И. М. ГЛАЗМАН
Ю. И. ЛЮБИЧ

КОНЕЧНОМЕРНЫЙ ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ

И. М. ГЛАЗМАН, Ю. И. ЛЮБИЧ

КОНЕЧНОМЕРНЫЙ ЛИНЕ́ЙНЫЙ АНАЛИЗ

В ЗАДАЧАХ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1969

517.2
Г-52
УДК 517.5

Книга предназначается для активного изучения расширенного курса линейной алгебры и основ функционального анализа. Многие теории и построения, представленные в книге, являются конечномерными моделями соответствующих оригинальных теорий и построений из функционального анализа. При этом, сохраняя свое идейное содержание, они становятся существенно более доступными. В целом книгу можно рассматривать как изложение линейной алгебры с точки зрения функционального анализа. Но вместе с тем в ней встречаются также некоторые существенно конечномерные теории. Весь материал книги изложен в форме задач на доказательство.

Вначале рассматриваются геометрия комплексного линейного пространства и спектральная теория линейных операторов в этом пространстве. Затем изучается унитарное пространство, в котором строится спектральная теория самосопряженных и унитарных операторов. Далее вводится понятие нормы, рассматриваются геометрия нормированных пространств и некоторые свойства операторов в этих пространствах. После некоторого отступления в область полилинейной и внешней алгебры вводится вещественное линейное пространство и рассматриваются вопросы, связанные с комплексификацией и декомплексификацией, а также элементы дифференциального исчисления для отображений. На основе излагаемой далее теории выпуклых множеств изучаются вопросы расположения собственных значений и сингулярных чисел линейных операторов После этого в вещественном линейном пространстве вводится отношение порядка и в упорядоченном пространстве строится теория линейных неравенств, а также теория линейной и выпуклой оптимизации. Далее, уже в комплексном пространстве, систематически излагается теория расширений операторов, и в заключение рассматриваются некоторые специальные классы операторов.

2-2-3
169-68

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Композитор Людвиг Шпор, живший на рубеже XVIII—XIX столетий, мало известен современной широкой публике. Правда, его скрипичные концерты до сих пор еще звучат в стенах консерваторий, но симфонии и оперы его уже не исполняются. Однако имя Шпора, как основателя немецкой романтической оперы и выдающегося музыканта своего времени, не исчезает из руководств по истории музыки. Имеется также и одно внешнее обстоятельство, увековечившее имя Шпора. Это—его случайное изобретение, сохранившееся неизменным до наших дней, а именно дирижерская палочка. Будучи придворным капельмейстером в Касселе, он первым ввел палочку как инструмент дирижирования оркестром.

К сожалению, уже и без того разросшийся объем рукописи не позволяет нам остановиться подробно на анализе творчества Шпора и на ряде других вопросов, также не имеющих отношения к настоящей книге. Однако все же необходимо упомянуть об одном музыкально-педагогическом сочинении Шпора, о его *Violinschule* — школе скрипичной игры. Это была первая из скрипичных школ, в которой наряду с задачей технического развития учащегося ставилась задача его художественно-музыкального воспитания. За школой Л. Шпора последовали аналогичные школы других музыкантов-исполнителей XIX—XX вв.

Обычно школа состоит из нескольких частей (глав), каждая из которых посвящена определенному аспекту музыкальной подготовки и которые в совокупности образуют фундамент исполнительской деятельности будущего музыканта. Весь материал школы состоит из сравнительно коротких нотных текстов, носящих характер упражнений, этюдов, пьес и других музыкальных форм, называемых кратко номерами. Эти номера расположены в таком порядке, что в пределах одного тематического цикла каждый из них создает основу для исполнения дальнейших номеров, многие из которых сами по себе, вне контекста, могли бы представиться трудными. Нотный материал школы сопровождается кратким пояснительным текстом, содержащим указания или комментирующим значение отдельных номеров. Следует отметить, что, за редкими исключениями, сами номера не воспринимаются как оригинальные в творческом отношении произведения автора школы. Их основу составляют, с одной стороны, фрагменты из других сочинений, представляемых в их первоначальном или преобразованном виде, а с другой стороны, музыкальный материал настолько знакомый, что его уже трудно приписать какому-либо определенному автору. Некоторые номера помещаются в школе с указанием композитора, несмотря на производимые существенные упрощения его оригинального текста, вплоть до превращения полифонических оркестровых произведений в одноголосные пьесы. Сохранение оригинальной темы композитора считается достаточным основанием для сохранения его имени за преобразованной пьесой. В целом художественно-технический диапазон школ и родственных им сборников этюдов может быть весьма широким, охватывая, например, номера от упражнений на пустых струнах до виртуозных пьес с двойными флажолетами *).

Наша книга представляет собой попытку создания курса, аналогичного по своему характеру и назначению описанным выше музыкальным школам. Мы назвали бы этот курс школой функционального анализа, если бы имели достаточные основания заключить, что попытка наша закончилась удачно. Однако на деле мы можем сейчас утверждать несколько меньше, а именно лишь то, что она, наконец, закончилась.

В книге 2405 задач. Тематически они охватывают линейную алгебру и курс функционального анализа в транскрипции для конечномерного пространства. Что касается степени трудности задач, то упомянутая нижняя грань — игра на

---

*) См. «Энциклопедический музыкальный словарь» под ред. Г. В. Келдыша, Москва, 1959. О музыкальной шкале см. Г. Е. Шилов, Простая гамма, Физматгиз, 1963. Можно, между прочим, показать, что трудность исполнения флажолет возникает из-за того, что, в отличие от обычных скрипичных звуков, они неустойчивы в смысле § 11 гл. I (см. задачи **293—295**).

пустых струнах — в книге достигается (см., например, задачу 1 гл. I), чего нельзя утверждать о верхней грани.

При дроблении излагаемого материала на отдельные задачи намеренно допускается неравномерность. Материал, содержащий фундаментальные понятия, идеи и теории, дробится мельче, чем материал специального и технического характера.

Указания, облегчающие пользование книгой, можно свести к следующим пунктам.

1. Никаких предварительных знаний по линейной алгебре и функциональному анализу от читателя не требуется. Необходимые общеобразовательные алгебраические и топологические понятия разъясняются на четырех страницах специального раздела книги — словаря общих понятий, — где предполагается известным лишь язык элементарной теории множеств.

2. Книга состоит из задач и вставок сопроводительного текста. Сопроводительный текст содержит все необходимые определения, указания к некоторым задачам и другие комментарии. Раздела ответов в книге нет, так как все предлагаемые нами задачи являются задачами на доказательство (теоремами).

3. Признаком окончания вставки сопроводительного текста является номер очередной теоремы, которая всегда набирается одним абзацем. Признаком начала новой вставки является красная строка без номера, следующая за формулировкой теоремы. В каждой главе принята автономная сквозная нумерация теорем.

4. Иногда вспомогательные предложения и указания для решения данной задачи приводятся не до, а после нее. Поэтому, читая формулировку очередной теоремы, следует заглянуть и в первую строку помещенного за ней сопроводительного текста. Вообще перед решением задач очередного параграфа полезно просмотреть бегло содержание всего параграфа в целом.

5. После основного текста книги помещен библиографический указатель. В первой его части дается список общих руководств по алгебре, анализу, топологии, линейной алгебре и функциональному анализу. Во второй части указывается использованная нами и рекомендуемая литература по главам. Для решения задач обращение к литературе, помещенной в библиографическом указателе, и к другим источникам не требуется. Основное назначение приведенной библиографии — указать читателю литературу, содержащую развитие теорий, затронутых в книге.

6. В конце книги помещены: указатель основных обозначений, именной указатель теорем и, наконец, алфавитный указатель терминов, возвращающий читателя к тем страницам основного текста книги, на которых эти термины (они даются курсивом) определены.

7. Мы нигде не формулируем нерешенных проблем, хотя в разных местах книги они находятся в непосредственной близости от излагаемых нами теорем. Поиск и решение таких проблем относятся уже к творческой работе читателя, в которой мы желаем ему успехов.

Мы выражаем глубокую признательность нашим учителям Н. И. Ахиезеру и М. Г. Крейну, а также А. Я. Повзнеру, у которых мы в свое время прошли школу функционального анализа.

Некоторые задачи и темы были предложены нам Г. Р. Белицким, В. И. Гурарием, М. И. Кадецом, А. С. Маркусом, В. И. Мацаевым, Ю. Л. Шмульяном. Отдельные места книги мы обсуждали с Э. М. Жмудем, И. С. Иохвидовым, А. В. Погореловым, В. П. Потаповым, В. А. Ткаченко, В. И. Юдовичем. Рукопись книги просмотрел Г. Е. Шилов, который высказал замечания, способствовавшие улучшению изложения в целом. При оформлении рукописи большую помощь оказали нам В. И. Коган, В. Н. Митин, А. М. Рыбалко, Ю. Ф. Сенчук.

Всем перечисленным лицам мы выражаем искреннюю благодарность.

Авторы

22 сентября 1967 г.

---

30 мая 1968 когда, когда эта книга уже была в наборе, не стало Израиля Марковича Глазмана, которому всецело принадлежит основной замысел книги — конечномерное «моделирование» функционального анализа. Когда кто-нибудь рассказывал ему о сложных бесконечномерных построениях, он обычно спрашивал: «А как это выглядит в двумерном случае?» — и нередко этот шокирующий вопрос помогал лучше понять суть дела. Вся математическая деятельность этого незабываемого яркого таланта была направлена на то, чтобы увидеть простую основу сложных вещей.

17 июля 1968 года *Ю. Любич*

ГЛАВА I

КОМПЛЕКСНОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Комплексным линейным пространством называется множество E, на котором определены операции сложения элементов и умножения элементов на комплексные числа, причем выполняются следующие аксиомы:

1) обе операции не выводят из E;

2) E является абелевой группой относительно сложения;

3) умножение на число ассоциативно, коммутативно и связано со сложением дистрибутивными (относительно числа и относительно элемента) законами;

4) произведение единицы на любой элемент равно этому элементу.

Элементы линейного пространства *) называются *векторами* (иногда *точками*) и обозначаются малыми латинскими буквами в отличие от чисел (скаляров), которые мы, как правило, обозначаем малыми греческими буквами. Символ 0 означает вектор нуль (нулевой элемент группы) или число нуль, в зависимости от контекста.

В силу аксиом 1)—4) действия над векторами в линейном пространстве подчиняются тем же правилам, что и соответствующие действия над векторами в обычном геометрическом смысле.

Тривиальный пример линейного пространства: множество, состоящее из одного элемента 0, действия над которым

---

*) Здесь и в дальнейшем, если не оговорено противное, термин «линейное пространство» означает комплексное линейное пространство. Наряду с употреблением термина «линейное пространство» мы также будем говорить кратко «пространство».

определены равенствами

$$0+0=0, \quad \alpha\cdot 0=0\cdot\alpha=0.$$

Это пространство называется нулевым и также обозначается символом 0.

Другой, менее тривиальный, пример линейного пространства: множество Φ_M всех функций, определенных на каком-нибудь абстрактном множестве M и принимающих числовые значения. Такие функции называются *функционалами*. Сложение функционалов и умножение на число определяются естественно, как для обычных числовых функций числового аргумента.

Можно специализировать этот пример, считая M множеством всех натуральных чисел $\{1, 2, \ldots\}$ или каким-нибудь его отрезком $\{1, 2, \ldots, n\}$. В этих случаях пространство Φ_M можно описать как множество C^ω всех числовых последовательностей $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ или, соответственно, как множество C^n всевозможных систем из n чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ с почленными сложением и умножением на число. Пространства C^k $(k=1, 2, \ldots, n, \ldots, \omega)$ называются *арифметическими*.

Важным примером линейного пространства является также множество Π всех полиномов $\mathscr{P}(t)$ от одного переменного t или множество $\Pi^n\subset\Pi$ полиномов степени, меньшей некоторого натурального n, с обычными операциями сложения и умножения на число.

§ 1. Линейная зависимость и независимость. Ранг системы векторов

Линейной комбинацией векторов $x_1, x_2, \ldots, x_m$ (не обязательно различных) с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ называется вектор вида

$$u=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k x_k.$$

Линейная комбинация называется *тривиальной*, если все ее коэффициенты равны нулю, и *нетривиальной* в противном случае. Тривиальная линейная комбинация любых векторов, очевидно, равна нулю.

Векторы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ называются *линейно независимыми*, если все нетривиальные линейные комбинации их отличны от нуля, и *линейно зависимыми* в противном случае. Говорят также: «линейно независимая (соответственно, зависимая) система векторов $\{x_k\}_1^m$».

Система векторов — это непустое конечное упорядоченное множество векторов. Одна система называется *подсистемой* другой системы, если она является ее подмножеством.

Мы начнем с элементарных теорем о линейной зависимости и независимости.

1. Для того чтобы система, состоящая из одного вектора x, была линейно независимой, необходимо и достаточно, чтобы $x \neq 0$.

2. Для того чтобы система векторов $\{x_k\}_1^m$ $(m > 1)$ была линейно независимой, необходимо и достаточно, чтобы ни один из векторов системы не был линейной комбинацией остальных.

3. Каждая подсистема линейно независимой системы векторов линейно независима.

Образно говоря, линейная независимость является «наследственным» свойством.

Пусть Γ — какая-нибудь система векторов. *Линейной оболочкой* системы Γ называется множество всех линейных комбинаций векторов системы Γ. Линейная оболочка системы Γ обозначается через $\mathrm{L}(\Gamma)$.

Подсистема Γ_0 системы Γ называется *полной*, если $\Gamma \subset \mathrm{L}(\Gamma_0)$, т. е. если каждый вектор системы Γ является линейной комбинацией векторов из Γ_0.

4. Каждая подсистема системы векторов, содержащая полную подсистему, также является полной подсистемой.

Полнота также является наследственным свойством, но уже по отношению к расширению, а не к сужению системы.

Сопоставим ближе теоремы **3** и **4**. С этой целью сформулируем теорему **3** в несколько иных выражениях.

«Каждая подсистема системы векторов, содержащаяся в линейно независимой подсистеме, также является линейно независимой подсистемой»

Теперь бросается в глаза, что если в этой формулировке теоремы **3** заменить термин «линейно независимая подсистема» термином «полная подсистема» и термин «содержащаяся» термином «содержащая», то получится формулировка теоремы **4**. Между теоремами **3**, **4** имеется логическая симметрия или, как говорят иначе, д в о й с т в е н н о с т ь. Она опирается на соответствующую симметрию (двойственность) понятий и отношений. Понятие линейной независимости двойственно понятию полноты. Отношение между множествами **M**, **L**, выражаемое словами «**M** содержит **L**» ($\mathbf{M} \supset \mathbf{L}$), двойственно отношению «**M** содержится в **L**» ($\mathbf{M} \subset \mathbf{L}$).

Двойственность часто встречается в различных математических теориях. Например, в общей теории множеств существует двойственность, опирающаяся на отмеченную выше двойственность отношений «содержать» и «содержаться». Здесь оказываются двойственными понятия п е р е с е ч е н и я и о б ъ е д и н е н и я, и это обнаруживается всюду в алгебре множеств. Ярким примером могут служить дистрибутивные законы:

$$(\mathbf{M} \cup \mathbf{L}) \cap \mathbf{N} = (\mathbf{M} \cap \mathbf{N}) \cup (\mathbf{L} \cap \mathbf{N}), \quad (\mathbf{M} \cap \mathbf{L}) \cup \mathbf{N} = (\mathbf{M} \cup \mathbf{N}) \cap (\mathbf{L} \cup \mathbf{N}).$$

Очевидно, что двойственность некоторых понятий или отношений может быть следствием двойственности некоторых других понятий (отношений). Например, пересечение множеств можно определить как такое множество, которое содержится в каждом из данных множеств и содержит каждое множество, обладающее этим свойством. Объединение множеств можно определить «двойственным образом» как такое множество, которое содержит каждое из данных множеств и содержится в каждом множестве, обладающем этим свойством. Двойственность «содержать» — «содержаться» является более фундаментальной, чем двойственность «пересечение» — «объединение».

При построении какой-либо теории выявление имеющейся в ней двойственности весьма существенно, так как оно позволяет «удваивать» число теорем и придает теории стройность и законченность. Поэтому в дальнейшем мы будем всюду, где это возможно, обращать внимание на двойственность.

Введем теперь следующее определение. Полная линейно независимая подсистема системы векторов, не равных нулю одновременно, называется *базисной* подсистемой. Понятие базисной подсистемы с а м о д в о й с т в е н н о.

5. Для того чтобы подсистема системы векторов была базисной, необходимо и достаточно, чтобы она была линейно

независимой и при этом максимальной, т. е. не содержалась ни в какой отличной от нее линейно независимой подсистеме.

Двойственное предложение:

6. Для того чтобы подсистема системы векторов была базисной, необходимо и достаточно, чтобы она была полной и при этом минимальной, т. е. не содержала никакой отличной от нее полной подсистемы.

Сформулируем теорему существования базисной подсистемы. Предварительно заметим, что любая система векторов Г, не равных нулю одновременно, содержит линейно независимую подсистему (например, подсистему, состоящую из одного вектора $x \in \Gamma$, $x \neq 0$) и содержит полную подсистему (например, подсистему, совпадающую со всей системой Г).

7. Любая система векторов, не равных нулю одновременно, содержит базисную подсистему. Более того, любую линейно независимую подсистему можно дополнить до базисной и (двойственным образом) из любой полной подсистемы можно выделить базисную подсистему.

Роль базисных подсистем выясняется следующим предложением:

8. Если $x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots, x_{r_p}$ — базисная подсистема системы векторов $\{x_k\}_1^m$, то любой вектор x_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ представляется в виде линейной комбинации

$$x_j = \sum_{k=1}^{p} \alpha_{kj} x_{r_k}$$

векторов подсистемы, и коэффициенты α_{kj} в этом представлении определены однозначно.

Обратно:

9. Если любой вектор системы однозначно представляется в виде линейной комбинации векторов некоторой подсистемы, то эта подсистема базисная.

Следующее предложение является основной леммой к фундаментальной теореме **11**:

10. Пусть $\Gamma = \{x_k\}_1^m$ $(m > 1)$ — какая-нибудь система векторов и $\Gamma_1 = \{x_k\}_1^{m-1}$. Если векторы u, v таковы, что $u, v \in \mathrm{L}(\Gamma)$, но $v \notin \mathrm{L}(\Gamma_1)$, то существует такой скаляр α, что $u - \alpha v \in \mathrm{L}(\Gamma_1)$.

11. Любые $m+1$ векторов из линейной оболочки системы векторов $\{x_k\}_1^m$ линейно зависимы.

Одним из важных следствий теоремы **11** является:

12. Все базисные подсистемы фиксированной системы векторов Γ содержат одно и то же число векторов.

Это число называется *рангом* системы Γ и обозначается $\operatorname{rg}\Gamma$. Если в Γ все векторы равны нулю, то $\operatorname{rg}\Gamma=0$.

Очевидно, ранг системы не превосходит ее мощности.

Ранг системы векторов есть «верхняя мера» ее линейной независимости:

13. Ранг системы векторов, не равных нулю одновременно, равен максимальной мощности ее линейно независимых подсистем.

Следовательно, для линейной независимости системы $\Gamma=\{x_k\}_1^m$ необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rg}\Gamma=m$.

Теоремой, двойственной к **13**, является:

14. Ранг системы векторов, не равных нулю одновременно, равен минимальной мощности ее полных подсистем.

Таким образом, ранг системы векторов есть «нижняя мера» ее полноты.

Теоремы **13**, **14** характеризуют ранг системы как экстремум мощности на том или ином классе подсистем. Покажем, что базисные подсистемы характеризуются как «точки» достижения экстремума. То, что на них достигается экстремум, очевидно. Но и обратно:

15. Любая линейно независимая подсистема системы векторов Γ, состоящая из $\operatorname{rg}\Gamma$ векторов, является базисной и (двойственным образом) любая полная подсистема системы векторов Γ, состоящая из $\operatorname{rg}\Gamma$ векторов, является базисной.

Пусть теперь Γ_1, Γ_2 — какие-нибудь две системы векторов. Будем писать $\Gamma_1 \prec \Gamma_2$, если $\Gamma_1 \subset \mathrm{L}(\Gamma_2)$. Очевидно, если $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, то и подавно $\Gamma_1 \prec \Gamma_2$.

16. Для того чтобы было $\Gamma_1 \prec \Gamma_2$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{L}(\Gamma_1) \subset \mathrm{L}(\Gamma_2)$.

Отношение $\Gamma_1 \prec \Gamma_2$ есть к в а з и п о р я д о к на множестве систем векторов.

Будем говорить, что системы Γ_1 и Γ_2 *эквивалентны*, и писать $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$, если одновременно $\Gamma_1 \prec \Gamma_2$ и $\Gamma_2 \prec \Gamma_1$. Это о т н о ш е н и е э к в и в а л е н т н о с т и удовлетворяет обычным требованиям.

Следовательно, можно говорить о *классах* эквивалентных систем.

Очевидно, что для того чтобы было $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$, необходимо и достаточно, чтобы $L(\Gamma_1) = L(\Gamma_2)$.

Исследуем поведение ранга как функционала на множестве всех систем векторов.

17. Если $\Gamma_1 \prec \Gamma_2$, то $\operatorname{rg} \Gamma_1 \leqslant \operatorname{rg} \Gamma_2$.

Таким образом, ранг есть монотонно неубывающий (относительно введенного квазипорядка) функционал (*теорема Штейница*).

Ранг можно рассматривать как функционал на множестве классов эквивалентных систем, так как в силу теоремы Штейница эквивалентные системы имеют равные ранги. Обратное неверно, но:

18. Если $\Gamma_1 \prec \Gamma_2$ и $\operatorname{rg} \Gamma_1 = \operatorname{rg} \Gamma_2$, то $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$.

Таким образом, если $\Gamma_1 \prec \Gamma_2$, то знак равенства в неравенстве $\operatorname{rg} \Gamma_1 \leqslant \operatorname{rg} \Gamma_2$ достигается тогда и только тогда, когда $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$.

Отметим некоторые неравенства, легко вытекающие из предшествующих свойств ранга.

19. Если пересечение систем векторов $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_q$ не пусто (и тем самым является системой), то

$$\operatorname{rg}\left(\bigcap_{k=1}^{q} \Gamma_k\right) \leqslant \min_{1 \leqslant k \leqslant q} (\operatorname{rg} \Gamma_k).$$

Знак равенства здесь достигается тогда и только тогда, когда система $\bigcap_{k=1}^{q} \Gamma_k$ эквивалентна хотя бы одной из систем $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_q$.

20. Для любых систем векторов $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_q$ имеет место неравенство

$$\operatorname{rg}\left(\bigcup_{k=1}^{q} \Gamma_k\right) \geqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant q} (\operatorname{rg} \Gamma_k).$$

Знак равенства здесь достигается тогда и только тогда, когда система $\bigcup_{k=1}^{q} \Gamma_k$ эквивалентна хотя бы одной из систем $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_q$.

Теоремы **19**, **20** двойственны друг другу.

Следующая самодвойственная теорема устанавливает соотношение между рангами пересечения и объединения двух систем.

21. Если пересечение двух систем векторов Γ_1, Γ_2 не пусто, то

$$\operatorname{rg}(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) + \operatorname{rg}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \leqslant \operatorname{rg}\Gamma_1 + \operatorname{rg}\Gamma_2.$$

Это неравенство останется в силе и в случае пустого пересечения, если в этом случае положить $\operatorname{rg}(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = 0$. Поэтому вообще:

22. $\operatorname{rg}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \leqslant \operatorname{rg}\Gamma_1 + \operatorname{rg}\Gamma_2$.

Кроме того:

23. Если $L(\Gamma_1) \cap L(\Gamma_2) = \{0\}$, то

$$\operatorname{rg}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = \operatorname{rg}\Gamma_1 + \operatorname{rg}\Gamma_2.$$

Таким образом, ранг является аддитивным (относительно операции объединения систем векторов) функционалом.

Теорему **23** можно обратить:

24. Если $\operatorname{rg}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = \operatorname{rg}\Gamma_1 + \operatorname{rg}\Gamma_2$, то

$$L(\Gamma_1) \cap L(\Gamma_2) = \{0\}.$$

Две системы векторов Γ_1, Γ_2, удовлетворяющие условию

$$L(\Gamma_1) \cap L(\Gamma_2) = \{0\},$$

называются *взаимно независимыми*.

В заключение этого параграфа охарактеризуем ранг набором его функциональных свойств, уже известных из предыдущего.

25. Пусть функционал $\rho(\Gamma)$ на множестве всех систем векторов обладает следующими свойствами:

1) Если $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$, то $\rho(\Gamma_1) = \rho(\Gamma_2)$.

2) Если системы Γ_1 и Γ_2 взаимно независимы, то $\rho(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = \rho(\Gamma_1) + \rho(\Gamma_2)$.

3) Если система Γ состоит из одного вектора $x \neq 0$, то $\rho(\Gamma) = 1$.

Тогда $\rho(\Gamma) = \operatorname{rg}\Gamma$ для всех Γ.

Между прочим, никакие два из трех условий 1), 2), 3) уже не достаточны для того, чтобы охарактеризовать ранг. Это легко показать построением соответствующих примеров.

§ 2. Базисы и размерность пространства. Изоморфные пространства

Непустое множество F векторов пространства E называется *линейно минимальным*, если каждая система $\Gamma \subset F$ линейно независима.

Множество F называется *производящим*, если для каждого $x \in E$ существует такая система $\Gamma \subset F$, что $x \in L(\Gamma)$.

Пространство E называется *конечномерным*, если оно удовлетворяет какому-нибудь из следующих взаимно двойственных условий:

1) Каждое линейно минимальное множество в E конечно.
2) В E существует конечное производящее множество.

С помощью **11** легко устанавливается что:

26. Условия 1), 2) равносильны.

Если пространство не является конечномерным, то оно называется *бесконечномерным*. Приведем некоторые примеры.

27. Пространство Φ_M всех функционалов на каком-нибудь множестве **M** конечномерно, если множество **M** конечно, и бесконечномерно в противном случае. В частности, арифметическое пространство C^n при любом натуральном n конечномерно, а пространство C^ω бесконечномерно.

Аналогично:

28. Пространство Π^n полиномов степени, меньшей n (n — натуральное число), конечномерно, а пространство Π всех полиномов бесконечномерно.

В этой книге всюду дальше рассматриваются только конечномерные пространства.

Если пространство E конечномерно, то в нем существует такая система векторов Γ, что $L(\Gamma) = E$. Система векторов, обладающая этим свойством, называется *полной*.

Полная линейно независимая система векторов называется *базисом* пространства E.

29. В пространстве C^n элементы

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \ e_2 = (0, 1, \dots, 0), \ \dots, \ e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

образуют базис.

Этот базис называется *каноническим*.

30. В пространстве Π^n полиномы $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}$ образуют базис.

Этот базис также называется *каноническим.*

Базисы допускают характеристику, аналогичную характеристике базисных подсистем системы векторов (см. **5**, **6**).

31. Для того чтобы система векторов была базисом, необходимо и достаточно, чтобы она была линейно независимой и при этом максимальной, т. е. не содержалась ни в какой отличной от нее линейно независимой системе.

32. Для того чтобы система векторов была базисом, необходимо и достаточно, чтобы она была полной и при этом минимальной, т. е. не содержала никакой отличной от нее полной системы.

Теорема существования базиса аналогична теореме **7**:

33. В каждом пространстве $\mathrm{E} \neq 0$ существует базис. Более того, любую линейно независимую систему векторов можно дополнить до базиса и (двойственным образом) из любой полной системы векторов можно выделить базис.

Базис играет в пространстве роль системы координат (ср. **8**, **9**):

34. Пусть $\{e_k\}_1^n$ — базис. Для любого вектора $x \in \mathrm{E}$ существует и единственно *разложение по базису*: $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e_k$.

Коэффициенты $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ этого разложения называются *координатами* вектора x относительно базиса $\{e_k\}_1^n$.

35. Если система векторов $\{e_k\}_1^n$ такова, что для любого вектора x существует и единственно разложение $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e_k$, то система является базисом.

Опираясь на теорему **34**, введем понятие матрицы системы векторов. Вообще *матрицей* ($(n \times m)$-матрицей или матрицей размера $n \times m$) называется прямоугольная таблица чисел

$$\mathfrak{a} = (\alpha_{jk})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n, \\ 1 \leqslant k \leqslant m}}.$$

При $n = m$ матрица $\mathfrak{a}$ называется квадратной, а число n — ее *порядком.*

Пусть $\{u_k\}_1^m$ — какая-нибудь система векторов и

$$u_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} e_j \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

— разложения векторов системы по базису $\{e_j\}_1^n$. Тогда матрица

$$\alpha = (\alpha_{jk})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n, \\ 1 \leqslant k \leqslant m}}$$

называется *матрицей системы* $\{u_k\}_1^m$ относительно базиса $\{e_j\}_1^n$.

В частности, матрица базиса относительно самого себя имеет вид $\{\delta_{jk}\}_{j,\,k=1}^n$, где δ_{jk} — так называемый символ Кронекера:

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 0 & (j \neq k), \\ 1 & (j = k). \end{cases}$$

Это — *единичная матрица*.

Соответствие между всевозможными системами векторов и всевозможными n-строчными матрицами при фиксированном базисе взаимно однозначно.

Следующая теорема, аналогичная теореме **12**, играет фундаментальную роль.

36. Все базисы фиксированного пространства E содержат одно и то же число векторов.

Это число называется *размерностью* пространства E и обозначается $\dim \mathrm{E}$. Если $\mathrm{E} = 0$, то $\dim \mathrm{E} = 0$. Пространство, размерность которого равна n, называется *n-мерным*. Теоремы **29**, **30** показывают, что пространства C^n и Π^n n-мерные.

Понятие размерности пространства аналогично понятию ранга системы векторов и тесно с ним связано:

37. Ранг любой системы векторов не больше размерности пространства.

Ранг любой полной системы очевидно равен размерности пространства. Таким образом, размерность пространства E является максимумом рангов всевозможных систем векторов. Кроме того, аналогично **13**:

38. Размерность пространства $\mathrm{E} \neq 0$ равна максимальной мощности всевозможных линейно независимых систем векторов.

Двойственным образом, аналогично **14**:

39. Размерность пространства $\mathrm{E} \neq 0$ равна минимальной мощности всевозможных полных систем векторов.

С этой точки зрения базисы можно охарактеризовать как экстремальные системы векторов:

40. Пусть $\dim E = n > 0$. Если система $\{e_k\}_1^n$ линейно независима или (двойственным образом) полна, то она является базисом пространства E.

Из **40** легко получить, что в дополнение к сказанному по поводу **37**:

41. Если ранг системы векторов равен размерности пространства, то эта система векторов полна.

Фиксируя какой-нибудь базис Δ пространства E ($\dim E = n$), можно описать все базисы их матрицами относительно базиса Δ. При этом каждому базису Γ соответствует некоторая квадратная матрица $(\gamma_{jk})_{j,k=1}^n$ n-го порядка, но не каждая такая матрица соответствует какому-либо базису. Однако:

42. Если матрица $\mathfrak{g} = (\gamma_{jk})_{j,k=1}^n$ соответствует некоторому базису Γ, то для любой пары индексов r, s ($1 \leqslant r \leqslant n$, $1 \leqslant s \leqslant n$) существует такое $\varepsilon = \varepsilon_{r,s} > 0$, что каждая матрица $\tilde{\mathfrak{g}} = (\tilde{\gamma}_{jk})_{j,k=1}^n$ с элементами

$$\tilde{\gamma}_{jk} = \begin{cases} \gamma_{jk} & (j \neq r \quad \text{или} \quad k \neq s), \\ \gamma_{rs} + \eta & (j = r \quad \text{и} \quad k = s) \end{cases}$$

при $|\eta| < \varepsilon$ соответствует некоторому базису $\tilde{\Gamma}$.

Поэтому можно сказать, что множество базисов в n-мерном пространстве является n^2-параметрическим: элементы матрицы, соответствующей базису, в силу теоремы **42**, можно рассматривать как независимые параметры.

В заключение этого параграфа введем важное понятие изоморфизма двух пространств.

Пространство E_1 называется *изоморфным* пространству E, если существует взаимно однозначное отображение j пространства E на все пространство E_1 (*изоморфизм пространств* E и E_1), обладающее свойствами:

1) $j(x_1 + x_2) = jx_1 + jx_2$,
2) $j(\alpha x) = \alpha(jx)$.

Изоморфность пространств есть отношение эквивалентности. Поэтому можно говорить о классах изоморфных пространств. С абстрактной точки зрения изоморфные пространства неразличимы, так как все, что относится к одному из них и формулируется только в терминах операций сложения и умножения на число, относится в равной мере к другому.

Если пространства E и E_1 изоморфны, то пишут $E \approx E_1$.

Следующая теорема дает критерий изоморфности двух пространств.

43. Для изоморфности $E \approx E_1$ необходимо и достаточно, чтобы $\dim E = \dim E_1$.

Таким образом, все n-мерные пространства при данном n изоморфны между собой. В частности, изоморфны пространства C^n и Π^n.

Начиная со следующего параграфа, мы, как правило, фиксируем «основное» пространство E. Однако в некоторых важных ситуациях требуется одновременное рассмотрение нескольких «основных» пространств. Основные пространства мы будем предполагать отличными от нуля.

Буква n везде означает размерность пространства E.

§ 3. Подпространства

Непустое множество L векторов в пространстве E называется *подпространством*, если операции сложения и умножения на число не выводят из L, т. е. если L по отношению к этим операциям само является линейным пространством.

Очевидно, вектор 0 входит в любое подпространство и множество 0, состоящее из одного этого вектора, является подпространством. Оно называется *нулевым подпространством*. Само пространство E также, очевидно, является подпространством. Подпространства 0 и E называются *тривиальными подпространствами*.

Так как каждое подпространство L само является линейным пространством, то можно говорить о размерности подпространства $\dim L$.

44. Имеет место неравенство $\dim L \leqslant n$. Знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $L = E$.

Каждая система векторов порождает некоторое подпространство:

45. Для любой системы векторов Γ линейная оболочка $L(\Gamma)$ является подпространством, причем $\dim L(\Gamma) = \operatorname{rg} \Gamma$.

Поэтому:

46. В E существуют подпространства любой размерности d, удовлетворяющей неравенству $0 \leqslant d \leqslant n$.

Рассмотрим отношение включения подпространств.

47. Если L_1, L_2 — подпространства и $L_1 \subset L_2$, то
$$\dim L_1 \leqslant \dim L_2.$$

Знак равенства здесь достигается тогда и только тогда, когда $L_1 = L_2$.

Множество подпространств $\{L_\nu\}$ называется *цепью*, если для каждой пары L_{ν_1}, L_{ν_2} либо $L_{\nu_1} \subset L_{\nu_2}$, либо $L_{\nu_2} \subset L_{\nu_1}$. Благодаря конечномерности пространства E имеет место следующий принцип обрыва цепей.

48. Любая цепь подпространств конечна.

Таким образом, любая цепь подпространств может быть записана в виде $L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_m$ $(m \geqslant 0)$.

Цепь называется *максимальной*, если она не является правильной частью никакой другой цепи.

49. Для того чтобы цепь $L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_m$ была максимальной, необходимо и достаточно, чтобы $m = n$ и
$$\dim L_k = k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$
(в частности, $L_0 = 0$, $L_n = E$).

50. Любая цепь содержится в некоторой максимальной цепи.

Эта максимальная цепь, вообще говоря, не единственна.

51. Если $\{L_k\}_0^n$ — максимальная цепь подпространств, то существует такой базис $\{e_k\}_1^n$, что подсистемы $\{e_k\}_1^m$ являются базисами подпространств L_m $(m = 1, 2, \ldots, n)$.

Над подпространствами можно производить некоторые операции. Рассмотрим прежде всего теоретико-множественные операции.

Объединение подпространств оказывается подпространством лишь в исключительных случаях:

52. Для того чтобы объединение конечного множества подпространств было подпространством, необходимо и достаточно, чтобы одно из подпространств содержало все остальные.

Отсюда, очевидно, следует, что объединение конечного множества подпространств, отличных от пространства E, также отлично от E. В противоположность **52**:

53. Если $\{L_\nu\}$ — любое множество подпространств, то их пересечение также есть подпространство. При этом
$$\dim \left(\bigcap L_\nu\right) \leqslant \min (\dim L_\nu).$$

В этом неравенстве знак равенства достигается тогда и только тогда, когда одно из подпространств L_ν содержится во всех остальных.

В дальнейшем нам неоднократно придется рассматривать множества $\mathfrak{L}$ всех подпространств, обладающих тем или иным свойством. Мы условимся различать термины «максимальное» и «наибольшее» из подпространств множества $\mathfrak{L}$ следующим образом. Если подпространство L из $\mathfrak{L}$ не содержится ни в каком другом подпространстве из $\mathfrak{L}$, то назовем его *максимальным*. Если же подпространство $\mathrm{L} \in \mathfrak{L}$ содержит любое подпространство из $\mathfrak{L}$, то назовем его *наибольшим*. Если в $\mathfrak{L}$ существует наибольшее подпространство, то оно является максимальным.

Для того чтобы максимальное подпространство множества $\mathfrak{L}$ было наибольшим, необходимо и достаточно, чтобы оно было единственным максимальным. Отметим, что максимальное подпространство, в отличие от наибольшего, существует для любого множества $\mathfrak{L}$.

Двойственным образом определяется *минимальное* (*наименьшее*) подпространство.

Рассмотрим в качестве примера множество $\mathfrak{L}_F$ всех подпространств, содержащих некоторое множество векторов F. Пересечение всех подпространств, принадлежащих $\mathfrak{L}_F$, также принадлежит $\mathfrak{L}_F$ и, следовательно, является наименьшим из подпространств множества $\mathfrak{L}_F$. Оно называется *линейной оболочкой* множества F и обозначается L(F).

Пересечение множества подпространств $\{\mathrm{L}_\nu\}$ есть наибольшее подпространство, содержащееся во всех подпространствах L_ν. Введем двойственное понятие. Им окажется не объединение потому, что мы будем действовать в классе подпространств, а не в классе всех подмножеств множества E.

Суммой подпространств $\{\mathrm{L}_\nu\}$ называется наименьшее подпространство, содержащее все L_ν. Очевидно, сумма подпространств $\{\mathrm{L}_\nu\}$ совпадает с линейной оболочкой $\mathrm{L}(\bigcup \mathrm{L}_\nu)$. Сумма подпространств обозначается обычными символами $\sum$, $+$.

54. Имеет место неравенство

$$\dim\left(\sum \mathrm{L}_\nu\right) \geqslant \max\left(\dim \mathrm{L}_\nu\right).$$

В этом неравенстве знак равенства достигается тогда и только тогда, когда одно из подпространств L_ν содержит все остальные.

Теоремы **53**, **54** аналогичны теоремам **19**, **20**.

Пересечение и сумма подпространств подчиняются следующим *принципам обрыва*, вытекающим из принципа обрыва цепей **48**:

55. Для любого множества подпространств существует конечное подмножество с тем же самым пересечением.

Двойственным образом:

56. Для любого множества подпространств существует конечное подмножество с той же самой суммой.

Отметим, что если множество подпространств вместе с каждыми двумя подпространствами содержит их пересечение, то в этом множестве существует наименьшее подпространство. Двойственным образом, если множество подпространств вместе с каждыми двумя подпространствами содержит их сумму, то в этом множестве существует наибольшее подпространство.

Операция сложения подпространств ассоциативна и коммутативна так же, как операция пересечения. Однако дистрибутивные законы отсутствуют. В общем случае имеет место лишь:

57. Для любого множества подпространств $\{L_\nu\}$ и любого подпространства L выполняются соотношения:

$$L \cap \sum L_\nu \supset \sum (L \cap L_\nu), \quad L + \bigcap L_\nu \subset \bigcap (L + L_\nu).$$

Но для случая двух подпространств L_1, L_2:

58. Если $L_1 \subset L$, то

$$L \cap (L_1 + L_2) = L \cap L_1 + L \cap L_2$$

и, двойственным образом, если $L_1 \supset L$, то

$$L + L_1 \cap L_2 = (L + L_1) \cap (L + L_2).$$

Это — так называемые *модулярные законы*. Они доказываются очень просто, если использовать следующее описание суммы двух подпространств.

59. Сумма двух подпространств L_1, L_2 есть множество векторов вида

$$x = x_1 + x_2 \qquad (x_1 \in L_1, \ x_2 \in L_2).$$

Теорема **59** непосредственно переносится на сумму любого конечного множества подпространств.

Рассмотрим систему двух подпространств более подробно. Прежде всего установим аналог теоремы **21**.

60. Для любых двух подпространств L_1, L_2 имеет место равенство

$$\dim (L_1 \cap L_2) + \dim (L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2$$

(формула Грассмана).

Из формулы Грассмана вытекает, что аналогично **22**:

61. $\dim (L_1 + L_2) \leqslant \dim L_1 + \dim L_2$.

Сформулируем условия достижения знака равенства в **61.** Назовем подпространства L_1, L_2 ***взаимно независимыми*** (а систему $\{L_1, L_2\}$ — ***независимой***), если

$$L_1 \cap L_2 = 0.$$

Сумма двух взаимно независимых подпространств L_1, L_2 называется ***прямой суммой*** и обозначается $L_1 \dot{+} L_2$.

62. Для того чтобы имело место равенство

$$\dim (L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2,$$

необходимо и достаточно, чтобы подпространства L_1, L_2 были взаимно независимыми (ср. **23**, **24**).

Свойство «прямизны» суммы двух подпространств можно сформулировать следующим образом:

63. Сумма двух подпространств L_1, L_2 является прямой тогда и только тогда, когда представление

$$x = x_1 + x_2 \qquad (x_1 \in L_1, \ x_2 \in L_2)$$

единственно для каждого $x \in L_1 + L_2$ (достаточно даже, чтобы это представление было единственным для $x = 0$, т. е. чтобы из $x = 0$ следовало $x_1 = 0$, $x_2 = 0$).

Понятию взаимной независимости двойственно понятие полноты. Система двух подпространств $\{L_1, L_2\}$ называется ***полной***, если

$$L_1 + L_2 = E,$$

т. е. если для каждого вектора $x \in E$ существует представление

$$x = x_1 + x_2 \qquad (x_1 \in L_1, \ x_2 \in L_2).$$

Подпространства L_1, L_2 называются *взаимно дополнительными*, а система $\{L_1, L_2\}$ — *базисной*, если

$$L_1 \dotplus L_2 = E, \qquad (*)$$

т. е. если система $\{L_1, L_2\}$ полна и независима. При этом каждое из подпространств называется *дополнением* другого.

Равенство (*) означает, что каждый вектор x представим, и притом единственным образом, в виде

$$x = x_1 + x_2 \qquad (x_1 \in L_1, \ x_2 \in L_2).$$

64. Для любого подпространства L существует дополнение.

Оно не единственно, если $L \neq E$, но

65. Размерность любого дополнения подпространства L равна $n - \dim L$.

Величина $n - \dim L$ называется *коразмерностью* подпространства L и обозначается $\operatorname{codim} L$. Таким образом, по определению

$$\dim L + \operatorname{codim} L = n.$$

Понятие коразмерности двойственно понятию размерности. Это ясно видно из следующего цикла теорем.

66. Если L_1, L_2 — подпространства и $L_1 \subset L_2$, то

$$\operatorname{codim} L_1 \geqslant \operatorname{codim} L_2.$$

Знак равенства здесь достигается тогда и только тогда, когда $L_1 = L_2$.

67. Для любого множества $\{L_\nu\}$ подпространств имеет место неравенство

$$\operatorname{codim} \left(\bigcap L_\nu\right) \geqslant \max (\operatorname{codim} L_\nu).$$

Знак равенства здесь достигается тогда и только тогда, когда одно из подпространств L_ν содержится во всех остальных.

68. Для любого множества $\{L_\nu\}$ подпространств имеет место неравенство

$$\operatorname{codim} \left(\sum L_\nu\right) \leqslant \min (\operatorname{codim} L_\nu).$$

Знак равенства здесь достигается тогда и только тогда, когда одно из подпространств L_ν содержит все остальные.

69. Для любых двух подпространств L_1, L_2 имеет место равенство

$$\operatorname{codim}(L_1 + L_2) + \operatorname{codim}(L_1 \cap L_2) = \operatorname{codim} L_1 + \operatorname{codim} L_2.$$

Следовательно:

70. $\operatorname{codim}(L_1 \cap L_2) \leqslant \operatorname{codim} L_1 + \operatorname{codim} L_2$.

При этом:

71. Для того чтобы было

$$\operatorname{codim}(L_1 \cap L_2) = \operatorname{codim} L_1 + \operatorname{codim} L_2,$$

необходимо и достаточно, чтобы система $\{L_1, L_2\}$ была полной.

Из теорем **61** и **70** легко получить признаки неполноты и зависимости для системы двух подпространств $\{L_1, L_2\}$.

72. Если $\operatorname{codim} L_1 > \dim L_2$, то система $\{L_1, L_2\}$ неполна.

73. Если $\dim L_1 > \operatorname{codim} L_2$, то система $\{L_1, L_2\}$ зависима.

Пусть $L_1, L_2, \ldots, L_m$ — какие-нибудь подпространства. При каких условиях у них существует общее дополнение? Ответ на этот вопрос можно получить с помощью **52**:

74. Для того чтобы подпространства $L_1, L_2, \ldots, L_m$ имели общее дополнение, необходимо и достаточно, чтобы их размерности были равны.

Распространим понятие прямой суммы на систему любого числа подпространств $\{L_k\}_1^m$. Будем отправляться от **63**.

Сумма подпространств $L_1, L_2, \ldots, L_m$ называется ***прямой суммой***, если для каждого $x \in \sum_{k=1}^{m} L_k$ представление

$$x = \sum_{k=1}^{m} x_k \quad (x_k \in L_k;\ k = 1, 2, \ldots, m)$$

единственно, т. е., иными словами, если из равенства

$$\sum_{k=1}^{m} x_k = 0 \quad (x_k \in L_k;\ k = 1, 2, \ldots, m)$$

вытекает, что $x_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Прямая сумма обозначается символами $\sum^{\boldsymbol{\cdot}}$, $\dot{+}$.

75. Для того чтобы сумма подпространств $L_1, L_2, \ldots, L_m$ была прямой, необходимо и достаточно, чтобы для каждых двух непересекающихся систем индексов $\{j_1, j_2, \ldots, j_p\}$, $\{k_1, k_2, \ldots, k_q\}$ подпространства

$$L_{j_1} + L_{j_2} + \ldots + L_{j_p} \quad \text{и} \quad L_{k_1} + L_{k_2} + \ldots + L_{k_q}$$

были взаимно независимыми. Достаточно даже, чтобы были взаимно независимыми подпространства

$$L_1 + L_2 + \ldots + L_p \quad \text{и} \quad L_{p+1}$$

при каждом $p = 1, 2, \ldots, m-1$.

76. Для того чтобы сумма подпространств $L_1, L_2, \ldots, L_m$ была прямой, необходимо и достаточно, чтобы

$$\dim \sum_{k=1}^{m} L_k = \sum_{k=1}^{m} \dim L_k.$$

Система отличных от нуля подпространств $\{L_k\}_1^m$ называется *базисной*, если

$$\sum_{k=1}^{m}{}^{\bullet} L_k = E.$$

При этом говорят, что пространство E разложено в прямую сумму подпространств $L_1, L_2, \ldots, L_m$.

77. Если $\{L_k\}_1^m$ — базисная система подпространств и Δ_k — какой-нибудь базис подпространства L_k, то $\Delta = \bigcup_{k=1}^{m} \Delta_k$ есть базис пространства E.

Обратно:

78. Пусть Δ — какой-нибудь базис пространства E, $\{\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m\}$ — какое-нибудь разбиение системы Δ на подсистемы. Тогда система подпространств $\{L(\Delta_k)\}_1^m$ базисная. При этом Δ_k — базис подпространства $L(\Delta_k)$.

***Характеристикой* базисной системы подпространств $\{L_k\}_1^m$ называется система натуральных чисел $\{\dim L_k\}_1^m$.**

79. Для того чтобы система натуральных чисел $\{d_k\}_1^m$ была характеристикой некоторой базисной системы подпространств, необходимо и достаточно, чтобы $\sum_{k=1}^{m} d_k = n$.

В частности, необходимо, чтобы $m \leqslant n$. При $m = n$ единственная возможная характеристика есть $\{1, 1, \ldots, 1\}$. Она соответствует разложению пространства E в прямую сумму одномерных подпространств.

В заключение охарактеризуем размерность подпространства набором ее функциональных свойств (ср. **25**):

80. Пусть функционал $d(\mathrm{L})$ на множестве всех подпространств пространства E обладает следующими свойствами:

1) если подпространства L_1, L_2 взаимно независимы, то

$$d(\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2) = d(\mathrm{L}_1) + d(\mathrm{L}_2),$$

2) если $\dim \mathrm{L} = 1$, то $d(\mathrm{L}) = 1$.

Тогда $d(\mathrm{L}) = \dim \mathrm{L}$ для всех L.

§ 4. Фактор-пространства. Гомоморфизмы. Альтернатива Фредгольма

Пусть L — какое-нибудь подпространство пространства E. Будем говорить, что векторы x и y *сравнимы по модулю* L, и писать

$$x \equiv y \pmod{\mathrm{L}},$$

если $x - y \in \mathrm{L}$. В частности, сравнение

$$x \equiv 0 \pmod{\mathrm{L}}$$

равносильно включению $x \in \mathrm{L}$. Очевидно, сравнимость по модулю L является отношением эквивалентности. Поэтому пространство E распадается на классы сравнимых по модулю L векторов (*классы по модулю* L). Класс, порождаемый вектором x, будем обозначать $[x]_{\mathrm{L}}$ или, если это не может вызвать недоразумений, короче: $[x]$.

81. Если $x \equiv y \pmod{\mathrm{L}}$, $x_1 \equiv y_1 \pmod{\mathrm{L}}$, то

$$x + x_1 \equiv y + y_1 \pmod{\mathrm{L}}, \quad \alpha x \equiv \alpha y \pmod{\mathrm{L}}.$$

Этот факт позволяет естественным образом ввести в множестве классов по фиксированному модулю операции сложения и умножения на число, полагая

$$[x] + [x_1] \underset{\text{def}}{=} [x + x_1], \quad \alpha[x] \underset{\text{def}}{=} [\alpha x].$$

Множество классов превращается в линейное пространство, которое называется *фактор-пространством* пространства E по модулю L и обозначается E/L.

82. $\mathrm{E}/0 \approx \mathrm{E}$, $\mathrm{E}/\mathrm{E} = 0$.

Более общее утверждение:

83. Если L' — дополнение подпространства L, то

$$E/L \approx L'.$$

Отсюда:

84. $\dim E/L = \operatorname{codim} L$.

Это равенство можно записать в виде ф о р м у л ы д о п о л н е н и я

$$\dim E/L + \dim L = n.$$

В дальнейшем мы будем часто сталкиваться с подобными формулами.

Векторы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ называются *линейно независимыми по модулю* L, если порождаемые ими классы $[x_1]_L$, $[x_2]_L, \ldots, [x_m]_L$ линейно независимы в фактор-пространстве E/L.

85. Для того чтобы векторы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ были линейно независимыми по модулю L, необходимо и достаточно, чтобы их линейная оболочка и подпространство L были взаимно независимы.

Если векторы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ линейно независимы по некоторому модулю L, то они и подавно линейно независимы (т. е. линейно независимы по модулю 0). Более общим образом:

86. Если векторы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ линейно независимы по некоторому модулю L, то они линейно независимы по любому модулю $M \subset L$.

Введем теперь фундаментальное понятие гомоморфизма, обобщающее понятие изоморфизма. Пусть E_1 — еще одно линейное пространство. Отображение h: $E \to E_1$ называется *гомоморфизмом* (из E в E_1), если

1) $h(x_1 + x_2) = hx_1 + hx_2$,

2) $h(\alpha x) = \alpha hx$.

Если соответствие между x и hx, устанавливаемое гомоморфизмом h, взаимно однозначно (т. е. из $hx_1 = hx_2$ следует $x_1 = x_2$), то h называется *мономорфизмом*.

Например, если E — подпространство пространства E_1, то гомоморфизм i из E в E_1, определенный формулой

$$ix = x \quad (x \in E).$$

является мономорфизмом. Это — так называемое *вложение* E *в* E_1.

Если гомоморфизм h отображает пространство E на все пространство E_1, то он называется *эпиморфизмом*.

Примеры эпиморфизмов будут приведены ниже.

Изоморфизм – это такой гомоморфизм, который является одновременно мономорфизмом и эпиморфизмом.

Пусть h — гомоморфизм из E в E_1.

87. Множество решений уравнения $hx=0$ является подпространством.

Оно называется *ядром* гомоморфизма h и обозначается $\operatorname{Ker} h$.

88. Множество векторов вида $y=hx$ является подпространством.

Оно называется *образом* гомоморфизма h и обозначается $\operatorname{Im} h$.

Фактор-пространство $\mathrm{E}_1/\operatorname{Im} h$ называется *коядром* гомоморфизма h и обозначается $\operatorname{Coker} h$. Фактор-пространство $\mathrm{E}/\operatorname{Ker} h$ называется *кообразом* гомоморфизма h и обозначается $\operatorname{Coim} h$. Частица «ко» указывает на двойственность понятий (так же как в термине «коразмерность»).

89. Для того чтобы гомоморфизм h был мономорфизмом, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{Ker} h=0$.

90. Для того чтобы гомоморфизм h был эпиморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{Coker} h=0$.

Понятия мономорфизма и эпиморфизма двойственны друг другу. Понятие изоморфизма самодвойственно.

Подчеркнем, что мономорфизм h из E в E_1 можно рассматривать как изоморфизм из E в $\operatorname{Im} h$.

Имеется тесная связь между гомоморфизмами и фактор-пространствами:

91. Пусть M — произвольное подпространство пространства E. Отображение $h_{\mathrm{M}}x=[x]_{\mathrm{M}}$ является гомоморфизмом из E в E/M, причем

$$\operatorname{Ker} h_{\mathrm{M}}=\mathrm{M}, \quad \operatorname{Im} h_{\mathrm{M}}=\mathrm{E}/\mathrm{M}.$$

Таким образом, h_{M} — эпиморфизм. Он называется *стягиванием* пространства E по модулю M. «Стягивая» пространство E по модулю M, мы получаем фактор-пространство E/M. При этом подпространство M «стягивается» в точку 0.

Этот результат можно обобщить. Пусть M и L — два подпространства пространства E, причем $\mathrm{M}\supset\mathrm{L}$. Тогда, если $x\equiv y\,(\mathrm{mod}\,\mathrm{L})$, то и подавно $x\equiv y\,(\mathrm{mod}\,\mathrm{M})$. Тем самым каждый класс по модулю L целиком входит в некоторый (очевидно, единственный) класс по модулю M. Возникает о т о б р а ж е н и е в л о ж е н и я к л а с с о в, которое мы обозначим через $h_{M/L}$. Оно действует из фактор-пространства E/L в фактор-пространство E/M. Очевидно, $h_{M/0}=h_M$ (если $E/0$ отождествить с E); $h_{E/L}=0$ для любого подпространства L.

92. Отображение $h_{M/L}$ является гомоморфизмом, причем

$$\operatorname{Ker} h_{M/L}=\{[x]_L \mid x\in M\}, \quad \operatorname{Im} h_{M/L}=E/M.$$

Вместе с тем $\operatorname{Ker} h_{M/L}\approx M/L$.

В силу **92**, $h_{M/L}$ — эпиморфизм. Он называется *стягиванием* пространства E по модулю M *относительно* модуля L.

93. Пусть h — произвольный гомоморфизм из E в E_1. Отображение $\hat{h}$, определенное равенством $\hat{h}[x]_{\operatorname{Ker} h}=hx$, является изоморфизмом пространств $E/\operatorname{Ker} h$ и $\operatorname{Im} h$:

$$\operatorname{Im} h\approx E/\operatorname{Ker} h. \qquad (*)$$

Таким образом, стягивая пространство E по модулю $\operatorname{Ker} h$, мы превращаем гомоморфизм h в мономорфизм, не меняя его образа. Можно сказать, что гомоморфизм h с точностью до стягивания по модулю $\operatorname{Ker} h$ является мономорфизмом. Можно также сказать, что h с точностью до изоморфизма $\hat{h}$ является стягиванием по модулю $\operatorname{Ker} h$. Такая «стандартизация» произвольного гомоморфизма играет важную роль. Рассмотрим одно из наиболее выразительных применений формулы (*). Предварительно дадим два определения.

Для любого гомоморфизма h размерность образа $\operatorname{Im} h$ называется *рангом* гомоморфизма и обозначается $\operatorname{rg} h$; размерность ядра $\operatorname{Ker} h$ называется *дефектом* гомоморфизма и обозначается $\operatorname{def} h$.

94. $\operatorname{rg} h_{M/L}=\operatorname{codim} M$, $\quad \operatorname{def} h_{M/L}=\dim M-\dim L$.

В частности, $\operatorname{rg} h_M=\operatorname{codim} M$, $\operatorname{def} h_M=\dim M$ и, следовательно,

$$\operatorname{def} h_{M/L}=\operatorname{def} h_M-\operatorname{def} h_L.$$

Очевидно, если h — гомоморфизм из E в E_1, то

$$0\leqslant \operatorname{def} h\leqslant n, \quad 0\leqslant \operatorname{rg} h\leqslant n_1,$$

где n, как обычно, означает размерность пространства E, а n_1 — размерность пространства E_1.

95. Для любого гомоморфизма h из E в E_1 имеет место формула дополнения

$$\operatorname{rg} h + \operatorname{def} h = n.$$

Если $h \in \operatorname{Hom}(E, E_1)$, то разность размерностей

$$\dim E - \dim E_1$$

называется *индексом* гомоморфизма h и обозначается через $\operatorname{ind} h$. Гомоморфизм h называется *фредгольмовым*, если $\operatorname{ind} h = 0$. Важным частным случаем являются так называемые *эндоморфизмы* пространства E, т. е. гомоморфизмы из E в E.

Основное свойство фредгольмовых гомоморфизмов выражается следующей теоремой.

96. Для того чтобы фредгольмов гомоморфизм был эпиморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы он был мономорфизмом (и тем самым изоморфизмом).

Отсюда:

97. Если h — фредгольмов гомоморфизм, то, для того чтобы неоднородное уравнение

$$hx = y$$

было глобально разрешимым (т. е. разрешимым при любой правой части y), необходимо и достаточно, чтобы соответствующее однородное уравнение

$$hx = 0$$

имело только тривиальное решение $x = 0$ (первая теорема Фредгольма).

Этот результат часто формулируется в виде альтернативы Фредгольма: если h — фредгольмов гомоморфизм, то либо неоднородное уравнение разрешимо при любой правой части, либо соответствующее однородное уравнение имеет нетривиальное решение.

Заметим при этом, что наличие нетривиальных решений однородного уравнения равносильно неединственности решения неоднородного уравнения всякий раз, когда это решение существует. Итак, либо неоднородное уравнение глобально разрешимо, либо всякий раз, когда оно разрешимо, его решение не единственно.

Приводимое ниже обобщение **98** формулы **95** послужит источником ряда дальнейших результатов.

Пусть h — гомоморфизм из E в E_1, L — подпространство пространства E. Множество векторов

$$\{y \mid y = hx,\ x \in \mathrm{L}\},$$

называемое *образом* подпространства L, является подпространством. Мы будем обозначать его через $h\mathrm{L}$. В частности, $h\mathrm{E} = \operatorname{Im} h$, $h0 = 0$. Очевидно, всегда $h\mathrm{L} \subset \operatorname{Im} h$, так что

$$\dim h\mathrm{L} \leqslant \operatorname{rg} h.$$

98. $\dim h\mathrm{L} = \dim \mathrm{L} - \dim (\mathrm{L} \cap \operatorname{Ker} h)$.

Отсюда, в частности, видно, что

$$\dim h\mathrm{L} \leqslant \dim \mathrm{L},$$

т. е. гомоморфизм не повышает размерности подпространств. С другой стороны,

$$\dim h\mathrm{L} \geqslant \dim \mathrm{L} - \operatorname{def} h,$$

т. е. фиксированный гомоморфизм не может слишком снижать размерность подпространств. Эта оценка точна:

99. Существует такое подпространство L, что

$$\dim h\mathrm{L} = \dim \mathrm{L} - \operatorname{def} h.$$

Таким образом, дефект гомоморфизма можно интерпретировать как меру понижения размерности подпространств. В частности, ясно, что для того, чтобы гомоморфизм сохранял размерность всех подпространств, необходимо и достаточно, чтобы он был мономорфизмом.

Введем теперь объект, двойственный $h\mathrm{L}$. Пусть M — подпространство пространства E_1. Множество векторов

$$\{x \mid x \in \mathrm{E},\ hx \in \mathrm{M}\},$$

называемое *полным прообразом* подпространства M, является подпространством. Мы будем обозначать его через $h^{-1}\mathrm{M}$. В частности, $h^{-1}0 = \operatorname{Ker} h$, $h^{-1}\mathrm{E}_1 = \mathrm{E}$. Очевидно, всегда $h^{-1}\mathrm{M} \supset \operatorname{Ker} h$, так что $\dim h^{-1}\mathrm{M} \geqslant \operatorname{def} h$.

100. Имеет место соотношение

$$h^{-1}(h\mathrm{L}) \supset \mathrm{L}.$$

Для того чтобы $h^{-1}(h\mathrm{L}) = \mathrm{L}$ при всех L, необходимо и достаточно, чтобы h был мономорфизмом.

Двойственным образом:

101. Имеет место соотношение

$$h\left(h^{-1}\mathrm{M}\right) \subset \mathrm{M}.$$

Для того чтобы $h\left(h^{-1}\mathrm{M}\right) = \mathrm{M}$ при всех M, необходимо и достаточно, чтобы h был эпиморфизмом.

102. $\operatorname{codim} h^{-1}\mathrm{M} = \operatorname{codim} \mathrm{M} - \operatorname{codim}(\mathrm{M} + \operatorname{Im} h)$.

Двойственность формул **98** и **102** очень выразительна.

Из **102**, в частности, видно, что

$$\operatorname{codim} \mathrm{M} \geqslant \operatorname{codim} h^{-1}\mathrm{M}.$$

В этом смысле гомоморфизм не понижает коразмерности подпространств. С другой стороны,

$$\operatorname{codim} \mathrm{M} \leqslant \operatorname{codim} h^{-1}\mathrm{M} + \operatorname{codim}(\operatorname{Im} h),$$

т. е. фиксированный гомоморфизм не может слишком повышать коразмерность подпространств. Эта оценка точна:

103. Существует такое подпространство M, что

$$\operatorname{codim} \mathrm{M} = \operatorname{codim} h^{-1}\mathrm{M} + \operatorname{codim}(\operatorname{Im} h).$$

Таким образом, величину $\operatorname{codim}(\operatorname{Im} h)$ можно интерпретировать как меру повышения коразмерности подпространств. В частности, ясно, что для того, чтобы гомоморфизм h сохранял коразмерность всех подпространств, необходимо и достаточно, чтобы он был эпиморфизмом.

Отметим, что для фредгольмовых гомоморфизмов (и только для них)

$$\operatorname{codim}(\operatorname{Im} h) = \operatorname{def} h,$$

т. е. максимум снижения размерности совпадает с максимумом повышения коразмерности.

Рассмотрим свойства гомоморфизма h по отношению к операциям сложения и пересечения подпространств.

