МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕЧКА

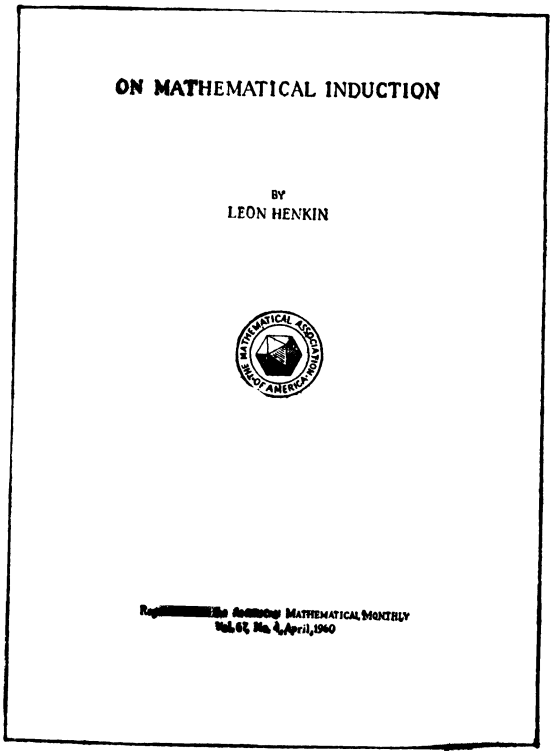
Л. ГЕНКИН

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Перевод с английского
М. Д. ГРИНДЛИНГЕРА и Е. И. ГРИНДЛИНГЕР

Под редакцией
И. М. ЯГЛОМА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1962


ON MATHEMATICAL INDUCTION

BY
LEON HENKIN

MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA

Reprinted from the AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY
Vol. 67, No. 4, April, 1960

Леон Генкин.
О математической индукции.

М., Физматгиз, 1962 г., 36 стр.

Редакторы *Ф. Л. Варпаховский* и *А. Н. Копылова.*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно.* Корректор *А. С. Бакулова.*

Сдано в набор 4/IX 1962 г. Подписано к печати 11/X 1962 г.
Бумага 84 × 108 1/32. Физ. печ. л. 1,125. Условн. печ. л. 1,85. Уч.-изд. л. 1,85.
Тираж 30 000 экз. Цена книги 6 коп. Заказ № 3326.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Московского городского совнархоза. Москва, Ж-54, Валовая, 28.

СОДЕРЖАНИЕ

ВСТУПИТЕЛЬНАЯ СТАТЬЯ

Предлагаемая вниманию читателя работа Л. Генкина «О математической индукции» относится к основаниям арифметики.

Все знают о математике, что это — очень важная и очень сложная наука, но даже специалисты не всегда ясно представляют себе пути ее развития. И, к сожалению, до сих пор лишь немногим известно, что развитие математики вызвало к жизни новую науку — науку об *основаниях математики*. Эта наука, значительную часть которой составляет ядро так называемой *математической логики*, анализирует и совершенствует те методы, которыми пользуется математика при доказательстве своих теорем. Именно этой науке математика обязана верой в незыблемость своих результатов.

Математическая логика, о которой мы упомянули, изучает, кроме того, исчисления, применяемые в современных математических машинах и многих сложных автоматах. В этой связи некоторое, правда довольно поверхностное, знакомство с математической логикой распространяется за последние годы среди инженеров, и название этой области науки ассоциируется с названием еще очень молодой, но многообещающей науки — *кибернетики*. Эта связь между абстрактной теорией и практикой объясняется в данном случае тем, что в основаниях математики доводится до крайних пределов логический анализ методов математических доказательств и вычислений и только после этого анализа становится возможной автоматизация этих методов.

Хотя Л. Генкин в своей работе не пользуется специфическим языком математической логики, эту работу следует отнести к одному из разделов математической логики, а именно к *теории моделей*.

Для того чтобы помочь неспециалисту разобраться в работе, укажем характерные черты современного *аксиоматического метода*, имея прежде всего в виду его применения к арифметике.

Аксиоматический метод, правда, отнюдь не в его современном виде, известен широкой публике из школьного курса геометрии. Основная черта этого метода состоит в том, что каждое утверждение — теорема — доказывается чисто умозрительным путем, а именно посредством логического вывода этой теоремы из ранее доказанных теорем. Но так как этот процесс должен с чего-то начинаться, то некоторые утверждения, именуемые *аксиомами*, принимаются без доказательства, а уже остальные теоремы доказываются затем логическим путем. Аксиомы при этом обычно обосновываются ссылкой на очевидность.

Такой способ построения теории сообщает каждому ее результату ту же степень очевидности, которая присуща аксиомам, и, по мере развития математики на протяжении последних столетий, он распространялся с геометрии и на остальные ее разделы. Однако до конца прошлого столетия аксиоматический метод существовал скорее в теории, чем на практике. Аксиомы формулировались далеко не полностью, и в доказательства, наряду с ними, вторгались недоказанные предложения, считавшиеся очевидными.

Так продолжалось до последних десятилетий прошлого столетия, когда, наконец, в концепции аксиоматического метода наступил переломный момент. Это было в большой мере связано с появлением неевклидовой геометрии Лобачевского — Больаи и возникшей в связи с этим задачей обоснования этой геометрии: нужно было доказать, что евклидова аксиома о параллелях не вытекает из остальных аксиом. Для этого, конечно, потребовалось установить точный перечень аксиом геометрии (такой перечень был предложен Гильбертом [1])), и наступила новая эпоха в понимании аксиоматического метода, характеризующаяся более высоким уровнем строгости.

Не только теоремы должны аккуратно выводиться друг из друга и, в конечном счете, из аксиом, но и все понятия теории должны вводиться не иначе, как посредством определений, выражающих их через ранее введенные понятия.

---

[1]) См., например, статью П. К. Рашевского «Геометрия и ее аксиоматика», сб. «Математическое просвещение», вып. 5, 73—98 (1960). (*Прим. ред.*)

Но так как этот процесс тоже должен иметь начало, то какие-то понятия, именуемые *первоначальными*, должны считаться с самого начала известными — скажем, из интуиции.

В известной степени это, конечно, осознавалось и раньше, и тем не менее до конца прошлого столетия перечень первоначальных понятий математических теорий не уточнялся, и в основаниях математики царила путаница.

Всякое предложение (т. е. аксиома или теорема) перейдет в равнозначное ему по смыслу, если мы выразим посредством определений все входящие в него понятия через ранее введенные и, в конечном счете, через первоначальные. Аксиомы приобретут при этом такую формулировку, в которую входят только первоначальные понятия и соединяющие их логико-грамматические связки (такие, как «если», «на», «каждый» и т. п.; эти связки употребляются в рассуждениях в соответствии с правилами, устанавливаемыми в математической логике). И так как кроме аксиом мы не можем пользоваться в доказательствах никакими другими недоказанными предложениями, то аксиомы содержат в себе все сведения о первоначальных понятиях, которые нам даны для построения аксиоматической теории. В этом смысле на аксиомы следует смотреть как на *определения первоначальных понятий*. (Это суть, впрочем, *неявные* определения, в отличие от тех *явных*, о которых мы говорили выше.)

Всякая аксиоматическая теория, по определению, занимается выводом следствий из определенных аксиом. Изменение этих аксиом есть вместе с тем изменение аксиоматической теории.

Среди первоначальных понятий теории могут иметься: собственно *понятия*, характеризующие род изучаемых объектов (например, точки, прямые, числа и т. п.); *отношения* между объектами одного и того же или различных родов (такие, как: точка A лежит между точками B и C, точки A и B лежат на прямой c, число a меньше числа b и т. п.); *термины*, служащие для обозначения конкретных объектов [например, число 0 (нуль)], и *операции* или функции, определенные над изучаемыми объектами [скажем, движение — в аксиоматике геометрии, групповая операция (сложение или умножение), сопоставляющая двум элементам группы третий элемент,— в аксиоматике группы]. Индивидуальные объекты, роды объектов, отношения и операции, определенные над объектами, образуют то, что принято кратко называть *системой объектов*.

Всякая система объектов, удовлетворяющая аксиомам какой-либо аксиоматической теории (в том смысле, что из аксиом должны получиться истинные предложения, если вместо первоначальных понятий подставить названия этих объектов, родов, отношений и операций), называется *интерпретацией* или *моделью* этой аксиоматической теории. Изучение моделей аксиоматической теории составляет предмет *теории моделей;* этой теории (в применении к аксиоматической теории Пеано, о которой мы скажем ниже) и посвящена статья Генкина.

Предметом изучения аксиоматической теории может служить любая ее модель. Благодаря этому применимость аксиоматической теории шире, чем применимость соответствующей не строго аксиоматизированной теории.

Не имеет смысла говорить об «очевидности» аксиом аксиоматической теории просто потому, что первоначальным понятиям не придается никакого другого смысла, кроме того, что они удовлетворяют аксиомам. Очевидность есть интуитивное понятие, и очевидными (в интересующем нас сейчас смысле) могут быть лишь предложения, относящиеся к таким системам объектов, которые даны нам в интуитивном восприятии. Но благодаря нашей интуиции мы действительно можем строить такие «интуитивные» системы объектов и говорить об очевидности того, что они удовлетворяют аксиомам какой-либо аксиоматической теории.

Теоретически приходится рассматривать и такие системы аксиом, для которых вовсе не существует интерпретации. Имея дело с конкретной аксиоматической теорией, мы заранее не можем знать, допускает ли она интерпретацию.

Важнейшими проблемами, которые встают при изучении аксиоматической теории, являются:

а) *Доказательства непротиворечивости,* т. е. невозможности прийти в ней к логическому противоречию. Противоречивая теория, конечно, не может иметь модели, в то время как существует классическая теорема о том, что *всякая непротиворечивая аксиоматическая теория имеет модель.* Это — знаменитая *теорема Геделя о полноте классического исчисления предикатов,* доказанная им в 1930 г. Заметим, что самое простое и наиболее совершенное в логическом отношении доказательство этой теоремы было дано Л. Генкиным в 1949 г. [1]).

