{20}$$

Но

$$\varphi^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{n-p} a_{k+p}\, x^k \frac{(k+p)!}{k!}, \qquad \int_0^x \varphi(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}. \tag{21}$$

Сравнивая (20) и (21), придем к новому выражению для $F(x)$:

$$F(x) = B_0 \int \varphi(x)\,dx + \sum_{s=1}^{n+1} \frac{B_s}{s!} \varphi^{(s-1)}(x). \tag{22}$$

Выражение (22) избавлено от того недостатка, которым страдали выражения (8) и (10), поэтому в дальнейшем мы будем искать решение задачи о суммировании в обобщении формулы (22) на случай произвольной функции $\varphi(x)$. Для этого нам потребуется хорошо изучить свойства чисел и многочленов Бернулли. Этим мы и займемся в следующем параграфе, а сейчас удовлетворимся тем, что напишем формулу суммирования функции x^s.

Мы уже знаем, что $\Delta B_{s+1}(x) = (s+1)\,x^s$. Поэтому в силу соотношения (1)

$$\sum_{x=0}^{n-1} x^s = \frac{B_{s+1}(n) - B_{s+1}(0)}{s+1} = \frac{B_{s+1}(n) - B_{s+1}}{s+1}.$$

Подставляя выражение $B_{s+1}(x)$ из (14), получим

$$\sum_{x=0}^{n-1} x^s = \sum_{k=1}^{s+1} \frac{s!\,B_{s+1-k}}{k!\,(s+1-k)!} n^k. \tag{23}$$

В следующем параграфе мы займемся изучением чисел и многочленов Бернулли, причем результаты, которые мы получим, представляют интерес независимо от задачи о суммировании.

§ 2. Числа и многочлены Бернулли

1. Вычисление чисел Бернулли. Как мы уже знаем, числа Бернулли B_k определяются из разложения

$$\frac{t}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Bn}{n!} t^n,$$

справедливого при $|t| < 2\pi$. Для нахождения чисел B_k можно вычислить значение функции $\frac{t}{e^t-1}$ и ее последовательных производных для $t=0$. Так, например, сразу получаем $B_0 = 1$. Однако этот метод сложен, ибо не существует простого выражения для n-й производной функции $\frac{t}{e^t-1}$, и лучше воспользоваться рекуррентными формулами, вывод которых основан на следующем соображении.

По определению чисел Бернулли

$$\frac{t}{e^t-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k t^k}{k!}.$$

Разлагая e^t в ряд, сокращая на t и освобождаясь от знаменателя, получим тождество

$$1 = \left(1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \frac{t^3}{4!} + \ldots\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k t^k}{k!},$$

справедливое в круге $|t| < 2\pi$.

Переписывая это тождество в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k+1)!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k t^k}{k!} = 1 \tag{24}$$

и производя перемножение степенных рядов, найдем, что коэффициентом при t^{k-1} в написанном произведении будет следующая

сумма:

$$\frac{1}{k!}\frac{B_0}{0!}+\frac{1}{(k-1)!}\frac{B_1}{1!}+\frac{1}{(k-2)!}\frac{B_2}{2!}+\ldots+\frac{1}{1!}\frac{B_{k+1}}{(k-1)!}\sum_{p=0}^{k-1}\frac{B_pC_k^p}{k!}.$$

Так как ряд, полученный после перемножения рядов, должен быть равен единице, то (единственность разложения!) все его коэффициенты за исключением первого должны обратиться в нуль. Это дает условие

$$\sum_{p=0}^{k-1}\frac{B_pC_k^p}{k!}=0 \text{ для } k>1. \tag{25}$$

Коэффициентом при t^0 будет по-прежнему число $B_0=1$.

Соотношению (25) можно придать следующую удобную для запоминания форму. Прибавляя к обеим частям равенства (17) по $\frac{B_k}{k!}$, получим

$$\sum_{p=0}^{k}\frac{B_pC_k^p}{k!}=\frac{B_k}{k!},$$

откуда, умножая на $k!$, получим

$$\sum_{p=0}^{k}B_pC_k^p=B_k.$$

Это последнее соотношение можно записать условно в виде

$$(B+1)_k^k=B^k, \tag{26}$$

если все степени у чисел B при развертывании бинома в левой части заменять нижними индексами.

Соотношение (26) является искомым рекуррентным соотношением, определяющим числа Бернулли. Полагая в нем последовательно $k=2, 3, 4, \ldots$, из полученных рекуррентных соотношений сможем определить $B_1, B_2, B_3\ldots$ Заметим, что полученная условная запись справедлива, только начиная с $k=2$, так как при $k=1$ соотношение (25) места не имеет.

Полагая $k=2, 3, 4, \ldots$, последовательно найдем:

$$B_2+2B_1+B_0=B_2,\qquad B_1=-\frac{1}{2},$$

$$B_3+3B_2+3B_1+B_0=B_3,\qquad B_2=\frac{1}{6},$$

$$B_4+4B_3+6B_2+4B_1+B_0=B_4,\qquad B_3=0,$$

$$B_5+5B_4+10B_3+10B_2+5B_1+B_0=B_5,\qquad B_4=-\frac{1}{30}.$$

Приведем таблицу чисел Бернулли до B_{34} включительно:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = \frac{-1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = \frac{-1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42},$$

$$B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}, \quad B_{14} = \frac{7}{6}, \quad B_{16} = -\frac{3617}{510},$$

$$B_{18} = \frac{43867}{798}, \quad B_{20} = -\frac{174611}{330}, \quad B_{22} = \frac{854513}{123},$$

$$B_{24} = -\frac{236364091}{2730}, \quad B_{26} = \frac{8553103}{6}, \quad B_{28} = -\frac{23749461029}{870},$$

$$B_{30} = \frac{8615841276005}{14322}, \quad B_{32} = -\frac{7709321041217}{510}, \quad B_{34} = \frac{2577687858367}{6}.$$

Итак, числа B_k определяются посредством соотношений (26) достаточно просто. Это — некоторые рациональные числа.

2. **Дальнейшие свойства чисел Бернулли.** Будем по-прежнему исходить из соотношения

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu t^\nu}{\nu!}, \quad |t| < 2\pi.$$

Докажем во-первых, что все нечетные числа Бернулли, исключая $B_1 = -\frac{1}{2}$, равны нулю; в самом деле, заменим в этом соотношении t на $-t$, от этого оно не нарушится. Тогда получим

$$\frac{-t}{e^{-t} - 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu B_\nu t^\nu}{\nu!}.$$

С другой стороны,

$$\frac{-t}{e^{-t} - 1} = t + \frac{t}{e^t - 1} = t + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu t^\nu}{\nu!};$$

поэтому имеем тождественно

$$t + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu t^\nu}{\nu!} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu B_\nu t^\nu}{\nu!}.$$

Коэффициенты при t в одинаковых степенях должны быть равны, а потому (для $\nu \neq 1$) получим

$$B_\nu = B_\nu (-1)^\nu.$$

Для ν четного это соотношение тривиально; при нечетном ν оно обращается в следующее:

$$B_{2\mu+1} = -B_{2\mu+1},$$

откуда

$$B_{2\mu+1} = 0, \ \mu > 0. \tag{27}$$

Выведем теперь одно замечательное свойство бернуллиевых чисел, именно покажем, что сумма бесконечного ряда из четных отрицательных степеней чисел натурального ряда весьма просто выражается через бернуллиевы числа.

Это положение мы докажем, опираясь на теоретико-функциональные теоремы. Как известно, функция $\frac{\sin \pi x}{\pi}$ может быть разложена в бесконечное произведение:

$$\frac{\sin \pi x}{\pi} = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right). \tag{28}$$

Это произведение сходится в любой конечной части плоскости комплексного переменного x, притом равномерно в круге любого сколь угодно большого радиуса, ибо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{k^2}$ сходится для любого конечного x. Логарифмируя тождество (28), получим

$$\ln \sin \pi x - \ln \pi = \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right).$$

Вновь полученный ряд сходится для всех значений x, исключая точки $x = \pm k \, (k = 0, 1, 2, \ldots)$. В любой замкнутой области, не содержащей этих точек, он сходится равномерно. На основании теоремы Вейерштрасса о возможности почленного дифференцирования равномерно сходящегося ряда аналитических функций найдем

$$\frac{\pi \cos \pi x}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\frac{2x}{k^2}}{1 - \frac{x^2}{k^2}},$$

откуда

$$\frac{\pi x \cos \pi x}{\sin \pi x} = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{k^2 - x^2}.$$

Функцию $\frac{x^2}{k^2 - x^2}$ можно разложить в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по степеням x в круге радиуса ρ, $\rho < 1$, ибо каждая такая функция регулярна в этом круге.

Производя это разложение, найдем

$$\frac{\pi x \cos \pi x}{\sin \pi x} = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^{2p}}{k^{2p}}. \tag{29}$$

Меняя порядок суммирования, что возможно в силу абсолютной сходимости двойного ряда в единичном круге, получим

$$\frac{\pi x \cos \pi x}{\sin \pi x} = 1 - 2 \sum_{p=1}^{\infty} x^{2p} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p}} \right].$$

Для установления связи ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p}}$$

с числами Бернулли преобразуем левую часть полученного соотношения. Замечая, что

$$\cos \pi x = \frac{e^{\pi i x} + e^{-\pi i x}}{2}, \quad \sin \pi x = \frac{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}}{2i},$$

найдем

$$\frac{\pi x \cos \pi x}{\sin \pi x} = \frac{\pi i x \left(e^{\pi i x} + e^{-\pi i x}\right)}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}} = \pi i x + \frac{2\pi i x}{e^{2\pi i x} - 1}.$$

Полагая

$$2\pi i x = t,$$

получим

$$\frac{\pi x \cos \pi x}{\sin \pi x} = \frac{t}{2} + \frac{t}{e^t - 1},$$

или

$$\frac{\pi x \cos \pi x}{\sin \pi x} = \frac{t}{2} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu t^\nu}{\nu!}.$$

В написанной сумме суммирование распространится только на четные степени t, потому что единственная нечетная степень t в первой степени уничтожится с $\frac{t}{2}\left(B_1 = -\frac{1}{2}\right)$. Выделяя единицу и заменяя индекс суммирования через p [для соответствия с разложением (29)], найдем

$$\frac{\pi x \cos \pi x}{\sin \pi x} = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{B_{2p} t^{2p}}{(2p)!},$$

или так как

$$t = 2\pi i x,$$

то

$$\frac{\pi x \cos \pi x}{\sin \pi x} = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} B_{2p} \frac{(-1)^p 2^{2p} \pi^{2p}}{(2p)!} x^{2p}. \tag{30}$$

Сравнивая коэффициенты при x^{2p} в разложении (29) и (30), получаем

$$-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2p}}=B_{2p}\frac{(-1)^p 2^{2p}\pi^{2p}}{(2p)!},$$

откуда окончательно

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2p}}=\frac{(-1)^{p-1}2^{2p-1}\pi^{2p}}{(2p)!}B_{2p}. \tag{31}$$

Формула (31) позволяет установить еще некоторые свойства чисел Бернулли; ясно, что левая часть всегда положительна; значит, положительна также и правая часть. Множители в правой части, которые могут быть отрицательными, следующие:

$$(-1)^{p-1} \text{ и } B_{2p},$$

значит, их произведение всегда положительно. Это замечание показывает, что

$$\operatorname{sign} B_{2p}=(-1)^{p-1}. \tag{32}$$

При p четном $B_{2p}<0$, при p нечетном $B_{2p}>0$, т. е.

$$B_{4q}<0, \qquad q=1,\ 2,\ 3,\ldots; \tag{33}$$

$$B_{4q+2}>0, \qquad q=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots \tag{34}$$

Формула (31) также подтверждает, что все четные числа Бернулли отличны от нуля. Из соотношения (31) также просто выясняется порядок роста бернуллиевых чисел. Замечая, что

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2p}}=1,$$

заключаем, что порядок роста B_{2p} одинаков с ростом функции

$$\frac{(2p)!}{2^{2p-1}\pi^{2p}},$$

иначе

$$\lim_{p\to\infty}\frac{|B_{2p}|}{\dfrac{(2p)!}{2^{2p-1}\pi^{2p}}}=1. \tag{35}$$

Наконец, формула (31) выясняет характер иррациональности чисел, изображаемых рядами

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2p}}; \tag{36}$$

именно иррациональность в соотношении (31) представлена только множителем π^{2p}. Это показывает, что сумма (36) есть число трансцендентное (выражающееся через четные степени π). Соотношение (31) можно также разрешить относительно числа B_{2p}. Произведя это, получим

$$B_{2p} = \frac{(-1)^{p-1}(2p)!}{2^{2p-1}\pi^{2p}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p}}. \tag{37}$$

3. О малой теореме Ферма. Теперь мы рассмотрим одно замечательное арифметическое свойство чисел Бернулли, известное под названием теоремы Штаудта. При получении этого свойства мы будем пользоваться следующей теоремой из теории чисел: число $k^{p-1}-1$, где p — число простое, а k — любое целое число, не делящееся на p, делится на p (малая теорема Ферма).

Во всем дальнейшем для сокращения мы будем пользоваться следующей символикой и терминологией, заимствованной из теории сравнений: если в разности $A-B$ число C содержится целое число раз, то мы будем говорить, что A «сравнимо» с B по модулю C, и писать $A \equiv B \pmod{C}$. В наших рассуждениях числа A, B и C будут целыми, хотя это, вообще говоря, в указанной записи и не подразумевается. Отметим следующие очевидные факты: если $A \equiv B \pmod{C}$ и $D \equiv B \pmod{C}$, то $A \equiv D \pmod{C}$; в самом деле, по условию числа $A-B$ и $D-B$ делятся нацело на C, следовательно, в их разности $A-D$ число C также содержится целое число раз. Если мы имеем сумму $\sum A_i$ и если каждое слагаемое этой суммы сравнимо с некоторым числом B_i по одному и тому же модулю C, то $\sum A_i \equiv \sum B_i \pmod{C}$ (сравнения можно почленно складывать). Ясно также, что из $A \equiv B \pmod{C}$ следует: $nA \equiv nB \pmod{C}$ и $A^n \equiv B^n \pmod{C}$ (обе части сравнения можно возвышать в целую степень и умножать на целое число). В том случае, когда какое-нибудь число сравнимо с нулем, оно делится на модуль. Из $A \equiv B \pmod{C}$ следует $A-B \equiv 0 \pmod{C}$. Наконец, если $A \equiv B \pmod{C}$, то $A - nC \equiv B \pmod{C}$ (n — число целое). Перечисленными свойствами сравнений мы воспользуемся несколько ниже.

4. Другой вид производящей функции бернуллиевых чисел. Функция $g(t)$, порождающая числа Бернулли

$$g(t) = \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu t^\nu}{\nu!},$$

может быть записана в ином виде.

Замечая, что

$$t = \ln[1 + (e^t - 1)],$$

получим

$$g(t) = \frac{\ln[1 + (e^t - 1)]}{e^t - 1}.$$

Натуральный логарифм

$$\ln[1 + (e^t - 1)]$$

можно разложить на действительной оси по степеням функции $e^t - 1$. Такое разложение будет справедливо, если $|e^t - 1| < 1$, т. е. если, например, $|t| < \ln 2$.

Написав это разложение и сокращая все члены разложения на $e^t - 1$, получим разложение производящей функции по степеням $e^t - 1$:

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (e^t - 1)^k}{k+1}.$$

Выделим в написанной сумме функцию $(e^t - 1)^k$, соответствующую общему члену (номера $k+1$), и преобразуем ее, развертывая степень по правилу бинома:

$$(e^t - 1)^k = \sum_{m=0}^{k} (-1)^{k-m} C_k^m e^{mt}.$$

Разлагаем функцию e^{mt} в ряд по степеням t:

$$e^{mt} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{m^\nu t^\nu}{\nu!}.$$

Заменяя в последней формуле e^{mt} полученным рядом, будем иметь

$$(e^t - 1)^k = \sum_{m=0}^{k} (-1)^{k-m} C_k^m \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{m^\nu t^\nu}{\nu!}.$$

Расположим эту сумму по степеням t. Тогда функция $(e^t - 1)^k$ определится следующим степенным разложением:

$$(e^t - 1)^k = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} \sum_{m=0}^{k} (-1)^{k-m} C_k^m m^\nu,$$

причем в написанной сумме согласно сделанному выше условию после суммирования по m следует при суммировании по ν заменить член, в который будет входить 0^ν при $\nu = 0$, на

единицу; таким образом, сумма

$$\sum_{m=0}^{k} (-1)^{k-m} C_m^k m^\nu$$

при $\nu = 0$ обращается в сумму знакопеременных коэффициентов бинома. Замечая, что

$$\sum_{m=0}^{k} (-1)^{k-m} C_k^m m^\nu = \Delta^k 0^\nu,$$

окончательно получим

$$(e^t - 1)^k = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Delta^k 0^\nu t^\nu}{\nu!},$$

причем здесь член $\Delta^k 0^0$, соответствующий значению индекса $\nu = 0$, равен нулю (для $k > 0$), потому что мы видели, что он должен соответствовать сумме

$$\sum_{m=0}^{k} (-1)^{k-m} C_k^m$$

знакопеременных коэффициентов бинома, которая равна нулю. Это условие хорошо согласуется с понятием самой разности; действительно, символ $\Delta^k 0^0$ мы должны рассматривать как $\Delta^k x^0 = \Delta^k 1$; конечная же разность от постоянного ($k > 0$) равна нулю. Итак, разложение

$$(e^t - 1)^k = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Delta^k 0^\nu t^\nu}{\nu!} \tag{38}$$

справедливо для любого $k > 0$. Мы можем считать, что то же разложение справедливо и при $k = 0$. В таком случае при $k = 0$ $\Delta^0 0^0 = 1$, и формула (38) обратится в тривиальное тождество ($1 = 1$). Итак, при соответствующем обобщении понятия разности $[\Delta^0 f(x) = f(x)]$ мы можем разложение (38) писать для любого $k \geqslant 0$. На основании формулы (38) функцию $g(t)$ можем представить в следующем виде:

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Delta k 0^\nu t^\nu}{\nu!}.$$

Меняя порядок суммирования, что возможно при достаточно малом t, получим

$$g(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} \sum_{k=0}^{\nu} \frac{(-1)^k \Delta^k 0^\nu}{k+1}. \tag{39}$$

В формуле (39) при изменении порядка суммирования изменение k будет в пределах от 0 до ν, так как при $k > \nu$ разность $\Delta^k x^\nu$, следовательно, и $\Delta^k 0^\nu$, пропадет тождественно.

Сравнивая (39) со старым разложением для $g(t)$, заключаем, что

$$B_\nu = \sum_{k=0}^{\nu} \frac{(-1)^k \Delta^k 0^\nu}{k+1}. \tag{40}$$

5. Теорема Штаудта. Соотношение (40), определяющее число B_ν через разности $\Delta^k 0^\nu$, и послужит нам для доказательства так называемой теоремы Штаудта. Эта теорема выясняет арифметические свойства знаменателей чисел Бернулли. Идея исследования, которое мы сейчас будем проводить, будет основана на исследовании частных от деления $\Delta^k 0^\nu$ на $k+1$ при различных k. Малая теорема Ферма (см. выше) легко позволяет обнаружить, в каких случаях это деление совершается без остатка, а в каком случае с остатком, причем, как мы увидим, эта теорема укажет на все те значения k, для которых это деление нацело невозможно, и определит в каждом случае величину остатка такого деления.

Займемся этим исследованием.

Сумма (40), изображающая число B_ν, состоит из $\nu+1$ слагаемых вида

$$\frac{(-1)^k \Delta^k 0^\nu}{k+1}, \tag{41}$$

причем число k меняется от 0 до ν. Рассмотрим те значения k, для которых число $k+1$ не есть число простое, а разбивается, следовательно, на произведение двух множителей, отличных от единицы:

$$k+1 = \alpha\beta, \ \alpha > 1, \ \beta > 1.$$

Нетрудно показать, что в этом случае

$$\alpha\beta \geqslant \alpha + \beta,$$

причем знак равенства имеет место только тогда, когда

$$\alpha = \beta = 2,$$

во всех остальных случаях имеет место строгое неравенство.

В самом деле, неравенство $\alpha\beta > \alpha + \beta$ эквивалентно следующему:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < 1,$$

которое будет иметь место, если целые числа α и β превосходят единицу и одно из них строго больше двух.

Будем считать, что $\alpha\beta > \alpha + \beta$ (случай $k + 1 = 4$, $k = 3$ исключается), тогда можно положить

$$\alpha\beta = \alpha + \beta + \gamma,$$

где γ — некоторое целое число, большее нуля. Таким образом,

$$k + 1 = \alpha + \beta + \gamma,$$

откуда

$$k = \alpha + \beta + \gamma',$$

где γ' — число, большее или равное нулю. Общий член номера $k + 1$ суммы (40) можно, таким образом, записать так:

$$\frac{(-1)^k \Delta^{\alpha+\beta+\gamma'} 0^\nu}{k+1},$$

или

$$\frac{(-1)^k \{\Delta^{\gamma'} (\Delta^\beta (\Delta^\alpha x^\nu))\}_{x=0}}{k+1}.$$

Покажем теперь, что

$$\Delta^\alpha 0^p$$

делится нацело на α для любого p.

[По смыслу постановки вопроса $\alpha > 1$, $p > 0$, ибо при $p = 0$ $\Delta^\alpha 0^p = \Delta^\alpha 0^0 = (\Delta^\alpha x^0)_{x=0} = 0$ $(\alpha > 1)$, и, следовательно, на α делится.]

В самом деле, на основании формулы (35) главы I имеем

$$\Delta^\alpha 0^p = \sum_{m=0}^{\alpha} (-1)^{\alpha-m} C_\alpha^m m^p. \tag{42}$$

Для того чтобы показать, что $\Delta^\alpha 0^p$ сравнимо с нулем по модулю α, достаточно, очевидно, показать, что каждый член написанной суммы сравним с нулем по модулю α. Для этого заметим, что число сочетаний из α элементов по m всегда есть целое число, т. е.

$$\frac{\alpha!}{m!\,(\alpha - m)!} \tag{43}$$

есть число целое.

Нетрудно теперь видеть, что общий член суммы (42) сравним с нулем по модулю α. Действительно,

$$\frac{1}{\alpha}(-1)^{\alpha-m} C_\alpha^m m^p = \frac{(-1)^{\alpha-m}}{\alpha} \frac{\alpha!}{m!\,(\alpha-m)!} m^p =$$

$$= (-)^{\alpha-m} \frac{(\alpha-1)!}{(m-1)!\,[(\alpha-1)(m-1)]!} m^{p-1}$$

на основании (43) есть целое число. Заметив это, преобразуем $\Delta^\alpha x$ [см. формулу (35) главы I] следующим образом:

$$\Delta^\alpha x^\nu = \sum_{m=0}^{\alpha} (-1)^{\alpha-m} C_\alpha^m (x+m)^\nu,$$

или так как

$$(x+m)^\nu = \sum_{p=0}^{\nu} C_\nu^p m^p x^{\nu-p}, \tag{44}$$

то

$$\Delta^\alpha x^\nu = \sum_{m=1}^{\alpha} (-1)^{\alpha-m} C_\alpha^m \sum_{p=0}^{\nu} C_\nu^p m^p x^{\nu-p} = \sum_{p=0}^{\nu} x^{\nu-p} C_\nu^p \sum_{m=0}^{\alpha} (-1)^{\alpha-m} C_\alpha^m m^p;$$

но

$$\sum_{m=1}^{\alpha} (-1)^{\alpha-m} C_\alpha^m m^p = \Delta^\alpha 0^p; \tag{45}$$

поэтому

$$\Delta^\alpha x^\nu = \sum_{p=0}^{\nu} C_\nu^p \Delta^\alpha 0^p x^{\nu-p}. \tag{46}$$

Так как $\Delta^\alpha 0^p$ делится на α при любом p, то $\Delta^\alpha x^\nu$ есть многочлен относительно x, обладающий тем свойством, что каждый его коэффициент делится нацело на α.

Итак, если от степени x^ν взять разность порядка α, то получится некоторый многочлен степени $\nu-\alpha$, все коэффициенты которого будут делиться на α.

Если теперь брать разность Δ^β от каждой степени $x^{\nu-p}$ этого многочлена, то эта операция породит на основании доказанного совершенно независимо от множителей, кратных α, множители, кратные β. Взятие разности $\Delta^{\gamma'}$ для нас далее неинтересно (существенно лишь то, что $\gamma' \geqslant 0$); во всяком случае понятно, что взятие разности $\Delta^{\gamma'+\beta+\alpha}$ от x^ν преобразует x^ν в многочлен, каждый коэффициент которого, следовательно, и свободный член, равный $\Delta^{\gamma'+\beta+\alpha} 0^\nu$, будут делиться на произведение $\alpha\beta$. Но

$$\alpha\beta = k+1,$$

поэтому

$$\frac{\Delta^k 0^\nu}{k+1}$$

в рассматриваемом случае будет число целое.

Нетрудно показать, что если $\alpha = \beta = 2$, т. е. $k = 3$, то число

$$\frac{\Delta^3 0^\nu}{4}$$

есть целое для любого ν (четного). В самом деле,

$$\Delta^3 0^\nu = \sum_{m=0}^{3} (-1)^{-m} C_3^m m^\nu = 3 - 3\cdot 2^\nu + 3 .$$

Для нас интересны, конечно, только четные значения ν (так как все нечетные бернуллиевы числа равны нулю). Если ν — четное, то можно положить $\nu = 2p$ (причем считать $p > 1$; при $p = 1$ $\nu = 2$, $\Delta^3 0^2 = 0$), тогда

$$\Delta^3 0^\nu = 3 - 3\cdot 2^{2p} + 3^{2p}.$$

Среднее слагаемое на 4 делится. Остается показать, что делится на 4 сумма $3^{2p} + 3$, или, что то же, разность $3^{2p} - 1$; это же непосредственно следует по теореме Безу ($3^2 - 1 = 8$).

Рассмотрим теперь тот случай, когда число $k + 1$ — простое. Обратимся опять к выражению (41). Будем считать для простоты рассуждений $\nu \neq 0$ (т. е. исключим из рассмотрения число $B_0 = 1$); тогда $\Delta^k 0^\nu$ можно записать в виде суммы от единицы до k следующим образом:

$$\Delta^k 0^\nu = \sum_{m=1}^{m=k} (-1)^{k-m} C_k^m m^\nu. \tag{47}$$

В написанной сумме индекс m не принимает значения 0 и $k + 1$, поэтому сравнение

$$m^k \equiv 1 \pmod{C}$$

будет выполнено при всех значениях, которые m принимает в сумме (47), и тех k, для которых число $k + 1$ — простое. Так как $\nu \geqslant k$ [см. формулу (40)], то в каждом члене суммы (47) ν можно поделить на k, представив его в виде

$$\nu = kq + r, \tag{48}$$

где q — частное, а r — остаток, меньший k. В частности, остаток r может оказаться равным нулю, т. е. деление совершится нацело. Не исключен также случай $\nu = k$.

Этот случай войдет в наше рассмотрение, если номер ν рассматриваемого бернуллиева числа таков, что $\nu + 1$ — число простое.

Так как по теореме Ферма

$$m^k \equiv 1 \pmod{k + 1},$$

то, возводя обе части сравнения в степень q, получим

$$m^{kq} \equiv 1 \pmod{k + 1},$$

откуда, умножая обе части сравнения на m^r и заметив, что

$$m^{kq}m^r = m^{kq+r} = m^\nu,$$

найдем

$$m^\nu \equiv m^r \pmod{k+1}.$$

Из соотношения (47) и только что полученного сравнения заключаем, что $\Delta^k 0^\nu$ будет сравнимо (по модулю $k+1$) с суммой, которой эта разность изображается, если в ней заменить m^ν через m^r, т. е.

$$\Delta^k 0^\nu \equiv \sum_{m=1}^{k} (-1)^{k-m} C_k^m m^r \pmod{k+1}.$$

Если $r \neq 0$, то

$$\sum_{m=1}^{k} (-1)^{k-m} C_k^m m^r = \Delta^k 0^r = 0,$$

потому что

$$r < k.$$

Если же $r = 0$, т. е. k есть делитель ν, что

$$\sum_{m=1}^{k} (-1)^{k-m} C_k^m m^r = \sum_{m=1}^{k} (-1)^{k-m} C_k^m.$$

Эта последняя сумма есть сумма знакопеременных коэффициентов бинома, исключая одного, соответствующего значению $m = 0$. Полагая $m = 0$, выясняем вид недостающего члена; именно это будет $(-1)^k$.

Итак, рассматриваемая сумма обращается в

$$-(-1)^k = (-1)^{k+1},$$

следовательно,

$$\Delta^k 0 \equiv (-1)^{k+1} \pmod{k+1}.$$

Умножая обе части полученного сравнения на $(-1)^k$, находим

$$(-1)^k \Delta \upsilon \equiv (-1)^{2k+} \pmod{k+1},$$

или

$$(-1)^k \Delta^k 0^\nu \equiv -1 \pmod{k+1}.$$

Написанное сравнение означает, что число

$$\frac{(-1)^k \Delta^k 0^\nu}{k+1},$$

т. е. общий член суммы (40), имеет дробную часть в силу

получаемого сравнения, равную $-\frac{1}{k+1}$, если $k+1$ — простое число, а k есть делитель ν. Итак, мы пришли к теореме Штаудта: *всякое бернуллиево число B_ν может быть представлено в форме*

$$B_\nu = C_\nu - \sum \frac{1}{k+1},$$

где C_ν есть целое число, а сумма распространена на все $k > 0$, такие, что $k+1$ — простое число, а k есть делитель ν.

Пример. Рассмотрим число $B_6 = \frac{1}{42}$. Здесь $\nu = 6$. Делителями ν будут 1, 2, 3, 6. Прибавляя к каждому из них по единице, получим четыре числа:

$$2,\ 3,\ 4,\ 7.$$

Из этих чисел простыми будут

$$2,\ 3,\ 7,$$

следовательно, B_6 будет равно

$$B_6 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}.$$

6. **Аналитические свойства многочленов Бернулли**. Познакомившись с основными свойствами чисел Бернулли, мы изучим теперь некоторые свойства многочленов Бернулли. Последние порождались функцией

$$\frac{e^{xt}t}{e^t - 1}.$$

Разложение ее в ряд было нами выше записано в виде

$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu(x)\, t^\nu}{\nu!}, \tag{49}$$

где, следовательно,

$$B_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\nu} C_\nu^k B_k x^{\nu-k}, \tag{14}$$

или в символической записи:

$$B_\nu(x) = (x + B)^\nu.$$

Первое основное свойство многочленов Бернулли нами уже указывалось — это свойство заключается в равенстве

$$\Delta B_\nu(x) = \nu x^{\nu-1}. \tag{50}$$

Вернемся к соотношению (49). Дифференцируя по x обе части этого соотношения и замечая, что при этом для нахождения

производной от ряда, стоящего в правой части, можно продифференцировать его почленно, находим

$$\frac{e^{tx}t^2}{e^t-1}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}B'_\nu(x). \tag{51}$$

Очевидно, что функция, стоящая в левой части равенства (51), отличается от функции, стоящей в левой части равенства (49), только множителем t, а потому

$$\frac{e^{tx}t^2}{e^t-1}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^{\nu+1}}{\nu!}B_\nu(x),$$

или, что то же самое,

$$\frac{e^{tx}t^2}{e^t-1}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}\nu B_{\nu-1}(x). \tag{52}$$

В силу единственности разложения из соотношений (51) и (52) находим

$$B'_\nu(x)=\nu B_{\nu-1}(x). \tag{53}$$

Заменим, наконец, в сумме (49) x на $(1-x)$, тогда получим

$$\frac{e^{t(1-x)}t}{e^t-1}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}B_\nu(1-x),$$

или, так как

$$\frac{e^{t(1-x)}t}{e^t-1}=\frac{e^{x(-t)}(-t)}{e^{-t}-1}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}(-1)^\nu B_\nu(x)$$

[см. (49)], то

$$B_\nu(1-x)=(-1)^\nu B_\nu(x). \tag{54}$$

7. **Теорема умножения бернуллиевых многочленов.** Из формулы (49), подставив в ней mx вместо x, мы будем иметь

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{B_\nu(mx)\,t^\nu}{\nu!}=\frac{e^{mxt}t}{e^t-1}.$$

С другой стороны, если $m>0$ и целое число, то

$$\frac{e^{mxt}t}{e^t-1}=\frac{1}{m}\,\frac{e^{mxt}mt\,(1+e^t+\ldots+e^{(m-1)t})}{e^{mt}-1}=$$

$$=\frac{1}{m}\sum_{s=0}^{m-1}\frac{e^{\left(x+\frac{s}{m}\right)mt}\,mt}{e^{mt}-1}=\frac{1}{m}\sum_{s=0}^{m-1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{B_\nu\left(x+\frac{s}{m}\right)m^\nu t^\nu}{\nu!},$$

откуда и следует теорема умножения

$$B_\nu(mx) = m^{\nu-1} \sum_{s=0}^{m-1} B_\nu\left(x + \frac{s}{m}\right). \tag{55}$$

8. Геометрические свойства многочленов Бернулли. Свойствами (I), (II), (III) достаточно подробно, как мы сейчас покажем, выясняется поведение кривой

$$y = B_\nu(x).$$

Для удобства построений и простоты рассуждений будем рассматривать кривую

$$y = B_\nu(x) - B_\nu.$$

Из соотношения (14), определяющего $B_\nu(x)$, следует, что

$$B_\nu(0) = B_\nu,$$

или

$$B_\nu(0) - B_\nu = 0,$$

поэтому рассматриваемая кривая всегда проходит через начало координат. Получим еще ряд свойств рассматриваемой кривой на интервале (0, 1). Полагая в соотношении (51) $x = 0$, получим

$$B_\nu(1) = (-1)^\nu B_\nu(0) = (-1)^\nu B_\nu,$$

откуда

$$B_\nu(1) - (-1)^\nu B_\nu = 0.$$

Если ν — четное, то, как показывает полученное соотношение, разность $B_\nu(1) - B_\nu$ обращается в нуль. Если же ν — нечетное, но не равно единице, то $B_\nu = 0$, и. следовательно, полученное соотношение дает $B_\nu(1) = 0$. Так как в рассматриваемом случае $B_\nu = 0$, то мы можем и здесь писать

$$B_\nu(1) - B_\nu = 0.$$

Итак, разность $B_\nu(x) - B_\nu$ для любого $\nu\,(\nu \neq 1)$ обращается в нуль при $x = 0$ и $x = 1$. Это значит, что кривая $y_\nu = B_\nu(x) - B_\nu$ проходит (при любом $\nu \neq 1$) через крайние точки интервала (0, 1).

Определим теперь, сколько корней имеет $y_\nu(x)$ внутри интервала (0, 1).

Рассмотрим случай $\nu = 2k + 1$. Положим в равенстве (54) $x = \frac{1}{2}$; тогда мы получим, что

$$B_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) = -B_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right),$$

или так как

$$y_{2k+1}(x) = B'_{2k+1}(x), \quad y_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) = -y_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right),$$

то

$$y_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Допустим теперь, что $y_{2k+1}(x)$ имеет в интервале (0, 1) два корня α_1 и α_2 $\left(\text{одно из этих } \alpha \text{ может, конечно, быть равно } \frac{1}{2}\right)$. Так как мы можем теперь расположить нули $y_{2k+1}(x)$ в порядке роста, т. е. предположить, что выполнено неравенство

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1,$$

то по теореме Ролля отсюда следует, что $y'_{2k+1}(x)$ имеет, кроме корней 0 и 1, также еще три корня внутри интервала (0, 1). Повторяя это рассуждение, мы приходим к тому, что и $y''_{2k+1}(x)$ имеет два корня внутри интервала (0, 1) и притом различных.

Дифференцируем соотношение (53). Имеем

$$B''_\nu(x) = \nu B''_{\nu-1}(x) = \nu(\nu-1) B_{\nu-2}(x),$$

откуда следует, что

$$y''_{2k+1}(x) = (2k+1)\,2k y_{2k-1}(x),$$

так как $y_{2k+1}(x) = B_{2k+1}(x)$.

Значит, предположив, что $y_{2k+1}(x)$ имеет внутри интервала (0, 1) два корня, мы придем к тому, что и $y_{2k-1}(x)$ также имеет два различных корня внутри этого интервала. Идя дальше, мы, наконец, придем к тому, что $y_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ имеет, кроме 0 и 1, еще два корня внутри интервала (0, 1). Но кривая третьего порядка не может иметь четыре корня, и мы пришли к противоречию.

Итак, $y_{2k+1}(x)$ имеет внутри интервала (0, 1) единственную точку пересечения с осью абсцисс — точку $x = \frac{1}{2}$.