104. Пусть $\{\mathrm{L}_\nu\}$ — произвольное множество подпространств пространства E, $\{\mathrm{M}_\mu\}$ — произвольное множество подпространств пространства E_1. Имеют место соотношения

$$h\left(\sum \mathrm{L}_\nu\right) = \sum h\mathrm{L}_\nu, \quad h^{-1}\left(\sum \mathrm{M}_\mu\right) \supset \sum h^{-1}\mathrm{M}_\mu$$

и, двойственным образом,

$$h\left(\bigcap \mathrm{L}_\nu\right) \subset \bigcap h\mathrm{L}_\nu, \quad h^{-1}\left(\bigcap \mathrm{M}_\mu\right) = \bigcap h^{-1}\mathrm{M}_\mu.$$

Точнее:

105. Имеют место формулы

$$\sum h^{-1}\mathrm{M}_\mu = h^{-1}\left(\sum (\mathrm{M}_\mu \cap \operatorname{Im} h)\right),$$
$$\bigcap h\mathrm{L}_\nu = h\left(\bigcap (\mathrm{L}_\nu + \operatorname{Ker} h)\right).$$

Поэтому, если $\mathrm{M}_\mu \subset \operatorname{Im} h$ для всех μ (в частности, если h — эпиморфизм), то

$$h^{-1}\left(\sum \mathrm{M}_\mu\right) = \sum h^{-1}\mathrm{M}_\mu.$$

Двойственным образом, если $\mathrm{L}_\nu \supset \operatorname{Ker} h$ для всех ν (в частности, если h — мономорфизм), то

$$h\left(\bigcap \mathrm{L}_\nu\right) = \bigcap h\mathrm{L}_\nu.$$

106. Пусть подпространства L_1, L_2 образуют полную систему, h — эпиморфизм. Тогда подпространства $h\mathrm{L}_1$, $h\mathrm{L}_2$ также образуют полную систему.

107. Пусть подпространства L_1, L_2 взаимно независимы, h — мономорфизм. Тогда подпространства $h\mathrm{L}_1$, $h\mathrm{L}_2$ также взаимно независимы.

Более общее утверждение:

108. Если $\mathrm{L} = \sum\limits_{k=1}^{m}{}^{\bullet}\, \mathrm{L}_k$ и h — мономорфизм, то

$$h\mathrm{L} = \sum_{k=1}^{m}{}^{\bullet}\, h\mathrm{L}_k.$$

§ 5. Действия над гомоморфизмами

Рассмотрим множество $\operatorname{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$ всех гомоморфизмов из E в E_1. Определим *сумму* гомоморфизмов h_1, h_2, полагая

$$(h_1 + h_2)\,x = h_1 x + h_2 x \qquad (x \in \mathrm{E}),$$

и *произведение гомоморфизма h на число* α, полагая

$$(\alpha h)\,x = \alpha(hx). \qquad (x \in \mathrm{E}).$$

Тем самым $\operatorname{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$ становится линейным пространством. Нулем этого пространства является гомоморфизм 0: $0x = 0$ $(x \in \mathrm{E})$.

Следующее предложение приводит к общему способу описания гомоморфизмов из E в E_1.

109. Пусть $\{e_k\}_1^n$ — какой-нибудь базис пространства E. Для любой системы векторов $\{v_k\}_1^n$ из E_1 существует единственный гомоморфизм $h \in \mathrm{Hom}(E, E_1)$, удовлетворяющий условиям:

$$he_k = v_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Если еще выбрать какой-нибудь базис $\{u_j\}_1^{n_1}$ пространства E_1, то систему $\{v_k\}_1^n$ можно будет взаимно однозначно описать ее матрицей (см. § 2). Эта матрица называется *матрицей гомоморфизма* h относительно пары базисов $\{e_k\}_1^n$, $\{u_j\}_1^{n_1}$. Она имеет размер $n_1 \times n$. Легко проверить, что при сложении гомоморфизмов их матрицы относительно фиксированной пары базисов складываются, т. е. складываются их соответственные элементы:

$$(\alpha_{jk}) + (\beta_{jk}) = (\alpha_{jk} + \beta_{jk}).$$

Аналогично при умножении гомоморфизма на число λ его матрица умножается на это число:

$$\lambda(\alpha_{jk}) = (\lambda\alpha_{jk}).$$

110. Пусть $\{e_k\}_1^n$ — базис пространства E, $\{u_j\}_1^{n_1}$ — базис пространства E_1. Определим гомоморфизм $I_{pq} \in \mathrm{Hom}(E, E_1)$, полагая

$$I_{pq}e_k = \delta_{qk}u_p \qquad (q, k = 1, 2, \ldots, n; \; p = 1, 2, \ldots, n_1).$$

Система гомоморфизмов $\{I_{pq}\}$ образует базис пространства $\mathrm{Hom}(E, E_1)$.

Таким образом,

$$\dim \mathrm{Hom}(E, E_1) = \dim E \cdot \dim E_1.$$

В частности, пространство $\mathrm{Hom}(E, E)$ есть пространство эндоморфизмов пространства E. Его размерность равна n^2.

Отметим одно следствие теоремы **109** и результатов § 4 (ср. **43**).

111. Для того чтобы существовал мономорфизм h из E в E_1, необходимо и достаточно, чтобы $\dim E_1 \geqslant \dim E$. Для того чтобы существовал эпиморфизм h из E в E_1, необходимо и достаточно, чтобы $\dim E_1 \leqslant \dim E$.

Поэтому, если одновременно существуют мономорфизм $h_1 \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$ и эпиморфизм $h_2 \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$, то $\mathrm{E} \approx \mathrm{E}_1$, т. е. существует изоморфизм $h \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$. При этом все мономорфизмы и все эпиморфизмы оказываются изоморфизмами в силу первой теоремы Фредгольма.

Введем теперь операцию умножения гомоморфизмов. Пусть дано еще одно пространство E_2 и пусть $h_1 \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$, $h_2 \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$. Положим

$$hx = h_2(h_1 x) \qquad (x \in \mathrm{E}).$$

Этим равенством определяется отображение h пространства E в пространство E_2, называемое *произведением гомоморфизмов* h_2 и h_1 и обозначаемое $h_2 h_1$. Гомоморфизмы перемножаются так же, как любые отображения: п р о и з в е д е н и е о т о б р а ж е н и й есть «результирующее» отображение, возникающее при последовательном выполнении отображений — множителей.

112. Произведение двух гомоморфизмов есть гомоморфизм. Точнее, если $h_1 \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$, $h_2 \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$, то $h_2 h_1 \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_2)$.

Имеет место ассоциативный закон:

113. $h_3(h_2 h_1) = (h_3 h_2) h_1$.

Ассоциативный закон справедлив для произведения не только гомоморфизмов, но и любых отображений. Отметим, что при умножении гомоморфизмов их матрицы умножаются по следующему правилу: пусть $(\alpha_{jk}^{(1)})$ — матрица гомоморфизма h_1 относительно пары базисов Δ, Δ_1; $(\alpha_{jk}^{(2)})$ — матрица гомоморфизма h_2 относительно пары базисов Δ_1, Δ_2. Тогда матрица гомоморфизма $h = h_2 h_1$ относительно пары базисов Δ, Δ_2 равна (α_{jk}), где

$$\alpha_{jk} = \sum_{s=1}^{n_1} \alpha_{js}^{(2)} \alpha_{sk}^{(1)}.$$

Обозначим через I_{E} *единичный эндоморфизм* пространства E, т. е. тождественное отображение

$$I_{\mathrm{E}} x = x \qquad (x \in \mathrm{E})$$

(оно, очевидно, является гомоморфизмом). Единичные эндоморфизмы играют роль единиц при умножении:

114. Если $h \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$, то

$$hI_{\mathrm{E}} = I_{\mathrm{E}_1}h = h.$$

Матрица единичного эндоморфизма относительно пары совпадающих базисов Δ, Δ есть единичная матрица.

Теоремы **112—114** позволяют утверждать, что класс конечномерных линейных пространств и их гомоморфизмов есть категория.

Отметим еще дистрибутивные законы:

115. Если $h, h_1 \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$ и $h_2 \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$, то

$$h_2(h + h_1) = h_2h + h_2h_1.$$

Аналогично, если $h \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$ и $h_1, h_2 \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$, то

$$(h_1 + h_2)h = h_1h + h_2h.$$

Наконец:

116. Если $h_1 \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$, $h_2 \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$, α — любой скаляр, то

$$h_2(\alpha h_1) = (\alpha h_2)h_1 = \alpha(h_2h_1).$$

Для эндоморфизмов умножение является внутренней операцией: если $h_1, h_2 \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E})$, то и $h_2h_1 \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E})$. На основании предыдущих теорем можно говорить об алгебре эндоморфизмов. Мы займемся этой алгеброй в гл. II. Вообще *алгеброй* называется линейное пространство, в котором определена операция умножения, подчиняющаяся дистрибутивным законам

$$x(y_1 + y_2) = xy_1 + xy_2, \quad (x_1 + x_2)y = x_1y + x_2y$$

и перестановочная с умножением на скаляр:

$$x(\alpha y) = (\alpha x)y = \alpha(xy).$$

Если умножение подчиняется ассоциативному закону

$$x(yz) = (xy)z,$$

то алгебра называется *ассоциативной*; такова, например, алгебра эндоморфизмов.

Рассмотрим теперь важную задачу продолжения гомоморфизма.

Пусть L — подпространство пространства E и $h \in \mathrm{Hom}(\mathrm{L}, \mathrm{E}_1)$.

Гомоморфизм $\tilde{h} \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$ называется *продолжением* (или *расширением*) гомоморфизма h, если

$$\tilde{h}x = hx \qquad (x \in \mathrm{L}).$$

Наоборот, если задан гомоморфизм $h \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$, то гомоморфизм $\check{h} \in \mathrm{Hom}(\mathrm{L}, \mathrm{E}_1)$ называется *ограничением* (или *сужением*) гомоморфизма h на L, если

$$\check{h}x = hx \qquad (x \in \mathrm{L})$$

(т. е. если h является продолжением гомоморфизма $\check{h}$). Часто пишут

$$\check{h} = h \,|\, \mathrm{L}.$$

Очевидно,

$$\mathrm{Im}(h \,|\, \mathrm{L}) = h\mathrm{L}, \qquad \mathrm{Ker}(h \,|\, \mathrm{L}) = \mathrm{Ker}\, h \cap \mathrm{L}.$$

Простейшая теорема о продолжении состоит в следующем:

117. Для каждого гомоморфизма $h \in \mathrm{Hom}(\mathrm{L}, \mathrm{E}_1)$ существует продолжение $\tilde{h} \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$.

Более того:

118. Пусть векторы $e_1, e_2, \ldots, e_m$ пространства E линейно независимы по модулю L; $u_1, u_2, \ldots, u_m$ — произвольные векторы пространства E_1. Для каждого гомоморфизма $h \in \mathrm{Hom}(\mathrm{L}, \mathrm{E}_1)$ существует продолжение $\tilde{h} \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$, удовлетворяющее условиям:

$$\tilde{h}e_k = u_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Для единственности такого продолжения (при заданных $e_1, e_2, \ldots, e_m$; $u_1, u_2, \ldots, u_m$) необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{codim}\, \mathrm{L} = m$ (т. е. чтобы линейная оболочка системы векторов $\{e_k\}_1^m$ была дополнением подпространства L).

Этот результат нетрудно получить, опираясь на теорему **109.** Он имеет многочисленные применения. Сейчас мы используем его для исследования вопроса об обращении гомоморфизма.

Пусть $h \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$. Гомоморфизм $g \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E})$ называется *левым обратным* к h, если

$$gh = I_{\mathrm{E}},$$

и *правым обратным* к h, если

$$hg = I_{\mathrm{E}_1}.$$

Если гомоморфизм обладает левым обратным, то он называется *обратимым слева*. Аналогично вводится понятие *обратимого справа* гомоморфизма. Если гомоморфизм обратим и слева и справа, то он называется *двусторонне обратимым* или, короче, *обратимым*.

Термины «левый» и «правый» двойственны друг другу.

119. Для того чтобы гомоморфизм h был обратим слева, необходимо и достаточно, чтобы он был мономорфизмом (т. е. чтобы $\operatorname{Ker} h = 0$).

При этом:

120. Если h — мономорфизм, то для единственности левого обратного необходимо и достаточно, чтобы он был изоморфизмом (т. е. чтобы не только $\operatorname{Ker} h = 0$, но и $\operatorname{Coker} h = 0$).

Двойственным образом:

121. Для того чтобы гомоморфизм h был обратим справа, необходимо и достаточно, чтобы он был эпиморфизмом (т. е. чтобы $\operatorname{Coker} h = 0$).

При этом:

122. Если h — эпиморфизм, то для единственности правого обратного необходимо и достаточно, чтобы он был изоморфизмом (т. е. чтобы не только $\operatorname{Coker} h = 0$, но и $\operatorname{Ker} h = 0$).

Рассмотрим ближайшие следствия теорем **119—122.**

123. Для того чтобы гомоморфизм был двусторонне обратимым, необходимо и достаточно, чтобы он был изоморфизмом.

124. Если гомоморфизм двусторонне обратим, то его левый обратный и его правый обратный единственны. Более того, они совпадают между собой.

В этом случае каждый из них обозначается через h^{-1} и называется *обратным* к h гомоморфизмом.

125. Гомоморфизм h^{-1} двусторонне обратим и $(h^{-1})^{-1} = h$.

126. Если гомоморфизм обратим слева и его левый обратный единствен, то он обратим справа и его правый обратный единствен и совпадает с левым обратным.

Для фредгольмовых гомоморфизмов (в частности, для эндоморфизмов) с помощью первой теоремы Фредгольма теорема **126** существенно усиливается:

127. Если фредгольмов гомоморфизм односторонне обратим (т. е. обратим слева или справа), то он двусторонне обратим (т. е. обратим слева и справа).

Наконец, отметим еще, что:

128. Левый обратный к мономорфизму является эпиморфизмом. Правый обратный к эпиморфизму является мономорфизмом. Обратный к изоморфизму является изоморфизмом.

Изучим образ и ядро (соответственно ранг и дефект) суммы и произведения гомоморфизмов.

129. Если $h_1, h_2 \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$, то

$$\mathrm{Im}(h_1+h_2) \subset \mathrm{Im}\, h_1 + \mathrm{Im}\, h_2, \quad \mathrm{Ker}(h_1+h_2) \supset \mathrm{Ker}\, h_1 \cap \mathrm{Ker}\, h_2.$$

В силу первого из этих соотношений:

130. $\mathrm{rg}(h_1+h_2) \leqslant \mathrm{rg}\, h_1 + \mathrm{rg}\, h_2$.

Отсюда:

131. $\mathrm{rg}(h_1+h_2) \geqslant |\mathrm{rg}\, h_1 - \mathrm{rg}\, h_2|$.

Далее:

132. Если $h_1 \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$, $h_2 \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$, то

$$\mathrm{Im}(h_2 h_1) = h_2(\mathrm{Im}\, h_1), \quad \mathrm{Ker}(h_2 h_1) = h_1^{-1}(\mathrm{Ker}\, h_2).$$

Отсюда и из теоремы **98** вытекает формула:

133. $\mathrm{rg}\, h_2 h_1 = \mathrm{rg}\, h_1 - \dim(\mathrm{Im}\, h_1 \cap \mathrm{Ker}\, h_2)$.

Эту формулу можно представить в виде:

134. $\mathrm{rg}\, h_2 h_1 = \mathrm{rg}\, h_2 - \mathrm{codim}(\mathrm{Im}\, h_1 + \mathrm{Ker}\, h_2)$,

а также в виде:

135. $\mathrm{def}\, h_2 h_1 = \mathrm{def}\, h_1 + \dim(\mathrm{Im}\, h_1 \cap \mathrm{Ker}\, h_2)$

и, наконец:

136. $\mathrm{def}\, h_2 h_1 = \mathrm{def}\, h_2 + \mathrm{codim}(\mathrm{Im}\, h_1 + \mathrm{Ker}\, h_2) + \mathrm{ind}\, h_1$.

В частности, если h_1 — фредгольмов гомоморфизм, то

$$\mathrm{def}\, h_2 h_1 = \mathrm{def}\, h_2 + \mathrm{codim}(\mathrm{Im}\, h_1 + \mathrm{Ker}\, h_2).$$

В силу **133**, **134** имеет место неравенство:

137. $\mathrm{rg}\, h_2 h_1 \leqslant \min(\mathrm{rg}\, h_2, \mathrm{rg}\, h_1)$.

Более подробно:

138. Если система подпространств $\{\mathrm{Im}\, h_1, \mathrm{Ker}\, h_2\}$ пространства E_1 независима (в частности, если h_2 — мономорфизм), то

$$\mathrm{rg}\, h_2 h_1 = \mathrm{rg}\, h_1.$$

Если эта система полна (в частности, если h_1 — эпиморфизм), то

$$\mathrm{rg}\, h_2 h_1 = \mathrm{rg}\, h_2.$$

В остальных случаях

$$\operatorname{rg} h_2 h_1 < \min(\operatorname{rg} h_2, \operatorname{rg} h_1).$$

Из теоремы **135** вытекает интересное неравенство Сильвестра (сублогарифмическое свойство дефекта):

139. $\operatorname{def} h_2 h_1 \leqslant \operatorname{def} h_2 + \operatorname{def} h_1$.

Для того чтобы в неравенстве Сильвестра достигался знак равенства, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{Ker} h_2 \subset \operatorname{Im} h_1$.

В частности, знак равенства достигается, если h_1 — эпиморфизм или h_2 — мономорфизм.

В связи с неравенством Сильвестра отметим, что индекс обладает логарифмическим свойством:

140. $\operatorname{ind} h_2 h_1 = \operatorname{ind} h_2 + \operatorname{ind} h_1$.

В частности, произведение фредгольмовых гомоморфизмов является фредгольмовым гомоморфизмом.

141. Имеет место неравенство $\operatorname{def} h_2 h_1 \geqslant \operatorname{def} h_1$, причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда система подпространств $\{\operatorname{Im} h_1, \operatorname{Ker} h_2\}$ независима (в частности, когда h_2 — мономорфизм).

В силу **136**:

142. Если гомоморфизм h_1 фредгольмов, то $\operatorname{def} h_2 h_1 \geqslant \operatorname{def} h_2$, причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда система подпространств $\{\operatorname{Im} h_1, \operatorname{Ker} h_2\}$ полна.

Выясним теперь, когда произведение $h = h_2 h_1$ двух гомоморфизмов является моно- или эпиморфизмом.

143. Для того чтобы произведение $h_2 h_1$ было мономорфизмом, необходимо и достаточно, чтобы h_1 был мономорфизмом и чтобы система подпространств $\{\operatorname{Im} h_1, \operatorname{Ker} h_2\}$ была независимой.

В частности, произведение двух мономорфизмов есть мономорфизм.

144. Для того чтобы произведение $h_2 h_1$ было эпиморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы h_2 был эпиморфизмом и чтобы система подпространств $\{\operatorname{Im} h_1, \operatorname{Ker} h_2\}$ была полной.

В частности, произведение двух эпиморфизмов есть эпиморфизм.

145. Для того чтобы произведение $h_2 h_1$ было изоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы h_1 был мономорфизмом, h_2 был эпиморфизмом и чтобы система подпространств $\{\operatorname{Im} h_1, \operatorname{Ker} h_2\}$ была базисной.

В частности, произведение двух изоморфизмов есть изоморфизм. При этом:

146. $(h_2 h_1)^{-1} = h_1^{-1} h_2^{-1}$.

Для дальнейшего нам понадобится понятие ортогональных гомоморфизмов. Гомоморфизм h_2 называется *ортогональным* к гомоморфизму h_1 *слева*, если

$$h_2 h_1 = 0. \qquad (*)$$

Аналогично определяется *ортогональность справа.*

Заметим, что равенство $(*)$ равносильно включению $\operatorname{Im} h_1 \subset \subset \operatorname{Ker} h_2$. В современной алгебре и топологии важную роль играют такие пары гомоморфизмов h_1, h_2, для которых $\operatorname{Im} h_1 = = \operatorname{Ker} h_2$. Они называются *точными парами.* Последовательности гомоморфизмов, в которых каждые два соседних гомоморфизма образуют точную пару, называются *точными последовательностями.*

147. Пусть $h_1 \in \operatorname{Hom}(E, E_1)$. Множество гомоморфизмов $h_2 \in \operatorname{Hom}(E_1, E_2)$, ортогональных к гомоморфизму h_1 слева, образует в $\operatorname{Hom}(E_1, E_2)$ подпространство размерности

$$(n_1 - \operatorname{rg} h_1) n_2 \qquad (n_1 = \dim E_1,\ n_2 = \dim E_2).$$

Следовательно:

148. Для того чтобы не существовало отличных от нуля гомоморфизмов, ортогональных к гомоморфизму h_1 слева, необходимо и достаточно, чтобы h_1 был эпиморфизмом (т. е. обратимым справа).

149. Пусть $h_2 \in \operatorname{Hom}(E_1, E_2)$. Множество гомоморфизмов $h_1 \in \operatorname{Hom}(E, E_1)$, ортогональных к гомоморфизму h_2 справа, образует в $\operatorname{Hom}(E, E_1)$ подпространство размерности $n_1 \cdot \operatorname{def} h_2$.

Следовательно:

150. Для того чтобы не существовало отличных от нуля гомоморфизмов, ортогональных к гомоморфизму h_2 справа, необходимо и достаточно, чтобы h_2 был мономорфизмом (т. е. обратимым слева).

Исследуем теперь делимость гомоморфизмов. Гомоморфизм h_1 называется *правым делителем* гомоморфизма h, если существует такой гомоморфизм g (*частное от деления* h *на* h_1 *справа*), что

$$h = g h_1.$$

Говорят также, что h делится на h_1 справа.

Аналогично определяется *левый делитель* и *частное от деления слева*. Частные, вообще говоря, определены не однозначно. Специальная ситуация, когда h — единичный эндоморфизм, нами уже изучалась в **119—128**.

Рассмотрим деление справа.

151. Пусть гомоморфизм $h \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_2)$ делится на гомоморфизм $h_1 \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$ справа. Тогда множество всех частных от деления h на h_1 справа является в $\mathrm{Hom}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$ классом по модулю $\mathfrak{L}$, где $\mathfrak{L}$ — подпространство гомоморфизмов, ортогональных к h_1 слева.

Следовательно:

152. Для того чтобы частное от деления h на h_1 справа было единственным (при условии, что оно существует), необходимо и достаточно, чтобы h_1 был эпиморфизмом.

153. Пусть $h_1 \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$—мономорфизм, $h_1^{(-1)}$—какой-нибудь его левый обратный. Для любого $h \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_2)$ гомоморфизм $g = hh_1^{(-1)}$ является частным от деления h на h_1 справа.

Таким образом, мономорфизм является правым делителем любого гомоморфизма. В общем случае:

154. Если h делится на h_1 справа, то

$$\mathrm{Ker}\, h \supset \mathrm{Ker}\, h_1.$$

Установим, что это необходимое условие делимости справа является также и достаточным. Попробуем свести задачу к делению на мономорфизм путем стягивания по модулю $\mathrm{Ker}\, h_1$ (см. **93**). С этой целью предварительно рассмотрим стягивания с точки зрения действий над гомоморфизмами.

155. Пусть L, M — два подпространства пространства E и $\mathrm{L} \subset \mathrm{M}$. Тогда

$$h_{\mathrm{M}} = h_{\mathrm{M/L}} \cdot h_{\mathrm{L}}.$$

Таким образом, стягивание h_{L} является правым делителем стягивания h_{M}, а соответствующее частное (оно единственно, так как h_{L} — эпиморфизм) равно относительному стягиванию $h_{\mathrm{M/L}}$. Этот результат можно обратить в том смысле, что:

156. Если L, M—два подпространства пространства E и стягивание h_{L} является правым делителем стягивания h_{M}, то $\mathrm{M} \supset \mathrm{L}$.

Дадим теперь новое истолкование теоремы **93**.

157. Для любого гомоморфизма h существует (и единствен) такой мономорфизм $\hat{h}$, что $h = \hat{h} f_h$, где f_h означает стягивание по модулю $\mathrm{Ker}\, h$.

Теперь мы хорошо подготовлены к получению основного результата:

158. Если $h \in \operatorname{Hom}(E, E_2)$, $h_1 \in \operatorname{Hom}(E, E_1)$ и

$$\operatorname{Ker} h \supset \operatorname{Ker} h_1,$$

то h делится на h_1 справа. В качестве частного можно взять любой гомоморфизм g, для которого

$$g \mid \operatorname{Im} h_1 = \hat{h} f_{h/h_1} \cdot \hat{h}_1^{(-1)} + r,$$

где f_{h/h_1} — стягивание пространства E по модулю $\operatorname{Ker} h$ относительно модуля $\operatorname{Ker} h_1$, $r \in \operatorname{Hom}(\operatorname{Im} h_1, E_2)$ — произвольный гомоморфизм, ортогональный к h_1 слева. Это описание исчерпывает все частные от деления h на h_1 справа.

Теория деления слева двойственна построенной теории деления справа.

159. Пусть гомоморфизм $h \in \operatorname{Hom}(E, E_2)$ делится на гомоморфизм $h_1 \in \operatorname{Hom}(E_1, E_2)$ слева. Тогда множество всех частных от деления h на h_1 слева является в $\operatorname{Hom}(E, E_1)$ классом по модулю $\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ — подпространство гомоморфизмов, ортогональных к h_1 справа.

Следовательно:

160. Для того чтобы частное от деления h на h_1 слева было единственным (при условии, что оно существует), необходимо и достаточно, чтобы h_1 был мономорфизмом.

161. Пусть $h_1 \in \operatorname{Hom}(E_1, E_2)$ — эпиморфизм, $h_1^{(-1)}$ — какой-нибудь его правый обратный. Для любого $h \in \operatorname{Hom}(E, E_2)$ гомоморфизм $g = h_1^{(-1)} h$ является частным от деления h на h_1 слева.

Таким образом, эпиморфизм h_1 является левым делителем любого гомоморфизма h. В общем случае:

162. Если h делится на h_1 слева, то $\operatorname{Im} h \subset \operatorname{Im} h_1$.

Обратно:

163. Если $h \in \operatorname{Hom}(E, E_2)$, $h_1 \in \operatorname{Hom}(E_1, E_2)$ и $\operatorname{Im} h \subset \operatorname{Im} h_1$, то h делится на h_1 слева. В качестве частного можно взять любой гомоморфизм вида

$$g = f_{h_1}^{(-1)} \hat{h}_1^{(-1)} h + r,$$

где $f_{h_1}^{(-1)}$ — какой-нибудь правый обратный к стягиванию f_{h_1}, $r \in \operatorname{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$ — произвольный гомоморфизм, ортогональный к h_1 справа. Это описание исчерпывает все частные от деления h на h_1 слева.

§ 6. Линейные функционалы. Ортогональность. Биортогональные системы

Функционал $f(x)$ на пространстве E называется *линейным*, если

1) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$,
2) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Таким образом, линейный функционал на E — это гомоморфизм пространства E в арифметическое пространство C^1.

164. Линейные функционалы на E образуют линейное пространство по отношению к естественным операциям сложения и умножения на число.

Это пространство обозначается через E′ и называется *сопряженным* к пространству E.

165. Пусть E^1 — одномерное пространство, e — какой-нибудь его базисный вектор (т. е. $e \in \mathrm{E}^1$, $e \neq 0$). Формула

$$h_f x = f(x)\, e$$

определяет гомоморфизм h_f из E в E^1. Отображение h: $\mathrm{E}' \to \operatorname{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}^1)$, определенное формулой

$$hf = h_f \qquad (f \in \mathrm{E}'),$$

является изоморфизмом.

166. $\dim \mathrm{E}' = \dim \mathrm{E}$.

Следовательно:

167. $\mathrm{E}' \approx \mathrm{E}$.

Тем самым вообще $\mathrm{E} \approx \mathrm{E}' \approx \mathrm{E}'' \approx \ldots$

Изоморфизм пространств E′ и E можно обнаружить также путем непосредственного построения базисов:

168. Пусть $\Delta = \{e_k\}_1^n$ — какой-нибудь базис пространства E. Координаты $\xi_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ вектора x относительно базиса Δ являются линейными функционалами на E и образуют базис пространства E′.

Этот базис называется *сопряженным* к базису Δ и обозначается через Δ'.

Если $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$, то для любого линейного функционала f

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \xi_k,$$

где $\alpha_k = f(e_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Правая часть этого равенства определяет линейный функционал в C^n, который называется *линейной формой*.

Изоморфизм пространств E и E″ (в отличие от изоморфизма пространств E и E′) может быть задан некоторым естественным образом без использования «случайно» выбранного базиса.

169. Пусть $x \in \mathrm{E}$. Формула

$$\varphi_x(f) = f(x) \qquad (f \in \mathrm{E}')$$

определяет линейный функционал φ_x на E′ (т. е. $\varphi_x \in \mathrm{E}''$). Отображение $\varphi\colon \mathrm{E} \to \mathrm{E}''$, определенное формулой

$$\varphi x = \varphi_x \qquad (x \in \mathrm{E}),$$

является изоморфизмом.

Это — так называемый *канонический изоморфизм* пространств E и E″.

Мы обнаруживаем, что понятия вектора и линейного функционала двойственны: каждый линейный функционал на E является вектором в E′; каждый вектор в E можно рассматривать как линейный функционал на E′.

Во избежание недоразумений подчеркнем, что термин «вектор» будет по-прежнему означать элемент основного пространства.

Пусть L — подпространство пространства E и $g \in \mathrm{L}'$, т. е. g — линейный функционал на L. В соответствии с общим определением продолжения гомоморфизма функционал $\tilde{g} \in \mathrm{E}'$ называется *продолжением* функционала g, если

$$\tilde{g}(x) = g(x) \qquad (x \in \mathrm{L}).$$

Проблема продолжения линейного функционала является одной из основных в линейном анализе. Сейчас мы рассмотрим ее простейший аспект.

Следующие две теоремы редуцируются к теоремам **117, 118.**

170. Каждый функционал $g \in \mathrm{L}'$ имеет продолжение $\tilde{g} \in \mathrm{E}'$.

Более того:

171. Пусть векторы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ линейно независимы по модулю L; $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ — произвольные числа. Существует продолжение $\tilde{g} \in \mathrm{E}'$ любого функционала $g \in \mathrm{L}'$, удовлетворяющее условиям

$$\tilde{g}(x_k) = \gamma_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Для того чтобы это продолжение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{codim} \mathrm{L} = m$.

В частности:

172. Если вектор x_0 не принадлежит подпространству L, то существует такой функционал $f_0 \in \mathrm{E}'$, что

$$f_0(x) = 0 \qquad (x \in \mathrm{L}), \; f_0(x_0) \neq 0.$$

Функционал f_0 о т д е л я е т вектор x_0 от подпространства L.

Из теоремы **172** вытекает следующий критерий полноты системы векторов.

173. Для того чтобы система векторов была полной, необходимо и достаточно, чтобы единственным линейным функционалом, обращающимся в нуль на всех векторах системы, был нулевой функционал.

Сформулируем предложения, двойственные к **172**, **173**.

174. Если M — подпространство в E' и линейный функционал f_0 не принадлежит M, то существует такой вектор $x_0 \in \mathrm{E}$, что

$$f(x_0) = 0 \; (f \in \mathrm{M}), \qquad f_0(x_0) \neq 0.$$

175. Для того чтобы система линейных функционалов была полной (в пространстве E'), необходимо и достаточно, чтобы единственным вектором, на котором обращаются в нуль все функционалы системы, был нулевой вектор.

Система линейных функционалов, обладающая последним свойством, называется *тотальной.*

Теоремы **174**, **175** получаются из теорем **172**, **173** с помощью канонического изоморфизма.

Вектор x и линейный функционал f называются (взаимно) *ортогональными,* если $f(x) = 0$ (т. е. $x \in \operatorname{Ker} f$). Это обозначается так: $f \perp x$ (или $x \perp f$). Отношение ортогональности $f \perp x$ билинейно:

176. Если $f_1 \perp x$, $f_2 \perp x$, то $(f_1 + f_2) \perp x$, и если $f \perp x$, то $\alpha f \perp x$ для любого скаляра α. Двойственным образом, если $f \perp x_1$, $f \perp x_2$, то $f \perp (x_1 + x_2)$, и если $f \perp x$, то $f \perp \alpha x$ для любого скаляра α.

Пусть L — подпространство в E, M — подпространство в E′. Они называются (взаимно) *ортогональными*, если

$$f \perp x \qquad (f \in \mathrm{M},\ x \in \mathrm{L}).$$

Это обозначается так: $\mathrm{M} \perp \mathrm{L}$.

177. Множество тех функционалов $f \in \mathrm{E}'$, которые ортогональны всем векторам из какого-нибудь подпространства $\mathrm{L} \subset \mathrm{E}$, является подпространством.

Это подпространство называется *ортогональным дополнением* *) подпространства L и обозначается через $\mathrm{L}^{\perp}$. Двойственным образом определяется подпространство $\mathrm{M}^{\perp} \subset \mathrm{E}$ — ортогональное дополнение подпространства $\mathrm{M} \subset \mathrm{E}'$. Ортогональное дополнение некоторого подпространства N (в E или в E′) есть наибольшее подпространство (в E′ или в E соответственно), ортогональное подпространству N.

Существует тесная связь между ортогональными дополнениями и фактор-пространствами.

178. Пусть L — подпространство пространства E. Для того чтобы $x \equiv y \pmod{\mathrm{L}}$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x) = f(y)$ $\left(f \in \mathrm{L}^{\perp}\right)$.

Таким образом, каждый функционал $f \in \mathrm{L}^{\perp}$ постоянен на каждом классе по модулю L. Обратно:

179. Если функционал $f \in \mathrm{E}'$ постоянен на каждом классе по модулю L, то $f \in \mathrm{L}^{\perp}$.

Теперь можно установить естественный изоморфизм пространств $(\mathrm{E}/\mathrm{L})'$ и $\mathrm{L}^{\perp}$:

180. Пусть $g \in (\mathrm{E}/\mathrm{L})'$. Формула

$$\hat{g}(x) = g\left([x]_{\mathrm{L}}\right) \qquad (x \in \mathrm{E})$$

---

*) Слово «дополнение» в составе термина «ортогональное дополнение» имеет смысл, отличный от прежнего: ортогональное дополнение лежит в E′, а не в E; оно единственно, в отличие от дополнения, и т. д.

определяет функционал $\hat{g} \in L^{\perp}$. Определенное тем самым отображение $(E/L)' \to L^{\perp}$ является изоморфизмом.

Отсюда вытекает формула дополнения:

181. $\dim L^{\perp} + \dim L = n$.

Опираясь на эту формулу, мы исследуем отображение $(\perp)$ множества подпространств пространства E в множество подпространств пространства E′, которое относит каждому $L \subset E$ его ортогональное дополнение $L^{\perp}$. Мы увидим, что оно автоматически выявляет хорошо известную нам двойственность в геометрии подпространств.

182. Отображение $(\perp)$ взаимно однозначно. Более того, оно является и н в о л ю ц и е й, т. е. $L^{\perp\perp} = L$.

183. Отображение $(\perp)$ является монотонно убывающим: если $L_1 \subset L_2$, то $L_1^{\perp} \supset L_2^{\perp}$.

Имеют место формулы двойственности для суммы и пересечения подпространств:

184. $(L_1 + L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$, $(L_1 \cap L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} + L_2^{\perp}$.

Эти формулы остаются в силе для суммы и пересечения любого множества подпространств.

185. Для того чтобы система двух подпространств $\{L_1, L_2\}$ была полной, необходимо и достаточно, чтобы их ортогональные дополнения $L_1^{\perp}$, $L_2^{\perp}$ были взаимно независимыми. Для того чтобы подпространства L_1, L_2 были взаимно независимыми, необходимо и достаточно, чтобы система их ортогональных дополнений $\{L_1^{\perp}, L_2^{\perp}\}$ была полной.

Вследствие этого:

186. Если $L_1 \dot{+} L_2 = E$, то $L_1^{\perp} \dot{+} L_2^{\perp} = E'$.

Теорема **186** не может быть распространена на систему более чем двух подпространств. Это вытекает, например, из следующего неравенства: если $\sum_{k=1}^{m} d_k = n$, то

$$\sum_{k=1}^{m} (n - d_k) = (m-1)n > n \qquad (m > 2).$$

Очевидно, однако, что если $\sum^{\bullet} L_\nu = E$ или даже только $\bigcap L_\nu = 0$, то $\sum L_\nu^{\perp} = E'$, но эта сумма уже не является прямой.

В заключение параграфа рассмотрим так называемые биортогональные системы. Это — полезный аппарат во многих вопросах.

Система векторов $\{x_k\}_1^m$ и система линейных функционалов $\{f_k\}_1^m$ называются (взаимно) *биортогональными*, если

$$f_j(x_k) = \delta_{jk} \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, m),$$

т. е. $f_j \perp x_k$ $(j \neq k)$, $f_j(x_j) = 1$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

187. Произвольный базис Δ пространства E и сопряженный с ним базис Δ' пространства E взаимно биортогональны.

Обрзтно, биортогональные системы всегда являются базисами своих линейных оболочек, ибо:

188. Каждая из двух взаимно биортогональных систем линейно независима.

Далее:

189. Для любой линейно независимой системы $\Gamma \subset \mathrm{\ddot{E}}$ существует биортогональная система $\Gamma' \subset \mathrm{E}'$. Элементы системы Γ' определены с точностью до произвольных слагаемых из $[\mathrm{L}(\Gamma)]^{\perp}$.

Таким образом, если Γ — базис, то система Γ' определена однозначно и совпадает с сопряженным базисом.

190. Если Γ — линейно независимая система, то системы Γ, Γ' можно дополнить до сопряженных базисов.

Исследуем взаимное расположение линейных оболочек $\mathrm{L}(\Gamma)$, $\mathrm{L}(\Gamma')$.

191. Подпространство $[\mathrm{L}(\Gamma')]^{\perp}$ является дополнением подпространства $\mathrm{L}(\Gamma)$.

Обратно:

192. Если Γ — линейно независимая система и M — такое подпространство в E', что $\mathrm{M}^{\perp}$ является дополнением подпространства $\mathrm{L}(\Gamma)$, то существует такая биортогональная система Γ', что $\mathrm{L}(\Gamma') = \mathrm{M}$.

§ 7. Сопряженный гомоморфизм и теория Фредгольма

Пусть h — гомоморфизм из E в E_1. Введем двойственный объект h' — так называемый сопряженный гомоморфизм. Тем самым мы существенно дополним аппарат двойственности.

193. Пусть $g \in E_1'$. Формула

$$g'(x) = g(hx) \qquad (x \in \mathrm{E})$$

определяет функционал $g' \in E'$. Отображение h': $E_1' \to E'$, определенное формулой $h'g = g'$, является гомоморфизмом.

Гомоморфизм h' называется *сопряженным* к гомоморфизму h. Например, $I_E' = I_{E'}$, $0' = 0$.

194. С точностью до канонических изоморфизмов пространств E, E'' и E_1, E_1'' имеет место равенство *) $h'' = h$.

Таким образом, отображение сопряжения $(')$: $\mathrm{Hom}(E, E_1) \to \mathrm{Hom}(E_1', E')$, определенное формулой $(')h = h'$, является инволюцией с точностью до канонических изоморфизмов.

195. Отображение $(')$ является изоморфизмом.

196. $(h_1 h_2)' = h_2' h_1'$.

Имеют место фундаментальные соотношения ортогональности для ядра и образа:

197. $\mathrm{Im}\, h' = (\mathrm{Ker}\, h)^{\perp}$, $\mathrm{Ker}\, h' = (\mathrm{Im}\, h)^{\perp}$.

Одновременно устанавливается, что $\mathrm{rg}\, h' = \mathrm{rg}\, h$. Однако, вообще говоря, $\mathrm{def}\, h' \neq \mathrm{def}\, h$.

198. $\mathrm{def}\, h - \mathrm{def}\, h' = \mathrm{ind}\, h$.

Отсюда:

199. Если h — фредгольмов гомоморфизм, то однородные уравнения

$$hx = 0, \qquad h'g = 0$$

имеют одинаковое максимальное число линейно независимых решений (в т о р а я т е о р е м а Ф р е д г о л ь м а).

В общем случае максимальные числа линейно независимых решений не совпадают и их разность равна индексу гомоморфизма.

Из второй теоремы Фредгольма вытекает, что если фредгольмов гомоморфизм h — мономорфизм, то h' — также мономорфизм. Очевидно также, что h' — фредгольмов вместе с h.

Заметим теперь, что из соотношений ортогональности **197** следует:

200. Для того чтобы гомоморфизм h был эпиморфизмом (мономорфизмом), необходимо и достаточно, чтобы

---

*) Так как $h'' \in \mathrm{Hom}(E'', E_1'')$, а $h \in \mathrm{Hom}(E, E_1)$, то равенство $h'' = h$, строго говоря, лишено смысла. Но если мы отождествим E'' с E, а E_1'' с E_1 посредством канонических изоморфизмов, то h'' совпадет с h. В дальнейшем слова «с точностью до изоморфизма» указывают на аналогичные отождествления.

сопряженный гомоморфизм h' был мономорфизмом (соответственно эпиморфизмом).

В частности, если h — изоморфизм, то h' — также изоморфизм и

201. $(h')^{-1} = (h^{-1})'$.

Перефразируя теорему **200**, можно сказать, что для глобальной разрешимости неоднородного уравнения

$$hx = y$$

необходимо и достаточно, чтобы сопряженное однородное уравнение

$$h'g = 0$$

имело только тривиальное решение. Отсюда и из второй теоремы Фредгольма вновь следует первая теорема Фредгольма (см. **97**).

Теорема **197** на языке уравнений формулируется следующим образом.

202. Для разрешимости неоднородного уравнения

$$hx = y$$

необходимо и достаточно, чтобы вектор y был ортогонален всем решениям сопряженного однородного уравнения

$$h'g = 0$$

(третья теорема Фредгольма).

Теорему **197** можно обобщить:

203. Если $h \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$, L — подпространство в E_1', M — подпространство в E', то

$$h'\mathrm{L} = (h^{-1}\mathrm{L}^{\perp})^{\perp}, \qquad (h')^{-1}\mathrm{M} = (h\mathrm{M}^{\perp})^{\perp}.$$

Теорема **197** получается из этих взаимно двойственных формул подстановкой $\mathrm{L} = \mathrm{E}_1'$, $\mathrm{M} = 0$. Наоборот, **203** можно вывести из **197**, подвергая гомоморфизм ограничению. Воспользуемся этим поводом для исследования ограничений гомоморфизмов в плане двойственности.

Начнем с представляющей самостоятельный интерес задачи описания пространства L', сопряженного с подпространством $\mathrm{L} \subset \mathrm{E}$.

204. Пусть i_L — вложение подпространства L в пространство E, i'_L — сопряженный гомоморфизм. Тогда

$$\operatorname{Im} i'_L = L', \qquad \operatorname{Ker} i'_L = L^{\perp}.$$

Следовательно (ср. **180**):

205. $L' \approx E'/L^{\perp}$.

Собственно говоря, естественный изоморфизм пространств $E'/L^{\perp}$ и L' легко усмотреть непосредственно: все функционалы из E', сравнимые по модулю $L^{\perp}$, совпадают на L (т. е. их ограничения на L равны), и наоборот. В силу теоремы **170** каждый функционал из L' можно рассматривать как ограничение на L некоторого функционала из E' (ср. **178—180**).

Теперь опишем гомоморфизм, сопряженный с ограничением данного гомоморфизма. Напомним обозначение h_M для стягивания по модулю M.

206. Если $g \in \operatorname{Hom}(E, E_1)$, L — подпространство в E, то

$$(g \mid L)' = h_{L^{\perp}} g'$$

с точностью до естественного изоморфизма пространств $E'/L^{\perp}$ и L'.

Эта формула получается из представления $g \mid L = g i_L$.

Остановимся еще на некоторых свойствах индекса.

207. Если h—мономорфизм, то $\operatorname{ind} h = -\operatorname{def} h'$, и обратно. Таким образом, если h — мономорфизм, то $\operatorname{ind} h \leqslant 0$.

208. Если h — эпиморфизм, то $\operatorname{ind} h = \operatorname{def} h$, и обратно. Таким образом, если h — эпиморфизм, то $\operatorname{ind} h \geqslant 0$.

209. Для любого гомоморфизма h

$$\operatorname{ind} h' = -\operatorname{ind} h.$$

В заключение параграфа изложим теоремы Фредгольма в переводе с языка гомоморфизмов на язык функционалов. Предварительно заметим:

210. Если $\{f_k\}_1^m$ — система линейных функционалов в E, то формулы

$$\alpha_k = f_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

определяют гомоморфизм из E в C^m.

211. Для того чтобы неоднородная система уравнений

$$f_k(x) = \alpha_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

была разрешима относительно $x \in \mathrm{E}$ при любых правых частях, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая однородная система

$$f_k(x) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

имела только тривиальное решение $x = 0$.

212. Системы однородных уравнений

$$f_k(x) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

(относительно $x \in \mathrm{E}$) и

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k f_k = 0$$

(относительно $\{\gamma_k\}_1^n \in \mathrm{C}^n$) имеют одинаковое максимальное число линейно независимых решений.

213. Для разрешимости неоднородной системы уравнений

$$f_k(x) = \alpha_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

необходимо и достаточно, чтобы для любых чисел γ_k, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k f_k = 0,$$

было

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \alpha_k = 0.$$

§ 8. Билинейные функционалы и тензорные произведения

Пусть E_1, E_2 — два пространства, $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$ — их декартово произведение. В некоторых ситуациях бывает удобно снабжать $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$ операциями сложения и умножения на число. Последние определяются естественно:

$$\{x, y\} + \{x_1, y_1\} = \{x + x_1, y + y_1\}, \qquad \alpha\{x, y\} = \{\alpha x, \alpha y\}.$$

Декартово произведение $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$, рассматриваемое в качестве линейного пространства, называется *декартовой суммой* пространств E_1, E_2 и обозначается $\mathrm{E}_1 \dotplus \mathrm{E}_2$.

214. $\dim(\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2) = \dim \mathrm{E}_1 + \dim \mathrm{E}_2$.

Функционал $B(x, y)$ на $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$ называется билинейным, если при каждом фиксированном $x \in \mathrm{E}_1$ функционал

$$B_x(y) = B(x, y) \qquad (*)$$

на пространстве E_2 линеен (т. е. $B_x \in \mathrm{E}_2'$) и (двойственным образом) при каждом фиксированном y функционал

$$B_y'(x) = B(x, y) \qquad (**)$$

на пространстве E_1 также линеен (т. е. $B_y' \in \mathrm{E}_1'$). Подробнее:

1) $B(x, y_1 + y_2) = B(x, y_1) + B(x, y_2)$,
2) $B(x, \alpha y) = \alpha B(x, y)$,
3) $B(x_1 + x_2, y) = B(x_1, y) + B(x_2, y)$,
4) $B(\alpha x, y) = \alpha B(x, y)$.

Всюду ниже в этом параграфе $B = B(x, y)$ означает билинейный функционал на $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$.

Существует глубокая связь между билинейными функционалами и гомоморфизмами. Она заложена в определении билинейного функционала. Согласно $(*)$ каждому вектору $x \in \mathrm{E}_1$ соответствует линейный функционал $B_x \in \mathrm{E}_2'$, т. е. имеется некоторое отображение пространства E_1 в пространство E_2'. Обозначим это отображение через h_B^l. Аналогично посредством $(**)$ определяется отображение h_B^r пространства E_2 в пространство E_1', относящее каждому вектору $y \in \mathrm{E}_2$ линейный функционал B_y'.

215. Функционал

$$\Phi(f, x) = f(x) \qquad (f \in \mathrm{E}', \ x \in \mathrm{E})$$

билинеен и $h_\Phi^l = I_{\mathrm{E}'}$, $h_\Phi^r = I_{\mathrm{E}}$ с точностью до канонического изоморфизма.

216. Отображения h_B^l и h_B^r являются гомоморфизмами. При этом $h_B^r = (h_B^l)'$ с точностью до канонического изоморфизма.

Гомоморфизмы h_B^l и h_B^r назовем соответственно *левым* и *правым генераторами* функционала B. Пространства

$$\mathrm{S}_B^l = \operatorname{Im} h_B^l, \qquad \mathrm{S}_B^r = \operatorname{Im} h_B^r$$

назовем соответственно *левым* и *правым носителями* функционала B.

217. $\dim \mathrm{S}_B^l = \dim \mathrm{S}_B^r$.

Общая величина этих двух размерностей называется *рангом* функционала B и обозначается $\operatorname{rg} B$.

Пространства

$$\mathrm{K}_B^l = \operatorname{Ker} h_B^l, \qquad \mathrm{K}_B^r = \operatorname{Ker} h_B^r$$

назовем соответственно *левым* и *правым ядрами* функционала B. Их размерности в общем случае не равны. Назовем эти размерности *левым* и *правым дефектами* функционала B и обозначим их через $\operatorname{def}_l B$, $\operatorname{def}_r B$ соответственно. Разность

$$\operatorname{ind} B = \operatorname{def}_r B - \operatorname{def}_l B$$

называется *индексом* функционала B.

Если индекс функционала равен нулю, то функционал называется *фредгольмовым*. Для фредгольмова функционала B общая величина левого и правого дефектов называется *дефектом* функционала и обозначается просто $\operatorname{def} B$.

218. $\operatorname{ind} B = \dim \mathrm{E}_2 - \dim \mathrm{E}_1$.

219. Для фредгольмова функционала B имеет место формула дополнения

$$\operatorname{rg} B + \operatorname{def} B = n.$$

Мы имеем дело, очевидно, с некоторым вариантом теории Фредгольма. Ключом к нему являются соотношения двойственности (ср. **93**, **197**):

220. $\mathrm{S}_B^l \approx \mathrm{E}_1/\mathrm{K}_B^l$; $\mathrm{S}_B^r \approx \mathrm{E}_2/\mathrm{K}_B^r$.

221. $\mathrm{S}_B^l = (\mathrm{K}_B^r)^\perp$; $\mathrm{S}_B^r = (\mathrm{K}_B^l)^\perp$.

Для контроля подчеркнем, что

$$\mathrm{K}_B^l \subset \mathrm{E}_1,\ \mathrm{K}_B^r \subset \mathrm{E}_2;\ \mathrm{S}_B^l \subset \mathrm{E}_2',\ \mathrm{S}_B^r \subset \mathrm{E}_1'.$$

Исследуем теперь структуру множества всех билинейных функционалов на $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$.

222. Билинейные функционалы на $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$ образуют линейное пространство по отношению к естественным операциям сложения и умножения на число.

Это пространство мы обозначим через $\mathfrak{B}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$.

223. Отображения

$$h^l\colon \mathfrak{B}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2) \to \operatorname{Hom}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2'), \quad h^r\colon \mathfrak{B}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2) \to \operatorname{Hom}(\mathrm{E}_2, \mathrm{E}_1'),$$

определяемые формулами $h^l B = h^l_B$, $h^r B = h^r_B$, являются изоморфизмами.

224. $\dim \mathfrak{B}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2) = \dim \mathrm{E}_1 \cdot \dim \mathrm{E}_2$.

Билинейные функционалы аналогично гомоморфизмам допускают матричное описание.

Пусть $\Delta_1 = \{e_j\}_1^{n_1}$, $\Delta_2 = \{u_k\}_1^{n_2}$ — базисы пространств E_1, E_2 соответственно. *Матрицей билинейного функционала* относительно пары базисов Δ_1, Δ_2 называется матрица

$$(B(e_j, u_k)).$$

225. Если (β_{jk})—матрица билинейного функционала $B(x, y)$ относительно пары базисов Δ_1, Δ_2 и

$$x = \sum_{j=1}^{n_1} \xi_j e_j, \quad y = \sum_{k=1}^{n_2} \eta_k u_k,$$

то

$$B(x, y) = \sum_{j, k} \beta_{jk} \xi_j \eta_k.$$

Тем самым устанавливается взаимно однозначно соответствие между билинейными функционалами на $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$ и $(n_1 \times n_2)$-матрицами.

Наметим еще один подход к описанию пространства $\mathfrak{B}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$. Он приведет нас к фундаментальному понятию тензорного произведения пространств.

226. Если $f \in \mathrm{E}_1'$, $g \in \mathrm{E}_2'$, то функционал

$$B(x, y) = f(x)\, g(y) \qquad (x \in \mathrm{E}_1, \ y \in \mathrm{E}_2)$$

билинеен.

Он называется *тензорным произведением* линейных функционалов f, g и обозначается $f \otimes g$.

227. Пусть $\{f_j\}_1^{n_1}$ — базис пространства E_1', $\{g_k\}_1^{n_2}$ — базис пространства E_2'. Тогда тензорные произведения

$$f_j \otimes g_k \qquad (j = 1, 2, \ldots, n_1; \ k = 1, 2, \ldots, n_2)$$

образуют базис пространства $\mathfrak{B}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$.

Заметим теперь, что выражение

$$f(x)\, g(y) \qquad (f \in \mathrm{E}_1', \ g \in \mathrm{E}_2'; \ x \in \mathrm{E}_1, \ y \in \mathrm{E}_2)$$

можно трактовать как функционал на $E_1' \times E_2'$ при фиксированных x, y. В силу **226** и канонического изоморфизма пространства с его вторым сопряженным этот функционал билинеен. Он называется *тензорным произведением* векторов x, y и обозначается $x \otimes y$. В силу **227** базисы $\{e_j\}_1^{n_1}$ и $\{u_k\}_1^{n_2}$ пространств E_1, E_2 порождают базис

$$e_j \otimes u_k \qquad (j = 1, 2, \ldots, n_1;\ k = 1, 2, \ldots, n_2)$$

пространства $\mathfrak{B}(E_1', E_2')$.

Пространство $\mathfrak{B}(E_1', E_2')$ называется ***тензорным произведением*** пространств E_1, E_2 и обозначается $E_1 \otimes E_2$. Очевидно:

228. $\dim(E_1 \otimes E_2) = \dim E_1 \cdot \dim E_2$

Отметим, что $\mathfrak{B}(E_1, E_2) = E_1' \otimes E_2'$ с точностью до канонических изоморфизмов.

229. Тензорное умножение обладает линейными свойствами:

1) $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$,
2) $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$,
3) $(\alpha x) \otimes y = \alpha (x \otimes y)$,
4) $x \otimes (\alpha y) = \alpha (x \otimes y)$.

Опираясь на эти свойства и теорему **227**, легко показать, что для любого билинейного функционала B на $E_1 \times E_2$ существуют такие две системы линейных функционалов

$$\{f_k\}_1^{\nu},\ \{g_k\}_1^{\nu} \qquad (\nu = \min(n_1, n_2)),$$

что

$$B = \sum_{k=1}^{\nu} f_k \otimes g_k.$$

Более точный результат:

230. Пусть $\rho = \operatorname{rg} B > 0$, $\{f_k\}_1^{\rho}$ — какой-нибудь базис подпространства S_B^r — правого носителя функционала B. Тогда в левом носителе S_B^l существует и единствен такой базис $\{g_k\}_1^{\rho}$, что

$$B = \sum_{k=1}^{\rho} f_k \otimes g_k.$$

Можно, конечно, наоборот, задавать базис правого носителя и строить соответствующий базис левого носителя.

Теорема **230** устанавливает канонический вид произвольного билинейного функционала. Проблема приведения того или иного объекта к каноническому виду занимает центральное место в линейном анализе. При этом слова «приведение» и «канонический вид» будут иметь смысл, зависящий от объекта и окружающей обстановки. Исследование объекта в каноническом виде протекает значительно проще, чем в общем виде. Например, из теоремы **230** легко вытекает вся теория Фредгольма для билинейного функционала (саму теорему можно перефразировать так, чтобы результат **217** не предполагался заранее известным).

С помощью **230** обнаруживается также следующий факт.

231. Пусть $f \in E_1'$, $g \in E_2'$, $F \in [\mathfrak{B}(E_1, E_2)]'$. Функционал $B_F(f, g) = F(f \otimes g)$ на $E_1' \times E_2'$ билинеен. Определенное этим отображение $[\mathfrak{B}(E_1, E_2)]' \to E_1 \otimes E_2$ является изоморфизмом.

Таким образом, тензорное произведение $E_1 \otimes E_2$ можно рассматривать как пространство, сопряженное пространству $\mathfrak{B}(E_1, E_2)$. Принимая это отождествление, можно написать

$$(E_1 \otimes E_2)' = E_1' \otimes E_2'$$

с точностью до канонических изоморфизмов пространств и их вторых сопряженных.

Введем теперь *тензорное* (или *кронекеровское*) *произведение гомоморфизмов*. Пусть имеются две пары пространств $\{E_1, E_3\}$ и $\{E_2, E_4\}$ и пусть $h_1 \in \mathrm{Hom}(E_1, E_3)$, $h_2 \in \mathrm{Hom}(E_2, E_4)$. Тензорное произведение $h_1 \otimes h_2$ есть гомоморфизм из $E_1 \otimes E_2$ в $E_3 \otimes E_4$, определенный следующим образом. Пусть $B \in E_1 \otimes E_2$, т. е. B — билинейный функционал на $E_1' \times E_2'$; тогда

$$[(h_1 \otimes h_2) B](f, g) \underset{\text{def}}{=} B(h_1' f, h_2' g) \qquad (f \in E_3', \ g \in E_4').$$

Очевидно, тензорное умножение гомоморфизмов линейно по каждому сомножителю.

Опишем ядро и образ тензорного произведения гомоморфизмов и извлечем из этого соответствующие следствия. Предварительно заметим, что если M_1 — подпространство в E_1, M_2 — подпространство в E_2, то $M_1 \otimes M_2$ можно естественно рассматривать как подпространство в $E_1 \otimes E_2$.

232. $\operatorname{Ker}(h_1 \otimes h_2) = \operatorname{Ker} h_1 \otimes \operatorname{Ker} h_2$.

Отсюда:

233. $\operatorname{def}(h_1 \otimes h_2) = \operatorname{def} h_1 \cdot \operatorname{def} h_2$.

Следовательно:

234. Тензорное произведение мономорфизмов есть мономорфизм.

Формула для образа тензорного произведения гомоморфизмов выглядит сложнее. Именно, с точностью до естественных изоморфизмов:

235. $\operatorname{Im}(h_1 \otimes h_2) = ((\operatorname{Im} h_1)^{\perp} \otimes (\operatorname{Im} h_2)^{\perp})^{\perp}$.

Эту формулу легко получить из **232**, если воспользоваться тем, что с точностью до естественных изоморфизмов:

236. $(h_1 \otimes h_2)' = h_1' \otimes h_2'$.

237. $\operatorname{rg}(h_1 \otimes h_2) =$

$$= \operatorname{rg} h_1 \cdot \operatorname{rg} h_2 + \operatorname{rg} h_1 \cdot \operatorname{def} h_2 + \operatorname{rg} h_2 \cdot \operatorname{def} h_1.$$

238. Тензорное произведение эпиморфизмов есть эпиморфизм.

239. Тензорное произведение изоморфизмов есть изоморфизм.

Отметим еще формулу для индекса тензорного произведения:

240. $\operatorname{ind}(h_1 \otimes h_2) = n_2 \operatorname{ind} h_1 + n_3 \operatorname{ind} h_2$.

В частности:

241. Тензорное произведение фредгольмовых гомоморфизмов есть фредгольмов гомоморфизм.

§ 9. Комплексное сопряжение. Эрмитово-линейные функционалы. Эрмитовы гомоморфизмы и эрмитово-билинейные функционалы

Пусть f — линейный функционал в пространстве E. Рассмотрим функционал $\bar{f}$, определенный формулой

$$\bar{f}(x) = \overline{f(x)},$$

где черта справа означает комплексное сопряжение. Этот функционал уже не является линейным: хотя

1) $\bar{f}(x_1+x_2)=\bar{f}(x_1)+\bar{f}(x_2)$,

но

2) $\bar{f}(\alpha x)=\bar{\alpha}\bar{f}(x)$.

Функционал с такими свойствами называется *эрмитово-линейным* функционалом.

242. Эрмитово-линейные функционалы в E образуют линейное пространство по отношению к естественным операциям сложения и умножения на число.

Это пространство называется *эрмитово-сопряженным* к E и обозначается через E^*.

Введем отображение j: $E' \to E^*$ по формуле

$$jf=\bar{f} \qquad (f \in E').$$

Оно не является гомоморфизмом: хотя

1) $j(x_1+x_2)=jx_1+jx_2$,

но

2) $j(\alpha x)=\bar{\alpha}jx$.

Любое отображение со свойствами 1), 2) называется *эрмитовым гомоморфизмом.* Отображение j называется *каноническим комплексным сопряжением.*

Для эрмитовых гомоморфизмов можно ввести понятие ядра и образа точно так же, как это было сделано для гомоморфизмов. Тем самым для эрмитовых гомоморфизмов естественно определяются понятия дефекта и ранга. Сохраняется также классификация «эпи-, моно-, изо-». Теория, развитая в § 4, распространяется на эрмитовы гомоморфизмы без каких-либо существенных изменений.

243. Каноническое комплексное сопряжение является эрмитовым изоморфизмом.

Можно сказать, что пространства E' и E^* эрмитово-изоморфны. Однако это утверждение на самом деле не отличается от утверждения об обычной изоморфности (см. **244—247**).

244. Пусть $\Delta=\{e_k\}_1^n$ — произвольный базис пространства E. Тогда отображение j_Δ пространства E в себя, определенное формулами

$$x=\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k,\qquad j_\Delta x=\sum_{k=1}^{n}\bar{\xi}_k e_k,$$

является эрмитовым изоморфизмом.

245. Произведение двух эрмитовых гомоморфизмов есть гомоморфизм.

246. Произведение двух эрмитовых изоморфизмов есть изоморфизм.

247. Если два пространства эрмитово-изоморфны, то они изоморфны.

Таким образом, $E^*\approx E$. Следовательно, $E^{**}\approx E$ и т. д. Однако для пространств E и E^{**} существует даже *канонический изоморфизм*:

$$\psi_x(g)=\overline{g(x)}\qquad (x\in E,\ g\in E^*).$$

Эрмитов изоморфизм j позволяет автоматически перенести в пространство E^* теорию, содержащуюся в § 6. Например, если L — подпространство в E, то его ортогональным дополнением в E^* следует назвать образ $jL^{\perp}$ и т. д.

Впрочем, можно строить и независимую теорию. Например:

248. Подпространство $jL^{\perp}$ совпадает с множеством эрмитово-линейных функционалов g, ортогональных к L в том смысле, что $g(x)=0$ $(x\in L)$.

Роль сопряженного гомоморфизма h' $(h\in \mathrm{Hom}(E_1,\ E_2))$ теперь играет аналогично определяемый *эрмитово-сопряженный гомоморфизм* h^*:

$$(h^*g)(x)=g(hx)\qquad (x\in E_1,\ g\in E_2^*).$$

При этом $h^*\in \mathrm{Hom}(E_2^*,\ E_1^*)$. Аналогично **195**:

249. Отображение $(*)$: $\mathrm{Hom}(E_1,\ E_2)\to \mathrm{Hom}(E_2^*,\ E_1^*)$, определенное формулой $(*)\,h=h^*$, является эрмитовым изоморфизмом.

В частности, $(\alpha h)^*=\bar{\alpha}h^*$, в то время как $(\alpha h)'=\alpha h'$.