[1]) L. Henkin, The completeness of the firstorder functional calculus, The Journal of symbolic logic 14, 1949, стр. 159—166.

б) Решение вопроса о *полноте аксиоматической теории.* Теория называется *полной*, если всякое предложение, которое можно в ней сформулировать, может быть доказано или опровергнуто на основе ее аксиом. Для большинства аксиоматических теорий, охватывающих аксиоматическое построение обыкновенной арифметики натуральных чисел 0, 1, 2, ..., вопрос о полноте решается отрицательно (теорема Геделя о неполноте, 1931 г.).

в) Решение *проблемы разрешения,* т. е. указание метода, позволяющего для каждого конкретного предложения аксиоматической теории установить, доказуемо ли оно в этой теории. Этот вопрос для большинства аксиоматических теорий также решается отрицательно (теорема Черча, 1936 г.).

Имеются и другие проблемы, о которых мы здесь не будем говорить. Подробное обсуждение основных проблем аксиоматических теорий возможно только на языке математической логики.

Арифметика сравнительно поздно стала аксиоматической теорией. Хотя первые попытки аксиоматизации арифметики встречаются уже в XVIII в. (Христиан Вольф), но более или менее стройная картина, дошедшая до наших дней, возникла только в XIX в. В 40-х годах XIX в. Г. Грассман свел теорию рациональных чисел — положительных и отрицательных — к теории натуральных чисел; эта последняя изучалась затем в ее основах Дедекиндом[1]) (1888 г.), который еще раньше (1872 г.) построил свою знаменитую теорию действительных чисел, связанную с теорией множеств. Затем известный итальянский математик Пеано (1889 и 1891 гг.) построил систему аксиом для арифметики натуральных чисел.

Приводим (с небольшими второстепенными изменениями) *систему аксиом Пеано*:

Первоначальные понятия: *нуль* (0) и *число, следующее за; число, следующее за числом a, обозначается через a'.*

Аксиомы:

I. 0 *есть число, не следующее ни за каким числом.*

II. *Если число a' равно числу b', то и число a равно числу b.*

III. *Если число* 0 *обладает некоторым свойством P и для всякого числа a из того, что a обладает свойством*

---

[1]) R. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen, Braunschweig, 1888.

P, следует, что и число a' обладает свойством P, то всякое число n обладает свойством P.

Отношение «равенство», о котором идет речь в аксиоме II, рассматривается как относящееся скорее к логике, чем к арифметике. Оно характеризуется аксиомами:

1) *для любого числа a имеем $a=a$;*

2) *если $a=b$ и верно некоторое предложение P, то верно и всякое предложение, получающееся из P путем замены в каком-нибудь месте a на b.*

Из этих аксиом следует, в частности, что если $a=b$, то $a'=b'$ (но не то, что из равенства $a'=b'$ следует $a=b$, — это есть аксиома II Пеано), иными словами, что *для всякого числа имеется только одно число, следующее за ним.* В самом деле: по аксиоме 1) $a'=a'$, и если $a=b$, то по аксиоме 2) $a'=b'$, так как это равенство получается из $a'=a'$ путем замены второго a на b. Аналогично доказывается и то, что *если $a=b$, то $b=a$* (так как равенство $b=a$ получается из аксиомы 1) путем замены первого a на b), и что *если $a=b$ и $b=c$, то и $a=c$* (так как если $a=b$, то утверждение «если $b=c$, то $a=c$» получается из логически очевидного предложения «если $a=c$, то $a=c$» путем замены первого a на b).

Последнюю аксиому Пеано, аксиому III, часто называют *аксиомой индукции.* Ей иногда придают другую форму. Именно, считается, что в связи с каждым свойством P можно рассматривать *множество* (т. е. совокупность или систему) тех чисел, которые обладают свойством P и обратно — в связи с каждым множеством чисел можно рассматривать их *свойство,* состоящее в том, что число является элементом этого множества (т. е. принадлежит ему). С помощью понятия множества аксиому III можно сформулировать так:

III′. *Если 0 является элементом некоторого множества G и для всякого числа a из того, что a является элементом G* (в принятых обозначениях: $a \in G$), *следует, что и число a' является элементом G* (т. е. $a' \in G$), *то всякое число n является элементом G.*

Заметим, что аксиома III содержит термин «свойство», а равносильная ей аксиома III′ — термин «множество». Эти термины не принадлежат к числу первоначальных и не были введены посредством определения. Поэтому систему аксиом Пеано можно положить в основу арифметики только в том случае, если понятия «свойство натуральных чисел» или «множество натуральных чисел» считаются известными

из логики, что связано с глубокими трудностями принципиального характера. Л. Генкин в своей работе избирает именно этот путь, не останавливаясь на связанных с ним трудностях. Не будем на них здесь останавливаться и мы.

Леон Генкин известен как автор ряда работ по математической логике. Ему принадлежат важные исследования о полноте логических исчислений; об одном из этих исследований мы упоминали выше. Последние годы он много занимался применениями математической логики — точнее, теории моделей — к проблемам абстрактной алгебры. Эта алгебраическая тенденция нашла выражение и в помещаемой ниже работе.

Эта работа, написанная Л. Генкиным для «Математического просвещения», не потребует от читателя никаких предварительных познаний. Неспециалист получит из нее верное представление о характере многих рассуждений современной теории моделей. Специалисту также интересно будет познакомиться с некоторыми свежими соображениями, относящимися к связи между теорией рекурсивных определений (т. е. определениями по индукции) и теорией моделей, изучение которой составляет предмет работы Генкина.

А. С. Есенин-Вольпин

ВВЕДЕНИЕ

Согласно современным критериям логической строгости каждая ветвь чистой математики должна быть обоснована одним из двух способов: или все ее основные понятия должны быть определены в терминах понятий некоторой предшествующей ветви математики, в таком случае ее теоремы могут быть выведены из теорем предшествующей ветви математики с помощью этих определений; или ее основные понятия берутся как неопределяемые, и ее теоремы выводятся из совокупности аксиом, включающих в себя эти неопределяемые термины.

Натуральные числа 0, 1, 2, 3, ... относятся к тем математическим объектам, которые мы изучали в раннем возрасте, и наши знания об этих числах и их свойствах, вообще говоря, имеют интуитивный характер. Тем не менее, если мы желаем построить точную математическую теорию этих чисел, мы не можем полагаться на несформулированную интуицию как на основу теории, и нам необходимо обосновать теорию одним из двух способов, упомянутых выше. Фактически возможны оба эти способа.

Так, немецкий математик Фреге показал, как, отправляясь от чистой логики и самых элементарных частей теории множеств, определить основные понятия теории чисел таким образом, чтобы затем вся теория могла быть построена, исходя из этих определений. С другой стороны, итальянский математик Пеано, принимая в качестве первоначальных неопределяемых понятий *натуральные числа, нуль* и *следующее за*, дал систему аксиом, на базе которой также может быть построена вся теория натуральных чисел.

В настоящей работе мы рассмотрим понятие *определение по математической индукции* в рамках основных идей

Пеано. В нашем изложении мы принимаем в качестве предпосылки только логику и самые элементарные части теории множеств; однако мы увидим, что наш предмет сильно прояснится после введения терминологии, идущей от современной абстрактной алгебры, хотя для построения наших определений и доказательств мы не используем соответствующий алгебраический материал.

1. МОДЕЛИ И АКСИОМЫ ПЕАНО

Нам будет удобно пользоваться словом *модель* для обозначения системы, состоящей из некоторого множества N, некоторого элемента 0 из N и унарной операции S на N[1]. Модель $\langle N, 0, S\rangle$ будем называть *моделью Пеано*, если она удовлетворяет следующим трем условиям (или аксиомам)[2]:

P1. *Для всех* $x \in N$ $Sx \neq 0$.

P2. *Для всех* $x, y \in N$, *если* $x \neq y$, *то* $Sx \neq Sy$.

P3. *Если* G — *подмножество множества* N, *такое, что* (a) $0 \in G$ *и* (b) *всякий раз, когда* $x \in G$, *также и* $Sx \in G$, *то* $G = N$[3].

Если N^* есть множество натуральных чисел в том виде как мы его знаем по интуиции, 0^* есть число *нуль* и S^*

---

[1]) *Унарная операция на* N — это функция, имеющая N в качестве своей области определения, область значений которой является подмножеством множества N. Для любого $x \in N$ Sx означает элемент из N, полученный применением операции S к x.

[2]) Ср. с формулировкой тех же аксиом в предисловии (стр. 8). (*Прим. ред.*)

[3]) По терминологии теории множеств, P1 и P2 соответственно выражают условия, что 0 *не принадлежит области значений* S и что *операция* S *взаимно-однозначна*. О подмножестве G из N, которое удовлетворяет условию (b) из P3, говорят, что оно *замкнуто относительно* S.

[Если рассматривать $\langle N, S\rangle$ в качестве алгебраической системы, то подмножество G из N, замкнутое относительно S, называется *подалгеброй* системы. Таким образом, условие P3 выражает тот факт, что *единственная подалгебра* $\langle N, S\rangle$, *содержащая элемент* 0, *есть само* N. В алгебраической терминологии это условие формулируется так: *элемент* 0 *порождает алгебру* $\langle N, S\rangle$. Можно также рассматривать саму систему $\langle N, 0, S\rangle$ в качестве алгебраической системы. В этом случае, чтобы подмножество G из N рассматривалось как подалгебра, оно должно содержать 0 и быть замкнутым относительно S. Таким образом, P3 означает, *что единственной подалгеброй из* $\langle N, 0, S\rangle$ *является само* N.]