Перейдем к случаю $\nu = 2k$. Так как $y_{2k+1}(x) = B_{2k+1}(x)$ и $y'_{2k}(x) = B'_{2k}(x)$, из равенства (53) получим

$$y'_{2k}(x) = 2k y_{2k-1}(x).$$

Отсюда следует, что, предположив существование нуля α, $0 < \alpha < 1$, функции $y_{2k}(x)$, мы по теореме Ролля установим существование двух нулей: β_1 и β_2, $0 < \beta_1 < \alpha$, $\alpha < \beta_2 < 1$, у функции $y'_{2k}(x)$, а значит, и у функции $y_{2k-1}(x)$. Но по

доказанному это невозможно. Итак, $y_{2k}(x)$ отлично от нуля внутри интервала (0, 1). Найдем знак $y_{2k}(x)$ внутри этого интервала.

Из соотношения (49) следует, что

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu\left(\frac{1}{2}\right) t^\nu}{\nu!} = \frac{e^{\frac{t}{2}} t}{e^t - 1} = \frac{t}{e^{\frac{t}{2}} - 1} - \frac{t}{e^t - 1},$$

или

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu\left(\frac{1}{2}\right)\frac{t^\nu}{\nu!} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{\nu-1}} - 1\right) B_\nu \frac{t^\nu}{\nu!}.$$

Итак,

$$B_\nu\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(1 - \frac{1}{2^{\nu-1}}\right) B_\nu,$$

откуда

$$y_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) = B_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) - B_{2k} = -\left(2 - \frac{1}{2^{2k-1}}\right) B_{2k}.$$

Но из формулы (37) следует, что

$$(-1)^{k-1} B_{2k} > 0,$$

значит,

$$(-1)^k y_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) > 0.$$

Мы нашли таким образом, что при нечетном k кривая $y_{2k}(x)$ лежит в интервале (0, 1) под осью абсцисс, а при четном — над осью абсцисс, так как ее знак в интервале (0, 1) не меняется по доказанному ранее.

Упражнения

1. Получить выражения первых пяти многочленов $y_\nu(x)$:

$$y_1(x) = x,$$
$$y_2(x) = x^2 - x,$$
$$y_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x,$$
$$y_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2,$$
$$y_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x.$$

2. При выводе теоремы Штаудта мы доказали, что число

$$\frac{\Delta^k 0^\nu}{k}$$

при любых k и ν есть число целое. Показать, что имеет место более сильное предложение, именно число $\frac{\Delta^k 0^\nu}{k!}$ есть число целое. Показать также, что

$$\frac{\Delta^k x^\nu}{k!}$$

есть многочлен, коэффициенты которого суть целые числа. Какое следствие о разложении x^ν по обобщенным степеням можно сделать из доказанного?

3. Вывести представление числа B_ν интегралом

$$B_{2p} = (-1)^{p-1} 4p \int_0^\infty \frac{t^{2p-1}}{e^{2\pi t}-1} dt.$$

Указание. Воспользоваться формулой (37) и соотношением

$$\frac{1}{k^{2p}} = \frac{1}{(2p-1)!} \int_0^\infty e^{-kt} t^{2p-1} dt.$$

4. Тем же путем вывести формулы

$$B_{2p} = 4\pi \int_0^\infty \frac{t^{2p} dt}{(e^{pt} - e^{-\pi t})^2}$$

и

$$-\pi B_{2p} = 2p(2p-1) \int_0^\infty t^{2p-2} \ln(1 - e^{-2\pi t})\, dt.$$

5. Пользуясь соотношениями (53) и (54), разложить $B_{2k}(x)$ в интервале $(0, 1)$ в тригонометрический ряд:

$$B_{2k}(x) = \frac{(-1)^{k-1} 2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^\infty \frac{\cos 2\pi nx}{n^{2k}}.$$

§ 3. Формула Эйлера

1. Предварительные соображения. Возвратимся к задаче суммирования функций. Здесь мы выведем так называемую формулу Эйлера, позволяющую во многих случаях дать приближенное решение задачи суммирования, отвечающее тем условиям, о которых мы говорили в начале главы. Формула Эйлера является обобщением формулы (22) и отличается от нее наличием остаточного члена. Перед тем как дать строгий и точный вывод формулы Эйлера, мы дадим ее вывод не строгий, но чрезвычайно простой и изящный. Эту задачу будем решать, как и для многочлена, в неопределенной форме, т. е. находить не сумму $\varphi(x)$ в целочисленных

пределах, а решать уравнение

$$\Delta f(x) = \varphi(x). \tag{56}$$

Будем рассматривать символ Δ взятия конечной разности как оператор. Этот оператор, очевидно, линейный, потому что

$$\Delta[\lambda f(x)] = \lambda \Delta f(x), \quad \Delta[f(x) + \psi(x)] = \Delta f(x) + \Delta\psi(x).$$

Условимся обозначать символом D оператор, действие которого на рассматриваемую функцию заключается в прибавлении к ее аргументу единицы, так что

$$Df(x) = f(x+1).$$

Связь оператора D с оператором Δ устанавливается равенством $\Delta = D - 1$ (глава I, § 3, п. 2).

Последовательное приложение операторов определяется как их произведение.

Будем решать разностное уравнение (56) с точки зрения нахождения оператора, обратного Δ [т. е. такого оператора, который, будучи приложен к $\Delta f(x)$ («умножен» на Δ), давал бы $f(x)$ (давал бы в произведении единицу)]. Этот оператор естественно обозначать $\frac{1}{\Delta}$.

Оператор $\frac{1}{\Delta}$, как мы сейчас увидим, сложнее, чем операторы Δ и D, и представляет собой уже некоторый дифференциальный оператор. Найдем связь операторов Δ и D с оператором взятия производной.

Разлагая $f(x+1)$ по степеням единицы, получим

$$f(x+1) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!},$$

или, вводя в рассмотрение оператор взятия производной, т. е. $\frac{d}{dx}$:

$$f(x+1) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} f(x). \tag{57}$$

Это разложение можно записать в виде

$$f(x+1) = \left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n}\right\} f(x),$$

рассматривая выражение в скобках как некоторый дифференциальный оператор, действие которого на всякую функцию $f(x)$ заклю-

чается в том, что мы получаем функцию, изображаемую рядом

$$f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{d^n f(x)}{dx^n},$$

равную на основании соотношения (57) $f(x+1)$. Оператор

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}$$

условно можно записать следующим образом:

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}=e^{\frac{d}{dx}}, \tag{58}$$

подразумевая под правой частью формальное ее разложение в ряд Маклорена.

Таким образом, получаем

$$f(x+1)=e^{\frac{d}{dx}}f(x)$$

или

$$Df(x)=e^{\frac{d}{dx}}f(x). \tag{59}$$

Следует еще раз отметить, что написанное равенство верно только для тех функций, которые могут быть разложены в ряд Тейлора, сходящийся и изображающий $f(x+1)$. В этом смысле справедливо равенство

$$D=e^{\frac{d}{dx}}. \tag{60}$$

Итак, мы установили связь оператора D с оператором дифференцирования $\frac{d}{dx}$. Так как

$$\Delta=D-1,$$

то

$$\Delta=e^{\frac{d}{dx}}-1.$$

Нахождение оператора, обратного Δ, приводится, таким образом, к нахождению оператора, обратного $e^{\frac{d}{dx}}-1$. Таким образом, обозначая оператор, обратный рассматриваемому, делением единицы на него, получаем

$$\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{e^{\frac{d}{dx}}-1}.$$

«Умножая» обе части этого равенства на $\frac{d}{dx}$, получим

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\Delta}=\frac{\frac{d}{dx}}{e^{\frac{d}{dx}}-1}. \qquad (6$$

До этого времени наше изложение носило вполне строгий х рактер, и все написанные равенства в известном смысле предста ляли собою по существу тривиальные тождества. Мы видим, ч в правой части стоит «функция», порождающая числа Бернулл Разлагая ее формально в ряд, получим

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{B_\nu}{\nu!}\frac{d^\nu}{dx^\nu}\left(\text{считая } \frac{d^0}{dx^0}=1\right).$$

Прилагая к левой части уравнения (56) оператор $\frac{d}{dx}\frac{1}{\Delta}$ а к правой — только что введенный, получим

$$\frac{d}{dx}f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{B_\nu}{\nu!}\varphi^{(\nu)}(x),$$

откуда

$$f(x)=\int\varphi(x)\,dx+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{B_\nu}{\nu!}\varphi^{(\nu-1)}(x)+H, \qquad (6$$

где H — произвольная периодическая функция с периодс единица.

Полученная формула и есть искомая формула Эйлера, о дает в виде ряда функцию $f(x)$, суммирующую заданную $\varphi(x)$. К известно, в таком случае

$$\sum_{x=m}^{p-1}\varphi(x)=f(p)-f(m),$$

поэтому

$$\sum_{x=m}^{p-1}\varphi(x)=\int_m^p\varphi(x)\,dx+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{B_\nu}{\nu!}\{\varphi^{(\nu-1)}(p)-\varphi^{(\nu-1)}(m)\}. \qquad (6$$

Полученный ряд мало удобен для практических приложени потому что совершенно неясна сходимость ряда, стоящего в пр вой части. На практике мы, конечно, должны будем воспольз ваться некоторым конечным числом членов, а так как величи остаточного члена остается при этом неясной, то теряется пра

тическая полезность полученного ряда. Поэтому мы дадим иной вывод формулы Эйлера, вполне строгий. При этом мы получим не бесконечный ряд, а некоторую конечную сумму и остаточный член.

2. Строгий вывод формулы Эйлера с остаточным членом. Воспользуемся формулой Тейлора

$$F(x+h) = F(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{F^{(k)}(x)}{k!} h^k + R, \tag{64}$$

в которой R — остаточный член — будем брать в интегральной форме

$$R = \frac{1}{n!} \int_x^{x+h} (x+h-\tau)^n F^{(n+1)}(\tau)\, d\tau.$$

Замена переменного

$$x + h - \tau = t$$

приводит его к виду

$$R = \frac{1}{n!} \int_0^h t^n F^{(n+1)}(x+h-t)\, dt.$$

Полагая в соотношении (64) $h = 1$, найдем

$$\Delta F(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{F^{(k)}(x)}{k!} + \frac{1}{n!} \int_0^1 t^n F^{(n+1)}(x+1-t)\, dt.$$

С помощью этой формулы разложим по степеням единицы разность первообразной функции $\varphi(x)$ и разность ее производных до $(n-2)$-го порядка включительно, уменьшая каждый раз число членов разложения на единицу.

Так как

$$\Delta \int_a^x \varphi(t)\, dt = \int_x^{x+1} \varphi(t)\, dt$$

и, кроме того, последовательно

$$\Delta\varphi(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x),$$
$$\Delta\varphi'(x) = \varphi'(x+1) - \varphi'(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta\varphi^{(n-2)}(x) = \varphi^{(n-2)}(x+1) - \varphi^{(n-2)}(x),$$

то мы будем иметь

$$\int_x^{x+1} \varphi(t)\,dt = \varphi(x) + \sum_{k=2}^{n} \frac{\varphi^{(k-1)}(x)}{k!} + \frac{1}{n!}\int_0^1 t^n \varphi^{(n)}(x+1-t)\,dt,$$

$$\Delta\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(x)}{k!} + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 t^{n-1} \varphi^{(n)}(x+1-t)\,dt,$$

$$\Delta\varphi'(x) = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\varphi^{(k+1)}(x)}{k!} + \frac{1}{(n-2)!}\int_0^1 t^{n-2} \varphi^{(n)}(x+1-t)\,dt,$$

$$\Delta\varphi''(x) = \sum_{k=1}^{n-3} \frac{\varphi^{(k+2)}(x)}{k!} + \frac{1}{(n-3)!}\int_0^1 t^{n-3} \varphi^{(n)}(x+1-t)\,dt,$$

. . . . . .

$$\Delta\varphi^{(n-3)}(x) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\varphi^{(n+k-3)}(x)}{k!} + \frac{1}{2!}\int_0^1 t^2 \varphi^{(n)}(x+1-t)\,dt,$$

$$\Delta\varphi^{(n-2)}(x) = \sum_{k=1}^{1} \frac{\varphi^{(n+k-2)}(x)}{k!} + \frac{1}{1!}\int_0^1 t\varphi^{(n)}(x+1-t)\,dt.$$

Идея дальнейших рассуждений ясна: функция $\varphi(x)$ входит в рассматриваемые равенства только один раз; в левые части написанных равенств входят разности от первообразной функции $\varphi(x)$, ее самой и последовательных производных; все эти элементы (как разности) суммируются просто. Надо, таким образом, подобрать такую линейную комбинацию из правых частей (а следовательно, и левых) чтобы в этой комбинации пропали слагаемые правой части, в которые входят

$$\varphi'(x),\ \varphi''(x),\ \ldots,\ \varphi^{(n-1)}(x).$$

Умножим первое соотношение на $A_0 = 1$, второе на A_1, третье на A_2 и т. д., предпоследнее на A_{n-1} и сложим почленно полученные равенства, тогда получим

$$\int_x^{x+1} \varphi(t)\,dt + \sum_{\nu=1}^{n-1} A_\nu \Delta\varphi^{(\nu-1)}(x) = \varphi(x) + A_0 \sum_{k=2}^{n} \frac{\varphi^{(k-1)}(x)}{k!} +$$

$$+ A_1 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(x)}{k!} + A_2 \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\varphi^{(k+1)}(x)}{k!} A_3 + \sum_{k=1}^{n-3} \frac{\varphi^{(k+2)}(x)}{k!} + \ldots$$

$$\ldots + A_{n-2}\sum_{k=1}^{2}\frac{\varphi^{(n+k-3)}(x)}{k!} + A_{n-1}\sum_{k=1}^{1}\frac{\varphi^{(n+k-2)}(x)}{k!} +$$

$$+\int_0^1 \varphi^{(n)}(x+1-t)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{A_k t^{n-k}}{(n-k)!}\,dt. \quad (65)$$

Рассмотрим отдельно сумму

$$S = A_0\sum_{k=2}^{n}\frac{\varphi^{(k-1)}(x)}{k!} + A_1\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\varphi^{(k)}(x)}{k!} + A_2\sum_{k=1}^{n-2}\frac{\varphi^{(k+1)}(x)}{k!} +$$

$$+ A_3\sum_{k=1}^{n-3}\frac{\varphi^{(k+2)}(x)}{k!} + \ldots + A_{n-2}\sum_{k=1}^{2}\frac{\varphi^{(n+k-3)}(x)}{k!} + A_{n-1}\sum_{k=1}^{1}\frac{\varphi^{(n+k-1)}(x)}{k!}.$$

Покажем, что коэффициенты $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$ можно выбрать так, что все коэффициенты при производных

$$\varphi'(x),\ \varphi''(x),\ \varphi'''(x),\ \ldots,\ \varphi^{(n-1)}(x)$$

обратятся в нуль. Запишем с этой целью сумму S так:

$$S = \left(\frac{A_0}{2!} + \frac{A_1}{1!}\right)\varphi'(x) + \left(\frac{A_0}{3!} + \frac{A_1}{2!} + \frac{A_2}{1!}\right)\varphi''(x) +$$

$$+\left(\frac{A_0}{4!} + \frac{A_1}{3!} + \frac{A_2}{2!} + \frac{A_3}{1!}\right)\varphi'''(x) + \ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{A_0}{k!} + \frac{A_1}{(k-1)!} + \frac{A_2}{(k-2)!} + \ldots + \frac{A_{k-1}}{1!}\right)\varphi^{(k-1)}(x) + \ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{A_0}{(n-1)!} + \frac{A_1}{(n-2)!} + \frac{A_2}{(n-3)!} + \ldots + \frac{A_{n-2}}{1!}\right)\varphi^{(n-2)}(x) +$$

$$+\left(\frac{A_0}{n!} + \frac{A_1}{(n-1)!} + \frac{A_2}{(n-2)!} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{1!}\right)\varphi^{(n-1)}(x),$$

или

$$S = \sum_{k=2}^{n}\varphi^{(k-1)}(x)\sum_{p=0}^{k-1}\frac{A_p}{(k-p)!}.$$

Итак, коэффициентом при $\varphi^{(k-1)}(x)$ в сумме S будет следующее выражение:

$$\sum_{p=0}^{k-1}\frac{A_p}{(k-p)!}.$$

Числа $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$ мы хотим выбрать так, чтобы

$$\sum_{p=0}^{k-1}\frac{A_p}{(k-p)!} = 0.$$

Выше мы видели, что числа Бернулли удовлетворяют символическому соотношению (26):

$$(B+1)^k - B^k = 0,$$

или в развернутом виде

$$\sum_{p=0}^{k-1} B_p C_k^p = 0.$$

Замечая, что

$$C_k^p = \frac{k!}{p!\,(k-p)!},$$

получим

$$\sum_{p=0}^{k-1} \frac{B_p\, k!}{p!\,(k-p)!} = 0,$$

откуда, сокращая на $k!$, окончательно имеем

$$\sum_{p=0}^{k-1} \frac{\frac{B_p}{p!}}{(k-p)!} = 0.$$

Это соотношение имеет место; соотношению же

$$\sum_{p=0}^{k-1} \frac{A_p}{(k-p)!} = 0$$

мы хотим удовлетворить. Ясно, что для этого достаточно считать

$$A_p = \frac{B_p}{p!}.$$

Выражение суммы S показывает, что это и необходимо. Итак, $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$ (числа Эйлера) мы должны выбрать равными соответствующим числам Бернулли, разделенным на факториал индекса.

Полагая в соотношении (65)

$$A_p = \frac{B_p}{p!},$$

мы по доказанному уничтожим сумму всех слагаемых, содержащих $\varphi'(x), \varphi''(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)$. Производя эту подстановку, получим

$$\int_x^{x+1} \varphi(t)\,dt + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{B_\nu}{\nu!} \Delta\varphi^{(\nu-1)}(x) =$$

$$= \varphi(x) + \int_0^1 \varphi^{(n)}(x+1-t) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!}\,dt,$$

и так как

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k t^{n-k}}{k!\,(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k t^{n-k}\, n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} B_k C_n^k t^{n-k} = \frac{1}{n!} [B_n(t) - B_n]$$

[в силу (14)], то окончательно

$$\int_x^{x+1} \varphi(t)\,dt + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{B_\nu}{\nu!} \Delta\varphi^{(\nu-1)}(x) =$$

$$= \varphi(x) + \frac{1}{n!} \int_0^1 \varphi^{(n)}(x+1-t)\,[B_n(t) - B_n]\,dt.$$

Определяя отсюда $\varphi(x)$, имеем

$$\varphi(x) = \int_x^{x+1} \varphi(t)\,dt + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{B_\nu}{\nu!} \Delta\varphi^{(\nu-1)}(x) -$$

$$- \frac{1}{n!} \int_0^1 \varphi^{(n)}(x+1-t)\,[B_n(t) - B_n]\,dt.$$

Суммируя по x от m до $p-1$, получим формулу Эйлера с остаточным членом

$$\sum_{x=m}^{p-1} \varphi(x) = \int_m^p \varphi(t)\,dt + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{B_\nu}{\nu!} \{\varphi^{(\nu-1)}(p) - \varphi^{(\nu-1)}(m)\} -$$

$$- \frac{1}{n!} \int_0^1 [B_n(t) - B_n] \sum_{x=m}^{p-1} \varphi^{(n)}(x+1-t)\,dt. \quad (66)$$

Наиболее часто суммирование приходится начинать с нуля. В этом случае будем пользоваться формулой

$$\sum_{x=0}^{p-1} \varphi(x) = \int_0^p \varphi(t)\,dt + \sum_{\nu=1}^{p-1} \frac{B_\nu}{\nu!} \{\varphi^{(\nu-1)}(p) - \varphi^{(\nu-1)}(0)\} -$$

$$- \frac{1}{n!} \int_0^1 [B_n(t) - B_n] \sum_{x=0}^{p-1} \varphi^{(n)}(x+1-t)\,dt. \quad (67)$$

Рассмотрим пример. Пусть $\varphi(x)$ есть многочлен степени $n-1$ тогда $\varphi^{(n)}(x)$ тождественно обращается в нуль, и следовательно формула Эйлера, если в остаточный член войдет $\varphi^{(n)}$, обращается в формулу (22). Положим, например, $\varphi(x) = x^3$; тогда формула

дает

$$\sum_{x=0}^{p-1} x^3 = \int_0^p t^3\,dt + B_1 p^3 + \frac{B_2}{2!} 3p^2 =$$

$$= \frac{p^4}{4} - \frac{p^3}{2} + \frac{1}{12}\cdot 3p^2 = \frac{1}{4} p^2 (p-1)^2. \quad (68)$$

3. Остаточный член формулы Эйлера. Теперь мы дадим несколько различных выражений остаточного члена в формуле (66) и соответственно с этим в формуле (67). Для этого рассмотрим выражение

$$R_n = -\frac{1}{n!}\int_0^1 \varphi^{(n)}(x+1-t)\,[B_n(t) - B_n]\,dt. \quad (69)$$

Допустим, что $n = 2k$ есть число четное; тогда

$$R_{2k} = -\frac{1}{(2k)!}\int_0^1 \varphi^{(2k)}(x+1-t)\,[B_{2k}(t) - B_{2k}]\,dt \quad (70)$$

может быть упрощено на основании того соображения, что функция

$$B_{2k}(t) - B_{2k}$$

в промежутке интегрирования знака не меняет.

Применяя к интегралу правой части формулы (70) обобщенную теорему о среднем значении, получим

$$R_{2k} = -\frac{1}{(2k)!}\varphi^{(2k)}(x+\Theta)\int_0^1 [B_{2k}(t) - B_{2k}]\,dt.$$

Нетрудно видеть, что

$$\int_0^1 B_{2k}(t)\,dt = \int_0^1 \left(\frac{B_{2k+1}(t) - B_{2k+1}}{2k+1}\right)' dt = 0,$$

поэтому

$$R_{2k} = \frac{B_{2k}}{(2k)!}\varphi^{(2k)}(x+\Theta). \quad (71)$$

Остаточный член в формуле Эйлера может быть записан в случае $n = 2k$ в виде

$$R = \frac{B_{2k}}{(2k)!}\sum_{x=m}^{p-1} \varphi^{(2k)}(x+\Theta), \quad (72)$$

или, что то же, в виде

$$R = \frac{B_{2k}}{(2k)!}(p-m)A, \tag{73}$$

где $A = \sum_{x=m}^{p-1} \frac{\varphi^{(2k)}(x+\theta)}{p-m}$ есть среднее значение $\varphi^{(2k)}$ между m и p, а θ, вообще говоря, зависит от x.

4. Другая форма остаточного члена формулы Эйлера. Теперь мы дадим преобразование остаточного члена для вывода формулы Стирлинга.

Предположим, что суммируемая функция $\varphi(x)$ такова, что $\varphi^{(2k)}(x)$ и $\varphi^{(2k+2)}(x)$ имеют одинаковые знаки при изменении x от m до p и любом k. В этом случае можно для остаточного члена формулы Эйлера дать следующее выражение:

$$-\frac{1}{(2k)!}\int_0^1 [B_{2k}(t) - B_{2k}] \sum_{x=m}^{p-1} \varphi^{(2k)}(x+1-t)\,dt =$$

$$= \theta \frac{B_{2k}}{(2k)!}\{\varphi^{(2k-1)}(p) - \varphi^{(2k-1)}(m)\},$$

где $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

В самом деле, разобьем интеграл левой части написанного равенства на два следующим образом:

$$-\frac{1}{(2k)!}\int_0^1 B_{2k}(t) \sum_{x=m}^{p-1} \varphi^{(2k)}(x+1-t)\,dt +$$

$$+ \frac{B_{2k}}{(2k)!}\int_0^1 \sum_{x=m}^{p-1} \varphi^{(2k)}(x+1-t)\,dt, \tag{74}$$

и вычислим второй интеграл непосредственным интегрированием. Тогда получим

$$\frac{B_{2k}}{(2k)!}\int_0^1 \sum_{x=m}^{p-1} \varphi^{(2k)}(x+1-t)\,dt = \frac{B_{2k}}{(2k)!}\sum_{x=m}^{p-1}\int_0^1 \varphi^{(2k)}(x+1-t)\,dt =$$

$$= \frac{B_{2k}}{(2k)!}\sum_{x=m}^{p-1} \Delta\varphi^{(2k-1)}(x) = \frac{B_{2k}}{(2k)!}\{\varphi^{(2k-1)}(p) - \varphi^{(2k-1)}(m)\}.$$

Первый же интеграл суммы (74) проинтегрируем два раза по частям:

$$-\frac{1}{(2k)!}\int_0^1 B_{2k}(t)\sum_{x=m}^{p-1}\varphi^{(2k)}(x+1-t)\,dt=$$

$$=-\frac{1}{(2k)!}\int_0^1\left(\frac{B_{2k+1}(t)}{2k+1}\right)'\sum_{x=m}^{p-1}\varphi^{(2k)}(x+1-t)\,dt=$$

$$=-\frac{1}{(2k+1)!}\int_0^1 B_{2k+1}(t)\sum_{x=m}^{p-1}\varphi^{(2k)}(x+1-t)\,dt=$$

$$=-\frac{1}{(2k+1)!}\int_0^1 B_{2k+1}(t)\sum_{x=m}^{p-1}\varphi^{(2k+1)}(x+1-t)\,dt,$$

потому что

$$B_{2k+1}(1)=B_{2k+1}(0)=0$$

и

$$\left(\sum_{x=m}^{p-1}\varphi^{(2k)}(x+1-t)\right)'=-\sum_{x=m}^{p-1}\varphi^{(2k+1)}(x+1-t).$$

Интегрируя по частям еще один раз, получим

$$-\frac{1}{(2k+1)!}\int_0^1 B_{2k+1}(t)\sum_{x=m}^{p-1}\varphi^{(2k+1)}(x+1-t)\,dt=$$

$$=-\frac{1}{(2k+1)!}\int_0^1\left(\frac{B_{2k+2}(t)-B_{2k+2}}{2k+2}\right)'\sum_{x=m}^{p-1}\varphi^{(2k+1)}(x+1-t)\,dt=$$

$$=-\frac{1}{(2k+2)!}\int_0^1[B_{2k+2}(t)-B_{2k+2}]\sum_{x=m}^{p-1}\varphi^{(2k+2)}(x+1-t)\,dt.$$

Итак, окончательно

$$-\frac{1}{(2k)!}\int_0^1[B_{2k}(t)-B_{2k}]\sum_{x=m}^{p-1}\varphi^{(2k)}(x+1-t)\,dt=$$

$$=\frac{B_{2k}}{(2k)!}\{\varphi^{(2k-1)}(p)-\varphi^{(2k-1)}(m)\}-\frac{1}{(2k+2)!}\int_0^1[B_{2k+2}(t)-$$

$$-B_{2k+2}]\sum_{x=m}^{p-1}\varphi^{(2k+2}(x+1-t)\,dt. \qquad (75)$$

Уже ранее было доказано, что многочлены

$$B_{2k}(t) - B_{2k}$$

и

$$B_{2k+2}(t) - B_{2k+2}$$

имеют разные знаки. Так как по предположению $\varphi^{(2k)}$ и $\varphi^{(2k+2)}$ имеют одинаковые знаки (в промежутке суммирования), то интегралы в левой и правой частях соотношения (75) имеют разные знаки, или, иначе, знак интеграла

$$-\frac{1}{(2k)!}\int_0^1 [B_{2k}(t) - B_{2k}] \sum_{x=m}^{p-1} \varphi^{(2k)}(x+1-t)\,dt$$

одинаков со знаком выражения

$$\frac{B_{2k}}{(2k)!}\{\varphi^{(2k-1)}(p) - \varphi^{(2k-1)}(m)\},$$

а по абсолютной величине этот интеграл, очевидно, меньше последнего выражения, поэтому

$$-\frac{1}{(2k)!}\int_0^1 [B_{2k}(t) - B_{2k}] \sum_{x=m}^{p-1} \varphi^{(2k)}(x+1-t)\,dt =$$

$$= \Theta\frac{B_{2k}}{(2k)!}\{\varphi^{(2k-1)}(p) - \varphi^{(2k-1)}(m)\}, \quad 0 \leqslant \Theta \leqslant 1. \qquad (76)$$

Предположим теперь, что рассматриваемая функция такова, что все ее четные производные сохраняют один знак для всех значений $x > m$ и что

$$\lim_{x\to\infty} \varphi^{(2k-1)}(x) = 0$$

для любого $k > q - 1$. Рассмотрим функцию от x, определенную равенством

$$F_k(x) = \frac{1}{(2k)!}\lim_{p\to\infty}\int_0^1 [B_{2k}(t) - B_{2k}] \sum_{s=x}^{p-1} \varphi^{(2k)}(s+1-t)\,dt,$$

$$k > q - 1.$$

Нетрудно видеть, что предел в правой части написанного соотношения существует; в самом деле, на основании (76) имеем

$$\frac{1}{(2k)!}\int_0^1 [B_{2k}(t) - B_{2k}] \sum_{s=x}^{p-1} \varphi^{(2k)}(s+1-t)\,dt =$$

$$= -\Theta\frac{B_{2k}}{(2k)!}\{\varphi^{(2k-1)}(p) - \varphi^{(2k-1)}(x)\},$$

и так как по предположению

$$\lim_{p\to\infty} \varphi^{(2k-1)}(p) = 0,$$

то

$$|F_k(x)| \leqslant \frac{|B_{2k}|}{2k!} |\varphi^{(2k-1)}(x)|$$

и, кроме того, допредельное выражение является монотонной функцией p, так как $\varphi^{(2k)}(x)$ не меняет знака. Функция $F_k(x)$ обладает, как нетрудно видеть, тем свойством, что разность

$$F_k(p) - F_k(m)$$

дает остаточный член формулы Эйлера

$$F_k(p) - F_k(m) = \\ = -\frac{1}{(2k)!}\int_0^1 [B_{2k}(t) - B_{2k}] \sum_{s=m}^{p-1} \varphi^{(2k)}(s+1-t)\,dt.$$

Введем еще в рассмотрение функцию

$$\Phi_k(x) = \int_m^x \varphi(t)\,dt + \sum_{\nu=1}^{2k-2} \frac{B_\nu}{\nu!} \varphi^{(\nu-1)}(x);$$

тогда формулу Эйлера мы сможем переписать так:

$$\sum_{x=m}^{p-1} \varphi(x) = \Phi_k(p) - \Phi_k(m) + F_k(p) - F_k(m).$$

Заменим в написанной сумме p через z и будем считать z переменным, а m постоянным; тогда

$$\sum_{x=m}^{z-1} \varphi(x) = \Phi_k(z) - \Phi_k(m) + F_k(z) - F_k(m),$$

или

$$\sum_{x=m}^{z-1} \varphi(x) = C_k + \Phi_k(z) + F_k(z), \tag{77}$$

где

$$C_k = -\Phi_k(m) - F_k(m),$$

$$\Phi_k(z) = \int_m^z \varphi(t)\,dt + \sum_{\nu=1}^{2k-2} \frac{B_\nu}{\nu!} \varphi^{(\nu-1)}(z),$$

$$F_k(z) = \theta \frac{B_{2k}}{(2k)!} \varphi^{(2k-1)}(z).$$

Покажем, что число C_k не зависит от k, если на функцию φ наложены те ограничения, о которых говорилось выше. Заменим для этого в соотношении (77) k на $k+1$. Получим

$$\sum_{x=m}^{z-1} \varphi(x) = C_{k+1} + \int_m^z \varphi(t)\,dt + \\ + \sum_{\nu=1}^{2k} \frac{B_\nu}{\nu!} \varphi^{(\nu-1)}(z) + \Theta_1 \frac{B_{2k+2}}{(2k+2)!} \varphi^{(2k+1)}(z). \quad (78)$$

С другой стороны, соотношение (77) имеет место для любого $k > q-1$. Раз левые части равенств (77) и (78) равны, то должны быть равны и правые; это дает

$$C_{k+1} + \int_m^z \varphi(t)\,dt + \sum_{\nu=1}^{2k} \frac{B_\nu}{\nu!} \varphi^{(\nu-1)}(z) + \Theta_1 \frac{B_{2k+2}}{(2k+2)!} \varphi^{(2k+1)}(z) = \\ = C_k + \int_m^z \varphi(t)\,dt + \sum_{\nu=1}^{2k-2} \frac{B_\nu}{\nu!} \varphi^{(\nu-1)}(z) + \Theta_2 \frac{B_{2k}}{(2k)!} \varphi^{(2k-1)}(z),$$

или

$$C_{k+1} + \frac{B_{2k}}{(2k)!} \varphi^{(2k-1)}(z) + \Theta_1 \frac{B_{2k+2}}{(2k+2)!} \varphi^{(2k+1)}(z) = C_k + \Theta_2 \frac{B_{2k}}{(2k)!} \varphi^{(2k-1)}(z).$$

Это равенство справедливо для любого z. В частности, заставляя z стремиться к бесконечности и замечая, что по условию при этом производные $\varphi^{(2i-1)}(z)$ стремятся к нулю, получим

$$C_{k+1} = C_k.$$

Это показывает, что формулу Эйлера для функций $\varphi(x)$, имеющих при $k > q-1$ монотонно убывающие производные порядка $2k-1$, можно писать так:

$$\sum_{x=m}^{z-1} \varphi(x) = C + \int_m^z \varphi(t)\,dt + \\ + \sum_{\nu=1}^{2k-2} \frac{B_\nu}{\nu!} \varphi^{(\nu-1)}(z) + \Theta \frac{B_{2k}}{(2k)!} \varphi^{(2k-1)}(z), \quad 0 < \Theta < 1. \quad (79)$$

5. Формула Стирлинга. Возьмем функцию

$$\varphi(x) = \ln x,$$

тогда

$$\varphi^{(\nu-1)}(x) = \frac{(\nu-2)!\,(-1)^\nu}{x^{\nu-1}}.$$

Эта производная удовлетворяет условиям, при которых была получена формула (79), именно производная при четном $\nu-1$ сохраняет знак, и все $\varphi^{(i)}(x)$ стремятся к нулю, когда $x\to\infty$. Подставляя в формулу (79) $\ln x$ вместо $\varphi(x)$ и прибавляя (для симметрии) к обеим частям равенства по $\ln x$, получим (суммирование от $m=1$)

$$\ln z! = \ln z + C + \int_1^z \ln t\,dt - \frac{1}{2}\ln z + \sum_{\nu=2}^{2k-2} \frac{B_\nu(\nu-2)!(-1)^\nu}{\nu!\,z^{\nu-1}} + \Theta\frac{B_{2k}(2k-2)!(-1)^{2k}}{(2k)!z^{2k-1}},$$

или

$$\ln z! = \ln z + C + z\ln z - z - \frac{1}{2}\ln z + \sum_{\nu=2}^{2k-2} \frac{B_\nu(\nu-2)!(-1)^\nu}{\nu!\,z^{\nu-1}} + \Theta\frac{(2k-2)!\,B_{2k}}{(2k)!z^{2k-1}},$$

или окончательно

$$\ln z! = C + z\ln z - z + \frac{1}{2}\ln z + \sum_{\nu=2}^{2k-2} \frac{B_\nu(\nu-2)!}{\nu!\,z^{\nu-1}} + \Theta\frac{B_{2k}(2k-2)!}{(2k)!z^{2k-1}}.$$

Это и есть формула Стирлинга.

Постоянное C можно определить, воспользовавшись формулой Валлиса[1])

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\ldots(2z)(2z)}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\ldots(2z-1)(2z+1)}.$$

Полагая в формуле Стирлинга $k=1$, найдем

$$\ln z! = C + \left(z+\frac{1}{2}\right)\ln z - z + \Theta\,\frac{B_2}{2z},$$

а заменяя еще z через $2z$:

$$\ln(2z)! = C + \left(2z+\frac{1}{2}\right)\ln 2z - 2z + \Theta\,\frac{B_2}{4z}.$$

Преобразуем допредельное выражение в формуле Валлиса следующим образом:

$$\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\ldots(2z)(2z)}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\ldots(2z-1)(2z+1)} = \left\{\frac{2\cdot4\cdot6\ldots2z}{1\cdot3\cdot5\ldots(2z-1)}\right\}^2\frac{1}{2z+1} =$$

$$= \left\{\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\ldots2z\cdot2z}{(2z)!}\right\}^2\frac{1}{2z+1} = \frac{(2\cdot4\cdot6\ldots2z)^4}{((2z)!)^2}\,\frac{1}{2z+1} = \frac{2^{4z}(z!)^4}{((2z)!)^2\cdot2z}\,\frac{1}{1+\frac{1}{2z}},$$

[1]) Мы даем здесь другой способ определения C, отличный от прямого пути для определения C, приведенного в § 1 главы II.