250. Имеет место соотношение $h^*=j_1h'j_2^{-1}$, где j_k: $E_k'\to E_k^*$ $(k=1,\ 2)$ — канонические комплексные сопряжения.

Заметим здесь в дополнение к **245**, что:

251. Произведение эрмитова гомоморфизма и гомоморфизма (в любом порядке) является эрмитовым гомоморфизмом.

Введем теперь понятие эрмитово-билинейного функционала. Функционал $H(x, y)$ на $E_1 \otimes E_2$ называется *эрмитово-билинейным*, если он линеен по x при каждом фиксированном y и эрмитово-линеен по y при каждом фиксированном x.

Для эрмитово-билинейного функционала, так же как для обычного билинейного функционала, определяются левый и правый генераторы: h^l_H: $E_1 \to E_2^*$, h^r_H: $E_2 \to E_1'$.

252. Левый генератор h^l_H является гомоморфизмом, правый генератор h^r_H — эрмитовым гомоморфизмом. При этом

$$h^r_H = j_1^{-1}\left(h^l_H\right)^* = \left(h^l_H\right)' j_2^{-1}$$

с точностью до канонического изоморфизма.

Носители, ядра, ранг, дефекты, индекс определяются для эрмитово-билинейных функционалов точно так же, как для обычных. Теория Фредгольма сохраняется в прежнем виде, но при соответствующем понимании ортогональных дополнений.

253. Эрмитово-билинейные функционалы на $E_1 \times E_2$ образуют линейное пространство по отношению к естественным операциям сложения и умножения на число.

254. Пусть $\{f_k\}_1^{n_1}$ — базис пространства E_1', $\{g_j\}_1^{n_2}$ — базис пространства E_2^*. Тогда тензорные произведения *)

$$f_k \otimes g_j \qquad (k = 1, 2, \ldots, n_1;\ j = 1, 2, \ldots, n_2)$$

образуют базис пространства эрмитово-билинейных функционалов на $E_1 \times E_2$ (ср. **226**).

Тем самым последнее пространство $n_1 n_2$-мерно.

255. Пусть H — эрмитово-билинейный функционал на $E_1 \times E_2$, $\rho = \operatorname{rg} H > 0$, $\{h_k\}_1^\rho$ — какой-нибудь базис правого носителя S^r_H. Тогда в левом носителе S^l_H существует и единствен такой базис $\{g_k\}_1^\rho$, что

$$H = \sum_{k=1}^{\rho} h_k \otimes g_k \quad .$$

(ср. **229**).

*) Определенные тем же способом, что в § 8.

§ 10. Общая теория ортогональности

Пусть E_1, E_2 — какие-нибудь два пространства, F — билинейный (или эрмитово-билинейный) функционал на $E_1 \times E_2$. Векторы $x \in E_1$, $y \in E_2$ называются *F-ортогональными*, если

$$F(x, y) = 0,$$

и это обозначается так: $x (F \perp) y$.

Например, если

$$E_1 = E, \ E_2 = E', \ F(x, f) = f(x) \quad (x \in E, \ f \in E'),$$

то F-ортогональность $x (F \perp) f$ сводится к обычной ортогональности $x \perp f$ вектора и линейного функционала.

Отношение F-ортогональности билинейно (ср. **176**).

Подпространства $L \subset E_1$, $M \subset E_2$ называются *F-ортогональными*, если

$$x (F \perp) y \qquad (x \in L, \ y \in M).$$

256. Множество тех векторов $x \in E_1$, которые F-ортогональны всем векторам из какого-нибудь подпространства $M \subset E_2$, является подпространством.

Оно называется *левым F-ортогональным дополнением* подпространства M и обозначается ${}^{F\perp}M$. Аналогично определяется *правое F-ортогональное дополнение* $L^{F\perp}$ подпространства $L \subset E$. F-ортогональное дополнение подпространства N есть наибольшее из подпространств, F-ортогональных к N. Ниже для краткости мы будем писать $(\perp)$ вместо $(F \perp)$.

257. Если $M_1 \subset M_2$, то ${}^{(\perp)}M_1 \supset {}^{(\perp)}M_2$. Если $L_1 \subset L_2$, то $L_1^{(\perp)} \supset L_2^{(\perp)}$.

Левое и правое ядра функционала F можно описать в терминах F-ортогональных дополнений:

258. $K_F^l = {}^{(\perp)}E_2$, $K_F^r = E_1^{(\perp)}$.

Вообще же:

259. Для любых подпространств $L \subset E_1$, $M \subset E_2$

$$L^{(\perp)} \supset K_F^r, \qquad {}^{(\perp)}M \supset K_F^l.$$

F-ортогональность сводится к обычной ортогональности посредством генераторов:

260. Для любого подпространства $M \subset E_2$

$$^{(\perp)}M = (h'_F M)^{\perp}$$

и для любого подпространства $L \subset E_1$

$$L^{(\perp)} = (h^l_F L)^{\perp}.$$

Поэтому:

261. $\dim\left(^{(\perp)}M\right) = \operatorname{codim} M + \dim M \cap K'_F - \operatorname{ind} F.$

262. $\dim\left(L^{(\perp)}\right) = \operatorname{codim} L + \dim L \cap K^l_F + \operatorname{ind} F.$

Если функционал F фредгольмов и $\operatorname{def} F = 0$, то он называется *регулярным*. Например, функционал $\Phi(f, x) = f(x)$ $(f \in E',\ x \in E)$ регулярен.

263. Для регулярного функционала F

$$\dim\left(^{(\perp)}M\right) = \operatorname{codim} M, \quad \dim\left(L^{(\perp)}\right) = \operatorname{codim} L.$$

Исследуем, в какой мере отношение F-ортогональности инволютивно.

264. $\left(^{(\perp)}M\right)^{(\perp)} \supset M, \quad ^{(\perp)}\left(L^{(\perp)}\right) \supset L.$

Кроме того, согласно **259**,

$$\left(^{(\perp)}M\right)^{(\perp)} \supset K'_F, \quad ^{(\perp)}\left(L^{(\perp)}\right) \supset K^l_F.$$

Оказывается:

265. $\left(^{(\perp)}M\right)^{(\perp)} = M + K'_F, \quad ^{(\perp)}\left(L^{(\perp)}\right) = L + K^l_F.$

Теперь легко установить следующее предложение.

266. Для того чтобы $\left(^{(\perp)}M\right)^{(\perp)} = M$, необходимо и достаточно, чтобы $M \supset K'_F$.

Аналогично формулируется критерий равенства

$$^{(\perp)}\left(L^{(\perp)}\right) = L.$$

267. Если оба дефекта (левый и правый) функционала F равны нулю (в частности, если функционал регулярен), то F-ортогональность инволютивна:

$$\left(^{(\perp)}M\right)^{(\perp)} = M, \quad ^{(\perp)}\left(L^{(\perp)}\right) = L$$

для любых подпространств $M \subset E_2$, $L \subset E_1$. Указанное условие не только достаточно, но и необходимо для инволютивности.

268. Для того чтобы ${}^{(\perp)}M_1 = {}^{(\perp)}M_2$, необходимо и достаточно, чтобы $M_1 + K'_F = M_2 + K'_F$.

Аналогично формулируется критерий равенства $L_1^{(\perp)} = L_2^{(\perp)}$.

Рассмотрим теперь в плане F-ортогональности двойственность сумм и пересечений. Здесь она не является полной. Действительно, с одной стороны:

269. ${}^{(\perp)}(M_1 + M_2) = {}^{(\perp)}M_1 \cap {}^{(\perp)}M_2$, $(L_1 + L_2)^{(\perp)} = L_1^{(\perp)} \cap L_2^{(\perp)}$.

Но, с другой стороны, в общем случае отсюда не следует, что

$$ {}^{(\perp)}(M_1 \cap M_2) = {}^{(\perp)}M_1 + {}^{(\perp)}M_2, \qquad (L_1 \cap L_2)^{(\perp)} = L_1^{(\perp)} + L_2^{(\perp)}, $$

из-за отсутствия инволютивности.

270. Для того чтобы ${}^{(\perp)}(M_1 \cap M_2) = {}^{(\perp)}M_1 + {}^{(\perp)}M_2$, необходимо и достаточно, чтобы

$$ (M_1 + K'_F) \cap (M_2 + K'_F) = M_1 \cap M_2 + K'_F. $$

В частности, достаточно, чтобы $M_1 \supset K'_F$ или $M_2 \supset K'_F$. Тем более достаточно, чтобы правый дефект был равен нулю.

Аналогичные утверждения справедливы для правых ортогональных дополнений.

§ 11. Топология

До сих пор наши рассмотрения были чисто алгебраическими, но теперь мы должны коснуться того, что составляет основу анализа в собственном смысле, а именно т о п о л о г и и.

Поскольку мы ограничились конечномерными пространствами, топологии будет отведено сравнительно немного места. Дело в том, что «хорошая» топология в конечномерном пространстве единственна *) и, следовательно, имеет в конечном счете алгебраическую природу.

Топологию в пространстве E можно задать, определяя о к р е с т н о с т и элементов пространства, т. е. векторов. После

*) Здесь речь идет о топологиях, в которых непрерывны определенные в E операции сложения и умножения на скаляр. Точную формулировку и доказательство соответствующей теоремы, требующие некоторого углубления в общую топологию, можно найти в книге: Н. Б у р б а к и, Топологические векторные пространства, ИЛ, 1959. Родственные результаты рассматриваются ниже (**305** и **23** гл. IV).

этого обычным образом определяются открытые и замкнутые множества.

Пусть x_0 — произвольный вектор. Возьмем какие-нибудь линейные функционалы $f_1, f_2, \ldots, f_m$ и число $\varepsilon > 0$. Множество векторов x, удовлетворяющих неравенствам

$$|f_k(x) - f_k(x_0)| < \varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

обозначим через $U(x_0; f_1, f_2, \ldots, f_m; \varepsilon)$. Множество $U(x_0; f_1, f_2, \ldots, f_m; \varepsilon)$ называется *окрестностью* вектора x_0. Следующие предложения показывают, что определенные нами окрестности удовлетворяют обычным требованиям.

271. Пересечение двух окрестностей вектора x_0 содержит некоторую окрестность вектора x_0.

272. Если U — окрестность вектора x_0 и $x_1 \in U$, то существует окрестность вектора x_1, входящая в U.

273. Каждая окрестность вектора x_0 содержит x_0.

Исследуем введенную топологию.

274. Каковы бы ни были два вектора $x_1 \neq x_2$, у них существуют непересекающиеся окрестности U_1 и U_2.

Окрестности U_1, U_2 отделяют x_1 от x_2. Предложение **274** означает, что пространство E хаусдорфово (отделимое).

Окрестности вида $U(x_0; f_1, f_2, \ldots, f_m; \varepsilon)$, где $\Delta' = \{f_k\}_1^m$ — фиксированный базис пространства E', назовем *кубическими окрестностями* (относительно базиса Δ'). Они образуют фундаментальную систему окрестностей в том смысле, что:

275. Каждая окрестность вектора x_0 содержит некоторую кубическую окрестность.

Топология пространства E согласована с операциями сложения векторов и умножения вектора на число в том смысле, что эти операции непрерывны:

276. Если $x_0 + y_0 = z_0$, то для каждой окрестности W вектора z_0 существуют такие окрестности U, V векторов x_0, y_0 соответственно, что если $x \in U$, $y \in V$, то $x + y \in W$.

277. Если $\alpha_0 y_0 = z_0$, то для каждой окрестности W вектора z_0 существуют такие окрестности U, V числа α_0 и вектора y_0 соответственно, что если $\alpha \in U$, $y \in V$, то $\alpha y \in W$.

В связи с этим подчеркнем, что топология в E была определена так, чтобы все линейные функционалы оказались непрерывными (причем это было сделано слабейшим из возможных способов). Более того:

278. Каждый гомоморфизм $h \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$ является непрерывным отображением пространства E в пространство E_1 (наделенное, разумеется, аналогичной топологией).

279. Каждый билинейный функционал $B \in \mathfrak{B}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$ непрерывен.

Рассмотрим так называемые индуцированные топологии в подпространствах, фактор-пространствах и т. п. Каждый из этих объектов уже наделен автономной топологией аналогично основному пространству E. Мы убедимся, что индуцированные и автономные топологии совпадают.

Пусть L — подпространство пространства E. Индуцированная топология в L определяется следующим образом: подмножество $\Gamma \subset \mathrm{L}$ открыто в L, если оно имеет вид $\Gamma = \mathrm{G} \cap \mathrm{L}$, где G — открытое множество в E.

280. Индуцированная и автономная топологии подпространства совпадают.

В фактор-пространстве E/L индуцированная топология определяется так: подмножество $\Gamma \subset \mathrm{E}/\mathrm{L}$ открыто в E/L, если оно имеет вид $\Gamma = \left\{[x]_{\mathrm{L}}\right\}_{x \in \mathrm{G}}$, где G — открытое множество в E.

281. Индуцированная и автономная топологии фактор-пространства совпадают.

В пространстве E′ также определяется индуцированная топология. Она порождается окрестностями, каждая из которых задается набором векторов $\{x_k\}_1^m$ и числом $\varepsilon > 0$ при помощи неравенств

$$|f(x_k) - f_0(x_k)| < \varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

В силу канонического изоморфизма пространств E и E″:

282. Индуцированная и автономная топологии сопряженного пространства совпадают.

Аналогично обстоит дело с топологией эрмитово-сопряженного пространства E*.

Обобщая эту ситуацию, рассмотрим пространство гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$. Пусть h_0 — произвольный гомоморфизм. Возьмем какие-нибудь векторы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ в E и какие-нибудь окрестности $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \ldots, \mathrm{U}_m$ векторов h_0x_1, $h_0x_2, \ldots, h_0x_m$ в E_1. Множество гомоморфизмов $h \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$, для которых

$$hx_k \in \mathrm{U}_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

назовем *окрестностью гомоморфизма* h_0. Эта система окрестностей определяет индуцированную топологию в $\mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$.

283. Индуцированная и автономная топологии пространства гомоморфизмов совпадают.

Рассмотрим, наконец, пространство билинейных функционалов $\mathfrak{B}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$ (тем самым будут охвачены и тензорные произведения пространств).

Пусть B_0 — произвольный билинейный функционал. Возьмем какие-нибудь векторы $x_1, x_2, \ldots, x_p$ в E, какие-нибудь векторы $y_1, y_2, \ldots, y_q$ в E_1 и какое-нибудь $\varepsilon > 0$. Множество билинейных функционалов $B \in \mathfrak{B}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|B(x_j, y_k) - B_0(x_j, y_k)| < \varepsilon$$
$$(j = 1, 2, \ldots, p; \quad k = 1, 2, \ldots, q),$$

назовем *окрестностью функционала* B_0. Эта система окрестностей определяет индуцированную топологию в $\mathfrak{B}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$.

284. Индуцированная и автономная топологии пространства билинейных функционалов совпадают.

Множество $\mathrm{M} \subset \mathrm{E}$ называется *ограниченным*, если, какова бы ни была окрестность U вектора $x_0 = 0$, существует такое $\alpha > 0$, что $\alpha x \in \mathrm{U}$ $(x \in \mathrm{M})$.

Следующее предложение дает простой критерий ограниченности.

285. Для того чтобы множество M было ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы для каждого функционала $f \in \mathrm{E}'$ было ограниченным множество $f(\mathrm{M})$.

Отсюда:

286. Если $\{e_k\}_1^n$ — какой-нибудь базис пространства E и $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k(x) e_k$ $(x \in \mathrm{E})$, то для ограниченности множества M необходимо и достаточно, чтобы были ограниченными числовые множества $\xi_k(\mathrm{M})$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Таким образом, ограниченность множества векторов равносильна «покоординатной» ограниченности. Отсюда:

287. Если M — ограниченное множество в пространстве E, то каждое бесконечное подмножество множества M имеет предельную точку (теорема Больцано — Вейерштрасса).

Таким образом, ограниченные множества пространства E предкомпактны.

Отметим, что теорема **287** легко обращается, но обратная теорема уже не столь существенна.

Рассмотрим применение топологии к некоторым задачам теории возмущений.

288. Пусть $r \geqslant 0$ — целое число. Множество гомоморфизмов, удовлетворяющих неравенству $\operatorname{rg} h \leqslant r$, замкнуто. Множество гомоморфизмов, удовлетворяющих неравенству $\operatorname{rg} h \geqslant r+1$, открыто.

При доказательстве этого факта может быть полезной следующая лемма об устойчивости линейно независимых систем.

289. Если $\{x_k\}_1^m$ — линейно независимая система векторов, то существуют такие окрестности $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \ldots, \mathrm{U}_m$ векторов $x_1, x_2, \ldots, x_m$ соответственно, что каждая система векторов $\{y_k\}_1^m$, удовлетворяющая условиям *)

$$y_k \in \mathrm{U}_k \qquad (k=1, 2, \ldots, m),$$

линейно независима.

Эту лемму в свою очередь удобно доказывать, применяя аппарат биортогональных систем (**187—192**).

Вследствие **288**:

290. Множество мономорфизмов в пространстве $\operatorname{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$ открыто.

291. Множество эпиморфизмов в пространстве $\operatorname{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$ открыто **).

292. Множество изоморфизмов в пространстве $\operatorname{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$ открыто.

В противоположность **289** имеет место следующая лемма о неустойчивости линейно зависимых систем.

293. Пусть $m \leqslant \dim \mathrm{E}$, $\{x_k\}_1^m$ — произвольная система векторов, $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \ldots, \mathrm{U}_m$ — какие-нибудь окрестности векторов $x_1, x_2, \ldots, x_m$ соответственно. Тогда существует такая линейно независимая система $\{y_k\}_1^m$, что

$$y_k \in \mathrm{U}_k \qquad (k=1, 2, \ldots, m).$$

---

*) То есть достаточно близкая к исходной системе.

) Здесь может показаться, что нарушается двойственность. Ситуацию разъясняет теорема **111.

Для доказательства достаточно применить индукцию, опираясь на тот факт, что:

294. Любое подпространство пространства E замкнуто.

295. Если подпространство L отлично от всего пространства, то оно нигде не плотно.

Покажем одно применение леммы **293**. Назовем гомоморфизм *вырожденным*, если он не является ни мономорфизмом, ни эпиморфизмом.

296. Множество вырожденных гомоморфизмов в пространстве Hom (E, E_1) нигде не плотно.

Тем самым множество невырожденных гомоморфизмов всюду плотно. Вырожденность гомоморфизма - неустойчивое свойство, в то время как невырожденность — устойчивое свойство, в силу **290**, **291**.

Отметим еще, что из **289** следует устойчивость базисов (ср. **42**), а тем самым и устойчивость полных систем. В то же время из **293** следует неустойчивость неполных систем мощности $m \geqslant \dim E$.

В дальнейшем (гл. IV) «качественная» теорема **289** об устойчивости базисов получит «количественные» уточнения.

§ 12. Теория пределов. Ряды. Элементы инфинитезимального анализа

Наличие топологии позволяет построить теорию пределов.

Пусть $\{x_k\}_1^\infty$ – какая-нибудь последовательность векторов. В соответствии с обычной схемой вектор x называется *пределом* последовательности и обозначается через $\lim\limits_{k\to\infty} x_k$, если для каждой его окрестности U существует такой номер $\mathcal{N} = \mathcal{N}_U$, что

$$x_k \in U \qquad (k \geqslant \mathcal{N}_U).$$

При этом говорят также, что последовательность *сходится* к вектору x. Единственность предела обеспечивается отделимостью топологии.

297. Для сходимости последовательности векторов $\{x_k\}_1^\infty$ необходимо и достаточно, чтобы при каждом $f \in E'$ сходилась числовая последовательность $\{f(x_k)\}_1^\infty$. При этом если $x = \lim_{k\to\infty} x_k$, то $f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_k)$.

298. Пусть $\{e_k\}_1^n$ — какой-нибудь базис пространства E и

$$x_k = \sum_{j=1}^{n} \xi_{jk} e_j \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Для того чтобы последовательность $\{x_k\}_1^\infty$ сходилась к вектору $x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{k\to\infty} \xi_{jk} = \xi_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, сходимость в E совпадает с покоординатной сходимостью. Отсюда непосредственно вытекают основные теоремы элементарной теории пределов:

299. Если $\lim_{k\to\infty} x_k = x$, $\lim_{k\to\infty} y_k = y$, то

$$\lim_{k\to\infty} (x_k + y_k) = x + y.$$

300. Если $\lim_{k\to\infty} x_k = x$, $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = \alpha$, то

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k x_k = \alpha x.$$

301. Для того чтобы $\lim_{k\to\infty} x_k = x$, **необходимо и достаточно, чтобы**

$$\lim_{k\to\infty} (x_k - x) = 0.$$

Рассмотрим связь между сходимостью и ограниченностью последовательности.

302. Каждая сходящаяся последовательность ограничена.

Обратное, конечно, неверно. Однако в силу теоремы Больцано — Вейерштрасса:

303. Каждая ограниченная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.

Отметим одно следствие этой важной теоремы.

304. Если все сходящиеся подпоследовательности некоторой ограниченной последовательности имеют один и тот же предел, то и сама последовательность сходится к этому пределу.

Теорема **303** позволяет установить, что в E нельзя определить сходимость с естественными свойствами, отличную от покоординатной. Определить сходимость — это значит задать класс $\mathfrak{C}$ последовательностей $\{x_k\}_1^\infty$, называемых сходящимися, и отображение $\lim\limits_{k\to\infty}\colon \mathfrak{C}\to \mathrm{E}$ так, чтобы выполнялись аксиомы:

1) Если $x_k = x$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$, то $\{x_k\}_1^\infty \in \mathfrak{C}$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$.

2) Если $\{x_k\}_1^\infty \in \mathfrak{C}$, то для любой подпоследовательности номеров $\{k_j\}_{j=1}^\infty$

$$\{x_{k_j}\}_{j=1}^\infty \in \mathfrak{C}, \qquad \lim_{j\to\infty} x_{k_j} = \lim_{k\to\infty} x_k.$$

305. Если в E определена сходимость, удовлетворяющая условиям **299**, **300**, то она совпадает с покоординатной сходимостью.

Последовательность векторов $\{x_k\}_1^\infty$ называется *фундаментальной*, если для каждого функционала $f \in \mathrm{E}'$ является фундаментальной числовая последовательность $\{f(x_k)\}_1^\infty$, т. е.

$$\lim_{j,\,k\to\infty} \{f(x_k) - f(x_j)\} = 0.$$

306. Для того чтобы последовательность векторов сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной (критерий Коши).

Это означает, что пространство E полно.

Перейдем к рассмотрению сходимости в подпространствах, фактор-пространствах и т. п. Здесь получаются результаты, параллельные теоремам **280**—**284**.

307. Для того чтобы в подпространстве последовательность векторов была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была сходящейся во всем пространстве. При этом пределы в обоих смыслах совпадают.

308. Для того чтобы в фактор-пространстве E/L последовательность $\{[x_k]\}_1^\infty$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая сходящаяся последовательность $\{x'_k\}_1^\infty$, что

$$x'_k \equiv x_k \pmod{\mathrm{L}} \qquad (k=1, 2, 3, \ldots).$$

При этом

$$\lim_{k\to\infty}[x_k]=\left[\lim_{k\to\infty}x'_k\right].$$

309. Для того чтобы в пространстве E' последовательность $\{f_k\}_1^\infty$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы при каждом $x\in E$ сходилась числовая последовательность $\{f_k(x)\}_1^\infty$. При этом, если $\lim\limits_{k\to\infty}f_k=f$, то $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$ (ср. **297**.)

310. Для того чтобы в пространстве $\operatorname{Hom}(E, E_1)$ последовательность $\{h_k\}_1^\infty$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы при каждом $x\in E$ сходилась последовательность векторов $\{h_kx\}_1^\infty$. При этом если $\lim\limits_{k\to\infty}h_k=h$, то $\lim\limits_{k\to\infty}h_kx=hx$.

311. Для того чтобы в пространстве $\mathfrak{B}(E, E_1)$ последовательность $\{B_k\}_1^\infty$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы при каждом $x\in E$ и при каждом $y\in E_1$ сходилась числовая последовательность $\{B_k(x, y)\}_1^\infty$. При этом если $\lim\limits_{k\to\infty}B_k=B$, то $\lim\limits_{k\to\infty}B_k(x, y)=B(x, y)$.

Теоремы **309**—**311** можно усилить в следующем направлении:

312. Если последовательности $\{x_k\}_1^\infty\subset E$, $\{f_k\}_1^\infty\subset E'$ сходятся, $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$, $\lim\limits_{k\to\infty}f_k=f$, то сходится и числовая последовательность $\{f_k(x_k)\}_1^\infty$ и $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x_k)=f(x)$.

313. Если последовательности $\{x_k\}_1^\infty\subset E$, $\{h_k\}_1^\infty\subset \operatorname{Hom}(E, E_1)$ сходятся, $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$, $\lim\limits_{k\to\infty}h_k=h$, то сходится и последовательность $\{h_kx_k\}_1^\infty\subset E_1$ и $\lim\limits_{k\to\infty}h_kx_k=hx$.

314. Если последовательности $\{x_k\}_1^\infty\subset E$, $\{y_k\}_1^\infty\subset E_1$, $\{B_k\}_1^\infty\subset\mathfrak{B}(E, E_1)$ сходятся, $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$, $\lim\limits_{k\to\infty}y_k=y$, $\lim\limits_{k\to\infty}B_k=B$, то сходится и последовательность $\{B_k(x_k, y_k)\}_1^\infty$ и

$$\lim_{k\to\infty}B_k(x_k, y_k)=B(x, y).$$

Важным вариантом теории пределов является теория рядов. Мы коснемся здесь некоторых специфических моментов этой теории, возникающих в векторном случае.

Векторный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \qquad (*)$$

называется *сходящимся*, если сходится последовательность его частичных сумм

$$s_m = \sum_{k=1}^{m} x_k.$$

При этом вектор $s = \lim\limits_{m \to \infty} s_m$ называется *суммой* ряда и пишется

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

В силу **297** для сходимости ряда (*) необходимо и достаточно, чтобы при каждом $f \in E'$ сходился числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(x_k). \qquad (**)$$

При этом если сумма ряда (*) равна s, то сумма ряда (**) равна $f(s)$.

Пусть теперь (*) — произвольный векторный ряд. Множество тех линейных функционалов f, для которых ряд (**) сходится, назовем *областью сходимости* ряда (*). Для сходимости ряда, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы его область сходимости совпадала со всем пространством.

315. Область сходимости произвольного векторного ряда есть полупространство в E'.

Назовем векторный ряд *вполне расходящимся*, если его область сходимости равна нулю.

316. Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ — векторный ряд, C — его область сходимости, L — какое-нибудь дополнение полупространства $C^{\perp}$ в пространстве E. Если

$$x_k = u_k + v_k \qquad (u_k \in C^{\perp},\ v_k \in L),$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ вполне расходящийся в $C^{\perp}$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ сходящийся.

Это свойство характеризует область сходимости:

317. Пусть подпространство $M \subset E'$ таково, что при разложении

$$x_k = u_k + v_k \qquad (u_k \in M^{\perp},\ v_k \in L),$$

где L — некоторое дополнение подпространства $M^{\perp}$ в E, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ оказывается вполне расходящимся в $M^{\perp}$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ — сходящимся. Тогда M является областью сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$.

Теорема **316** приводит к понятию суммы векторного ряда относительно подпространства $L \subset E$, дополнительного к $C^{\perp}$. Именно, в условиях **316** мы будем называть сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ *суммой ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *относительно* L и обозначать ее через

$$\sum_{k=1\,L}^{\infty} x_k.$$

Возникает вопрос: как эта сумма зависит от подпространства L?

Для сходящегося ряда подпространство L не может варьироваться ($L = E$) и относительная сумма равна сумме ряда. Для вполне расходящегося ряда подпространство L также не может варьироваться ($L = 0$) и относительная сумма равна нулю. В общем случае:

318. Для произвольного векторного ряда существует такой вектор s, что при каждом L, дополнительном к $C^{\perp}$, в разложении

$$s = u + v \qquad (u \in C^{\perp},\ v \in L)$$

компонента v равна сумме ряда относительно подпространства L:

$$v = \sum_{k=1}^{\infty}{}_{\mathrm{L}}\, x_k.$$

Вектор s определен однозначно по модулю $\mathrm{C}^{\perp}$ (и не более).

Для сходящегося ряда $\mathrm{C}^{\perp} = 0$, вектор s определен однозначно и равен сумме ряда. Это наталкивает на возможный метод доказательства теоремы **318**: стягивание по модулю $\mathrm{C}^{\perp}$.

Из теоремы **318** вытекает:

319. Если сумма ряда относительно некоторого подпространства равна нулю, то она равна нулю относительно каждого подпространства, дополнительного к $\mathrm{C}^{\perp}$.

Случай, описанный в **319**, особый, ибо:

320. Если сумма ряда относительно некоторого подпространства отлична от нуля, то множество сумм относительно всех возможных подпространств является классом по модулю $\mathrm{C}^{\perp}$.

Построим совершенно аналогичную теорию безусловной сходимости.

Векторный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ называется *безусловно сходящимся*, если при каждом $f \in \mathrm{E}'$ безусловно сходится числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)$, т. е. $\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)| < \infty$. Очевидно, безусловная сходимость влечет сходимость. Если векторный ряд сходится, но не безусловно, то он называется *условно сходящимся*.

Пусть теперь (*) — произвольный векторный ряд. Множество тех линейных функционалов f, для которых ряд (**) безусловно сходится, назовем *областью безусловной сходимости* ряда (*). Очевидно, область безусловной сходимости содержится в области сходимости.

321. Область безусловной сходимости векторного ряда есть подпространство в E'.

Назовем ряд векторов *условно расходящимся*, если его область безусловной сходимости равна нулю.

322. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ — векторный ряд, N — его область безусловной сходимости, L — какое-нибудь дополнение подпространства $N^{\perp}$ в пространстве E. Если

$$x_k = u_k + v_k \qquad (u_k \in N^{\perp},\ v_k \in L),$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ — условно расходящийся в $N^{\perp}$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ — безусловно сходящийся.

323. Пусть подпространство $M \subset E'$ таково, что при разложении

$$x_k = u_k + v_k \qquad (u_k \in M^{\perp},\ v_k \in L),$$

где L — некоторое дополнение подпространства $M^{\perp}$ в E, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ оказывается условно расходящимся в $M^{\perp}$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ — безусловно сходящимся. Тогда M является областью безусловной сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$.

Назовем *безусловной суммой* ряда (*) относительно подпространства $L \subset E$, дополнительного к $N^{\perp}$, сумму $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$, определенную в **323**.

324. Для произвольного векторного ряда существует такой вектор $\tilde{s}$, что при каждом L, дополнительном к $N^{\perp}$, в разложении $\tilde{s} = u + v$ компонента v равна безусловной сумме ряда относительно подпространства L. Вектор $\tilde{s}$ определен однозначно по модулю $N^{\perp}$ (и не более).

Если ряд сходится, то в качестве $\tilde{s}$ можно взять его сумму. В общем случае в качестве $\tilde{s}$ можно взять сумму ряда относительно какого-нибудь подпространства $\tilde{L} \supset L$, дополнительного к $C^{\perp}$. Напомним, что $N \subset C$ и, следовательно, $N^{\perp} \supset C^{\perp}$.

325. Если безусловная сумма ряда относительно некоторого подпространства равна нулю, то она равна нулю относительно каждого подпространства, дополнительного к $N^{\perp}$.

326. Если безусловная сумма ряда относительно некоторого подпространства отлична от нуля, то множество безусловных сумм относительно всех возможных подпространств является классом по модулю N^1.

327. Для того чтобы ряд векторов безусловно сходился, необходимо и достаточно, чтобы все его перестановки сходились и имели одну и ту же сумму.

Предложение **327** содержит частичное обобщение теоремы Римана об условно сходящихся числовых рядах. В действительности теорема Римана обобщается на векторные ряды в полном объеме. Это обобщение (теорема Штейница) гласит: если $\mathrm{N} \subset \mathrm{E}'$ есть область безусловной сходимости условно сходящегося векторного ряда $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, то суммы всевозможных сходящихся рядов, образованных из данного с помощью перестановки его членов, заполняют класс по модулю N^1. Теорему Штейница мы рассмотрим в гл. VI.

В заключение совершим краткий экскурс в теорию векторных функций скалярного аргумента.

Пусть $\mathcal{J}$ — какой-нибудь интервал вещественной оси $(-\infty, +\infty)$. Рассмотрим функции $x = x(t)$ на $\mathcal{J}$ со значениями в пространстве E (вектор-функции). Наличие в E топологии позволяет обычным образом определить понятия предела, непрерывности, производной и интеграла. Элементарные теоремы и формулы анализа (за исключением теорем о средних значениях) непосредственно переносятся на векторный случай. Вместе с тем возникает несколько новых разновидностей теорем о непрерывности и дифференцируемости произведений.

328. Пусть $\alpha(t)$ — скалярная функция, $x(t)$ — вектор-функция,

$$u(t) = \alpha(t)\, x(t).$$

Если $\alpha(t)$ и $x(t)$ непрерывны в некоторой точке, то $u(t)$ также непрерывна в этой точке. Если $\alpha(t)$ и $x(t)$ дифференцируемы в некоторой точке, то $u(t)$ также дифференцируема в этой точке, причем

$$u'(t) = \alpha'(t)\, x(t) + \alpha(t)\, x'(t).$$

329. Пусть $B(x, y)$ $(x \in \mathrm{E},\ y \in \mathrm{E}_1)$ — билинейный функционал, $x(t)$ — функция со значениями в пространстве E,

$y(t)$ — функция со значениями в пространстве E_1,

$$\beta(t) = B(x(t),\ y(t)).$$

Если $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны в некоторой точке, то $\beta(t)$ также непрерывна в этой точке. Если $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы в некоторой точке, то $\beta(t)$ также дифференцируема в этой точке, причем

$$\beta'(t) = B(x'(t),\ y(t)) + B(x(t),\ y'(t)).$$

В частности, этот результат относится к функциям вида

$$\beta(t) = f_t(x(t)),$$

где $x(t)$ — функция со значениями в E, f_t — функция со значениями в E′.

330. Пусть $x(t)$ — функция со значениями в E, h_t — функция со значениями в Hom (E, E_1),

$$y(t) = h_t x(t).$$

Если $x(t)$ и h_t непрерывны в некоторой точке, то $y(t)$ также непрерывна в этой точке. Если $x(t)$ и h_t дифференцируемы в некоторой точке, то $y(t)$ также дифференцируема в этой точке, причем

$$y'(t) = h_t' x(t) + h_t x'(t).$$

Из **328—330** непосредственно вытекают соответствующие формулы интегрирования по частям.

В заключение коснемся теории рядов вектор-функций.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k(t)$ $(t \in \mathcal{J})$ называется *равномерно сходящимся* на множестве $\mathcal{K} \subset \mathcal{J}$, если этим свойством обладают все ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(x_k(t))$ $(f \in E')$.

Приведем один удобный признак равномерной сходимости.

Последовательность вектор-функций $\{x_k(t)\}_1^{\infty}$ $(t \in \mathcal{J})$ называется *равномерно ограниченной* на множестве $\mathcal{K}$, если множество

$$\{y \mid y = x_k(t),\quad k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\quad t \in \mathcal{K}\}$$

ограничено.

331. Если числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ сходится безусловно, а последовательность вектор-функций $\{x_k(t)\}_1^{\infty}$ $(t \in \mathcal{G})$ равномерно ограничена на множестве $\mathcal{K} \subset \mathcal{G}$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k(t)$ равномерно сходится на множестве $\mathcal{K}$.

Обычные теоремы о непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости для равномерно сходящихся рядов легко переносятся на векторный случай.

Существенную роль в линейном анализе играют *аналитические* вектор-функции комплексного переменного, теория которых строится стандартным образом. В конечномерном случае, которым мы только и занимаемся, особенно важны полиномы и рациональные функции.

Векторные полиномы имеют вид

$$\mathcal{P}(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k,$$

где коэффициенты a_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, m)$ — векторы. Если $a_m \neq 0$, то полином $\mathcal{P}(\lambda)$ по определению имеет степень m.

Рациональные вектор-функции — это функции вида

$$\mathcal{R}(\lambda) = \frac{1}{\mathcal{D}(\lambda)} \mathcal{P}(\lambda),$$

где $\mathcal{P}(\lambda)$ — векторный полином, а $\mathcal{D}(\lambda)$ — отличный от тождественного нуля скалярный полином.

332. Для того чтобы аналитическая вектор-функция $x(\lambda)$ была полиномом (рациональной функцией), необходимо и достаточно, чтобы этим свойством обладала каждая функция $f(x(\lambda))$ $(f \in \mathrm{E}')$.

Степенные ряды сохраняют свое значение и в векторном варианте теории аналитических функций. Они имеют здесь вид $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (\lambda - \lambda_0)^k$, где коэффициенты a_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ — векторы.

333. Положим

$$l(f) = \overline{\lim_{k \to \infty}} \sqrt[k]{|f(a_k)|}, \qquad l = \sup_{f \in \mathrm{E}'} l(f), \quad \rho = l^{-1}.$$

Степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (\lambda - \lambda_0)^k \qquad (*)$$

сходится (даже безусловно) всюду в круге $|\lambda - \lambda_0| < \rho$ и расходится всюду вне этого круга (теорема Коши — Адамара).

334. В каждом круге $|\lambda - \lambda_0| < r$ $(r < \rho)$ сходимость равномерна (теорема Абеля).

Величина ρ называется *радиусом сходимости*, а круг $|\lambda - \lambda_0| < \rho$ — *кругом сходимости* степенного ряда. Сумма степенного ряда аналитична в круге сходимости.

Теорему **333** можно сформулировать еще и так: радиус сходимости векторного степенного ряда (*) равен нижней грани радиусов сходимости скалярных рядов $\sum_{k=0}^{\infty} f(a_k)(\lambda - \lambda_0)^k$ $(f \in E')$.

От степенных рядов можно было бы перейти далее к рядам Лорана и развить теорию особых точек и вычетов. Мы не будем на этом останавливаться ввиду отсутствия принципиальной новизны по сравнению со скалярным случаем.

ГЛАВА II

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В КОМПЛЕКСНОМ ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Оператором в пространстве называется произвольное отображение пространства в себя. Оператор A в пространстве E называется *линейным*, если

1) $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$,
2) $A(\alpha x) = \alpha Ax$.

Таким образом, линейный оператор — это то же самое, что эндоморфизм, т. е. гомоморфизм пространства в себя. Следовательно, все, что мы уже знаем о гомоморфизмах, относится, в частности, к линейным операторам.

Линейные операторы являются фредгольмовыми гомоморфизмами; поэтому теория Фредгольма применима к ним с максимальной полнотой.

Если линейный оператор A является изоморфизмом (для чего достаточно, чтобы он был моно- или эпиморфизмом), то A называется ***регулярным*** оператором *) (*автоморфизмом*). Если A — регулярный оператор, то существует обратный изоморфизм A^{-1}, который теперь мы будем называть *обратным* оператором. Единичный эндоморфизм I_E мы будем называть ***единичным*** оператором и обозначать просто I.

Для любого линейного оператора $\underset{\cdot}{A}$ сопряженный гомоморфизм (*сопряженный* оператор) A' является линейным оператором в пространстве E'. При этом если A регулярен, то и A' регулярен. Эти же замечания относятся и к *эрмитово-*

---

*) Или обратимым оператором в соответствии с терминологией, установленной для гомоморфизмов.

сопряженному оператору A^*, действующему в пространстве E^*.

В обозначениях, введенных в гл. I, множество линейных операторов в пространстве E есть Hom(E, E). Теперь мы будем его обозначать $\mathfrak{M}(E)$. Оно является линейным пространством (размерности n^2) и даже алгеброй.

В дальнейшем мы говорим кратко «оператор», имея в виду, если не оговорено противное, линейный оператор в пространстве E.

§ 1. Алгебра линейных операторов

Операторы A и B называются *коммутирующими*, если

$$AB = BA.$$

Это обозначается так: $A \smile B$.

При $n > 1$ алгебра $\mathfrak{M}(E)$ некоммутативна, т. е., вообще говоря, $AB \neq BA$. «Мерой некоммутативности» двух операторов является их *коммутатор*

$$[A, B] \underset{\text{def}}{=} AB - BA.$$

Операторы вида αI (они называются *скалярными* операторами) коммутируют с каждым оператором из $\mathfrak{M}(E)$. Обратно:

1. Если оператор коммутирует со всеми операторами из $\mathfrak{M}(E)$, то он скалярный (лемма Шура).

Лемма Шура показывает, что *центр* алгебры $\mathfrak{M}(E)$ (т. е. множество всех элементов алгебры, коммутирующих со всеми элементами алгебры) совпадает с множеством $\{\alpha I\}$ скалярных операторов.

Заметим, что центр является *подалгеброй*, т. е. подпространством, замкнутым относительно операции умножения. В $\mathfrak{M}(E)$ существует много других подалгебр. Универсальный способ построения подалгебры состоит в том, что выбирается некоторое подмножество $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}(E)$ и рассматриваются всевозможные произведения вида

$$A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_s} \qquad (A_{i_j} \in \mathfrak{A}), \tag{$*$}$$

где множители не обязательно различны.

2. Множество всех линейных комбинаций произведений вида (*) является наименьшей подалгеброй, содержащей $\mathfrak{A}$.

Множество $\mathfrak{A}$ в этой конструкции есть *база* подалгебры, а его элементы — *образующие*. Особый интерес представляют подалгебры с одной образующей. К их числу принадлежит центр, образующей которого является I. В общем случае подалгебра с образующей A состоит из всех *полиномов от* A, т. е. из всех элементов вида

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k A^k.$$

Символ A^k $(k=0, 1, 2, \ldots)$ здесь означает, как обычно, k-ю степень элемента A, т. е. произведение k множителей, равных A $(A^0 \underset{\text{def}}{=} I,\ A^1 \underset{\text{def}}{=} A)$. Обычные правила действий над степенями остаются здесь в силе, и мы не будем их перечислять. Отметим лишь, что

3. Если $A \cup B$, то $(AB)^k = A^k B^k$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$.

4. Если $(AB)^2 = A^2 B^2$, причем операторы A, B регулярны, то $A \cup B$.

Рассмотрим подалгебры с одной образующей более детально.

5. Каждая подалгебра с одной образующей коммутативна.

Между прочим, это — частный случай следующего предложения: для того чтобы подалгебра с базой $\mathfrak{A}$ была коммутативной, необходимо и достаточно, чтобы каждые две ее образующие коммутировали.

Обозначим подалгебру с одной образующей A через $\mathfrak{P}(A)$ и исследуем ее размерность.

6. Размерность подалгебры $\mathfrak{P}(A)$ равна наибольшему m, для которого степени $I, A, A^2, \ldots, A^{m-1}$ линейно независимы.

Можно сказать иначе. Пусть

$$\mathscr{P}(\lambda) = \sum_{k=0}^{r} \alpha_k \lambda^k$$

— какой-нибудь скалярный полином от λ. Положим

$$\mathscr{P}(A) = \sum_{k=0}^{r} \alpha_k A^k.$$

Полином $\mathscr{P}(\lambda)$, отличный от нуля, называется *аннулирующим* оператор A, если

$$\mathscr{P}(A)=0.$$

(Здесь 0, конечно, означает *нулевой* оператор, т. е. оператор, преобразующий все векторы в нулевой вектор.) Теперь теорему **6** можно сформулировать так:

7. Размерность подалгебры $\mathfrak{P}(A)$ равна наименьшей степени полиномов, аннулирующих оператор A.

Полином наименьшей степени, аннулирующий оператор A, называется *минимальным* полиномом оператора A и обозначается через $\mathscr{M}(\lambda; A)$. Его степень называется *порядком* оператора A. Минимальный полином обладает многими замечательными свойствами и, прежде всего, следующим:

8. Множество полиномов, аннулирующих оператор A, состоит из всех тех и только тех полиномов, которые делятся на $\mathscr{M}(\lambda; A)$.

Отсюда непосредственно вытекает, что:

9. Для данного оператора A минимальный полином единствен с точностью до постоянного множителя.

Мы связали размерность подалгебры $\mathfrak{P}(A)$ с полиномами, аннулирующими оператор A. Однако мы еще не имеем оценки для этой размерности, отличной от тривиальной оценки

$$\dim \mathfrak{P}(A) \leqslant n^2.$$

Оказывается, эту оценку можно существенно улучшить.

Полином $\mathscr{P}(\lambda)$, отличный от нуля, называется *аннулирующим* оператор A *на векторе* x (короче, аннулирующим вектор x), если

$$\mathscr{P}(A)x=0.$$

10. Для каждого вектора $x \in \mathrm{E}$ существует аннулирующий полином степени $\leqslant n$.

Полином наименьшей степени, аннулирующий вектор x, называется *минимальным полиномом* этого вектора, а его степень называется *порядком* вектора x (относительно оператора A). Таким образом, порядок любого вектора не превосходит n. Аналогично **8**:

11. Множество полиномов, аннулирующих вектор, состоит из всех тех и только тех полиномов, которые делятся на минимальный полином вектора.

Следовательно, минимальный полином вектора определен однозначно с точностью до постоянного множителя. Очевидно, минимальный полином оператора A делится на минимальный полином каждого вектора $x \in \mathrm{E}$.

12. Множество минимальных полиномов всевозможных векторов $x \in \mathrm{E}$ содержит минимальный полином оператора A (см. **52** гл. I).

Теперь ясно, что:

13. $\dim \mathfrak{P}(A) \leqslant n$.

Эту оценку уже нельзя улучшить: в следующем параграфе мы покажем, что в пространстве E существует такой оператор A, для которого $\dim \mathfrak{P}(A) = n$.

Техника аннулирующих полиномов является эффективным орудием спектральной теории операторов. Мы сейчас несколько расширим эту технику, рассматривая произвольные полиномы $\mathscr{P}(\lambda)$ и изучая ядра $\operatorname{Ker} \mathscr{P}(A)$.

14. Пусть $\{\mathscr{P}_k(\lambda)\}_1^m$ — произвольная система отличных от нуля полиномов, $\mathscr{D}(\lambda)$ — их наибольший общий делитель, $\mathfrak{K}(\lambda)$ — наименьшее общее кратное. Тогда

$$\operatorname{Ker} \mathscr{D}(A) = \bigcap_{k=1}^{m} \operatorname{Ker} \mathscr{P}_k(A), \quad \operatorname{Ker} \mathfrak{K}(A) = \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Ker} \mathscr{P}_k(A).$$

15. Если полиномы $\mathscr{P}_1(\lambda), \mathscr{P}_2(\lambda), \ldots, \mathscr{P}_m(\lambda)$ попарно взаимно просты, то

$$\operatorname{Ker} \mathfrak{K}(A) = \sum_{k=1}^{m}{}^{\bullet} \operatorname{Ker} \mathscr{P}_k(A).$$

Следовательно:

16. Если аннулирующий полином $\mathscr{P}(\lambda)$ оператора A каким-нибудь образом разложен на множители

$$\mathscr{P}(\lambda) = \prod_{k=1}^{m} \mathscr{P}_k(\lambda),$$

то имеет место разложение пространства

$$\mathrm{E} = \sum_{k=1}^{m}{}^{\bullet} \operatorname{Ker} \mathscr{P}_k(A).$$

При этом сумма будет прямой, если множители попарно взаимно просты.

В дальнейшем метод разложения аннулирующего полинома на множители приведет к ряду глубоких результатов.

Для полноты изложения сформулируем теорему, двойственную **14**:

17. $\operatorname{Im} \mathscr{D}(A) = \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Im} \mathscr{P}_k(A)$, $\quad \operatorname{Im} \mathfrak{G}(A) = \bigcap_{k=1}^{m} \operatorname{Im} \mathscr{P}_k(A)$.

Оставим теперь на некоторое время аннулирующие полиномы и рассмотрим еще один класс подмножеств алгебры $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$ — так называемые идеалы.

Подпространство $\mathfrak{J}$ алгебры $\mathfrak{A}$ называется *левым идеалом*, если для каждого $a \in \mathfrak{J}$ и каждого $x \in \mathfrak{A}$ произведение xa принадлежит $\mathfrak{J}$. Аналогично определяется *правый идеал*. Идеал называется *двусторонним*, если он одновременно является левым и правым. Каждая алгебра $\mathfrak{A}$ обладает *тривиальными* двусторонними идеалами $\mathfrak{A}$, 0. Очевидно, каждый идеал является подалгеброй.

18. Для того чтобы оператор был регулярным, необходимо и достаточно, чтобы он не принадлежал ни одному идеалу, отличному от $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$.

Достаточно даже, чтобы он не принадлежал ни одному левому идеалу (или не принадлежал ни одному правому идеалу), отличному от $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$.

Выделим две леммы, облегчающие доказательство теоремы 18 (и вместе с тем представляющие самостоятельный интерес).

19. Для того чтобы идеал был отличен от $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$, необходимо и достаточно, чтобы он не содержал единичного оператора I.

20. Наименьший левый идеал, содержащий оператор A, есть множество всех произведений вида XA $(X \in \mathfrak{M}(\mathrm{E}))$.

Идеалы алгебры $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$ могут быть описаны следующим образом:

21. Пусть M — некоторое подпространство пространства E. Множество всех тех операторов A, для которых $\operatorname{Ker} A \supset M$, является левым идеалом.

Обозначим этот идеал через $\mathfrak{J}^l_M$. С помощью теории правого деления гомоморфизмов (§ 5 гл. I) устанавливается следующее предложение.

22. Для любого левого идеала $\mathfrak{J}$ существует и единственно такое подпространство $M \subset E$, что $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_M^l$.

Таким образом, мы имеем взаимно однозначное соответствие между левыми идеалами алгебры $\mathfrak{M}(E)$ и подпространствами пространства E. При этом $\mathfrak{J}_0^l = \mathfrak{M}(E)$, $\mathfrak{J}_E^l = 0$.

Для правых идеалов возникает двойственная картина.

23. Пусть N — некоторое подпространство пространства E. Множество всех тех операторов A, для которых $\operatorname{Im} A \subset N$, является правым идеалом.

Обозначим этот идеал через $\mathfrak{J}_N^r$. С помощью теории левого деления гомоморфизмов устанавливается следующее предложение.

24. Для любого правого идеала $\mathfrak{J}$ существует и единственно такое подпространство $N \subset E$, что $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_N^r$.

Таким образом, мы имеем взаимно однозначное соответствие между правыми идеалами алгебры $\mathfrak{M}(E)$ и подпространствами пространства E. При этом $\mathfrak{J}_0^r = 0$, $\mathfrak{J}_E^r = \mathfrak{M}(E)$.

Теорема 18 вновь получается в качестве простого следствия теорем **21—24**. Еще одно следствие:

25. В алгебре $\mathfrak{M}(E)$ нет нетривиальных двусторонних идеалов.

Двойственность левых и правых идеалов можно обнаружить прямым путем, рассматривая отображение сопряжения. Оно инволютивно отображает алгебру $\mathfrak{M}(E)$ на алгебру $\mathfrak{M}(E')$, причем левые идеалы переходят в правые, а правые — в левые, и это соответствие идеалов также инволютивно. При таком подходе теоремы **19**, **20** оказываются непосредственными следствиями теорем **17**, **18** и наоборот.

Мы закончим этот параграф следующим замечанием:

26. Множество регулярных операторов (автоморфизмов) есть группа относительно умножения. При $n > 1$ эта группа неабелева.

Тем самым для регулярного оператора A имеют смысл степени A^k с любыми (а не только неотрицательными) целыми показателями. Именно, по определению

$$A^{-m} = \left(A^{-1}\right)^m \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Обычные правила действий над степенями остаются в силе и здесь. В частности, степени одного и того же оператора попарно коммутируют. Очевидно, все степени регулярного оператора регулярны. Обратно, если некоторая степень оператора A регулярна, то и сам оператор A регулярен.

§ 2. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Инвариантные подпространства

Число λ называется *собственным значением*, или *собственным числом*, оператора A, если существует такой вектор $x \neq 0$, что

$$Ax = \lambda x.$$

Вектор x называется *собственным вектором* оператора A, соответствующим собственному значению λ.

Можно сказать иначе: собственные значения оператора A — это такие значения λ, для которых

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda I) \neq 0,$$

т. е. оператор $A - \lambda I$ нерегулярен; собственные векторы, соответствующие собственному значению λ, — это отличные от нуля элементы подпространства $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$. Само это подпространство называется *собственным подпространством*, соответствующим собственному значению λ.

Множество $\sigma(A)$ собственных значений оператора A называется *спектром* оператора A. Исследование спектра и связанной с ним геометрической структуры оператора является предметом спектральной теории операторов.

27. Пусть $\mathscr{P}(\lambda)$ — произвольный полином. Тогда

$$\mathscr{P}(\sigma(A)) \subset \sigma(\mathscr{P}(A)).$$

Более того, каждый собственный вектор оператора A, соответствующий какому-нибудь собственному значению μ, является собственным вектором оператора $\mathscr{P}(A)$, соответствующим собственному значению $\mathscr{P}(\mu)$.

Теорема **27** — это весьма предварительная формулировка так называемой теоремы об отображении спектров (см. § 4). Для нас сейчас существенно следствие:

28. Пусть $\mathscr{P}(\lambda)$ — произвольный аннулирующий полином оператора A. Тогда спектр оператора входит в множество корней полинома $\mathscr{P}(\lambda)$.

В частности, спектр оператора A входит в множество корней минимального полинома $\mathscr{M}(\lambda; A)$. Отсюда немедленно вытекает, что:

29. Спектр любого оператора содержит не более n точек.

Выясним, не может ли спектр оказаться пустым.

30. Пусть $\mathscr{P}(\lambda)$ — произвольный аннулирующий полином оператора A, $\mathscr{D}(\lambda)$ — его наибольший делитель в классе полиномов, не обращающихся в нуль на спектре $\sigma(A)$. Тогда полином $\dfrac{\mathscr{P}(\lambda)}{\mathscr{D}(\lambda)}$ также является аннулирующим для оператора A.

Следовательно:

31. Среди корней произвольного аннулирующего полинома оператора A по крайней мере один является собственным значением оператора A.

Следовательно, далее:

32. Спектр любого оператора не пуст.

Более того, из теоремы **30** вытекает, что:

33. Спектр оператора A совпадает с множеством корней минимального полинома $\mathscr{M}(\lambda; A)$.

Пусть $\Delta = \{e_k\}_1^n$ — какой-нибудь базис пространства E. *Матрицей оператора* A относительно базиса Δ (или, короче, в базисе Δ) называется матрица гомоморфизма относительно пары базисов Δ, Δ, т. е. матрица коэффициентов разложений:

$$Ae_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} e_j.$$

Очевидно, если $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$, то

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} \xi_k \right) e_j. \qquad (*)$$

Для того чтобы сформулировать правило преобразования матрицы оператора при изменении базиса, введем понятие обратной матрицы.

Пусть некоторая матрица α в базисе Δ определяет регулярный оператор A. Тогда она определяет регулярный оператор в любом базисе и называется *регулярной* (или *неособенной*). Матрица оператора A^{-1} также не зависит от выбора базиса. Она называется *обратной* матрицей к матрице $\mathfrak{a}$ и обозначается $\mathfrak{a}^{-1}$. Обратная матрица, очевидно, удовлетворяет соотношениям

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a} = \mathfrak{e}$$

($\mathfrak{e}$ — единичная матрица) и каждым из них определяется однозначно.

Теперь, если $\mathfrak{a}$ — матрица оператора A в базисе Δ, то его матрица в любом базисе Δ_1 равна

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{t}^{-1}\mathfrak{a}\mathfrak{t},$$

где $\mathfrak{t}$ — матрица базиса Δ_1 относительно базиса Δ.

Варьируя базис, можно пытаться упростить матрицу оператора с тем, чтобы сделать его действие более обозримым. Пусть, например, базис *собственный*, т. е. состоит из собственных векторов оператора:

$$Ae_k = \lambda_k e_k \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

(собственные значения λ_k не обязательно попарно различны). Тогда (и только тогда) матрица оператора A является *диагональной* ($\alpha_{jk} = 0$ при $j \neq k$); при этом $\alpha_{kk} = \lambda_k$. Формула (*) принимает совсем простой вид:

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \xi_j e_j.$$

Собственный базис иначе называется *базисом диагонального представления*. Не каждый оператор обладает таким базисом:

34. Пусть $\{e_k\}_1^n$ — какой-нибудь базис пространства E и оператор D определен формулами:

$$De_1 = 0, \quad De_k = e_{k-1} \quad (k = 2,\ 3,\ \ldots,\ n).$$

Этот оператор имеет единственное собственное значение $\lambda = 0$, и все его собственные векторы имеют вид αe_1.

Таким образом, из собственных векторов оператора D при $n > 1$ нельзя построить базис пространства E.

Оператор A называется оператором *скалярного типа*, если у него существует собственный базис, т. е. если его матрицу можно привести *) к диагональному виду. Простейшим примером может служить скалярный оператор αI; для него все векторы являются собственными (соответствующими собственному значению α) и, следовательно, все базисы собственные.

Установим простой геометрический критерий приводимости к диагональному виду. Начнем с леммы:

35. Любая система собственных векторов оператора A, соответствующих попарно различным собственным значениям, линейно независима.

Следовательно:

36. Пусть $\{\mathrm{E}_k\}_1^m$ — система собственных подпространств оператора A, соответствующих точкам спектра $\sigma(A)=\{\lambda_k\}_1^m$. Тогда сумма $\sum\limits_{k=1}^{m}\mathrm{E}_k$ — прямая. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{m}\dim \mathrm{E}_k\leqslant n.$$

Отсюда, между прочим, вновь вытекает **29.**

Далее:

37. Для того чтобы A был оператором скалярного типа, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{m}\dim \mathrm{E}_k = n.$$

Из **37** следует:

38. Если число точек спектра оператора равно n, то он является оператором скалярного типа.

Но число точек спектра оператора скалярного типа может быть и меньшим n. Например, для скалярного оператора оно равно 1. Здесь уместно заметить, что вообще:

39. Каково бы ни было множество σ комплексных чисел, содержащее не более n элементов, существует такой оператор A, что $\sigma(A)=\sigma$.

---

*) Выражение «привести матрицу к диагональному виду» означает: выбрать базис Δ так, чтобы матрица оператора была диагональной. Аналогичный смысл имеет приведение матрицы оператора к любому другому специальному виду.

Если число точек спектра оператора A равно n, то A называется оператором с *простым спектром.* Таким образом, согласно **38**, простой спектр влечет скалярный тип.

Рассмотрим минимальный полином оператора скалярного типа. Это приведет нас к аналитическому критерию скалярного типа.

40. Минимальный полином оператора скалярного типа не имеет кратных корней.

Оказывается, этот результат можно обратить, используя теорему **16** и разложение полинома на линейные множители.

41. Если минимальный полином $\mathcal{M}(\lambda;\ A)$ не имеет кратных корней, то A — оператор скалярного типа.

Тем более:

42. Если какой-нибудь аннулирующий полином оператора A не имеет кратных корней, то A — оператор скалярного типа.

Например:

43. Если оператор A является идемпотентом алгебры $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$, т. е. удовлетворяет уравнению $A^2 = A$, то он является оператором скалярного типа.

44. Если оператор A является корнем из единицы, т. е. удовлетворяет уравнению $A^p = I$ с некоторым целым $p \geqslant 1$, то он является оператором скалярного типа.

Отметим одно следствие теорем **39** и **40**:

45. Для каждого $m = 1, 2, \ldots, n$ существует такой оператор A, что

$$\dim \mathfrak{P}(A) = m.$$

Этот факт в случае $m = n$ уже упоминался в предыдущем параграфе.

Подпространство $\mathrm{L} \subset \mathrm{E}$ называется *инвариантным* относительно оператора A, если A не выводит векторы из этого подпространства, т. е.

$$Ax \in \mathrm{L} \qquad (x \in \mathrm{L}).$$

Тривиальные подпространства E, 0 инвариантны относительно любого оператора.

46. Все собственные подпространства оператора инвариантны.

Более общее утверждение:

47. Если $\mathscr{P}(\lambda)$ — полином, то подпространства $\operatorname{Ker}\mathscr{P}(A)$, $\operatorname{Im}\mathscr{P}(A)$ инвариантны относительно оператора A.

Еще более общее утверждение:

48. Если $A \smile B$, то подпространства $\operatorname{Ker} B$, $\operatorname{Im} B$ инвариантны относительно оператора A.

Далее:

49. Если подпространство L инвариантно относительно оператора A, то оно инвариантно относительно всех полиномов $\mathscr{P}(A)$.

50. Если подпространство L инвариантно относительно регулярного оператора A, то оно инвариантно относительно обратного оператора A^{-1}.

51. Сумма и пересечение любого множества инвариантных подпространств инвариантны.

Пусть L — инвариантное подпространство оператора A. Сужение $A|\mathrm{L}$ является оператором в пространстве L. Оно называется *частью* оператора A, индуцированной (или лежащей) в подпространстве L. Кроме того, можно определить так называемый *фактор-оператор* A/L в фактор-пространстве E/L, полагая

$$(A/\mathrm{L})[x] = [Ax].$$

52. Каждый аннулирующий полином оператора A является аннулирующим для всех частей $A|\mathrm{L}$ и всех фактор-операторов A/L.

Следовательно, минимальные полиномы частей и фактор-операторов являются делителями минимального полинома самого оператора. Поэтому скалярный тип н а с л е д у е т с я:

53. Все части и фактор-операторы оператора скалярного типа также являются операторами скалярного типа.

Имеется также простая связь между спектрами операторов A, $A|\mathrm{L}$, A/L.

54. Пусть L — нетривиальное инвариантное подпространство оператора A. Тогда

$$\sigma(A) = \sigma(A|\mathrm{L}) \cup \sigma(A/\mathrm{L}).$$

Исследуем запас инвариантных подпространств произвольного оператора.

55. При $n > 1$ каждый оператор имеет нетривиальное инвариантное подпространство.

56. Если L — инвариантное подпространство оператора A и M—инвариантное подпространство фактор-оператора A/L, то множество $\mathrm{N}=\{x\,|\,[x]_{\mathrm{L}}\in M\}$ является инвариантным подпространством оператора A, промежуточным между L и E:

$$\mathrm{L}\subset\mathrm{N}\subset\mathrm{E}.$$

Если M нетривиально, то $\mathrm{N}\neq\mathrm{L}$, $\mathrm{N}\neq\mathrm{E}$.

57. Если L_1, L_2 — инвариантные подпространства оператора A, причем

$$\mathrm{L}_1\subset\mathrm{L}_2,\quad \dim\mathrm{L}_2-\dim\mathrm{L}_1>1,$$

то существует промежуточное инвариантное подпространство L:

$$\mathrm{L}_1\subset\mathrm{L}\subset\mathrm{L}_2,\quad \mathrm{L}\neq\mathrm{L}_1,\quad \mathrm{L}\neq\mathrm{L}_2.$$

58. Для каждого оператора A существует максимальная цепь инвариантных подпространств *):

$$0=\mathrm{L}_0\subset\mathrm{L}_1\subset\mathrm{L}_2\subset\ \ldots\ \subset\mathrm{L}_{n-1}\subset\mathrm{L}_n=\mathrm{E}.$$

Эта теорема на языке матриц означает возможность приведения матрицы любого оператора к треугольному виду:

59. Для каждого оператора A существует такой базис $\{e_k\}_1^n$, что матрица $(\alpha_{jk})_{j,\,k=1}^n$ оператора в этом базисе является верхнетреугольной: $\alpha_{jk}=0$ $(j>k)$ (см. **51** гл. I).