есть операция «следующее за» (т. е. такая операция, что для любого числа x S^*x есть следующее за ним число), то $\langle N^*, 0^*, S^* \rangle$ — пример модели Пеано. Именно этот пример в первую очередь привел к рассмотрению аксиом Пеано. Заметим, однако, что есть много других моделей Пеано, например система $\langle N', 0', S' \rangle$, где N' — множество всех положительных четных чисел, $0'$ — число *два* и S' — операция прибавления двух.

Условие P3 называется *аксиомой математической индукции*. Будет полезно ввести термин *индукционная модель*, обозначающий любую модель, которая удовлетворяет этой аксиоме. Таким образом, мы видим, что каждая модель Пеано является индукционной моделью. Но обратное утверждение неверно.

Например, пусть N'' — множество, содержащее единственный элемент $0''$, и S'' — единственно возможная унарная операция на N'', т. е. такая операция, что $S''0''=0''$. Тогда ясно, что $\langle N'', 0'', S'' \rangle$ является индукционной моделью; однако это не есть модель Пеано, потому что она не удовлетворяет аксиоме P1. Другой пример: пусть a_0 и a_1 — два различных объекта и пусть N''' является парой $\{a_0, a_1\}$ (т. е. множеством, элементами которого являются только a_0 и a_1). Пусть унарная операция S''' на N''' имеет постоянное значение a_1 (т. е. $S'''x=a_1$ для всех $x \in N$). Тогда $\langle N''', a_0, S''' \rangle$ является индукционной моделью, но не моделью Пеано, потому что она не удовлетворяет аксиоме P2.

Читатель может заметить, что модель $\langle N'', 0'', S'' \rangle$ удовлетворяет P2, а модель $\langle N''', a_0, S''' \rangle$ удовлетворяет P1. Естественно возникнет вопрос, существуют ли индукционные модели, которые не удовлетворяют *ни* P1, *ни* P2? Оказывается, нет: *каждая модель, которая удовлетворяет* P3, *должна также удовлетворять или* P1, *или* P2.

Прямое доказательство этого факта, если использовать только законы логики и элементы теории множеств, найти довольно трудно — предоставим эту работу читателю. Впоследствии мы увидим, что после построения теории определения по математической индукции этот результат можно будет получить достаточно просто.

Теперь рассмотрим следующие два предложения:

P4. *Если y есть такой элемент N, что $y \neq Sx$ для всех $x \in N$, то $y=0$.*

P5. *Для всех* $x \in N$ $x \neq Sx$[1]).

Очевидно, что оба эти предложения верны для модели Пеано $\langle N^*, 0^*, S^* \rangle$ натуральных чисел, известных нам по интуиции; более того, мы можем легко вывести их из аксиом P1 — P3 и тем самым показать, что каждое из них верно для всех моделей Пеано.

Но есть важное различие между предложениями P4 и P5: доказательство P4 использует только аксиому P3, так что P4 *верно для всех индукционных моделей*, в то время как доказательство P5 опирается как на аксиому P3, так и на аксиомы P1 и P2, и наш пример $\langle N'', 0'', S'' \rangle$ показывает, что P5 *верно не для всех индукционных моделей.*

2. ОПЕРАЦИИ, ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Предложения P4 и P5 являются примерами теорем, относящихся к учению о натуральных числах, но мы обычно считаем их математическое содержание довольно тривиальным. Чтобы построить более содержательную теорию, необходимо познакомиться с другими понятиями кроме первоначальных понятий «число», «нуль» и «следующее за»; в первую очередь определим такие центральные понятия, как сложение, умножение, возведение в степень, простое число и т. д.

Рассмотрим сначала операцию *сложения* и исследуем, как она может быть определена.

Сложение есть *бинарная операция,* определенная в множестве натуральных чисел, т. е. функция «$+$» двух переменных, сопоставляющая любой упорядоченной паре $\langle x, y \rangle$ натуральных чисел новое натуральное число, обозначаемое через $x+y$. По идее Пеано, эта функция «$+$» определяется двумя условиями:

$$x+0=x, \tag{1.1}$$

$$x+Sy=S(x+y). \tag{1.2}$$

---

[1]) Для модели Пеано $\langle N^*, 0^*, S^* \rangle$ (множество натуральных чисел) эти предложения означают: P4. Число, не следующее ни за каким числом, есть 0. P5. Ни одно из чисел не следует за самим собой. *(Прим. ред.)*

Интуитивные представления об операции сложения убеждают нас, что эти условия выполняются для всех натуральных чисел x и y.

Но в каком смысле условия (1.1) и (1.2) составляют *определение* сложения? В частности, определяется ли этими условиями некоторая удовлетворяющая им бинарная операция в случае произвольной модели Пеано?

Чтобы получить ясный ответ на эти вопросы, мы рассмотрим сначала одну связанную с ними более общую проблему.

Введение операции при помощи двух равенств (1.1) и (1.2) является примером *определения по математической индукции*. Чтобы описать это понятие в общих терминах, мы должны задать модель Пеано $\langle N, 0, S\rangle$ и вторую модель $\langle N_1, 0_1, S_1\rangle$, которая, однако, не обязана быть моделью Пеано (или даже индукционной моделью). Мы скажем, что два равенства

$$h(0) = 0_1, \tag{2.1}$$

$$h(Sy) = S_1(hy) \tag{2.2}$$

определяют (по математической индукции) функцию h, отображающую N в N_1 (т. е. такую, что $hy \in N_1$ для любого $y \in N$), если для всех $y \in N$ удовлетворяются эти условия[1]). Снова можно задать вопрос: в каком смысле эти условия определяют функцию h? Ответ дает следующая теорема.

Теорема 1. *Для любой модели Пеано* $\mathcal{N} = \langle N, 0, S\rangle$ *и для любой другой модели* $\mathcal{N}_1 = \langle N_1, 0_1, S_1\rangle$ *существует одна и только одна функция* h, *отображающая* N *в* N_1, *которая удовлетворяет* (2.1) *и* (2.2) *для всех* $y \in N$.

Прежде чем перейти к доказательству этой теоремы, выясним ее связь с условиями (1.1) и (1.2).

Пусть $\mathcal{N}$ — произвольная модель Пеано $\langle N, 0, S\rangle$; для каждого $x \in N$ образуем модель Пеано $\mathcal{N}_x = \langle N_x, x, S\rangle$, где N_x — подмножество множества N, образованное элементами x, Sx, $S(Sx)$ и т. д. Применяя теорему 1 к моделям $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}_x$, мы видим, что для каждого $x \in N$ существует единственная функция h_x, отображающая N в себя так, что

---

[1]) Отображение h, удовлетворяющее условиям (2.1) и (2.2), можно назвать *гомоморфизмом*, переводящим $\langle N, 0, S\rangle$ в $\langle N_1, 0_1, S_1\rangle$. *(Прим. ред.)*

выполняются условия

$$h_x 0 = x \tag{3.1}$$

и (для всех $y \in N$)

$$h_x (Sy) = S(h_x y). \tag{3.2}$$

Из существования и единственности такой функции h_x мы и выведем существование единственной бинарной операции сложения на $\langle N, 0, S \rangle$ [1]).

Пусть f — бинарная операция на N, сопоставляющая любым x, $y \in N$ третий элемент fxy, определяемый следующим образом:

$$fxy = h_x y. \tag{4}$$

Используя равенства (4), (3.1), (3.2), заключаем, что f удовлетворяет условиям

$$fx0 = x, \tag{5.1}$$

$$fx(Sy) = S(fxy) \tag{5.2}$$

для всех x, $y \in N$.

Далее, f является единственной бинарной операцией на N, обладающей этими свойствами. В самом деле, пусть g — некоторая бинарная операция на N, удовлетворяющая условиям

$$gx0 = x, \tag{6.1}$$

$$gx(Sy) = S(gxy) \tag{6.2}$$

для всех x, $y \in N$. Сопоставим каждому $x \in N$ унарную операцию g_x на N, такую, что для всех $y \in N$

$$g_x y = gxy. \tag{7}$$

Из (7), (6.1) и (6.2) заключаем, что при любом $x \in N$ выполняются условия

$$g_x 0 = x, \tag{8.1}$$

$$g_x (Sy) = S(g_x y). \tag{8.2}$$

Сравнивая (3.1), (3.2) с (8.1), (8.2), мы замечаем, что $g_x = h_x$ для каждого $x \in N$, так как из теоремы I вытекает единственность функции h_x, определенной условиями

[1]) Для дальнейшего (3, стр. 23) будет полезным отметить, что соображения, на которых будет базироваться этот вывод, носят чисто теоретико-множественный характер и никоим образом не зависят от аксиом P1 — P3.

(3.1) и (3.2). Но отсюда в силу (4) и (7) следует, что $fxy = gxy$ для всех $x, y \in N$, что и означает совпадение бинарных операций f и g на N.

Итак, из теоремы I следует, что для любой модели Пеано $\langle N, 0, S\rangle$ существует единственная бинарная операция f на N, удовлетворяющая (5.1) и (5.2) для всех $x, y \in N$. Эту бинарную операцию мы назовем *сложением*; если обозначить ее символом $+$, то мы заметим, что условия (1.1) и (1.2) суть просто записанные другим способом (5.1) и (5.2). Таким образом, теорема I показывает, что действительно сложение можно определить условиями (1.1) и (1.2).

Перейдем теперь к доказательству теоремы I.

Пусть $\langle N, 0, S\rangle$ — любая модель Пеано и $\langle N_1, 0_1, S_1\rangle$ — произвольная модель. Мы хотим доказать существование единственной функции h, отображающей N в N_1, которая удовлетворяет условиям (2.1) и (2.2) для всех $y \in N$. Иногда для обоснования существования такой функции h (не касаясь пока вопроса единственности) приводят следующее рассуждение.