откуда

$$\ln \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\ldots(2z)(2z)}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\ldots(2z-1)(2z+1)} =$$

$$= 4z\ln 2 + 4\ln z! - 2\ln(2z)! - \ln 2z - \ln\left(1+\frac{1}{2z}\right) =$$

$$= 4z\ln 2 + 4C + (4z+2)\ln z - 4z + 4\Theta\frac{B_2}{2z} - (4z+1)\ln 2 - 2C -$$

$$- (4z+1)\ln z + 4z - 2\cdot\Theta\frac{B_2}{4z} - \ln 2 - \ln z - \ln\left(1+\frac{1}{2z}\right) =$$

$$= -\ln 4 + 2C + 3\Theta\frac{B_2}{2z} - \ln\left(1+\frac{1}{2z}\right).$$

Приближая z к бесконечности, в пределе получим

$$\ln\frac{\pi}{2} = -\ln 4 + 2C,$$

откуда

$$C = \ln\sqrt{2\pi}.$$

Ряд Стирлинга окончательно принимает следующий вид:

$$\ln z! = \ln\sqrt{2\pi} + \left(z+\frac{1}{2}\right)\ln z - z +$$

$$+ \sum_{\nu=2}^{2k-2} \frac{B_\nu(\nu-2)!}{\nu!\, z^{\nu-1}} + \Theta\frac{B_{2k}(2k-2)!}{(2k)!\, z^{2k-1}}. \qquad (80)$$

Ряд Стирлинга, очевидно, расходится, но тем не менее он дает возможность вычислять значения $\ln z!$ с большей точностью. Действительно, ряд Стирлинга представляет собой так называемый асимптотический ряд. Если z имеет большое значение, то члены ряда от начала очень быстро убывают, и формула (80) показывает, что ошибка, получающаяся, если прервать ряд на какомнибудь члене, имеет знак, обратный первому отбрасываемому члену, а по абсолютной величине меньше его.

Упражнения

1. Вычислить с точностью до $\frac{1}{n}$-й сумму

$$\sum_{x=2}^{n} \ln^2(x!).$$

2. Вычислить с точностью до главного члена в показателе порядок убывания определителя при $a > 1$

$$D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a+1} & \frac{1}{a^2+1} & \cdots & \frac{1}{a^n+1} \\ \frac{1}{a^2+1} & \frac{1}{a^3+1} & \cdots & \frac{1}{a^{n+1}+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{a^n+1} & \frac{1}{a^{n+1}+1} & \cdots & \frac{1}{a^{2n-1}+1} \end{vmatrix}$$

(составить рекуррентную формулу, связывающую D_n и D_{n-1}).

3. Вычислить с точностью до убывающих членов сумму

$$\sum_{x=1}^{n} \sin 2\pi \sqrt{x}.$$

4. Вычислить с точностью до вторых убывающих членов суммы:

$$\sum_{x=1}^{n} x^{\alpha}, 0 < \alpha < 1; \quad \sum_{x=1}^{n} e^{x^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1; \quad \sum_{x=2}^{n} \frac{x}{\ln x}.$$

ГЛАВА V

УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

§ 1. Постановка задачи

Соотношение

$$F[x;\ f(x),\ \Delta f(x), \ldots, \Delta^n f(x)] = 0, \tag{1}$$

где функция F задана, функция f — искомая, мы будем называть разностным уравнением с одной неизвестной функцией f, притом порядка n, если соотношение (1) после замены приращений их выражениями через f явно содержит как $f(x+n)$, так и $f(x)$.

Если уравнение (1) после упрощений не содержит $f(x+n)$, то его естественно считать порядка ниже n. Если же оно не содержит $f(x)$, но содержит, скажем, $f(x+1)$, то замена независимого переменного $x+1$ на x приводит это уравнение к уравнению порядка $n-1$. Здесь лежит глубокое различие между уравнениями в конечных разностях и уравнениями дифференциальными, где замена независимого переменного порядка уравнения не понижает. Поясним высказанную мысль примером; рассматривая разностное уравнение

$$2f(x) + 3\Delta f(x) - \Delta^3 f(x) = x, \tag{α}$$

при помощи формул

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x),$$
$$\Delta^3 f(x) = f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x)$$

приведем его к следующему:

$$3f(x+2) - f(x+3) = x$$

и, заменяя $x+2$ на x, получим уравнение

$$3f(x) - f(x+1) = x - 2$$

первого порядка. Соответственно этому и уравнение (α) мы будем считать уравнением первого порядка.

Решением уравнения (1) мы будем называть такую функцию $f(x)$, которая обращает левую часть в нуль тождественно (т. е. для всех значений x).

Соотношение $F[x, f(x), \ldots, \Delta^n f(x)] = 0$, если представить все $\Delta^k f(x)$ через $f(x), \ldots, f(x+k)$, может быть переписано в виде

$$\Phi[x, f(x), \ldots, f(x+k)] = 0. \qquad (1')$$

Это соотношение связывает $k+1$ значение нашей функции. Отсюда, если это уравнение записать в форме

$$f(x+k) = \Phi_1[x, f(x), \ldots, f(x+k-1)], \qquad (1'')$$

то ясно, что, задав начальные значения при $x = x_0$, $f(x_0) = f_0$, $f(x_0+1) = f_1, \ldots, f(x_0+k-1) = f_{k-1}$, мы получим значение $f(x_0+k)$ и вообще $f(x_0+x)$ при любом целом x.

При этом, очевидно, достаточно считать $\Phi_1(x_1, y_1, \ldots, y_k)$ функцией конечной и определенной при $x = x_0 + n$, где n — любое целое число, и y_i, пробегающих все значения.

Поэтому решение нашего уравнения можно записать в виде

$$f(x) = P(x, f_0, f_1, \ldots, f_{k-1}),$$

т. е. оно будет зависеть от k начальных значений

$$f_0, f_1, \ldots, f_{k-1}.$$

Обратно, если у нас есть семейство функций

$$f(x) = P(x, C_0, C_1, C_2, \ldots, C_{k-1}),$$

определенных на последовательности точек $x = x_0 + n$, где n — целое число, то, исключая из уравнений

$$f(x) = P(x, C_0, \ldots, C_{k-1}),$$
$$f(x+1) = P(x+1, C_0, \ldots, C_{k-1}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(x+k) = P(x+k, C_0, \ldots, C_{k-1})$$

константы $C_0, C_1, \ldots, C_{k-1}$, мы получим разностное уравнение, вообще говоря, k-го порядка для $f(x)$.

Очевидно также, что можно считать величины $C_0, C_1, \ldots, C_{k-1}$ не числами, а произвольными периодическими функциями периода единица. Тогда по-прежнему можно из нашей системы исключить эти функции. Но если допустить, что x пробегает последовательность $x_0 + n$, то предположения, что C_i — постоянная или периодическая функция, эквивалентны.

Итак, вообще говоря, общее решение разностного уравнения k-го порядка будет зависеть от k произвольных периодических функций периода единица.

Если x пробегает дискретную последовательность значений $x = x_0 + n$, то, как мы уже видели, эти k периодических функций сводятся к k постоянным, для определения которых достаточно знать k начальных значений, с помощью которых и определяется единственное, вообще говоря, решение, имеющее заданные начальные значения и определенное на нашей последовательности значений x. Допустим теперь, что функция

$$\Phi(x, y_1, y_2, \ldots, y_k)$$

определена и непрерывна при всех вещественных $x, y_1, y_2, \ldots, y_k$.

Тогда, очевидно, можно поставить вопрос о том, что нужно задать, чтобы получить единственное и непрерывное для всех вещественных значений x решение уравнения

$$f(x+k) = \Phi[x, f(x), f(x+1), \ldots, f(x+k-1)].$$

Нетрудно видеть, что если в интервале $(0, k)$ задать непрерывную функцию, непрерывную в точке k слева, а в точке нуль — справа и такую, что ее значения в точках $0, 1, 2, \ldots, k$ связаны нашим уравнением, то этим определится единственная непрерывная на всей вещественной оси функция, совпадающая с заданной на интервале $(0, k)$ и удовлетворяющая нашему уравнению.

В дальнейшем мы будем считать x меняющимся по дискретной последовательности — арифметической прогрессии. Кроме того, можно считать, что равноотстоящие значения имеют разность единица, так как случай разности, равной произвольному h, может быть приведен к этому подстановкой $x = ht$.

Если же во всех последующих теоремах считать x непрерывно изменяющимся, то всюду в теоремах вместо произвольных постоянных будут входить произвольные функции x, а условие необращения в нуль определителя должно быть выполнено для всех значений x в интервале $(0, \infty)$.

Задачу решения разностного уравнения можно ставить в комплексной области. В этом случае возможны различные постановки задачи. Мы остановимся лишь на одной из них, являющейся частным случаем поставленной в главе III задачи о построении целой функции по заданным элементам.

§ 2. Линейные уравнения первого порядка

1. Однородное линейное уравнение. Рассмотрим линейное разностное уравнение первого порядка

$$\Delta f(x) + P(x) f(x) = Q(x). \tag{2}$$

Это уравнение будем называть однородным, если $Q(x) = 0$,

неоднородным — в противном случае. Однородное линейное разностное уравнение имеет вид

$$\Delta f(x) + f(x) P(x) = 0. \tag{3}$$

Нам предстоит найти решения уравнений (2) и (3). Рассмотрим сначала уравнение (3). Замечая, что

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x),$$

уравнение (3) запишем следующим образом:

$$f(x+1) = [1 - P(x)] f(x). \tag{4}$$

Мы решаем уравнение (3) только для целых значений x, т. е. определяем $f(x)$ для x целого. Давая в уравнении (4) независимому переменному значения

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots, x-1,$$

получим следующие равенства:

$$\begin{aligned} f(1) &= [1 - P(0)] f(0), \\ f(2) &= [1 - P(1)] f(1), \\ f(3) &= [1 - P(2)] f(2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(x) &= [1 - P(x-1)] f(x-1). \end{aligned}$$

Перемножая почленно написанные равенства, после сокращения на произведение

$$f(1) f(2) \ldots f(x-1)$$

получим искомое решение для любого целого положительного x в виде

$$f(x) = f(0) \prod_{t=0}^{x-1} [1 - P(t)]. \tag{5}$$

Величина $f(0)$ есть начальное значение функции $f(x)$ и является произвольной постоянной, которая получается и при решении аналогичной задачи интегрирования однородного дифференциального уравнения первого порядка.

2. Неоднородное линейное уравнение. Перейдем теперь к уравнению (2). В этом случае будем искать неизвестную функцию $f(x)$ в виде произведения

$$f(x) = u(x) \cdot v(x), \tag{6}$$

где функции $u(x)$ и $v(x)$ — пока произвольные. Из соотношения (6) находим

$$\Delta f(x) = u(x+1)\,v(x+1) - u(x)\,v(x) =$$
$$= u(x+1)\,v(x+1) - u(x+1)\,v(x) +$$
$$+ u(x+1)\,v(x) - u(x)\,v(x) = u(x+1)\,\Delta v(x) + v(x)\,\Delta u(x).$$

Уравнение (2) принимает вид

$$u(x+1)\,\Delta v(x) + v(x)\,\Delta u(x) + P(x)\,u(x)\,v(x) = Q(x),$$

или

$$u(x+1)\,\Delta v(x) + v(x)\,[\Delta u(x) + P(x)\,u(x)] = Q(x). \tag{7}$$

Выберем $u(x)$ так, чтобы член в квадратных скобках обратился в нуль:

$$\Delta u(x) + P(x)\,u(x) = 0,$$

для этого на основании формулы (5) следует положить

$$u(x) = C_1 \prod_{t=0}^{x-1} [1 - P(t)], \tag{8}$$

где C_1 — произвольная постоянная. После такого выбора $u(x)$ уравнение (7) принимает вид

$$u(x+1)\,\Delta v(x) = Q(x),$$

или

$$\Delta v(x) = \frac{Q(x)}{C_1 \prod\limits_{t=0}^{x} [1 - P(t)]}$$

(C_1 — произвольная постоянная) и позволяет определить функцию $v(x)$. В самом деле, перед нами — простейшее разностное уравнение, разобранное в главе IV Так как мы желаем из написанного уравнения определить решения $v(x)$ только для целых x, то, суммируя $\Delta v(\nu)$ в пределах от $\nu = 0$ до $\nu = x - 1$, мы определим

$$v(x) = \frac{1}{C_1} \sum_{\nu=0}^{x-1} \frac{Q(\nu)}{\prod\limits_{t=0}^{\nu} [1 - P(t)]} + C_2. \tag{9}$$

Здесь C_2 — произвольная постоянная, так как, рассматривая только целые значения x, мы, очевидно, не можем различать произвольную периодическую функцию и произвольное постоянное.

Соотношения (8) и (9) определяют согласно (6) решение уравнения (2) следующим образом:

$$f(x)=\sum_{t=0}^{x-1}[1-P(t)]\left\{\sum_{\nu=0}^{x-1}\frac{Q(\nu)}{\prod\limits_{t=0}^{\nu}[1-P(t)]}+C\right\}. \qquad (10)$$

Нетрудно подметить, что написанное решение по форме напоминает соответствующую формулу, дающую решение неоднородного линейного дифференциального уравнения. Мы видим, что решение опять зависит от одной произвольной постоянной. Если взять вместо единицы приращение h, то в пределе при $h\to 0$ соотношение (10) обратится в упомянутую формулу решения дифференциального уравнения. Закончив исследование решения линейного разностного уравнения первого порядка, перейдем к общей теории линейных разностных уравнений любого порядка.

§ 3. Линейные уравнения. Общая теория

1. Общий вид линейных уравнений. Разностное уравнение

$$\Delta^k f(x)+a_1\Delta^{k-1}f(x)+\cdots+a_k f(x)=Q(x), \qquad (11)$$

где $Q(x)$ — заданная функция от x, a_i — данные функции x, а $f(x)$ — искомая функция, называется линейным уравнением порядка k; однородным, если $Q(x)\equiv 0$, и неоднородным, если $Q(x)\not\equiv 0$. Воспользовавшись выражением p-й разности $\Delta^p f(x)$ через

$$f(x),\ f(x+1),\ f(x+2),\ldots,$$

т. е. формулой (35) главы I

$$\Delta^p f(x)=\sum_{\nu=0}^{p}(-1)^{p-\nu}C_p^{\nu}f(x+\nu),$$

мы сможем уравнение (11) преобразовать к следующему:

$$f(x+k)+b_1 f(x+k-1)+\cdots+b_k f(x)=Q(x), \qquad (12)$$

где b_i — некоторые функции x. Обратно, замечая, что при целом p справедливо равенство

$$f(x+p)=\sum_{k=0}^{p}C_p^k\Delta^k f(x),$$

мы всякое уравнение вида (12) сможем привести к виду (11). Итак, вместо того чтобы рассматривать решение уравнения (11),

мы можем рассматривать уравнение (12); этот последний вид предпочтительнее для исследований, поэтому мы и будем им пользоваться.

Мы построим общую теорию линейных разностных уравнений. В этой общей теории мы будем полагать коэффициенты линейного уравнения в форме (12) функциями от x.

2. Основные теоремы о решениях линейного уравнения. Займемся сначала исследованием однородного уравнения. Итак, рассмотрим разностное уравнение

$$f(x+k)+P_1(x)f(x+k-1)+\cdots+P_k(x)f(x)=0, \qquad (13)$$

где $P(x)$ — заданные функции от x. Будем опять считать x принимающим значения 0, 1, 2, ... Функции $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_k(x)$ будем считать имеющими конечные и определенные значения на этом множестве и $P_k(x)$ не тождественно равной нулю на нем.

Каждое решение уравнения (13) определяется заданием начальных значений $f(0)=f_0, \ldots, f(k-1)=f_{k-1}$.

Прежде всего мы можем доказать теорему.

Теорема I. *Если $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_p(x)$ — решения уравнения*

$$f(x+k)+P_1(x)f(x+k-1)+\cdots+P_k(x)f(x)=0, \qquad (13)$$

то и функция $\varphi(x)$

$$\varphi(x)=C_1f_1(x)+C_2f_2(x)+\cdots+C_pf_p(x), \qquad (14)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_p$ — постоянные, будет также решением этого уравнения.

Доказательство. Положим $P_0(x)=1$, тогда

$$\sum_{s=0}^{k} P_s(x)\varphi(x+k-s)=\sum_{s=0}^{k} P_s(x)\sum_{i=1}^{p} C_if_i(x+k-s).$$

Меняя во второй части порядок суммирования, получим

$$\sum_{s=0}^{k} P_s(x)\varphi(x+k-s)=\sum_{i=1}^{p} C_i\sum_{s=0}^{k} P_s(x)f_i(x+k-s)=0,$$

так как все $f_i(x)$ — частные решения нашего уравнения.

Значит, $\varphi(x)$ — тоже решение уравнения, и теорема доказана.

Теперь мы можем доказать и теорему об общем решении линейного уравнения без правой части.

Теорема II. *Если $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_k(x)$ — решения уравнения* (13):

$$f(x+k)+P_1(x)f(x+k-1)+\cdots+P_k(x)f(x)=0,$$

причем определитель

$$D[f_1(0), \ldots, f_k(0)] = \begin{vmatrix} f_{11} f_{12} \cdots f_{1k} \\ f_{21} f_{22} \cdots f_{2k} \\ \cdots\cdots \\ f_{k1} f_{k2} \cdots f_{kk} \end{vmatrix} \tag{15}$$

отличен от нуля, то общее решение нашего линейного однородного уравнения имеет вид

$$f(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \cdots + C_k f_k(x),$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_k$ — произвольные постоянные.

Доказательство. Рассмотрим k решений уравнения (13) $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$, определяемых начальными значениями:

$$\begin{aligned} &f_1(0) = f_{11}, f_1(1) = f_{12}, \ldots, f_1(k-1) = f_{1k}, \\ &f_2(0) = f_{21}, f_2(1) = f_{22}, \ldots, f_2(k-1) = f_{2k}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &f_k(0) = f_{k1}, f_k(1) = f_{k2}, \ldots, f_k(k-1) = f_{kk}, \end{aligned}$$

и притом выбранными так (что, естественно, всегда можно сделать), чтобы определитель (15)

$$D[f_1(0), f_2(0), \ldots, f_k(0)] = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \cdots f_{1k} \\ f_{21} & f_{22} \cdots f_{2k} \\ \cdots & \cdots \\ f_{k1} & f_{k2} \cdots f_{kk} \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля.

Заданием начальных значений функции $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ полностью определяются на всей нашей последовательности $x = 0, 1, \ldots$, и значит, по первой теореме функция

$$\varphi(x) = C_1 f_1(x) + \cdots + C_k f_k(x),$$

где все $C_1, C_2, \ldots, C_k$ — постоянные, также будет решением уравнения (13).

Легко показать, что все решения уравнения (13) содержатся в совокупности функций $\varphi(x)$. Действительно, пусть мы имеем произвольное решение $f(x)$. Оно вполне определяется заданием начальных значений $f_1, f_2, \ldots, f_k$. Выберем теперь из совокупности функций $\varphi(x)$ такую, которая имела бы те же начальные значения. Иначе говоря, нам нужно найти такие постоянные $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_k$,

чтобы были выполнены k равенств:

$$f_1 = \varphi(0) = C_1 f_{11} + C_2 f_{12} + \cdots + C_k f_{1k},$$
$$f_2 = \varphi(1) = C_1 f_{21} + C_2 f_{22} + \cdots + C_k f_{2k},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_k = \varphi(k-1) = C_1 f_{k1} + C_2 f_{k2} + \cdots + C_k f_{kk}.$$

Но это можно сделать, и притом единственным образом, так как определитель системы отличен от нуля.

Решив эту систему линейных уравнений относительно $C_1, \ldots, C_k$, мы найдем их значения и получим, таким образом, функцию $\varphi(x)$, имеющую те же начальные значения, что и $f(x)$. Но так как начальные значения определяют единственным образом функцию, удовлетворяющую уравнению (13), то $\varphi(x) \equiv f(x)$ (на множестве $x = 0, 1, 2, \ldots$).

Тем самым теорема доказана.

Рассмотрим теперь решение неоднородного уравнения

$$f(x+k) + P_1(x) f(x+k-1) + \cdots + P_k(x) f(x) = Q(x).$$

Относительно неоднородного линейного уравнения имеет место теорема, аналогичная соответствующей теореме в теории линейных неоднородных дифференциальных уравнений.

Теорема III. *Общее решение линейного неоднородного уравнения*

$$f(x+k) + P_1(x) f(x+k-1) + \cdots + P_k(x) f(x) = Q(x) \quad (12)$$

представляется в виде суммы частного его решения и общего решения линейного однородного уравнения

$$f(x+k) + P_1(x) f(x+k-1) + \ldots + P_k(x) f(x) = 0, \quad (13)$$

т. е.

$$f(x) = f^*(x) + C_1 f_1(x) + \ldots + C_k f_k(x), \quad (16)$$

где $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ — *частные решения однородного уравнения и притом такие, что для них*

$$D[f_1(0), f_2(0), \ldots, f_k(0)] \neq 0.$$

Доказательство. Пусть $f^*(x)$ — любое решение нашего неоднородного уравнения. Заменим тогда $f(x)$ через $f^*(x) + \varphi(x)$. Мы получим, полагая $P_0(x) = 1$, что

$$\sum_{s=0}^{k} P_s(x) [f^*(x+k-s) + \varphi(x+k-s)] = Q(x).$$

Так как $f^*(x)$ — решение нашего неоднородного уравнения, то

$$\sum_{s=0}^{k} P_s(x) f^*(x+k-s) = Q(x)$$

и, значит,

$$\varphi(x+k) + P_1(x)\varphi(x+k-1) + \ldots + P_k(x)\varphi(x) = 0.$$

Но общее решение этого уравнения представляется, как это следует из теоремы II, в виде

$$\varphi(x) = \sum_{s=1}^{k} C_k f_k(x),$$

где $f_s(x)$, $s = 1, 2, \ldots, k$, — частные решения однородного уравнения и притом такие, что

$$D[f_1(0), \ldots, f_k(0)] \neq 0,$$

откуда и следует, что

$$f(x) = f^*(x) + C_1 f_1(x) + \ldots + C_k f_k(x).$$

В теории линейных дифференциальных уравнений вводится понятие линейно независимых решений, и теорема II доказывается для любой системы линейно независимых решений. В теории линейных разностных уравнений полной аналогии с этим установить нельзя, но в некоторых частных предположениях относительно поведения коэффициентов линейного уравнения аналогия устанавливается.

Пусть $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_k(x)$ — функции, имеющие конечные и определенные значения при $x = 0, 1, 2, \ldots$ Тогда можно дать признак их линейной зависимости или независимости.

3. Линейная зависимость и независимость функций. Теорема IV. *Если функции $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_k(x)$ линейно зависимы, т. е. для $x = 0, 1, 2, \ldots$ имеет место соотношение*

$$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \ldots + C_k f_k(x) = 0, \tag{a}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_k$ — постоянные, не равные нулю одновременно, то определитель

$$D[f_1(x), \ldots, f_k(x)] =$$

$$= \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots f_k(x) \\ f_1(x+1) & f_2(x+1) & \ldots f_k(x+1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1(x+k-1) & f_2(x+k-1) & \ldots f_k(x+k-1) \end{vmatrix} \tag{17}$$

равен нулю при всех значениях x. Обратно, если

$$D[f_1(x),\ldots,f_k(x)]=0,\ x=0,\ 1,\ldots, \tag{18}$$

а

$$D[f_2(x),\ldots,f_k(x)]\neq 0,\ x=0,\ 1,\ldots, \tag{19}$$

то наши функции линейно зависимы и $f_1(x)$ действительно входит в соотношение (а), *т. е.* $C_1\neq 0$.

Доказательство. Первая часть теоремы доказывается непосредственно.

Возьмем определитель

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_k(x) \\ f_1(x+1) & f_2(x+1) & \ldots & f_k(x+1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1(x+k-1) & f_2(x+k-1) & \ldots & f(x+k-1) \end{vmatrix} = D[f_1(x),\ldots,f_k(x)]$$

и допустим, что $C_1\neq 0$, т. е. что $f_1(x)$ действительно входит в соотношение (а). Умножим первый столбец нашего определителя на C_1 и прибавим к нему все другие умноженные на соответствующие постоянные $C_i, i=2,\ldots,k$.

Тогда мы получим, что

$$C_1D[f_1(x),\ldots,f_k(x)]=$$

$$=\begin{vmatrix} \sum\limits_{s=1}^{k} C_s f_s(x) & f_2(x) & \ldots f_k(x) \\ \sum\limits_{s=1}^{k} C_s f_s(x+1) & f_2(x+1) & \ldots f_k(x+1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{s=1}^{k} C_s f_s(x+k-1) & f_2(x+k-1) & \ldots f_k(x+k-1) \end{vmatrix}.$$

Но так как все элементы первого столбца — нули, то определитель равен нулю и, значит,

$$C_1D[f_1(x),\ldots,f_k(x)]=0.$$

Вследствие того, что $C_1\neq 0$, мы получаем

$$D[f_1(x),\ldots,f_k(x)]=0.$$

Докажем теперь вторую часть нашей теоремы. По предположению

$$D[f_1(x),\ldots,f_k(x)] = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots f_k(x) \\ f_1(x+1) & f_2(x+1) & \ldots f_k(x+1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1(x+k-1) & f_2(x+k-1) & \ldots f_k(x+k-1) \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим этот определитель по элементам первой строки. Мы получим тождество

$$f_1(x)\,A_1(x) + f_2(x)\,A_2(x) + \ldots + f_k(x)\,A_k(x) = 0,$$

где $A_1(x)$, $A_2(x),\ldots, A_k(x)$ — алгебраические дополнения элементов первой строки.

Заменим первую строку второй, третьей и, наконец, k-й строкой. Мы получим, очевидно, $k-1$ определителей, равных нулю тождественно. Разлагая их по элементам первой строки и замечая, что миноры первой строки у всех определителей одинаковы, мы получим $k-1$ равенств, а вместе с первым, уже написанным, k равенств:

$$f_1(x)\,A_1(x) + f_2(x)\,A_2(x) + \ldots + f_k(x)\,A_k(x) = 0,$$

$$f_1(x+1)\,A_1(x) + f_2(x+1)\,A_2(x) + \ldots + f_k(x+1)\,A_k(x) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_1(x+k-1)\,A_1(x) + f_2(x+k-1)\,A_2(x) + \ldots$$
$$\ldots + f_k(x+k-1)\,A_k(x) = 0.$$

Но

$$A_1(x) = D[f_2(x),\ldots,f_k(x)] \neq 0$$

ни при каком x по условию второй части теоремы.

Поэтому, разделив все наши равен тва на $A_1(x)$ и положив

$$-\frac{A_s(x)}{A_1(x)} = v_{s-1}(x), \quad s = 2,\ldots,k,$$

мы получим систему тождеств:

$$f_1(x) = v_1(x)\,f_2(x) + v_2(x)\,f_3(x) + \ldots + v_{k-1}(x)\,f_k(x),$$

$$f_1(x+1) = v_1(x)\,f_2(x+1) + v_2(x)\,f_3(x+1) + \ldots + v_{k-1}(x)\,f_k(x+1),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_1(x+k-1) = v_1(x)\,f_2(x+k-1) +$$
$$+ v_2(x)\,f_3(x+k-1) + \ldots + v_{k-1}(x)\,f_k(x+k-1).$$

Давая в первом тождестве x значение $x+1$ и вычитая из него второе, во втором тождестве заменяя x через $x+1$ и вы-

читая из него третье и так далее, получим систему тождеств:

$$\Delta v_1(x) f_2(x+1) + \Delta v_2(x) f_3(x+1) + \ldots + \Delta v_{k-1}(x) f_k(x+1) = 0,$$
$$\Delta v_1(x) f_2(x+2) + \Delta v_2(x) f_3(x+2) + \ldots + \Delta v_{k-1}(x) f_k(x+2) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta v_1(x) f_2(x+k-1) + \Delta v_2(x) f_3(x+k-1) + \ldots$$
$$\ldots + \Delta v_{k-1}(x) f_k(x+k-1) = 0.$$

Эту систему можно рассматривать как систему уравнений относительно $\Delta v_1(x), \ldots, \Delta v_{k-1}(x)$. Определитель этой системы будет, очевидно,

$$D[f_2(x+1), f_3(x+1), \ldots, f_k(x+1)] \neq 0, \quad x = 0, 1, \ldots,$$

по условию теоремы.

Значит, система не имеет отличных от нуля решений, и $\Delta v_1(x) = 0$, $\Delta v_2(x) = 0, \ldots, \Delta v_{k-1}(x) = 0$, откуда и следует, что $v_1(x)$, $v_2(x), \ldots, v_k(x)$ будут постоянными.

Теперь мы видим, что тождество

$$f_1(x) = v_1 f_2(x) + v_2 f_3(x) + \ldots + v_{k-1} f_k(x)$$

и будет искомой линейной зависимостью между функциями

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots, f_k(x).$$

Доказанная нами теорема, как нетрудно убедиться из простых примеров, оказывается неверной, если отказаться от предположения, что

$$D[f_2(x),\ f_3(x), \ldots, f_k(x)] \neq 0$$

для всех значений $x = 0, 1, 2, \ldots$

Пользуясь этой теоремой, можно доказать другое интересное предложение.

Теорема V. *Для того чтобы $f(x)$, имеющая конечное и определенное значение при $x = 0, 1, \ldots$, удовлетворяла при этих значениях x разностному уравнению с постоянными коэффициентами k-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы*

$$D[f(x),\ f(x+1), \ldots, f(x+k)] = \begin{vmatrix} f(x) & f(x+1) & \ldots & f(x+k) \\ f(x+1) & f(x+2) & \ldots & f(x+k+1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f(x+k) & f(x+k+1) & \ldots & f(x+2k) \end{vmatrix} = 0 \qquad (20)$$

при $x = 0, 1, 2, \ldots$ и, кроме того,

$$D[f(x), \ldots, f(x+k-1)] \neq 0, \qquad (21)$$

хотя бы для одного значения $x \geqslant 1$.

Доказательство. Из теории определителей известно соотношение, связывающее этого типа определители (см., например, Г. Полиа и Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, т. II, стр. 109, ОНТИ, М. — Л., 1938), а именно, что

$$\begin{vmatrix} f(x) & \dots & f(x+k) \\ \dots & \dots & \dots \\ f(x+k) & \dots & f(x+2k) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f(x+2) & \dots & f(x+k) \\ \dots & \dots & \dots \\ f(x+k) & \dots & f(x+2k-2) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} f(x) & \dots & f(x+k-1) \\ \dots & \dots & \dots \\ f(x+k-1) & \dots & f(x+2k-2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f(x+2) & \dots & f(x+k+1) \\ \dots & \dots & \dots \\ f(x+k+1) & \dots & f(x+2k) \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} f(x+1) & \dots & f(x+k) \\ \dots & \dots & \dots \\ f(x+k) & \dots & f(x+2k-1) \end{vmatrix}^2,$$

откуда, положив для сокращения записи

$$D[f(x), \dots, f(x+k)] = D_k(x),$$

мы получим соотношение

$$D_k(x) D_{k-2}(x+2) = D_{k-1}(x) D_{k-1}(x+2) - D_{k-1}^2(x+1).$$

По условию теоремы $D_k(x) = 0$; $x = 0, 1, \dots$, значит,

$$D_{k-1}^2(x+1) = D_{k-1}(x) D_{k-1}(x+2).$$

Но если для $x = p \geqslant 1$, $D_{k-1}(p) = 0$, то из этого соотношения следует, что и для всех значений $x = 1, 2, \dots$, $D_{k-1}(x) = 0$, а это находится в противоречии с условиями теоремы.

Итак, $D_{k-1}(x) \neq 0$ ни для какого $x = 1, 2, \dots$ Мы видим, что в этом случае выполнены условия теоремы IV и поэтому между функциями $f(x), \dots, f(x+k)$ существует линейная зависимость с постоянными коэффициентами, в которую действительно входят как $f(x)$, так и $f(x+k)$, так как минорами этих элементов в детерминанте $D_k(x)$ служат всюду отличные от нуля детерминанты $D_{k-1}(x+2)$ и $D_{k-1}(x+1)$.

Мы доказали достаточность наших условий. Их необходимость очевидна из первой части теоремы IV.

Если условия теоремы V выполняются, начиная с $x = p$, то и функции связаны линейной зависимостью при $x \geqslant p$.

Эта теорема имеет большое значение при изучении рядов Тейлора с точки зрения распределения особенностей представляемых ими функций в комплексной области.

4. Свойства частных решений линейного однородного уравнения. Рассмотрим теперь некоторые свойства частных решений линейного однородного уравнения.

Пусть $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_k(x)$ будут k различных решений уравнения

$$f(x+k)+P_1(x)f(x+k-1)+\ldots+P_k(x)f(x)=0.$$

Подставляя в это уравнение $f_1, \ldots, f_k$, мы получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&P_1(x)f_1(x+k-1)+\ldots+P_k(x)f_1(x)=-f_1(x+k),\\
&P_1(x)f_2(x+k-1)+\ldots+P_k(x)f_2(x)=-f_2(x+k),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&P_1(x)f_k(x+k-1)+\ldots+P_k(x)f_k(x)=-f_k(x+k).
\end{aligned}$$

Решая эту систему относительно $P_k(x)$, мы получим соотношение

$$P_k(x)\begin{vmatrix} f_1(x) & f_1(x+1)\ldots f_1(x+k-1)\\ f_2(x) & f_2(x+1)\ldots f_2(x+k-1)\\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\\ f_k(x) & f_k(x+1)\ldots f_k(x+k-1)\end{vmatrix}=$$

$$=-\begin{vmatrix} f_1(x+k) & f_1(x+1)\ldots f_1(x+k-1)\\ f_2(x+k) & f_2(x+1)\ldots f_2(x+k-1)\\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\\ f_k(x+k) & f_k(x+1)\ldots f_k(x+k-1)\end{vmatrix}$$

Обозначив по-прежнему

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots f_k(x)\\ f_1(x+1) & f_2(x+1) & \ldots f_k(x+1)\\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\\ f_1(x+k-1) & f_2(x+k-1) & \ldots f_k(x+k-1)\end{vmatrix}=$$

$$=D[f_1(x),\ f_2(x),\ldots,f_k(x)],$$

мы получим, очевидно, соотношение:

$$(-1)^k D[f_1(x),\ldots,f_k(x)]\,P_k(x)=D[f_1(x+1),\ldots,f_k(x+1)]. \quad (22)$$

Отсюда следует, что если

$$D[f_1(0),\ldots,f_k(0)]=0,$$

то и вообще

$$D[f_1(x),\ldots,f_k(x)]=0,\ x=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

Итак, если хотя бы для одного значения x

$$D[f_1(x),\ldots,f_k(x)]\neq 0,\quad x\geqslant 0,$$

то и $D[f_1(0),\ldots,f_k(0)]\neq 0$, и значит, с помощью этой системы решений можно построить по теореме II общее решение однородного уравнения.

Введем понятие линейно независимых решений. Назовем *функции* $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_k(x)$ *линейно независимыми решениями, если они принимают конечные и определенные значения при всех целых* $x \geqslant 0$ *удовлетворяют при тех же значениях нашему уравнению*

$$f(x+k) + P_1(x) f(x+k-1) + \ldots + P_k(x) f(x) = 0 \qquad (13)$$

и если соотношение

$$C_1 f_1(x) + \ldots + C_k f_k(x) = 0$$

при любых постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_k$, *одновременно не равных нулю, хотя бы для одного значения* x, $x \geqslant 0$, *не выполняется.*

Относительно линейно независимых решений нашего уравнения легко доказать лемму:

Определитель системы k *линейно независимых решений разностного уравнения* k*-го порядка не может быть тождественно равен нулю, т. е. равенство*

$$D[f_1(x), \ldots, f_k(x)] = 0, \quad x = 0, 1, \ldots, \qquad (23)$$

невозможно.

Допустим, что оно выполнено. Рассмотрим тогда систему уравнений:

$$\begin{gathered} C_1 f_1(0) + C_2 f_2(0) + \ldots + C_k f_k(0) = 0, \\ C_1 f_1(1) + C_2 f_2(1) + \ldots + C_k f_k(1) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1 f_1(k-1) + C_2 f_2(k-1) + \ldots + C_k f_k(k-1) = 0. \end{gathered}$$

Так как определитель системы равен нулю, то можно подобрать такие постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_k$, не все равные нулю, которые дают решение этой системы уравнений.

Значит, при найденных $C_1, \ldots, C_k$

$$\sum_{s=1}^{k} C_s f_s(x) = 0, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, k-1. \qquad (24)$$

Но, взяв соотношение

$$f_s(k) + P_1(0) f_s(k-1) + \ldots + P_k(0) f_s(0) = 0,$$

умножив его на C_s и просуммировав равенства для $s = 1, 2, \ldots, k$, мы получим

$$0 = \sum_{s=1}^{k} C_s f_s(k) + P_1(0) \sum_{s=1}^{k} C_s f_s(k-1) + \ldots + P_k(0) \sum_{s=1}^{k} C_s f_s(0),$$

откуда, принимая во внимание ранее написанную систему равенств (24), получим

$$\sum_{s=1}^{k} C_s f_s(k) = 0. \tag{25}$$

Идя таким же образом дальше, мы получим, что и вообще, при выбранной системе постоянных C_s

$$\sum_{s=1}^{k} C_s f_s(x) = 0, \ x = 0, \ 1, \ldots, \tag{26}$$

т. е. тождественно. Мы пришли к противоречию с предположением линейной независимости решений. Теперь мы можем дать другую формулировку теореме II.