Этот базис называется *базисом треугольного представления* оператора A. Треугольное представление является обобщением диагонального и оно уже существует всегда.

Связь треугольного представления с максимальными цепями инвариантных подпространств является двусторонней:

60. Для того чтобы базис $\{e_k\}_1^n$ был базисом треугольного представления оператора, необходимо и достаточно, чтобы линейные оболочки систем

$$\Gamma_m=\{e_k\}_1^m\qquad (m=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

были инвариантными подпространствами.

Как мы сейчас увидим, треугольное представление, подобно диагональному, полностью вскрывает спектр оператора.

*) См. § 3 гл. I.

(но не геометрическую структуру оператора, которую оно отражает довольно грубо).

61. Диагональные элементы α_{kk} ($k=1, 2, \ldots, n$) матрицы оператора в базисе треугольного представления являются собственными значениями, и каждое собственное значение встречается среди диагональных элементов (см. **54**).

Из теоремы **61** вытекает одно полезное следствие:

62. Множество операторов с простым спектром всюду плотно в $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$.

Тем более, в силу **38**, всюду плотно множество операторов скалярного типа. На этом основан употребительный метод перенесения свойств, установленных для операторов скалярного типа, на произвольные операторы путем предельного перехода.

§ 3. Корневые подпространства. Основная спектральная теорема

Пусть пространство E разложено в прямую сумму

$$\mathrm{E} = \sum_{k=1}^{m}{}^{\bullet}\, \mathrm{L}_k \qquad (*)$$

инвариантных подпространств оператора A и A_k — часть оператора A, лежащая в подпространстве L_k. Тогда оператор A называется *прямой суммой операторов* A_k, и это записывается в виде

$$A = A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} \ldots \dot{+} A_m,$$

или

$$A = \sum_{k=1}^{m}{}^{\bullet}\, A_k. \qquad (**)$$

Если произвольный вектор x представлен, в соответствии с $(*)$, в виде

$$x = \sum_{k=1}^{m} x_k,$$

то, в соответствии с $(**)$,

$$Ax = \sum_{k=1}^{m} A_k x_k.$$

Если базис Δ в E получен объединением базисов подпространств L_k, то матрица оператора A в базисе Δ имеет блочнодиагональный вид

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & a_m \end{bmatrix},$$

где a_k — матрица оператора A_k в соответствующем базисе, 0 — прямоугольные матрицы из нулей.

Оператор скалярного типа — это такой, который является прямой суммой скалярных операторов (действующих в собственных подпространствах и умножающих на соответствующие собственные значения):

$$A = \sum_{k=1}^{m}{}^{\bullet} \lambda_k I_k, \qquad (***)$$

где I_k — единичный оператор в k-м собственном подпространстве, λ_k — соответствующее собственное значение.

Разложение (***) является простейшим случаем спектрального разложения оператора. Как мы уже знаем, оно не универсально в том смысле, что существует не для всех операторов. Наша ближайшая цель — обобщить спектральное разложение на произвольные операторы. Заметим, что треугольное представление не решает эту задачу, так как оно соответствует цепи, а не прямой сумме инвариантных подпространств.

Обобщим понятие скалярного оператора. Заметим, что спектр скалярного оператора αI состоит из одной точки α.

Оператор A называется *одноточечным*, если его спектр состоит из одной точки. При этом говорят, что оператор *сосредоточен* в этой точке. Нетривиальный пример одноточечного оператора приведен в **34**.

63. Для того чтобы оператор A был одноточечным, сосредоточенным в точке α, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял уравнению

$$(A - \alpha I)^r = 0$$

с некоторым показателем $r > 0$.

В качестве r можно взять кратность корня α в минимальном полиноме оператора A. Этот показатель — наименьший возможный.

В дальнейшем кратность собственного значения в минимальном полиноме мы называем *порядком* этого собственного значения.

Пусть теперь A — произвольный оператор, $\sigma(A) = \{\lambda_k\}_1^m$, r_k — порядок собственного значения λ_k. Инвариантное подпространство

$$\mathrm{W}_k = \operatorname{Ker}(A - \lambda_k I)^{r_k}$$

называется *корневым* подпространством оператора A, соответствующим собственному значению λ_k.

Теорема **16**, которая ранее привела нас к критерию скалярного типа, теперь дает возможность тем же методом доказать основную спектральную теорему:

64. Для каждого оператора A имеет место *спектральное разложение*

$$A = \sum_{k=1}^{m}{}^{\bullet} A \,|\, \mathrm{W}_k,$$

где $\{\mathrm{W}_k\}_1^m$—множество корневых подпространств оператора A.

Таким образом, каждый оператор A разлагается в прямую сумму одноточечных операторов, сосредоточенных в попарно различных точках спектра оператора A. Это разложение единственно (с точностью до порядка слагаемых):

65. Если оператор A является прямой суммой одноточечных операторов $A = \sum_{k=1}^{m}{}^{\bullet} A_k$, сосредоточенных в попарно различных точках λ_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$, то $\sigma(A) = \{\lambda_k\}_1^m$ и $A_k = A \,|\, \mathrm{W}_k$, где W_k — соответствующее корневое подпространство.

Этот результат вытекает из следующих общих теорем:

66. Если $A = \sum_{k=1}^{m}{}^{\bullet} A_k$, то

$$\sigma(A) = \bigcup_{k=1}^{m} \sigma(A_k).$$

67. Если $A = \sum_{k=1}^{m}{}^{\bullet} A_k$, то минимальный полином $\mathcal{M}(\lambda;\ A)$ совпадает с наименьшим общим кратным минимальных полиномов $\mathcal{M}(\lambda;\ A_k)$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$.

Изучим подробнее свойства корневых подпространств.

Согласно основной спектральной теореме, система корневых подпространств $\{\mathrm{W}_k\}_1^m$ для любого оператора является базисной, т. е. $\sum_{k=1}^{m}{}^{\bullet} \mathrm{W}_k = \mathrm{E}$.

Рассмотрим характеристику $\{d_k\}_1^m$ этого разложения. Число $d_k = \dim \mathrm{W}_k$ называется *кратностью* соответствующего собственного значения λ_k. Если $d_k = 1$, то собственное значение λ_k называется *простым*; в противном случае оно называется *кратным*.

Полином

$$\mathcal{D}(\lambda;\ A) = \prod_{k=1}^{m} (\lambda_k - \lambda)^{d_k}$$

называется *характеристическим* полиномом оператора A. Степень характеристического полинома равна n и тем самым не зависит от оператора, в отличие от степени минимального полинома.

Отметим, что простота спектра равносильна простоте корней характеристического полинома.

68. Если $A = \sum_{k=1}^{m}{}^{\bullet} A_k$, то

$$\mathcal{D}(\lambda;\ A) = \prod_{k=1}^{m} \mathcal{D}(\lambda;\ A_k).$$

Более общий факт (ср. **54**):

69. Если L—нетривиальное инвариантное подпространство оператора A, то

$$\mathcal{D}(\lambda;\ A) = \mathcal{D}(\lambda;\ A|\mathrm{L})\,\mathcal{D}(\lambda;\ A/\mathrm{L}).$$

Аналогичное обобщение теоремы **67** неверно.

70. Если $(a_{jk})_{j,\,k=1}^{n}$ — матрица оператора A в базисе треугольного представления, то

$$\mathcal{D}(\lambda;\ A) = \prod_{k=1}^{n} (a_{kk} - \lambda).$$

Теперь несколько уточняется теорема **61**:

71. Каждое собственное число встречается среди диагональных элементов матрицы оператора в базисе треугольного представления столько раз, какова его кратность.

Таким образом, для данного оператора система диагональных элементов матрицы в базисе треугольного представления с точностью до порядка элементов не зависит от выбора базиса треугольного представления.

72. Пусть $\{\mu_j\}_1^n$ — система чисел, состоящая из собственных значений оператора A и содержащая каждое собственное значение столько раз, какова его кратность. Тогда для любой перестановки $\{\mu_{j_k}\}_{k=1}^n$ этой системы существует такой базис треугольного представления оператора A, в котором диагональные элементы матрицы оператора таковы:

$$\alpha_{kk} = \mu_{j_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Минимальный полином произвольного оператора A можно записать в виде *)

$$\mathcal{M}(\lambda; A) = \prod_{k=1}^{m} (\lambda_k - \lambda)^{r_k},$$

где $\{\lambda_k\}_1^m = \sigma(A)$, r_k — порядок собственного числа λ_k.

Как связаны кратности собственных чисел с порядками? Довольно типичный пример — оператор скалярного типа. Для него, согласно **40**, $r_k = 1$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, в то же время кратности $d_k \geqslant 1$ могут быть любыми, лишь бы $\sum_{k=1}^{m} d_k = n$.

73. Для любого оператора A имеют место неравенства

$$d_k \geqslant r_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Отсюда:

74. Характеристический полином оператора является аннулирующим:

$$\mathcal{D}(A; A) = 0$$

(теорема Гамильтона — Кэли).

Между прочим, из неравенства **73** снова следует, что степень минимального полинома не превосходит n.

---

*) Напомним, что минимальный полином определен с точностью до постоянного множителя, см. 9.

Теорему **73** легче всего получить, рассматривая *усеченные корневые подпространства*

$$W_k^s = \operatorname{Ker}(A - \lambda_k I)^s \qquad (s = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Очевидно, $W_k^0 = 0$. Подпространство W_k^1 совпадает с собственным подпространством E_k, соответствующим собственному значению λ_k. Все W_k^s, очевидно, инвариантны. Общая картина такова:

75. Имеют место строгие включения

$$W_k^0 \subset W_k^1 \subset W_k^2 \subset \ldots \subset W_k^{r_k}$$

и вместе с тем $W_k^s = W_k^{r_k}$ $(s > r_k)$.

Отсюда вытекают более сильные, чем **73**, неравенства:

76. $d_k \geqslant \dim E_k + (r_k - 1)$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$.

Заметим теперь, что:

77. $(A - \lambda_k I)^j W_k^{s+j} \subset W_k^s$ $(j,\ s = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$.

Поэтому (см. **98** гл. I):

78. $\dim W_k^{s+j} \leqslant \dim W_k^s + \dim W_k^j$ $(j,\ s = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$.

В частности:

79. $\dim W_k^{s+1} \leqslant \dim W_k^s + \dim E_k$ $(s = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$.

Отсюда, в дополнение к **76**:

80. $d_k \leqslant r_k \dim E_k$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$.

Оператор A называется *простым*, если его характеристический полином совпадает с минимальным, т. е. если

$$d_k = r_k \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

81. Для простоты оператора необходимо и достаточно, чтобы все его собственные подпространства были одномерными.

В частности:

82. Оператор с простым спектром прост.

Обратное утверждение неверно, как показывает пример **34**. Однако:

83. Если оператор скалярного типа прост, то его спектр прост.

Другой, отличный от **81**, критерий простоты оператора состоит в следующем:

84. Для простоты оператора необходимо и достаточно, чтобы степень его минимального полинома была равна n.

Иначе говоря, для простоты оператора A необходимо и достаточно, чтобы $\dim \mathfrak{P}(A) = n$ (см. § 1).

Пользуясь теоремой **52** гл. I, можно перейти от этого критерия к следующему:

85. Для простоты оператора A необходимо и достаточно, чтобы существовал такой вектор x, для которого система

$$x,\ Ax,\ A^2x,\ \ldots,\ A^{n-1}x$$

является базисом.

Иначе говоря, вектор x должен иметь порядок n относительно оператора A. Такой вектор называется *порождающим* вектором оператора A, а соответствующий базис — *базисом Фробениуса*. Матрица оператора в этом базисе имеет *фробениусов канонический вид*:

$$\begin{Vmatrix} \alpha_0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_1 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ \alpha_{n-2} & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \alpha_{n-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix},$$

причем α_k — коэффициенты характеристического (или, что здесь то же самое, минимального) полинома, записанного в форме

$$\mathcal{D}(\lambda;\ A) = (-1)^n \left(\lambda^n - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda^k\right).$$

Между прочим, отсюда вытекает очевидный способ построения оператора с заданным характеристическим полиномом.

В связи с теоремой **85** отметим, что:

86. Для любого вектора x линейная оболочка L системы

$$x,\ Ax,\ \ldots,\ A^{n-2}x,\ A^{n-1}x$$

является инвариантным подпространством.

Это подпространство называется *циклическим* подпространством, порожденным вектором x, и в силу **85** характеризуется тем, что оператор $A|\mathrm{L}$ простой.

87. Размерность циклического подпространства, порожденного вектором x, равна порядку вектора x относительно оператора A.

§ 4. Теорема Жордана. Классификация операторов

Развивая основную спектральную теорему, перейдем к изучению *тонкой структуры* оператора.

Прежде всего введем одно новое понятие. Простой одноточечный оператор (см. все тот же пример **34**) называется *одноклеточным* оператором*). Мы увидим сейчас, что одноклеточный оператор обладает в определенном смысле простейшим строением.

88. Если A — одноклеточный оператор, то цепь его усеченных корневых подпространств**)

$$\mathrm{W}^0 \subset \mathrm{W}^1 \subset \mathrm{W}^2 \subset \ldots \subset \mathrm{W}^r$$

максимальна.

89. Множество инвариантных подпространств одноклеточного оператора исчерпывается усеченными корневыми подпространствами.

Инвариантное подпространство L оператора A называется *приводящим*, если существует такое его дополнение $\mathrm{M} \subset \mathrm{E}$, которое также инвариантно относительно A. Оператор, обладающий нетривиальным приводящим подпространством, называется *приводимым*.

Неприводимый оператор обязан быть одноточечным в силу спектрального разложения. В дальнейшем станет ясно, что он обязан быть и одноклеточным. Пока же мы отметим обратное утверждение:

90. Одноклеточный оператор неприводим.

Кульминационный пункт спектральной теории — это *теорема Жордана*, к формулировке которой мы сейчас переходим. Она состоит из двух частей. В первой части устанавливается некоторый канонический вид матрицы одноклеточного оператора, тесно связанный с фробениусовым каноническим видом:

91. Если A — одноклеточный оператор, сосредоточенный в точке α, то существует такой базис $\{e_k\}_1^n$, что

$$Ae_k = \alpha e_k + e_{k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n; \; e_0 = 0).$$

---

*) Происхождение термина станет ясным из дальнейшего.

**) Нижний индекс в обозначении усеченных корневых подпространств здесь опущен ввиду единственности собственного значения.

Матрица оператора в этом базисе имеет вид

$$\mathfrak{z}=\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{bmatrix}.$$

Такая матрица называется *клеткой Жордана*.

Вектор e_1 указанного базиса — собственный. Остальные векторы e_k называются *присоединенными* к вектору e_1, причем e_k называется *присоединенным* вектором *$(k-1)$-го порядка*. Очевидно, весь базис однозначно определяется вектором e_n. Это дает ключ к доказательству теоремы **91**.

Между прочим, теорема **91** обращается:

92. Если оператор A обладает таким базисом $\{e_k\}_1^n$, что

$$Ae_k = \alpha e_k + e_{k-1} \qquad (k=1,\ 2,\ \dots,\ n;\ e_0=0),$$

то он одноклеточный и сосредоточен в точке α.

Вторая и вместе с тем главная часть теоремы Жордана утверждает, что:

93. Каждый оператор является прямой суммой одноклеточных операторов.

Доказательство теоремы **93** будет намечено в **96**, а сейчас отметим некоторые ее следствия.

94. Если оператор неприводим, то он одноклеточный.

Теперь можно охарактеризовать одноклеточные операторы чисто геометрически:

95. Для того чтобы оператор был одноклеточным, необходимо и достаточно, чтобы его инвариантные подпространства были попарно сравнимы, т. е. чтобы из каждых двух инвариантных подпространств одно являлось частью другого.

В силу спектрального разложения теорему **93** достаточно доказать для одноклеточного оператора. Доказательство можно провести на основе следующей общей леммы (ср. **77**).

96. Если векторы $u_j \in \mathrm{W}_k^{s+1}$ $(j=1,\ 2,\ \dots,\ l)$ линейно независимы по модулю W_k^s, то векторы

$$v_j = (A-\lambda_k I)\,u_j \in \mathrm{W}_k^s \qquad (j=1,\ 2,\ \dots,\ l)$$

линейно независимы по модулю W_k^{s-1} $(s=1,\ 2,\ 3,\ \dots)$.

Между прочим, из этой леммы вытекает интересное усиление неравенства **78**:

97. Последовательность $\{\dim W_k^s\}_{s=0}^{\infty}$ вогнута, т. е.

$$\dim W_k^{s+1} - 2\dim W_k^s + \dim W_k^{s-1} \leqslant 0 \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots)$$

(неравенство Фробениуса).

Для $s = r_k$ неравенство строгое.

Теорема Жордана **93**, **91** означает, что матрица любого оператора может быть приведена к следующему *жорданову каноническому виду*:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{J}_1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \mathfrak{J}_2 & 0 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots \mathfrak{J}_p \end{pmatrix},$$

где $\mathfrak{J}_j$ — клетки Жордана. Базис, в котором матрица оператора имеет жорданов канонический вид, мы будем называть *жордановым базисом* этого оператора. Жорданов базис заведомо является базисом треугольного представления, а теорема Жордана тем самым уточняет теорему о треугольном представлении. Она окончательна в том смысле, что гарантирует разложение любого оператора в прямую сумму операторов, дальнейшее разложение которых уже невозможно, — неприводимых операторов. Кроме того, теорема Жордана дает возможность провести исчерпывающую классификацию линейных операторов, к рассмотрению которой мы сейчас перейдем.

Будем говорить, что операторы A и B *подобны*, и писать $A \approx B$, если существует такой автоморфизм T, что

$$B = TAT^{-1}.$$

Подобие операторов есть отношение эквивалентности, так что можно говорить о классах подобных операторов.

Для матриц также можно определить подобие посредством соотношения

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{t}\mathfrak{a}\mathfrak{t}^{-1},$$

так что подобным операторам в одном и том же базисе соответствуют подобные матрицы. С другой стороны, подобные матрицы можно рассматривать как матрицы одного и того же оператора в разных базисах (см. § 1).

98. Для того чтобы операторы A и B были подобными, необходимо и достаточно, чтобы для каждого базиса Δ существовал такой базис Δ_1, что матрица оператора B в базисе Δ_1 равна матрице оператора A в базисе Δ.

Будем представлять себе оператор как объект, который строится путем выбора базиса и задания матрицы в этом базисе. Тогда можно сказать, что понятие подобия устраняет различия между операторами, вызванные «случайным» выбором базиса (системы отсчета). Класс подобных между собой операторов объединяет все операторы с одинаковыми геометрическими свойствами. В отличие от индивидуального оператора он уже является инвариантом группы автоморфизмов (см. **26**) основного пространства.

Опишем более детально совокупность свойств, общих всем подобным между собой операторам.

99. Если $B = TAT^{-1}$, то для любого полинома $\mathscr{P}(\lambda)$ имеет место равенство

$$\mathscr{P}(B) = T\mathscr{P}(A)T^{-1}.$$

100. Минимальные полиномы подобных операторов совпадают.

Следовательно, спектры подобных операторов совпадают.

101. Если один из двух подобных операторов является оператором скалярного типа, то этим свойством обладает и другой оператор. Точнее, если $B = TAT^{-1}$ и $\{e_k\}_1^n$ — собственный базис оператора A, то $\{Te_k\}_1^n$ — собственный базис оператора B, причем собственные значения, которым соответствуют векторы e_k и Te_k, равны.

Следовательно, равны размерности соответственных собственных подпространств.

Обобщая **101**, можно утверждать, что:

102. Если $B = TAT^{-1}$, то

$$TW_k^s(A) = W_k^s(B) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m; \quad s = 0, 1, 2, \ldots).$$

Следовательно:

103. Характеристические полиномы подобных операторов совпадают.

Иначе говоря, совпадают кратности соответственно равных собственных значений.

Теперь можно сформулировать основную классификационную теорему:

104. Для того чтобы два оператора A, B были подобными, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой жорданов базис Δ оператора A и такой жорданов базис Δ_1 оператора B, что матрица оператора A в базисе Δ совпадает с матрицей оператора B в базисе Δ_1 (ср. **98**).

Легко также указать полную систему независимых числовых инвариантов, определяющую класс подобных операторов (иначе говоря, определяющую оператор с точностью до подобия). Пусть λ — собственное значение оператора A. Обозначим через $\varkappa_A(\lambda;\ \nu)$ количество соответствующих собственному числу λ клеток Жордана размерности ν в жордановом каноническом виде матрицы оператора A.

105. Для подобия $A \approx B$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\sigma(A) = \sigma(B), \quad \varkappa_A(\lambda;\ \nu) = \varkappa_B(\lambda,\ \nu) \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

для всех собственных значений λ.

Эквивалентная система инвариантов — это система размерностей

$$\left\{\dim W_k^s\right\}_{1 \leqslant k \leqslant m,\ 1 \leqslant s \leqslant r_k}.$$

106. $$\varkappa_A(\lambda_k;\ \nu) = -\left(\dim W_k^{\nu+1} - 2\dim W_k^{\nu} + \dim W_k^{\nu-1}\right) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Отсюда вновь следует неравенство Фробениуса **97**. Теперь ясно, что усиление этого неравенства невозможно. Заметим попутно, что

107. $\varkappa_A(\lambda_k;\ r_k) > 0,\ \varkappa_A(\lambda_k;\ \nu) = 0 \qquad (\nu > r_k).$

Таким образом, порядок r_k собственного значения λ_k совпадает с наибольшим порядком клеток Жордана, соответствующих этому собственному значению.

Формулы, обратные к **106**, имеют вид:

108. $$\dim W_k^s = \sum_{\nu=1}^{s} \nu\varkappa_A(\lambda_k;\ \nu) + s\sum_{\nu=s+1}^{r_k} \varkappa_A(\varkappa_k;\ \nu) \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ r_k).$$

В частности,

$$\dim W_k^{r_k} = \sum_{\nu=1}^{r_k} \nu \varkappa_A(\lambda_k;\ \nu).$$

Будем говорить, что операторы A и B имеют одинаковую *жорданову структуру*, если их спектры можно привести во взаимно однозначное соответствие так, чтобы

$$r_k(A) = r_k(B),\quad \dim W_k^s(A) = \dim W_k^s(B)$$
$$(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ s = 1,\ 2,\ \ldots,\ r_k).$$

Критерий подобия резко упрощается при наличии подходящей дополнительной информации об операторе.

109. Если два простых оператора имеют один и тот же спектр и кратности соответственных собственных значений равны, то операторы подобны. В частности, если два оператора с простым спектром имеют один и тот же спектр, то они подобны.

110. Если два оператора скалярного типа имеют один и тот же спектр и кратности соответственных собственных значений равны, то операторы подобны.

В обоих случаях критерием подобия является просто совпадение характеристических полиномов.

В заключение исследуем двойственность в спектральной теории, т. е. связь спектральных свойств операторов A и A'.

111. Для любого полинома $\mathscr{P}(\lambda)$ имеет место равенство

$$\mathscr{P}(A') = [\mathscr{P}(A)]'.$$

112. Минимальные полиномы операторов A' и A совпадают.

Следовательно, спектры операторов A' и A совпадают *), и если A является оператором скалярного типа, то этим свойством обладает и A'. Последнее утверждение можно уточнить:

113. Если $\{e_k\}_1^n$ — собственный базис оператора A, то биортогональная система $\{e'_k\}_1^n$ является собственным базисом оператора A', причем собственные числа, которым соответствуют векторы e_k и e'_k, равны.

Следовательно, равны размерности соответственных собственных подпространств.

*) Это ясно также из теории Фредгольма.

Заметим теперь, что понятие подобия непосредственно переносится на операторы, действующие в разных пространствах. Операторы A и A_1, действующие соответственно в пространствах E и E_1, называются *подобными* ($A \approx A_1$), если $\mathrm{E} \approx \mathrm{E}_1$, причем существует такой изоморфизм $h \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$, что $A_1 = hAh^{-1}$.

Критерии **104**, **105**, **109**, **110** сохраняются для операторов, действующих в разных пространствах.

Оказывается, каков бы ни был оператор A:

114. $A' \approx A$.

Одно из возможных доказательств этой теоремы состоит в предельном переходе от операторов скалярного типа, но мы будем действовать по-прежнему алгебраическими методами. Теорема **114** будет следовать из **115**, **116**.

115. Если $\sigma(A) = \{\lambda_k\}_1^m$ и $j \neq s$, то корневое подпространство оператора A', соответствующее собственному числу λ_j, ортогонально корневому подпространству оператора A, соответствующему собственному числу λ_s:

$$\mathrm{W}_j(A') \perp \mathrm{W}_s(A).$$

Рассмотрим теперь усеченные корневые подпространства. В силу теории Фредгольма:

116. $\dim \mathrm{W}_k^s(A') = \dim \mathrm{W}_k^s(A)$

$$(k = 1, 2, \ldots, m; \ s = 0, 1, 2, \ldots).$$

Отметим, что, в частности:

117. Характеристические полиномы операторов A' и A совпадают.

Аналогично можно исследовать связь между A и A^*. Можно, однако, перенести теоремы, установленные для A и A', на A и A^* с помощью канонического комплексного сопряжения j:

118. $A^* = jA'j^{-1}$.

Отсюда следует, что:

119. $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$.

Следовательно, операторы A и A^*, вообще говоря, не подобны, но их жордановы структуры одинаковы.

120. Если спектр оператора A вещественный, то

$$A^* \approx A,$$

§ 5. Резольвента и операторное исчисление

Пусть A — произвольный оператор. Оператор

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1},$$

существующий при $\lambda \overline{\in} \sigma(A)$, называется *резольвентой* оператора A. В дальнейшем мы часто сокращаем обозначение $R_\lambda(A)$ до R_λ.

Цель настоящего параграфа — изучить поведение резольвенты как функции от λ. Мы начнем с тривиального, но полезного замечания.

121. Если $\lambda \overline{\in} \sigma(A)$, то уравнение

$$Ax - \lambda x = y$$

однозначно разрешимо относительно x при любой правой части y, и его решение есть

$$x = R_\lambda y.$$

122. Если $Ax = \lambda x + y$, то

$$A^k x = \lambda^k x + \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{k-j-1} A^j y \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

123. Для любого полинома $\mathscr{P}(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \lambda^k$ имеет место формула

$$(\mathscr{P}(A) - \mathscr{P}(\lambda) I) R_\lambda = \sum_{j=0}^{m-1} \mathscr{P}_j(A) A^j \qquad (\lambda \overline{\in} \sigma(A)),$$

где $\mathscr{P}_j(\lambda) = \sum_{k=0}^{m-j-1} \alpha_{k+j+1} \lambda^k \qquad (j = 0, 1, \ldots, m-1).$

124. Если $\mathscr{P}(\lambda)$ — какой-нибудь аннулирующий полином оператора A, $\mathscr{W}$ — множество его корней, то

$$R_\lambda = -\frac{1}{\mathscr{P}(\lambda)} \sum_{j=0}^{m-1} \mathscr{P}_j(\lambda) A^j \qquad (\lambda \overline{\in} \mathscr{W}).$$

Таким образом:

125. Резольвента R_λ оператора A является рациональной функцией от λ. Ее полюсы принадлежат спектру оператора A. На бесконечности она регулярна и обращается в нуль.

Уточним поведение резольвенты в точках спектра и на бесконечности.

126. Каждая точка $\lambda_k \in \sigma(A)$ является для резольвенты полюсом порядка, равного порядку собственного числа.

Следовательно, для того чтобы все полюсы резольвенты оператора A были простыми, необходимо и достаточно, чтобы A был оператором скалярного типа.

Теперь легко предугадать роль резольвенты в спектральной теории. Дело в том, что, как мы уже видели, резольвента позволяет описать спектр в терминах теории аналитических функций. Тем самым открывается возможность применения методов теории аналитических функций к теории операторов.

127. Разложение резольвенты в ряд Лорана на бесконечности имеет вид

$$R_\lambda = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}}.$$

Этот ряд сходится в области $|\lambda| > \rho(A)$, где $\rho(A)$ — наибольший модуль собственных значений оператора A.

Величина $\rho(A)$ называется *спектральным радиусом* оператора A. Из **127** и теоремы Коши — Адамара вытекает следующая формула для спектрального радиуса:

128. $\rho(A) = \sup\limits_{f \in E',\, x \in E} \left\{ \overline{\lim_{k \to \infty}} \sqrt[k]{|f(A^k x)|} \right\}.$

Для дальнейшего изучения резольвенты оказывается весьма полезным одно функциональное уравнение.

129. Имеет место равенство

$$R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu \qquad (\lambda,\ \mu \notin \sigma(A))$$

(у р а в н е н и е Г и л ь б е р т а).

Из уравнения Гильберта вытекает дифференциальное уравнение для резольвенты:

130. $\dfrac{d}{d\lambda} R_\lambda = R_\lambda^2 \qquad (\lambda \notin \sigma(A)).$

В силу **130** вообще:

131. $\dfrac{d^k}{d\lambda^k} R_\lambda = k!\, R_\lambda^{k+1} \qquad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\ \lambda \notin \sigma(A)).$

Следовательно:

132. Если $\lambda_0 \overline{\in} \sigma(A)$, то ряд Тейлора резольвенты в окрестности точки λ_0 имеет вид

$$R_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} R_{\lambda_0}^{k+1} (\lambda - \lambda_0)^k.$$

Интересно, что уравнение Гильберта при естественных ограничениях не имеет решений, отличных от резольвент:

133. Если оператор-функция $R(\lambda)$, заданная на некотором множестве $\mathcal{M}$ точек комплексной плоскости, удовлетворяет уравнению Гильберта

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\lambda - \mu) R(\lambda) R(\mu) \qquad (\lambda,\ \mu \in \mathcal{M})$$

и если при некотором $\lambda_0 \in \mathcal{M}$ оператор $R(\lambda_0)$ регулярен, то существует такой оператор A, что $R(\lambda)$ совпадает с резольвентой оператора A во всех точках множества $\mathcal{M}$.

Мы продемонстрируем плодотворность понятия резольвенты на примере так называемого *операторного исчисления Ф. Рисса — Данфорда*. Соответствующая идея возникает из следующего результата.

134. Для любого полинома $\mathcal{P}(\lambda)$ имеет место интегральное представление

$$\mathcal{P}(A) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \mathcal{P}(\lambda) R_\lambda d\lambda, \qquad (*)$$

где $\mathcal{C}$ — произвольный контур *), охватывающий спектр оператора A.

В частности,

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} R_\lambda \, d\lambda = I, \qquad -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \lambda R_\lambda \, d\lambda = A.$$

Формула (*) представляет собой точный операторный аналог интегральной формулы Коши для аналитических функций. Роль ядра Коши $(\lambda - \alpha)^{-1}$ играет $-R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$. Однако $\mathcal{P}(\lambda)$ в (*) — полином, а не произвольная аналитическая

*) Контуром мы называем простую замкнутую спрямляемую кривую или конечную систему таких кривых без взаимных пересечений. Интегрирование всегда будет производиться в положительном направлении.

функция. Иначе и не может быть, поскольку символ $\mathscr{P}(A)$ пока что имеет смысл только для полиномов. Естественный шаг заключается в том, чтобы в общем случае принять формулу Коши в качестве определения.

Итак, пусть скалярная функция $\varphi(\lambda)$ голоморфна на некотором открытом множестве *) $\mathscr{G}_\varphi$, содержащем спектр оператора A. Класс таких функций обозначим Φ_A. Положим по определению

$$\varphi(A) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathscr{C}} \varphi(\lambda) R_\lambda\, d\lambda, \qquad (**)$$

где $\mathscr{C} \subset \mathscr{G}_\varphi$ — произвольный контур, охватывающий $\sigma(A)$. Это определение корректно в том смысле, что правая часть (**) не зависит от $\mathscr{C}$.

Класс Φ_A является алгеброй относительно обычных операций сложения, умножения на число и умножения функций. Рассмотрим отображение $\mathfrak{F}_A$: $\Phi_A \to \mathfrak{M}(\mathrm{E})$, определенное формулой $\mathfrak{F}_A\varphi = \varphi(A)$.

Оказывается, что это отображение является гомоморфизмом алгебр:

135. Пусть $\varphi, \psi \in \Phi_A$ и $\theta = \alpha\varphi + \beta\psi$, где α, β — числа. Тогда

$$\theta(A) = \alpha\varphi(A) + \beta\psi(A).$$

136. Пусть $\varphi, \psi \in \Phi_A$ и $\theta = \varphi\psi$. Тогда

$$\theta(A) = \varphi(A)\psi(A).$$

Найдем образ гомоморфизма $\mathfrak{F}_A$. Используя представление **127**, мы приходим к довольно неожиданному выводу:

137. $\operatorname{Im}\mathfrak{F}_A = \mathfrak{P}(A)$.

Иначе говоря, всевозможные значения $\varphi(A)$ исчерпываются полиномами степени не выше $r - 1$, где r — степень минимального полинома $\mathscr{M}(\lambda;\ A)$. При этом:

138. Для каждой функции $\varphi \in \Phi_A$ существует и единствен такой полином $\mathscr{P}_\varphi(\lambda)$ степени не выше $r - 1$, что

$$\mathscr{P}_\varphi(A) = \varphi(A).$$

Подчеркнем, что оператор A заранее фиксирован. На самом деле полином $\mathscr{P}_\varphi$ зависит и от A (см. **140**).

---

*) Не обязательно связном, так что мы рассматриваем «кусочно аналитические» функции.

Нетрудно описать и ядро гомоморфизма $\mathfrak{F}_A$, т. е. множество функций φ, аннулирующих оператор A в том смысле, что $\varphi(A)=0$.

139. Ядро $\operatorname{Ker}\mathfrak{F}_A$ состоит из всех тех и только тех функций $\varphi\in\Phi_A$, которые делятся на минимальный полином $\mathcal{M}(\lambda;\ A)$, т. е. имеют вид

$$\varphi(\lambda)=\mathcal{M}(\lambda;\ A)\,\psi(\lambda),$$

где $\psi\in\Phi_A$ (ср. 8).

Отсюда, в частности, легко извлечь явную алгебраическую конструкцию полинома $\mathcal{P}_\varphi(A)$.

140. Пусть $\sigma(A)=\{\lambda_k\}_1^m$. Для любой функции $\varphi\in\Phi_A$ полином $\mathcal{P}_\varphi(\lambda)$ является решением *интерполяционной задачи Эрмита*

$$\mathcal{P}_\varphi^{(j)}(\lambda_k)=\varphi^{(j)}(\lambda_k)\qquad(j=0,\ 1,\ \ldots,\ r_{k-1};\ k=1,\ 2,\ \ldots,m).\tag{***}$$

Здесь r_k, как обычно, — порядок собственного числа λ_k.

141. Пусть $\varphi\in\Phi_A$ и $\psi\equiv\dfrac{1}{\varphi}\in\Phi_A$, т. е. $\varphi(\lambda)\neq0$ при $\lambda\in\sigma(A)$. Тогда оператор $\varphi(A)$ регулярен и $[\varphi(A)]^{-1}=\psi(A)$.

При $\varphi(\lambda)=\lambda$ теорема **141** превращается в очевидное утверждение: если $0\notin\sigma(A)$, то оператор A регулярен.

Покажем, что теорема **141** обращается.

142. Каждый собственный вектор оператора A, соответствующий какому-нибудь собственному значению μ, является собственным вектором оператора $\varphi(A)$, соответствующим собственному значению $\varphi(\mu)$.

143. Если $\varphi\in\Phi_A$ и оператор $\varphi(A)$ регулярен, то $\dfrac{1}{\varphi}\in\Phi_A$.

Теоремы **141** и **143** приводят к весьма важному результату:

144. Если $\varphi\in\Phi_A$, то

$$\varphi(\sigma(A))=\sigma(\varphi(A))$$

теорема об отображении спектров).

Теорему об отображении спектров можно вывести также из теоремы Жордана. Именно, заметим, что:

145. Если $A = \sum_{k=1}^{m}{}^{\bullet} A_k$, то

$$\varphi(A) = \sum_{k=1}^{m}{}^{\bullet} \varphi(A_k) \qquad (\varphi \in \Phi_A).$$

146. Если A — одноклеточный оператор и

$$\begin{Vmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{Vmatrix}$$

— его матрица в жордановом базисе, то матрица оператора $\varphi(A)$ в том же базисе имеет вид

$$\begin{Vmatrix} \varphi(\alpha) & \varphi'(\alpha) & \frac{1}{2!}\varphi''(\alpha) & \dots & \frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(\alpha) \\ 0 & \varphi(\alpha) & \varphi'(\alpha) & \dots & \frac{1}{(n-2)!}\varphi^{(n-2)}(\alpha) \\ 0 & 0 & \varphi(\alpha) & \dots & \frac{1}{(n-3)!}\varphi^{(n-3)}(\alpha) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varphi'(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varphi(\alpha) \end{Vmatrix}.$$

Теорема об отображении спектров непосредственно вытекает из **145**, **146**. Более того, теперь можно дать уточненную формулировку, учитывающую кратности (ср. **71**):

147. Пусть A — произвольный оператор, $\sigma(A) = \{\lambda_k\}_1^m$, d_k — кратность собственного значения λ_k ($k = 1, 2, \dots, m$). Пусть, далее, $\varphi \in \Phi_A$ и $\mu \in \sigma(\varphi(A))$. Тогда кратность собственного значения μ оператора $\varphi(A)$ равна

$$d(\mu) = \sum_{\varphi(\lambda_k)=\mu} d_k.$$

Следующий важный результат операторного исчисления:

148. Если $\varphi \in \Phi_A$ и $\psi \in \Phi_{\varphi(A)}$, то суперпозиция $\theta(\lambda) = \psi(\varphi(\lambda))$ принадлежит Φ_A и

$$\theta(A) = \psi(\varphi(A)).$$

Из этой теоремы легко следует:

149. Пусть функция $\varphi \in \Phi_A$ однолистна. Тогда обратная функция ψ принадлежит $\Phi_{\varphi(A)}$ и $\psi(\varphi(A)) = A$.

Теорема **149** служит сильным инструментом решения операторных уравнений вида

$$\psi(X) = A,$$

где ψ — заданная функция, A — заданный оператор.

150. Пусть функция ψ голоморфна и однолистна на некотором открытом множестве $\mathcal{G}$ и $\sigma(A) \subset \psi(\mathcal{G})$. Тогда уравнение

$$\psi(X) = A$$

разрешимо в классе операторов, удовлетворяющих условию $\sigma(X) \subset \mathcal{G}$.

Вопрос о единственности решения будет рассмотрен в следующем параграфе.

Теорема **150** хорошо иллюстрируется на частных задачах извлечения корня из оператора и нахождения логарифма оператора.

151. Пусть p — натуральное число. Уравнение

$$X^p = A,$$

где A — регулярный оператор, разрешимо в классе операторов, спектр которых лежит в угле $0 \leqslant \arg \lambda < 2\pi/p$.

152. Уравнение

$$e^X = A,$$

где A — регулярный оператор, разрешимо в классе операторов, спектр которых лежит в полосе $0 \leqslant \mathfrak{Im}\, \lambda < 2\pi$.

До сих пор мы рассматривали выражение $\varphi(A)$ с фиксированным оператором A и всевозможными $\varphi \in \Phi_A$. Станем теперь на двойственную точку зрения: зафиксируем функцию φ и будем менять оператор A. В этом плане особый интерес представляют функции, заданные степенными рядами.

Пусть $\varphi(\lambda)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k\lambda^k$ в некотором круге $|\lambda|<\rho$ (ρ — радиус сходимости). Когда можно гарантировать сходимость операторного степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k A^k$?

153. Если спектральный радиус $\rho(A)$ оператора A удовлетворяет условию $\rho(A)<\rho$, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k A^k$ сходится и его сумма равна $\varphi(A)$.

В частности, если φ — целая функция, то

$$\varphi(A)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k A^k$$

для всех $A\in\mathfrak{M}(\mathrm{E})$. Например, $e^A=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$.

Условие $\rho(A)<\rho$ не является необходимым, хотя:

154. Если ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k A^k$ сходится, то $\rho(A)\leqslant\rho$.

Полный ответ на вопрос таков:

155. Для сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k A^k$ необходимо и достаточно, чтобы 1) $\rho(A)\leqslant\rho$; 2) если $\rho(A)=\rho$, то для каждого граничного собственного значения λ (т. е. такого, что $|\lambda|=\rho$) сходятся производные ряды

$$\sum_{k=j}^{\infty}\alpha_k k(k-1)\ldots(k-j+1)\lambda^{k-j}\quad (j=0,\ 1,\ \ldots,\ r_\lambda-1),$$

где r_λ — порядок собственного значения λ.

Теорема **155** приводит к следующему заключению.

156. Если ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k\lambda^k$ на окружности $|\lambda|=\rho$ всюду расходится, то для сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k A^k$ необходимо и достаточно, чтобы $\rho(A)<\rho$.

Примером такой ситуации может служить *ряд Неймана* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^k$ (операторная геометрическая прогрессия).

157. Для сходимости ряда Неймана необходимо и достаточно, чтобы $\rho(A) < 1$. При этом $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1}$.

Отметим также, что:

158. Для сходимости ряда Неймана необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{k \to \infty} A^k = 0$.

Оператор A называется *нильпотентным* (*вольтерровым*), если существует такое r, что

$$A^r = 0.$$

Наименьшее r, для которого это условие выполняется, совпадает с порядком оператора A.

Очевидно, если $\lambda \in \sigma(A)$ и W — соответствующее корневое подпространство, то оператор $(A - \lambda I) \mid \mathrm{W}$ — нильпотентный и его порядок равен порядку собственного числа λ.

159. Для того чтобы оператор был нильпотентным, необходимо и достаточно, чтобы его спектральный радиус был равен нулю.

160. Для любого оператора A существует разложение $A = S + N$, где S — оператор скалярного типа, N — нильпотентный оператор, коммутирующий с S.

Разложение, обладающее такими свойствами, называется *разложением Данфорда* оператора A. Детальное изучение разложения Данфорда мы отложим до следующего параграфа.

§ 6. Коммутирующие операторы. Функции от оператора

Условимся говорить, что оператор B является *функцией от оператора* A, если существует такая функция $\varphi \in \Phi_A$, что $B = \varphi(A)$, т. е., если $B \in \operatorname{Im} \mathfrak{F}_A$.

161. Если оператор B является функцией от оператора A, то $B \cup A$.

Обратное неверно (достаточно взять, например, $A = I$). Исследуем возникающую ситуацию.

162. Если $B \cup A$, то собственные подпространства оператора A инвариантны относительно оператора B (см. **48**).

163. Если A — оператор с простым спектром и $B \cup A$, то оператор B является функцией от оператора A.

Но B уже не обязан иметь простой спектр. Однако скалярный тип сохраняется:

164. Если A — оператор скалярного типа, то все функции от него также являются операторами скалярного типа (см. **142**).

Более подробно, если $A = \sum_{k=1}^{m}{}^{\bullet} \lambda_k I_k$, где I_k — единичный оператор в k-м собственном подпространстве, то

$$\varphi(A) = \sum_{k=1}^{m}{}^{\bullet} \varphi(\lambda_k) I_k \qquad (\varphi \in \Phi_A)$$

(см. **145**).

Если A — оператор скалярного типа, то теорему **162** можно обратить:

165. Если A — оператор скалярного типа и собственные подпространства оператора A инвариантны относительно оператора B, то $B \cup A$.

Иначе говоря, если $A = \sum_{k=1}^{m}{}^{\bullet} \lambda_k I_k$ $(\lambda_j \neq \lambda_k$ при $j \neq k)$, то общий вид операторов, коммутирующих с A, есть

$$B = \sum_{k=1}^{m}{}^{\bullet} B_k,$$

где операторы B_k произвольны (в соответствующих подпространствах).

Из этого результата вытекает обращение теоремы **163** в классе операторов скалярного типа:

166. Если A — оператор скалярного типа и все операторы скалярного типа, коммутирующие с A, являются функциями от оператора A, то A имеет простой спектр.

Теорема **165** позволяет также легко исследовать разложение Данфорда $A = S + N$, введенное в конце предыдущего параграфа.

167. Если $S = \sum_{k=1}^{m}{}^{\bullet} \lambda_k I_k$ $(\lambda_j \neq \lambda_k$ при $j \neq k)$, то

$$N = \sum_{k=1}^{m}{}^{\bullet} N_k, \qquad A = \sum_{k=1}^{m}{}^{\bullet} (\lambda_k I_k + N_k),$$

где N_k — нильпотентные операторы.

168. Спектр оператора S совпадает со спектром оператора A. Собственные подпространства оператора S совпадают с соответственными корневыми подпространствами оператора A. Порядок оператора N совпадает с порядком оператора A.

Отсюда вытекает, что:

169. Разложение Данфорда оператора A единственно.

Оператор S в разложении Данфорда $A = S + N$ называется *скалярной частью* оператора A, а оператор N — *нильпотентной частью* оператора A. Очевидно:

170. Для того чтобы A был оператором скалярного типа, необходимо и достаточно, чтобы его нильпотентная часть была равна нулю.

Отметим еще следующее предложение.

171. Для того чтобы оператор B коммутировал с оператором A, необходимо и достаточно, чтобы он коммутировал со скалярной и нильпотентной частями оператора A.

В частности, здесь сказано, что, если $B \smile A$, то корневые подпространства оператора A инвариантны относительно B (ср. **162**). На самом деле справедливо даже более общее утверждение:

172. Если $B \smile A$, то усеченные корневые подпространства оператора A инвариантны относительно оператора B.

Попытаемся теперь описать класс $\mathfrak{K}$ таких операторов A, для которых множество операторов, коммутирующих с A, совпадает с множеством функций от A. Результаты **163, 166** показывают, что пересечение класса $\mathfrak{K}$ с множеством операторов скалярного типа есть класс операторов с простым спектром, т. е. простых операторов скалярного типа (см. **82, 83**). Это наводит на мысль, что справедлива следующая теорема:

173. Для того чтобы множество операторов, коммутирующих с оператором A, совпадало с множеством функций от A, необходимо и достаточно, чтобы оператор A был простым.

Итак, $\mathfrak{K}$ есть класс простых операторов.

Необходимость в **173** легко устанавливается на основании критерия **81**. Достаточность вытекает из **174, 175**.

174. Пусть $A = \sum_{k=1}^{m}{}^{\bullet} A_k$, причем минимальные полиномы операторов A_k попарно взаимно просты. Тогда для каждого набора операторов $\{B_k\}_1^m$ такого, что оператор B_k является функцией от оператора A_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$, оператор $B = \sum_{k=1}^{m}{}^{\bullet} B_k$ будет функцией от оператора A.

175. Если A — одноклеточный оператор, $\{e_k\}_1^n$ — его жорданов базис, то для того, чтобы оператор B коммутировал с A, необходимо и достаточно существование такой системы чисел $\{\alpha_k\}_0^{n-1}$, что

$$Be_k = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j e_{k-j} \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Это означает, что $B = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j A^j$.

За пределами класса $\mathfrak{K}$ отношение коммутирования с данным оператором нельзя описать в терминах функций от него.

Условимся писать

$$B \smile\smile A,$$

если B коммутирует с каждым оператором, коммутирующим с A.

176. Если $B \smile\smile A$, то $B \smile \varphi(A)$ $(\varphi \in \Phi_A)$. В частности, $B \smile A$.

177. Если B является функцией от оператора A, то $B \smile\smile A$.

Но будет ли всякий оператор B, для которого $B \smile\smile A$, функцией от A? Выясним ситуацию, вводя сначала упрощающее предположение, что A — оператор скалярного типа. С помощью **165** и леммы Шура устанавливается, что:

178. Если A — оператор скалярного типа и $B \smile\smile A$, то B является функцией от A.

Теперь рассмотрим общий случай. Мы используем для этого приводящие подпространства.

179. Если подпространство L приводит оператор A, то любой оператор в L, коммутирующий с $A \mid \mathrm{L}$, можно продолжить до оператора во всем пространстве, коммутирующего с A.

180. Если $B \smile\smile A$, то каждое приводящее подпространство L оператора A приводит и оператор B, причем $B \mid \mathrm{L} \smile\smile A \mid \mathrm{L}$.

181. Если A — одноточечный оператор, то каждое его максимальное циклическое подпространство является приводящим.

182. Если A — одноточечный оператор и $B \smile\smile A$, то каждому максимальному циклическому подпространству L

оператора A соответствует такой полином $\mathscr{P}_{\mathrm{L}}(\lambda)$, что

$$B\,|\,\mathrm{L}=\mathscr{P}_{\mathrm{L}}(A\,|\,\mathrm{L}).$$

Теперь мы можем сформулировать замечательную по своей общности теорему:

183. Для любого оператора A каждый оператор B, удовлетворяющий условию $B \cup\cup A$, является функцией от A.

Отметим, что из теорем **183**, **171** непосредственно следует:

184. Скалярная и нильпотентная части оператора A являются функциями от A.

Эти функции нетрудно вычислить по жорданову каноническому виду матрицы оператора A.

Применим теорему **183** к исследованию вопроса о единственности решения уравнения

$$\psi(X)=A. \qquad (*)$$

При этом будем предполагать, что функция ψ голоморфна и однолистна в некоторой области $\mathscr{G}$ и $\sigma(A)\subset\psi(\mathscr{G})$. Тогда в силу **150** уравнение (*) имеет решение в классе операторов таких, что $\sigma(X)\subset\mathscr{G}$.

Отметим предварительно две общие формулы, относящиеся к коммутаторам. Пусть X, B — какие-нибудь два оператора. Положим $Q=[X,\ B]$.

185. $[X^k,\ B]=\sum\limits_{j=1}^{k-1} X^{k-j}QX^j \qquad (k=2,\ 3,\ 4,\ \ldots).$

186. Если $\psi\in\Phi_X$ и u — собственный вектор оператора X, отвечающий собственному значению μ, то

$$[\psi(X),\ B]\,u=\psi(X,\ \mu)\,Qu,$$

где

$$\psi(\lambda,\ \mu)=\frac{\psi(\lambda)-\psi(\mu)}{\lambda-\mu} \qquad (=\varphi'(\mu) \text{ при } \lambda=\mu).$$

187. Формула **186** остается в силе для решений уравнения

$$Xu-\mu u=v$$

с правой частью, удовлетворяющей условию:

$$QX^mv=0 \qquad (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

188. Если X — решение уравнения (*) и $B\cup A$, то $Qu=0$ на всех собственных и присоединенных векторах оператора X.

Следовательно:

189. Все решения уравнения (*) являются функциями от оператора A.

Теперь можно получить окончательный результат:

190. В условиях теоремы **150** уравнение

$$\psi(X) = A$$

имеет единственное решение.

В частности (см. **151**, **152**):

191. Уравнение

$$X^p = A,$$

где A — регулярный оператор, имеет единственное решение в классе операторов, спектр которых лежит в угле $0 \leqslant \arg\lambda < 2\pi/p$.

Это решение называется *арифметическим корнем* p*-й* степени из оператора A и обозначается $A^{1/p}$.

192. Уравнение

$$e^X = A,$$

где A — регулярный оператор, имеет единственное решение в классе операторов, спектр которых лежит в полосе $0 \leqslant \mathfrak{Im}\,\lambda < 2\pi$.

Это решение называется *главным значением логарифма* оператора A и обозначается $\ln A$.

В заключение мы вернемся к исходной теореме **162** и заметим, что из нее вытекает:

193. Если операторы A, B скалярного типа коммутируют, то они обладают общим собственным базисом.

Эту формулировку можно усилить:

194. Если $\{A_\nu\}$ — какое-нибудь множество попарно коммутирующих операторов скалярного типа, то существует общий для всех операторов A_ν собственный базис.

Отметим вариант:

195. Если $\{A_\nu\}$ — какое-нибудь множество попарно коммутирующих операторов, содержащее оператор с простым спектром, то существует общий для всех операторов собственный базис.

Существование общего собственного базиса у двух операторов A, B, вообще говоря, не означает, что один из них есть функция от другого. Однако:

196. Если два оператора A, B имеют общий собственный базис, то существует такой оператор T, что A и B являются функциями от T.

В силу **193**, **196** для операторов скалярного типа из соотношения $A \smile B$ вытекает представимость A и B в виде функций от одного и того же оператора T. Для общих операторов условие $A \smile B$ только необходимо для такой представимости.

§ 7. След оператора

Рассмотрим произвольный оператор A. Пусть $\{\lambda_k\}_1^m$ — его спектр, $\{d_k\}_1^m$ — характеристика спектрального разложения. *Следом* оператора A называется число

$$\operatorname{sp} A = \sum_{k=1}^{m} d_k \lambda_k,$$

т. е. след — это сумма собственных значений, каждое из которых засчитывается столько раз, какова его кратность. Очевидно, что следы подобных операторов равны.

197. Если $A = S + N$ — разложение Данфорда оператора A, то $\operatorname{sp} A = \operatorname{sp} S$.

198. Если $\mathscr{D}(\lambda;\ A) = (-1)^n \left(\lambda^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda^k\right)$, то

$$\operatorname{sp} A = \alpha_{n-1}.$$

Если взять матрицу оператора в базисе треугольного представления, то сумма ее диагональных элементов совпадет со следом. Весьма важно, что этот способ вычисления следа сохраняется в произвольном базисе. Мы установим даже более общий факт:

199. Пусть $\{u_k\}_1^q$ — какая-нибудь система векторов, $\{f_k\}_1^q$ — система линейных функционалов. Тогда формула

$$Ax = \sum_{k=1}^{q} f_k(x)\, u_k$$

определяет линейный оператор A и

$$\operatorname{sp} A = \sum_{k=1}^{q} f_k(u_k).$$

При этом:

200. Для каждого оператора A и для каждой **полной** системы векторов $\{u_k\}_1^q$ существует такая система линейных функционалов $\{f_k\}_1^q$, что

$$Ax = \sum_{k=1}^{q} f_k(x)\, u_k.$$

Эта система функционалов единственна, если $\{u_k\}_1^q$ — базис, и только в этом случае.

Вследствие **199**:

201. Если $(\alpha_{jk})_{j,\,k=1}^n$ — матрица оператора A в каком-нибудь базисе, то

$$\operatorname{sp} A = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kk}.$$

Таким образом, сумма диагональных элементов матрицы оператора не зависит от выбора базиса.

Рассмотрим в пространстве операторов $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$ функционал $\operatorname{sp} X$.

202. Функционал $\operatorname{sp} X$ линеен.

Между прочим, это свойство никак не усматривается из первоначального определения следа, в то время как после теоремы **201** оно становится очевидным.

С помощью следа можно получить общий вид линейного функционала в $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$:

203. Для каждого $\tau \in [\mathfrak{M}(\mathrm{E})]'$ существует и единствен такой оператор $T \in \mathfrak{M}(\mathrm{E})$, что имеет место представление

$$\tau(X) = \operatorname{sp}(TX) \qquad (X \in \mathfrak{M}(\mathrm{E})).$$

Определяемое этим отображение $[\mathfrak{M}(\mathrm{E})]' \to \mathfrak{M}(\mathrm{E})$ есть изоморфизм.

Интересный круг задач связан с уравнением

$$\operatorname{sp} X = 0. \qquad (*)$$

Начнем с того, что укажем некоторый класс решений этого уравнения.

204. Для любых двух операторов A, B

$$\operatorname{sp}[A,\ B] = 0,$$

т. е. $\operatorname{sp} BA = \operatorname{sp} AB$.

Но каждое ли решение X уравнения (*) можно представить в виде коммутатора? Ответ на этот вопрос содержится в теореме **210**.

205. Если $Q \doteq [A, B]$ и $C \smile A$, то $\operatorname{sp} QC = 0$.

Используя теорию Фредгольма и общий вид линейного функционала в $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$, можно доказать обратное утверждение:

206. Если оператор Q таков, что $\operatorname{sp} QC = 0$ для всех $C \smile A$, то существует такой оператор B, что $Q = [A, B]$, т. е. уравнение

$$[A, X] = Q$$

разрешимо относительно X.

207. Если A — простой оператор, то уравнение

$$[A, X] = Q$$

разрешимо относительно X тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{sp} QA^k = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

208. Пусть A — оператор с простым спектром, $\{e_k\}_1^n$ — его собственный базис, $(\varkappa_{jk})_{j, k=1}^n$ — матрица оператора Q в этом базисе. Для того чтобы уравнение

$$[A, X] = Q$$

было разрешимо относительно X, необходимо и достаточно, чтобы

$$\varkappa_{kk} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

209. Если $\operatorname{sp} Q = 0$, то существует такой базис, в котором все диагональные элементы матрицы оператора Q равны нулю.

Итогом проведенного исследования является теорема:

210. Если $\operatorname{sp} Q = 0$, то оператор Q можно представить в виде $Q = [A, B]$, причем A можно выбрать в классе операторов с простым спектром.

Отметим одно любопытное следствие теоремы **210**:

211. Пусть $\{A_j\}_1^s$, $\{B_j\}_1^s$ — произвольные системы операторов. Тогда сумма коммутаторов

$$\sum_{j=1}^{s} [A_j, B_j]$$

представима в виде коммутатора $[A, B]$.

От теоремы **205** ведет начало еще одна серия результатов.

212. Если операторы A и B таковы, что $[A, B] \smile A$, то $[A, B]$ — нильпотентный оператор.

Обратно:

213. Если N — нильпотентный оператор, то его можно представить в виде $N = [A, B]$, где $A \smile N$.

Таким образом, заключение теоремы **212** усилить нельзя. Однако:

214. Пусть A — оператор скалярного типа, B — произвольный оператор. Положим

$$Q_1 = [A, B], \ Q_{k+1} = [A, Q_k] \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Если $Q_m = 0$ при некотором $m \geqslant 1$, то $Q_1 = 0$, т. е. $A \smile B$.

Операция взятия коммутатора может рассматриваться как умножение. Она линейна

$$[A_1 + A_2, B] = [A_1, B] + [A_2, B], \qquad [\alpha A, B] = \alpha [A, B]$$

и антикоммутативна

$$[B, A] = -[A, B].$$

Кроме того, она неассоциативна. Суррогатом ассоциативного закона является тождество Якоби:

215. $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$.

Алгебра, порождаемая в линейном пространстве умножением с перечисленными свойствами, называется *алгеброй Ли*.

§ 8. Проекторы и разложения единицы

Оператор P называется *проектором*, если он удовлетворяет уравнению

$$P^2 = P.$$

Согласно **43** каждый проектор является оператором скалярного типа.

216. Для каждого проектора P

$$\sigma(P) \subset \{0, 1\}.$$

Если проектор отличен от 0 и I, то $\sigma(P) = \{0, 1\}$.

Спектральное разложение проектора $P \neq 0$, I имеет вид

$$P = 1 \cdot I_1 \dotplus 0 \cdot I_0 = I_1 \dotplus 0.$$

217. Если P — проектор, то $\operatorname{Im} P$ совпадает с собственным подпространством, соответствующим собственному значению $\lambda = 1$.

Тривиальным образом $\operatorname{Ker} P$ совпадает с собственным подпространством, соответствующим собственному значению $\lambda = 0$.

218. Формулы $\operatorname{Im} P = \mathrm{L}$, $\operatorname{Ker} P = \mathrm{M}$ устанавливают взаимно однозначное соответствие между проекторами и парами подпространств $\{\mathrm{L}, \mathrm{M}\}$, удовлетворяющими условию $\mathrm{L} \dotplus \mathrm{M} = \mathrm{E}$.

Если $\operatorname{Im} P = \mathrm{L}$, $\operatorname{Ker} P = \mathrm{M}$, то говорят, что P проектирует на подпространство L *параллельно* подпространству M. При этом если $x = x_1 + x_2$ $(x_1 \in \mathrm{L},\ x_2 \in \mathrm{M})$, то $Px = x_1$.

В силу **218** каждому проектору P соответствует *дополнительный* проектор $\overline{P}$, определяемый условиями

$$\operatorname{Im} \overline{P} = \operatorname{Ker} P, \quad \operatorname{Ker} \overline{P} = \operatorname{Im} P.$$

Очевидно, при этом $\overline{\overline{P}} = P$.

Между взаимно дополнительными проекторами имеется очевидное соотношение:

219. $P + \overline{P} = I$.

Это — простейший вариант так называемого разложения единицы. Сформулируем общее определение.

Проекторы P, Q называются *взаимно ортогональными* (см. § 5 гл. I), если

$$PQ = 0, \qquad QP = 0,$$

т. е. если

$$\operatorname{Im} Q \subset \operatorname{Ker} P, \qquad \operatorname{Ker} Q \supset \operatorname{Im} P.$$

Например:

220. Взаимно дополнительные проекторы P, $\overline{P}$ взаимно ортогональны.

Система попарно взаимно ортогональных проекторов $\{P_k\}_1^m$ называется *ортогональной системой* проекторов,

221. Если $\{P_k\}_1^m$ — ортогональная система проекторов, то оператор $P=\sum\limits_{k=1}^{m} P_k$ является проектором, причем

$$\operatorname{Im} P=\sum_{k=1}^{m}{}^{\bullet} \operatorname{Im} P_k, \qquad \operatorname{Ker} P=\bigcap_{k=1}^{m} \operatorname{Ker} P_k.$$

Ортогональная система проекторов $\{P_k\}_1^m$ называется *разложением единицы*, если

$$\sum_{k=1}^{m} P_k=I.$$

Очевидно, если $\{P_k\}_1^m$ — разложение единицы, то $\{\operatorname{Im} P_k\}_1^m$ — базисная система подпространств.

222. Формулы $\operatorname{Im} P_k=\mathrm{L}_k$ $(k=1, 2, \ldots, m)$ определяют взаимно однозначное соответствие между разложениями единицы $\{P_k\}_1^m$ и базисными системами подпространств.

223. Если $\{P_k\}_1^m$ — разложение единицы, то

$$\sum_{k=1}^{m}{}^{\bullet} I_k=I, \tag{$*$}$$

где $I_k=P_k \mid \operatorname{Im} P_k$. Этим определяется взаимно однозначное соответствие между разложениями единицы и разложениями вида $(*)$ *).

Разложением единицы оператора A называется то разложение единицы, которое порождается спектральным разложением в смысле § 3 (т. е. системой корневых подпространств). Оно, очевидно, определено с точностью до порядка элементов. Элементы разложения единицы оператора A называются *корневыми проекторами*.

224. Для того чтобы подпространство L было инвариантным относительно оператора A, необходимо, чтобы $\overline{P}AP=0$ для каждого P, проектирующего на L, и достаточно, чтобы это выполнялось для какого-нибудь одного P.

*) Последние также можно было бы назвать разложениями единицы, но мы удержим за этим термином лишь один смысл.

225. Для того чтобы подпространство L приводило оператор A, необходимо и достаточно, чтобы $A \smile P$ для некоторого P, проектирующего на L.

226. Пусть $\{P_k\}_1^m$ — разложение единицы оператора A. Тогда

$$A = \sum_{k=1}^{m} A_k,$$

где $A_k = AP_k = P_k A$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$.

Операторы A_k попарно взаимно ортогональны:

$$A_j A_k = 0 \qquad (j \neq k).$$

Отличие этого разложения от разложения **64** состоит в том, что операторы A_k действуют во всем пространстве. Но, конечно, $A_k | \mathrm{W}_k = A | \mathrm{W}_k$. Кроме того, $A_k | \mathrm{W}_j = 0$ $(j \neq k)$. Разложение **226** по-прежнему называется *спектральным разложением*. Для оператора скалярного типа спектральное разложение принимает простой вид:

227. Если A — оператор скалярного типа и $\{P_k\}_1^m$ — его разложение единицы, то

$$A = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k P_k,$$

где λ_k — соответствующие собственные числа. Более того,

$$\varphi(A) = \sum_{k=1}^{m} \varphi(\lambda_k) P_k$$

для всех $\varphi \in \Phi_A$.