Ясно, что операция h определена для элемента 0, так как $h0 = 0_1$ в силу (2.1). Далее, если операция h определена для элемента $y \in N$, то она определена и для элемента Sy, поскольку, в силу (2.2), $h(Sy) = S_1(hy)$. Таким образом, если мы положим, что G — множество всех таких $y \in N$, для которых операция h определена, то (a) $0 \in G$ и (b) всякий раз, когда $y \in G$, $Sy \in G$. Применяя аксиому P3, заключаем отсюда, что $G = N$. Таким образом, h определено для всех $y \in N$.

На первый взгляд эти доводы представляются убедительными, но после некоторых размышлений возникают сомнения. В самом деле, в этих рассуждениях мы ссылаемся на некоторую функцию h. Но что такое h? Очевидно, она является функцией, которая удовлетворяет условиям (2.1) и (2.2). Вспомним, однако, что наши рассуждения и предназначены для того, чтобы обосновать существование такой функции; тогда станет ясно, что мы не имеем права использовать в этом рассуждении допущение о том, что мы такую функцию имеем.

Сначала можно подумать, что это возражение представляет собой простую придирку, которую можно устранить путем несущественного изменения рассуждения. Однако на самом деле в нашем рассуждении кроется существенная ошибка, поскольку единственное свойство модели

$\langle N, 0, S\rangle$, которое здесь используется,— это аксиома P3! Поэтому если бы это рассуждение было существенно правильным, то из него следовало бы, что для любой *индукционной* модели $\langle N, 0, S\rangle$ и произвольной модели $\langle N_1, 0_1, S_1\rangle$ существует функция h, отображающая N в N_1 и удовлетворяющая условиям (2.1) и (2.2) для всех $y \in N$. Но, как показывает следующий пример, это утверждение просто неверно.

Пусть $\mathcal{N}''' = \langle N''', a_0, S'''\rangle$ — рассмотренная в § 1 индукционная модель, где N''' состоит всего из двух различных объектов a_0 и a_1; $S'''x = a_1$ для всех $x \in N'''$; T — унарная операция на N''', такая, что $Ta_0 = a_1$ и $Ta_1 = a_0$, и $\mathcal{N}_1'''$ — модель $\langle N''', a_0, T\rangle$. Предположив, что теорема I применима к моделям $\mathcal{N}'''$ и $\mathcal{N}_1'''$, мы заключим, что существует такое отображение h, переводящее N''' само в себя, что для всех $y \in N'''$

$$ha_0 = a_0, \tag{9.1}$$

$$h(S'''y) = T(hy). \tag{9.2}$$

Из (9.2) следует, что $h(a_1) = h(S'''a_0) = T(ha_0)$ и, следовательно, в силу (9.1), $h(a_1) = Ta_0 = a_1$. С другой стороны, применяя (9.2), по-другому получим, что $h(a_1) = h(S'''a_1) = T(ha_1)$, и так как мы уже доказали, что $h(a_1) = a_1$, то $h(a_1) = Ta_1 = a_0$. Но из $h(a_1) = a_0$ и $h(a_1) = a_1$ следует, что $a_0 = a_1$, а это противоречит нашей гипотезе, предполагающей, что a_0 и a_1 различны. Из полученного противоречия следует, что теорема I неприменима к индукционной модели $\mathcal{N}'''$; это показывает a fortiori, что любое доказательство этой теоремы должно использовать, кроме P3, также и аксиому P2; фактически, как мы увидим ниже, должны использоваться все три аксиомы.

Это обстоятельство можно выразить так: *одной аксиомы математической индукции недостаточно для определений по математической индукции*[1]).

Доказательство теоремы I. Пусть $\mathcal{N} = \langle N, 0, S\rangle$ — любая модель Пеано и $\mathcal{N}_1 = \langle N_1, 0_1, S_1\rangle$ — некоторая произвольная модель. Подмножество H из N называется *сегментом*, если 1) $0 \in H$ и 2) всякий раз, когда

---

[1]) Это замечание было ясно высказано Дедекиндом в его знаменитой книге «Was sind und was sollen die Zahlen?» (См. Bemerkungen, параграф 130, раздел 9.)

$Sx \in H$, то и $x \in H$[1]). Назовем *частичной функцией* такую функцию j, которая 1) определена на некотором сегменте H, 2) принимает значения, принадлежащие множеству N_1, причем условия

$$j0 = 0_1, \tag{10.1}$$

$$j(Sx) = S_1(jx) \tag{10.2}$$

выполняются для всех x, таких, что $Sx \in H$.

Лемма 1. *Каждый элемент из N принадлежит области определения какой-либо частичной функции.*

Доказательство. Пусть G — множество элементов N, которые принадлежат области определения какой-либо частичной функции. Ясно, что множество $\{0\}$, содержащее только один элемент 0, можно считать сегментом, так как в силу аксиомы P1, не существует такого x, что $Sx \in \{0\}$. По той же причине функция j с областью определения $\{0\}$ и значением $j0 = 0_1$ является частичной функцией. Следовательно, $0 \in G$.

Теперь допустим, что y — любой элемент G и j — частичная функция, область определения которой H содержит y. Если $Sy \in H$, то Sy также принадлежит к G; поэтому рассмотрим случай, когда $Sy \bar{\in} H$[2]). Обозначим через H' подмножество N, полученное из H прибавлением Sy, и пусть j' есть функция, область определения которой совпадает с H' и значения которой задаются следующим образом: если $x \in H$, то $j'x = jx$, и если $x = Sy$, то $j'x = S_1(jy)$. Ниже мы покажем, что j' является частичной функцией и, следовательно, если $Sy \bar{\in} H$, то (так же как и в противоположном случае, отмеченном выше) $Sy \in G$. Так как G содержит 0 и замкнуто относительно S, то, в силу аксиомы P3 $G = N$. Этим, согласно определению G, и доказывается наша лемма.

Таким образом, чтобы завершить доказательство леммы, нам остается только показать, что *j' является частичной функцией*. Для этой цели рассмотрим сначала область определения H' функции j', включающую множество H и элемент $\{Sy\}$. Так как H — область определения частичной функции, то она является сегментом и, следовательно, $0 \in H$, а поэтому $0 \in H'$. Далее, если x есть любой элемент

---

[1]) Очевидно, что для множества натуральных чисел любой сегмент представляет собой совокупность всех чисел от 0 до некоторого числа k включительно.

[2]) $\bar{\in}$ означает — «не принадлежит». *(Прим. ред.)*

из N, такой, что $Sx \in H'$, то также и $x \in H'$, ибо а) если $Sx \in H$, то $x \in H$, потому что H — сегмент; б) если $Sx = Sy$, то $x = y$ по аксиоме P2, и опять $x \in H$ (так как мы знаем, что $y \in H$). Эти рассуждения показывают, что H' *является сегментом.*

Далее, $j'0 = j0 = 0_1$ и $j'(Sx) = S_1(j'x)$ всякий раз, когда $Sx \in H'$. Последнее равенство базируется на раздельном рассмотрении тех же двух случаев, что и выше: а) если $Sx \in H$, то $x \in H$, так что

$$j'(Sx) = j(Sx) = S_1(jx) = S_1(j'x);$$

б) если $Sx = Sy$, то $x = y$ и, следовательно,

$$j'(Sy) = S_1(jy) = S_1(j'y).$$

Так как область определения j является сегментом и j' удовлетворяет условиям (10.1) и (10.2), то j' есть частичная функция. Таким образом, лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если j_1 и j_2 — две частичные функции и x принадлежит области определения каждой из них, то $j_1x = j_2x$.*

Доказательство. Пусть G — множество таких элементов x из N, что $j_1x = j_2x$ всякий раз, когда j_1 и j_2 — частичные функции, область определения каждой из которых содержит x. Ясно, что $0 \in G$, так как $j0 = 0_1$ для любой частичной функции j.

Пусть теперь x — произвольный элемент G, а j_1 и j_2 — произвольные частичные функции, область определения каждой из которых содержит Sx. Тогда $j_1(Sx) = S_1(j_1x)$ и $j_2(Sx) = S_1(j_2x)$. Но так как $x \in G$, то $j_1x = j_2x$ и, следовательно, $j_1(Sx) = j_2(Sx)$. Поэтому $Sx \in G$. Так как $0 \in G$ и G замкнуто относительно S, то по аксиоме P3, $G = N$. На основании определения множества G мы заключаем, что лемма 2 справедлива.

Из лемм 1 и 2 следует, что для любого $x \in N$ имеется один и только один элемент $z \in N_1$, такой, что $z = jx$ для любой частичной функции j, область определения которой содержит x (хоть одна такая функция найдется). Пусть h — функция с областью определения N, такая, что для любого $x \in N$ значение hx определяется именно этим $z \in N_1$. Мы утверждаем, что эта функция h при всех $y \in N$ удовлетворяет условиям (2.1) и (2.2) и что она есть *единственная* функция с областью определения N, которая обладает этим свойством.

Ясно, что $h0 = 0_1$, так как $j0 = 0_1$ для любой частичной функции j. Далее, для любого $y \in N$ имеется такая частичная функция j, что Sy принадлежит области определения j (по лемме 1). Отсюда мы заключаем, что $h(Sy) = j(Sy) = S_1(jy) = S_1(hy)$, так что h действительно удовлетворяет условиям (2.1) и (2.2). Далее, если h_1 — любая другая функция с областью определения N, которая удовлетворяет (2.1) и (2.2) для всех $y \in N$, то $h_1 = h$. Это вытекает из того, что N, очевидно, есть сегмент, так что обе функции h и h_1 являются частичными и, следовательно, в силу леммы 2, $hx = h_1x$ для всех $x \in N$. А это и означает совпадение функций h и h_1.

Этим завершается доказательство теоремы I.

Это доказательство гораздо сложнее приведенного вначале простого рассуждения, но зато оно имеет перед ним то бесспорное преимущество, что оно правильно. Читатель может заметить, что в этом доказательстве были использованы все аксиомы P1 — P3 (в связи с леммой 1).