Теорема II. *Если $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_k(x)$ — линейно независимые решения уравнения*

$$f(x+k) + P_1(x) f(x+k-1) + \ldots + P_k(x) f(x) = 0, \tag{13}$$

то всякое другое решение $f(x)$ этого уравнения, принимающее конечные и определенные значения при $x \geqslant 0$, может быть представлено в виде

$$f(x) = C_1 f_1(x) + \ldots + C_k f_k(x), \tag{27}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_k$ — постоянные.

Рассмотрим опять соотношение (22),

$$(-1)^k D[f_1(x), \ldots, f_k(x)] P_k(x) = D[f_1(x+1), \ldots, f_k(x+1)].$$

Из него непосредственно следует, что

$$(-1)^{kx} D[f_1(x), \ldots, f_k(x)] = \prod_{t=0}^{x-1} P_k(t) D[f_1(0), \ldots, f_k(0)], \tag{28}$$

т. е. если мы имеем систему линейно независимых решений и $P_k(x) \neq 0$ при $x \geqslant 0$, то и $D[f_1(x), \ldots, f_k(x)] \neq 0$ при $x \geqslant 0$. Но если $P_k(p) = 0$, $p \geqslant 0$, то из этого соотношения следует, что

$$D[f_1(x), \ldots, f_k(x)] = 0$$

при всяком $x \geqslant p+1$. Значит, в этом случае всякая система из k решений, имеющих конечные и определенные значения на всем интервале $x \geqslant 0$, оказывается системой линейно зависимых решений на интервале $x \geqslant p+1$. Давая в этом случае значения $f(p+1), \ldots, f(p+k)$, такие, что

$$f(p+k) + P_1(p) f(p+k-1) + \ldots + P_k(p) f(p) \neq 0,$$

мы получим, очевидно, решение, имеющее конечные и определенные значения во всем промежутке $p < x < \infty$ и обращающиеся в бесконечность при $x = p$. Итак, мы получили решение, которое не представляется никакой линейной комбинацией решений линейно независимых и имеющих конечные значения при $x \geqslant 0$. Но, рассматривая промежуток $\infty > x \geqslant p + 1$, мы можем, полностью используя вышеизложенные рассуждения, построить систему линейно независимых решений при $x \geqslant p + 1$ и представить всякое другое решение, имеющее конечное и определенное значение при $x \geqslant p + 1$, в виде

$$f(x) = C_1 f_1(x) + \ldots + C_k f_k(x).$$

В случае, когда $P_k(x) \neq 0$ при $x \geqslant 0$, всякое решение, имеющее конечные и определенные значения при $x \geqslant p$, может быть продолжено и налево от p, т. е. имеет конечные и определенные значения и для $p > x \geqslant 0$.

5. Неоднородное линейное уравнение. Метод вариации постоянных. Мы уже знаем, что общее решение линейного неоднородного уравнения можно построить, если известно частное его решение и общее решение однородного уравнения. Займемся вопросом отыскания частных решений неоднородных уравнений, когда нам известны явно выраженные k линейно независимых решений как функций x. При этом, конечно, не надо забывать, что, задавая k начальных значений, мы вполне можем определить частное решение линейного уравнения k-го порядка с правой частью

$$f(x+k) + P_1(x) f(x+k-1) + \ldots + P_k(x) f(x) = Q(x) \quad (12)$$

последовательным вычислением, но найти явное и простое выражение этого решения в функции x таким способом, вообще говоря, нельзя.

Мы дадим способ нахождения частного решения вариацией произвольных постоянных в общем решении однородного уравнения. Способ этот принадлежит Лагранжу.

Итак, возьмем k линейно независимых решений $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ линейного уравнения

$$f(x+k) + P_1(x) f(x+k-1) + \ldots + P_k(x) f(x) = 0, \quad (13)$$

коэффициенты которого определенны и конечны для всякого целого $x \geqslant 0$ и относительно которого сделаем только одно допущение, а именно, что

$$P_k(x) \neq 0$$

для всех целых $x \geqslant 0$.

Пусть теперь нам надо найти частное решение неоднородного уравнения

$$f(x+k) + P_1(x) f(x+k-1) + \ldots + P_k(x) f(x) = Q(x), \quad (12)$$

в котором $Q(x)$, так же как и $P_i(x)$, определенно и конечно для всякого $x \geqslant 0$.

Общее решение уравнения без правой части, как мы уже знаем, имеет вид

$$\varphi(x) = C_1 f_1(x) + \ldots + C_k f_k(x), \tag{27}$$

где $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ — взятые нами линейно независимые решения, а $C_1, \ldots, C_k$ — произвольные постоянные. Будем теперь считать $C_1, \ldots, C_k$ функциями x и постараемся выбрать их так, чтобы $\varphi(x)$ оказалось частным решением неоднородного уравнения.

Выберем эти функции так, чтобы одновременно тождественно выполнялись k следующих соотношений:

$$\sum_{s=1}^{k} C_s(x+k) f_s(x+k) + P_1(x) \sum_{s=1}^{k} C_s(x+k-1) f_s(x+k-1) + \ldots$$
$$\ldots + P_k(x) \sum_{s=1}^{k} C_s(x) f_s(x) = Q(x),$$
$$\sum_{s=1}^{k} C_s(x+1) f_s(x+1) = \sum_{s=1}^{k} C_s(x) f_s(x+1),$$
$$\sum_{s=1}^{k} C_s(x+2) f_s(x+2) = \sum_{s=1}^{k} C_s(x) f_s(x+2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sum_{s=1}^{k} C_s(x+k-1) f_s(x+k-1) = \sum_{s=1}^{k} C_s(x) f_s(x+k-1).$$

Из последнего уравнения имеем также, что

$$\sum_{s=1}^{k} C_s(x+k) f_s(x+k) = \sum_{s=1}^{k} C_s f_s(x+k) + \sum_{s=1}^{k} \Delta C_s(x) f_s(x+k).$$

Первое уравнение этой системы легко упростить, пользуясь остальными.

Действительно, подставляя в первое уравнение правые части всех остальных k уравнений, мы будем иметь

$$\sum_{s=1}^{k} \Delta C_s(x) f_s(x+k) + \sum_{s=1}^{k} C_s(x) f_s(x+k) +$$
$$+ P_1(x) \sum_{s=1}^{k} C_s(x) f_s(x+k-1) + \ldots + P_k(x) \sum_{s=1}^{k} C_s(x) f_s(x) = Q(x),$$

или, меняя порядок суммирования, получаем

$$\sum_{s=1}^{k} \Delta C_s(x) f_s(x+k) + \sum_{s=1}^{k} C_s(x) [f_s(x+k) + P_1(x) f_s(x+k-1) + \dots$$
$$\dots + P_k(x) f_s(x)] = Q(x),$$

откуда и имеем окончательно, что

$$\sum_{s=1}^{k} \Delta C_s(x) f_s(x+k) = Q(x),$$

так как $f_1(x), \dots, f_k(x)$ суть частные решения однородного уравнения.

Беря это уравнение и $k-1$ уравнение, которое мы получим, если мы заменим в первом уравнении x на $x+1$ и вычтем из него второе, во втором x на $x+1$ и вычтем третье и т. д., и, добавив еще первое уравнение целиком, мы приходим к новой системе уравнений, полностью эквивалентной прежней:

$$\begin{aligned}
&\Delta C_1(x) f_1(x+1) + \Delta C_2(x) f_2(x+1) + \dots + \Delta C_k(x) f_k(x+1) = 0,\\
&\Delta C_1(x) f_1(x+2) + \Delta C_2(x) f_2(x+2) + \dots + \Delta C_k(x) f_k(x+2) = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\Delta C_1(x) f_1(x+k-1) + \Delta C_2(x) f_2(x+k-1) + \dots\\
&\qquad\qquad \dots + \Delta C_k(x) f_k(x+k-1) = 0,\\
&\Delta C_1(x) f_1(x+k) + \Delta C_2(x) f_2(x+k) + \dots + \Delta C_k(x) f_k(x+k) = Q(x).
\end{aligned}$$

Определителем этой системы служит

$$D[f_1(x+1), \dots, f_k(x+1)],$$

который для системы линейно независимых решений при условии $P_k(x) \neq 0$, $x \geqslant 0$, как уже было выяснено выше, всегда отличен от нуля, т. е. для $x \geqslant 0$

$$D[f_1(x), \dots, f_k(x)] \neq 0.$$

Значит, эта последняя система имеет решения при всяком $x \geqslant 0$.

Решая ее, мы получим, что

$$C_p(z) = \sum_{x=0}^{z-1} (-1)^{k+p} Q(x) \frac{D_p(x)}{D(x)}, \tag{29}$$

где

$$D(x) = \begin{vmatrix} f_1(x+1) & f_2(x+1) \dots f_k(x+1) \\ f_1(x+2) & f_2(x+2) \dots f_k(x+2) \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ f_1(x+k) & f_2(x+k) \dots f_k(x+k) \end{vmatrix},$$

а $D_p(x)$ получается из $D(x)$ вычеркиванием последней строки и p-го столбца.

Отсюда находим частное решение $\varphi(x)$ неоднородного уравнения,

$$\varphi(x) = C_1(x) f_1(x) + \ldots + C_k(x) f_k(x).$$

Введем в сумму, выражающую $C_p(x)$, новую переменную суммирования t и подставим выражения $C_p(x)$ в выражение для $\varphi(x)$. Тогда мы получаем окончательный вид частного решения $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \sum_{t=0}^{x-1} \frac{\begin{vmatrix} f_1(t+1) & f_2(t+1) & \ldots & f_k(t+1) \\ f_1(t+2) & f_2(t+2) & \ldots & f_k(t+2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1(t+k-1) & f_2(t+k-1) & \ldots & f_k(t+k-1) \\ f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_k(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1(t+1) & f_2(t+1) & \ldots & f_k(t+1) \\ f_1(t+2) & f_2(t+2) & \ldots & f_k(t+2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1(t+k) & f_2(t+k) & \ldots & t_k(t+k) \end{vmatrix}} Q(t). \quad (30)$$

6. Выражение многократной суммы через однократную. В качестве примера на этот способ отыскания частных решений уравнения с правой частью найдем выражение многократной суммы от некоторой функции $Q(x)$ через однократную.

Рассмотрим уравнение

$$\Delta^k f(x) = Q(x),$$

или, что то же самое:

$$f(x+k) - kf(x+k-1) + \ldots + (-1)^k f(x) = Q(x).$$

У этого уравнения $P_k(x) = (-1)^k$ и, значит, $P_k(x) \neq 0$. Далее, мы можем легко убедиться, что функции $1, x, x^2, \ldots, x^{k-1}$, которые являются частными решениями нашего однородного уравнения $\Delta^k f(x) = 0$, будут линейно независимыми, так как соотношение с постоянными коэффициентами $C_1 + C_2 x + \ldots + C_{h-1} x^{k-1} = 0$ есть уравнение самое большее $(k-1)$-й степени относительно x и не может иметь при любых постоянных $C_1, \ldots, C_k$, не равных нулю в совокупности, больше $k-1$ корней.

Мы уже знаем, что для k линейно независимых решений уравнения k-го порядка имеет место выражение

$$(-1)^{k(x+1)} D[f_1(x+1), \ldots, f_k(x+1)] = \prod_{t=0}^{x} P_k(t) D[f_1(0), \ldots, f_k(0)], \quad (28)$$

значит, в нашем случае

$$(-1)^{k(x+1)} D[1,\ x+1,\ldots,(x+1)^{k-1}] =$$

$$= (-1)^{k(x+1)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & \ldots & 2^{k-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & k-1 & \ldots & (k-1)^{k-1} \end{vmatrix}.$$

Совершенно так же, так как $1,\ x,\ldots,\ x^{k-2}$ будут линейно независимые решения уравнения $\Delta^{k-1} f(x) = 0$,

$$(-1)^{(k-1)(x+1)} D[1,\ x+1,\ldots,(x+1)^{k-2}] =$$

$$= (-1)^{(k-1)(x+1)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & k-2 & \ldots & (k-2)^{k-2} \end{vmatrix}.$$

Теперь мы можем записать частное решение нашего неоднородного уравнения

$$\varphi(x) = \sum_{t=0}^{x-1} \frac{\begin{vmatrix} 1 & t+1 & \ldots (t+1)^{k-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & t+k-1 & \ldots (t+k-1)^{k-1} \\ 1 & x & \ldots x^{k-1} \end{vmatrix}}{D[1,\ t+1,\ldots,(t+1)^{k-1}]} Q(t).$$

Но определитель, стоящий под знаком суммирования в числителе, есть многочлен относительно x и t, причем относительно x степени $k-1$, так как коэффициент при x^{k-1} в нем равен величине

$$D[1, t+1, \ldots, (t+1)^{k-2}],$$

отличной от нуля и не зависящей от x. Рассматривая этот многочлен как функцию x, мы видим, что он тождественно равен нулю по t для x, равных $t+1,\ t+2,\ldots,t+k-1$. Значит, он равен

$$u(t)(x-t-1)(x-t-2)\ldots(x-t-k+1),$$

где $u(t)$ есть также многочлен относительно t. Но коэффициент при x^{k-1} равен $D[1, t+1, \ldots, (t+1)^{k-2}]$, откуда следует, что наш определитель равен

$$\begin{vmatrix} 1 & t+1 & \ldots (t+1)^{k-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & t+k-1 & \ldots (t+k-1)^{k-1} \\ 1 & x & \ldots x^{k-1} \end{vmatrix} =$$

$$= D[1, \ldots, (t+1)^{k-2}](x-t-1)\ldots(x-t-k+1)$$

Но

$$\frac{D[1, t+1, \ldots, (t+1)^{k-2}]}{D[1, t+1, \ldots, (t+1)^{k-1}]} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & k-2 & (k-2)^2 & \ldots & (k-2)^{k-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & k-1 & (k-1)^2 & \ldots & (k-1)^{k-1} \end{vmatrix}} = \frac{1}{(k-1)!},$$

и вставляя в выражение для $\varphi(x)$ все найденные значения определителей и их отношений, мы получаем окончательно

$$\varphi(x) = \sum_{t=0}^{x-1} \frac{(x-t-1)(x-t-2)\ldots(x-t-k+1)}{(k-1)!} Q(t).$$

Общее решение нашего неоднородного уравнения будет:

$$f(x) = \sum_{t=0}^{x-1} \frac{(x-t-1)\ldots(x-t-k+1)}{(k-1)!} Q(t) + \\ + C_1 + C_2 x + \ldots + C_k x^{k-1},$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_k$ — постоянные. Задавая начальные значения $f(0) = f(1) = f(2) = \ldots = f(k-1) = 0$, мы легко убедимся, что этими начальными значениями определится наше частное решение $\varphi(x)$; с другой стороны, этими же начальными значениями определяется и функция

$$\sum_{t_k=0}^{x-1} \sum_{t_{k-1}=0}^{t_k-1} \ldots \sum_{t_1=0}^{t_2-1} Q \quad t_1),$$

которая также служит частным решением нашего уравнения. Но задание частных значений единственным образом определяет решение. Значит, мы получаем тождество

$$\sum_{t_k=0}^{x-1} \sum_{t_{k-1}=0}^{t_k-1} \ldots \sum_{t_1=0}^{t_2-1} Q(t_1) = \sum_{t=0}^{x-1} \frac{(x-t-1)\ldots(x-t-k+1)}{(k-1)!} Q(t), \quad (31)$$

дающее выражение k-кратной суммы через однократную.

§ 4. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Однородное линейное уравнение. Характеристическое уравнение. Перейдем к рассмотрению линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Это — наиболее важный частный случай общей теории. В этом случае можно непосредственно найти

нужное число линейно независимых решений, а к этому, как мы видели, и сводится задача решения линейного разностного уравнения. Итак, пусть дано однородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$f(x+k)+a_1f(x+k-1)+a_2f(x+k-2)+\ldots+a_kf(x)=0. \quad (32)$$

Будем искать решение в виде

$$f(x)=\lambda^x, \quad (33)$$

где число λ подлежит определению. Подставляя в уравнение (32) функцию $f(x)$, взятую из соотношения (33), получим уравнение

$$\lambda^{x+k}+a_1\lambda^{x+k-1}+a_2\lambda^{x+k-2}+\ldots+a_k\lambda^x=0,$$

или

$$\lambda^x(\lambda^k+a_1\lambda^{k-1}+a_2\lambda^{k-2}+\ldots+a_k)=0,$$

или, наконец,

$$\lambda^k+a_1\lambda^{k-1}+a_2\lambda^{k-2}+\ldots+a_k=0, \quad (34)$$

так как

$$\lambda^x\neq 0.$$

Уравнение (34) будем называть характеристическим уравнением для конечно-разностного уравнения (32). Корни уравнения (34), естественно, могут быть как однократные, так и многократные. Рассмотрим все возможные случаи.

Пусть корни уравнения (34) — все простые. В этом случае можно указать k различных решений уравнения (32)

$$\lambda_1^x,\ \lambda_2^x,\ \lambda_3^x,\ldots,\lambda_k^x, \quad (35)$$

где λ_i суть корни характеристического уравнения. Можно утверждать, что в этом случае k решений (35) линейно независимы. В самом деле, составив из этих решений определитель $D[\lambda_1^x,\ldots,\lambda_k^x]$, получим

$$D=D[\lambda_1^x,\ldots,\lambda_k^x]=\begin{vmatrix}\lambda_1^x & \lambda_2^x & \lambda_3^x & \ldots\lambda_k^x\\ \lambda_1^{x+1} & \lambda_2^{x+1} & \lambda_3^{x+1} & \ldots\lambda_k^{x+1}\\ \lambda_1^{x+2} & \lambda_2^{x+2} & \lambda_3^{x+2} & \ldots\lambda_k^{x+2}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \lambda_1^{x+k-1} & \lambda_2^{x+k-1} & \lambda_3^{x+k-1} & \ldots\lambda_k^{x+k-1}\end{vmatrix}.$$

Вынося из каждого столбца номера i за знак определителя λ_i^x,

получим

$$D = (\lambda_1\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_k)^x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \ldots \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \ldots \lambda_k^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \lambda_3^{k-1} & \ldots \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix}. \tag{36}$$

Не нарушая общности, можно считать каждое из чисел λ_i отличным от нуля, или, что то же самое, отличным от нуля произведение

$$(-1)^k\lambda_1\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_k = a_k.$$

В самом деле, если бы было $a_k = 0$ (но $a_{k-1} \neq 0$), то наше уравнение имело бы следующий вид:

$$f(x+k) + a_1 f(x+k-1) + a_2 f(x+k-2) + \ldots + a_{k-1} f(x+1) = 0$$

и, следовательно, было бы порядка $k-1$, так как, не нарушая общности, можно было бы x заменить через $x-1$ и перейти к уравнению

$$f(x+k-1) + a_1 f(x+k-2) + a_2 f(x+k-3) + \ldots$$
$$\ldots + a_{k-1} f(x) = 0.$$

Итак, если мы имеем разностное уравнение типа (32) порядка k, то мы должны считать свободный член a_k этого уравнения отличным от нуля, а следовательно, отличными от нуля и все корни характеристического уравнения (34).

Возвращаясь к определению D, мы видим, что первый сомножитель, т. е.

$$(\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k)^x,$$

тождественно в нуль не обращается, ибо мы указали, что можно считать $a_k \neq 0$. Таким образом, вопрос сводится к исследованию величины определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \ldots \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \ldots \lambda_k^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \lambda_3^{k-1} & \ldots \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix}. \tag{36'}$$

Последний же определитель есть определитель Вандермонда и, как известно, равен произведению

$$\prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j),$$

распространенному на все значения $i > j$ из ряда

$$1, 2, 3, \ldots, k.$$

Так как все λ_i по предположению различны между собой, то ни одна из таких разностей, а следовательно, и определитель (36′) в нуль не обращаются. Поэтому решения (35) будут действительно линейно независимы, и общее решение уравнения (32) изобразится следующим образом:

$$f(x) = C_1\lambda_1^x + C_2\lambda_2^x + C_3\lambda_3^x + \ldots + C_k\lambda_k^x. \tag{37}$$

Если среди корней λ_i есть комплексные и все корни λ_i различны, но мы все же желаем определить действительные решения, то предполагая числа C_i в соотношении (37) комплексными и вспоминая, что комплексные корни встретятся в сопряженных парах (a_i — действительны), мы сумму

$$C_p\lambda_p^x + C_q\lambda_q^x,$$

где

$$\lambda_p = \rho(\cos\omega + i\sin\omega),$$
$$\lambda_q = \rho(\cos\omega - i\sin\omega),$$

сможем преобразовать к виду

$$a_p\rho^x\cos\omega x + a_q\rho^x\sin\omega x$$

и считать a_p и a_q действительными. Таким образом, общее решение составится в этом случае в виде линейной комбинации из выражений вида

$$\lambda^x,\ \rho^x\cos\omega x,\ \rho^x\sin\omega x.$$

Таким образом, в случае, если корни характеристического уравнения простые, решение находится просто.

2. Случай кратных корней. Рассмотрим случай кратных корней. Пусть у нас имеется корень λ_1 кратности s. В этом случае из ряда (35) нельзя получить полного числа линейно независимых решений ($s > 1$); по крайней мере, одно из решений этого ряда будет тождественно совпадать с некоторыми другими и, следовательно, отпадает.

Нужно поэтому как-то использовать кратность корня λ_1, построив новые решения, не совпадающие с найденными в ряде (35) и пополняющие число недостающих решений из-за кратности корня λ_1. Поступим так же, как и в теории дифференциальных уравнений. Мы сначала построим решения уравнения (32), дополняющие их число (ввиду кратности корней) до полного числа k, а затем докажем их линейную независимость.

Будем искать новые решения в виде

$$f(x) = \varphi(x)\lambda^x,$$

где $\varphi(x)$ — неизвестная функция; ее мы определим несколько ниже. Подставляя $\varphi(x)\lambda^x$ вместо $f(x)$ в уравнение (32), приведем его к виду

$$\varphi(x+k)\lambda^{x+k}+a_1\varphi(x+k-1)\lambda^{x+k-1}+a_2\varphi(x+k-2)\lambda^{x+k-2}+\ldots$$
$$\ldots+a_k\varphi(x)\lambda^x=0,$$

или (сокращая на $\lambda^x\neq 0$)

$$\varphi(x+k)\lambda^k+a_1\varphi(x+k-1)\lambda^{k-1}+a_2\varphi(x+k-2)\lambda^{k-2}+\ldots$$
$$\ldots+a_k\varphi(x)=0. \tag{38}$$

Для того чтобы можно было использовать кратность корня, мы преобразуем последнее уравнение, заменив $\varphi(x+k)$, $\varphi(x+k-1)$, $\varphi(x+k-2)$, ... разложением по формуле Ньютона через конечные разности:

$$\varphi(x+k)=\varphi(x)+k\Delta\varphi(x)+\frac{k(k-1)}{1\cdot 2}\Delta^2\varphi(x)+\ldots+\Delta^k\varphi(x),$$

$$\varphi(x+k-1)=\varphi(x)+(k-1)\Delta\varphi(x)+$$
$$+\frac{(k-1)(k-2)}{1\cdot 2}\Delta^2\varphi(x)+\ldots+\Delta^{k-1}\varphi(x),$$

$$\varphi(x+k-2)=\varphi(x)+(k-2)\Delta\varphi(x)+$$
$$+\frac{(k-2)(k-3)}{1\cdot 2}\Delta^2\varphi(x)+\ldots+\Delta^{k-2}\varphi(x), \tag{39}$$

. . . . . .

$$\varphi(x+2)=\varphi(x)+2\Delta\varphi(x)+\Delta^2\varphi(x),$$
$$\varphi(x+1)=\varphi(x)+\Delta\varphi(x),$$
$$\varphi(x)=\varphi(x).$$

Умножим первое из написанных тождеств на λ^k, второе на $a_1\lambda^{k-1}$, третье на $a_2\lambda^{k-2}$ и т. д. до последнего, которое, следовательно, умножим на a_k. Затем полученные равенства сложим почленно. Очевидно, в левой части полученного тождества будет стоять левая часть уравнения (38). Поэтому уравнение (38) будет эквивалентно тому уравнению, которое получится, если мы правую часть полученного таким образом тождества приравниваем нулю. Проделав указанные преобразования и замечая, что $(i+1)$-й столбец соотношений (39) при почленном сложении дает выражение, равное

$$C_k^i\lambda^k+C_{k-1}^i a_1\lambda^{k-1}+C_{k-2}^i a_2\lambda^{k-2}+\ldots+a_{k-i}\lambda^i=$$
$$=\lambda^i(C_k^i\lambda^{k-i}+C_{k-1}^i a_1\lambda^{k-i-1}+C_{k-2}^i a_2\lambda^{-i-2}+\ldots+a_{k-i})=$$
$$=\frac{\lambda^i}{i!}[k(k-1)\ldots(k-i+1)\lambda^{k-i}+$$
$$+(k-1)(k-2)\ldots(k-i)\lambda^{k-i-1}a_1+\ldots+i!\,a_{k-i}]=\frac{\lambda^i}{i!}P^{(i)}(\lambda),$$

где через $P(\lambda)$ обозначена левая часть характеристического уравнения, мы получим уравнение

$$P(\lambda)\varphi(x)+\lambda P'(\lambda)\Delta\varphi(x)+\frac{\lambda^2}{2!}P''(\lambda)\Delta^2\varphi(x)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\lambda^{s-1}}{(s-1)!}P^{(s-1)}(\lambda)\Delta^{s-1}\varphi(x)+\frac{\lambda^s}{s!}P^{(s)}(\lambda)\Delta^s\varphi(x)+$$

$$+\frac{\lambda^{s+1}}{(s+1)!}P^{(s+1)}(\lambda)\Delta^{s+1}\varphi(x)+\ldots+\frac{\lambda^k}{k!}P^{(k)}(\lambda)\Delta^k\varphi(x)=0, \quad (38')$$

равносильное уравнению (38). Этот вид уравнения удобен тем, что он, как мы сейчас увидим, легко позволяет использовать кратность корней характеристического уравнения. В самом деле, пусть $\lambda=\lambda_1$ есть корень кратности s, тогда

$$P(\lambda_1)=P'(\lambda_1)=P''(\lambda_1)=\ldots=P^{(s-1)}(\lambda_1)=0,$$

но

$$P^{(s)}(\lambda_1)\neq 0,$$

и уравнение (38′) обращается в следующее:

$$\frac{\lambda_1^s}{s!}P^{(s)}(\lambda_1)\Delta^s\varphi(x)+\frac{\lambda_1^{s+1}}{(s+1)!}P^{(s+1)}(\lambda_1)\Delta^{s+1}\varphi(x)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\lambda_1^k}{k!}P^{(k)}(\lambda_1)\Delta^k\varphi(x)=0. \quad (40)$$

Сразу видно, что ему можно удовлетворить, выбирая в качестве функции $\varphi(x)$ любой многочлен степени ниже s.

В частности, любая из степеней x:

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ldots,x^{s-1},$$

будет удовлетворять написанному уравнению, следовательно, и уравнению (38). Вспоминая, что произведение $\varphi(x)\lambda^x$ дает решение уравнения (32), мы можем утверждать, что если λ есть корень характеристического уравнения кратности s, то функции

$$\lambda_1^x,\ x\lambda_1^x,\ x^2\lambda_1^x,\ x^3\lambda_1^x,\ldots,x^{s-1}\lambda_1^x \quad (41)$$

будут решениями уравнения (32).

3. Общее решение и линейная независимость частных решений. Если характеристическое уравнение, кроме корня λ_1 кратности s, имеет еще корни кратности выше единицы, то можно также указать функции вида (41) соответственно числу, выражающему кратность корня, которые являются решениями уравнения (32). Так, в случае кратных корней удается восстановить число решений до порядка уравнения. Остается только показать, что эти решения независимы. Тогда общее решение уравнения (32)

нам удастся найти и в случае, если среди корней характеристического уравнения встречаются кратные; всякому корню $\lambda = \lambda_i$ кратности s будет соответствовать сумма вида

$$(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_{s-1} x^{s-1}) \lambda_i^x,$$

а общее решение составится из сумм подобного типа, причем в случае, если некоторый корень λ_p — простой, соответствующее слагаемое будет, как и выше, вида

$$C_p \lambda_p^x.$$

Итак, покажем, что найденные нами решения в случае кратных корней будут линейно независимы.

Положим, что характеристическое уравнение (34) имеет p различных корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ кратностей соответственно $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_p$. Очевидно, что $s_1 + \ldots + s_p = k$.

Тогда нам надо доказать невозможность соотношения

$$C_{11}\lambda_1^x + \ldots + C_{s_1 1} x^{s_1 - 1} \lambda_1^x + \ldots + C_{1p}\lambda_p^x + \ldots + C_{s_p p} x^{s_p - 1} \lambda_p^x \equiv 0 \quad (42)$$

при постоянных C_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, s_j$; $j = 1, \ldots, p$, отличных от нуля в совокупности.

Конечно, это обстоятельство можно было бы выяснить и из непосредственного рассмотрения определителя[1]) D этой системы:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix},$$

где

$$a_{im} = (x + i - 1)^l \cdot \lambda_q^x,$$

q и l определяются из условий

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_q \leqslant m < s_1 + s_2 + \ldots + s_{q+1},$$
$$l = m - s_1 - s_2 - \ldots - s_q;$$

здесь этот путь доказательства линейной независимости наших функций представляет некоторые технические трудности. Поэтому мы докажем линейную независимость наших функций другим путем.

Без нарушения общности можно предположить, что числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ расположены в порядке убывания модулей, т. е.

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_p|,$$

---

[1]) В § 4 главы I этот определитель уже встречался, и там приводилось его представление с помощью определителей Вандермонда. Здесь приводится доказательство необращения в нуль этого определителя без его вычисления.

а числа, равные по модулю, расположены в порядке убывания их кратностей, иначе говоря, если

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \ldots = |\lambda_q| \text{ и } |\lambda_q| > |\lambda_{q+1}|,$$

то

$$s_1 \geqslant s_2 \geqslant \ldots \geqslant s_q.$$

Допустим теперь, что в соотношении (42) все C_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, s;$ $j = 1, 2, \ldots, p)$ отличны от нуля. Если бы в соотношении (42), которое мы предполагаем выполняющимся, некоторые из C_{ij} были нулями, то от этого обстоятельства ни возможность расположения действительно присутствующих в соотношении функций $x^i\lambda_j^x$ в только что указанном порядке, ни все дальнейшие рассуждения не изменились бы. Поэтому также без нарушения общности рассуждения мы допускаем существование соотношения (42) при постоянных $C_{ij} \neq 0$ $(i = 1, \ldots, s_j,\ j = 1, \ldots, p)$.

Отсюда следует, что так как чисел C_{ij} — конечное число, то существуют два числа M_1 и M_2, положительные и такие, что

$$0 < M_1 \leqslant |C_{ij}| \leqslant M_2.$$

Вернемся теперь к нашим частным решениям Допустим, что

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \ldots = |\lambda_q| = \rho,\quad |\lambda_q| > |\lambda_{q+1}|,\quad q \leqslant p,$$

и что $s_1 = s_2 = \ldots = s_m = s$, $s_m > s_{m+1}$, $m \leqslant q$. Тогда функции $x^{s_1-1}\lambda_1^x$, $x^{s_2-1}\lambda_2^x, \ldots, x^{s_m-1}\lambda_m^x$ будут наиболее быстро растущими или медленно убывающими в ряде наших функций:

$$\lambda_1^x,\ x\lambda_1^x, \ldots, x^{s_1-1}\lambda_1^x, \ldots, \lambda_p^x,\ x\lambda_p^x, \ldots, x^{s_p-1}\lambda_p^x.$$

Выделив эти функции. мы можем для всякой другой функции, не принадлежащей к нашим m функциям, установить при больших x неравенство

$$\frac{|x^i\lambda_j^x|}{x^{s-1}\rho^x} < \frac{N}{x},\quad x \geqslant x_0,$$

где N — постоянная, так как или $\left|\frac{\lambda_j}{\rho}\right| < 1$, или, если $|\lambda_j| = \rho$, то $s - 1 > i$.

Соотношение (42) может быть переписано теперь в виде

$$C_{s_1 1}x^{s_1-1}\lambda_1^x + \ldots + C_{s_m m}x^{s_m-1}\lambda_m^x = -\left(\sum{}' C_{ij}x^{i-1}\lambda_j^x\right), \qquad (42')$$

где знак $\sum'$ обозначает сумму, стоящую в левой части тождества (42) без выделенных нами функций наибольшего относительного роста. Так как $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \ldots = |\lambda_m| = \rho$, то

$$\lambda_1 = \rho e^{i\varphi_1},\quad \lambda_2 = \rho e^{i\varphi_2}, \ldots, \lambda_m = \rho e^{i\varphi_m},$$

и все числа $e^{i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_m}$ должны быть между собой различны, так как различны между собой все числа

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_m.$$

Разделив теперь обе части тождества (42′) на $x^{s-1}\rho^x$ и принимая во внимание ранее установленные неравенства, мы получим верное при $x \geqslant x_0$ неравенство

$$|C_{s_1}e^{i\varphi_1 x} + C_{s_2}e^{i\varphi_2 x} + \ldots + C_{s_m}e^{i\varphi_m x}| < \frac{NM_2k}{x}.$$

Рассмотрим теперь определитель

$$D(x) = \begin{vmatrix} e^{i\varphi_1 x} & e^{i\varphi_2 x} & \ldots & e^{i\varphi_m x} \\ e^{i\varphi_1(x+1)} & e^{i\varphi_2(x+1)} & \ldots & e^{i\varphi_m(x+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e^{i\varphi_1(x+m-1)} & e^{i\varphi_2(x+m-1)} & \ldots & e^{i\varphi_m(x+m-1)} \end{vmatrix}.$$

Вынося в первом столбце $e^{i\varphi_1 x}$, во втором $e^{i\varphi_2 x}$ и, наконец, в m-м $e^{i\varphi_m x}$, мы получим

$$D(x) = e^{i\varphi_1 x}e^{i\varphi_2 x}\ldots e^{i\varphi_m x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ e^{i\varphi_1} & e^{i\varphi_2} & \ldots & e^{i\varphi_m} \\ e^{i\varphi_1(m-1)} & e^{i\varphi_2(m-1)} & \ldots & e^{i\varphi_m(m-1)} \end{vmatrix}.$$

Но так как x — действительное число, то

$$|e^{i\varphi_1 x}| = |e^{i\varphi_2 x}| = \ldots = |e^{i\varphi_m x}| = 1,$$

и значит,

$$|D(x)| = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ e^{i\varphi_1} & e^{i\varphi_2} & \ldots & e^{i\varphi_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e^{i\varphi_1(m-1)} & e^{i\varphi_2(m-1)} & \ldots & e^{i\varphi_m(m-1)} \end{matrix} \right\| = \prod_{r>t} |e^{i\varphi_r} - e^{i\varphi_t}| > 0,$$

так как все $e^{i\varphi_r}$, $r = 1, \ldots, m$, различны между собой. Итак, $|D(x)|$ не зависит от x и больше нуля. С другой стороны, по основному свойству определителей имеем равенство

$$C_{s_1}D(x) = \begin{vmatrix} A_1 & e^{i\varphi_2 x} & \ldots & e^{i\varphi_m x} \\ A_2 & e^{i\varphi_2(x+1)} & \ldots & e^{i\varphi_m(x+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_m & e^{i\varphi_2(x+m-1)} & \ldots & e^{i\varphi_m(x+m-1)} \end{vmatrix},$$

где

$$A_k = C_{s_1}e^{i\varphi_1(x+k-1)} + \ldots + C_{s_m}e^{i\varphi_m(x+k-1)}.$$

Модули членов первого столбца этого определителя меньше, чем $\frac{NM_2k}{x}$ при $x \geqslant x_0$, а модули всех остальных членов его равны единице. Разложив этот определитель по элементам первого столбца и пользуясь тем обстоятельством, что модуль определителя порядка $m-1$, если модули его элементов не превышают единицу, не может быть больше $(m-1)!$, мы получим неравенство

$$|C_{s_1}||D(x)| < \frac{NM_2km!}{x}, \qquad x \geqslant x_0.$$

Так как по предположению $|C_{s_1}| > 0$, то отсюда непосредственно следует, что $\lim\limits_{x\to\infty}|D(x)| = 0$. Но $|D(x)|$ не зависит от x, значит, $D(x) = 0$. Мы получили противоречие, так как, с одной стороны, $D(x) \neq 0$, а с другой, $D(x) = 0$. Итак, мы доказали, что соотношение (42) невозможно. Важно отметить невозможность этого соотношения для всех значений x, а не только для x, пробегающего числа натурального ряда $x = 1, 2, 3, \ldots$, т. е. для x дискретно изменяющегося.