В частности, имеет место *разложение резольвенты*

$$R_\lambda = \sum_{k=1}^{m} \frac{P_k}{\lambda_k - \lambda}.$$

Это есть разложение рациональной функции R_λ на простейшие дроби (см. **125**, **126**).

228. Корневые проекторы P_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ произвольного оператора A являются функциями от оператора A.

Более того, для них можно указать явные аналитические выражения:

229. Пусть $\sigma(A)=\{\lambda_k\}_1^m$ и Γ_k — простой контур, отделяющий точку λ_k от остальных точек спектра. Тогда

$$P_k=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_k} R_\lambda\, d\lambda \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

(формулы Ф. Рисса).

Для оператора скалярного типа формулы Рисса непосредственно следуют из разложения резольвенты по теореме о вычетах. Формулы Рисса показывают, что корневые проекторы всегда являются с точностью до знака вычетами резольвенты в соответствующих полюсах.

230. Пусть $\mathcal{H}_k(\lambda)$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ — интерполяционный полином Эрмита, соответствующий условиям

$$\mathcal{H}_k(\lambda_k)=1,\quad \mathcal{H}_k^{(j)}(\lambda_k)=0 \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ r_k-1),$$

где r_k — порядок собственного значения λ_k оператора A. Тогда

$$P_k=\mathcal{H}_k(A) \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

(ср. **140**).

Разложение единицы оператора тесно связано с разложением Данфорда.

231. Пусть $\{P_k\}_1^m$ — разложение единицы оператора A и $\sigma(A)=\{\lambda_k\}_1^m$. Тогда скалярная часть оператора A равна

$$S=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k P_k=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\mathcal{H}_k(A)$$

(ср. **184**).

Отметим еще одно интересное следствие формул Рисса.

232. Каковы бы ни были оператор A и вектор $x\neq 0$, функция $R_\lambda(A)x$ не является целой относительно λ.

Разложение резольвенты на простейшие дроби, полученное выше для операторов скалярного типа, можно распространить на произвольные операторы в следующей форме:

233. Для любого оператора A $\left(\sigma(A)=\{\lambda_k\}_1^m\right)$

$$R_\lambda(A)=-\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{r_k-1}\frac{P_k^{(j)}}{(\lambda-\lambda_k)^{j+1}},$$

где $P_k^{(j)} = (A - \lambda_k I)^j P_k$, $P_k^{(0)}$ — корневые проекторы оператора A.

Отметим, что $(A - \lambda_k I) P_k^{(r_k - 1)} = 0$.

Из **233** следует формула Лагранжа — Сильвестра:

234. $\varphi(A) = \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{j=0}^{r_k - 1} \frac{\varphi^{(j)}(\lambda_k)}{j!} P_k^{(j)}$ $(\varphi \in \Phi_A)$ (ср. **227**, **146**, а также **138**, **140**).

Теперь мы оставим спектральные вопросы и возвратимся к общей теории проекторов.

235. Пусть P — проектор, $\{e_k\}_1^r$ — какой-нибудь базис подпространства $\operatorname{Im} P$, $\{e_k\}_{r+1}^n$ — какой-нибудь базис подпространства $\operatorname{Ker} P$, $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k(x) e_k$ — разложение вектора x по базису $\{e_k\}_1^n$. Тогда

$$Px = \sum_{k=1}^{r} \xi_k(x) e_k.$$

Заметим, что система линейных функционалов $\{\xi_k\}_1^r$ биортогональна системе векторов $\{e_k\}_1^r$. Обратно:

236. Если $\Gamma = \{e_k\}_1^r$ — линейно независимая система векторов, $\Gamma' = \{f_k\}_1^r$ — биортогональная система линейных функционалов, то оператор P, действующий по формуле

$$Px = \sum_{k=1}^{r} f_k(x) e_k,$$

является проектором, причем

$$\operatorname{Im} P = \mathrm{L}(\Gamma), \quad \operatorname{Ker} P = [\mathrm{L}(\Gamma')]^{\perp}.$$

Кроме того:

237. Если некоторый проектор P действует по формуле

$$Px = \sum_{k=1}^{r} f_k(x) e_k,$$

где $\Gamma = \{e_k\}_1^s$ — линейно независимая система векторов, $\Gamma_1 = \{f_k\}_1^r$ — линейно независимая система линейных функционалов, то системы Γ и Γ_1 биортогональны.

Теперь легко получить, что (см. **199**):

238. Для любого проектора P

$$\operatorname{rg} P = \operatorname{sp} P.$$

Этот результат можно применить для доказательства одной общей теоремы о сумме проекторов:

239. Для того чтобы сумма проекторов $P = \sum_{k=1}^{m} P_k$ была проектором, необходимо и достаточно, чтобы система $\{P_k\}_1^m$ была ортогональной.

Нетривиальным здесь является утверждение о необходимости. Утверждение о достаточности содержится в **221**.

Из **239** следует, что в определении разложения единицы можно не выдвигать a priori требование ортогональности.

Рассмотрим другие действия над проекторами.

240. Для того чтобы разность $P = P_1 - P_2$ двух проекторов P_1 и P_2 была проектором, необходимо и достаточно, чтобы $\bar{P}_1$ и P_2 были взаимно ортогональны. При выполнении последнего условия

$$\operatorname{Im} P = \operatorname{Im} P_1 \cap \operatorname{Ker} P_2, \qquad \operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} P_1 \dotplus \operatorname{Im} P_2.$$

Отметим, что взаимная ортогональность проекторов $\bar{P}_1$, P_2 равносильна соотношениям

$$\operatorname{Im} P_1 \supset \operatorname{Im} P_2; \qquad \operatorname{Ker} P_1 \subset \operatorname{Ker} P_2.$$

241. Для того чтобы произведение $P = P_1 P_2$ двух проекторов P_1 и P_2 было проектором, необходимо и достаточно, чтобы коммутатор $[P_2, P_1]$ отображал подпространство $\operatorname{Im} P_2$ в подпространство $\operatorname{Ker} P_1$. При выполнении последнего условия:

$$\operatorname{Im} P = \operatorname{Im} P_1 \cap (\operatorname{Im} P_2 + \operatorname{Ker} P_1 \cap \operatorname{Ker} P_2),$$
$$\operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} P_2 + \operatorname{Ker} P_1 \cap (\operatorname{Im} P_1 + \operatorname{Im} P_2).$$

В частности:

242. Если проекторы P_1 и P_2 коммутируют, то их произведение P является проектором. При этом

$$\operatorname{Im} P = \operatorname{Im} P_1 \cap \operatorname{Im} P_2, \qquad \operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} P_1 + \operatorname{Ker} P_2.$$

Этот результат непосредственно распространяется на любую систему $\{P_k\}_1^m$ попарно коммутирующих проекторов. Более того:

243. Если произведение проекторов $P = P_1 P_2 \ldots P_m$ не меняется при циклических перестановках сомножителей, то оно также является проектором, причем

$$\operatorname{Im} P = \bigcap_{k=1}^{m} \operatorname{Im} P_k, \quad \operatorname{Ker} P = \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Ker} P_k.$$

Наконец, отметим еще, что:

244. Если P — проектор, то P' — также проектор (в пространстве E'), причем

$$\operatorname{Im} P' = (\operatorname{Ker} P)^{\perp}, \quad \operatorname{Ker} P' = (\operatorname{Im} P)^{\perp}.$$

§ 9. Элементы теории возмущений

В этом параграфе мы коснемся вопроса о том, как изменяется строение оператора при малом его изменении (возмущении). Один важный результат в этом направлении был уже получен ранее (**292** гл. I). На языке настоящей главы он звучит следующим образом:

245. Множество $\mathfrak{R}$ регулярных операторов в пространстве $\mathfrak{M}(E)$ открыто.

Кроме того:

246. Множество $\mathfrak{R}$ связно.

Рассмотрим на $\mathfrak{R}$ отображение обращения: $\Omega A = A^{-1}$.

247. Отображение Ω непрерывно.

Иными словами оператор, обратный к A, непрерывно зависит от A. Здесь уместно подчеркнуть, что умножение операторов также является непрерывной операцией:

248. Отображение $\Pi(A, B) = AB$ $(A, B \in \mathfrak{M}(E))$ непрерывно.

Применим теоремы **245**, **246** к исследованию зависимости спектра $\sigma(A)$ от оператора A.

249. Если точка λ_0 не принадлежит спектру $\sigma(A_0)$ некоторого оператора A_0, то существует такая окрестность $\mathscr{U}_0$ точки λ_0 и такая окрестность $\mathfrak{U}_0$ оператора A_0, что $\lambda \notin \sigma(A)$ при всех $\lambda \in \mathscr{U}_0$, $A \in \mathfrak{U}_0$.

250. Резольвента $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ является непрерывной функцией по совокупности аргументов A, λ $(\lambda \notin \sigma(A))$.

251. Спектр $\sigma(A)$ непрерывно зависит от оператора A.

Более подробно это означает, что для любого оператора A_0 и любой окрестности $\mathscr{V}_0$ множества $\sigma(A_0)$ на комплексной плоскости существует такая окрестность $\mathfrak{U}_0$ оператора A_0, что $\sigma(A)\subset\mathscr{V}_0$ для всех $A\in\mathfrak{U}_0$.

Из теоремы **249** следует, в частности, что:

252. Множество операторов с простым спектром открыто (ср. **62**).

Кроме того:

253. Множество операторов с простым спектром связно.

Теорему **250** можно значительно уточнить, отправляясь от следующего замечания:

254. Пусть $\lambda_0\in\sigma(A_0)$ и в круге $|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon$ нет других точек спектра оператора A_0. Тогда *проектор Рисса*

$$P_A=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon} R_\lambda(A)\,d\lambda$$

является непрерывной функцией от A в некоторой окрестности оператора A_0.

Следовательно:

255. Существует такая окрестность $\mathfrak{U}_0$ оператора A_0, что

$$\operatorname{rg} P_A=\operatorname{rg} P_{A_0} \qquad (A\in\mathfrak{U}_0).$$

(ср. **288** гл. I).

Иначе говоря, сумма кратностей тех собственных значений оператора $A\in\mathfrak{U}_0$, которые находятся внутри круга $|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon$, равна кратности собственного значения λ_0. Вследствие этого:

256. Характеристический полином $\mathscr{D}(\lambda;\ A)$ непрерывно зависит от оператора A (и даже от совокупности аргументов A, λ).

Для минимального полинома $\mathscr{M}(\lambda;\ A)$ аналогичное утверждение неверно. Это связано с тем, что множество операторов скалярного типа, как легко видеть, не является открытым *). Однако, между прочим:

257. Множество простых операторов открыто (см. **85** и **289** гл. I).

Отметим еще, что (ср. **245**, **247**):

258. Если скалярная функция $\varphi(\lambda)$ голоморфна на некотором открытом множестве $\mathscr{G}$, то множество $\mathfrak{M}_\varphi$ тех операто-

*) Оно также не является замкнутым (см. 62).

ров A, для которых $\varphi \in \Phi_A$, открыто и отображение φ: $\mathfrak{M}(E) \to \mathfrak{M}(E)$, значение которого в точке A есть $\varphi(A)$, непрерывно.

Рассмотрим теперь вкратце элементы аналитической теории возмущений. Здесь предметом исследования будет голоморфная оператор-функция A_ζ скалярного аргумента ζ.

259. Если оператор-функция A_ζ голоморфна на некотором открытом множестве $\mathscr{H}$, то на той части множества $\mathscr{H}$, где $A_\zeta \in \mathfrak{R}$, функция A_ζ^{-1} голоморфна, причем

$$\frac{dA_\zeta^{-1}}{d\zeta} = -A_\zeta^{-1}\frac{dA_\zeta}{d\zeta}A_\zeta^{-1}.$$

260. Резольвента

$$R_\lambda(A_\zeta) = (A_\zeta - \lambda I)^{-1} \qquad (\lambda \bar{\in} \sigma(A_\zeta))$$

голоморфной оператор-функции A_ζ голоморфна по совокупности аргументов ζ, λ.

261. Пусть скалярная функция $\varphi(\lambda)$ голоморфна на некотором открытом множестве $\mathscr{G}$, оператор-функция A_ζ голоморфна на некотором открытом множестве $\mathscr{H}$. Тогда оператор-функция $\varphi(A_\zeta)$ голоморфна на той части множества $\mathscr{H}$, где $A_\zeta \in \mathfrak{M}_\varphi$.

Следующий результат имеет фундаментальное значение.

262. Характеристический полином $\mathscr{D}(\lambda;\ \zeta) = \mathscr{D}(\lambda;\ A_\zeta)$ голоморфной оператор-функции A_ζ голоморфен по совокупности аргументов ζ, λ.

Доказательство можно редуцировать к **261** с помощью формулы:

263. $\mathscr{D}(\lambda;\ A) = e^{\mathrm{sp}\{\ln(A-\lambda I)\}}$ $(\lambda \bar{\in} \sigma(A))$.

§ 10. Детерминант оператора. Групповые коммутаторы

Детерминант оператора — это мультипликативный аналог следа. Пусть A — произвольный оператор, $\{\lambda_k\}_1^m$ — его спектр, $\{d_k\}_1^m$ — характеристика спектрального разложения. Детерминантом оператора A называется число

$$\det A = \prod_{k=1}^{m} \lambda_k^{d_k}$$

(т. е. детерминант – это произведение собственных значений, каждое из которых засчитывается столько раз, какова его кратность).

264. $\det A = \mathscr{D}(0;\ A)$.

Отсюда в силу результатов предыдущего параграфа вытекает:

265. Функционал $\det A$ непрерывен в $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$.

266. Если A_ζ – голоморфная оператор-функция в некоторой области $\mathscr{G}$, то $\det A_\zeta$ — голоморфная функция в $\mathscr{G}$.

В силу **263**:

267. $\det A = e^{\operatorname{sp}(\ln A)}$ $(A \in \mathfrak{R})$.

В дополнение к этому, если $A \notin \mathfrak{R}$, то $\det A = 0$. Таким образом, для того чтобы оператор A был регулярным, необходимо и достаточно, чтобы $\det A \neq 0$.

Формулу **264** можно обобщить:

268. $\mathscr{D}(\lambda;\ A) = \det(A - \lambda I)$.

Очевидно, детерминанты подобных операторов равны. Отсюда:

269. $\det BA = \det AB$ (ср. **204**).

Более того:

270. $\mathscr{D}(\lambda;\ AB) = \mathscr{D}(\lambda;\ BA)$.

Формулу **270** можно вывести из следующего утверждения:

271. Если хотя бы один из операторов A, B регулярен, то $AB \approx BA$.

Вообще же $AB \not\approx BA$. Например, существуют такие операторы A, B, что $AB = 0$, $BA \neq 0$.

Теорема **269** допускает существенное уточнение:

272. Для любых двух операторов A, B

$$\det AB = \det A \det B$$

(теорема умножения детерминантов).

Для случая $A \smile B$ теорема умножения детерминантов легко усматривается из **267** и следующей теоремы сложения для экспоненты.

273. Если $A \smile B$, то $e^A e^B = e^{A+B}$.

Теорема умножения детерминантов очевидна также, если по крайней мере один из операторов A, B нерегулярен. Общее доказательство является итогом цепочки лемм **274**–**277**.

274. $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$.

275. Функция $\mathscr{D}(\zeta;\ A,\ B) = \det A(B - \zeta I)$ является полиномом от ζ степени не выше n.

276. Если спектр оператора B прост, то полином $\mathscr{D}(\zeta;\ A,\ B)$ делится на характеристический полином $\mathscr{D}(\zeta;\ B)$, причем

$$\mathscr{D}(\zeta;\ A,\ B) = \mathscr{D}(\zeta;\ B)\det A.$$

Отсюда:

277. Если спектр оператора B прост, то

$$\det AB = \det A \det B.$$

Отметим в связи с теоремой умножения детерминантов, что:

278. $\det A^n = (\det A)^n \quad (A \in \mathfrak{R};\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$.

Функционал $\delta(A)$ $(A \in \mathfrak{M}(\mathrm{E}))$ называется *мультипликативным*, если

$$\delta(AB) = \delta(A)\,\delta(B).$$

Тривиальным примером может служить тождественная константа, равная нулю или единице.

Теорема умножения детерминантов означает, что $\det A$ — мультипликативный функционал в $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$. На вопрос о том, какие существуют мультипликативные функционалы в $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$, мы дадим ответ в конце параграфа.

Введем мультипликативный аналог понятия коммутатора. *Групповым коммутатором* двух регулярных операторов A и B называется оператор

$$\{A,\ B\} = ABA^{-1}B^{-1}.$$

279. Для того чтобы два регулярных оператора A, B коммутировали, необходимо и достаточно, чтобы $\{A,\ B\} = I$.

Между групповым коммутатором и коммутатором имеется прямая связь:

280. $\frac{d}{d\zeta}\{e^{A\zeta},\ e^{B\zeta}\}\big|_{\zeta=0} = [A,\ B]$.

Аналогично **204**:

281. $\det\{A,\ B\} = 1$.

Оператор, детерминант которого равен единице, называется *собственно унимодулярным*. Оператор называется *унимодулярным*, если модуль его детерминанта равен единице. Всякий ли собственно унимодулярный оператор представим в виде группового коммутатора? По аналогии с **210** следует надеяться на положительный ответ.

282. Для того чтобы уравнение

$$\{X,\ B\} = C,$$

где B, C — заданные регулярные операторы, было разрешимо относительно X, необходимо и достаточно, чтобы $CB \approx B$.

283. Если C — собственно унимодулярный оператор, то существует такой регулярный оператор B с простым спектром, что $CB \approx B$.

Таким образом, действительно:

284. Каждый собственно унимодулярный оператор C можно представить в виде

$$C = \{A, B\},$$

причем B можно выбрать в классе операторов с простым спектром.

Применим этот результат к описанию всех мультипликативных функционалов в $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$.

285. Если $\delta(A)$ — мультипликативный функционал, отличный от нуля, то $\delta(C) = 1$ для всех собственно унимодулярных операторов C.

286. Если $\delta(A)$ — непрерывный мультипликативный функционал, отличный от нуля, то на скалярных операторах он имеет вид

$$\delta(\alpha I) = |\alpha|^{\gamma} e^{im \arg \alpha},$$

где γ, m — некоторые константы, причем либо $\mathfrak{Re}\,\gamma > 0$, m — целое, либо $\gamma = 0$, $m = 0$.

287. Общий вид непрерывного мультипликативного функционала в $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$, отличного от нуля, есть:

$$\delta(A) = |\det A|^{\omega} e^{ik \arg (\det A)},$$

где ω, k — некоторые константы, причем либо $\mathfrak{Re}\,\omega > 0$, k — целое, либо $\omega = 0$, $k = 0$.

В заключение подчеркнем, что:

288. В $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$ при $\dim \mathrm{E} > 1$ не существует мультипликативных линейных функционалов, отличных от нуля.

Этот результат тесно связан с теоремой **25** и легко из нее следует, если принять во внимание, что:

289. Если $\delta(A)$ — линейный мультипликативный функционал, то $\operatorname{Ker} \delta$ является двусторонним идеалом в алгебре $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$.

ГЛАВА III

БИЛИНЕЙНЫЕ И ЭРМИТОВО-БИЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ. УНИТАРНОЕ ПРОСТРАНСТВО. ОПЕРАТОРЫ В УНИТАРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Билинейные и квадратичные функционалы

В этом параграфе мы будем изучать билинейные функционалы $B(x, y)$ на $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ (см. § 8 гл. I). Они называются *билинейными функционалами в* E. Нас будут интересовать специфические свойства, обусловленные тем, что оба аргумента x, y принадлежат одному и тому же пространству. Одно из этих свойств — фредгольмовость.

Пусть $\Delta = \{e_k\}_1^n$ — какой-нибудь базис пространства E. *Матрицей билинейного функционала* $B(x, y)$ $(x, y \in \mathrm{E})$ в базисе Δ называется матрица этого функционала относительно пары базисов Δ, Δ, т. е. матрица коэффициентов в разложении

$$B(x, y) = \sum_{j, k=1}^{n} \beta_{jk} \xi_j \eta_k \quad \left(x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j, \ y = \sum_{k=1}^{n} \eta_k e_k\right).$$

Правая часть этого равенства определяет билинейный функционал в арифметическом пространстве C^n, который называется *билинейной формой.*

При переходе от базиса Δ к базису Δ_1 матрица билинейного функционала преобразуется по формуле

$$\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{t}' \mathfrak{b} \mathfrak{t},$$

где $\mathfrak{b}$ — матрица функционала в базисе Δ, $\mathfrak{b}_1$ — его матрица в базисе Δ_1, $\mathfrak{t}$ — матрица базиса Δ_1 относительно Δ, $\mathfrak{t}'$ — *транс-*

понированная матрица: если $\mathfrak{t}=(\tau_{jk})_{j,k=1}^{n}$, $\mathfrak{t}'=(\tau'_{jk})_{j,k=1}^{n}$, то $\tau'_{jk}=\tau_{kj}$ ($j, k=1, 2, \ldots, n$).

С билинейными функционалами в E тесно связаны так называемые квадратичные функционалы.

Функционал $Q(x)$ в E называется *квадратичным*, если существует такой билинейный функционал $B(x, y)$, что

$$Q(x)=B(x, x). \qquad (*)$$

1. Квадратичные функционалы в E образуют линейное пространство по отношению к естественным операциям сложения и умножения на число.

Это пространство мы будем обозначать $\mathfrak{G}(E)$. Исследуем определяемый формулой (*) эпиморфизм j пространства $\mathfrak{B}(E)=\mathfrak{B}(E, E)$ билинейных функционалов в пространство $\mathfrak{G}(E)$.

Билинейный функционал $B(x, y)$ называется *антисимметричным*, если

$$B(y, x)=-B(x, y).$$

2. Ядро гомоморфизма j совпадает с множеством антисимметричных функционалов.

Иначе говоря, для того чтобы билинейный функционал B был антисимметричным, необходимо и достаточно, чтобы

$$B(x, x)=0 \qquad (x\in E).$$

3. Для того чтобы билинейный функционал был антисимметричным, необходимо и достаточно, чтобы его матрица $\mathfrak{b}$ в каком-нибудь базисе была *антисимметричной*:

$$\mathfrak{b}'=-\mathfrak{b}.$$

В частности, необходимо, чтобы $\beta_{kk}=0$ ($k=1, 2, \ldots, n$).

4. Размерность подпространства $\mathfrak{B}^{-}(E)$ антисимметричных билинейных функционалов равна $n(n-1)/2$.

Иными словами $\operatorname{def} j=n(n-1)/2$.

5. Размерность пространства $\mathfrak{G}(E)$ квадратичных функционалов равна $n(n+1)/2$.

Билинейный функционал $B(x, y)$ называется *симметричным*, если

$$B(y, x)=B(x, y),$$

6. Для того чтобы билинейный функционал был симметричным, необходимо и достаточно, чтобы его матрица $\mathfrak{b}$ в каком-нибудь базисе была *симметричной*:

$$\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}.$$

7. Размерность подпространства $\mathfrak{B}^+(\mathrm{E})$ симметричных билинейных функционалов равна $n(n+1)/2$.

8. $\mathfrak{B}(\mathrm{E}) = \mathfrak{B}^+(\mathrm{E}) \dot{+} \mathfrak{B}^-(\mathrm{E})$.

Таким образом, каждый билинейный функционал допускает единственное представление в виде суммы симметричного и антисимметричного функционалов. Этот факт допускает операторную интерпретацию:

9. Оператор T в пространстве $\mathfrak{B}(\mathrm{E})$, определенный формулой $(TB)(x, y) = B(y, x)$, является инволюцией: $T^2 = I$. Подпространства $\mathfrak{B}^+(\mathrm{E})$ и $\mathfrak{B}^-(\mathrm{E})$ являются собственными подпространствами оператора T, соответствующими собственным значениям $+1$, -1 (ср. **44** гл. **II**).

Положим $j^+ = j \,|\, \mathfrak{B}^+(\mathrm{E})$.

10. Гомоморфизм j^+ является изоморфизмом пространств $\mathfrak{B}^+(\mathrm{E})$ и $\mathfrak{G}(\mathrm{E})$.

Таким образом, для каждого квадратичного функционала Q существует и единствен симметричный билинейный функционал B_Q, порождающий Q в смысле $(*)$. Он называется *полярой* функционала Q.

Существует простой способ восстановления поляры B_Q по заданному квадратичному функционалу Q.

11. $Q(x+y) = Q(x) + Q(y) + 2B_Q(x, y)$.

Это — обобщение элементарной формулы для квадрата суммы. Из **11** следует:

12. $B_Q(x, y) = \frac{1}{4}\{Q(x+y) - Q(x-y)\}$.

Матрицей квадратичного функционала Q в базисе $\Delta = \{e_k\}_1^n$ называется матрица $(\beta_{jk})_{j,k=1}^n$ поляры B_Q в базисе Δ. Эта матрица симметрична. Очевидно, имеет место разложение

$$Q(x) = \sum_{j,k=1}^{n} \beta_{jk}\xi_j\xi_k \qquad \left(x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j\right).$$

Правая часть этого равенства определяет квадратичный функционал в C^n, который называется *квадратичной формой*.

Взаимная однозначность соответствия между квадратичными функционалами и их полярами дает возможность автоматически перенести на квадратичные функционалы понятия генераторов, носителей, ядер, дефектов, ранга (см. § 8 гл. I). При этом различие между левым и правым исчезает в силу симметрии поляры. Для антисимметричного билинейного функционала это различие несущественно:

13. Левый и правый генераторы антисимметричного билинейного функционала отличаются лишь множителем -1.

Соотношения ортогональности (**221** гл. I) для симметричного или антисимметричного билинейного функционала B принимают вид:

14. $S_B = (K_B)^{\perp}$ (S_B — носитель, K_B — ядро).

Каждый билинейный функционал $B \in \mathfrak{B}(\mathrm{E})$ порождает B-ортогональность векторов в пространстве E согласно общей схеме § 10 гл. I. Поскольку теперь B-ортогональность является отношением между векторами одного и того же пространства, то левое и правое ортогональные дополнения ${}^{(\perp)}\mathrm{L}$, $\mathrm{L}^{(\perp)}$ какого-нибудь подпространства $\mathrm{L} \subset \mathrm{E}$ являются также подпространствами в E.

15. Для того чтобы какое-нибудь B-ортогональное дополнение подпространства L было его дополнением, необходимо и достаточно, чтобы ограничение функционала B на L, т. е. функционал

$$B_{(\mathrm{L})}(x, y) = B(x, y) \qquad (x, y \in \mathrm{L}),$$

было регулярным, т. е. $\operatorname{def} B_{(\mathrm{L})} = 0$.

16. Если одно из двух B-ортогональных дополнений подпространства L является его дополнением, то этим свойством обладает и второе.

Подпространство L называется *B-регулярным*, если функционал $B_{(\mathrm{L})}$ регулярен. Система векторов называется *B-регулярной*, если ее линейная оболочка B-регулярна.

17. Для того чтобы вектор e был B-регулярным, необходимо и достаточно, чтобы $B(e, e) \neq 0$.

Рассмотрим проблему приведения билинейного функционала к каноническому виду. Общий результат в этом направлении был получен в § 8 гл. I. Его можно уточнить, предполагая функционал симметричным или антисимметричным.

18. Пусть $\Gamma = \{g_k\}_1^r$ — какая-нибудь система линейных функционалов. Тогда билинейный функционал $B = \sum_{k=1}^{r} g_k \otimes g_k$ симметричен и его носитель S_B совпадает с линейной оболочкой системы Γ.

Тем самым $\operatorname{rg} B \leqslant r$, и если система Γ линейно независима, то $\operatorname{rg} B = r$.

Оказывается, это замечание можно обратить:

19. Пусть B — симметричный билинейный функционал, $\operatorname{rg} B = r > 0$. Тогда существует такой базис $\{f_k\}_1^r$ носителя S_B, что $B = \sum_{k=1}^{r} f_k \otimes f_k$.

Это — фундаментальная теорема о каноническом виде симметричного билинейного функционала. Ей можно придать следующую равносильную форму:

20. Пусть B — симметричный билинейный функционал, $\operatorname{rg} B = r > 0$. Тогда существует такая система векторов $\{e_k\}_1^r$, линейно независимая по модулю K_B, что

$$B(x, y) = \sum_{k=1}^{r} B(x, e_k) B(y, e_k).$$

Метод доказательства станет понятным, если мы заметим, что:

21. Система $\{e_k\}_1^r$ необходимо является B-биортогональной в том смысле, что

$$B(e_j, e_k) = \delta_{jk} \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, r).$$

Сле у.ощая лемма непосредственно ведет к теореме **20**:

22. Пусть вектор e_1 B-регулярен, $B(e_1, e_1) = 1$ и L — линейная оболочка системы $\{e_1\}$. Если

$$x = \xi e_1 + u, \quad y = \eta e_1 + v \qquad (u, v \in \mathrm{L}^{(\perp)})$$

то

$$B(x, y) = B(x, e_1) B(y, e_1) + B(u, v).$$

Из теоремы **19** вытекает следующая теорема о каноническом виде квадратичного функционала:

23. Пусть $Q(x)$ — квадратичный функционал, $\operatorname{rg} Q = r > 0$. Тогда существует такая линейно независимая система $\{f_k\}_1^r$ линейных функционалов, что

$$Q(x) = \sum_{k=1}^{r} [f_k(x)]^2.$$

Итак, каждый квадратичный функционал $Q \neq 0$ можно представить в виде суммы квадратов линейных функционалов, причем число слагаемых может быть сделано равным $r = \operatorname{rg} Q$. Нельзя ли обойтись меньшим числом квадратов?

24. Если квадратичный функционал $Q(x)$ представлен в виде

$$Q(x) = \sum_{k=1}^{s} [g_k(x)]^2.$$

где g_k — линейные функционалы, то $s \geqslant \operatorname{rg} Q$. Знак равенства здесь достигается тогда и только тогда, когда система $\{g_k\}_1^s$ линейно независима.

Рассмотрим теперь в аналогичном плане антисимметричные билинейные функционалы.

25. Пусть $r > 0$ — четное число, $r = 2m$, $\Gamma = \{f_k\}_1^n$ — какая-нибудь линейно независимая система линейных функционалов. Тогда билинейный функционал

$$B = \sum_{k=1}^{m} [f_{2k-1} \otimes f_{2k} - f_{2k} \otimes f_{2k-1}]$$

аитисимметричен и его носитель S_B совпадает с линейной оболочкой системы Γ.

Тем самым $\operatorname{rg} B = r$. Можно ли построить антисимметричный билинейный функционал нечетного ранга? Отрицательный ответ на этот вопрос получится попутно перед теоремой **30** о каноническом виде антисимметричного билинейного функционала.

В следующих трех леммах B означает антисимметричный билинейный функционал.

26. Для того чтобы система $\{e_1, e_2\}$ была B-регулярна, необходимо и достаточно, чтобы $B(e_1, e_2) \neq 0$.

27. B-регулярная система $\{e_1, e_2\}$ линейно независима.

28. Пусть система $\{e_1, e_2\}$ B-регулярна, $B(e_1, e_2)=1$ и L — линейная оболочка этой системы. Если

$$x=\xi_1 e_1+\xi_2 e_2+u, \quad y=\eta_1 e_1+\eta_2 e_2+v \qquad (u,\ v \in \mathrm{L}^{(\perp)}),$$

то

$$B(x,\ y)=B(x,\ e_1)\,B(y,\ e_2)-B(x,\ e_2)\,B(y,\ e_1)+B(u,\ v).$$

Теперь можно сформулировать основные теоремы об антисимметричных билинейных функционалах.

29. Ранг любого антисимметричного билинейного функционала является четным числом.

30. Пусть B — антисимметричный билинейный функционал, $\operatorname{rg} B=2m>0$. Тогда существует такая система векторов $\{e_k\}_1^r$, линейно независимая по модулю K_B, что

$$B(x,\ y)=\sum_{k=1}^{m}\left[B(x,\ e_{2k-1})\,B(y,\ e_{2k})-B(x,\ e_{2k})\,B(y,\ e_{2k-1})\right].$$

Отметим, что вследствие **29**:

31. Если размерность n основного пространства E нечетна, то все антисимметричные билинейные функционалы в E нерегулярны.

Нерегулярный билинейный функционал в E иначе называется *вырожденным*. Этот же термин применяется и к эрмитово-билинейным функционалам.

§ 2. Эрмитово-билинейные и квадратичные функционалы. Закон инерции

Этот параграф посвящен перенесению теории, развитой в § 1, на эрмитово-билинейные функционалы $H(x,\ y)$ $(x,\ y \in \mathrm{E})$. Мы намерены остановиться лишь на тех фактах, в которых как-то проявляется «эрмитовость».

Пусть $\Delta=\{e_k\}_1^n$ — какой-нибудь базис пространства E. *Матрицей эрмитово-билинейного функционала* H в базисе Δ называется матрица $(\gamma_{jk})_{j,\ k=1}^{n}$ коэффициентов разложения:

$$H(x,\ y)=\sum_{j,\ k=1}^{n}\gamma_{jk}\xi_j\bar{\eta}_k \qquad \left(x=\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j,\ \ y=\sum_{k=1}^{n}\eta_k e_k\right).$$

Правая часть этого равенства определяет *эрмитово-билинейную форму* в C^n. При переходе от базиса Δ к базису Δ_1 матрица эрмитово-билинейного функционала преобразуется по формуле

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{t}^*\mathfrak{g}\mathfrak{t},$$

где $\mathfrak{g}$ — матрица функционала в базисе Δ, $\mathfrak{g}_1$ — его матрица в базисе Δ_1, $\mathfrak{t}$ — матрица базиса Δ_1 относительно Δ, $\mathfrak{t}^*$ — *сопряженная* матрица: если $\mathfrak{t} = (\tau_{jk})_{j,\,k=1}^n$, $\mathfrak{t}^* = (\tau^*_{jk})_{j,\,k=1}^n$, то $\tau^*_{jk} = \overline{\tau}_{kj}$ $(j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

Функционал $K(x)$ $(x \in \mathrm{E})$ называется *эрмитово-квадратичным*, если существует такой эрмитово-билинейный функционал $H(x,\ y)$, что

$$K(x) = H(x,\ x) \qquad (x \in \mathrm{E}). \tag{$*$}$$

Формула $(*)$ задает эпиморфизм h пространства эрмитово-билинейных функционалов в пространство эрмитово-квадратичных функционалов. В отличие от **2** имеет место теорема:

32. Гомоморфизм h является изоморфизмом. На этом основании *матрицей эрмитово-квадратичного функционала* $K(x)$ в базисе Δ называется матрица $(\gamma_{jk})_{j,\,k=1}^n$ соответствующего эрмитово-билинейного функционала $H_K(x,\ y)$ (*поляры* функционала K). При этом

$$K(x) = \sum_{j,\,k=1}^{n} \gamma_{jk}\xi_j\overline{\xi}_k \qquad \left(x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j\right).$$

Правая часть этого равенства определяет *эрмитово-квадратичную форму* в C^n.

33. Размерность пространства эрмитово-квадратичных функционалов в E равна n^2.

Роль формулы **11** теперь играет:

34. $K(x+y) = K(x) + K(y) + H_K(y,\ x) + H_K(x,\ y)$.

Отсюда:

35. $H_K(x,\ y) = \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{3} K(x + i^m y)$.

Эрмитово-билинейный функционал $H(x,\ y)$ называется *симметричным* *), если

$$H(y,\ x) = \overline{H(x,\ y)},$$

*) Прежнее определение симметрии лишено смысла для эрмитово-билинейных функционалов, так как если такой функционал удовлетворяет соотношению $H(y,\ x) = H(x,\ y)$, то он тождественно равен нулю.

и *антисимметричным*, если

$$H(y, x) = -\overline{H(x, y)}.$$

Между симметрией и антисимметрией для эрмитово-билинейных функционалов существует тесная связь:

36. Для того чтобы эрмитово-билинейный функционал H был антисимметричным, необходимо и достаточно, чтобы функционал iH был симметричным.

Поэтому антисимметричные эрмитово-билинейные функционалы не представляют ничего существенно нового по сравнению с симметричными функционалами.

37. Для того чтобы эрмитово-билинейный функционал $H(x, y)$ был симметричным, необходимо и достаточно, чтобы соответствующий ему эрмитово-квадратичный функционал принимал только вещественные значения.

Такой эрмитово-квадратичный функционал называется *вещественным*.

38. Если K — вещественный квадратичный функционал, то

$$\Re e H_K(x, y) = \frac{1}{4}\{K(x+y) - K(x-y)\}.$$

Отметим еще матричный критерий симметрии (ср. **6**):

39. Для того чтобы эрмитово-билинейный функционал был симметричным, необходимо и достаточно, чтобы его матрица $\mathfrak{g}$ в каком-нибудь базисе была *самосопряженной*:

$$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}.$$

Вещественный эрмитово-квадратичный функционал в арифметическом пространстве называется *вещественной* эрмитово-квадратичной формой. Иначе говоря, это — функционал вида $\sum_{j, k=1}^{n} \gamma_{jk}\xi_j\overline{\xi}_k$ с эрмитово-симметричной матрицей $(\gamma_{jk})_{j, k=1}^{n}$.

Рассмотрим проблему приведения симметричного эрмитово-билинейного функционала к каноническому виду. Будем действовать тем же методом, что и в § 1.

Пусть H — эрмитово-билинейный функционал. Определим понятия *H-регулярного* подпространства и *H-регулярной* системы векторов точно так же, как и в § 1. Теоремы **15—17** при этом сохраняются.

40. Пусть вектор e_1 H-регулярен, $H(e_1, e_1)=\varepsilon$ $(\varepsilon=\pm 1)$ и L — линейная оболочка системы $\{e_1\}$. Если

$$x=\xi e_1+u, \quad y=\eta e_1+v \qquad (u, v\in \mathrm{L}^{(\perp)}),$$

то

$$H(x, y)=\varepsilon H(x, e_1)\overline{H(y, e_1)}+H(u, v).$$

41. Пусть H — симметричный эрмитово-билинейный функционал, $\mathrm{rg}\, H=r>0$. Тогда существует такая система векторов $\{e_k\}_1^r$, линейно независимая по модулю K_H, что

$$H(x, y)=\sum_{k=1}^{r}\varepsilon_k H(x, e_k)\overline{H(y, e_k)},$$

где $\varepsilon=\pm 1$ $(k=1, 2, \ldots, r)$.

Обратно (ср. **18**):

42. Пусть $\Gamma=\{g_k\}_1^r$ — какая-нибудь система линейных функционалов, $\{\alpha_k\}_1^r$ — какая-нибудь система вещественных чисел, отличных от нуля. Тогда эрмитово-билинейный функционал

$$H(x, y)=\sum_{k=1}^{r}\alpha_k g_k(x)\overline{g_k(y)}$$

симметричен и его носитель совпадает с линейной оболочкой системы Γ.

Тем самым $\mathrm{rg}\, H\leqslant r$, и если система Γ линейно независима, то $\mathrm{rg}\, H=r$.

Теорема **41** немедленно влечет теорему о каноническом виде вещественного эрмитово-квадратичного функционала.

43. Пусть $K(x)$ — вещественный эрмитово-квадратичный функционал,

$$\mathrm{rg}\, K=r>0.$$

Тогда существует такая линейно независимая система $\{f_k\}_1^r$ линейных функционалов, что

$$K(x)=\sum_{k=1}^{r}\varepsilon_k |f_k(x)|^2$$

(ср. **23**).

Аналогично **24**:

44. Если вещественный эрмитово-квадратичный функционал $K(x)$ представлен в виде

$$K(x) = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k |g_k(x)|^2, \qquad (**)$$

где g_k — линейные функционалы, α_k — отличные от нуля вещественные числа, то $s \geqslant \operatorname{rg} K$. Знак равенства здесь достигается тогда и только тогда, когда система $\{g_k\}_1^s$ линейно независима.

Таким образом, если в представлении (**) функционалы g_k линейно независимы, то число слагаемых однозначно определено функционалом K. На самом деле однозначно определено не только общее число слагаемых, но и число тех из них, где $\alpha_k > 0$ (а тем самым и число тех, где $\alpha_k < 0$). Этот замечательный факт носит название з а к о н а   и н е р ц и и. Для более полной формулировки нам понадобятся некоторые вспомогательные понятия.

Пусть $K(x)$ — вещественный эрмитово-квадратичный функционал. Подпространство L называется *K-положительным*, если

$$K(x) > 0 \qquad (x \in \mathrm{L},\ x \neq 0).$$

Максимальная размерность K-положительных подпространств называется *положительным индексом инерции* функционала K и обозначается $\operatorname{ind}_+ K$.

Аналогично определяются *K-отрицательное* подпространство и *отрицательный индекс инерции* $\operatorname{ind}_- K$.

Подпространство L называется *K-неотрицательным*, если

$$K(x) \geqslant 0 \qquad (x \in \mathrm{L}).$$

Аналогично вводится понятие *K-неположительного* подпространства.

45. Если вещественный эрмитово-квадратичный функционал $K(x)$ представлен в виде

$$K(x) = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k |g_k(x)|^2,$$

где $\{g_k\}_1^s$ — линейно независимая система линейных функционалов, то число положительных коэффициентов α_k равно $\operatorname{ind}_+ K$, а число отрицательных коэффициентов α_k равно $\operatorname{ind}_- K$.

46. $\operatorname{ind}_+ K + \operatorname{ind}_- K = \operatorname{rg} K$.

Отметим еще один результат, связанный с индексами инерции.

Подпространство L называется *K-нейтральным*, если

$$K(x) = 0 \qquad (x \in \mathrm{L}).$$

47. Максимальная размерность K-нейтральных подпространств равна

$$\min(\operatorname{ind}_+ K, \operatorname{ind}_- K) + \operatorname{def} K.$$

В заключение дадим классификацию вещественных эрмитово-квадратичных функционалов. Функционал $K(x)$ называется *положительным*, если $\operatorname{ind}_+ K = n$ (при этом $\operatorname{ind}_- K = 0$, $\operatorname{def} K = 0$, $\operatorname{rg} K = n$), *неотрицательным*, если $\operatorname{ind}_- K = 0$, *отрицательным*, если $\operatorname{ind}_- K = n$ (при этом $\operatorname{ind}_+ K = 0$, $\operatorname{def} K = 0$, $\operatorname{rg} K = n$), *неположительным*, если $\operatorname{ind}_+ K = 0$. Положительные и отрицательные функционалы называются *дефинитными*. Функционал называется *индефинитным*, если $\operatorname{ind}_+ K \neq 0$, $\operatorname{ind}_- K \neq 0$.

На основании закона инерции о типе функционала можно судить по любому представлению в виде **45**.

§ 3. Унитарное пространство

Унитарное пространство — это комплексное линейное пространство, в котором задано скалярное произведение векторов. *Скалярным произведением* называется какой-нибудь фиксированный симметричный эрмитово-билинейный функционал, которому соответствует положительный эрмитово-квадратичный функционал. Скалярное произведение векторов x, y обозначается символом (x, y). По определению скалярное произведение есть функционал со следующими свойствами:

1) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ (дистрибутивность);

2) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ (однородность);

3) $(y, x) = \overline{(x, y)}$ (симметрия);

4) $(x, x) > 0$ $(x \neq 0)$ (положительность).

Отметим, что свойство

$$(x, \alpha y) = \bar{\alpha}(x, y)$$

формально вытекает из 2), 3).

Векторы x, y в унитарном пространстве называются *взаимно ортогональными* ($x \perp y$), если

$$(x, y) = 0,$$

т. е. если они ортогональны относительно эрмитово-билинейного функционала, являющегося скалярным произведением.

Теория ортогональности в унитарном пространстве имеет простейший возможный вид, точно такой же, как теория ортогональности вектора и линейного функционала (§ 6 гл. I). Формально это следует из регулярности скалярного произведения и теорем § 10 гл. I. Прозрачное объяснение существа дела дает следующая фундаментальная теорема об общем виде линейного функционала в унитарном пространстве.

48. Каждый линейный функционал f в унитарном пространстве E допускает представление в виде

$$f(x) = (x, y),$$

где $y = y_f$ — некоторый вектор (теорема Ф. Рисса).

49. Определяемое формулой $y = y_f$ отображение $E' \to E$ есть эрмитов изоморфизм.

Это — *канонический* эрмитов изоморфизм пространств E′ и E. Он появляется только после того, как пространство E превращено в унитарное заданием скалярного произведения.

Всюду ниже на протяжении этой главы пространство E считается унитарным.

Мы будем обозначать ортогональное дополнение*) подпространства L в унитарном пространстве через $L^{\perp}$, т. е. так же, как ортогональное дополнение в смысле § 6 гл. I.

Эти два понимания термина «ортогональное дополнение» равносильны в том смысле, что:

50. Если M — подпространство в E′, $N \subset E$ — его образ при каноническом эрмитовом изоморфизме пространств E′ и E, то $M^{\perp} = N^{\perp}$, где ортогональное дополнение слева понимается в смысле ортогональности вектора и линейного функционала, а справа — в смысле ортогональности в E.

Перечислим теперь стандартные теоремы об ортогональных дополнениях.

---

*) Левое и правое ортогональные дополнения совпадают в силу симметрии скалярного произведения.

51. $\dim L^{\perp} = \operatorname{codim} L$.

52. $L \dotplus L^{\perp} = E$.

53. $(L^{\perp})^{\perp} = L$.

54. Если $L_1 \subset L_2$, то $L_1^{\perp} \supset L_2^{\perp}$.

55. $(L_1 + L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$; $(L_1 \cap L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} + L_2^{\perp}$.

В унитарном случае двойственность порождается ортогональностью без выхода из пространства (канонический эрмитов изоморфизм компенсирует переход к сопряженному пространству).

Дальнейшее изложение связано с новыми понятиями.

Система подпространств $\{L_k\}_1^m$ называется *ортогональной*, если

$$L_j \perp L_k \qquad (j \neq k).$$

Например, система $\{L, L^{\perp}\}$ ортогональна.

56. Если система подпространств $\{L_k\}_1^m$ ортогональна, то сумма $\sum_{k=1}^{m} L_k$ — прямая.

Сумма ортогональной системы подпространств называется *ортогональной суммой* и обозначается через

$$L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_m \quad \text{или, короче,} \quad \bigoplus_{k=1}^{m} L_k.$$

57. Пусть $L = \bigoplus_{k=1}^{m} L_k$ и, в соответствии с этим, векторы $x, y \in L$ разложены:

$$x = \sum_{k=1}^{m} x_k, \quad y = \sum_{k=1}^{m} y_k \qquad (x_k, y_k \in L_k).$$

Тогда

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{m} (x_k, y_k).$$

В частности,

$$(x, x) = \sum_{k=1}^{m} (x_k, x_k) \qquad \left(x \in \sum_{k=1}^{m} L_k\right).$$

Это — так называемое **равенство Парсеваля**. **Оно является характеристическим свойством ортогональных систем:**

58. Если система подпространств $\{L_k\}_1^m$ обладает тем свойством, что для каждого вектора x вида $x = \sum_{k=1}^{m} x_k \quad (x_k \in L_k)$ имеет место равенство Парсеваля, то эта система ортогональная.

Пусть L — любое подпространство. В соответствии с разложением $L \oplus L^{\perp} = E$ каждый вектор x допускает единственное представление в виде

$$x = u + v \qquad (u \in L, \ v \in L^{\perp}).$$

Слагаемое u в этом представлении называется *ортогональной проекцией* вектора x на подпространство L. Очевидно, $x = Pu$, где P — проектор (см. **218** гл. II), соответствующий паре подпространств $\{L, L^{\perp}\}$. Так как второе подпространство этой пары однозначно определяется первым, то P зависит только от L:

$$P = P(L).$$

Проектор $P(L)$ называется *ортопроектором* (проектирующим на подпространство L).

59. Для того чтобы проектор P был ортопроектором, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{Ker} P = (\operatorname{Im} P)^{\perp}$.

Исследуем соответствие $P = P(L)$. Положим $P^{\perp} = P(L^{\perp})$.

60. $P^{\perp} = \overline{P(L)}$.

61. Если $L \perp M$, то $P(L)P(M) = 0$. Обратно, если $P(L)P(M) = 0$, то $L \perp M$.

Следовательно:

62. Если $P(L)P(M) = 0$, то $P(M)P(L) = 0$.

Теорема **61** говорит о том, что взаимно ортогональным подпространствам соответствуют взаимно ортогональные ортопроекторы, и обратно.

63. Если $\{L_k\}_1^m$ — ортогональная система подпространств, то

$$P\left(\bigoplus_{k=1}^{m} L_k\right) = \sum_{k=1}^{m} P(L_k)$$

(см. **221** гл. II).

Обратно:

64. Если $P\left(\sum_{k=1}^{m} \mathrm{L}_k\right)=\sum_{k=1}^{m} P(\mathrm{L}_k)$, то система подпространств $\{\mathrm{L}_k\}_1^m$ ортогональна (см. **239** гл. II).

65. Для того чтобы ортогональная система подпространств $\{\mathrm{L}_k\}_1^m$ была базисной, необходимо и достаточно, чтобы $\sum_{k=1}^{m} P(\mathrm{L}_k)=I$, т. е. чтобы соответствующие ортопроекторы образовывали разложение единицы.

Разложение единицы, составленное из ортопроекторов, называется *ортогональным*.

66. Формулами $P_k=P(\mathrm{L}_k)$ $(k=1, 2, \ldots, m)$ устанавливается взаимно однозначное соответствие между базисными ортогональными системами подпространств $\{\mathrm{L}_k\}_1^m$ и ортогональными разложениями единицы $\{P_k\}_1^m$.

Пусть $\{\mathrm{L}_k\}_1^m$ — какая-нибудь ортогональная система подпространств. *Формальным разложением* по этой системе называется отображение p пространства E в декартову сумму пространств $\mathrm{L}_1 \dotplus \mathrm{L}_2 \dotplus \ldots \dotplus \mathrm{L}_m$, определенное формулами

$$px=\{x_k\}_1^m, \quad x_k=P(\mathrm{L}_k)\,x \qquad (k=1, 2, \ldots, m).$$

Одновременно px называется *формальным разложением вектора* $x \in \mathrm{E}$.

67. Формальное разложение является гомоморфизмом, более того — эпиморфизмом. Поэтому существует и является мономорфизмом гомоморфизм j, правый обратный к p (ср. **56**).

68. Гомоморфизм j имеет вид

$$j\{x_k\}_1^m=\sum_{k=1}^{m} x_k. \tag{*}$$

69. $pj=I_{\mathrm{L}_1 \dotplus \mathrm{L}_2 \dotplus \ldots \dotplus \mathrm{L}_m}, \quad jp=P\left(\bigoplus_{k=1}^{m} \mathrm{L}_k\right).$

Следовательно:

70. Если $x \in \bigoplus_{k=1}^{m} \mathrm{L}_k$, то $x=\sum_{k=1}^{m} P(\mathrm{L}_k)\,x$, и обратно.

71. $\operatorname{Ker} p = \left(\bigoplus_{k=1}^{m} \mathrm{L}_k\right)^{\perp}$.

Таким образом:

72. $\operatorname{Im} j \oplus \operatorname{Ker} p = \mathrm{E}$.

73. Для того чтобы формальное разложение по системе $\{\mathrm{L}_k\}_1^m$ было мономорфизмом (и тем самым — изоморфизмом), необходимо и достаточно, чтобы система была базисной.

Это предложение можно рассматривать как критерий базисности в терминах формального разложения.

Если система $\{\mathrm{L}_k\}_1^m$ — базисная, то гомоморфизм j, правый обратный к формальному разложению p, превращается в обратный, $j = p^{-1}$; формула (*) дает разложение вектора по данной системе подпространств:

$$x = \sum_{k=1}^{m} P(\mathrm{L}_k)\, x.$$

Важный аспект формального разложения открывается в связи с равенством Парсеваля.

74. Если $px = \{x_k\}_1^m$ — формальное разложение вектора x, то

$$(x, x) - \sum_{k=1}^{m} (x_k, x_k) = (r, r),$$

где $r = x - jpx = x - \sum_{k=1}^{m} x_k$.

75. Имеет место н е р а в е н с т в о Б е с с е л я

$$\sum_{k=1}^{m} (x_k, x_k) \leqslant (x, x).$$

Это неравенство превращается в равенство *) тогда и только тогда, когда $x \in \bigoplus_{k=1}^{m} \mathrm{L}_k$.

76. Для того чтобы ортогональная система подпространств была базисной, необходимо и достаточно, чтобы равенство Парсеваля имело место для всех $x \in \mathrm{E}$.

*) А именно, в равенство Парсеваля.

Рассмотрим теперь параллельную теорию для систем векторов. Она может быть редуцирована к предыдущей, но может быть развита и независимо.

Система векторов $\{e_k\}_1^m$ называется *ортогональной*, если

$$e_j \perp e_k \qquad (j \neq k),$$

и *ортонормированной*, если, сверх того,

$$(e_k, e_k) = 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Таким образом, для ортонормированной системы

$$(e_j, e_k) = \delta_{jk}.$$

Очевидно, любая подсистема ортогональной (ортонормированной) системы сама является ортогональной (ортонормированной).

77. Если ортогональная система векторов не содержит нуля, то она линейно независима.

В частности, ортонормированная система всегда линейно независима. Всюду ниже предполагается, что рассматриваемая ортогональная система $\{e_k\}_1^m$ не содержит нуля.

78. Пусть $\{e_k\}_1^m$ — ортогональная система векторов. Если $x = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k e_k$, то

$$c_k = \frac{(x, e_k)}{(e_k, e_k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

(ф о р м у л ы Э й л е р а — Ф у р ь е).

Формулы Эйлера — Фурье принимают особенно простой вид в случае ортонормированной системы:

$$c_k = (x, e_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Правые части формул Эйлера — Фурье имеют смысл при всех $x \in E$. В соответствии с этим *коэффициентами Фурье* произвольного вектора x относительно ортогональной системы $\{e_k\}_1^m$ называются величины

$$c_k(x) = \frac{(x, e_k)}{(e_k, e_k)}.$$

79. Оператор P, действующий по формуле

$$Px = \sum_{k=1}^{m} c_k(x) e_k \qquad (x \in \mathrm{E}),$$

совпадает с ортопроектором на линейную оболочку системы $\{e_k\}_1^m$.

80. Имеет место *неравенство Бесселя*

$$\sum_{k=1}^{m} |c_k(x)|^2 (e_k, e_k) \leqslant (x, x).$$

Это неравенство превращается в *равенство Парсеваля*

$$\sum_{k=1}^{m} |c_k(x)|^2 (e_k, e_k) = (x, x)$$

тогда и только тогда, когда x принадлежит линейной оболочке системы $\{e_k\}_1^m$.

Для ортонормированной системы неравенство Бесселя имеет более простой вид:

$$\sum_{k=1}^{m} |c_k(x)|^2 \leqslant (x, x).$$

Соответственно выглядит равенство Парсеваля

$$\sum_{k=1}^{m} |c_k(x)|^2 = (x, x).$$

81. Для того чтобы ортогональная система векторов $\{e_k\}_1^m$ была базисом, необходимо и достаточно, чтобы равенство Парсеваля выполнялось для всех $x \in \mathrm{E}$.

Равенство Парсеваля играет роль не только критерия полноты, но и критерия ортогональности:

82. Для системы векторов $\Gamma = \{u_k\}_1^m$, не содержащей нуля, равенство Парсеваля

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{(x, u_k)}{(u_k, u_k)} = (x, x)$$

выполняется при всех $x \in \mathrm{L}(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда система ортогональна.

Заметим, что в силу **77** ортогональная система является базисом тогда и только тогда, когда она полна. Полная ортогональная (ортонормированная) система называется *ортогональным* (*ортонормированным*) *базисом*. Ортонормированный базис — это базис, совпадающий со своим сопряженным с точностью до канонического эрмитова изоморфизма.

83. Для того чтобы ортогональная система векторов $\{e_k\}_1^m$ была полной, необходимо и достаточно, чтобы единственным вектором, ортогональным ко всем векторам системы, был нуль (см. **173** гл. I).

Иначе говоря, критерием полноты является равенство нулю любого вектора, у которого все коэффициенты Фурье относительно данной системы равны нулю.

Теорема **82** в сочетании с теоремой о каноническом виде вещественного эрмитово-квадратичного функционала приводит к фундаментальному результату:

84. В унитарном пространстве E всегда существует ортонормированный базис.

Можно даже строить ортонормированные базисы, удовлетворяющие специальным дополнительным условиям. Например:

85. Пусть $\{\mathrm{L}_k\}_1^m$ — какая-нибудь базисная ортогональная система подпространств, $\dim \mathrm{L}_k = n_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Существует такой ортонормированный базис $\{e_k\}_1^n$, что подсистемы

$$\{e_k\}_1^{n_1}, \quad \{e_k\}_{n_1+1}^{n_1+n_2}, \quad \ldots, \quad \{e_k\}_{n_1+\ldots+n_{m-1}+1}^{n}$$

являются базисами подпространств $\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, \ldots, \mathrm{L}_m$ соответственно.

86. Любую ортогональную (ортонормированную) систему $\{e_k\}_1^m$ можно дополнить до ортогонального (ортонормированного) базиса $\{e_k\}_1^n$.

87. Пусть $\{\mathrm{L}_k\}_0^n$ — какая-нибудь максимальная цепь подпространств. Существует ортонормированный базис $\{e_k\}_1^n$, обладающий тем свойством, что подсистема $\{e_k\}_1^m$ является базисом в L_m $(m = 1, 2, \ldots, n)$ (ср. **51** гл. I).

Иначе говоря:

88. Для любого базиса $\{u_k\}_1^n$ существует такой ортонормированный базис $\{e_k\}_1^n$, что при всех $m=1, 2, \ldots, n$ совпадают линейные оболочки подсистем $\{u_k\}_1^m$, $\{e_k\}_1^m$.

Совпадение линейных оболочек подсистем $\{u_k\}_1^m$, $\{e_k\}_1^m$ $(m=1, 2, \ldots, n)$ означает, что переход от одного базиса к другому осуществляется треугольными матрицами:

$$e_k=\sum_{j=1}^{k}\alpha_{jk}u_j, \qquad u_k=\sum_{j=1}^{k}\beta_{jk}e_j \qquad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Существует простой рекуррентный процесс для эффективного построения ортонормированного базиса $\{e_k\}_1^n$, «треугольно эквивалентного» данному базису $\{u_k\}_1^n$. Это — процесс ортогонализации Сонина — Шмидта:

89. Пусть $\{u_k\}_1^{m+1}$ — произвольная линейно независимая система, $\{e_k\}_1^m$ — ортонормированная система, линейная оболочка которой совпадает с линейной оболочкой системы $\{u_k\}_1^m$. Положим

$$e'_{m+1}=e_{m+1}-\sum_{k=1}^{m}(u_{m+1}, e_k)e_k \qquad \left(\text{при } m=0\colon\ e'_1=u_1\right).$$

Тогда $e'_{m+1}\neq 0$. Положим, далее,

$$e_{m+1}=\frac{e'_{m+1}}{\sqrt{\left(e'_{m+1}, e'_{m+1}\right)}}.$$

Тогда $\{e_k\}_1^{m+1}$ — ортонормированная система, линейная оболочка которой совпадает с линейной оболочкой системы $\{u_k\}_1^{m+1}$.

Процесс ортогонализации вновь приводит к теореме **86.** Отметим еще, что:

90. В ортонормированном базисе $\{e_k\}_1^n$ скалярное произведение имеет канонический вид:

$$(x, y)=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\overline{\eta}_k \qquad \left(x=\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k,\ y=\sum_{k=1}^{n}\eta_k e_k\right).$$

Таким образом, матрица скалярного произведения в ортонормированном базисе единичная. Это — характеристическое свойство ортонормированного базиса:

91. Если в некотором базисе скалярное произведение имеет канонический вид, то базис ортонормированный.

Аналогично ортогональный базис характеризуется тем, что матрица скалярного произведения в этом базисе диагональная. В общем случае матрица скалярного произведения в базисе $\{v_k\}_1^n$ имеет вид

$$\gamma_{jk} = (v_j, v_k) \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Для любой системы векторов $\{w_k\}_1^m$ матрица с элементами

$$\gamma_{jk} = (w_j, w_k) \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, n)$$

называется *матрицей Грама* этой системы векторов. Матрица Грама любой системы векторов эрмитово-симметрична.

Используя матрицу Грама, распространим неравенство Бесселя и критерий полноты (равенство Парсеваля) на произвольные линейно независимые системы. Предварительно отметим следующее предложение.

92. Для того чтобы система векторов была линейно независимой, необходимо и достаточно, чтобы ее матрица Грама была неособенной.

93. Пусть $(\gamma_{jk})_{j,k=1}^m$ — матрица Грама линейно независимой системы $\Gamma = \{w_k\}_1^m$, $(\gamma_{jk}^{(-1)})_{j,k=1}^m$ — обратная матрица. Тогда

$$\sum_{j,k=1}^m \gamma_{jk}^{(-1)} (x, w_j) \overline{(x, w_k)} \leqslant (x, x)$$

для всех $x \in \mathrm{E}$. Знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $x \in \mathrm{L}(\Gamma)$.

94. Для того чтобы линейно независимая система $\{w_k\}_1^m$ была полной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{j,k=1}^m \gamma_{jk}^{(-1)} (x, w_j) \overline{(x, w_k)} = (x, x)$$

для всех $x \in \mathrm{E}$.

В унитарном пространстве естественно вводится понятие биортогональных систем векторов. Системы

$$\Gamma = \{w_k\}_1^m, \quad \Gamma^* = \{w_k^*\}_1^m$$

называются *биортогональными*, если

$$(w_j, w_k^*) = \delta_{jk} \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, m).$$

Например, ортонормированная система — это система, биортогональная самой себе. Общая теория биортогональных систем векторов получается из теории, развитой в § 6 гл. I (см. **187—192**), применением канонического эрмитова изоморфизма и поэтому не нуждается в самостоятельном построении. Отметим лишь следующее обобщение формул Эйлера — Фурье.

95. Если $x = \sum_{k=1}^{m} \xi_k w_k$, то

$$\xi_k = (x, w_k^*)$$

(ср. **168** гл. I).

Отсюда:

96. $(x, x) = \sum_{k=1}^{m} (x, w_k^*)\overline{(x, w_k)} \qquad (x \in \mathrm{L}(\Gamma)).$

Это есть равенство Парсеваля для биортогональных систем. Неравенство Бесселя не переносится на биортогональные системы, однако равенство Парсеваля продолжает служить критерием полноты.

97. Для того чтобы система $\{w_k\}_1^m$ была полной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{m} (x, w_k^*)\overline{(x, w_k)} = (x, x)$$

при всех $x \in \mathrm{E}$.

В заключение выясним роль матрицы Грама в теории биортогональных систем.

98. Ортогональная проекция вектора w_j на $\mathrm{L}(\Gamma^*)$ равна $\sum_{k=1}^{m} \gamma_{jk}^{(-1)} w_k^*$, где $(\gamma_{jk})_{j,k=1}^{m}$ — матрица Грама системы Γ.

В частности:

99. Разложение какого-нибудь базиса $\Delta = \{e_j\}_1^n$ по биортогональному базису $\Delta^* = \{e_k^*\}_1^n$ имеет вид

$$e_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{jk}^{(-1)} e_k^*,$$

где $(\gamma_{jk})_{j,\,k=1}^n$ — матрица Грама базиса Δ.