Построение h с помощью частичных функций, использованное в этом доказательстве,— не единственный известный нам способ определения этой функции. Существует и другой метод построения h, приводящий к другому доказательству теоремы I.

Наметим кратко этот другой процесс построения, предоставляя читателю восполнить детали доказательства.

Исходя из данной модели Пеано $\langle N, 0, S\rangle$ и произвольной модели $\langle N_1, 0_1, S_1\rangle$, рассмотрим подмножества A множества $N \times N_1$ (произведения N и N_1), т. е. такие множества A, элементами которых являются *упорядоченные пары* $\langle x, y\rangle$, где $x \in N$, $y \in N_1$. Подобное множество A мы назовем *регулярным*, если $\langle 0, 0_1\rangle \in A$ и если каждый раз, когда $\langle x, y\rangle \in A$, то и $\langle Sx, S_1y\rangle \in A$. Очевидно, регулярные множества существуют (например, само множество $N \times N_1$). Далее легко видеть, что пересечение A^* всех регулярных множеств A само есть регулярное множество. Теперь, используя аксиомы P1 — P3, справедливые для модели $\langle N, 0, S\rangle$, можно показать, что для каждого $x \in N$ есть один и только один $y \in N_1$, такой, что $\langle x, y\rangle \in A^*$ (детали этого доказательства предоставляем читателю восполнить самостоятельно).

Показав это, мы определяем h как функцию с областью определения N, такую, что для любого $x \in N$ hx есть единственный элемент $y \in N_1$, для которого $\langle x, y\rangle \in A^*$. Из того факта, что A регулярно, легко следует, что h удовлетворяет условиям теоремы I (т.е. h есть гомоморфизм N в N_1). Наконец, чтобы показать единственность h, мы рассмотрим любой гомоморфизм h_1 N в N_1. Нетрудно видеть, что подмножество B из $N \times N_1$, такое, что $\langle x, y\rangle \in B$ тогда и только тогда, когда $y = h_1x$, регулярно, и следовательно, $A^* \subseteq B$. Из того, что для каждого $x \in N$ имеется только один $y \in N_1$, такой, что $\langle x, y\rangle \in B$, мы заключаем, что $A^* = B$, а из этого легко следует, что $h_1 = h$. Этим замечанием мы закончим изложение схемы второго доказательства теоремы I.

3. СЛОЖЕНИЕ И УМНОЖЕНИЕ В ПРОИЗВОЛЬНЫХ ИНДУКЦИОННЫХ МОДЕЛЯХ

Как мы заметили раньше, из теоремы I следует существование в каждой модели Пеано единственной операции сложения [т. е. бинарной операции f, которая удовлетворяет условиям (5.1) и (5.2) для всех $x, y \in N$]. Фактически справедливо нечто большее, а именно:

Теорема II. *В каждой индукционной модели имеется единственная операция сложения.*

Доказательство этой теоремы нельзя базировать на теореме I, так как последняя, как это было показано в § 2, имеет место не для всех индукционных моделей. Вместо нее мы воспользуемся следующей леммой:

Лемма. *Если $\langle N, 0, S\rangle$ — любая индукционная модель, то для каждого $x \in N$ существует единственная унарная операция h_x на N, такая, что условия* (3.1) *и* (3.2) *справедливы для всех $y \in N$.*

Доказательство. Сначала заметим, что для любого $x \in N$ может существовать самое большее одна операция h_x, удовлетворяющая условиям (3.1) и (3.2). Действительно, предположим, что h_x и h'_x — две операции, удовлетворяющие этим условиям, и допустим, что G — такое подмножество N, что $y \in G$ тогда и только тогда, когда $h_x y = h'_x y$. Ясно, что $0 \in G$, так как $h_x 0 = x = h'_x 0$. Кроме того, множество G замкнуто относительно S, так как если $y \in G$ (так что $h_x y = h'_x y$), то $h(Sy) = S(h_x y) = S(h'_x y) = h'_x(Sy)$, откуда следует, что $Sy \in G$. Так как аксиома P3 справедлива для $\langle N, 0, S\rangle$, мы заключаем, что $G = N$, а значит, $h_x = h'_x$.

Пусть теперь H — подмножество N, состоящее из тех элементов x, для которых существует операция h_x. Обозначим через h_0 тождественную операцию на N (т. е. такую, что $h_0 y = y$ для всех $y \in N$). Мы видим, что $h_0 0 = 0$ [таким образом, выполняется (3.1)], и для любого $y \in N$ $h_0(Sy) = Sy = S(h_0 y)$ [таким образом, выполняется (3.2)]. Следовательно, $0 \in H$. Далее, H замкнуто относительно S. Действительно, положим $x \in H$, так что операция h_x существует. Пусть h_{Sx} есть такая операция на N, что $h_{Sx} y = S(h_x y)$ для всех $y \in N$; в таком случае $h_{Sx} 0 = S(h_x 0) = Sx$ [следовательно, для Sx выполняется

(3.1)]; в то же время для любого $y \in N$

$$h_{Sx}(Sy) = S(h_x(Sy)) = S(S(h_x y)) = S(h_{Sx} y),$$

[следовательно, для Sx выполняется (3.2)]. Отсюда вытекает, что $Sx \in H$. Применяя аксиому P3, которая по предположению справедлива для $\langle N, 0, S\rangle$, заключаем, что $H = N$, что и доказывает лемму.

Используя эту лемму, мы можем завершить доказательство теоремы II точно таким же рассуждением, какое было использовано ранее для вывода существования операции сложения из теоремы I. Пусть читатель обратит внимание на то, что в **2**[1]) мы использовали теорему I, чтобы получить утверждение, аналогичное настоящей лемме; как там отмечено, конец рассуждения носит теоретико-множественный характер, не зависит от аксиом P1 — P3 и поэтому может применяться к индукционной модели теоремы II.

При рассмотрении умножения мы оказываемся в положении, совершенно аналогичном тому, с которым мы встретились здесь для сложения. Под операцией *умножения* для индукционной модели $\langle N, 0, S\rangle$ мы понимаем такую бинарную операцию «$\cdot$» на N, что при всех $x, y \in N$ имеют место условия:

$$x \cdot 0 = 0, \tag{11.1}$$

$$x \cdot (Sy) = (x \cdot y) + x; \tag{11.2}$$

здесь «$+$» означает операцию сложения для этой модели.

Используя доказательство, аналогичное данному выше для теоремы II, мы можем показать, что ***в каждой индукционной модели имеется одна и только одна операция умножения***[2]). Предоставляем читателю самому провести доказательство.

4. ОПЕРАЦИИ В МОДЕЛЯХ ПЕАНО, ПОЛУЧАЕМЫЕ ПУТЕМ ПРИМИТИВНОЙ РЕКУРСИИ

Когда мы переходим к операции возведения в степень, положение меняется.

Под операцией *возведения в степень* для индукционной модели $\langle N, 0, S\rangle$ мы подразумеваем такую бинарную

---

[1]) Стр. 16.

[2]) Напомним, что модели Пеано являются частными случаями индукционных моделей. *(Прим. ред.)*

операцию exp [1]), что для всех x, $y \in N$ имеют место условия

$$x \exp 0 = S0, \tag{12.1}$$

$$x \exp (Sy) = (x \exp y) \cdot x. \tag{12.2}$$

Здесь знак «·» означает операцию умножения для этой модели. На этот раз не существует теоремы, аналогичной теореме II, так что утверждение «для каждой индукционной модели существует операция возведения в степень» просто неверно. Противоречащим примером является рассмотренная в 2 [2]) модель $\langle N''', a_0, T\rangle$, состоящая из двух различных объектов a_0 и a_1, в которой $N''' = \{a_0, a_1\}$ и $Ta_0 = a_1$, $Ta_1 = a_0$. В самом деле, если бы exp было бинарной операцией на N''', удовлетворяющей условиям (12.1) и (12.2) для всех x, $y \in N'''$, то из (12.2) следовало бы, что $a_0 \exp a_0 = (a_0 \exp a_1) \cdot a_0$ и поэтому $a_0 \exp a_0 = a_0$ в силу (11.1); с другой стороны, из (12.1) следует $a_0 \exp a_0 = Ta_0 = a_1$. Это противоречие показывает, что $\langle N''', a_0, T\rangle$ не имеет никакой операции возведения в степень.

Однако, применяя теорему I, мы можем показать, что *каждая модель Пеано имеет единственную операцию возведения в степень*. В самом деле, можно получить следующий более общий результат, из которого данное утверждение выводится как частный случай:

Теорема III. *Пусть $\langle N, 0, S\rangle$ — любая модель Пеано, f — унарная операция на N и g — тернарная операция на N* [3]). *Тогда существует одна и только одна бинарная операция j на N* [4]), *такая, что для всех x, $y \in N$ выполняются условия*

$$jx0 = fx, \tag{13.1}$$

$$jx(Sy) = gxy(jxy). \tag{13.2}$$

---

[1]) В привычных символах: $x \exp y = x^y$. Условия (12.1) и (12.2) представляют собой: $x^0 = 1$ (если назвать число $S0$, следующее за нулем, единицей) и $x^{y+1} = x^y \cdot x$. *(Прим. ред.)*

[2]) На стр. 18.

[3]) То есть сопоставляющая каждым трем элементам из N четвертый элемент из N. *(Прим. ред.)*

[4]) Об этой функции j говорят, что она получена из f и g путем *примитивной рекурсии*.

Вообще, n-арную операцию j (при любом $n = 1, 2, \ldots$) можно получить из $(n-1)$-арной операции f и $(n+1)$-арной операции g (случай $n = 2$ мы выбрали только для краткости, так как идея доказательства одна и та же при любом n).