4. Решение неоднородного линейного уравнения. Переходя к уравнениям с правой частью, можно для их решения воспользоваться методом вариации произвольных постоянных, но в простейших случаях частные решения их можно подбирать непосредственно, исходя из вида правой части.

Например, обозначив правую часть уравнения с постоянными коэффициентами через $Q(x)$, предположим, что $Q(x)$ — многочлен степени n. Допустим, что нуль есть s-кратный корень характеристического уравнения. Тогда частное решение нужно искать в форме

$$f^*(x) = A_0x^s + A_1x^{s+1} + \ldots + A_nx^{n+s}$$

и, подставив в уравнение

$$f(x+k) + a_1f(x+k-1) + \ldots + a_nf(x) = \\ = Q(x) = C_0 + C_1x + \ldots + C_nx^n,$$

найти неопределенные коэффициенты $A_0, \ldots, A_n$. Более общо, если $Q(x) = P(x)e^{\alpha x}$, где $P(x)$ — многочлен n-й степени, а α — s-кратный корень характеристического уравнения

$$\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_k = 0,$$

то решение нужно искать в форме

$$f^*(x) = (A_0x^s + \ldots + A_nx^{s+n})e^{\alpha x}$$

и, подставив $f^*(x)$ в наше уравнение, определить коэффициенты $A_0, \ldots, A_n$, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x Если, наконец, правая часть состоит из сумм выражений вида

ранее разобранного, то надо искать частное решение для каждого члена суммы в отдельности.

5. **Примеры**. 1. Пусть требуется решить уравнение

$$f(x+4)+2f(x+3)+3f(x+2)+2f(x+1)+f(x)=0$$

при начальных условиях

$$f(0)=f(1)=f(3)=0,\ f(2)=-1,$$

а также пусть требуется найти $f(100)$ в полученном решении.

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^4+2\lambda^3+3\lambda^2+2\lambda+1=0,$$

или

$$(\lambda^2+\lambda+1)^2=0,$$

или

$$\left(\lambda-\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2\left(\lambda-\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2=0;$$

его корни:

$$\lambda_1=\lambda_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3},\quad \lambda_3=\lambda_4=\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3};$$

поэтому общее решение $f(x)$ изобразится в виде

$$f(x)=(C_1'+C_2'x)\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^x+$$
$$+(C_3'+C_4'x)\left(\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^x=$$
$$=(C_1+C_2x)\cos\frac{2\pi x}{3}+(C_3+C_4x)\sin\frac{2\pi x}{3},$$

где $C_i\,(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ — новые произвольные постоянные.

Воспользовавшись начальными условиями, составляем уравнения для определения этих постоянных:

$$f(0)=C_1=0,$$
$$f(1)=(C_1+C_2)\cos\frac{2\pi}{3}+(C_3+C_4)\sin\frac{2\pi}{3}=0,$$
$$f(3)=C_1+3C_2=0,$$
$$f(2)=(C_1+2C_2)\cos\frac{4\pi}{3}+(C_3+2C_4)\sin\frac{4\pi}{3}=-1,$$

откуда

$$C_1=C_2=0,\quad C_3=-C_4=-\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{-2}{\sqrt{3}}.$$

Итак,

$$f(x)=\frac{2(x-1)}{\sqrt{3}}\sin\frac{2\pi x}{3}. \qquad (\alpha)$$

В частности,

$$f(100) = \frac{198}{\sqrt{3}} \sin \frac{2\pi}{3} = 99.$$

Решение (α) может быть записано и следующими тремя простыми формулами: при

$$x \equiv 0 \pmod 3,$$

очевидно,

$$f(x) = 0; \tag{α'}$$

при

$$x \equiv 1 \pmod 3$$

будет

$$f(x) = x - 1 \tag{α''}$$

и, наконец, при

$$x \equiv -1 \pmod 3,$$

$$f(x) = 1 - x. \tag{α'''}$$

Положим для поверки $x = 100$, тогда, так как $100 = 1 \pmod 3$, мы должны воспользоваться формулой (α''), которая сразу дает

$$f(100) = 100 - 1 = 99,$$

что мы уже ранее и имели.

2. Рассмотрим последовательность чисел, начинающихся с нуля и единицы, в которой каждый последующий член равен сумме двух непосредственно предшествующих ему предыдущих: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ... (числа Фибоначчи). Найти выражение общего члена последовательности.

Решение. Согласно условию задача сводится к решению конечно-разностного линейного уравнения

$$f(x+2) = f(x+1) + f(x)$$

с постоянными коэффициентами при начальных условиях $f(0) = 0$, $f(1) = 1$; $f(x)$ обозначает число Фибоначчи номера x.

Составляя характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

находим его корни

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

так что

$$f(x) = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x.$$

Постоянные C_1 и C_2 определятся из начальных условий, т. е. из уравнений

$$C_1 + C_2 = 0, \quad (C_1 + C_2) + \sqrt{5}(C_1 - C_2) = 2,$$

решая которые найдем

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

и следовательно,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x.$$

Так как предел второго члена при $x \to \infty$ равен нулю, то отсюда, между прочим, следует, что числа Фибоначчи растут, как члены геометрической прогрессии $\left(\text{со знаменателем } \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

3 [1]). Дано k чисел:

$$f(0),\ f(1),\ f(2), \ldots, f(k-1).$$

Составляем бесконечную последовательность:

$$f(k) = \frac{f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(k-1)}{k},$$

$$f(k+1) = \frac{f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(k)}{k},$$

$$f(k+2) = \frac{f(2) + f(3) + f(4) + \ldots + f(k+1)}{k},$$

. . . . . .

Найти

$$\lim_{x \to \infty} f(x), \text{ где } x \text{ — целое.}$$

Решение. Напишем соотношение, которому по условию должна удовлетворять $f(x)$:

$$f(x+k) = \frac{f(x) + f(x+1) + (x+2) + \ldots + f(x+k-1)}{k}. \qquad (\alpha)$$

Написанное соотношение есть линейное уравнение. Если мы его решим, т. е. найдем выражение для $f(x)$, то совершить предельный переход будет несложно. Разумеется, мы из решений уравнения (α) должны выбрать удовлетворяющее начальным условиям. Итак, составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^k - \frac{1}{k}(\lambda^{k-1} + \lambda^{k-2} + \lambda^{k-3} + \ldots + 1) = 0.$$

---

[1]) Этот пример, как и пример 1, заимствован из курса Маркова «Исчисление конечных разностей».

Нетрудно видеть, что

$$\lambda_1 = 1$$

есть один из корней этого уравнения. Все остальные корни

$$\lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4, \ldots, \lambda_k,$$

как можно показать, будут различны и по модулю меньшими единицы:

$$|\lambda_i| < 1, \quad i = 2,\ 3,\ 4, \ldots, k. \tag{β}$$

Поэтому общее решение $f(x)$ уравнения (α) будет

$$f(x) = C_1 + C_2\lambda_2^x + C_3\lambda_3^x + C_4\lambda_4^x + \ldots + C_k\lambda_k^x. \tag{β'}$$

Постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_k$ определяются из уравнений, которые получатся, если мы запишем, что найденное решение $f(x)$ удовлетворяет начальным условиям:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 + C_2 + \ldots + C_k = f(0), \\ C_1 + C_2\lambda_2 + \ldots + C_k\lambda_k = f(1), \\ C_1 + C_2\lambda_2^2 + \ldots + C_k\lambda_k^2 = f(2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 + C_2\lambda_2^{k-1} + \ldots + C_k\lambda_k^{k-1} = f(k-1). \end{array}\right\} \tag{γ}$$

Эта система совместна, ибо все корни характеристического уравнения простые. Предполагая, что в найденном решении C_1, $C_2, \ldots, C_k$ имеют значения, найденные из написанной системы, и принимая во внимание условие (β'), получим

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = C_1.$$

Итак, нужно найти C_1. Если мы будем непосредственно решать систему (γ), то выражение для C_1 получится через корни характеристического уравнения и будет несколько сложным. Проще поступить так: ясно, что C_1 из системы (γ) через начальные значения $f(0)$, $f(1)$, $f(2), \ldots, f(k-1)$ выражается линейно, т. е. в виде

$$C_1 = \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(1) + \alpha_2 f(2) + \ldots + \alpha_{k-1} f(k-1), \tag{δ}$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ выражаются только через корни λ_i характеристического уравнения и, следовательно, от

$$f(0),\ f(1),\ f(2), \ldots, f(k-1)$$

не зависят. Постоянные α_i можно определить следующим искусственным приемом. Начальными значениями у нас были произвольные числа $f(0)$, $f(1), \ldots, f(k-1)$. Этими начальными значе-

ниями функция $f(x)$ вполне определялась [равенство (β')]. Если мы теперь возьмем начальные значения

$$f(1),\ f(2),\ldots,f(k-1),\ f(k)=\frac{f(0)+f(1)+\ldots+f(k-1)}{k},$$

то мы получим опять решение нашего уравнения

$$\varphi(x)=C_1'+C_2'\lambda_2^x+\ldots+C_k'\lambda_k^x.$$

Так как $\varphi(x)=f(x+1)$, $x=0,\ 1,\ldots,k-1$, то легко можно получить, что

$$\varphi(x)\equiv f(x+1),$$

значит, $C_1'=C_1$. Но $\alpha_0,\ \alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1}$ в формуле (δ) не зависели от начальных значений $f(0),\ f(1),\ldots,f(k-1)$, значит, мы имеем равенства

$$C_1'=\alpha_0 f(0)+\ldots+\alpha_{k-1}f(x-1)$$

и

$$C_1'=C_1=\alpha_0 f(1)+\ldots+\alpha_{k-1}\frac{f(0)+\ldots+f(k-1)}{k}$$

с одними и теми же α_i, $i=0,\ldots,k-1$.

Таким образом, получаем равенство

$$\begin{aligned}\alpha_0 f(0)+\alpha_1 f(1)+\alpha_2 f(2)+\ldots+\alpha_{k-1}f(k-1)&=\\ =\alpha_0 f(1)+\alpha_1 f(2)+\alpha_2 f(3)+\ldots+\alpha_{k-2}f(k-1)&+\\ +\alpha_{k-1}\frac{f(0)+f(1)+f(2)+\ldots+f(k-1)}{k}&.\end{aligned}$$

Отсюда, так как α_i не зависит от начальных значений $f(x)$, получим

$$\alpha_0=\frac{\alpha_{k-1}}{k},$$

$$\alpha_1=\alpha_0+\frac{\alpha_{k-1}}{k}=2\alpha_0,$$

$$\alpha_2=\alpha_1+\frac{\alpha_{k-1}}{k}=3\alpha_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_{k-2}=\alpha_{k-3}+\frac{\alpha_{k-1}}{k}=(k-1)\alpha_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_{k-1}=\alpha_{k-2}+\frac{\alpha_{k-1}}{k}=k\alpha_0,$$

и следовательно,

$$C_1=\alpha_0[f(0)+2f(1)+3f(2)+\ldots+kf(k-1)].$$

Остается определить α_0. Для этого положим

$$f(0) = f(1) = f(2) = \ldots = f(k-1) = 1.$$

Тогда по смыслу образования нашей последовательности $f(x) = 1$, и следовательно,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = C_1 = 1,$$

поэтому

$$\alpha_0 = \frac{2}{k(k+1)},$$

и окончательно

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = C_1 = 2\frac{f(0) + 2f(1) + 3f(2) + \ldots + kf(k-1)}{k(k+1)}.$$

Для большей конкретности возьмем числовой пример

$$f(0) = 1, \ f(1) = 2 \qquad (k = 2),$$

тогда последовательность $f(x)$ будет

$$1, 2, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{13}{8}, \frac{27}{16}, \frac{53}{32}, \frac{107}{64}, \frac{213}{128}, \ldots,$$

а ее предел будет равен двум:

$$2\frac{1+4}{2(2+1)} = \frac{5}{3}.$$

4. Даны два целых числа a_0 и a_1, из которых $a_0 > a_1$. Последовательным делением a_0 на a_1, a_1 на первый остаток и т. д. находится общий наибольший делитель.

Требуется указать число, которое не превзойдет число операций последовательных делений, а при некоторых a_0 и a_1 будет ему равно.

Решение. Обозначая частное от деления a_0 на a_1 через d_1, а остаток через a_2, частное от деления a_1 на a_2 через d_2, а остаток через a_3 и т. д., получим систему равенств:

$$\begin{aligned}
a_0 &= a_1 d_1 + a_2,\\
a_1 &= a_2 d_2 + a_3,\\
a_2 &= a_3 d_3 + a_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
a_{m-3} &= a_{m-2} d_{m-2} + a_{m-1},\\
a_{m-2} &= a_{m-1} d_{m-1} + a_m,\\
a_{m-1} &= a_m d_m.
\end{aligned}$$

Совершенно очевидно, что наибольшее число операций m будет в том случае, когда все частные $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_{m-1}, d_m$ будут

единицами. Введем поэтому числа $y_0, y_1, \ldots, y_m$ при условиях

$$y_0 = 0,\ y_1 = 1,\ y_2 = 1,\ y_3 = 2, \ldots, y_k = y_{k-1} + y_{k-2}.$$

Совершенно очевидно, что при этом должны выполняться неравенства

$$a_{m+1} = y_0,\ a_m \geqslant y_1,\ a_{m-1} \geqslant y_2,\ a_{m-2} \geqslant y_3, \ldots$$
$$\ldots, a_3 \geqslant y_{m-2},\ a_2 \geqslant y_{m-1}, \ldots, a_1 \geqslant y_m.$$

Последнее из этих неравенств может служить для определения числа m, если только будет известно выражение y_m как функция m. Поэтому нам надо найти y_m.

Решим для этого уравнение

$$y_k = y_{k-1} + y_{k-2}$$

при начальных условиях $y_0 = 0$, $y_1 = 1$. Характеристическое уравнение для него будет

$$t^2 = t + 1$$

с корнями

$$t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Общее решение нашего уравнения будет поэтому

$$y_k = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k.$$

Константы мы найдем из условий $y_0 = 0$, $y_1 = 1$. Действительно, мы будем иметь

$$y_0 = C_1 + C_2 = 0; \quad y_1 = C_1\frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$$

или

$$C_1 + C_2 = 0; \quad C_1 + C_2 + \sqrt{5}(C_1 - C_2) = 2,$$

откуда

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Теперь мы можем написать окончательное выражение для y_m:

$$y_m = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m\right].$$

Так как $\left|\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m\right| < 1$,

$$y_m > \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m - 1,$$

таким образом,

$$a_1 + 1 > \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Логарифмируя это выражение, получаем

$$m < \frac{\lg(1+a_1) + \frac{1}{2}\lg 5}{\lg\frac{1+\sqrt{5}}{2}} < \frac{\lg[2,3(1+a_1)]}{\lg 1,6}.$$

Обозначив через p число цифр a_1 и приняв во внимание, что $\lg[2,3(1+a_1)] \approx p$, получим неравенство

$$m < 5p.$$

Это неравенство носит название теоремы Ламе (Lame).

Упражнения

1. Решить уравнение

$$\Delta^3 f(x) = 0$$

при начальных условиях

$$f(0) = f(1) = 0, \quad f(2) = 1.$$

Указание. Развернуть третью разность по формуле

$$\Delta^k f(x) = \sum_{p=0}^{p=k} (-1)^{k-p} C_k^p f(x+p).$$

2. Уравнение

$$f(x+4) - \frac{5}{2} f(x+3) + \frac{5}{2} f(x+1) - f(x) = 1$$

допускает частное решение $f(x) = -x$. Определить общее решение и $f(100)$, если начальные условия таковы:

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 11, \quad f(2) = -8, \quad f(3) = 6.$$

Ответ:

$$f(x) = 8(-1)^{x-1} + \frac{8}{2^x} - x; \quad f(100) = -108 + \frac{8}{2^{100}}.$$

3. Найти и решить линейное уравнение, которое получается, если коэффициенты разложения функции

$$\frac{1}{t^2+t+1}$$

определить из рекуррентного соотношения.

Указание. Положив

$$\frac{1}{t^2+t+1} = f(0) + f(1)t + f(2)t^2 + \ldots$$
$$\ldots + f(x)t^x + f(x+1)t^{x+1} + f(x+2)t^{x+2} + \ldots,$$

найдем

$$1 = (t^2+t+1)[f(0) + f(1)t + f(2)t^2 + \ldots$$
$$\ldots + f(x)t^x + f(x+1)t^{x+1} + f(x+2)t^{x+2} + \ldots],$$

откуда

$$\left.\begin{array}{r} f(0) = 1, \\ f(0) + f(1) = 0,\ f(1) = -1, \end{array}\right\} \text{начальные условия;}$$
$$f(x+2) + f(x+1) + f(x) = 0 \text{ — искомое линейное уравнение.}$$

§ 5. Теорема Пуанкаре

1. Постановка вопроса. Рассмотрим линейное уравнение порядка k с постоянными коэффициентами и без правой части

$$f(x+k) + a_1 f(x+k-1) + a_2 f(x+k-2) + \ldots + a_k f(x) = 0. \quad (32)$$

Пусть корни

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3, \ldots, \lambda_k \quad (43)$$

характеристического уравнения

$$\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + a_2\lambda^{k-2} + \ldots + a_k = 0 \quad (34)$$

различны между собой по модулю.

Обозначив модуль корня λ_i через ρ_i, можем положить, что корни λ_i расположены в последовательности убывающих модулей

$$\rho_1 > \rho_2 > \rho_3 > \ldots > \rho_k. \quad (44)$$

Так как корни характеристического уравнения (34) различны, то общее решение $f(x)$ уравнения (32) изобразится в виде

$$f(x) = C_1\lambda_1^x + C_2\lambda_2^x + C_3\lambda_3^x + \ldots + C_k\lambda_k^x. \quad (45)$$

Фиксируем определенное решение уравнения (32), иначе — дадим в соотношении (45) постоянным C_i некоторые определенные фиксированные значения. Пусть первое не обращающееся в нуль из чисел C_i будет C_p, т. е. $C_1 = C_2 = C_3 = \ldots = C_{p-1} = 0$, но $C_p \neq 0$; тогда можно показать, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \lambda_p,$$

где $f(x)$ есть рассматриваемое решение уравнения (32). В самом

деле,

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}=\frac{C_p\lambda_p^{x+1}+C_{p+1}\lambda_{p+1}^{x+1}+C_{p+2}\lambda_{p+2}^{x+1}+\ldots+C_k\lambda_k^{x+1}}{C_p\lambda_p^x+C_{p+1}\lambda_{p+1}^x+C_{p+2}\lambda_{p+2}^x+\ldots+C_k\lambda_k^x}=$$

$$=\frac{C_p\lambda_p+C_{p+1}\lambda_{p+1}\left(\frac{\lambda_{p+1}}{\lambda_p}\right)^x}{C_p+C_{p+1}\left(\frac{\lambda_{p+1}}{\lambda_p}\right)^x+C_{p+2}\left(\frac{\lambda_{p+2}}{\lambda_p}\right)^x+\ldots+C_k\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_p}\right)^x}+$$

$$+\frac{C_{p+2}\lambda_{p+2}\left(\frac{\lambda_{p+2}}{\lambda_p}\right)^x+\ldots+C_k\lambda_k\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_p}\right)^x}{C_p+C_{p+1}\left(\frac{\lambda_{p+1}}{\lambda_p}\right)^x+C_{p+2}\left(\frac{\lambda_{p+2}}{\lambda_p}\right)^x+\ldots+C_k\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_p}\right)^x}.$$

Если теперь перейти к пределу, предполагая, что $x\to\infty$, то в силу уравнения (44) пределы отношений

$$\left(\frac{\lambda_{p+1}}{\lambda_p}\right)^k,\quad\left(\frac{\lambda_{p+2}}{\lambda_p}\right)^x,\ldots,\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_p}\right)^x$$

будут равны нулю, и мы получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}=\lambda_p,$$

иначе говоря, имеем теорему: *если $f(x)$ есть какое угодно (нетривиальное) решение уравнения* (32), *то предел отношения $f(x+1)$ к $f(x)$ при x неограниченно возрастающем равен одному из корней характеристического уравнения, если только все эти корни различны по модулю* (какому именно, мы сказать определенно, не зная решения, не можем, можно только сказать, что этот корень соответствует тому номеру p, который первый слева не обращает в нуль число C_p рассматриваемого решения). Обобщение рассмотренной теоремы и составляет теорему Пуанкаре.

2. **Теорема Пуанкаре**. *Если для линейного однородного разностного уравнения*

$$f(x+k)+P_{k-1}(x)f(x+k-1)+$$
$$+P_{k-2}(x)f(x+k-2)+\ldots+P_0(x)f(x)=0 \quad (46)$$

существуют конечные пределы для переменных коэффициентов

$$P_i(x),\quad i=0,\ 1,\ 2,\ldots,k-1,$$

когда x неограниченно возрастает:

$$\lim_{x\to\infty}P_i(x)=a_i,\quad i=0,\ 1,\ 2,\ldots,k-1,$$

и если корни уравнения

$$\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + a_{k-2}\lambda^{k-2} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{47}$$

все различны по модулю, то, каково бы ни было частное решение $f(x)$ *уравнения* (46), *предел отношения* $f(x+1)$ *к* $f(x)$, *когда* x *неограниченно возрастает, равен одному из корней*

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3, \ldots, \lambda_k$$

уравнения (47), *т. е.*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \lambda_p.$$

Доказательство. Итак, пусть $f(x)$ есть какое-нибудь решение уравнения (46). Определим систему k функций

$$u_1(x),\ u_2(x),\ u_3(x), \ldots, u_k(x)$$

уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}
f(x) &= u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_k(x),\\
f(x+1) &= \lambda_1 u_1(x) + \lambda_2 u_2(x) + \lambda_3 u_3(x) + \ldots + \lambda_k u_k(x),\\
f(x+2) &= \lambda_1^2 u_1(x) + \lambda_2^2 u_2(x) + \lambda_3^2 u_3(x) + \ldots + \lambda_k^2 u_k(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f(x+k-1) &= \lambda_1^{k-1} u_1(x) + \lambda_2^{k-1} u_2(x) + \lambda_3^{k-1} u_3(x) + \ldots\\
&\qquad \ldots + \lambda_k^{k-1} u_k(x).
\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Определитель этой системы есть определитель Вандермонда, он в данном случае отличен от нуля, потому что мы предположили, что все корни уравнения (47) — простые. Значит, системой (48) единственным образом определяются все функции $u_i(x)$. Первое свойство функций $u_i(x)$ заключается в том, что ни для какого целого x эти функции одновременно в нуль не обращаются, так как если бы для некоторого $x = s$ (целое число) все функции $u_i(x)$ обращались в нуль, то было бы

$$f(s) = f(s+1) = f(s+2) = \ldots = f(s+k-1) = 0,$$

а значит, и

$$f(x) = 0$$

для любого целого x. Поэтому, если $f(x)$ — не тривиальное решение, функции $u_i(x)$ ни для какого целого s в нуль одновременно не обращаются. Перейдем теперь к решению системы (48) относительно функций u_i. Обозначим левую часть уравнения (47) через $\varphi(\lambda)$, тогда, очевидно, можно положить

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)(\lambda^{k-1} + q_{i,k-2}\lambda^{k-2} + q_{i,k-3}\lambda^{k-3} + \ldots$$
$$\ldots + q_{i,1}\lambda + q_{i,0}). \tag{49}$$

Букве q приписано два индекса потому, что, во-первых, соответствующий коэффициент зависит от выделенного линейного множителя, (т. е. от i) и, во-вторых, от того, при какой степени λ он находится. Раскрывая в правой части соотношения (49) скобки и сравнивая результат с выражением для $\varphi(\lambda)$ в виде

$$\varphi(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + a_{k-2}\lambda^{k-2} + \ldots + a_1\lambda + a_0,$$

получим следующий ряд рекуррентных соотношений, определяющих числа $q_{i,k}$:

$$\begin{aligned}
q_{i,k-2} - \lambda_i \qquad &= a_{k-1},\\
q_{i,k-3} - \lambda_i q_{i,k-2} &= a_{k-2},\\
q_{i,k-4} - \lambda_i q_{i,k-3} &= a_{k-3},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
q_{i,0} - \lambda_i q_{i,1} &= a_1,\\
\lambda_i q_{i,0} &= a_0,
\end{aligned}$$

или

$$q_{i,p-1} - \lambda_i q_{i,p} = a_p, \qquad p = 0,\ 1,\ 2, \ldots, k-1, \tag{50}$$

если считать $q_{i,-1} = 0$ и $q_{i,k-1} = 1$.

С помощью чисел $q_{i,p}$ система (48) может быть разрешена следующим образом: умножим первое из равенств на $q_{i,0}$, второе на $q_{i,1}$, третье на $q_{i,2}$ и т. д., предпоследнее на $q_{i,k-2}$, последнее на $q_{i,k-1}$ и сложим затем почленно написанные равенства, заменив одновременно x на $x+1$; тогда получим

$$\begin{aligned}
&f(x+k) + q_{i,k-2} f(x+k-1) + q_{i,k-3} f(x+k-2) + \ldots\\
&\qquad \ldots + q_{i,1} f(x+2) + q_{i,0} f(x+1) =\\
&= u_1(x+1)(\lambda_1^{k-1} + q_{i,k-2}\lambda_1^{k-2} + q_{i,k-3}\lambda_1^{k-3} + \ldots + q_{i,1}\lambda_1 + q_{i,0}) +\\
&+ u_2(x+1)(\lambda_2^{k-1} + q_{i,k-2}\lambda_2^{k-2} + q_{i,k-3}\lambda_1^{k-3} + \ldots + q_{i,1}\lambda_2 + q_{i,0}) +\\
&+ u_3(x+1)(\lambda_3^{k-1} + q_{i,k-2}\lambda_3^{k-2} + q_{i,k-3}\lambda_3^{k-3} + \ldots + q_{i,1}\lambda_3 + q_{i,0}) +\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ u_i(x+1)(\lambda_i^{k-1} + q_{i,k-2}\lambda_i^{k-2} + q_{i,k-3}\lambda_i^{k-3} + \ldots + q_{i,1}\lambda_i + q_{i,0}) +\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ u_k(x+1)(\lambda_k^{k-1} + q_{i,k-2}\lambda_k^{k-2} + q_{i,k-3}\lambda_k^{k-3} + \ldots + q_{i,1}\lambda_k + q_{i,0}).
\end{aligned} \tag{51}$$

Каждое из выражений, стоящее в скобках, на которое умножаются

$$u_1(x+1),\ u_2(x+1),\ u_3(x+1), \ldots, u_k(x+1),$$

кроме $u_i(x+1)$, равно нулю, потому что каждая из таких скобок

$$\lambda_m^{k-1} + q_{i,\,k-2}\lambda_m^{k-2} + q_{i,\,k-3}\lambda_m^{k-3} + \ldots + q_{i,\,1}\lambda_m + q_{i,\,0} \qquad (m \neq i)$$

может быть представлена на основании соотношения (49) в виде

$$\frac{\varphi(\lambda_m)}{\lambda_m - \lambda_i}.$$

Это отношение обращается в нуль, потому что

$$\varphi(\lambda_m) = 0, \quad \text{а } \lambda_m - \lambda_i \neq 0 \qquad (i \neq m)$$

При $i = m$ соответствующая скобка есть

$$\lambda_i^{k-1} + q_{i,\,k-2}\lambda_i^{k-2} + q_{i,\,k-3}\lambda_i^{k-3} + \ldots + q_{i,\,1}\lambda_i + q_{i,\,0},$$

и она равна

$$\varphi'(\lambda_i),$$

что, очевидно, вытекает из равенства (49), если, полагая $\lambda \neq \lambda_i$, разделить на $\lambda - \lambda_i$, а затем считать, что $\lambda - \lambda_i \to 0$.

Итак, от соотношения (51) остается

$$u_i(x+1)\varphi'(\lambda_i) = f(x+k) + q_{i,\,k-2}f(x+k-1) + \\ + q_{i,\,k-3}f(x+k-2) + \ldots + q_{i,\,1}f(x+2) + q_{i,\,0}f(x+1),$$

и система (48) относительно функций u_i решена $[\varphi'(\lambda_i) \neq 0]$. Это решение короче запишем так:

$$u_i(x+1)\varphi'(\lambda_i) = f(x+k) + \sum_{p=1}^{k-1} q_{i,\,p-1}f(x+p). \tag{52}$$

Постараемся исключить функцию f из соотношений (52) и получить систему разностных уравнений, которым удовлетворяют функции u_i, положим

$$P_i(x) = a_i + \eta_i(x), \quad i = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ k-1,$$

тогда данное нам уравнение (46) запишем в виде

$$f(x+k) = -\sum_{p=0}^{k-1} a_p f(x+p) - \sum_{p=0}^{k-1} \eta_p(x) f(x+p), \tag{53}$$

где $\eta_i \to 0$, когда $x \to \infty$. Из соотношений (52) и (53) получаем

$$u_i(x+1)\varphi'(\lambda_i) = -\sum_{p=0}^{k-1} a_p f(x+p) + \\ + \sum_{p=1}^{k-1} q_{i,\,p-1}f(x+p) - \sum_{p=0}^{k-1} \eta_p(x) f(x+p).$$

Суммирование в средней сумме можно начать с $p=0$, если считать, как и выше, $q_{i,-1}=0$. Объединяя при этом первую и вторую суммы в одну, найдем

$$u_i(x+1)\varphi'(\lambda_i)=\sum_{p=0}^{k-1}[q_{i,p-1}-a_p]f(x+p)-\sum_{p=0}^{k-1}\eta_p(x)f(x+p).$$

Из соотношения (50) имеем

$$q_{i,p-1}-a_p=\lambda_i q_{i,p},$$

поэтому

$$u_i(x+1)\varphi'(\lambda_i)=\lambda_i\sum_{p=0}^{k-1}q_{i,p}f(x+p)-\sum_{p=0}^{k-1}\eta_p(x)f(x+p).$$

Если в левой части соотношения (52) мы заменим x на $x-1$ и будем считать $q_{i,k-1}=1$, то получим

$$u_i(x)\varphi'(\lambda_i)=\sum_{p=0}^{k-1}q_{i,p}f(x+p),$$

поэтому последнее полученное нами соотношение принимает вид

$$u_i(x+1)\varphi'(\lambda_i)=\lambda_i u_i(x)\varphi'(\lambda_i)-\sum_{p=0}^{k-1}\eta_p(x)f(x+p).$$

Остается исключить $f(x+p)$ из имеющейся суммы. Это можно сделать, воспользовавшись соотношениями (48). Подставляя в означенную сумму вместо $f(x)$, $f(x+1),\ldots,f(x+k-1)$ соответствующие линейные выражения через функции $u_1(x)$, $u_2(x),\ldots$ $\ldots,u_k(x)$, мы в результате получим некоторую сумму из $u_i(x)$, умноженных каждая на линейную комбинацию с постоянными коэффициентами из $\eta_i(x)$. Раз $\eta_i(x)$ при $x\to\infty$ стремятся к нулю, то также будут стремиться к нулю и упомянутые линейные комбинации из них; обозначая последние через $\varepsilon'_{ip}(x)$, будем иметь

$$u_i(x+1)\varphi'(\lambda_i)=\lambda_i u_i(x)\varphi'(\lambda_i)-\sum_{p=0}^{k-1}\varepsilon'_{ip}(x)u_p(x).$$

Разделив еще на $\varphi'(\lambda_i)\neq 0$ и положив

$$-\frac{\varepsilon'_{ip}(x)}{\varphi'(\lambda_i)}=\varepsilon_{ip}(x),$$

получим

$$u_i(x+1)=\lambda_i u_i(x)+\sum_{p=0}^{k-1}\varepsilon_{ip}(x)u_p(x),$$

$$i=1,\ 2,\ 3,\ldots,k, \tag{54}$$

где $\varepsilon_{ip}(x)\to 0$ при $x\to\infty$ для в ех i и p.

Рассмотрим теперь введенные нами функции

$$u_1(x),\ u_2(x),\ u_3(x), \ldots, u_k(x). \tag{55}$$

Положим $x = s$. Ясно, что для каждого s среди k чисел ряда (55) найдется наибольшее по модулю, причем, вообще говоря, таких наибольших по модулю чисел может оказаться несколько. Обозначим через j_s наименьший из индексов $1, 2, 3, \ldots, k$, для которого $u_{j_s}(s)$ имеет в ряде (55) максимальное значение. В зависимости от s индекс j_s будет, вообще говоря, меняться. Индекс j_s обладает следующими свойствами:

$$|u_{j_s}(s)| > 0$$

вследствие того, что ни для какого s все функции $u_i(s)$ одновременно в нуль обратиться не могут и, кроме того,

$$|u_{j_s}(s)| > |u_i(s)| \text{ для } i < j_s,$$
$$|u_{j_s}(s)| \geqslant |u_i(s)| \text{ для } i > j_s.$$

Покажем, что существует такое число N, что при всех $s > N$

$$j_s \geqslant j_{s+1}. \tag{56}$$

Отсюда сразу получится, что найдется такой номер j, что $|u(x)| \leqslant |u_j(x)|$ для всех $x > x_0$. В самом деле, из (56) следует, что наступит момент, когда j_s перестанет меняться, ибо этот индекс не возрастает, а принимать он может только значения $1, 2, 3, \ldots, k$.

Итак, чтобы утверждать, что среди функций (55) имеется функция наибольшего роста, достаточно доказать неравенство (56).

Для этой цели заметим, что для $i > j$

$$\frac{\rho_i}{\rho_j} < 1 \qquad (\rho_s = |\lambda_s|).$$

Выберем такое малое число δ, чтобы неравенство

$$\frac{\rho_i + \delta}{\rho_j - \delta} < 1$$

выполнялось для любых $i > j$ $(j = 1, 2, \ldots, k-1)$. Это, очевидно, всегда возможно, потому что

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\rho_i + \delta}{\rho_j - \delta} = \frac{\rho_i}{\rho_j} < 1.$$

Возьмем число N столь большим, чтобы для всех $s > N$ было

$$|\varepsilon_{jp}(s)| < \frac{\delta}{k} \qquad (p = 0, \ldots, k-1;\quad j = 1, \ldots, k).$$

Положим в соотношении (54) $i = j_s$, тогда (так как модуль разности больше или равен разности модулей)

$$|u_{j_s}(s+1)| \geqslant \rho_{j_s}|u_{j_s}(s)| - \left|\sum_{p=0}^{k-1} \varepsilon_{j_s p} u_p(s)\right|,$$

и так как

$$\left|\sum_{p=0}^{k-1} \varepsilon_{j_s p} u_p(s)\right| \leqslant \sum_{p=0}^{k-1} \frac{\delta}{k}|u_p(s)| \leqslant k \cdot \frac{\delta}{k}|u_{j_s}(s)| = \delta|u_{j_s}(s)|,$$

то

$$|u_{j_s}(s+1)| \geqslant \rho_{j_s}|u_{j_s}(s)| - \delta|u_{j_s}(s)|,$$

или окончательно

$$|u_{j_s}(s+1)| \geqslant |u_{j_s}(s)|(\rho_{j_s} - \delta). \tag{57}$$

Из соотношения (54) при $s > N$, полагая $i = j_{s+1}$, аналогично получим $(u_{j_s}(s) \geqslant u_i(s))$,

$$|u_{j_{s+1}}(s+1)| \leqslant \rho_{j_{s+1}}|u_{j_{s+1}}(s)| + \left|\sum_{p=0}^{k-1} \varepsilon_{j_s p} \cdot u_p(s)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \rho_{j_{s+1}}|u_{j_{s+1}}(s)| + \sum_{p=0}^{k-1} \frac{\delta}{k}|u_p(s)| \leqslant \rho_{j_{s+1}}|u_{j_s}(s)| + \delta|u_{j_s}(s)| =$$

$$= |u_{j_s}(s)|(\rho_{j_{s+1}} + \delta). \tag{58}$$

Разделив неравенство (58) и (57) почленно, получим для $s > N$

$$\left|\frac{u_{j_{s+1}}(s+1)}{u_{j_s}(s+1)}\right| \leqslant \frac{\rho_{j_{s+1}} + \delta}{\rho_{j_s} - \delta}. \tag{59}$$

Покажем теперь, что для $s > N$

$$j_{s+1} \leqslant j_s.$$

Предположим противное, т. е. $j_{s+1} > j_s$, тогда, во-первых, в силу определения индекса j_s

$$\left|\frac{u_{j_{s+1}}(s)}{u_{j_s}(s)}\right| \leqslant 1,$$

а во-вторых, так как мы предположили $j_{s+1} > j_s$,

$$\frac{\rho_{j_{s+1}} + \delta}{\rho_{j_s} - \delta} < 1.$$

Это показывает, что

$$\left|\frac{u_{j_{s+1}}(s+1)}{u_{j_s}(s+1)}\right| < 1,$$

или

$$|u_{j_{s+1}}(s+1)| < |u_{j_s}(s+1)|,$$

что находится в противоречии с определением индекса j_{s+1}. Соединяя доказанное с тем замечанием выше, в котором указывалось на то, что, начиная с указанного номера, j_s станет постоянной величиной, независимой от s, мы можем утверждать, что найдется такое число x_0 (оно может быть больше N), что для любого $x > x_0$ существует индекс j (из ряда $1, 2, 3, \ldots, k$), что

$$\left.\begin{array}{ll} |u_j(x)| > 0, & \\ |u_j(x)| > |u_i(x)| & \text{для } i < j, \\ |u_j(x)| \geqslant |u_i(x)| & \text{для } i > j. \end{array}\right\} \tag{60}$$

Итак, мы выделили из функций (55) функцию $u_j(x)$ наибольшего роста; покажем, что ее рост настолько превосходит рост остальных функций, что предел отношения каждой из остальных функций к найденной функции $u_j(x)$ имеет пределом нуль, когда $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{u_i(x)}{u_j(x)} = 0, \qquad i \neq j. \tag{61}$$

Соотношение (61) будем доказывать по-разному для случаев

$$i < j \text{ и } i > j.$$

Предположим, что $i < j$. Допустим, что существует верхний предел отношения

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{|u_i(x)|}{|u_j(x)|} = \alpha > 0\,^{1)}, \tag{62}$$

т. е. можно выбрать такую подпоследовательность чисел натурального ряда

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots,\ x_p, \ldots,$$

что существует предел

$$\lim_{p\to\infty} \frac{|u_i(x_p)|}{|u_j(x_p)|} = \alpha > 0.$$

Возвращаясь к соотношению (54), оценим по модулю обе части этого равенства, предполагая при этом, что, во-первых,

---

[1]) Такой верхний предел существует, ибо мы доказали, что $|u_i(x)| \leqslant |u_j(x)|$, и следовательно, для всех $x > x_0$ справедливо

$$\frac{|u_i(x)|}{|u_j(x)|} \leqslant 1,$$

поэтому $\alpha \leqslant 1$.