Отсюда:

100. Матрицы Грама биортогональных базисов Δ, Δ^* взаимно обратны.

Поэтому можно разложению 99 придать вид

$$e_k^* = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{kj} e_j.$$

§ 4. Сопряженный оператор. Ортогонально приводящие подпространства

Пусть A — произвольный линейный оператор в унитарном пространстве E. Рассмотрим эрмитово-сопряженный оператор A^*, действующий в эрмитово-сопряженном пространстве E^*. Он определяется равенством

$$(A^*g)(x) = g(Ax) \qquad (x \in \mathrm{E},\ g \in \mathrm{E}^*).$$

Переведем g из E^* в E' с помощью канонического комплексного сопряжения и затем из E' в E с помощью канонического эрмитова изоморфизма. Полученное таким образом отображение $\mathrm{E}^* \to \mathrm{E}$ обозначим через T.

101. Отображение T является изоморфизмом.

Это — *канонический изоморфизм* пространств E^* и E. Его легко описать непосредственно:

102. Имеет место тождество

$$g(x) = (x, Tg) \qquad (x \in \mathrm{E},\ g \in \mathrm{E}^*).$$

Обратно:

103. Если для данного эрмитово-линейного функционала имеет место тождество

$$g(x) = (x, y) \qquad (x \in \mathrm{E})$$

с некоторым вектором y, то $y = Tg$.

Соответственно:

104. $(Ax, y) = (x, TA^*T^{-1}y) \qquad (x, y \in \mathrm{E})$.

Оператор TA^*T^{-1}, подобный оператору A^*, действует уже в пространстве E. Его следовало бы назвать внутренним эрмитово-сопряженным к оператору A, но по традиции мы будем кратко называть его *сопряженным* к A и обозначать по-прежнему A^*.

Тождество **104** теперь принимает вид

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \qquad (x, y \in \mathrm{E})$$

и может служить внутренним (без выхода из E) определением нового сопряженного оператора A^*:

105. Если операторы A и B в пространстве E таковы, что

$$(Ax, y) = (x, By) \qquad (x, y \in \mathrm{E}),$$

то $B = A^*$.

Функционал

$$H(x, y; A) = (Ax, y) \qquad (x, y \in \mathrm{E}) \qquad (*)$$

эрмитово-билинеен.

106. Определяемое формулой $(*)$ отображение пространства операторов в пространство эрмитово-билинейных функционалов является изоморфизмом.

Это утверждение можно дополнить:

107. В любом ортонормированном базисе $\{e_k\}_1^n$ матрица функционала $H(x, y; A)$ совпадает с транспонированной матрицей оператора A.

Это означает, что матрица оператора A имеет вид

$$\alpha_{jk} = (Ae_k, e_j).$$

108. Если α — матрица оператора A в ортонормированном базисе, то матрица оператора A^* в этом же базисе равна α^*.

Воспроизведем основные свойства сопряжения.

109. $A^{**} = A$ (теперь уже буквально, а не с точностью до канонического изоморфизма).

110. $(A + B)^* = A^* + B^*$.

111. $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$.

112. $(AB)^* = B^*A^*$.

113. Если оператор A регулярен, то и оператор A^* регулярен, причем $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

В дополнение к этому:

114. Если $A \cup B$, то $A^* \cup B^*$.

Теория Фредгольма в унитарном пространстве принимает более простой вид благодаря тому, что сопряженный оператор действует теперь в основном пространстве. Поэтому вторая и третья теоремы Фредгольма теперь формулируются без выхода из пространства E. Мы не будем воспроизводить формулировки на языке уравнений, а отметим лишь основные соотношения.

115. $\operatorname{Im} A^* = (\operatorname{Ker} A)^{\perp}$, $\operatorname{Ker} A^* = (\operatorname{Im} A)^{\perp}$.

116. $\operatorname{rg} A^* = \operatorname{rg} A$, $\operatorname{def} A^* = \operatorname{def} A$.

С помощью теории Фредгольма можно вновь вывести, что

$$\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$$

(см. **119** гл. II), а также установить следующие предложения:

117. Если A — оператор скалярного типа и $\{e_k\}_1^n$ — его собственный базис, то биортогональная система $\{e_k^*\}_1^n$ является собственным базисом оператора A^*, причем собственные значения, которым соответствуют векторы e_k и e_k^*, сопряжены.

118. Корневые подпространства A и A^*, соответствующие несопряженным точкам спектра λ, μ $(\lambda \neq \overline{\mu})$, взаимно ортогональны.

Таким образом, $[\mathrm{W}_k(A)]^{\perp} = \sum_{j \neq k}^{\bullet} \mathrm{W}_j(A^*)$ при согласованной нумерации спектров.

Рассмотрим связь между инвариантными подпространствами операторов A и A^*.

119. Если подпространство L инвариантно относительно оператора A, то подпространство $\mathrm{L}^{\perp}$ инвариантно относительно оператора A^*. При этом $(A \mid \mathrm{L})^* = P(\mathrm{L}) A^* \mid \mathrm{L}$, где $P(\mathrm{L})$ — ортопроектор, проектирующий на L.

Говорят, что подпространство L *ортогонально приводит* оператор A, если оно само и его ортогональное дополнение $\mathrm{L}^{\perp}$ инвариантны относительно A.

120. Для того чтобы подпространство L ортогонально приводило оператор A, необходимо и достаточно, чтобы оно было инвариантно относительно обоих операторов A и A^*. При этом $(A \mid \mathrm{L})^* = A^* \mid \mathrm{L}$.

Введем понятие ортогональной суммы операторов. Пусть пространство E разложено в ортогональную сумму

$$\mathrm{E} = \bigoplus_{k=1}^{m} \mathrm{L}_k$$

ненулевых инвариантных подпространств оператора A. Тогда оператор A называется *ортогональной суммой* соответствующих частей:

$$A \underset{\mathrm{def}}{=} \bigoplus_{k=1}^{m} A_k.$$

Очевидно при этом, что каждое подпространство L_k ортогонально приводит оператор A.

Оператор A называется *ортогонально неприводимым*, если его нельзя нетривиально разложить в ортогональную сумму (т. е. если у него не существует нетривиального ортогонально приводящего подпространства).

121. Если $A = \bigoplus_{k=1}^{m} A_k$, то $A^* = \bigoplus_{k=1}^{m} A_k^*$.

Множество ортогонально приводящих подпространств оператора A обладает определенной алгебраической структурой, чего нельзя сказать о приводящих подпространствах вообще:

122. Сумма и пересечение любого множества ортогонально приводящих подпространств есть ортогонально приводящее подпространство (ср. **51** гл. II).

§ 5. Спектральная теория самосопряженных операторов. Алгебра ортопроекторов

Оператор S в унитарном пространстве E называется *самосопряженным*, если

$$S^* = S,$$

т. е.

$$(Sx, y) = (x, Sy) \qquad (x, y \in \mathrm{E}).$$

Класс самосопряженных операторов в E обозначим через $\mathfrak{S}(\mathrm{E})$.

123. Для того чтобы $A \in \mathfrak{S}(\mathrm{E})$, необходимо и достаточно, чтобы эрмитово-билинейный функционал $H(x, y; A)$ был симметричным.

124. Для того чтобы оператор был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы его матрица в каком-нибудь ортонормированном базисе была самосопряженной.

Приведем примеры самосопряженных операторов.

125. Любой ортопроектор является самосопряженным оператором.

Между прочим, наоборот:

126. Каждый самосопряженный проектор является ортопроектором.

127. Для любого оператора A операторы A^*A и AA^* являются самосопряженными.

128. Для любого оператора A операторы

$$S = \frac{A + A^*}{2}, \qquad T = \frac{A - A^*}{2i}$$

являются самосопряженными.

Они называются соответственно *вещественной* и *мнимой* частью оператора A. Очевидно,

$$A = S + iT. \tag{*}$$

Обратно:

129. Если $A = S_1 + iT_1$, где $S_1, T_1 \in \mathfrak{S}(\mathrm{E})$, то $S_1 = S$, $T_1 = T$.

Формула (*) называется *декартовым представлением* оператора A. Это — операторный аналог обычного представления комплексных чисел.

130. Если L — инвариантное подпространство самосопряженного оператора S, то сужение $S|\mathrm{L}$ является самосопряженным оператором в L.

131. Если $S_1, S_2 \in \mathfrak{S}(\mathrm{E})$, то $S_1 + S_2 \in \mathfrak{S}(\mathrm{E})$. Если α — вещественное число, то $\alpha S \in \mathfrak{S}(\mathrm{E})$ при $S \in \mathfrak{S}(\mathrm{E})$.

Это означает, что $\mathfrak{S}(\mathrm{E})$ — вещественное линейное пространство (см. гл. VI).

Заметим, что если $S \in \mathfrak{S}(\mathrm{E})$ и $S \neq 0$, то $\alpha S \in \mathfrak{S}(\mathrm{E})$ только при вещественных α.

Отсюда и из **130** вытекает замечательное свойство спектра самосопряженного оператора:

132. Спектр самосопряженного оператора лежит на вещественной оси.

Кроме того:

133. Система собственных подпространств самосопряженного оператора ортогональна.

Является ли она базисной? Это — центральный вопрос теории самосопряженных операторов. Для его решения может быть использована лемма:

134. Для самосопряженного оператора каждое инвариантное подпространство является ортогонально приводящим.

Теперь уже легко устанавливается, что:

135. Система собственных подпространств самосопряженного оператора базисная.

Таким образом, если $S \in \mathfrak{S}(\mathrm{E})$, то S — оператор скалярного типа. Более того, в силу **84**:

136. Для любого самосопряженного оператора существует ортонормированный собственный базис.

Перейдем на язык разложений единицы:

137. Разложение единицы самосопряженного оператора ортогонально.

Таким образом, установлена спектральная теорема теории самосопряженных операторов:

138. Спектральное разложение самосопряженного оператора имеет вид

$$S = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k P_k,$$

где $\{P_k\}_1^m$ — ортогональное разложение единицы, $\{\lambda_k\}_1^m$ — вещественные числа (см. **227** гл. II).

Такое представление в существенном единственно:

139. Если самосопряженный оператор представлен в виде

$$S = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k P_k,$$

где $\lambda_j \neq \lambda_k$ $(j \neq k)$, P_k — проекторы и $\sum\limits_{k=1}^{m} P_k = I$, то $\{P_k\}_1^m$ — разложение единицы оператора S, $\{\lambda_k\}_1^m$ — его спектр.

Очевидно, каждый оператор вида $S = \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k P_k$, где $\{P_k\}_1^m$ — ортогональное разложение единицы, $\{\lambda_k\}_1^m$ — вещественные числа, является самосопряженным. В частности, если у оператора существует ортонормированный собственный базис и спектр вещественный, то оператор самосопряженный. Таким образом, самосопряженные операторы — это все те и только те, которые имеют вещественный спектр и ортонормированный собственный базис. Выясним, какой класс операторов получится, если оставить только требования вещественности спектра и скалярного типа.

140. Для того чтобы оператор скалярного типа имел вещественный спектр, необходимо и достаточно, чтобы он был подобен самосопряженному оператору.

Оператор, подобный самосопряженному, называется *симметризуемым*.

Теперь мы можем существенно дополнить теорему о каноническом виде симметричного эрмитово-билинейного функционала.

141. В унитарном пространстве для любого симметричного эрмитово-билинейного функционала $H(x, y)$ существует такой ортонормированный базис $\{e_k\}_1^n$, что

$$H(x, y)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\xi_k\bar{\eta}_k \qquad \left(x=\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k,\ y=\sum_{k=1}^{n}\eta_k e_k\right).$$

Тем самым:

142. В унитарном пространстве для любого вещественного эрмитово-квадратичного функционала $K(x)$ существует такой ортонормированный базис $\{e_k\}_1^n$, что

$$K(x)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k|\xi_k|^2 \qquad \left(x=\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\right).$$

Этот базис называется *системой главных осей* функционала.

Отметим, что:

143. В канонических представлениях **141**, **142** система коэффициентов $\{\lambda_k\}_1^n$ определена однозначно с точностью до перестановки (ср. **45**).

Теорема **142** допускает следующую важную интерпретацию.

144. Если $K(x)$, $K_0(x)$ — вещественные эрмитово-квадратичные функционалы в линейном пространстве и функционал $K_0(x)$ положителен, то существует такой базис $\{e_k\}_1^n$, что

$$K(x)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k|\xi_k|^2,\qquad K_0(x)=\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\qquad \left(x=\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\right).$$

Это — теорема об одновременном приведении пары функционалов к каноническому виду.

Возвращаясь к самосопряженным операторам, рассмотрим элементарные свойства резольвенты.

145. $[R_\lambda(S)]^*=R_{\bar\lambda}(S)$.

В частности:

146. Если λ вещественное, то $R_\lambda(S)$ — самосопряженный оператор.

Более глубокое свойство обнаруживается при рассмотрении скалярной функции вида $(R_\lambda x,\ x)$, где x — произвольный фиксированный вектор, отличный от нуля.

147. Функция $(R_\lambda x,\ x)$ вещественна на вещественной оси, а в верхней полуплоскости удовлетворяет неравенству

$$\mathfrak{Im}\,(R_\lambda x,\ x)>0$$

(см. **129** гл. II).

Функция $\varphi(\lambda)$, голоморфная в верхней полуплоскости $\mathfrak{Im}\,\lambda>0$ и удовлетворяющая там неравенству $\mathfrak{Im}\,\varphi(\lambda)\geqslant 0$, называется *$\mathcal{N}$-функцией* (или *неванлинновской функцией*).

Нетрудно доказать, что общий вид рациональной $\mathcal{N}$-функции $\varphi(\lambda)$, обращающейся в нуль на бесконечности, таков:

$$\varphi(\lambda)=\sum_{k=1}^{m}\frac{c_k}{\lambda_k-\lambda},$$

где полюсы λ_k вещественные, а вычеты c_k положительны. Отсюда можно вновь вывести спектральную теорему теории самосопряженных операторов.

Операторное исчисление (§ 5 гл. I) в случае самосопряженного оператора S может быть существенно расширено. Именно, класс Φ_S функций, голоморфных в окрестности спектра, может быть теперь заменен классом всех функций, определенных на спектре *). При этом мы полагаем, исходя из спектрального разложения,

$$\varphi(S) \underset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{m} \varphi(\lambda_k) P_k.$$

148. $[\varphi(S)]^* = \bar{\varphi}(S)$.

Поэтому:

149. Оператор $\varphi(S)$ является самосопряженным тогда и только тогда, когда функция $\varphi(\lambda)$ вещественна на спектре $\sigma(S)$.

Теория операторных уравнений

$$\psi(X) = A$$

в классе самосопряженных операторов упрощается.

150. Пусть S — самосопряженный оператор, ψ — какая-нибудь функция, определенная на некотором множестве M точек комплексной плоскости. Для того чтобы уравнение

$$\psi(X) = S$$

имело самосопряженное решение X, необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$\psi(\mu) = \lambda$$

имело вещественное решение μ_λ при каждом $\lambda \in \sigma(S)$. Для единственности решения X необходима единственность решения μ_λ при каждом $\lambda \in \sigma(S)$.

В частности:

151. Пусть p — натуральное число. Уравнение

$$X^p = S,$$

где S — самосопряженный оператор, при нечетном p всегда имеет единственное самосопряженное решение X, а при четном p имеет самосопряженное решение тогда и только тогда, когда спектр оператора S неотрицателен, и это решение единственно в классе операторов с неотрицательным спектром.

Если спектр самосопряженного оператора неотрицателен (положителен), то сам оператор называется *неотрицательным*

---

*) Впрочем, это относится не только к самосопряженным операторам, но и вообще ко всем операторам скалярного типа.

(*положительным*). В силу **151** уравнение $X^p = S$ с неотрицательным оператором S имеет единственное неотрицательное решение при любом p. Это решение совпадает с арифметическим корнем $S^{1/p}$.

152. Уравнение

$$e^X = S$$

с положительным оператором S имеет единственное самосопряженное решение.

Это решение совпадает с главным значением $\ln S$.

Отметим, что:

153. Любой ортопроектор P является неотрицательным оператором. Положительным он будет только в случае $P = I$.

154. Для того чтобы самосопряженный оператор S был неотрицательным, необходимо и достаточно, чтобы

$$(Sx,\ x) \geqslant 0 \qquad (x \in \mathrm{E}).$$

Для положительности оператора S необходимо и достаточно, чтобы

$$(Sx,\ x) > 0 \qquad (x \in \mathrm{E},\ x \neq 0).$$

Таким образом, положительность (неотрицательность) самосопряженного оператора равносильна положительности (неотрицательности) соответствующего эрмитово-квадратичного функционала.

155. Для любого оператора A операторы A^*A и AA^* неотрицательны. Для положительности любого из них необходима и достаточна регулярность оператора A.

156. $\operatorname{Ker} A^*A = \operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Ker} AA^* = \operatorname{Ker} A^*$.

157. $\operatorname{Im} A^*A = \operatorname{Im} A^*$, $\operatorname{Im} AA^* = \operatorname{Im} A$.

Таким образом

$$\operatorname{rg} A^*A = \operatorname{rg} A^* = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} AA^*.$$

Отметим обращение теоремы **155**.

158. Если S — неотрицательный оператор, то существует такой оператор A, что $S = A^*A$.

Следующие две теоремы связаны с матрицей Грама.

159. Если $\{u_k\}_1^n$ — базис, то его матрица Грама $(\gamma_{jk})_{j,\,k=1}^n$ определяет в любом ортонормированном базисе $\{e_k\}_1^n$ положительный оператор.

Обратно:

160. Если некоторая матрица в каком-нибудь ортонормированном базисе определяет положительный оператор, то она является матрицей Грама некоторого базиса.

В заключение остановимся на алгебре ортопроекторов (ср. § 8 гл. II).

161. Если сумма нескольких ортопроекторов является проектором, то она является ортопроектором.

162. Для того чтобы сумма $P = \sum_{k=1}^{m} P_k$ ортопроекторов P_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ была ортопроектором, необходимо и достаточно, чтобы система $\{P_k\}_1^m$ была ортогональной.

163. Если разность ортопроекторов является проектором, то она является ортопроектором.

В частности, проектор $\overline{P}$, дополнительный к ортопроектору P, является ортопроектором.

164. Для того чтобы разность $P = P_1 - P_2$ двух ортопроекторов P_1 и P_2 была ортопроектором, необходимо и достаточно, чтобы $\overline{P}_1$ и P_2 были ортогональны.

Теперь заметим, что вообще:

165. Если $S, T \in \mathfrak{S}(\mathrm{E})$, то $ST \in \mathfrak{S}(\mathrm{E})$ тогда и только тогда, когда $S \smile T$.

Поэтому:

166. Если P, Q — ортопроекторы, то произведение PQ является ортопроектором тогда и только тогда, когда $P \smile Q$.

167. Если произведение ортопроекторов $P = P_1 P_2 \ldots P_m$ не меняется при циклических перестановках сомножителей, а также при обращении порядка сомножителей, то оно является ортопроектором.

Рассмотрим задачу о вычислении ортопроектора на пересечении подпространств L_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ через ортопроекторы $P_k = P(\mathrm{L}_k)$. Положим для $q > m$

$$P_q = P_k,$$

где k — остаток от деления q на m.

168. $P\left(\bigcap_{k=1}^{m} \mathrm{L}_k\right) = \prod_{q=1}^{\infty} P_q$ (формула Качмажа — Неймана).

§ 6. Спектральная теория унитарных операторов. Преобразование Кэли. Полярное представление оператора

Оператор U в унитарном пространстве E называется *унитарным*, если он регулярен и

$$U^* = U^{-1}.$$

Класс унитарных операторов в E обозначим через $\mathfrak{U}(E)$.

169. Для того чтобы оператор A был унитарным, необходимо и достаточно, чтобы он сохранял скалярное произведение:

$$(Ax,\ Ay) = (x,\ y) \qquad (x,\ y \in E).$$

170. Для того чтобы оператор A был унитарным, необходимо и достаточно, чтобы его матрица $\mathfrak{a}$ в каком-нибудь ортонормированном базисе была *унитарной*:

$$\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}^{-1}.$$

Это равносильно следующей системе соотношений для элементов α_{jk} матрицы $\mathfrak{a}$:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk}\overline{\alpha_{js}} = \delta_{ks} \qquad (k,\ s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

171. Для того чтобы оператор был унитарным, необходимо и достаточно, чтобы он отображал какой-нибудь ортонормированный базис в ортонормированный базис.

172. Произведение унитарных операторов есть унитарный оператор.

173. Оператор, обратный *) к унитарному, унитарен.

Таким образом, унитарные операторы в E образуют группу — подгруппу группы автоморфизмов. Эта подгруппа неабелева при $n > 1$. Она называется n-мерной *унитарной группой*.

Важное топологическое свойство унитарной группы состоит в том, что:

174. Унитарная группа компактна.

Спектральная теория унитарных операторов аналогична спектральной теории самосопряженных операторов. На самом

---

*) И, следовательно, сопряженный.

деле, как мы увидим дальше. здесь имеется не только аналогия, но и непосредственная связь.

175. Если L — инвариантное подпространство унитарного оператора U, то сужение $U \mid L$ является унитарным оператором в L.

176. Если $U \in \mathfrak{U}(E)$ и $|\alpha| = 1$, то $\alpha U \in \mathfrak{U}(E)$.

Заметим, что если $U \in \mathfrak{U}(E)$, то $\alpha U \in \mathfrak{U}(E)$ только при $|\alpha| = 1$.

177. Спектр унитарного оператора лежит на единичной окружности.

Такой спектр называется *унитарным*.

178. Система собственных подпространств унитарного оператора ортогональна.

179. Для унитарного оператора каждое инвариантное подпространство является ортогонально приводящим.

180. Система собственных подпространств унитарного оператора базисная.

Таким образом, если $U \in \mathfrak{U}(E)$, то U — оператор скалярного типа.

181. Для любого унитарного оператора существует ортонормированный собственный базис.

Мы пришли к спектральной теореме теории унитарных операторов:

182. Спектральное разложение унитарного оператора имеет вид

$$U = \sum_{k=1}^{m} e^{i\theta_k} P_k,$$

где $\{P_k\}_1^m$ — ортогональное разложение единицы, $\{\theta_k\}_1^m$ — вещественные числа.

183. Если унитарный оператор представлен в виде

$$U = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k P_k,$$

где $\lambda_j \neq \lambda_k$ $(j \neq k)$, P_k — проекторы и $\sum_{k=1}^{m} P_k = I$, то $\{P_k\}_1^m$ — разложение единицы оператора U, $\{\lambda_k\}_1^m$ — его спектр.

184. Каждый оператор вида $U=\sum_{k=1}^{m} e^{i\theta_k}P_k$, где $\{P_k\}_1^m$ — ортогональное разложение единицы, $\{\theta_k\}_1^m$ — вещественные числа, является унитарным.

В частности, если у оператора существует ортонормированный собственный базис и его спектр является унитарным, то оператор унитарен. Таким образом, унитарные операторы — это все те и только те, которые имеют унитарный спектр и ортонормированный собственный базис.

185. Для того чтобы оператор скалярного типа имел унитарный спектр, необходимо и достаточно, чтобы он был подобен унитарному оператору.

Отсюда, например, следует, что:

186. Если оператор A удовлетворяет уравнению

$$A^p = I$$

с некоторым целым $p \geqslant 1$, то он подобен унитарному.

Теорема **186** допускает далеко идущее обобщение:

187. Если $\Gamma = \{A_k\}_1^p$ — конечная группа регулярных операторов, то существует такой автоморфизм T, что все операторы

$$U_k = TA_kT^{-1} \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ p)$$

унитарны.

Этот факт вытекает из **188—190**. Рассмотрим в E скалярное произведение, порождаемое группой Γ:

$$(x,\ y)_\Gamma = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}(A_kx,\ A_ky).$$

188. Функционал $(x,\ y)_\Gamma$ обладает всеми свойствами скалярного произведения.

189. Все операторы, входящие в группу Γ, унитарны относительно скалярного произведения $(x,\ y)_\Gamma$.

190. Если в унитарном пространстве задано еще одно скалярное произведение $\langle x,\ y\rangle$, то существует такой автоморфизм T, что для каждого оператора A, унитарного в смысле скалярного произведения $\langle x,\ y\rangle$, оператор $U = TAT^{-1}$ унитарен в смысле основного скалярного произведения.

Установим непосредственную связь между унитарными и самосопряженными операторами. Это можно сделать по крайней мере двумя способами. Первый способ основан на так называемом преобразовании Кэли. Идея преобразования Кэли тесно связана с теоремой об отображении спектров. Чтобы перейти от самосопряженного оператора к унитарному, нужно преобразовать вещественный спектр в унитарный. Этого можно добиться дробно-линейным преобразованием

$$\zeta=\frac{\lambda-\bar{\omega}}{\lambda-\omega},$$

где ω — параметр, $\mathfrak{Im}\,\omega\neq 0$.

Преобразованием Кэли самосопряженного оператора S называется оператор U_ω вида

$$U_\omega=(S-\bar{\omega}I)(S-\omega I)^{-1},$$

где $\mathfrak{Im}\,\omega\neq 0$.

191. Оператор U_ω унитарен.

192. Спектр оператора U_ω не содержит точки 1.

193. Оператор S выражается через свое преобразование Кэли следующим образом:

$$S=(\omega U_\omega-\bar{\omega}I)(U_\omega-I)^{-1}.$$

Если U — унитарный оператор, спектр которого не содержит точки 1, то существует оператор

$$S_\omega=(\omega U-\bar{\omega}I)(U-I)^{-1}\qquad(\mathfrak{Im}\,\omega\neq 0),$$

называемый *преобразованием Кэли* унитарного оператора U.

194. Оператор S_ω самосопряженный.

195. Оператор U выражается через свое преобразование Кэли по формуле

$$U=(S_\omega-\bar{\omega}I)(S_\omega-\omega I)^{-1}.$$

Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между самосопряженными операторами и унитарными операторами, спектр которых не содержит точки 1.

Второй способ перехода от самосопряженных операторов к унитарным основан на экспоненциальном отображении $\zeta=e^{i\lambda}$, которое также переводит вещественную ось в единичную окружность.

196. Если S — самосопряженный оператор, то оператор $U=e^{iS}$ унитарен.

197. Для любого унитарного оператора U существует такой самосопряженный оператор S, что

$$U=e^{iS}. \tag{$*$}$$

Равенство ($*$) можно рассматривать как аналог полярного представления точки на единичной окружности. Эту аналогию мы сейчас разовьем дальше.

Назовем *левым и правым операторными модулями* оператора A операторы

$$R^{(l)}=(AA^*)^{1/2}, \quad R^{(r)}=(A^*A)^{1/2}$$

соответственно (см. **155**). Если A — регулярный оператор, то его операторные модули регулярны.

198. Если A — регулярный оператор, то $A=R^{(l)}U$, где U — унитарный оператор.

Отсюда с использованием предельного перехода (см. **174**) получается, что:

199. Любой оператор A можно представить в виде

$$A=R^{(l)}U,$$

где U — унитарный оператор.

Аналогично:

200. Любой оператор A можно представить в виде

$$A=UR^{(r)},$$

где U — унитарный оператор.

Представления **199**, **200** называются *полярными представлениями* оператора A. Участвующие в них унитарные операторы называются соответственно *правым* и *левым фазовыми множителями* оператора A. Записывая их в виде ($*$), получаем полную аналогию с полярным представлением комплексных чисел.

Рассмотрим вопрос о единственности каждого из полярных представлений. Для определенности ограничимся представлением вида

$$A=RU \tag{$**$}$$

(R — неотрицательный, U — унитарный оператор).

201. Для регулярного оператора A представление (**) единственно:

$$R = R^{(l)}, \quad U = \left(R^{(l)}\right)^{-1} \cdot A.$$

В общем случае можно утверждать лишь единственность модуля:

202. Для любого оператора A из представления (**) следует $R = R^{(l)}$.

203. Общий вид фазового множителя U в представлении (**) таков:

$$U = (I - T)\, U_0,$$

где U_0 — один из фазовых множителей, а T пробегает множество операторов, определяемое условиями:

$$TT^* = T + T^*, \qquad \operatorname{Im} T \subset \operatorname{Ker} A^*.$$

Операторы A и B называются ***унитарно подобными***, если существует такой унитарный оператор U, что

$$B = UAU^{-1} \quad \left(= UAU^*\right).$$

Унитарное подобие операторов есть отношение эквивалентности.

204. Для того чтобы операторы A и B были унитарно подобными, необходимо и достаточно, чтобы для каждого ортонормированного базиса Δ существовал такой ортонормированный базис Δ_1, что матрица оператора B в базисе Δ_1 равна матрице оператора A в базисе Δ (ср. **98** гл. II).

С помощью полярного представления легко установить, что:

205. Операторы AA^* и A^*A унитарно подобны, каков бы ни был оператор A (ср. **271** гл. II).

206. Если два самосопряженных (или два унитарных) оператора подобны, то они унитарно подобны.

§ 7. Спектральная теория нормальных операторов

Оператор N в унитарном пространстве называется *нормальным*, если

$$N^* \smile N.$$

Очевидно, самосопряженные и унитарные операторы нормальны.

207. Для того чтобы оператор был нормальным, необходимо и достаточно, чтобы его вещественная и мнимая части коммутировали.

208. Для того чтобы оператор был нормальным, необходимо и достаточно, чтобы его операторный модуль и соответствующий фазовый множитель коммутировали.

В доказательстве необходимости полезно учесть следующее предложение:

209. Если N — нормальный оператор, то $\operatorname{Ker} N^* = \operatorname{Ker} N$.

Нормальные операторы — это наиболее широкий класс операторов скалярного типа, обладающих ортогональным разложением единицы. Спектральная теория нормальных операторов строится по той же схеме, что и спектральные теории самосопряженных и унитарных операторов.

210. Для нормального оператора каждое собственное подпространство является ортогонально приводящим.

Это же верно и для инвариантных подпространств (ср. **134**, **179**), но доказывается не очень просто. Вместе с тем для получения спектральной теоремы достаточно **210**, а обобщение на произвольные инвариантные подпространства будет следовать из спектральной теоремы.

211. Собственное подпространство нормального оператора N, соответствующее собственному значению λ, совпадает с собственным подпространством оператора N^*, соответствующим собственному значению $\bar{\lambda}$.

212. Система собственных подпространств нормального оператора ортогональна.

213. Система собственных подпространств нормального оператора базисная.

Таким образом, если N — нормальный оператор, то N — оператор скалярного типа.

214. Для любого нормального оператора N существует ортонормированный собственный базис.

Каждый такой базис является собственным и для N^* в силу **211**.

Теперь получается с п е к т р а л ь н а я т е о р е м а для нормальных операторов:

215. Спектральное разложение нормального оператора имеет вид

$$N = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k P_k,$$

где $\{P_k\}_1^m$ — ортогональное разложение единицы, $\{\lambda_k\}_1^m$ — комплексные числа.

216. Если нормальный оператор представлен в виде

$$N = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k P_k,$$

где $\lambda_j \neq \lambda_k$ $(j \neq k)$, P_k—проекторы и $\sum\limits_{k=1}^{m} P_k = I$, то $\{P_k\}_1^m$ — разложение единицы оператора N, $\{\lambda_k\}_1^m$ — его спектр.

217. Каждый оператор вида $N = \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k P_k$, где $\{P_k\}_1^m$ — ортогональное разложение единицы, $\{\lambda_k\}_1^m$ — какие-нибудь числа, является нормальным.

В частности, если у оператора существует ортонормированный собственный базис, то оператор нормальный. Таким образом, нормальные операторы — это все те и только те, которые обладают ортонормированным собственным базисом. На спектр нормального оператора нет никаких ограничений. Самосопряженные операторы — это нормальные операторы с вещественным спектром. Унитарные операторы — это нормальные операторы с унитарным спектром.

218. Для того чтобы оператор был оператором скалярного типа, необходимо и достаточно, чтобы он был подобен нормальному оператору.

Следующая теорема является обобщением теоремы **206**.

219. Если два нормальных оператора подобны, то они унитарно подобны.

Другой подход к спектральной теории нормальных операторов основан на следующей *теореме об одновременном приведении*.

220. Если два самосопряженных оператора S_1, S_2 коммутируют, то они обладают общим ортонормированным собственным базисом (ср. **193** гл. II).

В силу **207** эта теорема следует из спектральной теоремы для нормальных операторов и обратно.

Теорему **220** можно усилить (ср. **194** гл. II):

221. Если $\{S_\nu\}$ — какое-либо множество попарно коммутирующих самосопряженных операторов, то существует общий для всех операторов S_ν ортонормированный собственный базис.

Более того:

222. Если $\{N_\nu\}$ — какое-либо множество попарно коммутирующих нормальных операторов, то существует общий для всех операторов N_ν ортонормированный собственный базис.

Связь нормальных операторов с самосопряженными обнаруживается также при рассмотрении функций от оператора.

223. Любая функция от самосопряженного оператора является нормальным оператором.

Обратно:

224. Если N — нормальный оператор, то существуют такой самосопряженный оператор S и такая функция φ, что $N = \varphi(S)$.

В некоторых ситуациях от оператора, не являющегося, вообще говоря, нормальным, удается естественно «отщепить» нормальную часть. Например:

225. Пусть спектр $\sigma(A)$ некоторого оператора A разбит на две части

$$\sigma(A) = \sigma^{(1)} \cup \sigma^{(2)} \qquad (\sigma^{(1)} \cap \sigma^{(2)} = \varnothing)$$

так, что собственные подпространства оператора A, соответствующие точкам $\lambda \in \sigma^{(1)}$, инвариантны относительно оператора A^*. Тогда $A = N \oplus K$, где N — нормальный оператор, $\sigma(N) = \sigma^{(1)}$ и $\sigma(K) = \sigma^{(2)}$.

§ 8. Экстремальные свойства собственных значений самосопряженного оператора

Пусть S — самосопряженный оператор. Рассмотрим его собственные значения

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n,$$

занумерованные с учетом кратностей: каждое собственное значение учитывается столько раз, какова его кратность*). Соответственно занумеруем собственные векторы:

$$e_1, e_2, \ldots, e_n.$$

---

*) Указанная нумерация собственных значений самосопряженного оператора сохраняется на протяжении всей книги.

Оператор S порождает эрмитово-квадратичный функционал $K_S(x) = (Sx, x)$. Оказывается, что собственные значения оператора S могут быть описаны как экстремумы функционала $K_S(x)$ на единичной сфере $(x, x) = 1$ (теория Фишера — Куранта).

226. Имеют место соотношения:

$$\lambda_1 = \max_{(x,\ x)=1} (Sx,\ x), \quad \lambda_n = \min_{(x,\ x)=1} (Sx,\ x).$$

При этом минимум достигается на векторе e_1, максимум — на векторе e_n.

Экстремальные векторы могут быть полностью описаны. Назовем вектор x *нормированным*, если $(x, x) = 1$.

227. Множество нормированных векторов x, для которых

$$(Sx,\ x) = \lambda_1 \qquad ((Sx,\ x) = \lambda_n),$$

совпадает с множеством нормированных собственных векторов оператора S, отвечающих собственному значению λ_1 (соответственно λ_n).

Промежуточные собственные значения тоже обладают некоторыми экстремальными свойствами:

228. Имеет место соотношение

$$\lambda_k = \max_{\substack{(x,\ x)=1,\\ (x,\ e_j)=0\\ (1 \leqslant j \leqslant k-1)}} (Sx,\ x) \qquad (k = 2,\ 3,\ \ldots,\ n).$$

Минимум достигается при $x = e_k$. Аналогично

$$\lambda_k = \min_{\substack{(x,\ x)=1,\\ (x,\ e_j)=0\\ (k+1 \leqslant j \leqslant n)}} (Sx,\ x) \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Максимум достигается при $x = e_k$.

Полученное описание промежуточных собственных значений страдает тем недостатком, что оно «привязано» к собственному базису оператора S. Устранение этого недостатка приводит к более глубоким экстремальным (так называемым минимаксным) характеристикам:

229. Пусть L_k — произвольное подпространство коразмерности $k-1$. Тогда

$$\min_{\substack{(x,\,x)=1,\\ x\in L_k}} (Sx,\ x) \leqslant \lambda_{n-k+1}, \qquad \max_{\substack{(x,\,x)=1,\\ x\in L_k}} (Sx,\ x) \geqslant \lambda_k.$$

Более того:

230. $\lambda_{n-k+1} = \max\limits_{L_k} \min\limits_{\substack{(x,\,x)=1,\\ x\in L_k}} (Sx,\ x),\ \lambda_k = \min\limits_{L_k} \max\limits_{\substack{(x,\,x)=1,\\ x\in L_k}} (Sx,\ x)$

Рассмотрим некоторые применения теории Фишера — Куранта.

231. Пусть P — ортопроектор, проектирующий на какое-нибудь $(n-1)$-мерное подпространство L_{n-1}. Рассмотрим в L_{n-1} самосопряженный оператор $\breve{S} = PS|L_{n-1}$, и пусть $\{\breve{\lambda}_k\}_1^{n-1}$ — его собственные значения. Тогда собственные значения операторов S и $\breve{S}$ перемежаются:

$$\lambda_1 \geqslant \breve{\lambda}_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \breve{\lambda}_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{n-1} \geqslant \breve{\lambda}_{n-1} \geqslant \lambda_n.$$

232. Пусть $\{L_k\}_0^n$ — какая-нибудь максимальная цепь подпространств, P_k — ортопроектор, проектирующий на L_k,

$$S_k = P_k S | L_k \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Тогда собственные значения любых двух соседних членов последовательности $\{S_k\}_1^n$ перемежаются.

Из этого предложения легко вывести детерминантный критерий положительности самосопряженного оператора, известный под названием критерия Сильвестра — Якоби:

233. Положим $d_k = \det S_k$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Для того чтобы оператор S был положительным, необходимо и достаточно, чтобы все детерминанты d_k были положительными.

Этот результат обобщается следующим образом.

234. Если $d_k \neq 0$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, то число отрицательных собственных значений оператора S равно числу знакоперемен в последовательности

$$1,\ d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_n.$$

Пусть теперь $\mathscr{D}_k(\lambda)$ — характеристический полином оператора S_k. Обозначим через $\mathfrak{v}_S(\lambda)$ число знакоперемен в последовательности

$$1, \ \mathscr{D}_1(\lambda), \ \ldots, \ \mathscr{D}_n(\lambda),$$

для тех λ, для которых все члены этой последовательности отличны от нуля.

235. Число собственных значений оператора S, лежащих в интервале (α, β), равно $\mathfrak{v}_S(\beta) - \mathfrak{v}_S(\alpha)$ (при условии, что $\mathfrak{v}_S(\alpha)$ и $\mathfrak{v}_S(\beta)$ имеют смысл).

236. Функция $\mathfrak{v}_S(\lambda)$ равна числу собственных значений оператора S, лежащих в интервале $(-\infty, \lambda)$.

Продолжим развитие теории Фишера — Куранта. Прежде всего отметим, что результат **231** точен в том смысле, что:

237. Если числовая последовательность $\{\widehat{\lambda}_k\}_1^{n-1}$ удовлетворяет неравенствам **231**, то существует такой ортопроектор $P\,(\mathrm{rg}\,P=n-1)$, что $\{\widehat{\lambda}_k\}_1^{n-1}$ есть спектр оператора $\widehat{S}=PS\,|\,\mathrm{Im}\,P$.

Результаты **231**, **237** содержатся в более общем предложении:

238. Для существования ортопроектора $P\,(\mathrm{rg}\,P=r,$ $0<r<n)$ такого, чтобы заданная числовая последовательность $\{\widehat{\lambda}_k\}_1^r$ являлась спектром оператора $\widehat{S}=PS\,|\,\mathrm{Im}\,P$, необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$\lambda_{k+(n-r)} \leqslant \widehat{\lambda}_k \leqslant \lambda_k \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ r).$$

239. Пусть при фиксированном натуральном r последовательность $\{x_k\}_1^r$ пробегает совокупность всевозможных ортонормированных систем в E. Тогда

$$\lambda_1+\lambda_2+\ \ldots\ +\lambda_r=\min_{\{x_k\}_1^r}\sum_{k=1}^{r}(Sx_k,\ x_k)$$

и аналогично

$$\lambda_n+\lambda_{n-1}+\ \ldots\ +\lambda_{n-r+1}=\max_{\{x_k\}_1^r}\sum_{k=1}^{r}(Sx_k,\ x_k).$$

Экстремумы достигаются на отрезках ортонормированного собственного базиса $\{e_k\}_1^r$ и $\{e_k\}_{n-r-1}^n$ соответственно.

При $r=n$ величины под знаками max и min сохраняют постоянное значение $\operatorname{sp} S$.

Теорема **239** является обобщением основного экстремального свойства **228**. Аналогичным обобщением минимаксимального свойства **230** являются следующие две теоремы Виландта.

240. Пусть $m_1 < m_2 < \ldots < m_r$ ($m_r \leqslant n$) — натуральные числа, $\mathrm{L}^{(1)} \subset \mathrm{L}^{(2)} \subset \ldots \subset \mathrm{L}^{(r)}$ — произвольная цепь подпространств размерностей $\dim \mathrm{L}^{(j)} = m_j$, а $\{x_j\}_1^r$ — произвольная ортонормированная система, удовлетворяющая условию $x_j \in \mathrm{L}^{(j)}$ ($j=1, 2, \ldots, r$). Тогда

$$\lambda_{m_1} + \lambda_{m_2} + \ldots + \lambda_{m_r} = \max_{\{\mathrm{L}^{(j)}\}_1^r} \min_{\{x_j\}_1^r} \sum_{j=1}^{r} (Sx_j, x_j).$$

Аналогично:

241. Пусть $m_1 < m_2 < \ldots < m_r$ ($m_r \leqslant n$) — натуральные числа, $\mathrm{M}^{(1)} \subset \mathrm{M}^{(2)} \subset \ldots \subset \mathrm{M}^{(r)}$ — произвольная цепь подпространств размерностей $\dim \mathrm{M}^{(j)} = m_j - 1$, а $\{x_j\}_1^r$ — произвольная ортонормированная система, удовлетворяющая условию $x_j \perp \mathrm{M}^{(j)}$ ($j=1, 2, \ldots, r$). Тогда

$$\lambda_{m_1} + \lambda_{m_2} + \ldots + \lambda_{m_r} = \min_{\{\mathrm{M}^{(j)}\}_1^r} \max_{\{x_j\}_1^r} \sum_{j=1}^{r} (Sx_j, x_j).$$

В заключение отметим еще неравенства Г. Вейля, также вытекающие из основного минимаксимального свойства.

Пусть $\lambda_1^+(S), \lambda_2^+(S), \ldots$ — положительные собственные значения оператора S, занумерованные в порядке убывания, $\lambda_1^-(S), \lambda_2^-(S), \ldots$ — его отрицательные и нулевые собственные значения, занумерованные в порядке убывания абсолютных величин, и $\mu_1(S) \geqslant \mu_2(S) \geqslant \ldots \geqslant \mu_n(S)$ — модули собственных значений оператора S.

242. Для любых самосопряженных операторов S_1 и S_2 имеют место неравенства:

$$\lambda_{j+k+1}^+(S_1+S_2) \leqslant \lambda_{j+1}^+(S_1) + \lambda_{k+1}^+(S_2),$$
$$\lambda_{j+k+1}^-(S_1+S_2) \geqslant \lambda_{j+1}^-(S_1) + \lambda_{k+1}^-(S_2),$$
$$\mu_{j+k+1}(S_1+S_2) \leqslant \mu_{j+1}(S_1) + \mu_{k+1}(S_2).$$

§ 9. Теорема Шура. Сингулярные числа (s-числа) операторов

Если оператор A в унитарном пространстве не является нормальным, то у него не существует ортонормированного собственного базиса, хотя A при этом может быть даже оператором скалярного типа. Возникает проблема «унитарного» канонического вида. Существенный вклад в решение этой проблемы дает следующая теорема Шура:

243. Для каждого оператора A существует ортонормированный базис треугольного представления.

Такой базис называется *базисом Шура*.

Доказательство может быть проведено методом § 2 гл. II с использованием теоремы **86** настоящей главы.

244. Для того чтобы оператор был нормальным, необходимо и достаточно, чтобы все его базисы Шура были собственными.

Достаточно, конечно, чтобы один какой-нибудь базис Шура был собственным.

Этот критерий нормальности вытекает из следующего, упоминавшегося в § 7, критерия:

245. Для того чтобы оператор был нормальным, необходимо и достаточно, чтобы все его инвариантные подпространства были ортогонально приводящими.

Для вольтерровых операторов теорема Шура позволяет выразить оператор через его мнимую часть. Пусть A — вольтерров оператор, $\{e_j\}_1^n$ — его базис Шура и Q_k — ортопроектор на линейную оболочку системы $\{e_j\}_1^k$, $Q_0 = 0$.

246. $$A = 2i \sum_{k=1}^{n-1} Q_k \frac{A - A^*}{2i} (Q_{k+1} - Q_k)$$

(формула М. С. Бродского).

Отсюда:

247. Если мнимые части вольтерровых операторов унитарно подобны, то сами операторы унитарно подобны.

Сингулярными числами (s-*числами*) $s_k = s_k(A)$ оператора A называются собственные значения операторного модуля

$$s_k(A) = \lambda_k((AA^*)^{1/2}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Сингулярные числа унитарно инвариантны:

248. Если U — унитарный оператор, то

$$s_k(UA) = s_k(AU) = s_k(A) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

249. $s_k(A) = s_k(A^*) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$.

250. Если $A = RU$ — полярное представление оператора A, $\{e_k\}_1^n$ — собственный базис оператора R и $e'_k = U^{-1}e_k$, то при любом $x \in \mathrm{E}$

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} s_k(A)(x, e'_k)e_k$$

(разложение Шмидта).

251. Для нормального оператора A

$$s_k(A) = |\lambda_k(A)| \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

при соответствующей нумерации собственных значений.

Обратно:

252. Если для некоторого оператора A

$$s_k(A) = |\lambda_k(A)| \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

то оператор A нормальный.

Более того:

253. Если для некоторого оператора A и какого-нибудь ортонормированного базиса $\{e_k\}_1^n$

$$|(Ae_k, e_k)| = s_k(A) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

то оператор A нормальный.

Для доказательства можно использовать разложение Шмидта.

254. Если $\{e_k\}_1^n$ — ортонормированный базис, то

$$\sum_{k=1}^{n} |(Ae_k, e_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} s_k(A).$$

Тем более имеет место неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^{n} (Ae_k, e_k) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} s_k(A). \qquad (*)$$

255. Знак равенства в $(*)$ имеет место лишь для нормального оператора вида $A = e^{i\omega}B$, где B — неотрицательный оператор и $\omega = \arg(\operatorname{sp} A)$.

256. Знак равенства в **254** имеет место лишь для оператора вида $A = US$, где S — неотрицательный оператор и $Sx = 0$ в линейной оболочке тех e_k, для которых $(Ae_k, e_k) = 0$, а U — унитарный оператор, определяемый соотношениями

$$Ue_k = e^{i\omega_k} e_k,$$

где $\omega_k = \arg(Ae_k, e_k)$.

Из **254** вытекает:

257. $\sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k(A)| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} s_k(A)$.

Очевидно:

258. $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |\lambda_k(A)| \leqslant \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} s_k(A)$.

Следующее неравенство Шура является в некотором смысле промежуточным между **257** и **258**.

259. $\sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k(A)|^2 \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} s_k^2(A)$.

260. Знак равенства в каждом из неравенств **257—259** имеет место лишь для нормальных операторов.

Отметим одно интересное следствие неравенства Шура:

261. $\max\limits_{j,k} |\lambda_j(A) - \lambda_k(A)| \leqslant \sqrt{2\left(\operatorname{sp} AA^* - \frac{1}{n} |\operatorname{sp} A|^2\right)}$

(неравенство Мирского).

Для доказательства можно использовать формулу:

262. $\sum\limits_{j,k=1}^{n} |\lambda_j(A) - \lambda_k(A)|^2 = n \sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k(A)|^2 - |\operatorname{sp} A|^2$.

Рассмотрим некоторые неравенства для s-чисел суммы и произведения операторов.

263. $s_{j+k+1}(A+B) \leqslant s_{j+1}(A) + s_{k+1}(B)$ $(j+k \leqslant n-1)$.

264. $\sum\limits_{k=1}^{n} s_k(A+B) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} s_k(A) + \sum\limits_{k=1}^{n} s_k(B)$.

Для доказательства **264** можно использовать формулу:

265. $\sum\limits_{k=1}^{n} s_k(A) = \sup\limits_{U \in \mathfrak{U}(E)} |\operatorname{sp} AU|$.

266. $s_{j+k+1}(AB) \leqslant s_{j+1}(A)\, s_{k+1}(B)$ $(j+k \leqslant n-1)$.

§ 10. Хаусдорфово множество оператора

Хаусдорфовым множеством (или *числовой областью*) оператора A называется множество $\mathscr{H}(A)$ комплексных чисел вида (Ax, x), где x пробегает единичную сферу $(x, x) = 1$.

267. Хаусдорфово множество $\mathscr{H}(N)$ нормального оператора совпадает с выпуклой оболочкой спектра $\sigma(N)$ (т. е. с наименьшим выпуклым множеством, содержащим спектр).

В частности:

268. Хаусдорфово множество $\mathscr{H}(S)$ самосопряженного оператора S совпадает с отрезком $[\lambda_n, \lambda_1]$ вещественной оси.

269. Хаусдорфово множество $\mathscr{H}(U)$ унитарного оператора U совпадает с многоугольником, множество вершин которого есть спектр.

270. Хаусдорфово множество скалярного оператора αI состоит из одной точки α.

Обратно:

271. Если хаусдорфово множество некоторого оператора состоит из одной точки, то оператор скалярный.

Исследуем геометрию хаусдорфова множества. С помощью теоремы Шура элементарно устанавливается, что:

272. Если основное пространство E двумерно, то для любого оператора A хаусдорфово множество $\mathscr{H}(A)$ является эллипсом с фокусами в точках спектра оператора A. Этот эллипс вырождается в отрезок (или в точку) тогда и только тогда, когда оператор нормален.

Заметим теперь, что:

273. Если L — произвольное подпространство пространства*) E, P — ортопроектор на L и $\breve{A} = PA|\mathrm{L}$, то $\mathscr{H}(\breve{A}) \subset \mathscr{H}(A)$.

Отсюда и из **272** вытекает замечательная теорема:

274. Хаусдорфово множество любого оператора выпукло (теорема Хаусдорфа).

При этом:

275. $\sigma(A) \subset \mathscr{H}(A)$.

Следовательно, выпуклая оболочка спектра всегда содержится в хаусдорфовом множестве.

---

*) *Уже любой размерности.*

Рассмотрим границу множества $\mathscr{H}(A)$. Это — выпуклая замкнутая кривая в комплексной плоскости, исключая случаи вырождения в отрезок или точку.

276. Если λ — угловая точка границы хаусдорфова множества и x — такой вектор, для которого $(Ax, x)=\lambda$, $(x, x)=1$, то ортогональное дополнение вектора x инвариантно относительно A и A^*.

Поэтому:

277. Угловые точки границы хаусдорфова множества $\mathscr{H}(A)$ входят в спектр оператора A и соответствующие собственные подпространства ортогонально приводят оператор.

Таким образом, граница хаусдорфова множества может иметь лишь конечное число угловых точек.

278. Если граница хаусдорфова множества $\mathscr{H}(A)$ имеет угловые точки $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, то либо

$$A=N\oplus K,$$

где N — нормальный оператор и

$$\sigma(N)=\{\lambda_j\}_1^m, \quad \sigma(K)=\sigma(A)\setminus\sigma(N),$$

либо, в крайнем случае (в частности, при $m=n$), оператор нормален и $\sigma(A)=\{\lambda_j\}_1^m$. Если $\mathscr{H}(A)$ — многоугольник с вершинами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, то

$$\mathscr{H}(K)\subset\mathscr{H}(N).$$

Следовательно:

279. Пусть $\mathscr{H}(A)$ — многоугольник, множество вершин которого либо совпадает со спектром $\sigma(A)$, либо не содержит только одну точку спектра, являющуюся простым корнем минимального полинома. Тогда оператор A нормален.

Это — частичное обращение теоремы **267.** Полное обращение невозможно, как станет ясно из **282.**

280. Если $A=\bigoplus\limits_{k=1}^{m} A_k$, то $\mathscr{H}(A)$ совпадает с выпуклой оболочкой множества $\bigcup\limits_{k=1}^{m}\mathscr{H}(A_k)$.

Поэтому:

281. Если N — нормальный оператор в некотором подпространстве L, а K — любой оператор в подпространстве $\mathrm{L}^{\perp}$, удовлетворяющий условию $\mathscr{H}(K) \subset \mathscr{H}(N)$, то хаусдорфово множество оператора $A = N \oplus K$ совпадает с многоугольником $\mathscr{H}(N)$.

Итак:

282. Для того чтобы хаусдорфово множество оператора A совпадало с выпуклой оболочкой спектра, необходимо и достаточно, чтобы A был нормален или имел вид

$$A = N \oplus K,$$

где N — нормальный оператор, $\mathscr{H}(K) \subset \mathscr{H}(N)$.

Будем говорить, что конечное множество точек на плоскости является c-независимым, если ни одна точка не принадлежит выпуклой оболочке остальных (т. е. если существует выпуклый многоугольник, имеющий данное множество в качестве множества вершин).

283. Если спектр оператора A является c-независимым и выпуклая оболочка спектра совпадает с $\mathscr{H}(A)$, то оператор A нормальный.

284. Если A — оператор с унитарным спектром и выпуклая оболочка спектра совпадает с $\mathscr{H}(A)$, то A — унитарный оператор.

285. Если $\mathscr{H}(A)$ совпадает с отрезком вещественной оси, то A — самосопряженный оператор.

Продемонстрируем одно из применений хаусдорфова множества.

286. Если $\operatorname{sp} A = 0$, то существует такой ортонормированный базис $\{e_k\}_1^n$, что $(Ae_k, e_k) = 0$ (ср. **209** гл. II).

Отсюда тем же методом, что и в § 6 гл. II, можно установить следующее предложение.

287. Если S — самосопряженный оператор и $\operatorname{sp} S = 0$, то существует такой самосопряженный оператор S_1 с простым спектром и такой самосопряженный оператор S_2, что $S = \frac{1}{i}[S_1, S_2]$.

Из **287**, между прочим, вытекает, что:

288. Если S — самосопряженный оператор и $\operatorname{sp} S = 0$, то существует такой оператор A, что $S = \frac{1}{i}[A, A^*]$.

ГЛАВА IV

НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ФУНКЦИОНАЛЫ И ОПЕРАТОРЫ В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

§ 1. Норма, метрика, топология

Функционал $\nu(x)$ в пространстве E называется *нормой*, если он обладает следующими свойствами:

1) $\nu(x) > 0$ $(x \neq 0)$ (позитивность);
2) $\nu(\alpha x) = |\alpha| \nu(x)$ (абсолютная однородность);
3) $\nu(x_1 + x_2) \leqslant \nu(x_1) + \nu(x_2)$ (неравенство треугольника).

Норма — это естественное обобщение элементарного понятия длины вектора.

Отметим непосредственные следствия основных свойств нормы.

1. $\nu(0) = 0$.
2. $\nu(-x) = \nu(x)$ (симметрия).
3. $|\nu(x_1) - \nu(x_2)| \leqslant \nu(x_1 \pm x_2) \leqslant \nu(x_1) + \nu(x_2)$.

Если в пространстве фиксирована какая-нибудь норма, то говорят, что пространство *нормировано*; выделенную норму при этом обозначают через $\|x\|$. Нормированное пространство называется также пространством *Минковского* *).

Подпространства нормированного пространства нормированы естественным образом.

Одно и то же линейное пространство можно нормировать бесконечным множеством способов:

---

*) Бесконечномерным аналогом конечномерного пространства Минковского является пространство Банаха (или банахово пространство).

4. Если $\nu(x)$ — норма, α — положительное число, то $\alpha\nu(x)$ — также норма.

5. Пусть $\Delta = \{e_k\}_1^n$ — какой-нибудь базис. Тогда функционал

$$\nu_c(x;\ \Delta) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\xi_k| \qquad \left(x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k\right)$$

является нормой.

Это — так называемая *с-норма* (или *равномерная* норма) относительно данного базиса Δ.

6. Функционал

$$\nu_l(x;\ \Delta) = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|$$

является нормой.

Это — *l-норма* (относительно базиса Δ). Ее можно обобщить следующим образом:

7. Пусть p — любое число, удовлетворяющее неравенству $p \geqslant 1$. Функционал

$$\nu_{l^p}(x;\ \Delta) = \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p\right)^{1/p}$$

является нормой.

Это — *l^p-норма* (относительно базиса Δ). При $p = \infty$ она обращается в c-норму. При $p = 1$ она обращается в l-норму.

Арифметическое пространство, наделенное l^p-нормой относительно какого-нибудь базиса, называется *пространством l^p*. При $p = 1$ оно называется также *пространством l*, при $p = \infty$ называется также *пространством c*.

Неравенство треугольника в l^p известно в анализе как неравенство Минковского

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k + \eta_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^p\right)^{1/p}.$$

Весьма важен частный случай l^2-нормы, естественно возникающей в унитарном пространстве:

8. В унитарном пространстве функционал

$$\| x \| = \sqrt{(x,\ x)} \tag{*}$$

совпадает с l^2-нормой относительно любого ортонормированного базиса.

Тем самым унитарное пространство естественным образом нормировано. Норма (*) в унитарном пространстве E называется *евклидовой нормой*, а само E, рассматриваемое как нормированное, называется *евклидовым* пространством *). Таким образом, пространство l^2 евклидово.

Неравенство треугольника для евклидовой нормы тесно связано с важным неравенством Г. Шварца:

9. В евклидовом пространстве

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|.$$

Знак равенства достигается тогда и только тогда, когда векторы x и y линейно зависимы.

Неравенство Шварца является геометрической интерпретацией известного в анализе неравенства Коши

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^2}.$$

Связь неравенства Шварца с неравенством треугольника устанавливается через посредство теоремы косинусов:

10. В евклидовом пространстве

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathfrak{Re}\,(x, y).$$

Отметим, что из теоремы косинусов вытекает теорема о диагоналях параллелограмма:

11. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Свойство **11** нормы в евклидовом пространстве является характеристическим:

12. Если норма в пространстве E удовлетворяет соотношению **11**, то она является евклидовой.

Из **12** следует, что:

13. Если каждое двумерное подпространство нормированного пространства E является евклидовым, то и пространство E евклидово.

---

*) Бесконечномерным аналогом конечномерного евклидова пространства является гильбертово пространство.

Введем в связи с **12** *меру неевклидовости* нормированного пространства E:

$$\mu(\mathrm{E}) = \sup_{x,\,y} \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2(\|x\|^2 + \|y\|^2)}.$$

14. Имеет место точное неравенство $1 \leqslant \mu(\mathrm{E}) \leqslant 2$.

15. Для того чтобы нормированное пространство E было евклидовым, необходимо и достаточно, чтобы $\mu(\mathrm{E}) = 1$.

Каждое нормированное пространство обладает естественной метрикой:

$$d(x, y) = \|x - y\|. \qquad (**)$$

Это означает, что:

1) $d(x, y) > 0$ $(x \neq y)$; $d(x, x) = 0$ (позитивность);
2) $d(y, x) = d(x, y)$ (симметрия);
3) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ (неравенство треугольника).

Кроме того, имеются дополнительные *) свойства:

4) $d(x+z, y+z) = d(x, y)$ (трансляционная инвариантность);
5) $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\, d(x, y)$ (абсолютная однородность).

Оказывается, что:

16. Если функционал $d(x, y)$ в линейном пространстве обладает свойствами 1) — 5), то он порождается некоторой нормой по формуле (**), и эта норма единственна.

Итак, мы вправе рассматривать каждое нормированное пространство как метрическое, а тем самым и как топологическое. В гл. I мы уже наделили пространство E топологией. Эту топологию назовем *слабой* топологией.

17. Топология, порождаемая любой нормой в E, совпадает со слабой топологией.

Этот фундаментальный результат вытекает из устанавливаемых ниже теорем **18—23**.

18. Слабая топология порождается c-нормой (относительно любого базиса).

---

*) Не обязательные для метрики в общем случае.

Пусть $\nu_1(x)$ и $\nu_2(x)$ — две нормы в пространстве E. Говорят, что норма ν_1 *подчинена* норме ν_2, если существует такая константа $\mathcal{C}$, что

$$\nu_1(x) \leqslant \mathcal{C}\nu_2(x) \qquad (x \in \mathrm{E}).$$

19. Каждая норма подчинена c-норме.

Отсюда следует, что:

20. Каждая норма является непрерывным функционалом в слабой топологии.

Если каждая из двух норм подчинена другой, то нормы называются *эквивалентными*.

21. Эквивалентные нормы порождают одну и ту же топологию.

С помощью **18** и элементарной теории непрерывных функций устанавливается, что:

22. Каждая норма эквивалентна c-норме.

Следовательно:

23. Любые две нормы в E эквивалентны.

Теорема **17** непосредственно следует из **23**, **21**, **18**.

В нормированном пространстве можно определить *сходимость по норме*, полагая

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x,$$

если

$$\lim_{k \to \infty} \| x_k - x \| = 0.$$

Это определение согласовано с определением сходимости в общем метрическом пространстве. В силу **305** гл. I сходимость по норме в E совпадает с покоординатной сходимостью.

Класс фундаментальных последовательностей в E также можно описать, пользуясь нормой: для того чтобы последовательность $\{x_k\}_1^{\infty}$ была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{j,\, k \to \infty} \| x_j - x_k \| = 0$$

(т. е. чтобы она была фундаментальной в смысле, принятом для метрических пространств).

Сформулируем несколько предложений, относящихся к рядам в нормированном пространстве.

Векторный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ в нормированном пространстве называется *абсолютно сходящимся*, если $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$.

24. Для того чтобы векторный ряд был абсолютно сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы он был безусловно сходящимся.

Тем самым абсолютная сходимость в E не зависит от выбора нормы *). Заметим еще, что:

25. Если ряд векторов $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ абсолютно сходится, то он сходится и

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \| x_k \|.$$

Для векторных степенных рядов существенно отметить следующую модификацию теоремы Коши — Адамара:

26. Пусть $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (\lambda - \lambda_0)^k$ — векторный степенной ряд. Положим

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\|a_k\|}}.$$

Величина ρ не зависит от выбора нормы и совпадает с радиусом сходимости степенного ряда.

§ 2. Преднормы и индуцированные нормы

Функционал $p(x)$ в пространстве E называется *преднормой* (или *полунормой*), если он удовлетворяет неравенству треугольника

$$p(x_1 + x_2) \leqslant p(x_1) + p(x_2)$$

и абсолютно однороден:

$$p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x).$$

---

*) Это легко проверяется и непосредственно на основании 21.

Отметим элементарные свойства преднормы.

27. $p(0)=0$.

28. $p(-x)=p(x)$.

29. $p(x)\geqslant 0$.

Таким образом, преднорма p является нормой тогда и только тогда, когда $p(x)\neq 0$ $(x\neq 0)$.

30. Множество $\operatorname{Ker} p$ векторов x, для которых $p(x)=0$, является подпространством.

31. Если L — какое-нибудь дополнение подпространства $\operatorname{Ker} p$, то функционал $p\,|\,L$ является нормой в L.

32. Соотношение $x\equiv y \pmod{\operatorname{Ker} p}$ влечет за собой $p(x)=p(y)$.