В частном случае, когда f такая унарная операция на N, что $fx = S0$ для всех $x \in N$, и g — такая тернарная операция на N, что $gxyz = z \cdot x$ для всех x, y, z, полученная функция j, очивидно, будет степенной[1]).

Доказательство. Как было замечено в процессе доказательства теоремы II[2]), достаточно показать, что для каждого $x \in N$ существует единственная унарная операция j_x на N, такая, что для всех $y \in N$

$$j_x 0 = fx, \tag{14.1}$$

$$j_x Sy = gxy(j_x y); \tag{14.2}$$

показав это, мы сможем вывести теорему III из общего теоретико-множественного рассуждения, которое справедливо для всех моделей (т. е. не использует ни одной из аксиом P1 — P3). Рассмотрим теперь множество $N_1 = \langle N \times N \rangle$ всех упорядоченных пар $\langle y, z \rangle$, где $y, z \in N$: пусть 0_x (где $x \in N$ произвольно) есть элемент $\langle 0, fx \rangle$ из N_1, а S_x — унарная операция на N_1, такая, что $S_x \langle y, z \rangle = \langle Sy, gxyz \rangle$ для всех x, $y \in N$. Применяя теорему I к модели Пеано $\langle N, 0, S \rangle$ и модели $\langle N_1, 0_x, S_x \rangle$, мы заключим, что для каждого $x \in N$ имеется единственное отображение h_x N в N_1, такое, что равенства

$$h_x 0 = 0_x, \tag{15.1}$$

$$h_x(Sy) = S_x(h_x\ y) \tag{15.2}$$

имеют место для всех $y \in N$.

Далее, пусть L и R — такие два отображения N_1 в N, что для всех x, $y \in N$ $L\langle x, y \rangle = x$ и $R\langle x, y \rangle = y$ и j_x и k_x (где $x \in N$ произвольно) — такие две унарные операции на N, что $j_x y = R(h_x y)$ и $k_x y = L(h_x y)$ для всех $y \in N$. Мы покажем, что при всех $y \in N$ операция j_x удовлетворяет условиям (14.1) и (14.2). Для этого предварительно надо доказать, что $k_x y = y$ для всех $y \in N$. Допустим, что G — подмножество N, состоящее из тех элементов y, для которых $k_x y = y$. Так как $k_x 0 = L(h_x 0) = L 0_x = L\langle 0, fx \rangle = 0$, то $0 \in G$. Далее, пусть y — любой элемент G. Тогда, в силу (15.2), $k_x(Sy) = L(h_x(Sy)) = L(S_x(h_x y))$. По определению S_x

---

[1]) Точнее, показательно-степенной функцией $jxy = x^y$. Действительно, (13.1) и (13.2) дают $jx0 = S0$ (т. е. $x^0 = 1$); $jx(Sy) = gxy(jxy) = j(xy) \cdot x$ (т. е. $x^{y+1} = x^y \cdot x$). *(Прим. ред.)*

[2]) Стр. 23.

имеем:

$$S_x(h_x y) = \langle S(L(h_x y)),\quad gx(L(h_x y))(R(h_x y))\rangle = \\ = \langle S(k_x y),\ gx(k_x y)(j_x y)\rangle,$$

так что $k_x(Sy) = L(S_x(h_x y)) = S(k_x y)$. Так как $y \in G$, то отсюда $k_x(Sy) = Sy$, поэтому $Sy \in G$.

Таким образом, мы показали, что множество G замкнуто относительно S, и так как аксиома P3 справедлива для $\langle N, 0, S\rangle$, мы заключаем, что $G = N$, т. е. $k_x y = y$ для всех $y \in N$.

Возвращаясь снова к полученной формуле

$$S_x(h_x y) = \langle S(k_x y),\ gx(k_x y)(j_x y)\rangle,$$

мы видим, что теперь ее можно упростить следующим образом:

$$S_x(h_x y) = \langle Sy,\ gxy(j_x y)\rangle.$$

Так как $j_x(Sy) = R(h_x(Sy)) = R(S_x(h_x y))$, мы сразу получаем, что $j_x(Sy) = gxy(j_x y)$, а это показывает, что j_x удовлетворяет условию (14.2).

С другой стороны, $j_x 0 = R(h_x 0) = R0_x = fx$, так что j_x удовлетворяет также условию (14.1).

Чтобы закончить доказательство теоремы III, остается показать, что j_x является *единственной* унарной операцией на N, которая удовлетворяет этим двум условиям; это рассуждение можно провести по той же схеме, с помощью которой мы вывели из теоремы I существование единственной операции сложения для любой модели Пеано, — проверить это мы предоставляем читателю.

5. ОТНОШЕНИЕ МЕЖДУ МОДЕЛЯМИ ПЕАНО И ИНДУКЦИОННЫМИ МОДЕЛЯМИ

Почему операции сложения и умножения существуют в каждой индукционной модели, в то время как операцию возведения в степень можно гарантировать только для моделей Пеано? Чтобы ответить на этот вопрос, мы должны сначала понять, какое отношение существует между моделями Пеано и более общими индукционными моделями. Оказывается, с алгебраической точки зрения это отношение является очень простым и естественным.

Пусть $\mathcal{N} = \langle N, 0, S\rangle$ и $\mathcal{N}_1 = \langle N_1, 0_1, S_1\rangle$ — две любые модели. Говорят, что $\mathcal{N}_1$ есть *гомоморфный образ* $\mathcal{N}$,

если существует гомоморфизм h модели $\mathcal{N}$ на модель $\mathcal{N}_1$, т. е. функция h, область определения которой есть N и область значений — все множество N_1, такая, что $h0 = 0_1$ и $h(Sx) = S_1(hx)$ для всех $x \in N$.

Теорема IV. *Пусть $\mathcal{N} = \langle N, 0, S\rangle$ — модель Пеано и $\mathcal{N}_1 = \langle N_1, 0_1, S_1\rangle$ — произвольная модель. Чтобы модель $\mathcal{N}_1$ была гомоморфным образом $\mathcal{N}$, необходимо и достаточно, чтобы она являлась индукционной моделью.*

Доказательство необходимости. Предположим, что $\mathcal{N}_1$ — гомоморфный образ $\mathcal{N}$, и пусть h — гомоморфизм $\mathcal{N}$ на $\mathcal{N}_1$. Пусть G_1 — любое подмножество N_1, такое, что $0 \in G_1$ и G_1 замкнуто относительно S_1. Чтобы доказать, что $\mathcal{N}_1$ является индукционной моделью, достаточно показать, что $G_1 = N_1$.

Для этой цели мы рассмотрим подмножество G из N, содержащее те и только те элементы x, для которых $hx \in G_1$. Так как $h0 = 0_1$, то $0 \in G$. Множество G замкнуто относительно S. Действительно, пусть $x \in G$ таково, что $hx \in G_1$. Тогда $S_1(hx) \in G_1$, так как G_1 замкнуто относительно S_1. Но $h(Sx) = S_1(hx)$, так как отображение h есть гомоморфизм. Таким образом, $h(Sx) \in G_1$ и, значит, $Sx \in G$; следовательно, G замкнуто относительно S. Так как $\langle N, 0, S\rangle$ удовлетворяет аксиоме P3, то $G = N$. Это значит, что $hx \in G_1$ для всех $x \in N$. Из того, что область определения h совпадает с N, а область значений — с N_1, мы заключаем, что $G_1 = N_1$.

Доказательство достаточности. Предположим, что $\langle N_1, 0_1, S_1\rangle$ — индукционная модель. Так как $\langle N, 0, S\rangle$ — модель Пеано, то мы можем применить теорему I, из которой следует, что существует (единственный) гомоморфизм h, преобразующий $\mathcal{N}$ в $\mathcal{N}_1$. Чтобы закончить доказательство, остается только показать, что область значений функции h охватывает все множество N_1.

Ясно, что область значений h содержит 0_1, так как $h0 = 0_1$. Она замкнута относительно S_1, так как для любого элемента z из области значений h должен существовать элемент $x \in N$, такой, что $hx = z$; отсюда следует, что $S_1 z = S_1(hx) = h(Sx)$, так что $S_1 z$ тоже принадлежит области значений h. Но $\mathcal{N}_1$ удовлетворяет аксиоме P3; следовательно, область значений h есть N_1, что и требовалось доказать.

Из теоремы IV следует важное и хорошо известное следствие:

Теорема V. *Любые две модели Пеано изоморфны*[1]).

Доказательство. Пусть $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}_1$ — две любые модели Пеано. По теореме IV существует гомоморфизм h, преобразующий $\mathcal{N}$ в $\mathcal{N}_1$ и гомоморфизм h_1, преобразующий $\mathcal{N}_1$ в $\mathcal{N}$. Ясно, что сложная функция (h_1h), т. е. унарная операция на N, определяемая для всех $x \in N$ равенством $(h_1h)\,x = h_1(hx)$ есть гомоморфизм $\mathcal{N}$ в $\mathcal{N}$. Но по теореме I существует только один гомоморфизм $\mathcal{N}$ в $\mathcal{N}$, и очевидно, что таким гомоморфизмом является тождественная операция на $\mathcal{N}$. Следовательно, $(h_1h)\,x = x$ для всех $x \in N$. Отсюда легко следует, что h взаимно-однозначно, поэтому h есть изоморфизм моделей $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}_1$.

Принципиальное значение теоремы состоит в следующем метаматематическом[2]) следствии:

Если взять какое-то обширное множество предложений, содержащих символы «N», «0» и «S», то любое предложение из этого множества, справедливое для одной модели Пеано, будет справедливо также и для всякой другой модели Пеано.