$x > x_0 > N$, и поэтому

$$|\varepsilon_{ip}(x)| < \frac{\delta}{n},$$

где $\delta > 0$ сколь угодно малое положительное число, и, во-вторых, выполнены условия (60) (такое x_0, как мы показали выше, существует). Получим

$$|u_i(x+1)| \geqslant \rho_i |u_i(x)| - \delta |u_j(x)|,$$
$$|u_j(x+1)| \leqslant \rho_j |u_j(x)| + \delta |u_j(x)|,$$

откуда

$$\frac{|u_i(x+1)|}{|u_j(x+1)|} \geqslant \frac{\rho_i |u_i(x)| - \delta |u_j(x)|}{\rho_j |u_j(x)| + \delta |u_j(x)|} = \frac{\rho_i \dfrac{|u_i(x)|}{|u_j(x)|} - \delta}{\rho_j + \delta}. \tag{63}$$

Предположим, что в неравенстве (63) x последовательно принимает те значения

$$x_1, \quad x_2, \ldots, x_p,$$

для которых отношение

$$\frac{|u_i(x)|}{|u_j(x)|}$$

стремится к своему верхнему пределу α при $p \to \infty$. Подставляя в неравенство (63) x_p вместо x и переходя к пределу при $p \to \infty$, найдем

$$\varliminf_{p\to\infty} \frac{|u_i(x_p+1)|}{|u_j(x_p+1)|} \geqslant \frac{\rho_j \alpha - \delta}{\rho_j + \delta}. \tag{64}$$

Но нижний предел по подпоследовательности не может превзойти верхнего предела по всей последовательности. Поэтому имеем

$$\varliminf_{p\to\infty} \frac{|u_i(x_p+1)|}{|u_j(x_p+1)|} \leqslant \varlimsup_{x\to\infty} \frac{|u_i(x)|}{|u_j(x)|} = \alpha.$$

С другой стороны, неравенство (64) верно для любого сколь угодно малого δ, не зависящего от последовательности x_p; поэтому

$$\varliminf_{p\to\infty} \frac{|u_i(x_p+1)|}{|u_j(x_p+1)|} \geqslant \frac{\rho_i}{\rho_j} \alpha.$$

Но так как $i < j$,

$$\frac{\rho_i}{\rho_j} > 1.$$

Тогда последнее неравенство дает

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\frac{|u_i(x_p+1)|}{|u_j(x_p+1)|}>\alpha,$$

что находится в противоречии с неравенством

$$\underline{\lim_{p\to\infty}}\frac{|u_i(s_p+1)|}{|u_j(s_p+1)|}\leqslant\alpha,$$

следовательно, если мы рассматриваем случай $i<j$, то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{|u_i(x)|}{|u_j(x)|}=0.$$

Рассмотрим случай $i>j$. Тогда из равенства (54) получим

$$|u_i(x+1)|\leqslant\rho_i|u_i(x)|+\delta|u_j(x)|,$$
$$|u_j(x+1)|\geqslant\rho_j|u_j(x)|-\delta|u_j(x)|,$$

откуда

$$\frac{|u_i(x+1)|}{|u_j(x+1)|}\leqslant\frac{\rho_i|u_i(x)|+\delta|u_j(x)|}{\rho_j|u_j(x)|-\delta|u_j(x)|},$$

или

$$\frac{|u_i(x+1|}{|u_j(x+1|}\leqslant\frac{\rho_i\dfrac{|u_i(x)|}{|u_j(x)|}+\delta}{\rho_i-\delta}. \tag{65}$$

Дальнейшие рассуждения по отношению к рассмотренному выше случаю $i<j$ несколько изменятся.

Предполагая по-прежнему, что

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{|u_i(x)|}{|u_j(x)|}=\alpha>0,$$

мы здесь выберем последовательность x_p так, чтобы

$$\lim_{p\to\infty}\frac{|u_i(x_p+1)|}{|u_j(x_p+1)|}=\alpha.$$

Обозначим

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\frac{|u_i(x_p)|}{|u_j(x_p)|}=\beta\leqslant\alpha$$

и подставим в неравенство (65) x_p вместо x. Переходя к пределу при $p\to\infty$, найдем

$$\alpha\leqslant\frac{\rho_i\beta+\delta}{\rho_j-\delta}.$$

Отсюда, так как δ сколь угодно мало,

$$\alpha \leqslant \frac{\rho_i}{\rho_j}\beta.$$

Вспоминая, что при $i < j$

$$\frac{\rho_i}{\rho_j} < 1,$$

получим

$$\alpha < \beta.$$

Но этого не может быть, так как

$$\alpha = \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{|u_i(x)|}{|u_j(x)|} \geqslant \overline{\lim_{p\to\infty}} \frac{|u_i(x_p)|}{|u_j(x_p)|} = \beta.$$

Источником полученных нами противоречий послужило то, что число α мы считали существенно положительным. Если же положить $\alpha = 0$ (следовательно, и $\beta = \alpha = 0$), то противоречия построить, конечно, не удастся, ибо при этом условия

$$\frac{\rho_i}{\rho_j} \gtrless 1$$

останутся неиспользованными. Следовательно, и при $i > j$ $\alpha = 0$, и мы получаем то, что требовалось, т. е. что предел отношения $|u_i(x)|$ к $|u_j(x)|$ при $x \to \infty$ равен нулю.

Возвращаясь к выражениям $f(x)$ и $f(x+1)$ через

$$u_1(x),\ u_2(x),\ u_3(x), \ldots,\ u_j(x), \ldots, u_k(x),$$

т. е. к соотношениям

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) \ldots + u_j(x) + \ldots + u_k(x),$$
$$f(x+1) = \lambda_1 u_1(x) + \lambda_2 u_2(x) + \lambda_3 u_3(x) + \ldots$$
$$\ldots + \lambda_j u_j(x) + \ldots + \lambda_k u_k(x),$$

из первого находим

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{u_j(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sum\limits_{m=1}^{k} u_m(x)}{u_j(x)} = 1 + \lim_{x\to\infty} \sum_{m=1}^{k} \frac{u_m(x)}{u_j(x)} = 1 \quad (m \neq j),$$

а из второго

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x+1)}{u_j(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sum\limits_{m=1}^{k} \lambda_m u_m(x)}{u_j(x)} = \lambda_j + \lim_{x\to\infty} \sum_{m=1}^{k} \frac{\lambda_m u_m(x)}{u_j(x)} = \lambda_j \quad (m \neq j),$$

поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+1)}{u_j(x)}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{u_j(x)}{f(x)}=\lambda_j\cdot 1=\lambda_j,$$

и теорема Пуанкаре доказана.

3. Теорема Перрона. Уточнением теоремы Пуанкаре служит теорема Перрона, которая утверждает, что *если для уравнения*

$$f(x+k)+P_{k-1}(x)f(x+k-1)+$$
$$+P_{k-2}(x)f(x+k-2)+\ldots+P_0(x)f(x)=0 \qquad (13)$$

условия теоремы Пуанкаре выполнены и, кроме того, $P_0(x)$ ни для какого целого x в нуль не обращается, то существует k решений

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ldots,f_k(x) \qquad (66)$$

этого уравнения, для каждого из которых

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_i(x+1)}{f_i(x)}=\lambda_i \qquad (67)$$

при всех i от единицы до k. Доказательства этой теоремы мы приводить не будем. Отметим только, также без доказательства, что решения (66) будут линейно независимыми. В этом случае можно построить решение заданного уравнения, исходя из следующих соображений.

Из соотношения (67) следует, что

$$\frac{f_i(s+1)}{f_i(s)}=\lambda_i+\varepsilon_i(s), \qquad (68)$$

где $\varepsilon(s)\to 0$, когда $s\to\infty$. Полагая в соотношении (68) последовательно $s=0,\ 1,\ 2,\ldots,s-1$, получим следующий ряд равенств:

$$\frac{f_i(1)}{f_i(0)}=\lambda_i+\varepsilon_i(0),$$

$$\frac{f_i(2)}{f_i(1)}=\lambda_i+\varepsilon_i(1),$$

$$\frac{f_i(3)}{f_i(2)}=\lambda_i+\varepsilon_i(2),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{f_i(s-1)}{f_i(s-2)}=\lambda_i+\varepsilon_i(s-2),$$

$$\frac{f_i(s)}{f_i(s-1)}=\lambda_i+\varepsilon_i(s-1),$$

перемножение которых дает

$$\frac{f_i(s)}{f_i(0)} = \prod_{t=0}^{s-1} [\lambda_i + \varepsilon_i(t)],$$

откуда

$$f_i(s) = f_i(0) \prod_{t=0}^{s-1} [\lambda_i + \varepsilon_i(t)].$$

Произведение

$$\prod_{t=0}^{s-1} [\lambda_i + \varepsilon_i(t)]$$

можно заменить произведением равных биномов

$$\lambda_i + \eta_i(t),$$

где $\eta_i(t)$ есть некоторое среднее значение между $\varepsilon_i(0)$, $\varepsilon_i(1)$, $\varepsilon_i(2), \ldots, \varepsilon_i(s-1)$ и, следовательно, также стремится к нулю при возрастании аргумента[1]). Обозначая еще $f_i(0)$ через C_i, получим

$$f_i(s) = C_i[\lambda_i + \eta(s)]^s = C_i\lambda_i^s[1 + \zeta_i(s)]^s, \quad \left[\zeta_i(s) = \frac{\eta_i(s)}{\lambda}\right],$$

так что общее решение заданного уравнения в силу линейной независимости частных решений изобразится в виде

$$f(s) = C_1\lambda_1^s[1 + \zeta_1(s)]^s + \\ + C_2\lambda_2^s[1 + \zeta_2(s)]^s + \ldots + C_k\lambda_k^s[1 + \zeta_k(s)]^s. \qquad (69)$$

Таким образом, теорема Перрона, дополняющая доказанную теорему Пуанкаре, позволяет выяснить поведение решения линейного однородного уравнения с переменными коэффициентами, и в этом — смысл и значение обеих теорем.

4. Пример к теореме Пуанкаре. Здесь мы построим пример, показывающий, что требование различия по модулю корней предельного характеристического уравнения было существенным (а не только соответствовало избранной форме доказательства).

---

[1]) Это можно показать и формально, полагая

$$\lambda_i + \eta_i(s) = \sqrt[s]{\prod_{t=0}^{s-1} [\lambda_i - \varepsilon_i(t)]} = \lambda_i \sqrt[s]{\prod_{t=0}^{s-1} [1 + \varepsilon_i'(t)]}; \quad \left[\varepsilon_i'(t) = -\frac{\varepsilon_i(t)}{\lambda_i}\right],$$

и доказать, что

$$\lim_{s\to\infty} \sqrt[s]{\prod_{t=0}^{s-1} [1 + \varepsilon_i'(t)]} = 1.$$

Рассмотрим линейное уравнение

$$\nu(s+2)-\left(1+\frac{(-1)^s}{s+1}\right)\nu(s)=0.$$

Здесь

$$P_0(s)=-\left(1+\frac{(-1)^s}{s+1}\right)$$

и, следовательно,

$$\lim_{s\to\infty} P_0(s)=-1.$$

Предельное характеристическое уравнение будет

$$\lambda^2-1=0,$$

а его корни

$$\lambda_1=+1,\quad \lambda_2=-1$$

равны по модулю. Покажем, что теорема Пуанкаре места не имеет. Для этого, задавшись начальными условиями, например

$$f(0)=0,\ f(1)=1,$$

построим непосредственно решения заданного уравнения, разбирая отдельно случаи $s=2m+1$ и $s=2m$ (m — число целое положительное). При $s=2m+1$ имеем $(-1)^s=-1$, и заданное уравнение можно записать в виде

$$f(s+2)=\left(1-\frac{1}{s+1}\right)f(s).$$

Давая здесь s значения

$$1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ 2m-1,$$

получим ряд равенств

$$f(3)=\left(1-\frac{1}{2}\right)f(1),$$

$$f(5)=\left(1-\frac{1}{4}\right)f(3),$$

$$f(7)=\left(1-\frac{1}{6}\right)f(5),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(2m-3)=\left(1-\frac{1}{2(m-2)}\right)f(2m-5),$$

$$f(2m-1)=\left(1-\frac{1}{2(m-1)}\right)f(2m-3),$$

$$f(2m+1)=\left(1-\frac{1}{2m}\right)f(2m-1),$$

откуда в силу условия $f(1)=1$ найдем

$$f(2m+1)=\prod_{t=1}^{m}\left(1-\frac{1}{2t}\right).$$

Что касается случая $s=2m$, то нетрудно видеть, что в силу условия

$$f(0)=0$$

будем иметь

$$f(2m)=0.$$

Таким образом, частное решение нашего уравнения при начальных условиях

$$f(0)=0,$$
$$f(1)=1$$

будет дано следующими двумя формулами:

$$f(2m+1)=\prod_{t=1}^{m}\left(1-\frac{1}{2t}\right),$$
$$f(2m)=0.$$

Ясно, что говорить о пределе

$$\lim_{s\to\infty}\frac{f(s+1)}{f(s)}$$

в данном случае не имеет даже смысла, так как для четных s знаменатель каждый раз обращается в нуль (числитель при этом нулю не равен). Верхний и нижний пределы отношения $f(s+1)$ к $f(s)$ при $s\to\infty$ также с корнями $\lambda_{1,2}=\pm 1$ совершенно не связаны (верхний предел, если не делать различия между $+\infty$ и $-\infty$, будет равен бесконечности, а нижний нулю). Этот пример показывает, что условие различия по модулю корней предельного характеристического уравнения в теореме Пуанкаре является условием существенным.

§ 6. Теорема Гёльдера

Если провести параллель между дифференциальными и разностными уравнениями, то можно сказать, что порождаемые тем или иным типом дифференциальных уравнений функции часто существенно отличаются по своей природе от функций, порождаемых аналогичным типом разностных уравнений. Для того чтобы разъяснить это утверждение, мы приведем теорему, доказанную Гёльдером.

Функция

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt,$$

являющаяся решением простейшего алгебраического разностного уравнения

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

не удовлетворяет никакому алгебраическому дифференциальному уравнению с полиномиальными коэффициентами.

Мы приведем здесь одно из наиболее простых доказательств этой теоремы, принадлежащее Островскому.

Пусть функция $\Gamma(x)$ есть интеграл алгебраического дифференциального уравнения с полиномиальными коэффициентами, т. е.

$$F[x, y, \ldots, y^{(k)}] = 0, \tag{70}$$

где

$$F[x, y, \ldots, y^{(k)}] = \sum A^{(x)}_{i_0, i_1, \ldots, i_k} y^{i_0} [y']^{i_1} \ldots [y^{(k)}]^{i_k},$$

а $A^{(x)}_{i_0, \ldots, i_k}$ — многочлены относительно x.

Прежде всего введем понятие веса и размерности левой части уравнения (70). Левая часть уравнения (70) будет состоять из членов вида

$$A(x)(y)^{n_0}(y')^{n_1} \ldots (y^{(k)})^{n_\alpha}, \tag{71}$$

где $n_0, n_1, \ldots, n_\alpha$ будут целые числа, а $A(x)$ — некоторые многочлены по x. Размерностью каждого члена этой суммы мы будем называть число

$$n_0 + n_1 + n_2 + \ldots + n_k,$$

а весом этого члена — сумму

$$n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \ldots + kn_k.$$

Мы можем расположить сумму, стоящую в левой части (70), в порядке убывания размерностей ее членов, а члены одинаковых размерностей — в порядке убывания их весов. Тогда мы будем иметь слева в (70) некоторую группу членов вида (71), имеющих одинаковую и максимальную в данном уравнении размерность, а среди членов той же размерности, принадлежащих (70), — максимальный вес. Члены этой группы мы опять можем расположить в некотором порядке, а именно, в порядке убывания порядков и степеней производных, входящих в члены этой группы. Возьмем теперь среди членов этой группы подгруппу членов, содержащих высшую производную $y^{(k)}$ в максимальной степени, среди членов этой новой подгруппы выберем новую подгруппу, содержащую

следующую по порядку производную, тоже в максимальной степени и т. д. Мы приведем тогда после некоторого конечного числа шагов к одному члену левой части (70), который будет называться в дальнейшем высшим членом (70). Этот высший член, имеющий вид

$$A(x)(y)^{\bar{n}_0}(y')^{\bar{n}_1}\ldots(y^{(k)})^{\bar{n}_k},$$

где $\bar{n}_0+\bar{n}_1+\ldots+\bar{n}_k=r$, а $\bar{n}_1+2\bar{n}_2+\ldots+k\bar{n}_k=s$ имеет в (70) максимальную размерность r, среди членов этой размерности — максимальный вес s, среди членов размерности r и веса s — максимальную степень $\bar{n}_k$ производной $y^{(k)}$ и т. д. Итак, он «больше» всех остальных членов левой части (70) или размерностью, или весом, или одной из степеней производных.

Но если $\Gamma(x)$ удовлетворяет (70), то $\Gamma(x)$ удовлетворяет и бесчисленному множеству алгебраических дифференциальных уравнений, которые могут получаться хотя бы от дифференцирования левой части (70) по x. Мы можем теперь характеризовать каждое из этих уравнений его высшим членом.

Из всех этих уравнений мы выберем такое, которое имеет наименьший в указанном смысле высший член, коэффициент при котором $A(x)$ имеет наименьшую из возможных степень p. Во всех уравнениях коэффициент (числовой) при x в высшей степени в коэффициенте $A(x)$ при высшем члене мы можем положить равным единице.

Выбранное нами таким образом уравнение, характеризующееся своим высшим членом, которому в свою очередь соответствует последовательность величин

$$r,\ s,\ \bar{n}_k,\ \bar{n}_{k-1},\ \ldots,\ \bar{n}_1,\ \bar{n}_0,\ p,$$

единственно, так как если бы существовало два таких уравнения, то их разность, отличная от нуля, имела бы по крайней мере степенью $A(x)$ число, меньшее p.

Это уравнение, которое мы запишем теперь в форме

$$F(x, y)=A(x)\,(y^k)^{\bar{n}_k}(y^{(k-1)})^{\bar{n}_{k-1}}\ldots(y)^{\bar{n}_0}+f(x, y, \ldots, y^{(k)})=0, \quad (72)$$

обладает и еще одним очень важным свойством.

Пусть имеется другое уравнение с тем же высшим членом, коэффициент при котором будет $A_1(x)$ степени $p_1>p$. Тогда ясно, что многочлен $A_1(x)$ нацело должен делиться на $A(x)$, так как иначе можно было бы найти уравнение с меньшим высшим членом.

Более того, очевидно, что если наше наименьшее уравнение будет $F(x;\ y)=0$, а другое уравнение с тем же высшим членом будет $F_1(x;\ y)=0$, то $A_1(x)\,F(x;\ y)\equiv A(x)\,F_1(x;\ y)$ тождественно в переменных $x, y, y', \ldots, y^{(k)}$.

Докажем теперь, что все члены вида (71) уравнения (72) должны быть одной и той же размерности r. Уравнение (72) может быть записано в форме

$$F(x; y) = A(x)[y^{(k)}]^{\bar{n}_k} \ldots (y)^{\bar{n}_0} + \sum_{t=0}^{s} f_{r,s-t}(x; y) + \varphi(x; y) = 0,$$

где $f_{r,s-t}(x; y)$ — группы членов размерности r и веса $s-t$, а $\varphi(x; y)$ — совокупность членов (72) размерности ниже r.

По предположению $\Gamma(x)$ удовлетворяет (72). Но $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, значит, заменив в (72) x на $x+1$, мы придем к тому, что $\Gamma(x)$ удовлетворяет и уравнению

$$F(x+1;\ xy) = 0.$$

Но так как

$$xy = xy \quad (xy)' = y + xy', \quad (xy)'' = xy'' + 2y', \ldots,$$
$$(xy)^{(\nu)} = xy^{(\nu)} + \nu y^{(\nu-1)}, \ldots$$

— однородные и линейные соотношения по $y, y', \ldots, y^{(k)}$, то от подстановки xy вместо y размерность членов, получающихся из члена вида (71) размерности $d \leqslant r$, будет также d. Вес же любого члена, полученного в результате этой подстановки из члена вида (71) размерности d и веса t, не может превысить t, так как

$$n_\nu \nu \geqslant m\nu + l(\nu - 1), \quad m + l = n_\nu,$$

причем равенство возможно только в случае $m = n_\nu$, $l = 0$. В связи с этим высший член уравнения $F(x+1; xy) = 0$ будет

$$x^r A(x+1)(y^{(k)})^{\bar{n}_k}(y^{(k-1)})^{\bar{n}_{k-1}} \ldots (y)^{\bar{n}_0},$$

а $\varphi(x+1;\ xy)$ будет размерности ниже r. Отсюда следует по ранее замеченному свойству минимального уравнения, что $x^r A(x+1)$ должно нацело делиться на $A(x)$ и

$$F(x+1; xy) = B(x)F(x, y), \quad B(x) = \frac{x^r A(x+1)}{A(x)},$$

где $B(x)$ — многочлен степени r. Так как это соотношение есть тождество в переменных x, y, $y', \ldots, y^{(k)}$, то из него непосредственно следует и тождество для членов размерности меньше r

$$\varphi(x+1;\ xy) = B(x)\varphi(x;\ y).$$

Пусть наибольшая степень x, входящая в $\varphi(x; y)$, будет l. Но так как размерность $\varphi(x; y)$ меньше r, то наибольшая степень x, входящая в $\varphi(x+1;\ xy)$, не будет превышать $l + r - 1$, степень же в правой части этого тождества будет $l + r$. Значит, мы пришли к противоречию и

$$\varphi(x;\ y) = 0$$

тождественно. Итак,

$$F(x; y) = A(x)(y^{(k)})^{\bar{n}_k} \ldots (y)^{\bar{n}_0} + \sum_{t=0}^{r} f_{r,s-t}(x; y),$$

где по-прежнему $f_{r,s-t}(x; y)$ есть совокупность членов размерности r и веса $s-t$. Докажем теперь, что члены, входящие в $f_{r,s}(x; y)$, к которым мы причисляем и высший член, имеют постоянные коэффициенты.

Обозначим эти коэффициенты через $P_i(x)$, а их общий наибольший делитель $Q(x)$ запишем в виде

$$Q(x) = (x-a_1)^{\varepsilon_1}(x-a_2)^{\varepsilon_2}(x-a_3)^{\varepsilon_3}\ldots,$$

причем будем считать нули полинома $Q(x)$ расположенными в порядке убывания их действительных частей, т. е.

$$R(a_1) \geqslant R(a_2) \geqslant R(a_3) \geqslant \ldots$$

Коэффициенты членов наибольшего веса, входящих в $f_{r,s}(x+1; xy)$, будут равны $x^r P_i(x+1)$, а их общий наибольший делитель, очевидно, будет $x^r Q(x+1)$. С другой стороны, на основании ранее выведенного тождества $x^r P_i(x+1) = B(x) P_i(x)$ для всех i, и значит, этот же наибольший общий делитель должен быть равен $B(x)Q(x)$. Поэтому $x^r Q(x+1) = B(x)Q(x)$. Следовательно, выражение

$$x^r Q(x+1) = x^r[x-(a_1-1)]^{\varepsilon_1}[x-(a_2-1)]^{\varepsilon_2}[x-(a_3-1)]^{\varepsilon_3}\ldots$$

должно делиться на

$$Q(x) = (x-a_1)^{\varepsilon_1}(x-a_2)^{\varepsilon_2}\ldots$$

Отсюда непосредственно получим, так как $a_1, a_2, \ldots$ расположены в порядке убывания их действительных частей, что

$$a_1 = 0,\ \varepsilon_1 \leqslant r;\ a_2 = a_1 - 1 = -1,\ \varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_1;$$
$$a_3 = a_2 - 1 = -2,\ \varepsilon_3 \leqslant \varepsilon_2$$

и т. д. Воспользовавшись опять соотношением

$$x^r Q(x+1) = B(x)Q(x),$$

мы получим, что $B(x)$ выразится так:

$$B(x) = x^{r-\varepsilon_1}(x+1)^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(x+2)^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}\ldots \equiv x^{r-\varepsilon_1}\bar{B}(x+1),$$

где

$$\bar{B}(x) = x^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(x+1)^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(x+2)^{\varepsilon_3-\varepsilon_4}\ldots$$

есть делитель $Q(x)$. Теперь легко будет доказать, что все коэффициенты всех $f_{r,t}(x; y)$ делятся на $\bar{B}(x)$.

Так как уравнение $F(x;\ y)=0$ есть минимальное уравнение, то степень q многочлена $A_1(x)$ не может ни в каком уравнении с тем же высшим членом быть меньше p — степени $A(x)$.

Но если $\overline{B}(x)\neq 1$, то, так как все коэффициенты при всех членах $f_{r,t}(x,\ y)$ должны, как мы сейчас легко покажем, делиться на $B(x)$, мы придем к противоречию, и $\overline{B}(x)=1$.

Итак, допустим, что $\overline{B}(x)\neq 1$ и t_0 есть наибольшее число, при котором $f_{r,t_0}(x;\ y)$ не делится на $\overline{B}(x)$. Тогда все $f_{r,t}(x+1;\ xy)$, $t>t_0$, делятся на $\overline{B}(x+1)$. Но в силу соотношения

$$F(x+1;\ xy)=B(x)F(x;\ y)$$

все члены веса t_0 в выражении

$$F(x+1;\ xy)$$

должны делиться на $B(x)$ и, значит, на $\overline{B}(x+1)$, т. е. на $\overline{B}(x+1)$ делится $x^r f_{r,t_0}(x+1;\ y)$, так как члены того же веса, получающиеся из членов, принадлежащих к какому-нибудь $f_{r,t}(x+1;\ xy)$, $t>t_0$, имеют коэффициенты, делящиеся по предположению на $B(x+1)$. Но, значит, $f_{r,t_0}(x;\ y)$ делится на $B(x)$, так как $\overline{B}(x+1)$ не делится на x.

Итак, исходя из минимальности уравнения $F(x;\ y)=0$, мы доказали, что $\overline{B}(x)=1$. Значит, так как $B(x)$ — многочлен степени r, то

$$B(x)\equiv x^{r-\varepsilon_1}\overline{B}(x+1)\equiv x^r \quad (\varepsilon_1=0).$$

Возвращаясь к соотношению

$$B(x)P_i(x)=x^rP_i(x+1),$$

мы получим, что

$$P_i(x)=P_i(x+1)$$

или

$$\Delta P_i(x)=0.$$

Значит, все $P_i(x)$ — константы [в том числе и $A(x)=A_0$ — константа].

Но совокупность членов веса $s-1$ в $F(x+1;\ xy)$, которая может получиться только из членов веса s и $s-1$, принадлежащих $F(x;\ y)$, изобразится в форме

$$x^r f_{r,\,s-1}(x+1;\ y)+x^{r-1}f_{r,s,s-1}(x;\ y), \tag{73}$$

где в первое слагаемое вошли все члены, получившиеся от членов веса $s-1$, а во второе — от членов веса s. Далее, выражение

$f_{r,s,s-1}(x;y)$ имеет высшим членом, очевидно, член, который получится из

$$A_0(y^{(k)})^{\bar{n}_k}\ldots(y')^{\bar{n}_1}(y)^{\bar{n}_0},\ A_0\neq 0,$$

и будет равен

$$A_0\bar{n}_1(y^{(k)})^{\bar{n}_k}\ldots(y')^{\bar{n}_1-1}(y)^{\bar{n}_0+1}.$$

Итак, $f_{r,s,s-1}(x;y)$ — не тождественный нуль и имеет постоянные коэффициенты. Значит, и выражение (73) не может быть тождественным нулем, так как оно не делится на x^r. Мы пришли к противоречию, так как равенство

$$F(x+1;\ xy)=x^rF(x;y)$$

есть тождество по всем переменным $x, y, y', \ldots, y^{(k)}$, и значит, совокупность членов веса $s-1$ в $F(x+1;\ xy)$ должна делиться нацело на x^r. Этим теорема Гёльдера доказана.

§ 7. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами бесконечного порядка

1. Уравнения бесконечного порядка как обобщение линейных разностных уравнений. До сих пор в этой главе мы рассматривали разностные уравнения, считая как заданные, так и искомую функцию, определенными лишь для целых значений аргумента или в крайнем случае на положительной действительной полуоси. Задачу решения разностных уравнений можно рассматривать и для аналитических функций комплексного переменного. В этом случае задачи ставятся несколько иначе. В этом параграфе мы разберем для аналитических функций только решение линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами, но эти уравнения мы будем рассматривать как частный случай уравнений более общего вида, которые, вообще говоря, к разностным уравнениям сведены быть не могут.

Естественным обобщением линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами являются уравнения вида

$$\sum_{k=0}^{q}\sum_{n=0}^{p}A_{k,n}F^{(n)}(z+a_k)=0, \tag{74}$$

где $A_{k,n}$ и α_k — произвольные постоянные. Уравнения типа (74) в свою очередь принадлежат к классу дифференциальных уравнений бесконечного порядка с постоянными коэффициентами

$$L(F)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}F^{(n)}(z)=\Phi(z), \tag{75}$$

характеристические функции которых

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n \tag{76}$$

суть целые функции первого порядка нормального типа $\sigma < \infty$, другими словами,

$$|\varphi(t)| < e^{\sigma_1 |t|}, \quad \sigma_1 > \sigma, \quad |t| > |t_0(\sigma_1)|.$$

В этом случае, когда $\varphi(t)$ — целая функция, линейный оператор $L(F)$ будем называть нормальным оператором. В силу линейности уравнения (75) его общее решение есть сумма одного частного решения этого уравнения и общего решения однородного уравнения $L(F) = 0$.

Предполагая, что $\Phi(z)$ — целая функция, мы рассмотрим ниже структуру общего решения уравнения (75) в классе целых функций. Случай, когда $F(z)$ и $\Phi(z)$ — целые функции, а оператор $L(F)$ — не обязательно нормальный, разобран подробно в главе III, § 4. Здесь мы займемся изучением только нормальных операторов, но уже для любых целых функций. Выясним прежде всего, насколько нормальный оператор типа σ может увеличить рост целой функции $F(z)$, т. е. насколько рост $\Phi(z) = L(F(z))$ может превосходить рост $F(z)$. Можно написать

$$L(F) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} F^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\sigma_1} F(z+\zeta)\,\psi(\zeta)\,d\zeta, \tag{77}$$

где $\sigma_1 > \sigma$, а

$$\psi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\zeta^{n+1}},$$

ассоциированная по Борелю с $\varphi(\zeta)$, регулярная вне круга $|\zeta| \leqslant \sigma$ функция. Если интеграл в правой части (77) оценить по модулю, получим неравенство

$$|L[F(z)]| < C(\sigma_1) \max_{|\zeta|=r+\sigma_1} |F(\zeta)| = C(\sigma_1) M(r+\sigma_1), \quad r = |z|, \tag{78}$$

где $M(r)$ — максимум модуля $F(z)$, а $C(\sigma_1)$, $\sigma_1 > \sigma$, — постоянная, зависящая только от σ_1 и $\varphi(z)$. Итак, рост $L(F)$ не может существенно превосходить рост $F(z)$.

2. Линейные однородные дифференциальные уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами. Попытаемся найти выражение любого решения однородного уравнения $L(F) = 0$. Прежде всего мы докажем, что функция $z^s e^{\alpha z}$, где α — корень уравнения $\varphi(t) = 0$ кратности, не меньшей чем $s+1$ [$\varphi(t)$ —

характеристическая функция оператора $L(F)$], удовлетворяет уравнению

$$L(F) = L(z^s e^{\alpha z}) = 0. \tag{79}$$

Действительно,

$$L(z^s e^{\alpha z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} e^{\alpha z} \sum_{k=0}^{s} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{s!}{(s-k)!} \alpha^{n-k} z^{s-k} =$$

$$= e^{\alpha z} \sum_{k=0}^{s} \frac{s!}{k!(s-k)!} z^{s-k} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_n \alpha^{n-k}}{(n-k)!} = e^{\alpha z} \sum_{k=0}^{s} \frac{s!}{k!(s-k)!} z^{s-k} \varphi^{(k)}(\alpha) = 0,$$

так как α — корень уравнения $\varphi(t) = 0$ кратности, не меньшей чем $s+1$.

Докажем теперь основную теорему, показывающую полноту системы функций $\{z^s e^{\alpha_k z}\}$, где α_k — корни уравнения $\varphi(t) = 0$, а s принимает все целые значения от нуля до величины на единицу меньшей кратности корня α_k, в классе целых функций — решений уравнения $L(F) = 0$. Функции $z^s e^{\alpha z}$, являющиеся решениями уравнения (79), мы будем называть *основными функциями оператора* $L(F) = 0$. Рассмотрим отдельно случаи, когда $F(z)$ есть функция, порядок которой не выше первого, а тип, если она имеет первый порядок, не выше нормального.

Теорема I. *Если $M(r)$ — максимум модуля целой функции $F(z)$ и*

$$M(r) < e^{(\theta+\varepsilon)r}, \quad r > r_0(\varepsilon),$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно мало, и $F(z)$ удовлетворяет уравнению

$$L(F) = 0 \tag{80}$$

[$L(F)$ — нормальный оператор с характеристической функцией $\varphi(t)$], то

$$F(z) = \sum_{|\alpha_k| \leqslant \theta} P_k(z) e^{\alpha_k z}, \tag{81}$$

где сумма взята по всем нулям α_k уравнения $\varphi(t) = 0$ в круге $|t| \leqslant \theta$, а степень $P_k(z)$ строго меньше кратности α_k.

Доказательство. Если $f(z)$ ассоциирована по Борелю с $F(z)$, то из соотношений

$$F^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = \theta_1} \zeta^k e^{z\zeta} f(\zeta)\, d\zeta, \quad \theta_1 > \theta, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

следует, что

$$L(F) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = \theta_1} e^{z\zeta} f(\zeta) \varphi(\zeta)\, d\zeta \equiv 0. \tag{82}$$

Так как $f(\zeta)$ регулярна вне круга $|\zeta| > \theta$, $\varphi(\zeta)$ — целая функция, имеющая в круге $|\zeta| \leqslant \theta$ только конечное число нулей, а тождество (81) показывает, что $f(\zeta)\,\varphi(\zeta)$ должно быть целой функцией, то особенностями $f(z)$ могут быть только полюсы в точках α_k, $\varphi(\alpha_k) = 0$, $|\alpha_k| \leqslant \theta$, с кратностями, не превышающими кратностей нулей α_k функции $\varphi(z)$. Значит,

$$f(\zeta) = \frac{Q(\zeta)}{\prod\limits_{|\alpha_k| \leqslant \theta} (\zeta - \alpha_k)^{p_k}},$$

где $Q(\zeta)$ — многочлен, а p_k — кратность нуля α_k. Теперь уже из представления

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta| = \theta_1} \frac{Q(\zeta)\, e^{z\zeta}}{\prod\limits_{|\alpha_k| \leqslant \theta} (\zeta - \alpha_k)^{p_k}}\, d\zeta,$$

$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int f(\xi) e^{z\xi} d\xi$

если найти интеграл в правой части (как сумму вычетов относительно точек α_k), получим представление (81). Тем самым теорема доказана.