Поэтому в фактор-пространстве $\mathrm{E}\,|\operatorname{Ker} p$ определен функционал $\widehat{p}([x])=p(x)$.

33. Функционал $\widehat{p}$ является нормой в $\mathrm{E}\,|\operatorname{Ker} p$.

Преднорма p_1 называется *подчиненной* преднорме p_2, если существует такая константа $\mathcal{C}$, что

$$p_1(x)\leqslant \mathcal{C}p_2(x) \qquad (x\in \mathrm{E}).$$

34. Преднорма подчинена любой норме.

Таким образом, если p — преднорма в нормированном пространстве, то существует такая константа $\mathcal{C}$, что:

$$p(x)\leqslant \mathcal{C}\|x\| \qquad (x\in \mathrm{E}).$$

Наименьшее $\mathcal{C}$ в этом неравенстве называется ***нормой*** функционала p и обозначается $\|p\|$. Очевидно,

$$\|p\|=\sup_x \frac{p(x)}{\|x\|}.$$

Можно также написать

$$\|p\|=\sup_{\|x\|=1} p(x).$$

По этому поводу введем определение: если $\|x\|=1$, то вектор x называется *нормированным*. Система векторов $\{x_k\}_1^m$ называется *нормированной*, если все векторы системы нормированы. Множество всех нормированных векторов называется *единичной сферой*.

35. Для подчиненности преднормы p_1 преднорме p_2 необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{Ker} p_2\subset \operatorname{Ker} p_1$.

Если каждая из двух преднорм подчинена другой, то они называются *эквивалентными*. В силу **35**:

36. Для эквивалентности преднорм p_1 и p_2 необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{Ker} p_1 = \operatorname{Ker} p_2$.

Таким образом, классы эквивалентных преднорм находятся во взаимно однозначном соответствии с подпространствами пространства E. При этом классу норм соответствует подпространство 0. Классу, состоящему из одной нулевой преднормы, соответствует E.

С помощью преднорм можно вводить индуцированные нормы в фактор-пространствах, пространствах функционалов и гомоморфизмов.

Пусть E — нормированное пространство, L — его подпространство. *Расстоянием вектора x от подпространства* L называется величина

$$d(x;\ \mathrm{L}) = \inf_{y \in \mathrm{L}} \| x - y \|.$$

37. Функционал $d(.\,;\ \mathrm{L})$ является преднормой и

$$\operatorname{Ker} d(.\,;\ \mathrm{L}) = \mathrm{L}.$$

В силу **33** в фактор-пространстве E/L индуцируется норма. Она обозначается тем же символом $\|.\|$, что и норма основного пространства.

38. Индуцированная норма в фактор-пространстве равна

$$\| X \| = \inf_{[x] = X} \| x \|.$$

39. Пусть E и E_1 — нормированные пространства и $h \in \operatorname{Hom}(\mathrm{E},\ \mathrm{E}_1)$. Тогда функционал

$$p_h(x) = \| hx \|_1 \qquad (x \in \mathrm{E},\ \|.\|_1 \text{ — норма в } \mathrm{E}_1)$$

является преднормой. При этом $\operatorname{Ker} p_h = \operatorname{Ker} h$.

Норма функционала p_h называется *нормой гомоморфизма* h и обозначается $\| h \|$. Итак,

$$\| h \| = \sup_x \frac{\| hx \|_1}{\| x \|} = \sup_{\| x \| = 1} \| hx \|_1.$$

В частности, тем самым введено понятие *нормы линейного оператора* A в нормированном пространстве

$$\| A \| = \sup_x \frac{\| Ax \|}{\| x \|} = \sup_{\| x \| = 1} \| Ax \|$$

и *нормы линейного функционала* f в нормированном пространстве

$$\|f\| = \sup \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|.$$

40. Функционал $\|h\|$ в пространстве $\mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$ обладает всеми свойствами нормы.

Это и есть индуцированная норма в $\mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$ (в частности, в $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$ и в E').

Для эрмитовых гомоморфизмов норма вводится точно так же, как для гомоморфизмов. В частности, тем самым вводится индуцированная норма в E^*.

Индуцированная норма гомоморфизмов обладает некоторыми специальными свойствами, связанными с алгеброй гомоморфизмов.

41. $\|h_2h_1\| \leqslant \|h_2\| \cdot \|h_1\|$ (кольцевое свойство).

42. $\|I\| = 1$ (сохранение единицы).

Можно также определить *норму билинейного функционала*, полагая

$$\|B\| = \sup_{x,\ y} \frac{|B(x,\ y)|}{\|x\| \cdot \|y\|} = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |B(x,\ y)|,$$

и аналогично — *норму эрмитово-билинейного функционала*. Наконец, *норма квадратичного функционала* определяется как

$$\|Q\| = \sup_x \frac{|Q(x)|}{\|x\|^2} = \sup_{\|x\|=1} |Q(x)|$$

и аналогично — *норма эрмитово-квадратичного функционала*.

43. Если B_Q — поляра квадратичного функционала Q, то

$$\|Q\| \leqslant \|B_Q\| \leqslant \mu(\mathrm{E}) \|Q\|.$$

Таким образом:

44. В евклидовом пространстве $\|B_Q\| = \|Q\|$.

Для того чтобы сформулировать аналогичные результаты, относящиеся к эрмитово-квадратичным функционалам, введем еще одну *меру неевклидовости*:

$$\mu^{(c)}(\mathrm{E}) = \sup_{x,\ y} \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + \|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2}{4(\|x\|^2 + \|y\|^2)}.$$

45. Имеет место точное неравенство $1 \leqslant \mu^{(c)}(\mathrm{E}) \leqslant 2$. Для того чтобы пространство E было евклидовым, необходимо и достаточно, чтобы $\mu^{(c)}(\mathrm{E}) = 1$.

46. Если H_K — поляра эрмитово-квадратичного функционала K, то

$$\|K\| \leqslant \|H_K\| \leqslant 2\mu^{(c)}(\mathrm{E})\|K\|.$$

47. Для вещественного эрмитово-квадратичного функционала имеет место неравенство

$$\|K\| \leqslant \|H_K\| \leqslant \mu^{(c)}(\mathrm{E})\|K\|.$$

Таким образом:

48. Если K — вещественный эрмитово-квадратичный функционал в евклидовом пространстве, то

$$\|H_K\| = \|K\|.$$

Отметим еще, что:

49. Норма билинейного (эрмитово-билинейного) функционала равна норме каждого из его генераторов.

Тем самым нормы левого и правого генераторов равны.

§ 3. Абсолютно выпуклые множества и преднормы. Обобщенные преднормы

Множество W в пространстве E называется *абсолютно выпуклым*, если для любых $x, y \in \mathrm{W}$ и для любых чисел α, β, удовлетворяющих условию $|\alpha| + |\beta| = 1$, имеет место включение

$$\alpha x + \beta y \in \mathrm{W}.$$

50. Абсолютно выпуклое множество W симметрично относительно нуля: если $x \in \mathrm{W}$, то $-x \in \mathrm{W}$.

51. Каждое непустое абсолютно выпуклое множество содержит нуль.

52. Если W — абсолютно выпуклое множество и $x \in \mathrm{W}$, то $\alpha x \in \mathrm{W}$ при любом α, удовлетворяющем неравенству $|\alpha| \leqslant 1$.

Абсолютно выпуклое множество называется *абсолютно выпуклым телом*, если оно содержит некоторую окрестность нуля.

53. Если p — преднорма, то *единичный шар* $p(x) \leqslant 1$ является замкнутым абсолютно выпуклым телом.

54. Если p_1 и p_2 — преднормы и соответствующие им единичные шары совпадают, то $p_1(x) = p_2(x)$ $(x \in \mathrm{E})$.

Таким образом, единичный шар однозначно определяет преднорму.

Пусть, наоборот, W — какое-нибудь замкнутое абсолютно выпуклое тело. Рассмотрим множество положительных чисел α, для которых при фиксированном x

$$x/\alpha \in \mathrm{W}.$$

Нижнюю грань этого множества обозначим через $p_{\mathrm{W}}(x)$.

55. Функционал $p_{\mathrm{W}}(x)$ является преднормой, и соответствующий единичный шар совпадает с W.

Функционал $p_{\mathrm{W}}(x)$ называется *функционалом Минковского* тела W. Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между преднормами и замкнутыми абсолютно выпуклыми телами.

56. Для того чтобы преднорма p была нормой, необходимо и достаточно, чтобы соответствующий единичный шар был ограниченным множеством.

В связи с этим отметим, что:

57. Для того чтобы множество F в нормированном пространстве было ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы оно содержалось в некотором шаре $\|x\| \leqslant r$.

Полезное обобщение изложенной теории получится, если допустить функционалы, принимающие значение $+\infty$. Сохраняя в остальном определение преднормы, мы получаем понятие *обобщенной преднормы*.

Пусть p — обобщенная преднорма. Положим

$$\mathrm{Dom}\, p = \{x \mid p(x) < +\infty\}.$$

58. Множество $\mathrm{Dom}\, p$ либо пусто, либо является подпространством.

Если $\mathrm{Dom}\, p \neq \varnothing$, то функционал $p \mid \mathrm{Dom}\, p$ — преднорма в $\mathrm{Dom}\, p$.

59. Если $\mathrm{Dom}\, p \neq \varnothing$, то $p(0) = 0$ (и обратно).

60. Единичный шар $p(x) \leqslant 1$ является замкнутым абсолютно выпуклым множеством, непустым тогда и только тогда, когда $\mathrm{Dom}\, p$ не пусто. Абсолютно выпуклым телом он будет тогда и только тогда, когда p — преднорма.

61. Если p_1 и p_2 — обобщенные преднормы и соответствующие им единичные шары совпадают, то $p_1(x) = p_2(x)$ $(x \in \mathrm{E})$.

Пусть теперь W — какое-нибудь замкнутое абсолютно выпуклое множество. Введем функционал Минковского $p_{\mathrm{W}}(x)$ точно так же, как и для случая тела.

62. Функционал $p_{\mathrm{W}}(x)$ является обобщенной преднормой, и соответствующий единичный шар совпадает с W.

Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между обобщенными преднормами и замкнутыми абсолютно выпуклыми множествами.

Понятия подчиненности и эквивалентности непосредственно переносятся на обобщенные преднормы.

63. Для того чтобы обобщенная преднорма p_1 была подчинена обобщенной преднорме p_2, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathrm{Ker}\, p_2 \subset \mathrm{Ker}\, p_1; \quad \mathrm{Dom}\, p_2 \subset \mathrm{Dom}\, p_1.$$

64. Для того чтобы обобщенные преднормы p_1 и p_2 были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathrm{Ker}\, p_1 = \mathrm{Ker}\, p_2; \quad \mathrm{Dom}\, p_1 = \mathrm{Dom}\, p_2.$$

Сформулируем критерии подчиненности и эквивалентности в терминах единичных шаров. Будем говорить, что множество W_1 *поглощает* множество W_2, если существует такое $q > 0$, что $q\mathrm{W}_2 \subset \mathrm{W}_1$.

Пусть p_1 и p_2 — обобщенные преднормы, W_1 и W_2 — соответствующие абсолютно выпуклые множества.

65. Для того чтобы p_1 была подчинена p_2, необходимо и достаточно, чтобы W_1 поглощало W_2. Для того чтобы p_1 и p_2 были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы W_1 и W_2 поглощали друг друга.

§ 4. Теория Хана — Банаха

Под теорией Хана — Банаха мы понимаем теорию продолжения гомоморфизмов, заданных на подпространствах нормированного пространства E.

66. Пусть $\mathrm{L} \neq 0$ — подпространство пространства E, E_1 — еще одно нормированное пространство, $h \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$. Тогда $\| h \mid \mathrm{L} \| \leqslant \| h \|$.

Поэтому при продолжении гомоморфизма норма либо увеличивается, либо сохраняется.

Основная проблема состоит в выяснении возможности продолжения гомоморфизма с сохранением нормы. Укажем один подход к решению этой проблемы. Начнем со следующего очевидного замечания.

67. Если $P \neq 0$ — проектор, то $\|P\| \geqslant 1$.

Теперь для данного подпространства $\mathrm{L} \neq 0$ рассмотрим множество $\Pi(\mathrm{L})$ всех проекторов на подпространство L и положим

$$\omega(\mathrm{L},\ \mathrm{E}) = \inf_{P \in \Pi(\mathrm{L})} \|P\|.$$

Величина $\omega(\mathrm{L},\ \mathrm{E})$ называется *проекционной константой* подпространства L. Очевидно, $\omega(\mathrm{L},\ \mathrm{E}) \geqslant 1$. Можно привести примеры, когда $\omega(\mathrm{L},\ \mathrm{E}) > 1$.

68. В $\Pi(\mathrm{L})$ существует такой проектор $P(\mathrm{L})$, что $\omega(\mathrm{L},\mathrm{E}) = \|P(\mathrm{L})\|$.

Таким образом, $\omega(\mathrm{L},\ \mathrm{E}) = \min\limits_{P \in \Pi(\mathrm{L})} \|P\|$.

69. Для того чтобы каждый гомоморфизм $h \in \mathrm{Hom}(\mathrm{L},\ \mathrm{E}_1)$ $(\mathrm{L} \neq 0)$ допускал продолжение $\tilde{h} \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E},\ \mathrm{E}_1)$ с сохранением нормы, необходимо и достаточно, чтобы $\omega(\mathrm{L},\ \mathrm{E}) = 1$.

Применим этот общий результат к случаю евклидова пространства.

70. Если $P \neq 0$ — ортопроектор в евклидовом пространстве, то $\|P\| = 1$.

Следовательно:

71. Условие $\omega(\mathrm{L},\ \mathrm{E}) = 1$ выполняется для всех подпространств $\mathrm{L} \neq 0$ евклидова пространства *) E.

72. Если E — евклидово пространство, то для каждого его подпространства $\mathrm{L} \neq 0$ и каждого гомоморфизма $h \in \mathrm{Hom}(\mathrm{L},\ \mathrm{E}_1)$ существует продолжение $\tilde{h} \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E},\ \mathrm{E}_1)$ с сохранением нормы.

Между прочим, теорема **70** обращается:

73. Если P — проектор в евклидовом пространстве и $\|P\| = 1$, то P — ортопроектор.

Это дает повод называть *ортопроектором* в нормированном пространстве проектор P, для которого $\|P\| = 1$. Усло-

---

*) Это свойство является характеристическим для евклидова пространства (см. § 2 гл. VII).

вие $\omega(\mathrm{L}, \mathrm{E})=1$ означает, что $P(\mathrm{L})$ — ортопроектор, иначе говоря, что существует ортопроектор на L.

Введем понятие ортогональности векторов в нормированном пространстве.

Вектор y называется *ортогональным* к вектору x, если

$$\|x+\alpha y\| \geqslant \|x\| \qquad (*)$$

для всех α.

Так определенная ортогональность, вообще говоря, несимметрична. Однако в евклидовом пространстве это — прежняя ортогональность:

74. В евклидовом пространстве соотношение (*) для всех α выполняется тогда и только тогда, когда $(x, y)=0$.

Подпространство M нормированного пространства E называется *ортогональным к подпространству* L, если, как обычно, каждый вектор $y \in \mathrm{M}$ ортогонален каждому вектору $x \in \mathrm{L}$.

75. Если подпространство M ортогонально к подпространству L, то M и L взаимно независимы.

Однако произвольное подпространство L может не иметь ортогонального дополнения, т. е. дополнения, ортогонального к L в рассматриваемом смысле. Может также случиться, что ортогональное дополнение существует, но не единственно.

76. Для того чтобы подпространство L обладало ортогональным дополнением, необходимо и достаточно, чтобы $\omega(\mathrm{L}, \mathrm{E})=1$.

Это предложение тесно связано со следующим:

77. Для того чтобы проектор P был ортопроектором, необходимо и достаточно, чтобы подпространство $\operatorname{Ker} P$ было ортогонально подпространству $\operatorname{Im} P$.

При этом ввиду несимметрии свойства ортогональности дополнительный проектор $\overline{P}$ может уже не быть ортопроектором.

Обозначим через T_x множество тех векторов пространства E, которые ортогональны к вектору $x \in \mathrm{E}$. Множество T_x может не быть подпространством. Однако:

78. Если $y \in \mathrm{T}_x$, то $\alpha y \in \mathrm{T}_x$ при всех α.

В частности, $0 \in \mathrm{T}_x$.

79. Если $x \neq 0$, то $x \,\overline{\in}\, \mathrm{T}_x$.

80. Если $x=0$, то $\mathrm{T}_x=\mathrm{E}$.

81. $\mathrm{T}_{\alpha x}=\mathrm{T}_x \; (\alpha \neq 0)$.

Ниже мы увидим, что множество T_x всегда достаточно богато векторами.

Подпространство M называется *ортогональным к вектору* x, если $M \subset T_x$, т. е. если M ортогонально к линейной оболочке L вектора x. Очевидно, если M — ортогональное к x подпространство, то каждое его подпространство также является ортогональным к x.

82. Каждое ортогональное к x подпространство содержится в некотором максимальном ортогональном к x подпространстве.

Если $x \neq 0$ и M — максимальное ортогональное к x подпространство, то, в силу **79**, $M \neq E$, т. е. $\operatorname{codim} M \geqslant 1$.

На самом же деле:

83. Если $x \neq 0$ и M — максимальное ортогональное к x подпространство, то $\operatorname{codim} M = 1$ (теорема Асколи — Мазура).

Иными словами, M является ортогональным дополнением к одномерному подпространству, порождаемому вектором x.

Доказательство этой фундаментальной теоремы опирается на следующие две леммы.

84. Пусть N — ортогональное к x подпространство, h_N — гомоморфизм стягивания пространства E по модулю N. Тогда

$$\|h_N y\| \leqslant \|y\| \qquad (y \in E) \quad \text{и} \quad \|h_N x\| = \|x\|.$$

Таким образом, $\|h_N\| = 1$.

85. Если $\dim E > 1$, то для любого вектора x существует вектор $y \neq 0$, ортогональный к x.

Рассмотрим основные следствия теоремы Асколи — Мазура:

86. Если $x \neq 0$ и T_x является подпространством, то $\operatorname{codim} T_x = 1$.

87. Если L — одномерное подпространство, то $\omega(L, E) = 1$.

Следовательно, любой гомоморфизм, заданный на одномерном подпространстве, можно с сохранением нормы продолжить на все пространство. В частности:

88. Любой линейный функционал g, определенный на подпространстве, можно продолжить на все пространство с сохранением нормы (теорема Хана — Банаха).

Это — центральная теорема рассматриваемой теории. С ее помощью легко устанавливается теорема Минковского:

89. Для любого вектора x существует такой линейный функционал $f_x \neq 0$, что

$$|f_x(x)| = \|f_x\| \cdot \|x\|.$$

Функционал f_x называется *опорным* функционалом (к шару $\{y \mid \|y\| = \|x\|\}$) в точке x. Он определен по крайней мере с точностью до множителя $\lambda \neq 0$.

Опорные функционалы связаны с ортогональными подпространствами следующим предложением:

90. Для того чтобы линейный функционал $f \neq 0$ был опорным в точке x, необходимо и достаточно, чтобы подпространство $\operatorname{Ker} f$ было ортогональным к вектору x.

91. Для того чтобы опорный функционал в точке $x \neq 0$ был определен однозначно с точностью до множителя, необходимо и достаточно, чтобы T_x было подпространством.

Заметим еще, что независимо от теоремы Хана — Банаха

92. Каждый линейный функционал $f \neq 0$ является опорным в некоторой точке $x \neq 0$.

Это предложение позволяет построить в нормированном пространстве аналог процесса ортогонализации Сонина — Шмидта.

93. Для любого базиса $\{u_k\}_1^n$ существует нормированный базис $\{e_k\}_1^n$ такой, что линейная оболочка системы $\{e_k\}_1^{j-1}$ ($j=2, 3, \ldots, n$) ортогональна к вектору e_j и совпадает с линейной оболочкой системы $\{u_k\}_1^{j-1}$.

Базис $\{e_k\}_1^n$, обладающий тем же свойством, что при каждом $j = 2, 3, \ldots, n$ линейная оболочка системы $\{e_k\}_{k<j}$ ортогональна к вектору e_j, называется *полуортогональным*. Теорема **93** гарантирует существование полуортогонального базиса.

Базис $\{e_k\}_1^n$ называется *ортогональным* (или *базисом Ауэрбаха*), если при каждом $j = 1, 2, \ldots, n$ линейная оболочка системы $\{e_k\}_{k \neq j}$ ортогональна к вектору e_j. Ортогональный базис также существует, но его построение требует более сложных средств (см. § 5 гл. V).

94. Канонический базис в l^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ является нормированным базисом Ауэрбаха.

Распространим теорему Хана — Банаха на гомоморфизмы.

95. Пусть $g \neq 0$ — гомоморфизм из подпространства $L \subset E$ в нормированное пространство E_1, причем $\operatorname{rg} g \leqslant \operatorname{codim} L + 1$.

Тогда существует такое подпространство $\tilde{L} \supset L$, что

$$\operatorname{codim} \tilde{L} = \operatorname{rg} g - 1,$$

и g можно продолжить на $\tilde{L}$ с сохранением нормы.

Теория Хана — Банаха без существенных изменений переносится на эрмитово-линейные функционалы и эрмитовы гомоморфизмы.

Отметим еще обобщение теоремы Хана — Банаха на «преднормированное» пространство. Линейный функционал f называется *подчиненным* обобщенной преднорме p, если преднорма $|f|$ подчинена обобщенной преднорме p. При этом

$$\| f \|_p \underset{\text{def}}{=} \sup_x \frac{|f(x)|}{p(x)}.$$

96. Если p — обобщенная преднорма в E и g — линейный функционал, определенный на подпространстве и подчиненный там обобщенной преднорме p, то существует продолжение $\tilde{g} \in E'$, подчиненное p и удовлетворяющее условию $\| \tilde{g} \|_p = \| g \|_p$.

§ 5. Изометрия, универсальность, вложение

Нормированное пространство E называется *изометричным* пространству E_1, если E и E_1 изоморфны, причем существует изоморфизм $j \in \operatorname{Hom}(E, E_1)$, сохраняющий норму векторов:

$$\| jx \| = \| x \|.$$

Такой изоморфизм называется *изометрией* пространств E и E_1. Очевидно, изометричность пространств является отношением эквивалентности.

97. Изометрия сохраняет расстояния:

$$d(jx, jy) = d(x, y) \qquad (x, y \in E).$$

Обратно, любой эпиморфизм, сохраняющий расстояния, является изометрией.

Эрмитовой изометрией пространств E и E_1 называется эрмитов изоморфизм, сохраняющий норму векторов.

98. Каноническое комплексное сопряжение $E' \to E^*$ является эрмитовой изометрией.

Но это не означает, что пространства E' и E^* изометричны.

99. Канонические изоморфизмы $E \to E''$, $E \to E^{**}$ являются изометриями.

Эта фундаментальная теорема легко выводится из теоремы Минковского.

С помощью **99** и **49** устанавливаются равенства:

100. $\|h^*\| = \|h'\| = \|h\|$.

Рассмотрим теперь несколько примеров.

101. Все евклидовы пространства одной и той же размерности изометричны.

102. Если $p_1 \neq p$ $(1 \leqslant p, p_1 \leqslant \infty)$, то пространство l^{p_1} не изометрично пространству l^p, за исключением случаев двумерных l и c и одномерных пространств.

В частности:

103. Пространство l^p при $p \neq 2$ неевклидово (исключая одномерный случай).

Введем для любого p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ двойственный индекс $q = \frac{p}{p-1}$, так что

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

104. Пространство, сопряженное к l^p, изометрично l^q.

В частности, пространство, сопряженное к l, изометрично c, а сопряженное к c изометрично l.

Теорема **104** выражает в геометрической форме известное в анализе неравенство Гельдера

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q\right)^{1/q},$$

которое при $p = 2$ превращается в неравенство Коши (см. § 1).

Для двух изоморфных, но, вообще говоря, не изометричных пространств E_1, E_2 можно ввести числовую характеристику неизометричности.

Мерой неизометричности нормированных пространств E_1 и E_2 $(\dim E_1 = \dim E_2)$ называется величина

$$\delta(E_1, E_2) = \inf_j \|j\| \cdot \|j^{-1}\|.$$

где j пробегает множество изоморфизмов из E_1 в E_2. При этом величина

$$\rho(E_1,\ E_2) = \ln \delta(E_1,\ E_2)$$

называется *расстоянием Банаха — Мазура* между пространствами E_1 и E_2.

105. Расстояние Банаха — Мазура обладает свойствами метрики:

1) $\rho(E_1,\ E_2) \geqslant 0$ (знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда E_1 и E_2 изометричны),

2) $\rho(E_1,\ E_2) = \rho(E_2,\ E_1)$;

3) $\rho(E_1,\ E_2) \leqslant \rho(E_1,\ E_3) + \rho(E_3,\ E_2)$.

106. $\rho(E_1',\ E_2') = \rho(E_1,\ E_2)$.

107. Пусть Δ_1 и Δ_2 — канонические базисы пространств l^{p_1} и l^{p_2}. Тогда для изоморфизма $j \in \mathrm{Hom}(l^{p_1},\ l^{p_2})$, отображающего Δ_1 на Δ_2, имеют место соотношения

$$\| j \| = 1, \quad \| j^{-1} \| = n^{1/p_1 - 1/p_2} \qquad (1 \leqslant p_1 \leqslant p_2).$$

Поэтому:

108. $\delta(l^{p_1},\ l^{p_2}) \leqslant n^{1/p_1 - 1/p_2} \qquad (1 \leqslant p_1 \leqslant p_2)$.

В частности:

109. $\delta(l^p,\ c) \leqslant n^{1/p}$.

С другой стороны:

110. $\delta(l^p,\ l^2) \geqslant n^{1/2 - 1/p} \qquad (2 \leqslant p \leqslant \infty)$.

Отсюда, в силу **106**, следует:

111. $\delta(l^p,\ l^2) \geqslant n^{1/p - 1/2} \qquad (1 \leqslant p \leqslant 2)$.

Итак:

112. $\delta(l^p,\ l^2) = n^{|1/2 - 1/p|} \qquad (1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

Отсюда и из неравенства треугольника для расстояния Банаха — Мазура следует формула Гурария — Кадеца — Мацаева:

113. $\delta(l^{p_1},\ l^{p_2}) = n^{|1/p_1 - 1/p_2|} \qquad (p_1 - 2)(p_2 - 2) \geqslant 0$.

Нормированное пространство E_0 называется *универсальным* для некоторого класса $\mathfrak{E}$ нормированных пространств, если для любого $E \in \mathfrak{E}$ существует в E_0 подпространство, изометричное E. Ближайшие предложения являются подготовительными к теореме **117** об универсальности пространства c.

Если L — подпространство пространства E, $\operatorname{codim} L = 1$ и $x_0 \bar{\in} L$, то множество

$$F(x_0, L) = \{x \mid x = y + \alpha x_0, \quad y \in L, \quad |\alpha| \leqslant 1\}$$

назовем *гиперслоем*. Пересечение W конечного числа гиперслоев называется *симметричным многогранником*. Если наименьшее число гиперслоев, образующих в пересечении симметричный многогранник W, равно m, то W называется симметричным *$2m$-гранником*.

114. Симметричный многогранник является абсолютно выпуклым телом.

115. Ограниченность симметричного многогранника $W = \bigcap_{k=1}^{r} F(x_k, L_k)$ равносильна соотношению $\bigcap_{k=1}^{r} L_k = 0$.

Для выполнения последнего соотношения необходимо, чтобы $r \geqslant n$.

Если W_m — ограниченный симметричный $2m$-гранник, то через $E(W_m)$ обозначим нормированное пространство с нормой, порождаемой в E многогранником W_m как единичным шаром.

116. Пусть W_m — ограниченный симметричный $2m$-гранник

$$W_m = \bigcap_{k=1}^{m} F(x_k, L_k).$$

Если $z = y_k + \alpha_k x_k$ ($y_k \in L$; $k = 1, 2, \ldots, m$), то норма вектора z в $E(W_m)$ равна

$$\|z\| = \max_{1 \leqslant k \leqslant m} |\alpha_k|.$$

В частности, $\|x_k\| = 1$ ($k = 1, 2, \ldots, m$).

117. Любое пространство $E(W_m)$ изометрично некоторому подпространству пространства c ($\dim c = m$).

Таким образом, пространство c является универсальным для класса всех пространств вида $E(W_m)$, где $m \leqslant \dim c$.

В некотором ослабленном смысле универсальность c сохраняется для класса всех нормированных пространств (см. **120**).

118. Для любого n-мерного нормированного пространства E и произвольного $\varepsilon > 0$ существуют такое $m = m(n, \varepsilon)$ и такое пространство $E(W_m)$, что $\rho(E, E(W_m)) < \varepsilon$.

Для доказательства можно аппроксимировать единичный шар в E симметричными многогранниками, опираясь при этом на следующее предложение.

119. Если $\{e_k\}_1^n$ — нормированный полуортогональный базис, то расстояние d_j вектора e_j от линейной оболочки системы $\{e_k\}_{k \neq j}$ удовлетворяет неравенству $d_j \geqslant 2^{1-n}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Нормированное пространство E_0 называется *ε-универсальным* для некоторого класса $\mathfrak{E}$ нормированных пространств, если для любого $E \in \mathfrak{E}$ существует в E_0 подпространство L_0 такое, что $\rho(E, L_0) < \varepsilon$.

120. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $m = m(n, \varepsilon)$, что пространство c размерности m является ε-универсальным для класса всех n-мерных нормированных пространств.

Это — аппроксимационный аналог теоремы Банаха — Мазура.

В заключение рассмотрим оценки проекционных констант при изометрическом вложении одного нормированного пространства в другое.

121. Если пространство E содержит подпространство L ($\dim L = m$), изометричное l^p, то $\omega(L, E) \leqslant m^{1/p}$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

Для доказательства можно воспользоваться теоремой Хана — Банаха применительно к каноническим координатам, перенесенным из l^p в L. При $p = \infty$ теорема **121** дает:

122. Если пространство E содержит подпространство L, изометричное c, то $\omega(L, E) = 1$.

В связи с **121** заметим, что из существования базиса Ауэрбаха в любом нормированном пространстве E следует:

123. Для любого подпространства L ($\dim L = m$) пространства E

$$\omega(L, E) \leqslant m.$$

§ 6. Наилучшие приближения

В § 2 мы ввели функционал $d(x; L)$ — расстояние вектора x от подпространства L. В связи с этим понятием дадим следующее определение. Вектор $y \in L$ называется *наилучшим приближением* вектора x векторами из подпространства L, если

$$\| x - y \| = d(x; L).$$

124. Наилучшее приближение существует для любых x и L. Следовательно, можно писать

$$d(x;\ \mathrm{L}) = \min_{y \in \mathrm{L}} \| x - y \|.$$

Наилучшее приближение может быть не единственным.

125. Если $x \in \mathrm{L}$, то его наилучшее приближение векторами из L единственно и равно x.

126. Для того чтобы вектор y был наилучшим приближением вектора x векторами из подпространства L, необходимо и достаточно, чтобы подпространство L было ортогонально к разности $x - y$.

Поэтому, например:

127. В евклидовом пространстве вектор y является наилучшим приближением вектора x векторами из подпространства L тогда и только тогда, когда $y = P(\mathrm{L})\,x$, где $P(\mathrm{L})$ — ортопроектор на L.

Таким образом, в евклидовом пространстве наилучшее приближение единственно.

Пространство E называется *строго нормированным*, если в неравенстве треугольника

$$\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$$

знак равенства достигается только в случае, когда векторы x, y линейно зависимы (тогда с необходимостью $y = \alpha x$, где $\alpha > 0$, или $x = 0$).

128. Евклидово пространство строго нормировано.

129. Все пространства l^p $(1 < p < \infty)$ строго нормированы.

Однако:

130. Пространства l и c не являются строго нормированными.

Этот пример типичен в том смысле, что:

131. Если пространство не является строго нормированным, то в нем существуют такие линейно независимые векторы e_1, e_2, что

$$\| \alpha e_1 + \beta e_2 \| = |\alpha| + |\beta|$$

при любых вещественных α, β.

Роль понятия строгой нормированности определяется следующим предложением:

132. Для того чтобы для каждого вектора $x \in \mathrm{E}$ и для каждого подпространства $\mathrm{L} \subset \mathrm{E}$ наилучшее приближение вектора x

векторами из L было единственным, необходимо и достаточно, чтобы пространство E было строго нормированным.

Тем самым в строго нормированном пространстве для каждого подпространства L определен *оператор* $A(\mathrm{L})$ *наилучшего приближения*, который каждый вектор x преобразует в его наилучшее приближение векторами из L. Этот оператор, вообще говоря, нелинеен, хотя и однороден:

133. $A(\mathrm{L})(\alpha x)=\alpha A(\mathrm{L})x$.

Кроме того, он обладает основным свойством проектора:

134. $[A(\mathrm{L})]^2=A(\mathrm{L})$.

Это — *нелинейный ортопроектор* на L. В евклидовом пространстве он совпадает с ортопроектором $P(\mathrm{L})$.

135. Оператор $A(\mathrm{L})$ непрерывен.

В силу **135** и **133** можно ввести норму оператора $A(\mathrm{L})$:

$$\|A(\mathrm{L})\|=\sup_{\|x\|=1}\|A_{\mathrm{L}}x\|=\sup_{x}\frac{\|A_{\mathrm{L}}x\|}{\|x\|}.$$

136. $\|A(\mathrm{L})\|\geqslant 1 \quad (\mathrm{L}\neq 0)$.

Рассмотрим дополнительный оператор $\overline{A(\mathrm{L})}=I-A(\mathrm{L})$. Он также однороден и непрерывен, и поэтому для него можно также ввести норму

$$\|\overline{A(\mathrm{L})}\|=\sup_{\|x\|=1}\|\overline{A(\mathrm{L})}\,x\|=\sup_{x}\frac{\|\overline{A(\mathrm{L})}\,x\|}{\|x\|}.$$

Она совпадает с нормой функционала $d(\cdot;\mathrm{L})$. На деле:

137. $\|\overline{A(\mathrm{L})}\|=1 \quad (\mathrm{L}\neq \mathrm{E})$.

Рассмотрим теперь задачу о наилучших приближениях относительно цепи подпространств. При этом пространство E уже вновь не будет предполагаться строго нормированным.

Пусть $\{\mathrm{L}_k\}_0^n$ — какая-нибудь максимальная цепь подпространств. Положим

$$d_k(x)=d(x;\mathrm{L}_k) \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Очевидно, $d_0(x)=\|x\|$, $d_n(x)=0$.

138. $d_0(x)\geqslant d_1(x)\geqslant d_2(x)\geqslant\ldots\geqslant d_n(x)$.

Оказывается, обратно:

139. Для любой системы чисел

$$\delta_0\geqslant\delta_1\geqslant\delta_2\geqslant\ldots\geqslant\delta_n \qquad (\delta_n=0)$$

существует такой вектор x, что

$$\delta_k(x)=\delta_k \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

(теорема С. Н. Бернштейна).

Рассмотрим случай цепи подпространств, порожденной базисом $\{e_j\}_1^n$:

$$\mathrm{L}_k = \mathrm{L}\left(\{e_j\}_1^k\right) \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Базис $\{e_k\}_1^n$ называется *базисом наилучшего приближения*, если для любого вектора $x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$ имеет место равенство

$$d_k(x) = \left\| \sum_{j=k+1}^{n} \xi_j e_j \right\|.$$

Обозначим через R_k проектор на линейную оболочку системы $\{e_j\}_{k+1}^n$ параллельно L_k. Очевидно,

$$R_k x = \sum_{j=k+1}^{n} \xi_j e_j,$$

и наилучшее приближение вектора x векторами из L_k равно

$$\bar{R}_k x = \sum_{j=1}^{k} \xi_j e_j.$$

140. Для того чтобы базис $\{e_j\}_1^n$ был базисом наилучшего приближения, необходимо и достаточно выполнения неравенств

$$\| R_0 x \| \geqslant \| R_1 x \| \geqslant \ldots \geqslant \| R_{n-1} x \|.$$

Базис наилучшего приближения обладает весьма специальными свойствами (настолько специальными, что может не существовать даже в трехмерном пространстве).

141. Для того чтобы базис $\{e_j\}_1^n$ был базисом наилучшего приближения, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1$ вектор e_k был ортогонален к линейной оболочке системы $\{e_j\}_{k+1}^n$.

Базис наилучшего приближения является объектом, двойственным к полуортогональному базису.

142. Канонический базис пространства $l^p\ (1 \leqslant p \leqslant \infty)$ является базисом наилучшего приближения.

§ 7. Раствор двух подпространств. Метрическое пространство подпространств

Пусть $\mathrm{L} \neq 0$ — подпространство. Обозначим через $\mathrm{S_L}$ единичную сферу:

$$\mathrm{S_L} = \{x \mid x \in \mathrm{L}, \quad \|x\| = 1\}.$$

При $\mathrm{L} = 0$ положим $\mathrm{S_L} = 0$.

Раствором подпространств L и M называется величина

$$\theta(\mathrm{L}, \mathrm{M}) = \max\{\sup_{x \in \mathrm{S_M}} d(x; \mathrm{L}), \quad \sup_{x \in \mathrm{S_L}} d(x; \mathrm{M})\}.$$

Раствор удовлетворяет неравенству:

143. $\theta(\mathrm{L}, \mathrm{M}) \leqslant 1$.

Раствор обладает некоторыми свойствами метрики:

144. 1) $\theta(\mathrm{L}, \mathrm{M}) > 0 \quad (\mathrm{L} \neq \mathrm{M})$; $\theta(\mathrm{L}, \mathrm{L}) = 0$;

2) $\theta(\mathrm{M}, \mathrm{L}) = \theta(\mathrm{L}, \mathrm{M})$.

Однако неравенство треугольника может не выполняться. В дальнейшем определение раствора будет слегка модифицировано с тем, чтобы получить метрику на множестве подпространств. В евклидовом пространстве раствор, как мы сейчас увидим, является метрикой.

145. Для любых двух подпространств L, M евклидова пространства имеет место формула

$$d(x; \mathrm{L}) = \|[P(\mathrm{M}) - P(\mathrm{L})]\, x\| \qquad (x \in \mathrm{M}).$$

Следовательно,

146. $\theta(\mathrm{L}, \mathrm{M}) \leqslant \|P(\mathrm{M}) - P(\mathrm{L})\|$.

На самом же деле:

147. $\theta(\mathrm{L}, \mathrm{M}) = \|P(\mathrm{M}) - P(\mathrm{L})\|$.

Для доказательства можно воспользоваться тождеством:

148. $\|[P(\mathrm{M}) - P(\mathrm{L})]\, x\|^2 =$

$$= \|P(\mathrm{M})[I - P(\mathrm{L})]\, x\|^2 + \|[I - P(\mathrm{M})]\, P(\mathrm{L})\, x\|^2.$$

В силу **147**:

149. В евклидовом пространстве имеет место неравенство треугольника

$$\theta(\mathrm{L}, \mathrm{M}) \leqslant \theta(\mathrm{L}, \mathrm{N}) + \theta(\mathrm{N}, \mathrm{M}).$$

Другим очевидным следствием формулы **147** является самодвойственность раствора:

150. $\theta(\mathrm{L}^{\perp}, \mathrm{M}^{\perp}) = \theta(\mathrm{L}, \mathrm{M})$.

Теперь мы можем также выяснить условия достижения знака равенства в **143**:

151. Для того чтобы в евклидовом пространстве было $\theta(\mathrm{L}, M) = 1$, необходимо и достаточно, чтобы по крайней мере одно из подпространств L, M содержало ненулевой вектор, ортогональный к другому подпространству, т. е. $\mathrm{L} \cap \mathrm{M}^{\perp} \neq 0$ или $\mathrm{L}^{\perp} \cap \mathrm{M} \neq 0$.

Отсюда вытекает важное следствие:

152. Если в евклидовом пространстве $\theta(\mathrm{L}, M) < 1$, то

$$\dim \mathrm{L} = \dim M$$

(теорема Секефальви-Надя).

Обратное, конечно, неверно.

В дополнение к теореме **152** отметим следующее предложение:

153. Пусть P и Q — ортопроекторы на L и M соответственно ($\theta(\mathrm{L}, M) < 1$). Тогда оператор $S = I + P(Q - P)P$ самосопряженный положительный и оператор $V = QS^{-1/2}P$ изометрически отображает L на M.

Теорема Секефальви-Надя обобщается на произвольно нормированные конечномерные пространства, но это обобщение связано с использованием специальных топологических средств *).

Сферическим раствором ненулевых подпространств L, M называется величина

$$\tilde{\theta}(\mathrm{L}, M) = \max\left(\sup_{x \in \mathrm{S_M}} d(x; \mathrm{S_L}),\ \sup_{x \in \mathrm{S_L}} d(x; \mathrm{S_M})\right),$$

где $d(x; \mathrm{F})$ означает расстояние вектора x от компактного множества F. Дополним это определение, полагая

$$\tilde{\theta}(0, \mathrm{M}) = \tilde{\theta}(\mathrm{M}, 0) = 1 \qquad (\mathrm{M} \neq 0), \quad \theta(0, 0) = 0.$$

Эта модификация понятия раствора в количественном отношении не очень значительна:

154. Сферический раствор удовлетворяет неравенству

$$\theta(\mathrm{L}, M) \leqslant \tilde{\theta}(\mathrm{L}, M) \leqslant 2\theta(\mathrm{L}, M).$$

---

*) См. М. А. Красносельский, М. Г. Крейн, Д. П. Мильман, О дефектных числах линейных операторов в банаховом пространстве и о некоторых геометрических вопросах, Сб. Тр. Ин-та матем. АН УССР 11 (1948), 97—112.

Достоинство сферического раствора состоит в том, что:

155. Сферический раствор является метрикой.

Заметим, что понятия раствора и сферического раствора не совпадают даже в случае евклидова пространства. Существует иная модификация понятия раствора — так называемый *шаровой раствор* $\breve{\theta}$, определяемый соотношением

$$\breve{\theta}(L, M) = \max\left\{\sup_{x \in V_M} d(x;\, V_L),\ \sup_{x \in V_L} d(x;\, V_M)\right\},$$

где V_L и V_M — единичные шары подпространств L и M.

156. В евклидовом пространстве $\breve{\theta}(L, M) = \theta(L, M)$.

Вместе с тем:

157. Шаровой раствор является метрикой.

158. $\theta(L, M) \leqslant \breve{\theta}(L, M) \leqslant \mathcal{C}\theta(L, M)$

($\mathcal{C}$ — абсолютная константа).

Множество подпространств нормированного пространства E, наделенное метрикой сферического (или шарового) раствора, является метрическим пространством. Мы обозначим его через $\mathfrak{S}(E)$. Исследуем свойства пространства $\mathfrak{S}(E)$. Прежде всего рассмотрим сходимость последовательностей. В силу **154**, **158** о сходимости можно судить по раствору θ:

159. Пусть $\{L_k\}_1^\infty$ — последовательность подпространств. Для того чтобы $\lim\limits_{k\to\infty} L_k = L$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{k\to\infty} \theta(L_k, L) = 0$.

160. Если $\lim\limits_{k\to\infty} L_k = L$, то подпространство L совпадает с множеством векторов x, которые являются пределами таких сходящихся последовательностей $\{x_k\}_1^\infty$, что $x_k \in L_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.

Описанное здесь множество векторов определено для любой последовательности подпространств $\{L_k\}_1^\infty$ и называется в общем случае *нижним пределом* этой последовательности; оно соответственно обозначается через $\varliminf\limits_{k\to\infty} L_k$. Итак, если $\lim\limits_{k\to\infty} L_k$ существует, то он совпадает с $\varliminf\limits_{k\to\infty} L_k$.

Верхним пределом последовательности $\{L_k\}_1^\infty$ называется сумма подпространств вида $\varliminf_{j\to\infty} L_{k_j}$, отвечающих всевозможным подпоследовательностям $\{L_{k_j}\}_{j=1}^\infty$. Обозначение для верхнего предела: $\varlimsup_{k\to\infty} L_k$.

161. $\varliminf_{k\to\infty} L_k \subset \varlimsup_{k\to\infty} L_k$.

162. Для того чтобы последовательность подпространств $\{L_k\}_1^\infty$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы

$$\varliminf_{k\to\infty} L_k = \varlimsup_{k\to\infty} L_k.$$

Ясно, что все нормы в основном пространстве E порождают одну и ту же топологию в пространстве $\mathfrak{G}(E)$. Поэтому, изучая $\mathfrak{G}(E)$ как топологическое пространство, мы вправе считать пространство E евклидовым. Это значительно упрощает исследование. Например, из теоремы Секефальви-Надя сразу следует:

163. Для любого $L \in \mathfrak{G}(E)$ существует такая окрестность, в которой все подпространства имеют ту же размерность, что и L (ср. **289** гл. I).

164. Множество $\mathfrak{G}_m(E)$ подпространств фиксированной размерности m в $\mathfrak{G}(E)$ открыто и замкнуто.

Топологическое пространство $\mathfrak{G}_m(E)$ называется *многообразием Грассмана* ранга m.

Итак, топологическое пространство $\mathfrak{G}(E)$ не связно. Будет ли связной каждая «однородная» часть $\mathfrak{G}_m(E)$? Ответ на этот вопрос потребует дальнейшего исследования.

Обозначим через $\mathfrak{S}_m(E)$ множество всех ортонормированных систем $\{u_k\}_1^m$ в E. Пусть $\Gamma = \{u_k\}_1^m$, $\Gamma_1 = \{v_k\}_1^m$ — две системы. Положим

$$\delta(\Gamma, \Gamma_1) = \sqrt{\sum_{k=1}^m \| u_k - v_k \|^2}.$$

165. Функционал δ является метрикой на $\mathfrak{S}_m(E)$.

Тем самым $\mathfrak{S}_m(E)$ превращается в метрическое, а значит, и в топологическое пространство. Оно называется *многообразием Штифеля* ранга m.

Рассмотрим теперь отображение $\mathfrak{L}_m$: $\mathfrak{S}_m(\mathrm{E}) \to \mathfrak{G}_m(\mathrm{E})$, определенное формулой

$$\mathfrak{L}_m\Gamma = \mathrm{L}(\Gamma) \qquad (\Gamma \in \mathfrak{S}_m(\mathrm{E})).$$

166. L_m является непрерывным отображением пространства $\mathfrak{S}_m(\mathrm{E})$ на пространство $\mathfrak{G}_m(\mathrm{E})$.

Но:

167. Пространство $\mathfrak{S}_m(\mathrm{E})$ связно.

Поэтому:

168. Пространство $\mathfrak{G}_m(\mathrm{E})$ связно.

Отображение $\mathfrak{L}_m$ полезно и в других вопросах. Например, его можно использовать для доказательства компактности многообразия Грассмана.

169. Пространство $\mathfrak{S}_m(\mathrm{E})$ компактно (ср. **174** гл. III).

170. Пространство $\mathfrak{G}_m(\mathrm{E})$ компактно.

Следовательно:

171. Пространство $\mathfrak{G}(\mathrm{E})$ компактно.

Это — фундаментальный факт. Одно из его непосредственных следствий состоит в том, что пространство $\mathfrak{G}(\mathrm{E})$ полно.

Между прочим, отображение $\mathfrak{L}_m$ можно в некотором смысле обратить. Обозначим через $\tilde{\mathfrak{S}}_m(\mathrm{E})$ множество всех линейно независимых систем в E, и пусть $\mathfrak{T}$: $\tilde{\mathfrak{S}}_m(\mathrm{E}) \to \mathfrak{S}_m(\mathrm{E})$ — отображение, определяемое процессом ортогонализации.

172. Пусть $\mathrm{L}_0 \in \mathfrak{G}_m(\mathrm{E})$, Γ_0 — ортонормированный базис в L_0. Тогда система $\Gamma(\mathrm{L}) = \mathfrak{T}P(L)\Gamma_0$ является ортонормированным базисом подпространства L в окрестности $\theta(\mathrm{L}, \mathrm{L}_0) < 1$ (ср. **153**).

В заключение остановимся на теории возмущений базисов. Заметим, что метрику δ можно рассматривать на множестве всех (а не только ортонормированных) систем $\{u_k\}_1^m$. Это позволяет сформулировать следующую *теорему о квадратично-близких базисах*.

173. Если Δ — ортонормированный базис, то все точки шара $\delta(\Gamma, \Delta) < 1$ являются базисами.

Эта теорема точна в том смысле, что:

174. На сфере $\delta(\Gamma, \Delta) = 1$ существует система, не являющаяся базисом.

Сформулируем родственную **173** *теорему Винера — Пэли*:

175. Если $\{e_k\}_1^n$ — ортонормированный базис, то каждая система $\{u_k\}_1^n$, удовлетворяющая неравенству вида

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (u_k - e_k)\right\|^2 \leqslant \theta \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \qquad (0 \leqslant \theta < 1)$$

при всех $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ является базисом. При этом если $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k u_k$, то

$$(1-\theta) \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2 \leqslant \|x\|^2 \leqslant (1+\theta) \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2.$$

Эта теорема также точна.

Для произвольного базиса $\{e_k\}_1^n$ и даже в любом нормированном пространстве E справедлива следующая теорема Крейна — Мильмана — Рутмана:

176. Если $\Delta = \{e_k\}_1^n$ — базис в E, $\Delta' = \{f_k\}_1^n$ — сопряженный базис в E′, то каждая система $\{u_k\}_1^n$, удовлетворяющая неравенству

$$\sum_{k=1}^{n} \|f_k\| \cdot \|u_k - e_k\| < 1,$$

является базисом.

В частности:

177. Если $\{e_k\}_1^n$ — нормированный базис Ауэрбаха, то каждая система $\{u_k\}_1^n$, удовлетворяющая неравенству

$$\sum_{k=1}^{n} \|u_k - e_k\| < 1,$$

является базисом.

Теорема **177** точна:

178. Если $\{e_k\}_1^n$ — нормированный базис Ауэрбаха, то существует линейно зависимая система $\{u_k\}_1^n$, для которой

$$\sum_{k=1}^{n} \|u_k - e_k\| = 1.$$

§ 8. Изометрические операторы и сжатия. Эргодическая теория

Изометрическим оператором в нормированном пространстве E называется изометрия $E \to E$.

179. Изометрические операторы образуют группу относительно умножения.

Изометричность можно описать в терминах нормы оператора:

180. Для того чтобы регулярный оператор A был изометрическим, необходимо и достаточно, чтобы

$$\|A\| = 1, \qquad \|A^{-1}\| = 1.$$

Заметим здесь, что (ср. **105**, **1**)):

181. Для любого регулярного оператора A имеет место неравенство

$$\|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geqslant 1.$$

Знак равенства здесь достигается тогда и только тогда, когда $A = \rho U$, где U — изометрический оператор.

Поэтому достаточные условия в **180** можно ослабить:

182. Если регулярный оператор A удовлетворяет неравенствам $\|A\| \leqslant 1$, $\|A^{-1}\| \leqslant 1$, то он изометрический.

Оператор A, удовлетворяющий условию

$$\|A\| \leqslant 1,$$

называется *сжатием*. Сжатие называется *строгим*, если

$$\|A\| < 1.$$

183. Сжатия образуют полугруппу относительно умножения.

Из **100** следует:

184. Оператор, сопряженный со сжатием (с изометрическим оператором) является сжатием (изометрическим оператором).

То же верно для эрмитово-сопряженного оператора.

В евклидовом пространстве множество изометрических операторов хорошо обозримо:

185. Для того чтобы оператор в евклидовом пространстве был изометрическим, необходимо и достаточно, чтобы он был унитарным.

Спектральная теория унитарных операторов в значительной части переносится на произвольные изометрические операторы.

186. Изометрический оператор имеет унитарный спектр.

187. Изометрический оператор является оператором скалярного типа.

Более того:

188. Если циклическая группа $\{A^k\}_{-\infty}^{\infty}$, порождаемая регулярным оператором A, ограничена, т. е. $\sup\limits_{-\infty<k<\infty} \|A^k\| < \infty$, то A — оператор скалярного типа с унитарным спектром. Обратное утверждение также верно.

Теорема **188** является лишь формальным обобщением теорем **186—187**, ибо:

189. Если $\sup\limits_{-\infty<k<\infty} \|A^k\| < \infty$, то функционал $\sup\limits_{-\infty<k<\infty} \|A^k x\|$ $(x \in \mathrm{E})$ является нормой и оператор A изометричен относительно этой нормы.

Исследуем ортогональность собственных подпространств изометрического оператора.

190. Пусть U — изометрический оператор, $\{P_j\}_1^m$ — его разложение единицы, $\{e^{i\theta_j}\}_1^m$ — соответствующие собственные значения. Тогда

$$P_j = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2r+1} \sum_{k=-r}^{r} e^{-ik\theta_j} U^k \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Из этой формулы вытекает, что:

191. Все проекторы P_j в разложении единицы изометрического оператора являются ортопроекторами: $\|P_j\| = 1$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

Следовательно:

192. Собственные подпространства изометрического оператора взаимно ортогональны. Более того, для каждого собственного подпространства прямая сумма остальных собственных подпространств служит ортогональным дополнением.

Базис Δ в E называется *абсолютным*, если норма вектора зависит только от модулей координат относительно базиса Δ. Примером абсолютного базиса является канонический базис пространства l^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. В евклидовом пространстве класс абсолютных базисов совпадает с классом ортогональных базисов.

193. Каждый абсолютный базис является базисом Ауэрбаха.

Обратное неверно. Более того, существуют нормированные пространства без абсолютного базиса.

194. Если оператор с унитарным спектром обладает абсолютным собственным базисом, то он изометрический.

Обратное, конечно, неверно, но становится верным, если наложить дополнительное условие эргодичности. Изометрический оператор U называется *эргодическим*, если его спектр $\{e^{i\theta_j}\}$ прост и показатели θ_j рационально независимы, т. е. из равенства $\sum_{j=1}^{n} \rho_j\theta_j = 0$ с рациональными коэффициентами ρ_j вытекает $\rho_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Последнее свойство равносильно тому, что для любого набора вещественных чисел $\{\omega_j\}_1^n$, и любого $\varepsilon > 0$ существуют такие целые k, q_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, что

$$|k\theta_j + 2\pi q_j - \omega_j| < \varepsilon \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

195. Собственный базис эргодического оператора — абсолютный.

Из спектральной теории непосредственно вытекает эргодическая теорема:

196. Для любого изометрического оператора U существует предел

$$P = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r+1} \sum_{k=0}^{r} U^k.$$

Оператор P является ортопроектором на подпространство неподвижных точек оператора: $\operatorname{Im} P = \{x \mid Ux = x\}$ (ср. **190**).

Эргодическая теорема может быть доказана без помощи спектральной теории, и на этом пути обнаруживается возможность обобщить эргодическую теорему на произвольные сжатия.

197. Если A — сжатие, то все средние арифметические

$$A_r = \frac{1}{r+1} \sum_{k=0}^{r} A^k \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots)$$

также являются сжатиями.

198. Если P — предел какой-нибудь подпоследовательности последовательности $\{A_r\}_0^\infty$, то

$$AP = PA = P.$$

Отсюда:

199. $P^2 = P$.

Таким образом, P — проектор. Более того:

200. P — ортопроектор на подпространство неподвижных точек оператора A.

Остается установить независимость P от выбора сходящейся подпоследовательности. Для этого достаточно заметить, что:

201. Пределы любых двух сходящихся подпоследовательностей последовательности $\{A_r\}_0^\infty$ коммутируют.

Таким образом, доказана эргодическая теорема для сжатий:

202. Для любого сжатия A существует предел

$$P = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r+1} \sum_{k=0}^{r} A^k.$$

Оператор P является ортопроектором на подпространство неподвижных точек оператора A.

Оператор P можно полностью описать в спектральных терминах:

203. Подпространство $\operatorname{Ker} P$ совпадает с суммой корневых подпространств оператора A, соответствующих собственным значениям, отличным от 1.

Для доказательства **203** следует принять во внимание, что, во-первых:

204. Спектр сжатия лежит в единичном круге $|\lambda| \leqslant 1$.

Во-вторых:

205. Порядки собственных значений сжатия, лежащих на единичной окружности $|\lambda| = 1$, равны единице.

В дополнение к **205** отметим, что:

206. Собственные подпространства сжатия, соответствующие граничным собственным значениям, взаимно ортогональны.

На пути обобщения эргодической теоремы можно сделать еще один формальный шаг.

207. Если циклическая полугруппа $\{A^k\}_0^\infty$, порождаемая оператором A, ограничена, т. е. $\sup\limits_{k\geqslant 0}\|A^k\|<\infty$, то существует предел

$$P=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r+1}\sum_{k=0}^{r}A^k.$$

Оператор P является проектором на подпространство неподвижных точек оператора A.

Это обобщение — чисто формальное, ибо аналогично **189**:

208. Если $\sup\limits_{k\geqslant 0}\|A^k\|<\infty$, то функционал

$$\sup_{k\geqslant 0}\|A^kx\|\;(x\in E)$$

является нормой и оператор A является сжатием относительно этой нормы.

Дальнейшее обобщение эргодической теоремы невозможно:

209. Если для оператора A существует предел

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r+1}\sum_{k=0}^{r}A^k,$$

то $\sup\limits_{k\geqslant 0}\|A^k\|<\infty$.

Отметим еще интересную модификацию теоремы **208** в случае евклидова пространства:

210. Если оператор A в евклидовом пространстве удовлетворяет условию $\sup\limits_{k\geqslant 0}\|A^k\|<\infty$, то он является сжатием относительно некоторой евклидовой нормы (вообще говоря, отличной от исходной нормы).

§ 9. Норма и спектральный радиус оператора

В **128** гл. II была указана довольно сложная процедура вычисления спектрального радиуса через степени оператора. Эту процедуру можно значительно упростить, используя норму.

211. $\rho(A)\leqslant\|A\|$.

Отсюда:

212. $\rho(A)\leqslant\sqrt[k]{\|A^k\|}\quad k=(1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$.

Следовательно:

213. $\rho(A) \leqslant \underline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|A\|^k}$.

С другой стороны, из тех же соображений, что и в гл. II:

214. $\rho(A) = \overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|A^k\|}$.

Сопоставляя **213** и **214**, приходим к формуле Гельфанда *):

215. $\rho(A) = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|A^k\|}$.

В силу **212** можно также написать:

216. $\rho(A) = \inf_{k\geqslant 1} \sqrt[k]{\|A^k\|}$.

Отметим одно интересное следствие формулы Гельфанда:

217. Если $A \cup B$, то

$$\rho(A+B) \leqslant \rho(A) + \rho(B), \quad \rho(AB) \leqslant \rho(A)\rho(B).$$

Кроме того, очевидно,

$$\rho(A) \geqslant 0, \quad \rho(\alpha A) = |\alpha|\rho(A).$$

Возвратимся к исходному неравенству **211** и выясним, при каких условиях оно обращается в равенство.

218. Если A — регулярный оператор и

$$\|A\| = \rho(A), \quad \|A^{-1}\| = \rho(A^{-1}),$$

то $A = \rho U$, где $\rho = \rho(A) > 0$, U—изометрический оператор.

219. Для того чтобы $\|A\| = \rho(A)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\|A^k\| = \|A\|^k \quad (k = 2, 3, \ldots).$$

---

*) Из 213 и 214 вытекает как существование предела в правой части равенства 215, так и само равенство. Существование предела может быть также выведено независимо из теоремы Фекете: если последовательность вещественных чисел $\{\alpha_k\}_1^\infty$ полуаддитивна, т. е. $\alpha_{k+j} \leqslant \alpha_k + \alpha_j$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, то существует $\lim_{k\to\infty} k^{-1}\alpha_k \left(= \inf_{k\to\infty} k^{-1}\alpha_k\right)$.

Рассмотрим случай евклидова пространства.

220. Если N — нормальный оператор, то $\|N\| = \rho(N)$.

221. Для того чтобы оператор A в евклидовом пространстве удовлетворял условию $\|A\| = \rho(A)$, необходимо и достаточно, чтобы он был нормальным или имел вид

$$A = N \oplus R,$$

где N—нормальный оператор, а R удовлетворяет неравенствам

$$\rho(R) \leqslant \rho(N), \quad \|R\| \leqslant \|N\|$$

(ср. **282** гл. III).

Заметим, кстати, что из экстремальных свойств собственных значений следует, что:

222. В евклидовом пространстве

$$\|A\| = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(AA^*)}.$$

223. В евклидовом пространстве

$$\|A\| = \max_{\substack{\|x\|=1,\\ \|y\|=1}} |(Ax, y)|.$$

Таким образом, норма оператора совпадает с нормой порождаемого им эрмитово-билинейного функционала. Для эрмитово-квадратичных функционалов это уже неверно.

224. Имеет место неравенство $\max\limits_{\|x\|=1} |(Ax, x)| \leqslant \|A\|$.

Иначе говоря, хаусдорфово множество оператора A заключено в круге $|\lambda| \leqslant \|A\|$.

225. Для того чтобы $\max\limits_{\|x\|=1} |(Ax, x)| = \|A\|$, необходимо и достаточно, чтобы $\|A\| = \rho(A)$.

Наряду с неравенством **224** имеет место неравенство:

226. $\|A\| \leqslant 2 \max\limits_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$.

Это неравенство точное:

227. При $n > 1$ существует такой оператор A, что

$$\|A\| = 1, \quad \max_{\|x\|=1} |(Ax, x)| = \frac{1}{2}.$$

Заметим теперь, что левая часть неравенства **211** не зависит от выбора нормы в E. Нельзя ли при данном A выбрать норму так, чтобы неравенство превратилось в равенство? Препятствие к этому указывает теорема **205**. Однако с помощью **207** можно установить, что:

228. $\rho(A) = \inf\limits_{\|\cdot\|} \|A\|$.

С помощью **209** можно получить более точное утверждение:

229. Если A — оператор в евклидовом пространстве, то

$$\rho(A) = \inf_T \|TAT^{-1}\|.$$

Иными словами, в **228** можно брать inf лишь по евклидовым нормам.

230. Нижняя грань в **228** достигается тогда и только тогда, когда порядки собственных значений, лежащих на окружности $|\lambda| = \rho(A)$, равны 1.

Применим формулу Гельфанда для вычисления расстояния $d(\lambda;\ A)$ точки λ на комплексной плоскости от спектра $\sigma(A)$.

231. $d(\lambda;\ A) = \dfrac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|R_\lambda^k\|}} \qquad (R_\lambda = R_\lambda(A)).$

Вместе с тем:

232. $d(\lambda;\ A) = \sup\limits_{k \geqslant 1} \dfrac{1}{\sqrt[k]{\|R_\lambda^k\|}}$.

Здесь содержится часто используемое неравенство:

233. $\|R_\lambda\| \geqslant \dfrac{1}{d(\lambda;\ A)}$.

При этом:

234. Если N — нормальный оператор в евклидовом пространстве, то $\|R_\lambda\| = \dfrac{1}{d(\lambda;\ A)}$.

Обратно:

235. Если для оператора A в евклидовом пространстве $\|R_\lambda\| = \dfrac{1}{d(\lambda;\ A)}$, то A — нормальный оператор.

В частности:

236. Если S — самосопряженный оператор в евклидовом пространстве, то

$$\|R_\lambda\| \leqslant \frac{1}{|\mathfrak{Im}\,\lambda|}.$$

Обратно:

237. Если для оператора A в евклидовом пространстве

$$\|R_\lambda\| \leqslant \frac{1}{|\mathfrak{Im}\,\lambda|},$$

то A — самосопряженный оператор.