Таким образом, если предложение из этого множества справедливо для некоторой частной модели Пеано, например для системы $\langle N^*, 0^*, S^*\rangle$ натуральных чисел, известных нам из интуиции, то оно будет справедливо и для всех других моделей Пеано, а следовательно, будет являться логическим следствием из аксиом P1 — P3. Множество предложений, к которому применим этот вывод, содержит все те предложения о моделях, которыми мы интересуемся в настоящей работе. Соответственно этому в дальнейшем, вместо того чтобы говорить о произвольной модели Пеано, мы можем говорить о системе $\langle N^*, 0^*, S^*\rangle$ натуральных чисел.

В теореме II мы видели, что для каждой индукционной модели $\mathcal{N} = \langle N, 0, S\rangle$ определена единственная операция сложения «$+$». В свете теоремы IV, указывающей на тесную связь модели N с системой натуральных чисел $\mathcal{N}^* = \langle N^*, 0^*, S^*\rangle$, естественно исследовать отношение между операцией «$+$» в $\mathcal{N}$ и операцией сложения «$+^*$»

---

[1]) То есть существует гомоморфное отображение одной из них на другую, являющееся взаимно-однозначным (*изоморфное отображение*).

[2]) *Метаматематика* — название науки, содержащей общую теорию доказательств (термин был введен Д. Гильбертом). См. С. К. Клини, Введение в метаматематику, М., 1957. (*Прим. ред.*)

в системе $\mathcal{N}^*$. Эта постановка вопроса приводит к следующему результату:

Теорема VI. *Пусть* $\mathcal{N} = \langle N, 0, S \rangle$ — *любая индукционная модель и* «$+$» — *ее операция сложения; пусть* h — *однозначно определенный гомоморфизм, преобразующий* $\mathcal{N}^*$ *в* $\mathcal{N}$. *Тогда для всех* $x, y \in N^*$ *имеет место свойство* $h(x +^* y) = hx + hy$.

Доказательство. Пусть x — любой элемент множества N^* и G — такое подмножество N^*, что $y \in G$ тогда и только тогда, когда $h(x +^* y) = hx + hy$. Так как $h(x +^* 0^*) = hx = hx + 0 = hx + h0^*$, то $0^* \in G$. Далее, пусть y — любой элемент G. Тогда $h(x +^* y) = hx + hy$, так что

$$h(x +^* S^* y) = h(S^*(x +^* y)) = S(h(x +^* y)) = S(hx + hy) = \\ = hx + S(hy) = hx + h(S^* y),$$

а следовательно, $S^* y \in G$. Из замкнутости G относительно S^* в силу аксиомы P3 (справедливой для $\mathcal{N}^*$) мы заключаем, что $G = N^*$, что и доказывает теорему.

В принятых в теории множеств и алгебре терминах можно выразить содержание теоремы VI так: *операция* «$+$» *на* N *является* (при гомоморфизме h) *образом операции* «$+^*$» *на* N^*. Соответствующая теорема для умножения также справедлива и может быть доказана, по существу, тем же способом. Хорошо известен следующий общий результат, относящийся к общим алгебраическим системам:

Если уравнение тождественно удовлетворяется в одной системе, то оно будет удовлетворяться в любом гомоморфном образе системы (где каждая входящая в уравнение операция первоначальной системы заменена операцией второй системы, являющейся ее образом при этом гомоморфизме).

Отсюда следует, что такие тождества, как ассоциативный, коммутативный и дистрибутивный законы, справедливые для операций «$+^*$» и «$\cdot^*$» в системе $\mathcal{N}^*$, будут справедливы и для операций «$+$» и «$\cdot$» в любой индукционной модели.

Этот факт может быть выведен и непосредственно, без использования какого-либо результата, справедливого для общих алгебраических систем; рассмотрев обычный вывод этих законов для моделей Пеано, получаемый из соотношений (1.1), (1.2), (11.1) и (11.2), мы обнаружили бы, что используется только аксиома P3, в то время как ни P1, ни P2 нигде не используются.

6. ОТНОШЕНИЯ КОНГРУЭНТНОСТИ

Существует еще одно обстоятельство, касающееся гомоморфизмов, которое хорошо известно для общих алгебраических систем и может быть установлено непосредственно для моделей, составляющих объект нашего исследования. Это — тесная связь гомоморфизмов с отношением конгруэнтности. Под *отношением конгруэнтности* для модели $\mathcal{N} = \langle N, 0, S \rangle$ подразумевается такое отношение эквивалентности R на множестве N[1]), что из xRy следует $(Sx)\,R\,(Sy)$[2]).

Пусть h — любой гомоморфизм модели $\mathcal{N}$ в некоторую другую модель; тогда отношение R_h такое, что для любых $x, y \in N$ мы имеем xR_hy в том и только в том случае, когда $hx = hy$ является отношением конгруэнтности. Обратно для каждого отношения конгруэнтности R в модели $\mathcal{N}$ существует гомоморфизм h, отображающий $\mathcal{N}$ на некоторую другую модель $\mathcal{N}_R$ так, что $R_h = R$.

Чтобы по заданным модели $\mathcal{N}$ и отношению конгруэнтности R построить модель $\mathcal{N}_R$, возьмем для каждого элемента $x \in N$ все эквивалентные ему элементы: они образуют некоторый «класс эквивалентности» x_R. Множество этих классов для всех $x \in N$ примем в качестве множества N_R,

---

[1]) Отношение эквивалентности на множестве N — это такое рефлексивное, симметричное и транзитивное бинарное отношение R, для которого N является как областью определения, так и областью значений. *Для каждого такого отношения R существует разбиение множества N на непересекающиеся подмножества, причем два элемента принадлежат одному и тому же подмножеству тогда и только тогда, когда эти элементы находятся в отношении R* (это весьма простое обстоятельство имеет чисто теоретико-множественный характер). Подмножество, содержащее элемент x, называется *множеством эквивалентности элемента x относительно R*; мы обозначим его через x_R. [Бинарное отношение xRy называется *рефлексивным*, если имеет место xRx, *симметричным*, если из xRy следует yRx, и *транзитивным*, если из xRy и yRz следует xRz. *(Прим. ред.)*]

[2]) Приведем простой пример отношения конгруэнтности. Пусть N — множество целых чисел, $Sx = x + m$ (m — некоторое целое число), а отношение xRy есть сравнимость x и y по модулю p [$x \equiv y \pmod p$]. Тогда 1) $x \equiv x \pmod p$, 2) если $x \equiv y \pmod p$, то $y \equiv x \pmod p$, 3) если $x \equiv y \pmod p$ и $y \equiv z \pmod p$, то $x \equiv z \pmod p$, и, наконец, 4) если $x \equiv y \pmod p$, то и $x + m \equiv y + m \pmod p$. Следовательно, сравнимость двух чисел есть отношение конгруэнтности. Этот пример будет специально рассмотрен ниже; мы увидим, что он является частным случаем более общего соотношения конгруэнтности в множестве натуральных чисел. *(Прим. ред.)*

а в качестве операции S_R — такую, что $S_R x_R = (Sx)_R$ для всех $x \in N$ и $x \in x_R$ (существование этой операции следует из того, что R — отношение конгруэнтности на N), и положим $\mathcal{N}_R = \langle N_R, 0_R, S_R \rangle$.

Если мы определим h как функцию, отображающую N на N_R и такую, что $hx = x_R$ для всех $x \in N$, то легко увидим, что h есть гомоморфизм $\mathcal{N}$ на $\mathcal{N}_R$ и что $R_h = R$ (т. е. из xRy следует $hx = hy$ и обратно).

Если h_1 и h_2 — гомоморфизмы $\mathcal{N}$ соответственно на модели $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ и если $R_{h_1} = R_{h_2}$, то $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ изоморфны. Отсюда следует, что каждый гомоморфный образ модели $\mathcal{N}$ изоморфен одной из моделей $\mathcal{N}_R$, определенных (способом, описанным выше) некоторым отношением конгруэнтности R на N.

Следовательно, на основании теорем IV и V *каждая индукционная модель изоморфна модели $\mathcal{N}^*_R$, определенной некоторым отношением конгруэнтности R в системе $\mathcal{N}^*$ натуральных чисел.*

Оказывается, мы можем дать явное описание всех отношений конгруэнтности на модели $\mathcal{N}^*$ в терминах хорошо известного отношения порядка — отношения «$<$» на $\mathcal{N}^*$[1]).

Именно, пусть m, n — любые элементы множества N^* натуральных чисел. Мы определим отношение конгруэнтности $R_{m,n}$ на N^* посредством следующего правила: $xR_{m,n}y$ тогда и только тогда, когда справедливо одно из следующих двух условий:

1) $x, y < n$ и $x = y$;

2) $x, y \geqslant n$ и для некоторого $z \in N^*$ имеет место либо $x = y +^* (z \cdot^* m)$, либо $y = x +^* (z \cdot^* m)$.

Теорема VII. *Бинарное отношение R на множестве N^* является отношением конгруэнтности в модели $\mathcal{N}^*$ тогда и только тогда, когда оно либо является отношением тождества в $\mathcal{N}^*$, либо существуют числа $m, n \in N^*$, такие, что $R = R_{m,n}$.*

---

[1]) Это отношение порядка можно ввести внутри аксиоматической теории $\mathcal{N}^*$ (т. е. в теории моделей Пеано), положив по определению, что $x < y$ тогда и только тогда, когда существует элемент $z \neq 0$, для которого $x +^* z = y$. Так как каждая индукционная модель обладает функцией сложения, мы можем воспользоваться этим определением, чтобы определить отношение «$<$» в каждой индукционной модели; но в общем случае отношение, полученное таким образом, не будет отношением порядка.

Предоставляем доказательство этой теоремы читателю, ограничась лишь следующими указаниями.

Если R — отношение конгруэнтности, отличное от отношения тождества, то должен существовать хотя бы один $x \in N^*$, такой, что xRy для некоторого $y \neq x$. Выберем в качестве n наименьшее из этих чисел x. Из выбора n следует, что имеются числа $z \neq 0$, такие, что $nR(n + {}^*z)$; выберем m наименьшим из этих чисел z. Тогда можно показать, что $R = R_{m,n}$.