Из этой теоремы следует, в частности, что $F(z)$ может быть только многочленом степени не выше $m - 1$, где m — кратность нуля в точке нуль функции $\varphi(z)$, если $M(r) < e^{\theta r}$, $r > r_0$, где θ меньше модуля нуля $\varphi(t)$, наиболее близкого к началу.

Для дальнейшего исследования поставленного вопроса нам будет необходим ряд определений и вспомогательных предположений, к которым мы и переходим.

Рассмотрим случай, когда $M(r)$ — максимум модуля целой функции $F(z)$ — удовлетворяет условию

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln M(r)}{r} = \infty. \tag{83}$$

В этом случае в качестве характеристики роста $F(z)$ мы будем рассматривать функцию $\overline{M}(r)$, определяя ее равенством

$$\ln \overline{M}(r) = r \max_{1 \leqslant t \leqslant r} \frac{\ln M(t)}{t}. \tag{84}$$

Функция $\overline{M}(r)$ обладает следующими свойствами: $\frac{\ln \overline{M}(r)}{r}$ монотонно не убывает, $M(r) \leqslant \overline{M}(r)$, причем равенство достигается для бесчисленного множества неограниченно растущих значений r и

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\ln \overline{M}(r)}{r} = \infty. \tag{85}$$

Кроме того, из неравенства $M_0(r) \leqslant \overline{M}(r)$, $r > r_0$, при неограниченно растущем $\frac{\ln \overline{M}(r)}{r}$ всегда следует неравенство

$$\overline{M}_0(r) \leqslant \overline{M}(r), \quad r > r_1.$$

Действительно,

$$\overline{M}_0(r) = r \max_{1 \leqslant t \leqslant r} \frac{\ln M_0(t)}{t} \leqslant r \max_{1 \leqslant t \leqslant r} \frac{\ln \overline{M}(t)}{t} = \overline{M}(r). \tag{86}$$

Функция $m(r)$, обратная $\ln \overline{M}(r)$:

$$\ln \overline{M}[m(r)] = r, \tag{87}$$

монотонно растет, и более того, в силу свойств $\overline{M}(r)$ отношение

$$\frac{r}{m(r)} = \frac{\ln \overline{M}[m(r)]}{m(r)}$$

монотонно не убывает и неограниченно растет. Если же

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln M(r)}{r} < \infty,$$

то определим $\overline{M}(r)$ равенством

$$\ln \overline{M}(r) = r \max_{t \geqslant r} \frac{\ln M(t)}{t}. \tag{88}$$

Отношение $\frac{\ln \overline{M}(r)}{r}$ будет монотонно невозрастающей функцией, стремящейся к конечному пределу с ростом r, $\overline{M}(r) \geqslant M(r)$, и функция $m(r)$, обратная $\ln \overline{M}(r)$,

$$\ln \overline{M}[m(r)] = r, \tag{89}$$

будет монотонно возрастающей функцией. Отношение

$$\frac{r}{m(r)} = \frac{\ln \overline{M}[m(r)]}{m(r)},$$

как легко видеть, будет монотонно невозрастающей функцией, стремящейся к определенному пределу с ростом r. Мы определили, таким образом, при любом $M(r)$ равенствами (84), (87), (88) и (89) функции $\overline{M}(r)$ и $m(r)$. Определенными таким образом функциями $\overline{M}(r)$ и $m(r)$ мы будем пользоваться в дальнейших рассмотрениях. Функцию $\overline{M}(r)$ наравне с $M(r)$ мы будем называть максимумом модуля функции $F(z)$. Функция $\frac{\varphi(\zeta) - \varphi(t)}{\zeta - t}$, где $\varphi(t)$ — характеристическая функция оператора $L(F)$, растущая не скорее показательной, будет целой функцией ζ, растущей также не быст-

рее показательной при любом t. Ассоциированная с ней по Борелю функция $\psi(\zeta, t)$:

$$\psi(\zeta, t) = \frac{1}{\zeta}\int_0^\infty \frac{\varphi\left(\frac{x}{\zeta}\right) - \varphi(t)}{\frac{x}{\zeta} - t} e^{-x}dx, \quad |\zeta| > \sigma, \tag{90}$$

где

$$\sigma = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln \max\limits_{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi} |\varphi(re^{i\varphi})|}{r}, \tag{91}$$

заведомо будет регулярна вне круга $|\zeta| = \sigma$, причем при $|\zeta| \geqslant \sigma_1 > \sigma$ интеграл (90) при любом фиксированном t будет равномерно сходиться. По отношению к t эта функция, как нетрудно убедиться, будет целой функцией, если $|\zeta| \geqslant \sigma$.

Действительно, разлагая $\dfrac{\varphi\left(\frac{x}{\zeta}\right) - \varphi(t)}{x - \zeta t}$ в ряд по степеням ζ и t и интегрируя этот ряд почленно (что возможно в силу абсолютной и равномерной сходимости ряда), мы получаем, что

$$\psi(\zeta, t) = \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n!}\left[\frac{(n-1)!}{\zeta^n} + \frac{(n-2)!}{\zeta^{n-1}}t + \ldots + \frac{t^{n-1}}{\zeta}\right]$$

и

$$\psi_t^{(s)}(\zeta, t) = \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n!}\left[\frac{s!\,(n-s-1)!}{\zeta^{n-s-1}} + \ldots + \frac{(n-1)!}{(n-s-1)!}\,\frac{t^{n-s-1}}{\zeta}\right]$$

будут регулярными функциями ζ и t при $|\zeta| > \sigma$ и $|t| < \infty$, так как $|a_n| = (\sigma + \varepsilon_n)^n$, где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Найдем теперь необходимую нам в дальнейшем оценку интеграла

$$\int_0^\infty \frac{\varphi\left(\frac{x}{\zeta}\right) - \varphi(t)}{x - \zeta t} x^n e^{-x}dx \tag{92}$$

при $|\zeta| = r$, $r > \sigma_1 > \sigma$, $|t| = R$ и произвольном n. Заметив, что при любом $\sigma_1 > \sigma$ имеет место неравенство

$$\left|\frac{1}{\zeta}\,\frac{\varphi\left(\frac{x}{\zeta}\right) - \varphi(t)}{\frac{x}{\zeta} - t}\right| < \frac{1}{r}\sum_{n=1}^\infty \frac{|a_n|}{n!}\sum_{k=0}^{n-1} R^k\left(\frac{x}{r}\right)^{n-k-1} <$$

$$< \frac{C(\sigma_1)}{r}\sum_{n=0}^\infty \frac{\sigma_1^{n+1}}{n!}\left[R^n + \left(\frac{x}{r}\right)^n\right] < \frac{1}{r}C_1(\sigma_1)\left[e^{\sigma_1 R} + e^{\frac{\sigma_1 x}{r}}\right],$$

мы непосредственно получаем оценку

$$\left|\int_0^\infty \frac{\varphi\left(\frac{x}{\zeta}\right)-\varphi(t)}{x-\zeta t} x^n e^{-x} dx\right| < \frac{C_1(\sigma_1)}{r}\int_0^\infty \left[e^{\sigma_1 R}+e^{\frac{\sigma_1 x}{r}}\right] x^n e^{-x}\, dx =$$

$$= \frac{C_1(\sigma_1)}{r} n!\left[e^{\sigma_1 R}+\left(1-\frac{\sigma_1}{r}\right)^{-n-1}\right] < 2\frac{C_1(\sigma_1)}{r} n! e^{\sigma_1 R}\left(1-\frac{\sigma_1}{r}\right)^{-n-1}. \quad (93)$$

Так как при действительных ζ и z, $z>0$, $\zeta - z > \sigma$, будет иметь место представление $\psi(z, t)$:

$$\psi(z, t) = \frac{1}{\zeta}\int_0^\infty \frac{\varphi\left(\frac{x}{\zeta}\right)-\varphi(t)}{\frac{x}{\zeta}-t} e^{-x} dx = \int_0^\infty \frac{\varphi(x)-\varphi(t)}{x-t} e^{-\zeta x} dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\varphi(x)-\varphi(t)}{x-t} e^{-zx} e^{-(\zeta-z)x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\zeta-z}\int_0^\infty \frac{\varphi\left(\frac{x}{\zeta-z}\right)-\varphi(t)}{\frac{x}{\zeta-z}-t} e^{-\left(\frac{z}{\zeta-z}+1\right)x} dx, \quad (94)$$

которое получается простыми заменами переменных в интегралах, то в силу теоремы единственности аналитических функций это представление будет иметь место при любых комплексных ζ и z, подчиняющихся условию

$$\frac{\sigma}{|\zeta-z|} - \operatorname{Re}\left(\frac{z}{\zeta-z}\right) \leqslant \frac{\sigma+|z|}{|\zeta-z|} < 1, \quad (95)$$

сохраняющему абсолютную и равномерную сходимость последнего интеграла в равенствах (94).

Допустим, что на окружности $|t| = R$ нет нулей функции $\varphi(t)$. Тогда функция $u(z, \zeta; R)$:

$$u(z, \zeta; R) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R} \frac{e^{zt}}{\varphi(t)}\psi(\zeta, t)\, dt, \quad (96)$$

будет иметь представление

$$u(z, \zeta; R) = \sum_{|\alpha_k|<R}\sum_{s=0}^{p_k-1} \frac{z^s e^{\alpha_k z}}{s!\,(p_k-s-1)!}\frac{d^{p_k-s-1}}{dt^{p_k-s-1}}\left[\frac{(t-\alpha_k)^{p_k}}{\varphi(t)}\psi(\zeta, t)\right]\Bigg|_{t=\alpha_k} \quad (97)$$

где сумма взята по всем нулям α_k (с кратностями p_k) функции $\varphi(t)$ в круге $|t| < R$. Это представление непосредственно получится, если мы, приняв во внимание, что подынтегральная функция

интеграла (96) может иметь только полюсы в нулях $\varphi(t)$ в круге $|t| \leqslant R$, заменим этот интеграл суммой вычетов по всем полюсам.

Функция $Q(z, R)$ при условии, что $F(z)$ — целая функция,

$$Q(z, R) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=\sigma_1} F(\zeta)\, u(z, \zeta; R)\, d\zeta, \quad \sigma_1 > \sigma, \tag{98}$$

будет вследствие (97) и регулярности $\psi_t^{(s)}(\zeta, t)$ вне круга $|\zeta| > \sigma$, каковы бы ни были s и t, иметь представление

$$Q(z, R) = \sum_{|\alpha_k|<R} \sum_{s=0}^{p_k-1} \frac{z^s e^{\alpha_k z}}{s!\,(p_k - s - 1)!} \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=\sigma_1} F(\zeta) \frac{d^{p_k-s-1}}{dt^{p_k-s-1}} \left[\frac{(t-\alpha_k)^{p_k}}{\varphi(t)} \psi(\zeta, t) \right] \Bigg|_{t=\alpha_k} d\zeta =$$

$$= \sum_{|\alpha_k|<R} \sum_{s=0}^{p_k-1} C_{s,k}\, z^s e^{\alpha_k z} = \sum_{|\alpha_k|<R} P_k(z)\, e^{\alpha_k z}, \tag{99}$$

где степень многочлена $P_k(z)$ строго меньше кратности α_k, а его коэффициенты зависят только от α_k и $F(\zeta)$.

Теорема II. *Если целая функция $F(z)$ с максимумом модуля $\overline{M}(r)$ есть решение уравнения*

$$L(F) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} F^{(n)}(z) = 0 \tag{100}$$

и $\varphi(t)$ — характеристическая функция нормального оператора $L(F)$, то последовательность функций $Q(z, R)$, являющихся линейными агрегатами основных функций $L(F)$, будет равномерно сходиться к $F(z)$ в любом круге $|z| \leqslant \rho_1$, если на окружностях $|t| = R$ выполняются неравенства

$$|\varphi(t)| > e^{-\theta m(R) \cdot R}, \quad \ln \overline{M}[m(r)] = r, \quad R > R_0, \tag{101}$$

где $\theta < \frac{1}{e}$ — произвольная постоянная. Более того, для таких R будет справедливо неравенство

$$|F(z) - Q(z, R)| < C e^{\rho R - \lambda R m(R)}, \quad R > R_0(\lambda, \rho), \tag{102}$$

где $0 < \lambda < \frac{1}{e} - \theta$ не зависит от R и ρ_1.

Следствие 1. По теореме II′ § 1 главы III, если $\sigma_1 > \sigma$, $\ln|\varphi(t)| < \sigma_1 |t|$, $|t| > |t_0|$, то при любом $\rho > \rho_0$ найдется такое R в промежутке

$$\rho \leqslant R \leqslant (1 + \delta)\rho, \quad 0 < \delta < 1,$$

что при этом R и $|t| = R$

$$|\varphi(t)| > e^{-\lambda_0 R \ln \frac{1}{\delta}},$$

где $\lambda_0 > \lambda_0(\sigma_1) > 0$ — постоянная. Для того чтобы выполнялось условие (101), достаточно взять $\delta = e^{-\frac{\theta}{\lambda_0} m(R)}$. Поэтому *всегда существует последовательность функций* $Q(z, R)$, *равномерно сходящаяся к* $F(z)$ *в любом конечном круге.*

Следствие 2. *Если все нули* $\varphi(t)$, *могущие иметь произвольные кратности, различны между собой по модулю и отделяются друг от друга окружностями, на которых имеют место неравенства* (101), *то ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) e^{\alpha n^2},$$

где $P_n(z)$ *определяются равенством* (99), *будет равномерно сходиться в любом конечном круге к функции* $F(z)$.

Доказательство теоремы II. Установим прежде всего некоторые свойства решений уравнения $L(F) = 0$. Если продифференцировать s раз левую часть уравнения $L(F) = 0$, получим

$$L[F^{(s)}(z)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} F^{(n+s)}(z) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z| = \sigma_1} F(\zeta) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+s)!}{n!} a_n \frac{1}{(\zeta - z)^{n+s+1}} \right] d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z| = \sigma_1} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^{s+1}} \int\limits_0^{\infty} x^s \varphi\left(\frac{x}{\zeta - z}\right) e^{-x} dx\, d\zeta = 0, \quad \sigma_1 > \sigma. \tag{103}$$

Далее, вследствие (96) и (94) при $|z| \leqslant \rho$, $\sigma_1 > \sigma$

$$Q(z, R) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta| = \sigma_1} F(\zeta)\, u(z, \zeta; R)\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{|\zeta| = \sigma_1} \zeta^{-1} F(\zeta) \int\limits_{|t| = R} \frac{e^{zt}}{\varphi(t)} \int\limits_0^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{x}{\zeta}\right) - \varphi(t)}{\frac{x}{\zeta} - t} e^{-x} dx\, dt\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{|\zeta| = \sigma_1 + 2\rho} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \int\limits_{|t| = R} \frac{1}{\varphi(t)} \times$$

$$\times \int\limits_0^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{x}{\zeta - z}\right) - \varphi(t)}{\frac{x}{\zeta - z} - t} e^{-z\left(\frac{x}{\zeta - z} - t\right) - x} dx\, dt\, d\zeta. \tag{104}$$

Но при любом t, $|z| \leqslant \rho$ и $\sigma_1 < \sigma$

$$\int\limits_{|\zeta|=\sigma_1+2\rho} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \int\limits_0^\infty \left[\varphi\left(\frac{x}{\zeta - z}\right) - \varphi(t) \right] \frac{e^{-z\left[\frac{x}{\zeta-z}-t\right]}-1}{\frac{x}{\zeta - z} - t} e^{-x}\, dx\, d\zeta =$$

$$= -\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n!} \int\limits_{|\zeta|=\sigma_1+2\rho} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \int\limits_0^\infty \varphi\left(\frac{x}{\zeta - z}\right)\left(t - \frac{x}{\zeta - z}\right)^{n-1} e^{-x} dx\, d\zeta -$$

$$- \varphi(t) \int\limits_{|\zeta|=\sigma_1+2\rho} F(\zeta) \frac{1}{\zeta - z} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-z\left(\frac{x}{\zeta-z}-t\right)}-1}{\frac{x}{\zeta - z} - t} e^{-x} dx\, d\zeta =$$

$$= -\varphi(t) \int\limits_{|\zeta|=\sigma_1+2\rho} F(\zeta) \int\limits_0^\infty \frac{e^{-z\left(\frac{x}{\zeta-z}-t\right)}-1}{x - t(\zeta - z)} e^{-x} dx\, d\zeta \qquad (105)$$

вследствие соотношений (103) и возможности переставлять суммирование и интегрирование, когда $|\zeta| \geqslant \sigma_1 + 2\rho$.

Под знаком последнего интеграла стоит целая функция t. Отсюда непосредственно следует тождество

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{|\zeta|=\sigma_1+2\rho} F(\zeta) \int\limits_{|t|=R} \frac{1}{\varphi(t)} \int\limits_0^\infty \left[\varphi\left(\frac{x}{\zeta - z}\right) - \varphi(t) \right] \times$$

$$\times \frac{e^{-z\left(\frac{x}{\zeta-z}-t\right)}-1}{x - t(\zeta - z)} e^{-x}\, dx\, dt\, d\zeta = 0, \quad (106)$$

так как первые два интеграла можно переставить между собой, после чего из-за соотношения (105) подынтегральная функция будет регулярной по t.

Воспользовавшись тождеством (106), мы получаем новое выражение для $Q(z, R)$, именно:

$$Q(z, R) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{|\zeta|=\sigma_1+2\rho} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \times$$

$$\times \int\limits_{|t|=R} \frac{1}{\varphi(t)} \int\limits_0^\infty \frac{\varphi\left(\frac{x}{\zeta - z}\right) - \varphi(t)}{\frac{x}{\zeta - z} - t} e^{-x}\, dx\, dt\, d\zeta. \quad (107)$$

Каково бы ни было целое положительное число n, всегда будет

иметь место равенство

$$Q(z, R) - \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{|\zeta|=\sigma_1+2\rho} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \times$$

$$\times \int\limits_{|t|=R} \frac{1}{\varphi(t)} \int\limits_0^\infty \frac{\varphi\left(\frac{x}{\zeta - z}\right) - \varphi(t)}{\frac{x}{\zeta - z} - t} \left[\frac{x}{t(\zeta - z)}\right]^n e^{-x}\, dx\, d\zeta\, dt =$$

$$= \frac{-1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{|\zeta|=\sigma_1+2\rho} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \int\limits_{|t|=R} \frac{1}{t\varphi(t)} \times$$

$$\times \int\limits_0^\infty \left[\varphi\left(\frac{x}{\zeta - z}\right) - \varphi(t)\right] \left[\sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{x}{t(\zeta - z)}\right]^k\right] e^{-x}\, dx\, dt\, d\zeta =$$

$$= \frac{-1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{|t|=R} \frac{1}{t\varphi(t)} \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{|\zeta|=\sigma_1+2\rho} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \times$$

$$\times \int\limits_0^\infty \varphi\left(\frac{x}{\zeta - z}\right) \left[\frac{x}{t(\zeta - z)}\right]^k e^{-x}\, dx\, d\zeta\, dt +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{|\zeta|=\sigma_1+\rho} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \int\limits_{|t|=R} \frac{1}{t} \int\limits_0^\infty \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{x}{t(\zeta - z)}\right]^k e^{-x}\, dx\, dt\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{|\zeta - z|=\sigma_1} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} \int\limits_{|t|=R} \frac{k!}{t^{k+1}}\, dt\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z|=\sigma_1} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = F(z) \qquad (108)$$

вследствие возможности переставлять первые два интеграла между собой и соотношений (103). Отсюда окончательно мы получаем основное соотношение

$$Q(z, R) - F(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{|\zeta|=r} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \int\limits_{|t|=R} \frac{1}{t^n \varphi(t)} \times$$

$$\times \int\limits_0^\infty \frac{\varphi\left(\frac{x}{\zeta - z}\right) - \varphi(t)}{\frac{x}{\zeta - z} - t}\, x^n e^{-x}\, dx\, dt\, d\zeta, \qquad (109)$$

справедливое, если $r \geqslant \sigma_1 + \rho$ и на окружности $|t| = R$ нет нулей $\varphi(t)$, при любом целом $n \geqslant 0$.

Мы можем оценить по модулю разность

$$F(z) - Q(z, R), \qquad (110)$$

если воспользуемся условием (101) нашей теоремы и неравенством (93). Придем к неравенству

$$|F(z)-Q(z,R)|<$$
$$<C(\sigma_1)\frac{r\overline{M}(r)}{(r-\rho)^{n+1}}e^{[\sigma_1+\theta m(R)]R}\frac{n!}{R^n}\left(1-\frac{\sigma_1}{r-\rho}\right)^{-n-1}, \qquad (111)$$

справедливому при любых ρ, $r\geqslant\sigma_1+\rho$, $R>0$ и n.

Положив $r=m(n)$, $\ln\overline{M}[m(n)]=n$, воспользовавшись неравенством

$$\left[\left(1-\frac{\rho}{r}\right)\left(1-\frac{\sigma_1}{r-\rho}\right)\right]^{-n}<\left(1-\frac{\rho+\sigma_1}{r-\rho}\right)^{-n}<e^{(2\rho+\sigma_1)\frac{n}{m(n)}}, \qquad (112)$$

верным при $r=m(n)>2\rho+\sigma_1$, и формулой Стирлинга, мы из (111) получаем неравенство

$$|F(z)-Q(z,R)|<C_1(\sigma_1)\frac{\sqrt{n}n^nR^{-n}}{[m(n)]^n}e^{(2\rho+\sigma_1)\frac{n}{m(n)}+[\sigma_1+\theta m(R)]R}. \qquad (113)$$

Считая, что R — радиус окружности, на которой выполняется неравенство (101), задан, выберем n в зависимости от этого R, положив

$$n=[e^{-1}Rm(R)]. \qquad (114)$$

Тогда, так как $m(R)$ и функция $\frac{R}{m(R)}$ — монотонно неубывающие и $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{R}{m(R)}=\infty$,

$$e^{-1}Rm(R)=n+\delta,\quad 0\leqslant\delta<1,\quad R=\frac{(n+\delta)e}{m(R)}<n$$

и

$$e^{-1}Rm(n)>n,\quad R>e\frac{n}{m(n)} \qquad (115)$$

при $R>R_0$. Значит,

$$\sqrt{n}R^{-n}e^{[\sigma_1+\theta m(R)]R}<Rn^{-n}[m(n)]^ne^{-n+[\sigma_1+\theta m(R)]R}<$$
$$<n^{-n}[m(n)]^ne^{-\left[e^{-1}-\theta-\frac{\sigma_1+1}{m(R)}\right]Rm(R)}<n^{-n}[m(n)]^ne^{-[e^{-1}-\theta-\varepsilon]Rm(R)} \qquad (116)$$

при $0<\varepsilon<e^{-1}-\theta$, $R>R(\varepsilon)$. Упрощая неравенство (113), с помощью неравенства (116) придем к неравенству

$$|F(z)-Q(z,R)|<Ce^{\rho R-\lambda Rm(R)},\quad 0<\lambda<e^{-1}-\theta, \qquad (117)$$

другими словами, получим неравенство (102) нашей теоремы. Постоянные C, λ не зависят от $R>R_0$ и ρ.

В качестве примеров рассмотрим два уравнения нашего типа:

$$F'(z)=F(z+1),\quad F(z)=F'(z+1),$$

с характеристическими функциями $t-e^t$ и $1-te^t$. Нули этих функций все первого порядка и попарно комплексно сопряженные, кроме одного действительного нуля $1-te^t$. При больших значениях модуля нули $t-e^t$ будут находиться в точках

$$\pm\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi i+\ln 2|k|+t_{\pm k}, \qquad |t_{\pm k}|<\left|\frac{\ln 2k\pi i}{k\pi}\right|,$$

где k принимает целые положительные значения. Окружностями $|t|=R_k$:

$$R_k=\sqrt{\pi^2\left(2k+\frac{3}{2}\right)^2+[\ln 2k\pi]^2},$$

пары сопряженных нулей будут отделяться друг от друга, и на этих окружностях будет выполняться, как легко подсчитать, неравенство

$$|t-e^t|>R_k;$$

значит, если $F(z)$ — решение уравнения $F'(z)=F(z+1)$ и целая функция, то $F(z)$ представляется равномерно сходящимся рядом

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n e^{\alpha_n z}+b_n e^{\bar{\alpha}_n z}),$$

где α_n и $\bar{\alpha}_n$ — все нули $t-e^t=0$.

Функция $1-te^t$ существенно отличается от $t-e^t$ только тем, что имеет один действительный нуль, так как

$$1-te^t=e^t(e^{-t}-t).$$

Рассуждения, совершенно аналогичные предшествующим, показывают, что и решение уравнения $F(z)=F'(z+1)$ может быть представлено соответствующим равномерно сходящимся в любом конечном круге рядом. Все эти ряды являются в некотором смысле обобщением ряда Фурье, который соответствует уравнению $F(z)=F(z+1)$.

Оценка скорости сходимости функций $Q(z, R)$ к $F(z)$ может быть значительно уточнена и улучшена, когда о росте $\overline{M}(r)$ делаются более конкретные предположения и неравенство (102) заменяется лучшим с помощью представления остаточного члена (110).

Очень подробно и для многих случаев решения общих функциональных уравнений типа (75), когда $\varphi(t)$ — не обязательно функция не выше нормального типа первого порядка, исследованы в большой монографии А. Ф. Леонтьева «Ряды полиномов Дирихле и их обобщения», Труды Математического института им. В. А. Стеклова, т. 38, 1951 г., и в работе А. О. Гельфонда и А. Ф. Леонтьева «Об одном обобщении ряда Фурье», Матем. сб.

29 (71): 3, 1951, к которым за дальнейшими сведениями мы и отсылаем читателя.

3. **Обобщенные функции Бернулли, порождаемые оператором $L(F)$.** Для решения неоднородного уравнения (75) мы введем функции

$$B_n(z, R) = \frac{(n+m)!}{2\pi i} \int\limits_{|t|=R} \frac{e^{zt}\,dt}{t^{n+1}\varphi(t)} \quad [|\varphi(Re^{i\theta})| > 0];$$

которые, как мы сейчас докажем, служат решениями уравнения

$$L[B_n(z, R)] = (n+m)\ldots(n+1)z^n, \tag{118}$$

если характеристическая функция оператора $L(F) - \varphi(t) = t^m\varphi_1(t)$, $\varphi_1(0) = 1$. В частности, когда $L(F) = F(z+1) - F(z)$, $\varphi(t) = e^t - 1$, $B_n(z, R)$ при $R < 2\pi$ будут совпадать с многочленами Бернулли. Итак, пусть на окружности $|t| = R$ нет нулей функции $\varphi(t)$. Мы займемся изучением $B_n(z, R)$:

$$B_n(z, R) = \frac{(n+m)!}{2\pi i} \int\limits_{|t|=R} \frac{e^{zt}\,dt}{t^{n+1}\varphi(t)}. \tag{119}$$

Как нетрудно заметить, при любом R $B_n(z, R)$ будет целой функцией z. Пусть в круге $|t| \leqslant R_0$ нет нулей $\varphi(t)$ кроме, может быть, $t = 0$, когда $\varphi(t) = t^m\varphi_1(t)$, $\varphi_1(0) = 1$.

Тогда, заменяя контур $|t| = R$ на $|t| = R_0$ и вычисляя вычеты подынтегральной функции в кольце $R_0 < |t| < R$, получим новое представление $B_n(z, R)$:

$$B_n(z, R) = \frac{(n+m)!}{2\pi i} \int\limits_{|t|=R_0} \frac{e^{zt}}{t^{n+1}\varphi(t)}\,dt +$$

$$+ (n+m)! \sum_{0<|\alpha_k|<R} \sum_{s=0}^{p_k-1} \frac{z^s e^{\alpha_k z}}{s!\,(p_k-s-1)!} \times \frac{d^{p_k-s-1}}{dt^{p_k-s-1}} \frac{(t-\alpha_k)^{p_k}}{t^{n+1}\varphi(t)}\Bigg|_{t=\alpha_k} =$$

$$= B_{n+m}(z) + \sum_{0<|\alpha_k|<R} P_k(z)\,e^{\alpha_k z}, \tag{120}$$

где степень $P_k(z)$ строго меньше кратности α_k, а $B_{n+m}(z)$ — многочлен степени $n+m$, так как функция $[\varphi_1(t)]^{-1}$ регулярна в круге $|t| \leqslant R_0$ и

$$B_{n+m}(z) = \frac{(n+m)!}{2\pi i} \int\limits_{|t|=R_0} t^{-n-m-1} e^{zt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^k\,dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+m} \frac{(n+m)!\,B_{n+m-k}}{k!\,(m+n-k)!} z^k, \tag{121}$$

т. е. $B_n(z, R)$ является суммой многочлена $B_{n+m}(z)$ и функции $f_R(z)$ — решения уравнения $L(f)=0$, удовлетворяющей условию $|f_R(z)|<e^{R|z|}$ при $|z|>r_0(R)$. Покажем теперь, что для функций $B_n(z, R)$ имеет место соотношение (118). Действительно, при любом R

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k!}B_n^{(k)}(z, R)=\frac{(n+m)!}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k!}\int\frac{t^k e^{zt}}{t^{n+1}\varphi(t)}\,dt=$$

$$=\frac{(n+m)!}{2\pi i}\int\limits_{|t|=R}t^{-n-1}e^{zt}\,dt=(n+m)\ldots(n+1)z^n, \qquad (122)$$

так как

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k!}t^k=\varphi(t).$$

Функция

$$\frac{t^m e^{zt}}{\varphi(t)}=e^{zt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k t^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k(z)}{k!}t^k \qquad (123)$$

будет производящей функцией многочленов $B_n(z)$. Если модуль ближайшего к началу нуля $t^{-m}\varphi(t)$ будет τ, то радиус сходимости ряда (123) будет τ, и мы приходим к важному предельному соотношению, справедливому при любом z:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{B_n(z)}{n!}\right|}=\frac{1}{\tau}. \qquad (124)$$

В общем случае при $|z|\leqslant\rho$ мы из (119) непосредственно получаем неравенство

$$\left|\frac{B_n(z, R)}{(n+m)!}\right|<R^{-n}e^{\rho R}\max_{|t|=R}\left|\frac{1}{\varphi(t)}\right|. \qquad (125)$$

В частности, при $R\leqslant R_0<\tau$ и $|z|=\rho$

$$\left|\frac{B_{n+m}(z)}{(n+m)!}\right|<C(R_0)R^{-n-m}e^{\rho R}, \qquad (126)$$

где $C(R_0)$ — постоянная, не зависящая от R и ρ.

4. Линейные неоднородные уравнения. При изучении поведения частных решений уравнения

$$L(F)=\Phi(z) \qquad (127)$$

нам удобно разбить на подклассы класс целых функций, к которому мы будем предполагать принадлежащей функцию $\Phi(z)$.

Рассмотрим предел

$$A = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r)}{r} = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln \overline{M}(r)}{r}, \tag{128}$$

где $\overline{M}(r)$ — максимум модуля $\Phi(z)$. Мы будем говорить, что *целая функция $\Phi(z)$ принадлежит к первому, второму или третьему классу в зависимости от того, будет ли $A = 0$, $0 < A < \infty$, или $A = \infty$*, т. е. к первому классу принадлежат функции, имеющие рост не выше минимального типа первого порядка, ко второму — функции нормального типа первого порядка, а к третьему — все более быстро растущие функции.

Теорема III. *Если целая функция $\Phi(z)$ принадлежит к первому классу, то существует частное решение уравнения* (127) *$F_0(z)$, принадлежащее к тому же классу, представляющееся равномерно сходящимся в любой конечной части плоскости рядом*

$$F_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n+m)!} B_{n+m}(z), \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n = \Phi(z), \tag{129}$$

где $B_{n+m}(z)$ — связанные с $L(F)$ многочлены, определяемые равенствами (121) *и*

$$|F_0(z)| < C\rho^{m+\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{n!} \rho^n, \quad \rho = |z|, \quad \rho > \rho_0, \tag{130}$$

а постоянная $C > 0$ не зависит от ρ. Всякое другое решение уравнения $L(F) = \Phi$, принадлежащее тоже к первому классу, может отличаться от $F_0(z)$ только многочленом степени не выше $m - 1$.

Доказательство. То, что $F_0(z)$ — решение уравнения $L(F) = \Phi$, легко проверяется, значит, для доказательства первой части теоремы остается убедиться, что $F_0(z)$ удовлетворяет неравенству (130). В неравенстве (126) число $R \leqslant \frac{1}{2}\tau$ можно брать произвольным, и C в этом неравенстве не будет тогда зависеть от R и ρ. Положим

$$R = \frac{e[n!]^{\frac{1}{n+m}}}{\rho} \quad \text{при} \quad e[n!]^{\frac{1}{n+m}} \leqslant \frac{\tau}{2}\rho$$

и $R = \frac{\tau}{2}$ при $\rho\tau < 2e[n!]^{\frac{1}{n+m}}$

Тогда неравенство (126) дает нам $[|z| \leqslant \rho]$

$$\frac{|B_{n+m}(z)|}{(n+m)!} \leqslant \frac{\rho^{n+m} e^{e[n!]^{\frac{1}{n+m}}}}{e^n n!} = \frac{\rho^{n+m}}{n!} e^{e[n!]^{\frac{1}{n+m}} - n}$$

при

$$\frac{\tau}{2}\rho \geqslant e\,[n!]^{\frac{1}{n+m}}$$

и

$$\frac{|B_{n+m}(z)|}{(n+m)!} \leqslant \frac{e^{\frac{\tau\rho}{2}}}{\left(\frac{\tau}{2}\right)^{n+m}} \quad \text{при} \quad \frac{\tau}{2}\rho < e\,[n!]^{\frac{1}{n+m}}.$$

Но если $\tau\rho < 2e\,[n!]^{\frac{1}{n+m}}$, то с помощью формулы Стирлинга получаем неравенство

$$\tau\rho < 2e\,[n!]^{\frac{1}{n+m}} < 3n, \quad \rho > \rho_0, \quad n > n_0.$$

Заметим также, что

$$e\,[n!]^{\frac{1}{n+m}} - n = e\,\{[n!]^{\frac{1}{n+m}} - e^{-1}n\} < n\left[e^{\frac{\ln n}{2n} + \frac{4}{n}} - 1\right] < 5 + \ln\sqrt{n}$$

Поэтому

$$|F_0(z)| < \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \frac{|B_{n+m}(z)|}{(n+m)!} <$$

$$< C_0\rho^{m+\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}\rho^n + \sum_{n > \frac{\tau\rho}{3}} |a_n| \left(\frac{2}{\tau}\right)^{n+m} e^{\tau\frac{\rho}{2}} <$$

$$< C_0\rho^{m+\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{n!}\rho^n + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \left(\frac{2}{\tau}\right)^{n+m} e^{\frac{3}{2}n} < C_1 + C_0\rho^{m+\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{n!}\rho$$

C_1 — постоянная, не зависящая от ρ, $\rho > \rho_0$. Ряд, представляющи C_1, сходится, так как $\Phi(z)$ минимального типа первого порядк и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ (см. главу II, § 1. п. 4).

Итак, первая часть теоремы доказана. Вторая часть доказь вается совсем просто. В самом деле, пусть $F_1(z)$ — другое реше ние уравнения (127), принадлежащее также к первому классу тогда разность $F_1(z) - F_0(z)$ будет также принадлежать к первом классу и удовлетворять уравнению $L(F) = 0$. Но мы уже знаем что если $F(z)$ растет медленнее, чем функция первого порядка типа $\tau - \delta$, $\delta > 0$, и является решением уравнения $L(F) = 0$, то она может быть только многочленом степени не выше $m - 1$. Таким образом, теорема III полностью доказана.

В последующих теоремах обозначения теоремы III будут сохранены.

Теорема IV. *Если $\Phi(z)$ принадлежит ко второму классу, другими словами, целая функция первого порядка нормального типа σ_0, то существует частное решение уравнения* (127):

$$F_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n+m)!} B_n(z, \sigma_1), \quad \sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_0 + \varepsilon, \tag{131}$$

где ε столь мало, что в кольце $\sigma_0 < |t| < \sigma_0 + \varepsilon$ нет нулей $\varphi(t)$, причем ряд (131) *равномерно сходится в любой конечной части плоскости z и $F_0(z)$ — также функция первого порядка и нормального типа σ_0.*

Доказательство. Для того чтобы доказать сходимость ряда (131) и оценить рост $F_0(z)$, достаточно использовать неравенство (125) и вспомнить, что при $n \geqslant 0$ (см. главу II, § 1, п. 4)

$$|a_n| < C_0 \sigma_2^n, \quad \sigma_0 < \sigma_2 < \sigma_1 < \sigma_0 + \varepsilon,$$

где C_0 зависит только от σ_2.