Отношения конгруэнтности $R_{m,0}$ являются так называемыми «конгруэнтностями по модулю», хорошо изученными в теории чисел [1]). Индукционная модель $\mathcal{N}^*_{R_{m,0}}$, соответствующая такому отношению, есть просто система классов вычетов по модулю m, а операции сложения и умножения в этой модели являются обычными операциями $+ \pmod m$ и $\cdot \pmod m$. Отношение конгруэнтности $R_{m,n}$ для $n > 0$, по-видимому, мало отражено в литературе [2]); однако достаточно небольшого размышления, чтобы читатель мог получить ясное интуитивное представление о моделях $\mathcal{N}^*_{R_{m,n}}$, так же как и о соответствующих операциях сложения и умножения.

Между прочим, очевидно, что если R — одно из «модулярных» отношений конгруэнтности $R_{m,0}$, то S^*_R является перестановкой элементов N^*_R, так что $\mathcal{N}^*_R$ в этом случае удовлетворяет аксиоме P2. С другой стороны, если R — одно из отношений конгруэнтности $R_{m,n}$ для $n > 0$, то ясно, что $0^*_R \neq S^*_R x_R$ для всех $x_R \in N^*_R$, так что $\mathcal{N}^*_R$ удовлетворяет в этом случае аксиоме P1. Таким образом, каждая индукционная модель удовлетворяет P1 или P2, что уже отмечалось в **1**.

Пусть f — любая операция на N^*, для определенности — бинарная операция. Если R есть произвольное отношение конгруэнтности на $\mathcal{N}^*$, то, вообще говоря, не существует ни одной бинарной операции g на N^*_R, которая является гомоморфным образом f при гомоморфизме h, соответствующем R. Нетрудно видеть, что необходимым и достаточным условием для существования такой гомоморфной операции g слу-

---

[1]) В теории чисел принято писать $x \equiv y \pmod m$ вместо $xR_{m,0}y$. [См. сноску [2]) на стр. 30. (*Прим. ред.*)]

[2]) Краткое упоминание о нем имеется в статье H. S. Vandiver, Bull. Amer. Math. Soc. **40** (1934), стр. 914—920.

жит то, что для всех x, x_1, y, $y_1 \in N^*$, таких, что xRx_1 и yRy_1, имеет место условие $(fxy)R(fx_1y_1)$. Если это условие справедливо, то g есть такая операция на N^*_R, что $gx_Ry_R = (fxy)_R$ для всех x, $y, \in N^*$.

Например, хотя $2 \equiv 2 \pmod 3$ и $0 \equiv 3 \pmod 3$, мы имеем $2^0 \not\equiv 2^3 \pmod 3$. Следовательно, операция возведения в степень в N^* не имеет гомоморфного образа в $N^*_{R_3,0}$. С другой стороны, $+^*$ и $\cdot^*$ суть примеры так называемых *универсальных (бинарных) операций* на N^*, т. е. они являются операциями f, обладающими тем свойством, что для любого отношения конгруэнтности R на N^* $(fxy)\ R(fx_1y_1)$, если x, y, x_1, y_1 — такие элементы N^*, что xRx_1 и yRy_1[1]). Именно в силу этого обстоятельства каждая индукционная модель обладает операциями сложения и умножения.

Предположим, что операция j на N^* получена путем примитивной рекурсии[2]) из универсальных операций f и g[3]); является ли эта операция j обязательно универсальной? Пример операции возведения в степень показывает, что это может не иметь места. Однако если j окажется коммутативной, то она будет универсальной: это может быть показано путем обобщения доказательства теоремы II. Таким образом, вследствие некоммутативности операции возведения в степень на множестве N^* натуральных чисел невозможно вывести существование операции возведения в степень в каждой индукционной модели путем соответствующего распространения доказательства теоремы II.

Конечно, при высказанных условиях коммутативность, *достаточная* для универсальности, ни в коем случае *не является необходимой*. Например, операция j, такая, что $jxy = x^2 \cdot y$ для всех x, $y \in N^*$, есть универсальная операция, и она получается путем примитивной рекурсии из универсальных функций f, g, таких, что $fx = 0$ и $gxyz = z + x^2$ для всех x, y, $z \in N^*$, но j не коммутативна.

---

[1]) Мы можем называть f *модулярной операцией*, если она обладает этим свойством для всех модулярных отношений конгруэнтности R (и не обязательно для других отношений конгруэнтности). Интересную характеризацию модулярных операций дал N. G. Bruijn [см. Proc. Kon. Ned. Akad Wetenschap, Amsterdam, серия A, **58** (Indigationes Math. **17**), 1955, стр. 363—367].

[2]) См. сноску [4]) на стр. 24.

[3]) Ясно, что приведенное выше определение универсальных бинарных операций без труда переносится и на случай n-арных операций, где n любое. *(Прим. ред.)*

7. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ МОДЕЛЕЙ ПЕАНО

В 2 мы видели, что основанием для определения по математической индукции в модели $\mathcal{N}$ является существование единственного гомоморфизма $\mathcal{N}$ в какую-нибудь другую модель; таким образом, теорема I служит основанием всех определений по математической индукции для моделей Пеано.

Оказывается, *это свойство характерно для моделей Пеано — единственных моделей, в которых все определения по математической индукции могут быть обоснованы.*

Теорема VIII. *Пусть $\mathcal{N}$ — такая модель, что для любой модели $\mathcal{N}_1$ имеется единственный гомоморфизм h, преобразующий модель $\mathcal{N}$ в $\mathcal{N}_1$. Тогда $\mathcal{N}$ есть модель Пеано.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{N} = \langle N, 0, S\rangle$ удовлетворяет условию теоремы. Мы покажем сначала, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет аксиоме P3. С этой целью допустим, что G — любое подмножество N, которое содержит 0 и замкнуто относительно S. Пусть H — дополнение подмножества G (в множестве N); допустим, что H непусто.

Рассмотрим взаимно однозначное отображение k множества H на множество P, не пересекающееся с N, и обозначим через M объединение множеств N и P.

Определим унарную операцию T на M следующим образом:

1) если $x \in N$, то $Tx = Sx$;
2) если $x \in H$ и $Sx \in H$, то $T(kx) = k(Sx)$;
3) если $x \in H$ и $Sx \in G$, то $T(kx) = Sx$.

Пусть $\mathcal{M}$ — модель $\langle M, 0, T\rangle$. Ясно, что отображение h_1 множества N в M, такое, что $h_1 x = x$ для всех $x \in N$, является гомоморфизмом $\mathcal{N}$ в $\mathcal{M}$. С другой стороны, рассмотрим следующее отображение h_2 множества N в M:

1) если $x \in G$, то $h_2 x = x$;
2) если $x \in H$, то $h_2 x = kx$.

Нетрудно видеть, что h_2 также является гомоморфизмом и h_2 отлично от h_1. Но это противоречит условию нашей теоремы, и следовательно, не верно допущение, что H непусто.

Итак, H пусто, т. е. $G = N$. Поэтому модель $\mathcal{N}$ должна быть индукционной.

Из теоремы IV мы можем теперь заключить, что существует гомоморфизм h' модели $\mathcal{N}^*$ на $\mathcal{N}$. С другой стороны, условие нашей теоремы утверждает, что имеется гомоморфизм h модели $\mathcal{N}$ в $\mathcal{N}^*$. Как и в доказательстве теоремы V, мы рассмотрим сложную функцию (hh'), которая является гомоморфизмом $\mathcal{N}^*$ в себя и, следовательно (по теореме I), должна быть тождественной операцией на $\mathcal{N}^*$. Стало быть, гомоморфизм h' взаимно однозначен и поэтому является изоморфизмом $\mathcal{N}^*$ на $\mathcal{N}$. Это доказывает теорему.

Из теоремы VIII вытекает, что *любое доказательство теоремы* I *должно использовать все аксиомы* P1 — P3, как и утверждалось в **2**.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы закончили обсуждение понятия определения по математической индукции в теории чисел, опирающееся на аксиоматическое обоснование этой теории, данное Пеано. В математической литературе используются и другие типы индуктивных определений, например определения по *трансфинитной индукции* или по *индукции в некоторых типах частично-упорядоченных систем*. Многие из идей этой работы можно обобщить, включив и эти другие типы индукции.

Метод изложения материала в этой работе, может быть, и претендует в некоторой степени на оригинальность, но кое-какие из приведенных здесь доказательств хорошо известны математикам. В особенности это касается двух доказательств теоремы I (одно из них изложено детально, а другое только намечено). Как указывает профессор А. Чёрч (Alonzo Church), первое доказательство дано венгерским математиком Л. Кальмаром (L. Kalmár), идея же второго принадлежит П. Лоренцену, а также Д. Гильберту и П. Бернайсу, которые получили это доказательство независимо друг от друга и опубликовали свои работы почти одновременно [1]).

Доказательство теоремы II принадлежит Е. Ландау [2]), который приписывает его Л. Кальмару. Однако Ландау не заметил значение того факта, что доказательство не использует аксиом P1 и P2 [3]).

---

[1]) Статья Кальмара появилась в Acta Sci. Math. (Szeged) (9, № 4 (1940), стр. 227—232), статья Лоренцена в Monatschr. Math. und Phys. (47 (1938—39), стр. 356—358), а доказательство Гильберта и Бернайса — в дополнении к т. 2 их книги «Grundlagen der Mathematik».

[2]) См. Э. Ландау, Основы анализа, ИЛ, 1947.

[3]) Только что я познакомился со статьей, некоторые идеи которой тесно связаны с идеями этой работы: M. Lenz, Zur Mathematik der Zahlen, Acta Math. Acad. Sci. Hungar, 9 (1958), стр. 33—44. [Примечание добавлено автором 2/X 1958.— *Ред.*]