Воспользовавшись тем, что R в неравенстве (125) можно брать любым из промежутка $\sigma_0 < R < \sigma_0 + \varepsilon$, так как величина $B_n(z, R)$ от этого не меняется, и положив $R = \sigma_1$, мы получаем, что

$$|F_0(z)| < C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^n e^{\rho\sigma_1} = C_2 e^{\rho\sigma_1}, \quad \rho = |z|,$$

где C_2 зависит только от σ_2 и $\max\limits_{|t|=\sigma_1} |\varphi(t)|^{-1}$. Это и доказывает нашу теорему, так как σ_1 можно взять сколь угодно близким к σ_0.

Теорема V. *Если $\Phi(z)$ — целая функция третьего класса с максимумом модуля $\overline{M}(r)$, то, каковы бы ни были постоянные $\varepsilon > 0$ и $\theta > 1$, всегда существует решение уравнения* (127):

$$F_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n+m)!} B_n(z, R_n), \tag{132}$$

где R_n подобраны так, чтобы ряд (132) *равномерно сходился в любой конечной части плоскости и выполнялось неравенство*

$$|F_0(z)| < C(\varepsilon, \theta) [\overline{M}(\theta\rho)]^{\frac{1+\varepsilon}{\ln\theta}}, \quad |z| \leqslant \rho, \ \rho > \rho_0. \tag{133}$$

Доказательство. Воспользуемся хорошо известным неравенством

$$|a_n| \leqslant n! \frac{\overline{M}(r)}{r^n}, \tag{134}$$

верным при любом r, в котором положим $r = m\left(\frac{n \ln \theta}{1+\varepsilon}\right)$, $\ln \overline{M}[m(r)] = r$, мы получим тогда, что

$$|a_n| < 2\pi \sqrt{n} e^{-n} n^n \theta^{\frac{n}{1+\varepsilon}} \left[m\left(\frac{n \ln \theta}{1+\varepsilon}\right)\right]^{-n}. \tag{135}$$

Из теоремы II′ § 1 главы III следует, что в промежутке

$$\frac{\theta^{\frac{2}{2+\varepsilon}} n}{m\left(\frac{n \ln \theta}{1+\varepsilon}\right)} \leqslant R_n \leqslant \frac{\theta n}{m\left(\frac{n \ln \theta}{1+\varepsilon}\right)} \tag{136}$$

найдется такое значение R_n, что целая функция $\varphi(t)$, растущая не скорее показательной, на окружности $|t| = R_n$ будет удовлетворять неравенству

$$|\varphi(t)| > \frac{1}{C} e^{-\lambda R_n}, \tag{137}$$

где λ и $C > 0$ не зависят от n. Мы можем записать это выбранное нами значение R в виде

$$R_n = \frac{\theta_1 n}{m\left(\frac{n \ln \theta}{1+\varepsilon}\right)}, \quad \theta^{\frac{2}{2+\varepsilon}} \leqslant \theta_1 \leqslant \theta. \tag{138}$$

Выбрав R_n для любого $n \geqslant 1$ из неравенства (125), взяв $R_0 < 1$ произвольным, но так, чтобы на окружности $|t| = R_0$ $\varphi(t) \neq 0$, мы получаем оценку $F_0(z)$, $|z| \leqslant \rho$:

$$|F_0(z)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R_n^{-n} e^{\rho R_n} \max_{|t| = R_n} \frac{1}{|\varphi(t)|} <$$

$$< C_1 \rho^m + 2\pi C \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} e^{\lambda R_n} \left[\frac{\theta^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}{\theta_1}\right]^n e^{\frac{\theta_1 \rho n}{m(r)} - n}, \quad r = \frac{n \ln \theta}{1+\varepsilon}, \tag{139}$$

где C_1 и C не зависят от n, ρ. Но

$$\theta_1 \geqslant \theta^{\frac{2}{2+\varepsilon}} > \theta^{\frac{1}{1+\varepsilon}}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{R_n}{n} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\theta}{m\left(\frac{n \ln \theta}{1+\varepsilon}\right)} = 0. \tag{140}$$

Поэтому

$$[F_0(z)] < C_1 \rho^m + 2\pi C \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} e^{\lambda R_n} \left[\frac{\theta^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}{\theta_1}\right]^n \max_{m \geqslant 1} e^{\frac{\theta_1 \rho n}{m(r)} - n} <$$

$$< C_1 \rho^m + C_2 \max_{n \geqslant 1} e^{n\left[\frac{\theta_1 \rho}{m(r)} - 1\right]}, \quad r = m\left(\frac{n \ln \theta}{1+\varepsilon}\right), \tag{141}$$

где C_2 — конечная постоянная, так как ряд сходится.

Заметим теперь, что $\max\limits_{n>1} n\left[\frac{\theta_1\rho}{m(r)}-1\right]$ достигается при $m(r)<\theta_1\rho\leqslant\theta\rho$ и что функция

$$\frac{n}{m\left(\frac{n\ln\theta}{1+\varepsilon}\right)}=\frac{1+\varepsilon}{\ln\theta}\frac{\ln\overline{M}\left[m\left(\frac{n\ln\theta}{1+\varepsilon}\right)\right]}{m\left(\frac{n\ln\theta}{1+\varepsilon}\right)}=\frac{1+\varepsilon}{\ln\theta}\frac{\ln\overline{M}(x)}{x} \tag{142}$$

будет неограниченно растущей, монотонно неубывающей функцией x. Поэтому при $r=m\left[\frac{n\ln\theta}{1+\varepsilon}\right]$

$$\max_{n\geqslant 1} e^{n\left[\frac{\theta_1\rho}{m(r)}-1\right]}<\max_{m(r)<\theta_1\rho} e^{\frac{n\theta_1\rho}{m(r)}}<e^{\frac{1+\varepsilon}{\ln\theta}\ln\overline{M}(\theta\rho)},$$

что и доказывает нашу теорему.

Если $\Phi(z)$ — целая функция порядка $\tau\geqslant 1$ и конечного типа σ, то $\ln\overline{M}(r)\leqslant(\sigma+\delta)\rho^\tau$ и неравенство (133) дает

$$|F_0(z)|<Ce^{(\sigma+\delta)\theta^\tau\frac{1+\varepsilon}{\ln\theta}\rho^\tau}<e^{(\sigma+\delta_1)e\tau\rho^\tau},\quad \theta=e^{\frac{1}{\tau}}.$$

Более точные вычисления в этом случае дают неравенство

$$\ln\max_{|z|=\rho}|F_0(z)|<(\sigma+\delta)\rho^\tau,\ |z|=\rho,$$

откуда следует, что теорема V может быть уточнена. За дальнейшими сведениями о решениях неоднородного уравнения $L(F)=\Phi(z)$ мы снова отсылаем читателя к монографии А. Ф. Леонтьева.

Заметим, что благодаря соотношению (101) и неравенству (125) теоремы типа II и V могут быть доказаны и для определенных классов аналитических функций, регулярных в конечных областях.

5. Обобщения понятия периода функции. Мы рассмотрим здесь приложения теории уравнений бесконечного порядка к некоторым задачам теории целых функций.

Хорошо известно, что целая функция не может иметь двух периодов линейно независимых в рациональном поле, если она не сводится к постоянной. Другими словами, целая функция, не равная постоянной, не может быть решением одновременно двух функциональных уравнений:

$$L_1(F)=F(z+\tau_1)-F(z)=0,\ L_2(F)=F(z+\tau_2)-F(z)=0, \tag{143}$$

если отношение $\frac{\tau_1}{\tau_2}$ иррационально. В самом деле, при этом условии характеристические функции операторов L_1 и L_2, $e^{\tau_1 t}-1$ и

$e^{\tau_2 t}-1$ не имеют общих нулей за исключением $z=0$, причем $z=0$ является нулем первого порядка обеих функций. Можно дать обобщение этого факта.

Теорема VI. *Если целая функция $F(z)$ есть решение двух уравнений:*

$$L(F)=0, \qquad L_1(F)=0,$$

$L(F)$ и $L_1(F)$ — нормальные операторы с характеристическими функциями $\varphi(t)$ и $\varphi_1(t)$, не имеющими общих нулей, кроме, может быть, точки $z=0$, где $\varphi(t)$ имеет нуль порядка m, а $\varphi_1(t)$ — порядка m_1, то $F(z)$ может быть только многочленом, степень которого не превышает наименьшего из чисел $m-1$ и m_1-1.

Доказательство. По теореме II последовательность функций $Q(z, R)$, когда R по некоторой последовательности значений уходит в бесконечность, равномерно сходится к $F(z)$, удовлетворяющей уравнению $L(F)=0$.

Из формулы (98) следует, что

$$Q(z, R)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{|\zeta|=\sigma_1} F(\zeta)\int\limits_{|t|=R}\frac{e^{zt}}{\varphi(t)}\int\limits_0^\infty \frac{\varphi\left(\frac{x}{\zeta}\right)-\varphi(t)}{x-t\zeta}e^{-x}\,dx\,dt\,d\zeta=$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\sum_{|\alpha_k|<R}\int\limits_{|\zeta|=\sigma_1} F(\zeta)\int\limits_{|t-\alpha_k|=\varepsilon_k}\frac{e^{zt}}{\varphi(t)}\int\limits_0^\infty \frac{\varphi\left(\frac{x}{\zeta}\right)-\varphi(t)}{x-t\zeta}\,e^{-x}\,dx\,dt\,d\zeta,$$

где в круге $|t-\alpha_k|\leqslant\varepsilon_k$ находится только один нуль $\varphi(t)$. Итак, $Q(z, R)$ состоит из суммы величин

$$w_k(z)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{|\zeta|=\sigma_1} F(\zeta)\int\limits_{|t-\alpha_k|=\varepsilon_k}\frac{e^{zt}}{\varphi(t)}\int\limits_0^\infty \frac{\varphi\left(\frac{x}{\zeta}\right)-\varphi(t)}{x-t\zeta}e^{-x}\,dx\,dt\,d\zeta=$$

$$=\sum_{s=0}^{p_k-1} b_s z^s e^{a_k z},$$

где p_k — кратность нуля a_k, а b_s — постоянные, зависящие от F, φ и α_k.

Покажем, что $w_k(z)\equiv 0$, если $F(z)$ есть также решение уравнения $L_1(F)=0$, и α_k не является нулем $\varphi_1(t)$. С помощью формулы (94) мы получаем, что при $|z|=\rho$

$$w_k(z)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{|\zeta|=\sigma_1+2\rho}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\int\limits_{|t-\alpha_k|=\varepsilon_k}\frac{e^{zt}}{\varphi(t)}\int\limits_0^\infty \frac{\varphi\left(\frac{x}{\zeta-z}\right)-\varphi(t)}{\frac{x}{\zeta-z}-t}\,e^{-\left(\frac{z}{\zeta-z}+1\right)x}\,dx\,dt\,d\zeta,$$

а применяя формулу (106), которая остается верной при замене пути интегрирования $|t| = R$ на $|t - \alpha_k| = \varepsilon_k$, что

$$w_k(z) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{|\zeta|=\sigma_1+2\rho} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \int\limits_{|t-\alpha_k|=\varepsilon_k} \frac{1}{\varphi(t)} \int\limits_0^\infty \frac{\varphi\left(\frac{x}{\zeta - z}\right) - \varphi(t)}{\frac{x}{\zeta - z} - t} e^{-x} dx\, dt\, d\zeta$$

Делая последнее преобразование, заменяя ζ на $\zeta + z$, мы получаем новое выражение для $w_k(z)$:

$$w_k(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{|\zeta|=\sigma_1} F(z+\zeta) \int\limits_{|t-a_k|=\varepsilon_k} \frac{1}{\varphi(t)} \int\limits_0^\infty \frac{\varphi\left(\frac{x}{\zeta}\right) - \varphi(t)}{x - \zeta t} e^{-x} dx\, dt\, d\zeta.$$

Так как $L_1(F) = 0$, то

$$L_1[w_k(z)] =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{|\zeta|=\sigma_1} L_1[F(z+\zeta)] \int\limits_{|t-a_k|=\varepsilon_k} \frac{1}{\varphi(t)} \int\limits_0^\infty \frac{\varphi\left(\frac{x}{\zeta}\right) - \varphi(t)}{x - \zeta t} e^{-x} dx\, dt\, d\zeta = 0.$$

вследствие возможности менять порядки интегрирования и дифференцирования с суммированием в силу аналитичности функции $F(z)$ и равномерной сходимости ряда оператора L_1. Но простое вычисление дает

$$L_1[w_k(z)] = L_1[q_k(z) e^{a_k z}] =$$

$$= e^{a_k z}\left[\varphi_1(\alpha_k) q_k(z) + \frac{\varphi_1'(\alpha_k) q_k'(z)}{1!} + \ldots + \frac{\varphi_1^{(p_k-1)}(\alpha_k) q_k^{(p_k-1)}(z)}{(p_k-1)!}\right] = 0,$$

откуда следует $q_k(z) \equiv 0$, так как $\varphi_1(\alpha_k) \neq 0$, а степени других членов ниже степени $q_k(z)$. Это и доказывает нашу теорему, так как функции $Q(z, R)$ и $Q_1(z, R)$, соответствующие операторам L и L_1, сводятся к многочленам степеней не выше $m - 1$ и $m_1 - 1$. Так как эти функции не зависят от R и должны сходиться к $F(z)$, то и $F(z)$ будет многочленом степени не выше наименьшего из чисел $m - 1$ и $m_1 - 1$. Если же m или m_1 будет нулем, то $F(z) \equiv 0$.

Как нетрудно заметить, доказана не только теорема VI, но и несколько более общая теорема. Именно, если $L(F) = L_1(F) = 0$, а $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ имеют конечное число нулей, то $F(z)$ есть сумма конечного числа произведений многочленов на показательные функции.

Из теоремы VI, например, следует, что целая периодическая функция $F(z)$ с периодом единица не может удовлетворять никакому уравнению

$$\sum_{k=0}^{n} A_k F(z+\alpha k)=0, \qquad \sum_{k=0}^{n} A_k \neq 0,$$

если все A_k — рациональные, а α — алгебраическое иррациональное число. Это утверждение связано с тем, что $e^{2\pi i\alpha}$ — число трансцендентное и, значит, уравнения

$$e^t-1=0, \quad \sum_{k=0}^{n} A_k e^{\alpha k t}=0$$

не имеют общих корней.

Дж. Уиттекер ввел понятие асимптотического периода целой функции. Он называет число τ *асимптотическим периодом* целой функции $F(z)$ конечного порядка σ, если разность

$$F\tau(z)=\Delta_\tau F(z)=F(z+\tau)-F(z) \tag{144}$$

имеет порядок $\sigma_1<\sigma$.

В качестве примера рассмотрим целую функцию второго порядка:

$$F(z)=\sum_{n=0}^{n} e^{(z-n!)n!}.$$

Покажем, что она действительно имеет второй порядок. Для этой функции $M(r)$ записывается весьма просто:

$$M(r)=\sum_{n=0}^{n} e^{(r-n!)n!}.$$

Пусть $n_0!<r<(n_0+1)!$ Тогда $n_0+1<\ln r$,

$$M(r)>e^{[r-(n_0-1)!](n_0-1)!}>e^{\frac{1}{2}n_0!(n_0-1)!}>e^{\frac{1}{2}\ln^{-3}r\cdot r^2}$$

и

$$M(r)<\sum_{k=0}^{n_0+1} e^{(r-k!)k!}+\sum_{n_0+2}^{\infty} e^{-k!}<2e^{r^2\ln r}.$$

Функция $F(z)$ имеет своим асимптотическим периодом любое число $\tau=2\pi i\frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$ — рациональное число. Действительно,

$$\Delta_\tau F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[e^{2\pi i\frac{p}{q}n!}-1\right]e^{(z-n!)n!}=\sum_{n=0}^{q-1}\left[e^{2\pi i\frac{p}{q}n!}-1\right]e^{(z-n!)n!},$$

откуда следует, что $\Delta_\tau F(z)$ имеет порядок не выше первого. Множество асимптотических периодов этой функции всюду плотно на мнимой оси. Можно легко указать целую функцию конечного порядка, имеющую несчетное множество асимптотических периодов на прямой. Возьмем последовательность целых положительных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots, n_1 \geqslant 2$:

$$n_{k+1} = 3^{n_k^3} \prod_{s=1}^{k} n_s, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

и определим функцию $F(z)$ рядом

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{(z-n_k)n_k}.$$

Найдем порядок этой функции. Для этой функции при $n_k \leqslant r < n_{k+1}$, $r > r_0$

$$M(r) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{(r-n_k)n_k} < \sum_{s=1}^{k} e^{(r-n_s)n_s} + 2 < 2e^{rn_k} < 2e^{r^2}$$

и при $r = 2n_k$

$$M(r) > e^{(r-n_k)n_k} = e^{n_k^2} = e^{\frac{1}{4}r^2}.$$

Поэтому порядок $F(z)$ — второй. Всякое число $\tau = 2\pi i\alpha$, если α представимо рядом

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pm 1}{n_k},$$

будет асимптотическим периодом $F(z)$ Множество этих чисел α, очевидно, несчетно. Действительно, так как $\frac{n_k}{n_p}$ — целые числа при $p \leqslant k$, то

$$n_k\alpha = N_k + \sum_{s=k+1}^{\infty} \pm \frac{n_k}{n_s} = N_k + \beta_k, \qquad |\beta_k| < e^{-n_k^3},$$

где N_k — целое число, и

$$|e^{2\pi i n_k \alpha} - 1| = 2|\sin \pi n_k \alpha| = 2|\sin \pi\beta_k| < 2\pi e^{-n_k^3}.$$

Поэтому

$$|\Delta_\tau F(z)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} [e^{2\pi i n_k \alpha} - 1] e^{(z-n_k)n_k}\right| < 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} e^{(r-n_k^2)n_k}.$$

Предполагая, что r находится в интервале $n_k^2 \leqslant r \leqslant n_{k+1}^2$, мы получаем отсюда неравенство

$$|\Delta_\tau F(z)| < \sum_{s=1}^{k} e^{(r-n_k^2)\, n_k} + 2 < 2e^{rn_k} < 2e^{r^{\frac{3}{2}}},$$

другими словами, что порядок $\Delta_\tau F(z)$ не превышает $\frac{3}{2}$.

Асимптотические периоды целой функции обладают тем свойством, что любая линейная форма с целыми рациональными коэффициентами от конечного числа периодов есть также асимптотический период. Это непосредственное следствие того обстоятельства, что сумма любого конечного числа целых функций, порядки которых меньше σ, есть целая функция, порядок которой также меньше σ. Мы рассмотрим возможную структуру множества асимптотических периодов целой функции. Во всех дальнейших рассмотрениях мы будем предполагать, что $F(z)$ не является постоянной. Пусть порядок целой функции будет меньше единицы. Тогда целые функции $F(z)$ и $\Delta_\tau F(z)$ будут принадлежать к первому классу по нашей прежней классификации, и порядок $F(z)$ вследствие теоремы III не может быть больше порядка $\Delta_\tau F(z)$. Поэтому целая функция порядка меньшего единицы, не может иметь асимптотических периодов. Если порядок $F(z)$ есть единица и τ — асимптотический период, то порядок $\Delta_\tau F(z)$ меньше единицы и по теореме III существует целая функция $g(z)$, удовлетворяющая уравнению

$$\Delta_\tau g(z) = \Delta_\tau F(z),$$

имеющая тот же порядок, что и $\Delta_\tau F(z)$, меньший единицы. Функция $F_0(z) = F(z) - g(z)$, имеющая также порядок единица, так как $g(z)$ — порядка, меньшего единицы, будет удовлетворять уравнению

$$\Delta_\tau F_0(z) = \Delta_\tau F(z) - \Delta_\tau g(z) = 0, \tag{145}$$

другими словами, будет периодической функцией. Пусть θ будет любой другой асимптотический период $F(z)$. Тогда целая функция $F_0(z)$ будет иметь это число θ своим асимптотическим периодом, так как

$$\Delta_\theta F_0(z) = \Delta_\theta F(z) - \Delta_\theta g(z) = f(z)$$

и порядки $\Delta_\theta g(z)$ и $\Delta_\theta F(z)$ меньше единицы. Но вследствие (145)

$$\Delta_\tau f(z) = \Delta_\theta \Delta_\tau F_0(z) = 0,$$

откуда по теореме I мы можем утверждать, что $f(z)$ равна постоянной, так как порядок $f(z)$ меньше единицы. Поэтому

$$\Delta_\tau F_0'(z) = 0, \qquad \Delta_\theta F_0'(z) = 0,$$

откуда уже по теореме VI или $F_0'(z)$ — постоянная, или функции $e^{\tau t}-1$ и $e^{\theta t}-1$ должны иметь хотя бы один общий нуль кроме $t=0$. В первом случае $F(z)$ должна отличаться только многочленом первой степени от функции $g(z)$ порядка, меньшего единицы, что противоречит условию. Значит, $e^{\tau t}-1$ и $e^{\theta t}-1$ должны иметь общий нуль, кроме $t=0$. Нули этих функций будут

$$\frac{2k\pi i}{\tau}, \quad \frac{2n\pi i}{\theta}, \quad n, k=\pm 1, \pm 2, \ldots,$$

откуда следует, что $\frac{\theta}{\tau}$ должно быть рациональным числом. Но $F_0'(z)$ — целая функция, не равная постоянной и $\Delta_\theta F_0'(z)=0$. Значит, среди чисел $\theta=\frac{p}{q}\tau$, где p и q — целые, должно быть наименьшее по модулю число θ_0, а все остальные θ суть целые кратные θ_0, $\theta=k\theta_0$, где $k=\pm 1, \pm 2, \ldots$ Мы пришли, таким образом, к теореме:

Теорема VII. *Если порядок $F(z)$ меньше единицы, то $F(z)$ не имеет асимптотических периодов. Если же порядок $F(z)$ равен единице, то все ее асимптотические периоды, если она их имеет, должны образовывать арифметическую прогрессию, $\tau=k\tau_0$, где τ_0 — наименьший по модулю период. Все эти периоды могут лежать только на одной прямой в комплексной плоскости.*

Для дальнейшего нам понадобится вспомогательное предложение, относящееся к теории целых функций.

Теорема VIII. *Если $F(z)$ — целая периодическая функция с периодом τ порядка $\sigma>1$, то $f(z)=F\left(\tau\frac{\ln z}{2\pi i}\right)$ будет однозначной, регулярной в плоскости z всюду, кроме, может быть, точек $z=0$ и $z=\infty$, функцией и*

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n z^n, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\ln[-\ln(|A_n|+|A_{-n}|)]}{\ln n}=\frac{\sigma}{\sigma-1}. \tag{146}$$

Доказательство. Пользуясь хорошо известным представлением коэффициентов $f(z)$, мы будем иметь, что при $n>0$

$$A_{\pm n}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\ln|z|=\pm r} z^{\mp n}F\left(\tau\frac{\ln z}{2\pi i}\right)\frac{dz}{z}. \tag{147}$$

Оценивая по модулю правую часть при $r=[|\tau|^{-\sigma_1}\sigma_1^{-1}n]^{\frac{1}{\sigma_1-1}}$, $n>n_0(\sigma_1)$, принимая во внимание, что при любом $\sigma_1>\sigma$ и $r>r_0(\sigma_1)$ целая функция порядка σ удовлетворяет неравенству

$$|F(z)|<e^{r^{\sigma_1}}, \quad |z|=r,$$

мы получаем неравенство

$$|A_{\pm n}| < e^{-nr+|\tau|^{\sigma_1} r^{\sigma_1}} e^{-\gamma n \frac{\sigma_1}{\sigma_1-1}}, \quad \gamma = (|\tau|\sigma_1)^{-\frac{\sigma_1}{\sigma_1-1}}(\sigma_1-1), \tag{148}$$

верное при $n > n_0(\sigma_1)$ и любом $\sigma_1 > \sigma$. Далее, если при $n > n_0(\sigma_0)$, $1 < \sigma_0 < \sigma$,

$$\ln[-\ln|A_{\pm n}|] > \frac{\sigma_0}{\sigma_0-1}\ln n, \tag{149}$$

то существует такая постоянная $C > 0$, что

$$\left|F\left(\tau\frac{\ln z}{2\pi i}\right)\right| < C\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\frac{\sigma_0}{\sigma_0-1}}|z|^n.$$

Заменяя z на $e^{\frac{2\pi i}{\tau}z}$, мы получаем отсюда

$$|F(z)| < C\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\frac{\sigma_0}{\sigma_0-1}+\frac{2\pi}{|\tau|}nr} < C\sum_{n=0}^{n_1} e^{-n\left[n\frac{1}{\sigma_0-1}-\frac{2\pi}{|\tau|}r\right]} + C_1,$$

где $n_1 = \left[\frac{4\pi}{|\tau|}r\right]^{\sigma_0-1}$. Поэтому

$$|F(z)| < C_2 r e^{\lambda r^{\sigma_0}} \qquad \lambda = \frac{2\pi}{|\tau|}\left(\frac{4\pi}{|\tau|}\right)^{\sigma_0-1}. \tag{150}$$

Неравенства (148) и (150) доказывают предельное соотношение теоремы VIII.

Следствие из теоремы VIII. *Если $F(z)$ — целая периодическая с периодом τ функция порядка $\sigma > 1$ и $f(z) = F\left(\tau\frac{\ln z}{2\pi i}\right)$, то существует бесконечная последовательность целых положительных или отрицательных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$, такая, что существует предел*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln[-\ln|A_{n_k}|]}{\ln n_k} = \frac{\sigma}{\sigma-1}, \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n z^n, \tag{151}$$

откуда при любом $1 < \sigma_0 < \sigma$ и $k > k(\sigma_0)$

$$|A_{n_k}| > e^{-|n_k|\frac{\sigma_0}{\sigma_0-1}}. \tag{152}$$

Докажем теперь общую теорему относительно возможной структуры множества асимптотических периодов целой функции конечного порядка.

Теорема IX. *Если целая функция $F(z)$ конечного порядка имеет асимптотические периоды, то эти периоды обладают следующими свойствами:*

1. *Отношение любых двух периодов должно быть действительным числом.*

2. *Множество всех асимптотических периодов не может иметь меру, отличную от нуля.*

3. *Отношение двух любых периодов будет или рациональным или трансцендентным числом.*

Первые два утверждения доказаны Дж. Уиттекером, а последнее принадлежит автору книги.

Доказательство. Допустим, что θ и τ — асимптотические периоды $F(z)$ и их отношение есть комплексное число. Построим тогда на плоскости z параллелограмм с вершинами в точках $\pm\frac{\theta}{2}$, $\pm\frac{\tau}{2}$. Это будет основной параллелограмм периодов. Всякую точку комплексной плоскости можно представить в виде суммы $z = z_0 + m\tau + n\theta$, где z_0 есть точка основного параллелограмма, а m и n — целые рациональные числа. Из элементарных геометрических соображений следует, что $|m| < \gamma r$, $n < \gamma r$, если $r = |z|$, а число γ зависит только от τ и θ. Положим

$$z_k = z_0 + k\tau, \quad k = 0, \ldots, m; \quad z_k = z_m + (k - m)\theta,$$
$$k = m + 1, \ldots, m + n.$$

Опять из простейших геометрических соображений следует, что

$$|z_k| < \lambda r, \quad k = 0, 1, \ldots, m + n, \text{ если } r = |z| = |z_{n+m}|,$$

где λ зависит только от τ и θ.

Имеет место тождество

$$F(z) = F(z_0) + \sum_{k=0}^{m-1} \Delta_\tau F(z_k) + \sum_{k=m}^{m+n-1} \Delta_\theta F(z_k).$$

Отсюда

$$|F(z)| < C_0 + \gamma r \max_{|z|=\lambda r} |\Delta_\tau F(z)| + \gamma r \max_{|z|=\lambda r} |\Delta_\theta F(z)|.$$

Но порядки функций $\Delta_\tau F(\lambda z)$ и $\Delta_\theta F(z)$ ниже порядка $F(z)$, и мы пришли к противоречию, доказывающему первое утверждение нашей теоремы.

Пусть τ и θ — два любых асимптотических периода. Их отношение $a = \frac{\theta}{\tau}$ действительно. Рассмотрим уравнение

$$\Delta_\tau g(z) = \Delta_\tau F(z). \tag{153}$$

Пусть $\overline{M}(r)$ будет максимум модуля $\Delta_\tau F(z)$. По теореме V, каковы бы ни были $\lambda > 1$ и $\varepsilon > 0$, найдется решение уравнения (153), причем будет выполняться неравенство

$$|g(z)| < [\overline{M}(\lambda r)]^{\frac{1+\varepsilon}{\ln \lambda}}, \quad r > r_0, \quad r = |z|. \tag{154}$$

Так как порядок $\Delta_\tau F(z)$ меньше σ, то и порядок $g(z)$, совпадаю-

щий вследствие этого неравенства с порядком $\Delta_\tau F(z)$, будет меньше σ. Поэтому функция

$$F_0(z) = F(z) - g(z)$$

будет по-прежнему иметь порядок σ и

$$\Delta_\tau F_0(z) = \Delta_\tau F(z) - \Delta_\tau g(z) \equiv 0, \tag{155}$$

другими словами, $F_0(z)$ — периодическая функция с периодом τ.

Так как

$$\Delta_\theta F_0(z) = \Delta_\theta F(z) - \Delta_\theta g(z)$$

и обе функции $\Delta_\theta F(z)$ и $\Delta_\theta g(z)$ имеют порядки, меньшие σ, то множества всех асимптотических периодов функций $F(z)$ и $F_0(z)$ совпадают. Функции $F_0(z)$ и $\Delta_\theta F_0(z)$ — периодические с периодом τ. Рассмотрим ряды

$$F_0\left(\tau \frac{\ln z}{2\pi i}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n z^n, \quad \Delta_\theta F_0\left(\tau \frac{\ln z}{2\pi i}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n z^n. \tag{156}$$

Так как

$$\Delta_\theta F_0\left(\tau \frac{\ln z}{2\pi i}\right) = F_0\left(\tau \frac{\ln z}{2\pi i} + \theta\right) - F_0\left(\tau \frac{\ln z}{2\pi i}\right) =$$

$$= F_0\left[\frac{\tau}{2\pi i} \ln\left(z e^{2\pi i \alpha}\right)\right] - F_0\left(\tau \frac{\ln z}{2\pi i}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \left(e^{2\pi i \alpha n} - 1\right) z^n,$$

то

$$A_n\left(e^{2\pi i \alpha n} - 1\right) = B_n, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{157}$$

По теореме VIII, так как $\Delta_\theta F_0(z)$ имеет порядок $\sigma_1 < \sigma$, для любого n, $|n| = q \geqslant q_0$, $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma$, будет выполняться неравенство

$$|B_n| < e^{-2|n|^{\frac{\sigma_2}{\sigma_2 - 1}}}, \qquad \sigma_2 > 1,$$

и по той же теореме [неравенства (152)] будет существовать такая последовательность n_k, $|n_k| = q_k$, $k = 1, 2, \ldots$, что при любом σ_0, $\sigma_2 < \sigma_0 < \sigma$,

$$|A_{n_k}| > e^{-q_k^{\frac{\sigma_0}{\sigma_0 - 1}}}.$$

Из этих двух неравенств следует при $k > k_0$, что

$$\left.\begin{aligned} 2|\sin \pi n_k \alpha| &< e^{-2q_k^{\frac{\sigma_2}{\sigma_2 - 1}} + q_k^{\frac{\sigma_0}{\sigma_0 - 1}}} < e^{-q_k^\lambda}, \\ \lambda &= \frac{\sigma_2}{\sigma_2 - 1} > 1, \end{aligned}\right\} \tag{158}$$

так как $\dfrac{\sigma_0}{\sigma_0 - 1} < \dfrac{\sigma_2}{\sigma_2 - 1}$.

Допустим, что α иррационально. Тогда из неравенств (158), левая часть которых будет отлична от нуля, непосредственно следует существование последовательности целых чисел p_k, таких, что

$$|q_k\alpha - p_k| < e^{-q_k^{\lambda}}, \ \lambda > 1, \ k = k_0, \ k_0 + 1, \ldots, \quad k_0 = k_0(\alpha). \quad (159)$$

Как показывает неравенство Лиувилля (171) главы II, § 3, п. 4, при $n = 1$ и $H = q_k$ неравенства (159) служат достаточным признаком трансцендентности иррационального числа α. Наконец, как хорошо известно из метрической теории диофантовых приближений, мера множества чисел, для которых справедливы неравенства (159), начиная с некоторого, может быть только нулевой. Докажем это предложение в более общей формулировке. Рассмотрим множество E_δ всех чисел β отрезка $[0,1]$, для которых, начиная с некоторого k, будут справедливы неравенства

$$\left|\beta - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k^{2+\delta}}, \qquad \delta > 0, \qquad (160)$$

где δ фиксировано. Всякое α, принадлежащее отрезку $[0, 1]$ и удовлетворяющее неравенствам (159), будет безусловно удовлетворять и неравенствам (160). Поэтому мера множества чисел β не меньше меры множества чисел α на отрезке $[0, 1]$. Покажем, что мера множества чисел β равна нулю. Фиксируя k, мы построим интервалы $\left|x - \frac{p}{q_k}\right| \leqslant \frac{1}{q_k^{2+\delta}}$ около каждой точки $\frac{p}{q_k}$, $p = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, q_k$, отрезка $[0, 1]$. Общая длина этих неперекрывающихся интервалов будет $2q_k^{-1-\delta}$. Обозначим совокупность этих интервалов Δ_k. Всякая точка β, начиная с некоторого $k \geqslant k_0(\beta)$, будет точкой множества Δ_k, $k \geqslant k_0$. Поэтому мера множества β не больше, чем мера множества $T_k = \Delta_k + \Delta_{k+1} + \ldots$ при произвольном k. Но мера множества T_k может быть оценена сверху. Действительно,

$$m(T_k) < \sum_{s=k}^{\infty} m(\Delta_s) =$$

$$= 2\sum_{s=k}^{\infty} q_s^{-1-\delta} < 2\sum_{s=k}^{\infty} s^{-1-\delta} < \int_{k-1}^{\infty} \frac{dt}{t^{1+\delta}} = \frac{1}{\delta}(k-1)^{-\delta}.$$

Так как k может быть взято сколь угодно большим, то мера множества чисел β, не превосходящая величины $\frac{1}{\delta}(k-1)^{-\delta}$, должна быть равна нулю. Значит, и множество чисел α на $[0, 1]$ имеет

меру нуль. Но так как сумма счетного множества множеств, имеющих меру нуль, сама имеет нулевую меру, то мера множества всех чисел α должна быть равна нулю. Заметим, что все результаты относительно асимптотических периодов могут быть обобщены как в направлении расширения понятия асимптотического периода, так и в направлении расширения класса функций, для которых вводится определение асимптотического периода. Для мероморфных функций при прежнем определении асимптотического периода ряд результатов был получен Дж. Уиттекером.

ЛИТЕРАТУРА ПО ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

С. Н. Бернштейн.

[1] Экстремальные свойства полиномов и наилучшие приближения функций одной вещественной переменной, М.— Л., ОНТИ, 1937.

[2] Конструктивная теория функций как развитие идей Чебышева, Известия АН СССР, серия математическая, 9 (1945), 145—158.

[3] Доказательство теоремы Вейерштрасса с помощью теории вероятностей (фр.), Харьков, Сообщ. Матем. об-ва (2), 13, 1912, стр. 1—2.

А. О. Гельфонд.

[1] Проблема представления и единственности целой аналитической функции первого порядка, Успехи матем. наук, 3 (1937), стр. 144—174.

[2] Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами бесконечного порядка и асимптотические периоды целых функций, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 38, Москва, 1951.

В. Л. Гончаров.

[1] Теория интерполирования и приближения функций, М.— Л., ГТТИ, 1934.

[2] Etude des dérivées successives des fonctions analitiques. I. Géneralisation de la série d'Abel, Ann. Ecole Normale, 47 (1930), 1—78.

[3] Интерполяционные процессы и целые функции, Успехи матем. наук, 3 (1937), стр. 113—143.

Д. Джексон.

[1] Theory of approximation, Amer. Mat. Soc. Colloquium Publications, т. XI, 1930.

А. Ф. Леонтьев.

[1] Ряды полиномов Дирихле и их обобщения, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 39 (1951).

А. А. Марков.

[1] Исчисление конечных разностей, Одесса, 1910.

[2] Избранные труды, ГТТИ, 1947.

И. П. Натансон.

[1] Конструктивная теория функций, ГТТИ, М.— Л., 1949.

Н. Е. Нерлунд.

[1] Differenzenrechnung, Берлин, изд. Шпрингера, 1926.

Д. Селиванов.

[1] Курс исчисления конечных разностей, С.— Пб., 1908.

И. Ф. Стефенсен.

[1] Теория интерполяции, ОНТИ, М.—Л., 1935.

Дж. М. Уиттекер.

[1] The interpolatory function theory, Cambridge Univ. press, 1

П. Л. Чебышев.

[1] Теория механизмов, известных под именем параллелограм ния, т. I, стр. 111—143.

[2] Вопросы о наименьших величинах, связанных с пр представлением функций, Сочинения, т. I, стр. 273—378.

[3] О функциях, мало удаляющихся от нуля при некоторых ве ременной, Сочинения, т. II, стр. 335—356.