Аналогично:

238. Если U — унитарный оператор в евклидовом пространстве, то $\|R_\lambda\| \leqslant \frac{1}{|1-|\lambda||}$, и обратно, из этого неравенства следует унитарность оператора.

Этот результат обобщается на нормированные пространства:

239. Если U — изометрический оператор в нормированном пространстве, то $\|R_\lambda\| \leqslant \frac{1}{|1-|\lambda||}$, и обратно, из этого неравенства следует, что оператор изометрический.

§ 10. Нормы в пространстве операторов

Пространство операторов $\mathfrak{M}(E)$ можно рассматривать как самостоятельное n^2-мерное комплексное линейное пространство и в соответствии с этим вводить в нем ту или иную норму, независимо от нормы в E. Те нормы в $\mathfrak{M}(E)$, которые индуцируются нормами в E, мы будем называть *операторными* нормами. Нормы в $\mathfrak{M}(E)$, для которых имеет место кольцевое свойство

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\| \quad (A,\ B \in \mathfrak{M}(E)),$$

будем называть *кольцевыми*. Наконец, нормы, для которых $\|I\| = 1$, будем называть *сохраняющими единицу*. Каждая операторная норма является кольцевой и сохраняющей единицу.

240. Если E — унитарное пространство, то $\mathfrak{M}(E)$ — унитарное пространство относительно скалярного произведения $(A, B) = \operatorname{sp} AB^*$.

241. Норма

$$\|A\| = \sqrt{\operatorname{sp} AA^*}$$

является кольцевой, но при $n > 1$ не сохраняющей единицу (и, следовательно, не операторной).

Эта норма в $\mathfrak{M}(E)$ называется *гильбертовой* (или *абсолютной*) нормой. Мы уже с ней встречались (§ 9 гл. III).

242. Пусть Δ — какой-нибудь базис в E, $(\alpha_{jk})_{j,k=1}^{n}$ — матрица произвольного оператора A в этом базисе. Положим

$$\|A\| = \frac{1}{n} \sum_{j,k=1}^{n} |\alpha_{jk}|.$$

Это—норма, сохраняющая единицу, но не кольцевая при $n > 1$.

243. Положим

$$\|A\| = \mathcal{C} \max_{j,k} |\alpha_{jk}|, \qquad (*)$$

где $0 < \mathcal{C} < n$, $\mathcal{C} \neq 1$. Эта норма не кольцевая и не сохраняющая единицу.

Между прочим, норма (*) при $\mathcal{C} \geqslant n$ становится кольцевой (но не сохраняющей единицу), при $\mathcal{C} = 1$ она сохраняет единицу (но не кольцевая при $n > 1$).

244. Если Δ — канонический базис в l, $(\alpha_{jk})_{j,k=1}^{n}$ — матрица оператора A в этом базисе, то соответствующая операторная норма (*операторная l-норма*) равна

$$\max_{k} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{jk}|.$$

245. Если Δ — канонический базис в c, $(\alpha_{jk})_{j,k=1}^{n}$ — матрица оператора A в этом базисе, то соответствующая операторная норма (*операторная c-норма*) равна

$$\max_{j} \sum_{k=1}^{n} |\alpha_{jk}|.$$

246. Для каждой кольцевой нормы имеет место неравенство $\|I\| \geqslant 1$.

Пусть в $\mathfrak{M}(E)$ введена какая-нибудь норма (исходная норма), не обязательно кольцевая или сохраняющая единицу. Тогда можно определить *производную* норму

$$\|A\|' = \sup_{B \neq 0} \frac{\|AB\|}{\|B\|}.$$

247. Производная норма всегда является кольцевой и сохраняющей единицу.

248. Если исходная норма кольцевая, то $\|A\|' \leqslant \|A\|$.

249. Если исходная норма сохраняет единицу или хотя бы удовлетворяет условию $\|I\| \leqslant 1$, то $\|A\|' \geqslant \|A\|$.

250. Для того чтобы норма была кольцевой и сохраняющей единицу, необходимо и достаточно, чтобы она совпадала со своей производной.

Теорема **248** побуждает ввести в множество всех норм в $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$ отношение порядка, определяемое как выполнение неравенства $\|A\|_1 \leqslant \|A\|_2$ при всех $A \in \mathfrak{M}(\mathrm{E})$. В этом смысле можно говорить, что одна норма меньше или равна (больше или равна) другой, или является ее минорантой (мажорантой). Конечно, нормы могут быть несравнимыми. Например, производная норма в общем случае не сравнима с исходной, так как теоремы **248**, **249** обращаются:

251. Если производная норма меньше или равна исходной, то исходная норма кольцевая.

252. Если производная норма больше или равна исходной, то для исходной нормы $\|I\| \leqslant 1$.

Обобщим понятие производной нормы. Пусть $\mathfrak{J} \neq 0$ — какой-нибудь левый идеал алгебры $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$. Для каждой нормы в $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$ определяется ее производная норма относительно идеала $\mathfrak{J}$

$$\|A\|'_{\mathfrak{J}} = \sup_{\substack{B \neq 0 \\ B \in \mathfrak{J}}} \frac{\|AB\|}{\|B\|}.$$

253. Норма $\|A\|'_{\mathfrak{J}}$ всегда является кольцевой и сохраняющей единицу.

254. Производная кольцевой нормы относительно любого левого идеала $\mathfrak{J} \neq 0$ является минорантой исходной нормы.

Это — обобщение теоремы **248**. Что касается теоремы **249**, то она не обобщается на идеалы $\mathfrak{J} \neq \mathfrak{M}(\mathrm{E})$, так как такие идеалы не содержат единицы.

Мы используем производные нормы относительно идеалов для того, чтобы получить характеристику операторных норм. Определим с этой целью левый идеал $\mathfrak{J}(f)$ $(f \in \mathrm{E}', f \neq 0)$ условием

$$\mathrm{Ker}\, A \supset \mathrm{Ker}\, f$$

(см. **21** гл. II).

255. Для того чтобы $A \in \mathfrak{J}(f)$, необходимо и достаточно, чтобы A имел вид $Ay = f(y)\,x$, где x — некоторый вектор.

Операторы такого вида можно рассматривать как тензорные произведения и обозначать соответственно $f \otimes x$.

256. $A(f \otimes x) = f \otimes Ax \quad (A \in \mathfrak{M}(\mathrm{E}))$.

257. Если пространство E нормировано, то для индуцированных норм имеет место формула $\| f \otimes x \| = \| f \| \cdot \| x \|$.

Роль идеалов $\mathfrak{J}(f)$ определяется следующим предложением:

258. Для любой нормы в $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$ ее производная относительно любого идеала $\mathfrak{J}(f)$ является операторной нормой.

Поэтому:

259. Если для некоторой нормы в $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$ ее производная относительно какого-нибудь идеала $\mathfrak{J}(f)$ совпадает с ней, то исходная норма операторная.

Этот признак, на первый взгляд лишь достаточный, на самом деле необходим:

260. Для каждой операторной нормы ее производная относительно любого идеала $\mathfrak{J}(f)$ совпадает с ней.

Итак, мы получили полную характеристику операторных норм. Но она еще не позволяет указать кольцевую норму, сохраняющую единицу, но не операторную. Поэтому продолжим наше исследование.

261. Каждая кольцевая норма имеет операторную миноранту.

Назовем кольцевую норму *минимальной*, если она не имеет кольцевых минорант, отличных от нее самой.

262. Минимальная кольцевая норма является операторной.

Этот признак операторности нормы необходим:

263. Для того чтобы кольцевая норма была операторной, необходимо и достаточно, чтобы она была минимальной.

Доказательство необходимости опирается на следующие леммы **264—266**.

264. Если в пространстве E введены две нормы $\| x \|_1$ и $\| x \|_2$ и для соответствующих операторных норм в $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$ выполняется неравенство

$$\| A \|_1 \leqslant \| A \|_2 \qquad (A \in \mathfrak{M}(\mathrm{E})),$$

то

$$\sup_{x \in \mathrm{E}} \frac{\| x \|_1}{\| x \|_2} \leqslant \inf_{f \in \mathrm{E}'} \frac{\| f \|_2}{\| f \|_1} \qquad (x \neq 0,\ f \neq 0).$$

265. Для любых двух норм в E

$$\sup_{x \in \mathrm{E}} \frac{\| x \|_1}{\| x \|_2} = \sup_{f \in \mathrm{E}'} \frac{\| f \|_2}{\| f \|_1}, \qquad \inf_{x \in \mathrm{E}} \frac{\| x \|_1}{\| x \|_2} = \inf_{f \in \mathrm{E}'} \frac{\| f \|_2}{\| f \|_1}.$$

Таким образом, области значений функционалов $\frac{\|x\|_1}{\|x\|_2}$, $\frac{\|f\|_2}{\|f\|_1}$ совпадают.

266. Если операторные нормы в $\mathfrak{M}(E)$ сравнимы (в смысле определенного выше порядка), то порождающие их нормы в E пропорциональны, а исходные операторные нормы совпадают.

Из критерия **263** вытекает, в частности, что:

267. Если $\|A\|_1$ и $\|A\|_2$ — две различные операторные нормы в $\mathfrak{M}(E)$, то норма $\|A\| = \max(\|A\|_1, \|A\|_2)$ является кольцевой, сохраняющей единицу, но не операторной.

Например:

268. Норма

$$\|A\| = \max\left(\max_j \sum_{k=1}^{n} |\alpha_{jk}|, \quad \max_k \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{jk}|\right),$$

построенная по матрице $(\alpha_{jk})_{j,k=1}^{n}$ оператора A в произвольном фиксированном базисе, не является операторной (при $n > 1$), но она кольцевая и сохраняет единицу.

В заключение отметим, что в $\mathfrak{M}(E)$ не имеет особого смысла рассматривать преднормы, ибо:

269. Если преднорма $p \neq 0$ в $\mathfrak{M}(E)$ обладает кольцевым свойством $p(AB) \leqslant p(A)\,p(B)$, то p есть норма (см. **25** гл. II).

§ 11. Неравенства между нормами степеней оператора

Назовем оператор A в нормированном пространстве E *оператором класса* $\mathscr{K}$, если для него имеют место неравенства

$$\|A^k x\| \leqslant \mathscr{C}_{m,k} \cdot \|x\|^{\frac{m-k}{m}} \cdot \|A^m x\|^{\frac{k}{m}}$$

при всех $x \in E$, $m = 2, 3, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$; $\mathscr{C}_{m,k}$ — константы. Если A—оператор класса $\mathscr{K}$, то наименьшее возможное значение константы $\mathscr{C}_{m,k}$ обозначим $\mathscr{C}_{m,k}(A)$.

270. Если для оператора A имеет место неравенство

$$\|Ax\| \leqslant \mathscr{C}\|x\|^{1/2}\|A^2x\|^{1/2}$$

при всех $x \in E$, то A — оператор класса $\mathscr{K}$ и

$$\mathscr{C}_{m,k}(A) \leqslant \mathscr{C}^{k(m-k)}.$$

Таким образом, для любого оператора класса $\mathscr{K}$

$$\mathcal{C}_{m,k}(A) \leqslant [\mathcal{C}_{2,1}(A)]^{k(m-k)}.$$

271. Для того чтобы A был оператором класса $\mathscr{K}$, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{Ker} A^2 = \operatorname{Ker} A$, т. е. чтобы он был регулярным или порядок собственного значения $\lambda = 0$ был равен 1.

Эта теорема показывает, что принадлежность классу $\mathscr{K}$ не зависит от выбора нормы в E. Но, конечно, значения констант $\mathcal{C}_{m,k}(A)$ существенно зависят от выбора нормы.

272. Если A — регулярный оператор, то

$$\mathcal{C}_{m,k}(A) \leqslant \| A^k \|^{\frac{m-k}{m}} \left\| \left(A^{-1}\right)^{m-k} \right\|^{\frac{k}{m}}.$$

273. Если A — регулярный оператор, то $\mathcal{C}_{m,k}\left(A^{-1}\right) = \mathcal{C}_{m,m-k}(A)$.

274. Каждый оператор A скалярного типа является оператором класса $\mathscr{K}$, причем $\sup\limits_{m,k} \mathcal{C}_{m,k}(A) < \infty$.

Обратно:

275. Если оператор A класса $\mathscr{K}$ таков, что

$$\sup_{m,k} \mathcal{C}_{m,k}(A) < \infty,$$

то A — оператор скалярного типа.

276. Если $A \neq 0$ — оператор класса $\mathscr{K}$, то $\mathcal{C}_{m,k}(A) \geqslant 1$.

Для каких операторов в этом неравенстве достигается знак равенства? Мы исследуем этот вопрос для оператора A в евклидовом пространстве.

277. Если A — нормальный оператор, то $\mathcal{C}_{m,k}(A) = 1$ для всех m, k.

278. Если $\mathcal{C}_{m,k}(A) = 1$ для какой-нибудь пары m, k, то A — оператор скалярного типа.

279. Пусть λ и μ — такие два различных собственных числа, что соответствующие собственные подпространства неортогональны. Если $\mathcal{C}_{m,k}(A) = 1$ для некоторой пары m, k, то $\lambda^{d(m,k)} = \mu^{d(m,k)}$, где $d(m, k)$ — наибольший общий делитель чисел m и k.

280. Если $\mathcal{C}_{m,k}(A)=1$ для некоторой пары m, k и если функция $\varphi(\lambda)=\lambda^{d(m,k)}$ на спектре $\sigma(A)$ взаимно однозначна, то оператор A нормален.

281. Если

$$\mathcal{C}_{m,k}(A)=1 \qquad (*)$$

для некоторой пары m, k, то оператор $A^{d(m,k)}$ нормален.

В частности, если числа m, k взаимно просты, то из равенства $(*)$ следует нормальность оператора A.

282. Для любых m, k ($m \geqslant 2$, $1 \leqslant k \leqslant m-1$) существует такой оператор A класса $\mathcal{K}$ в евклидовом пространстве, что $\mathcal{C}_{m,k}(A)=1$, но ни одна из степеней A^q ($q=1, 2, \ldots, d(m, k)-1$) не является нормальным оператором.

ГЛАВА V
ПОЛИЛИНЕЙНАЯ И ВНЕШНЯЯ АЛГЕБРА

§ 1. Полилинейные отображения и тензоры

Пусть даны пространства $E_1, \ldots, E_p$, E. Отображение F декартова произведения $E_1 \times \ldots \times E_p$ в E (т. е. функция $F(x_1, \ldots, x_p)$ $(x_k \in E_k)$ со значениями в E) называется *полилинейным*, если оно является гомоморфизмом по каждому аргументу x_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$. Полилинейные отображения в арифметическое пространство C^1 называются *полилинейными функционалами* или *тензорами*. Число p называется *валентностью* тензора. Таким образом, полилинейный функционал от p аргументов можно называть p-валентным тензором. Одновалентный тензор — это линейный функционал, двухвалентный тензор — билинейный функционал.

Полилинейное отображение при $p = 2$ называется *билинейным*.

1. Отображение $F(h, x) = hx$ $(h \in \operatorname{Hom}(E_1, E_2),\ x \in E_1)$ билинейно.

2. Отображение $F(h_1, h_2) = h_1 h_2$ (h_1, h_2 — гомоморфизмы, для которых имеет смысл произведение $h_1 h_2$) билинейно.

Если в E определена алгебра, то соответствующее умножение является билинейным отображением $E \times E \to E$.

Полилинейные отображения тесно связаны с тензорными произведениями.

Тензорным произведением пространств $E_1, \ldots, E_p$ называется пространство

$$E_1 \otimes \ldots \otimes E_p$$

полилинейных функционалов на

$$E_1' \times \ldots \times E_p'.$$

Если $x_1, \ldots, x_p$ — какие-нибудь векторы из $E_1, \ldots, E_p$ соответственно, то полилинейный функционал

$$f_1(x_1) \ldots f_p(x_p)$$

от аргументов $f_1 \in E_1', \ldots, f_p \in E_p'$ называется *тензорным произведением векторов* $x_1, \ldots, x_p$ и обозначается

$$x_1 \otimes \ldots \otimes x_p.$$

Отметим, что $x_1 \otimes \ldots \otimes x_p = 0$ тогда и только тогда, когда среди множителей содержится нуль.

3. Отображение тензорного умножения

$$\tau(x_1, \ldots, x_p) = x_1 \otimes \ldots \otimes x_p \qquad (x_k \in E_k)$$

полилинейно.

4. Если F — полилинейное отображение в некоторое пространство E_0 и $h \in \mathrm{Hom}(E_0, E)$, то hF — полилинейное отображение в E.

Следовательно:

5. Для каждого гомоморфизма $h \in \mathrm{Hom}(E_1 \otimes \ldots \otimes E_p, E)$ отображение $F = h\tau$, т. е.

$$F(x_1, \ldots, x_p) = h(x_1 \otimes \ldots \otimes x_p) \qquad (x_k \in E_k)$$

полилинейно.

Оказывается, что таким способом можно получить все полилинейные отображения. В этом смысле тензорное умножение является универсальным полилинейным отображением.

6. Для каждого полилинейного отображения F из $E_1 \times \ldots \times E_p$ в E существует и единствен такой гомоморфизм $F_\tau \in \mathrm{Hom}(E_1 \otimes \ldots \otimes E_p, E)$, что $F = F_\tau \tau$.

При $p = 1$, очевидно, $F_\tau = F$.

Свойство универсальности характеризует тензорное умножение:

7. Пусть даны пространства $E_1, \ldots, E_p$, пространство E_0 и полилинейное отображение σ декартова произведения $E_1 \times \ldots \times E_p$ в E_0, причем 1) для каждого полилинейного отображения F из $E_1 \times \ldots \times E_p$ в произвольное пространство E существует такой гомоморфизм $F_\sigma \in \mathrm{Hom}(E_0, E)$, что $F = F_\sigma \sigma$; 2) образ отображения σ содержит систему, полную в E_0. Тогда E_0 изоморфно тензорному произведению

$E_1 \otimes \ldots \otimes E_p$ и при этом изоморфизме отображение σ преобразуется в τ, т. е. в тензорное умножение.

Обозначим через $\Pi(E_1, \ldots, E_p; E)$ линейное пространство полилинейных отображений $E_1 \times \ldots \times E_p \to E$ с естественными операциями сложения и умножения на число.

8. $\Pi(E_1, \ldots, E_p; E) \approx \mathrm{Hom}(E_1 \otimes \ldots \otimes E_p, E)$.

Отсюда:

9. $\dim \Pi(E_1, \ldots, E_p; E) = \dim E_1 \ldots \dim E_p \cdot \dim E$.

В частности:

10. Максимальное число линейно независимых умножений в пространстве E равно n^3.

Из **8** вытекает также, что естественным образом:

11. $E_1 \otimes \ldots \otimes E_p \approx (\Pi(E_1, \ldots, E_p; C^1))'$.

Пусть задан набор «основных» пространств $H_1, \ldots, H_p$ и по нему строится набор пространств $E_1, \ldots, E_p$ так, что либо $E_k = H_k$, либо $E_k = H'_k$ $(k = 1, \ldots, p)$ *). Тогда полилинейный функционал (тензор) на $E_1 \times \ldots \times E_p$ называется *ковариантным* по аргументу x_k, если $E_k = H_k$, и *контравариантным* по этому аргументу, если $E_k = H'_k$. Тензор ко(нтра)вариантный по всем аргументам называется *ко(нтра)вариантным.*

12. Линейный функционал в E является одновалентным ковариантным тензором $(H_1 = E)$.

Принцип двойственности позволяет трактовать каждый вектор из E как одновалентный контравариантный тензор $(H_1 = E)$.

13. Билинейный функционал в E является двухвалентным ковариантным тензором $(H_1 = H_2 = E)$.

14. Билинейный функционал $f(x)$ $(x \in E,\ f \in E')$ является двухвалентным тензором, ковариантным по аргументу x и контравариантным по аргументу f $(H_1 = H_2 = E)$.

Существует канонический способ отождествления любых полилинейных отображений с тензорами подходящего типа.

Пусть F: $E_1 \times \ldots \times E_p \to E$ — полилинейное отображение. Рассмотрим полилинейный функционал $f(F(x_1, \ldots, x_p))$ от $p+1$ аргументов $x_k \in E_k$, $f \in E'$ $(k = 1, \ldots, p)$,

*) Здесь имеется 2^p возможностей.

ковариантный по аргументам x_k и контравариантный по аргументу f. Тем самым определено отображение $\varkappa$:

$$\Pi(E_1, \ldots, E_p; E) \to \Pi(E_1, \ldots, E_p, E'; C^1).$$

15. Отображение $\varkappa$ является изоморфизмом.

На этом основании каждое полилинейное отображение можно именовать тензором.

16. Гомоморфизм из E_1 в E является двухвалентным тензором ($H_1 = E_1$, $H_2 = E$), ковариантным по первому аргументу и контравариантным по второму.

17. Умножение в E является трехвалентным тензором ($H_1 = H_2 = H_3 = E$), ковариантным по первым двум аргументам и контравариантным по третьему.

Значение тензорного языка состоит в том, что он единообразно описывает все основные объекты линейного анализа.

Распространим на произвольные тензоры координатно-матричное описание.

Выберем в каждом из основных пространств H_k ($\dim H_k = n_k$) базис $\Delta_k = \{e_j^k\}_{j=1}^{n_k}$. Если среди пространств есть совпадающие, то и базисы в них возьмем совпадающими. В каждом из сопряженных пространств H'_k возьмем сопряженный к Δ_k базис Δ'_k.

18. Пусть F есть p-валентный тензор, ковариантный по аргументам, которые будут обозначены x_k, и контравариантный по аргументам, которые будут обозначены f^s. Пусть $\{\xi_k^j\}_{j=1}^{n_k}$ – координаты вектора x_k относительно базиса Δ_k, $\{\eta_l^s\}_{l=1}^{n_s}$ — координаты функционала f^s относительно базиса Δ'_s. Тогда

$$F(\ldots, x_k, \ldots; \ldots, f^s, \ldots) =$$
$$= \sum_{(\ldots j \ldots l \ldots)} \alpha_{\ldots j \ldots}^{\ldots l \ldots} \ldots \xi_k^j \ldots \eta_l^s \ldots, \qquad (*)$$

где $\alpha_{\ldots j \ldots}^{\ldots l \ldots}$—числовая функция набора индексов $(\ldots j \ldots l \ldots)$, суммирование ведется по всем наборам индексов, все действия под знаком суммы — умножения.

$\alpha_{\ldots j \ldots}^{\ldots l \ldots}$ называется *матрицей* тензора F относительно выбранных базисов.

В частности, элементы матрицы умножения в E называются *структурными константами* соответствующей алгебры.

Правая часть равенства (*) называется *полилинейной формой*.

Теорема 18 определяет базис в пространстве тензоров рассматриваемого типа, индуцируемый выбранными базисами в основных пространствах. Базисными тензорами являются те, у которых равны нулю все матричные элементы, кроме одного, равного 1.

В заключение рассмотрим основные действия над тензорами.

Пусть $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_p)$, $\psi = \psi(y_1, \ldots, y_q)$ — два тензора (полилинейных функционала), причем наборы переменных $(x_1, \ldots, x_p)$, $(y_1, \ldots, y_q)$ не пересекаются. *Тензорным произведением* $\varphi \otimes \psi$ называется полилинейный функционал $\omega(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) = \varphi(x_1, \ldots, x_p)\psi(y_1, \ldots, y_q)$. Это общее определение согласовано с прежними определениями, относящимися к частным случаям линейных функционалов и векторов.

Очевидно, при умножении тензоров валентности складываются, а тип по каждому аргументу заимствуется от множителя, в который входит этот аргумент.

Тензорное умножение полилинейных отображений можно определить естественным образом через умножение соответствующих полилинейных функционалов. При этом если F_1 отображает $E_{11} \times \ldots \times E_{1p}$ в E_1, F_2 отображает $E_{21} \times \ldots \times E_{2q}$ в E_2, то $F_1 \otimes F_2$ отображает $E_{11} \times \ldots \times E_{1p} \times E_{21} \times \ldots \times E_{2q}$ в $E_1 \otimes E_2$. Для гомоморфизмов это определение сводится к прежнему.

19. При тензорном умножении полилинейных отображений F, G соответствующие гомоморфизмы F_τ, G_τ (см. **6**) тензорно перемножаются.

Следующая важная, но более специальная операция — свертывание тензора по сопряженным аргументам.

20. Если $\varphi(\ldots, x, \ldots, f, \ldots)$ — тензор, в котором x, f — сопряженные аргументы, т. е. $x \in E$, $f \in E'$, то существует и единственна полилинейная функция T_φ остальных аргументов со значениями в $\mathrm{Hom}(E, E)$ такая, что

$$\varphi(\ldots, x, \ldots, f, \ldots) = f(T_\varphi x).$$

Тензор $\operatorname{sp} T_\varphi$ (след оператора T_φ, рассматриваемый как функция остальных аргументов) называется *сверткой* тензора φ по аргументам x, f. При свертывании тензора его валентность уменьшается на 2. Здесь целесообразно ввести соглашение о том, что тензор нулевой валентности есть просто число (скаляр).

21. Свертка линейного оператора $T \in \operatorname{Hom}(E, E)$ равна $\operatorname{sp} T$.

22. Свертка билинейного функционала $f(x)$ равна $\dim E$.

Соотношение между свертыванием и тензорным умножением описывается следующей теоремой:

23. Пусть φ, ψ — два тензора, допускающих тензорное перемножение. Свертка тензорного произведения $\varphi \otimes \psi$ по аргументам, входящим в один из множителей, равна тензорному произведению свертки этого множителя на второй множитель.

Этот факт связан с тензорной мультипликативностью следа:

24. Для любых двух операторов $A_1 \in \mathfrak{M}(E_1)$, $A_2 \in \mathfrak{M}(E_2)$

$$\operatorname{sp}(A_1 \otimes A_2) = \operatorname{sp} A_1 \cdot \operatorname{sp} A_2.$$

Другие (не тензорные) умножения можно рассматривать как некоторые комбинации тензорного умножения и свертывания. Например:

25. Если $h \in \operatorname{Hom}(E, E_1)$, $h_1 \in \operatorname{Hom}(E_1, E_2)$, то произведение $h_1 h$ совпадает со сверткой тензора $h_1 \otimes h$ по соответствующим аргументам.

26. Если $h \in \operatorname{Hom}(E, E_1)$, $x \in E$, то «произведение» hx совпадает со сверткой тензора $h \otimes x$ по соответствующим аргументам.

Общая теорема редукции такова:

27. Пусть F — полилинейное отображение $E_1 \times \ldots \times E_p$ в E, рассматриваемое как тензор. Тогда «произведение» $F(x_1, \ldots, x_p)$ векторов $x_1, \ldots, x_p$ совпадает с p-кратной сверткой тензора $F \otimes x_1 \otimes \ldots \otimes x_p$ по соответствующим аргументам.

§ 2. Симметричные и антисимметричные тензоры. Теория детерминантов

В этом параграфе мы будем рассматривать только такие тензоры, все аргументы которых принадлежат одному и тому же пространству E, т. е. ковариантные по всем аргументам.

Тензор называется *симметричным*, если он не меняется при перестановках его аргументов:

$$\varphi\left(x_{j_1}, \ldots, x_{j_p}\right)=\varphi(x_1, \ldots, x_p).$$

28. В пространстве p-валентных тензоров симметричные тензоры образуют подпространство. Его размерность равна

$$\binom{n+p-1}{p}=\frac{n(n+1)\ldots(n+p-1)}{p!}.$$

Отметим, что размерность пространства p-валентных тензоров равна n^p (см. **9**).

29. Оператор Q, определенный в пространстве p-валентных тензоров формулой

$$(Q\varphi)(x_1, \ldots, x_p)=\frac{1}{p!}\sum_{(j_1, \ldots, j_p)}\varphi\left(x_{j_1}, \ldots, x_{j_p}\right),$$

где суммирование распространяется на все перестановки индексов $(1, \ldots, p)$, проектирует на подпространство симметричных тензоров.

Оператор Q называется *оператором симметризации.*

Тензор называется *антисимметричным*, если он не меняется при четных перестановках аргументов и умножается на —1 при нечетных перестановках.

30. В пространстве p-валентных тензоров антисимметричные тензоры образуют подпространство. Его размерность равна

$$\binom{n}{p}=\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}.$$

В частности, при $p>n$ она равна нулю.

31. Подпространство антисимметричных тензоров валентности $p>1$ входит в ядро оператора симметризации, но при $p>2$ не совпадает с ним.

Особо важную роль играет подпространство $\mathfrak{D}(\mathrm{E})$ антисимметричных тензоров валентности n.

32. $\dim\mathfrak{D}(\mathrm{E})=1$.

Согласно § 1 каждый базис Δ в E индуцирует базис в $\mathfrak{D}(\mathrm{E})$, который в силу **32** состоит из одного элемента d_Δ. Значение этого полилинейного функционала на системе аргументов $\Gamma=\{x_1, \ldots, x_n\}$ называется *детерминантом* этой системы относительно базиса Δ и обозначается $\det_\Delta \Gamma$ или $\det_\Delta \{x_1, \ldots, x_n\}$. Если выбор базиса ясен из контекста или безразличен, то можно писать просто $\det \Gamma$ или $\det \{x_1, \ldots, x_n\}$.

33. $\det_\Delta \Delta = 1$.

34. Для любых базисов Δ, Δ_1

$$d_{\Delta_1} = (\det_{\Delta_1} \Delta)\, d_\Delta.$$

Отсюда:

35. Для любых базисов Δ, Δ_1, Δ_2

$$\det_{\Delta_2} \Delta = \det_{\Delta_1} \Delta \cdot \det_{\Delta_2} \Delta_1.$$

Это — теорема умножения детерминантов систем. Ее связь с теоремой умножения детерминантов операторов (**272** гл. II) обнаружится ниже, после того как детерминант оператора будет описан на языке детерминантов систем.

36. Для любых базисов Δ, Δ_1

$$\det_{\Delta_1} \Delta \cdot \det_\Delta \Delta_1 = 1.$$

В связи с этим отметим, что:

37. Если система Γ линейно независима, то $\det \Gamma \neq 0$.

Обратно:

38. Если система Γ линейно зависима, то $\det \Gamma = 0$.

Последняя теорема легко редуцируется к следующему утверждению:

39. Если какие-нибудь два аргумента антисимметричного полилинейного функционала совпадают, то значение функционала равно нулю.

Из теоремы **38** вытекает часто используемое в вычислениях следствие:

40. Если к какому-нибудь из векторов системы $\Gamma = \{x_1, \ldots, x_n\}$ прибавить линейную комбинацию остальных векторов, то детерминант системы не изменится.

Назовем систему $\Gamma = \{x_k\}_1^n$ *треугольной* относительно базиса Δ, если матрица $(\alpha_{jk})_{j,k=1}^n$ этой системы относительно базиса Δ является треугольной.

41. Если система Γ треугольная относительно базиса Δ, то $\det_\Delta \Gamma = \prod_{k=1}^{n} \alpha_{kk}$.

Этот факт полезно сравнить с определением детерминанта оператора (§ 10 гл. II).

Пусть $(j_1, \ldots, j_p)$ — перестановка индексов $(1, \ldots, p)$. *Характером* этой перестановки называется

$$\chi(j_1, \ldots, j_p) = \begin{cases} 1, & \text{если перестановка четная,} \\ -1, & \text{если перестановка нечетная.} \end{cases}$$

42. Если $\Delta = \{e_k\}_1^n$ — базис и $(j_1, \ldots, j_n)$—какая-нибудь перестановка индексов $(1, \ldots, n)$, то

$$\det_\Delta \{e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}\} = \chi(j_1, \ldots, j_n).$$

43. Пусть $(\alpha_{jk})_{j,k=1}^n$ — матрица системы Γ относительно базиса Δ. Тогда

$$\det_\Delta \Gamma = \sum_{(j_1, \ldots, j_n)} \chi(j_1, \ldots, j_n) \alpha_{j_1 1} \ldots \alpha_{j_n n}.$$

В классической теории детерминантов правая часть этого равенства называется детерминантом матрицы $(\alpha_{jk})_{j,k=1}^n$.

44. Если оператор $A \in \mathfrak{M}(E)$ регулярен, то для любых двух базисов Δ, Δ_1 имеет место равенство $\det_{A\Delta} A\Delta_1 = \det_\Delta \Delta_1$.

45. Для любого оператора A величина $\det_\Delta A\Delta$ не зависит от базиса Δ и совпадает с детерминантом оператора: $\det_\Delta A\Delta = \det A$.

Иначе говоря, $\det_\Delta \Gamma = \det A$, где A — тот однозначно определенный оператор, который переводит базис Δ в систему Γ.

Из **45** и **35** вновь, и притом очень просто, выводится теорема умножения детерминантов операторов.

Возвращаясь к тензорам любой валентности p, введем еще *оператор антисимметризации* $\bar{Q}$:

$$(\bar{Q}\varphi)(x_1, \ldots, x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{(j_1, \ldots, j_p)} \chi(j_1, \ldots, j_p) \varphi(x_1, \ldots, x_p).$$

46. Оператор $\bar{Q}$ проектирует на подпространство антисимметричных тензоров.

47. Подпространство симметричных тензоров валентности $p > 1$ входит в ядро оператора антисимметризации, но при $p > 2$ не совпадает с ним.

Сопоставление теорем **46**, **47** с теоремами **29**, **31** обнаруживает некоторую двойственность между симметрией и антисимметрией.

§ 3. Внешние произведения и внешние формы

Рассмотрим p-ю *тензорную степень* пространства E:

$$\overset{p}{\otimes} \mathrm{E} = \mathrm{E} \otimes \ldots \otimes \mathrm{E}.$$

Это пространство сопряжено к пространству тензоров валентности p с аргументами из E.

Пространство, сопряженное к пространству антисимметричных тензоров валентности p с аргументами из E, называется p-й *внешней степенью* пространства E и обозначается

$$\overset{p}{\wedge} \mathrm{E} = \mathrm{E} \wedge \ldots \wedge \mathrm{E}.$$

Если $p > n$, то $\overset{p}{\wedge} \mathrm{E} = 0$.

48. Оператор $\bar{Q}'$, сопряженный к оператору антисимметризации, проектирует пространство $\overset{p}{\otimes} \mathrm{E}$ на подпространство, изоморфное $\overset{p}{\wedge} \mathrm{E}$:

$$\operatorname{Im} \bar{Q}' \approx \overset{p}{\wedge} \mathrm{E}.$$

В дальнейшем мы отождествляем $\overset{p}{\wedge} \mathrm{E}$ с подпространством $\operatorname{Im} \bar{Q}'$. В этом смысле:

49. Если $x_1, \ldots, x_p$ — векторы из E, то тензор

$$\sum_{(j_1, \ldots, j_p)} \chi(j_1, \ldots, j_p) x_{j_1} \otimes \ldots \otimes x_{j_p}$$

принадлежит $\overset{p}{\wedge} \mathrm{E}$.

Он обозначается $x_1 \wedge \ldots \wedge x_p$ и называется *внешним произведением* векторов $x_1, \ldots, x_p$.

50. Внешнее умножение является полилинейным отображением декартовой степени $\overset{p}{\times} \mathrm{E} = \mathrm{E} \times \ldots \times \mathrm{E}$ в $\overset{p}{\wedge} \mathrm{E}$, антисимметричным относительно множителей

$$x_{j_1}\wedge\ldots\wedge x_{j_p}=\chi(j_1,\ \ldots,\ j_p)(x_1\wedge\ldots\wedge x_p)$$

для всех перестановок $(j_1, j_2, \ldots, j_p)$ системы индексов $(1, 2, \ldots, p)$.

51. Равенство $x_1\wedge\ldots\wedge x_p=0$ имеет место тогда и только тогда, когда векторы $x_1, \ldots, x_p$ линейно зависимы.

Подобно тензорному умножению внешнее умножение является универсальным антисимметричным полилинейным отображением, и это свойство характеризует внешнее умножение (ср. **4—7**).

52. Если F — антисимметричное полилинейное отображение декартовой степени $\overset{p}{\times}\mathrm{E}$ в некоторое пространство E_0 и $h\in\mathrm{Hom}(\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1)$, то hF — антисимметричное полилинейное отображение $\overset{p}{\times}\mathrm{E}$ в E_1.

53. Для каждого гомоморфизма $h\in\mathrm{Hom}(\overset{p}{\wedge}\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$ отображение $F=h\Lambda$, где Λ—отображение внешнего умножения,

$$\Lambda(x_1,\ \ldots,\ x_p)=x_1\wedge\ldots\wedge x_p \qquad (x_k\in\mathrm{E}),$$

есть антисимметричное полилинейное отображение $\overset{p}{\times}\mathrm{E}$ в E_1.

54. Для каждого антисимметричного полилинейного отображения F из $\overset{p}{\times}\mathrm{E}$ в E_1 существует и единствен такой гомоморфизм $F_\Lambda\in\mathrm{Hom}(\overset{p}{\wedge}\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$, что $F=F_\Lambda\Lambda$.

55. Пусть даны пространства E, E_0 и антисимметричное полилинейное отображение M декартовой степени $\overset{p}{\times}\mathrm{E}$ в E_0, причем 1) для каждого антисимметричного полилинейного отображения F из $\overset{p}{\times}\mathrm{E}$ в произвольное пространство E_1 существует такой гомоморфизм $F_M\in\mathrm{Hom}(\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1)$, что $F=F_M M$; 2) образ отображения M содержит систему, полную в E_0. Тогда E_0 изоморфно внешней степени $\overset{p}{\wedge}\mathrm{E}$ и при этом изоморфизме отображение M преобразуется в Λ, т. е. во внешнее умножение.

Теория детерминантов, развитая в предыдущем параграфе, естественно вписывается в рамки внешней алгебры.

56. Если $\Delta = \{e_k\}_1^n$ — какой-нибудь базис в E, то для любой системы $\Gamma = \{x_j\}_1^n$

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = \det_\Delta (x_1, \ldots, x_n)(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n).$$

Эту формулу можно значительно обобщить, вводя понятия минора и адъюнкта.

Пусть $\mathcal{J} = \{j_1 < \ldots < j_m\}$, $\mathcal{K} = \{k_1 < \ldots < k_m\}$ — какие-нибудь равномощные подсистемы системы $\{1, \ldots, n\}$. Для произвольной системы векторов $\Gamma = \{x_k\}_1^n$ обозначим через $\Gamma_\mathcal{K}$ подсистему $x_{k_1}, \ldots, x_{k_m}$. Через $P_{\mathcal{J};\,\Delta}$ обозначим проектор на линейную оболочку подсистемы $\Delta_\mathcal{J} \subset \Delta$ параллельно линейной оболочке остальных векторов базиса Δ. Детерминант системы $P_{\mathcal{J};\,\Delta}\Gamma_\mathcal{K}$ относительно базиса $\Delta_\mathcal{J}$ подпространства $L(\Delta_\mathcal{J})$ называется *минором* системы Γ относительно базиса Δ, отвечающим паре подсистем $\{\mathcal{J}, \mathcal{K}\}$, и обозначается $M_{\mathcal{J},\,\mathcal{K};\,\Delta}(\Gamma)$. Итак,

$$M_{\mathcal{J},\,\mathcal{K};\,\Delta}(\Gamma) = \det_{\Delta_\mathcal{J}}(P_{\mathcal{J};\,\Delta}\Gamma_\mathcal{J}).$$

Положим теперь $s(\mathcal{J}) = \sum_{k=1}^{m} j_k$. Величина

$$A_{\mathcal{J},\,\mathcal{K};\,\Delta}(\Gamma) = (-1)^{s(\mathcal{J})+s(\mathcal{K})} M_{\mathcal{J},\,\mathcal{K};\,\Delta}(\Gamma)$$

называется *адъюнктом* системы Γ относительно базиса Δ, отвечающим паре подсистем $\{\mathcal{J}, \mathcal{K}\}$.

57. $\bigwedge\limits_{k \in \mathcal{K}} x_k = \sum\limits_{\mathcal{J}} M_{\mathcal{J},\,\mathcal{K};\,\Delta}(\Gamma)\Big(\bigwedge\limits_{j \in \mathcal{J}} e_j\Big).$

Следствием этой формулы является теорема Лапласа:

58. $\det_\Delta \Gamma = \sum\limits_{\mathcal{J}} M_{\mathcal{J},\,\mathcal{K};\,\Delta}(\Gamma) A_{\mathcal{J}',\,\mathcal{K}';\,\Delta}(\Gamma)$

$$(\mathcal{J}' = \{1, \ldots, n\} \setminus \mathcal{J}, \quad \mathcal{K}' = \{1, \ldots, n\} \setminus \mathcal{K}).$$

Другой важный аспект внешней алгебры — это теория внешних форм Э. Картана. Мы рассмотрим ее простейший частный случай, а именно, внешние формы с постоянными коэффициентами.

Внешней формой p-й степени от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ $(1 \leqslant p \leqslant n)$ называется выражение вида

$$\omega(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\mathcal{J}_\omega} \alpha^{j_1, \ldots, j_p} x_{j_1} \wedge \ldots \wedge x_{j_p},$$

где $\mathcal{J}_\omega$ — какое-нибудь множество систем индексов, $\{j_1, \ldots, j_p\}$ $(1 \leqslant j_k \leqslant n)$, $\alpha^{j_1, \ldots, j_p}$ — числовые коэффициенты. Каждая внешняя форма p-й степени от n переменных определяет отображение декартовой степени $\overset{n}{\times} E$ во внешнюю степень $\overset{p}{\wedge} E$. В общем случае это отображение не является ни полилинейным, ни антисимметричным. Равенство внешних форм понимается как равенство соответствующих отображений. Будем говорить, что внешняя форма ω стандартно записана, если $\mathcal{J}_\omega$ совпадает с множеством всех систем $\{j_1, \ldots, j_p\}$, для которых $j_1 < \ldots < j_p$.

59. Каждая внешняя форма равна некоторой стандартно записанной внешней форме.

60. Если стандартно записанные внешние формы равны, то их соответственные коэффициенты равны.

61. Внешние формы p-й степени образуют линейное пространство относительно естественных операций сложения и умножения на число. Размерность этого пространства равна $\binom{n}{p}$ (равна нулю при $p > n$).

Обозначим это пространство через $\Omega_p(E)$. Положим также

$$\Omega_0(E) = C^1, \quad \Omega_p(E) = 0 \qquad (p < 0,\ p > n).$$

Определим внешнее произведение внешних форм

$$\omega(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\mathcal{J}_\omega} \alpha^{j_1, \ldots, j_p} x_{j_1} \wedge \ldots \wedge x_{j_p},$$

$$\varepsilon(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\mathcal{J}_\varepsilon} \beta^{k_1, \ldots, k_q} x_{k_1} \wedge \ldots \wedge x_{k_q}$$

естественным образом:

$$(\omega \wedge \varepsilon)(x_1, \ldots, x_n) = \\ = \sum_{\mathcal{J}_\omega \times \mathcal{J}_\varepsilon} \alpha^{j_1, \ldots, j_p} \beta^{k_1, \ldots, k_q} x_{j_1} \wedge \ldots \wedge x_{j_p} \wedge x_{k_1} \wedge \ldots \wedge x_{k_q}.$$

Очевидно:

62. При умножении внешних форм их степени складываются.

63. $\varepsilon \wedge \omega = (-1)^{pq} \omega \wedge \varepsilon$.

Внешние формы играют значительную роль в а л г е б р а и ч е с к о й т о п о л о г и и — области математики, осуществляющей синтез алгебры и топологии. Правда, наш частный случай постоянных коэффициентов содержательно тривиален (см. **66**), но он достаточен для иллюстрации общей формальной схемы. Начнем с переименования: будем называть внешние формы p-й степени p-мерными *цепями*. *Границей* (или *дифференциалом*) p-мерной цепи

$$\omega(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\mathcal{J}_\omega} \alpha^{j_1, \ldots, j_p} x_{j_1} \wedge \ldots \wedge x_{j_p}$$

называется $(p-1)$-мерная цепь

$$(d\omega)(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\mathcal{J}_\omega} \omega^{j_1, \ldots, j_p} d(x_{j_1} \wedge \ldots \wedge x_{j_p}),$$

где

$$d(x_{j_1} \wedge \ldots \wedge x_{j_p}) \underset{\text{def}}{=} \sum_{s=0}^{p-1} x_{j_1} \wedge \ldots \wedge x_{j_s} \wedge x_{j_{s+2}} \wedge \ldots \wedge x_{j_p}.$$

При $p=1$ считается $dx_{j_1}=1$. При $p \leqslant 0$ или $p > n$ примем $d\omega = 0$.

64. Отображение d_p: $\Omega_p(\mathrm{E}) \to \Omega_{p-1}(\mathrm{E})$ $(d_p\omega = d\omega)$ является гомоморфизмом.

Оно называется *граничным* гомоморфизмом. Фундаментальное свойство граничного гомоморфизма выражается формулой:

65. $d_p d_{p+1} = 0$.

Эту формулу символически часто записывают в виде $d^2 = 0$.

Формула **65** равносильна включению $\operatorname{Im} d_{p+1} \subset \operatorname{Ker} d_p$. Это обстоятельство позволяет рассматривать фактор-пространство

$$\mathrm{H}_p(\mathrm{E}) = \operatorname{Ker} d_p / \operatorname{Im} d_{p+1},$$

которое называется *пространством* p-мерных *гомологий*, а его элементы — p-мерными *классами гомологий*. Цепи, принадлежащие $\operatorname{Ker} d_p$, называются p-мерными *циклами*. По определению граница цикла равна нулю. Циклы, принадлежащие одному классу гомологий, называются *гомологичными*. Два гомологичных цикла — это такие, разность которых есть граница некоторой цепи. Формула **65** говорит о том, что все границы являются циклами.

Очевидно, $\mathrm{H}_p(\mathrm{E})=0$ $(p<0,\ p>n)$. Тривиальность рассматриваемой ситуации заключается в том, что и при $p=0, 1, \ldots, n$:

66. $\mathrm{H}_p(\mathrm{E})=0$.

Вместе с тем **66** составляет элементарный частный случай одной важной теоремы де Рама.

Отметим, что **65** и **66** вместе означают, что последовательность гомоморфизмов $\{d_p\}$ точна.

§ 4. Тензорные и внешние степени оператора

Тензорная степень $\overset{p}{\otimes} A$ оператора A, действующего в пространстве E, определяется как оператор в пространстве $\overset{p}{\otimes}\mathrm{E}$, действующий по формуле

$$[(\overset{p}{\otimes} A)\varphi](f_1, \ldots, f_p)=\varphi(A'f_1, \ldots, A'f_p),$$

где φ — произвольный полилинейный функционал на $\overset{p}{\times}\mathrm{E}'$.

67. $(\overset{p}{\otimes} A)(x_1\otimes \ldots \otimes x_p)=Ax_1\otimes \ldots \otimes Ax_p$.

Этой формулой оператор $\overset{p}{\otimes} A$ определяется однозначно.

68. $\operatorname{rg}(\overset{p}{\otimes} A)=(\operatorname{rg} A)^p$.

В частности:

69. Тензорная степень регулярного оператора регулярна. При этом:

70. $(\overset{p}{\otimes} A)^{-1}=\overset{p}{\otimes} A^{-1}$.

Это соответствует двум следующим формулам:

71. $\overset{p}{\otimes}(AB)=(\overset{p}{\otimes} A)(\overset{p}{\otimes} B)$.

72. $\overset{p}{\otimes} I_{\mathrm{E}}=I_{\overset{p}{\otimes}\mathrm{E}}$.

Итак, отображение $\overset{p}{\otimes}$ является гомоморфизмом относительно умножения операторов. Ясно также, что:

73. $\overset{p}{\otimes}(\alpha A)=\alpha^p \overset{p}{\otimes} A$.

Как ведут себя след и детерминант при возведении в тензорную степень? Из **24** следует:

74. $\operatorname{sp}(\overset{p}{\otimes} A) = (\operatorname{sp} A)^p$.

Пользуясь теоремой об общем виде мультипликативного функционала в $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$ (гл. II), можно также установить, что:

75. $\det(\overset{p}{\otimes} A) = (\det A)^{pn^{p-1}}$.

Впрочем, этот факт (так же как и **74**) легко вывести из спектральных свойств тензорной степени, устанавливаемых ниже.

76. Если $e_1, \ldots, e_p$ — собственные векторы*) оператора A, соответствующие собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, то $e_1 \otimes \ldots \otimes e_p$ — собственный вектор оператора $\overset{p}{\otimes} A$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 \ldots \lambda_p$.

77. Тензорная степень оператора скалярного типа есть оператор скалярного типа.

78. Если $\{\lambda_k\}_1^n$ — все собственные значения оператора A, взятые с учетом кратностей, то всевозможные произведения вида

$$\lambda_{k_1} \ldots \lambda_{k_p} \qquad (1 \leqslant k_s \leqslant n, \quad s = 1, \ldots, p)$$

образуют набор всех собственных значений оператора $\overset{p}{\otimes} A$ с учетом кратностей.

Между прочим, отсюда видно, что оператор $\overset{p}{\otimes} A$ при $p > 1$ всегда имеет кратный спектр.

Внешняя степень $\overset{p}{\wedge} A$ оператора A, действующего в пространстве E, определяется как сужение оператора $\overset{p}{\otimes} A$ на подпространство $\overset{p}{\wedge} \mathrm{E}$.

79. $(\overset{p}{\wedge} A)(x_1 \wedge \ldots \wedge x_p) = Ax_1 \wedge \ldots \wedge Ax_p$.

В частности:

80. $\overset{n}{\wedge} A$ совпадает с оператором умножения на $\det A$.

В силу **79**:

81. Подпространство $\overset{p}{\wedge} \mathrm{E}$ инвариантно относительно $\overset{p}{\wedge} A$.

---

*) Не обязательно попарно различные.

Таким образом, $\overset{p}{\bigwedge} A$ есть оператор в пространстве $\overset{p}{\bigwedge} \mathrm{E}$. Свойства внешних степеней оператора лишь в некоторых деталях отличаются от свойств тензорных степеней.

82. $\overset{p}{\bigwedge} (AB) = (\overset{p}{\bigwedge} A)(\overset{p}{\bigwedge} B)$.

83. $\overset{p}{\bigwedge} I_{\mathrm{E}} = I_{\overset{p}{\bigwedge} \mathrm{E}}$.

84. Внешняя степень регулярного оператора регулярна и при этом $(\overset{p}{\bigwedge} A)^{-1} = \overset{p}{\bigwedge} A^{-1}$.

85. $\overset{p}{\bigwedge} (\alpha A) = \alpha^p \overset{p}{\bigwedge} A$.

86. $\det(\overset{p}{\bigwedge} A) = (\det A)^{\binom{n-1}{p-1}}$.

След оператора $\overset{p}{\bigwedge} A$, однако, нельзя выразить через след оператора A. Формула для следа будет приведена ниже.

87. Если $e_1, \ldots, e_p$ — линейно независимые собственные векторы оператора A, соответствующие собственным значениям *) $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, то $e_1 \wedge \ldots \wedge e_p$ — собственный вектор оператора $\overset{p}{\bigwedge} A$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 \ldots \lambda_p$.

88. Внешняя степень оператора скалярного типа есть оператор скалярного типа.

89. Если $\{\lambda_k\}_1^n$ — все собственные значения оператора A, взятые с учетом кратностей, то всевозможные произведения вида $\lambda_{k_1} \ldots \lambda_{k_p}$ $(1 \leqslant k_1 < \ldots < k_p \leqslant n)$ образуют набор всех собственных значений оператора $\overset{p}{\bigwedge} A$ с учетом кратностей.

90. Пусть характеристический полином оператора A равен

$$\mathscr{D}(\lambda;\ A) = \sum_{p=0}^{n} \alpha_p \lambda^{n-p}.$$

Тогда $\operatorname{sp}(\overset{p}{\bigwedge} A) = (-1)^{n-p} \alpha_p \quad (p = 1, \ldots, n)$.

---

*) Не обязательно попарно различным.

§ 5. Объем системы векторов. Существование базиса Ауэрбаха

Пусть E — унитарное (и тем самым евклидово) пространство. Для такого пространства определены понятия длины (нормы) вектора и ортогональности векторов. Отправляясь от этих понятий, можно естественно развить теорию объемов. Она оказывается тесно связанной с теорией детерминантов, по существу, представляя собой метрическую интерпретацию последней.

Понятие *объема системы векторов* $\Gamma = \{x_k\}_1^m$ мы определим индукцией по m. Объем будем обозначать через $\|\Gamma\|$ или $\|x_1, \ldots, x_m\|$. Это обозначение оправдано тем, что при $m = 1$ мы примем объем равным норме вектора. При $m > 1$

$$\|x_1, \ldots, x_m\| \underset{\text{def}}{=} \|x_1, \ldots, x_{m-1}\| \cdot \|Q(x_1, \ldots, x_{m-1})\, x_m\|,$$

где $Q(x_1, \ldots, x_{m-1})$ — ортопроектор на ортогональное дополнение линейной оболочки векторов $x_1, \ldots, x_{m-1}$. Определение, очевидно, подсказано элементарными теоремами о площади параллелограмма и объеме параллелепипеда.

91. Всегда $\|\Gamma\| \geqslant 0$. Равенство $\|\Gamma\| = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда система Γ линейно зависима.

Уже здесь намечается связь с теорией детерминантов (ср. **51**).

Имеет место неравенство Адамара:

92. $\|x_1, \ldots, x_m\| \leqslant \prod\limits_{k=1}^{m} \|x_k\|.$

93. Неравенство Адамара переходит в равенство тогда и только тогда, когда система $\{x_k\}_1^m$ ортогональна или содержит нулевой вектор.

В частности:

94. Если Γ — ортонормированная система, то $\|\Gamma\| = 1$. Обратно, если Γ — нормированная система и $\|\Gamma\| = 1$, то Γ — ортонормированная система.

Поскольку $\|\Gamma\| \leqslant 1$ для произвольных нормированных систем, то ортонормированные системы выделяются среди нормированных свойством максимальности объема. Это замечание будет полезно в дальнейшем (см. **106—107**).

95. Если $\Delta = \{e_k\}_1^m$ — ортонормированная система, а $\Gamma = \{x_k\}_1^m$ — треугольная система относительно Δ, то

$$\|\Gamma\| = \prod_{k=1}^{m} |\alpha_{kk}| = |\det_\Delta \Gamma|$$

(см. **41**).

Отметим, что для заданной системы Γ система Δ, связанная с Γ требованиями теоремы **95**, всегда может быть построена процессом ортогонализации.

Общая теорема о связи объемов с детерминантами гласит:

96. Если $\Delta = \{e_k\}_1^m$ — ортонормированная система, а система $\Gamma = \{x_k\}_1^m$ принадлежит линейной оболочке $L(\Delta)$, то $\|\Gamma\| = |\det_\Delta \Gamma|$.

Еще более общим образом:

97. Если система $\Gamma = \{x_k\}_1^m$ принадлежит линейной оболочке $L(\Delta)$ линейно независимой системы $\Delta = \{e_k\}_1^m$, то $|\det_\Delta \Gamma| = \|\Gamma\| / \|\Delta\|$.

Отсюда:

98. Для любого линейного оператора $|\det A| = \|A\Delta\| / \|\Delta\|$.

Отсюда видно, что унимодулярные операторы (и только они) сохраняют объем. В частности, все унитарные операторы сохраняют объем. Отметим, что, аналогично унитарным, унимодулярные операторы образуют группу относительно умножения.

Рассмотрим функциональные свойства объема.

99. Объем системы векторов не изменяется при перестановках:

$$\|x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}\| = \|x_1, \ldots, x_m\|.$$

Это свойство нельзя усмотреть непосредственно из определения объема.

100. Объем системы является абсолютно однородным функционалом:

$$\|\alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_m x_m\| = \left(\prod_{k=1}^{m} |\alpha_k|\right) \|x_1, \ldots, x_m\|.$$

101. Объем системы не изменится, если к какому-нибудь из векторов системы прибавить линейную комбинацию остальных векторов, не меняя этих последних.

Функциональные свойства **100**, **101** и нормировка **94** однозначно определяют объем:

102. Если функционал $v(\Gamma)$ на множестве систем $\Gamma = \{x_k\}_1^m$

1) абсолютно однороден, т. е.

$$v(\alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_m x_m) = \left(\prod_{k=1}^{m} |\alpha_k|\right) v(x_1, \ldots, x_m);$$

2) инвариантен относительно прибавления к произвольному вектору системы линейной комбинации остальных;

3) $v(\Gamma) = 1$ для ортонормированных систем Γ, то $v(\Gamma) = \|\Gamma\|$.

Теорема **97** описывает на языке детерминантов не сами объемы, а их отношения. Можно указать и «абсолютное» описание.

Пусть Γ — какая-нибудь линейно независимая система, Γ^* — биортогональная система, принадлежащая $L(\Gamma)$.

103. Если Δ — ортонормированный базис в $L(\Delta)$, то

$$\det_\Delta \Gamma^* \cdot \overline{\det_\Delta \Gamma} = 1.$$

104. Имеет место формула $\|\Gamma\| = \sqrt{\det_{\Gamma^*} \Gamma}$.

В частности, здесь утверждается, что $\det_{\Gamma^*} \Gamma > 0$. Последний детерминант называется *детерминантом Грама* системы Γ и совпадает с детерминантом ее матрицы Грама.

Вследствие **104**:

105. $\|\Gamma^*\| \cdot \|\Gamma\| = 1$.

Теорию объемов можно положить в основу доказательства существования базиса Ауэрбаха в произвольном нормированном пространстве (см. § 4 гл. IV). Рассмотрим в пространстве E какую-нибудь (не связанную с заданным унитарным строением) норму. Обозначим через $\mathfrak{N}$ множество базисов, нормированных в смысле этой нормы. В силу обычных соображений компактности:

106. Функционал $\|\Delta\|$ $(\Delta \in \mathfrak{N})$ достигает на $\mathfrak{N}$ максимума.

107. Если $\Delta_0 \in \mathfrak{N}$ и $\|\Delta_0\| = \max\limits_{\mathfrak{N}} \|\Delta\|$, то Δ_0 — базис Ауэрбаха.

Заметим, что может существовать нормированный базис Ауэрбаха, не максимизирующий объема.

§ 6. Нормы в тензорных произведениях пространств

Этот параграф соприкасается с § 10 гл. IV. Так же как и в случае пространства операторов, можно рассматривать индуцированные нормы в пространствах вида $E_1 \otimes \ldots \otimes E_p$. Каждый набор норм в $E_1, \ldots, E_p$ индуцирует норму в $E_1 \otimes \ldots \otimes E_p$: если $\varphi(f_1, \ldots, f_p)$ — полилинейный функционал на $E_1' \times \ldots \times E_p'$, то

$$\|\varphi\| \underset{\text{def}}{=} \sup \frac{|\varphi(f_1, \ldots, f_p)|}{\|f_1\| \ldots \|f_p\|}$$

(в E_k' действуют индуцированные нормы).

108. $\|x_1 \otimes \ldots \otimes x_p\| = \|x_1\| \ldots \|x_p\|$ (ср. **257** гл. IV).

Каждая норма в $E_1 \otimes \ldots \otimes E_p$, обладающая свойством **108** (при заданных нормах в $E_1, \ldots E_p$), называется *кросс-нормой*. Рассмотрим задачу описания кросс-норм. Для простоты положим $p = 2$.

Для каждого элемента $u \in E_1 \otimes E_2$ будем рассматривать все его представления в виде

$$u = \sum_{k=1}^{m} x_1^{(k)} \otimes x_2^{(k)} \qquad \left(x_1^{(k)} \in E_1,\ x_2^{(k)} \in E_2\right).$$

Множество таких представлений обозначим через $\mathcal{F}(u)$.

109. Для любой кросс-нормы имеет место неравенство

$$\|u\| \leqslant \sum_{k=1}^{m} \|x_1^{(k)}\| \cdot \|x_2^{(k)}\|.$$

110. Функционал $N(u) = \inf\limits_{\mathcal{F}(u)} \sum\limits_{k=1}^{m} \|x_1^{(k)}\| \cdot \|x_2^{(k)}\| \quad \left(u \in E_1 \otimes E_2\right)$ является кросс-нормой.

Таким образом N есть наибольшая кросс-норма в $E_1 \otimes E_2$ при обычном понимании порядка в множестве норм. Наименьшей кросс-нормы не существует. Однако при некотором естественном сужении класса кросс-норм наименьшая кросс-норма появляется и, как и следовало ожидать, ею оказывается индуцированная норма.

Пусть в $E_1 \otimes E_2$ задана какая-нибудь норма. Она индуцирует норму в $(E_1 \otimes E_2)'$ и — с помощью канонического изоморфизма — в $E_1' \otimes E_2'$. Полученная таким путем норма в $E_1' \otimes E_2'$ называется *двойственной* исходной. Повторение этого процесса (с учетом канонических изоморфизмов $E_1'' \approx E_1$, $E_2'' \approx E_2$) приводит к исходной норме.

Заметим, что $E_1' \otimes E_2'$ отождествляется с пространством $\mathfrak{B}(E_1, E_2)$ билинейных функционалов. После этого двойственную норму можно описать явно:

111. Двойственная норма билинейного функционала $B \in \mathfrak{B}(E_1, E_2)$ равна норме линейного функционала $F_B \in$ $\in (E_1 \otimes E_2)'$, связанного с B формулой

$$B(x_1, x_2) = F_B(x_1 \otimes x_2) \qquad (x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2).$$

Из этой интерпретации легко получить, что:

112. Норма в $E_1' \otimes E_2'$, двойственная индуцированной норме в $E_1 \otimes E_2$, является кросс-нормой (относительно индуцированных норм в E_1' и E_2').

Более того:

113. Если в $E_1 \otimes E_2$ задана кросс-норма, мажорирующая индуцированную норму, то двойственная ей норма в $E_1' \otimes E_2'$ также является кросс-нормой.

Обратно:

114. Пусть норма в $E_1 \otimes E_2$ такова, что двойственная ей норма $E_1' \otimes E_2'$ является кросс-нормой. Тогда исходная норма мажорирует индуцированную.

Итак:

115. Индуцированная норма $E_1 \otimes E_2$ является наименьшей кросс-нормой, двойственная к которой также является кросс-нормой (теорема Шаттена).

Вычислим норму, двойственную наибольшей кросс-норме N.

116. Норма, двойственная N, совпадает с индуцированной нормой в $E_1' \otimes E_2'$.

Итак, кросс-нормы, двойственные к которым также являются кросс-нормами, - это те и только те кросс-нормы, которые заключены между индуцированной нормой и нормой N.

§ 7. Формальные полиномы и степенные ряды от нескольких переменных

Формальным полиномом от букв («независимых переменных») $z_1, \ldots, z_m$ называется выражение вида

$$\pi(x_1, \ldots, x_m) = \sum \alpha^{j_1, \ldots, j_s} z_{j_1} \ldots z_{j_s},$$

где формальное суммирование распространяется на некоторое конечное множество $\mathcal{J}_\pi$ систем индексов $(j_1, \ldots, j_s)$ (s зависит от системы), $\alpha^{j_1, \ldots, j_s}$ — числовые коэффициенты. Целесообразно допустить включение в состав формального полинома свободного члена α и принять, что этому члену соответствует $s = 0$ (т. е. пустой набор индексов). Целесообразно также допустить случай пустого множества $\mathcal{J}_\pi$ и полагать в этом случае $\pi = 0$.

Число $\max\{s \mid \alpha^{j_1, \ldots, j_s} \neq 0\}$ называется *степенью* формального полинома $\pi \not\equiv 0$ и обозначается $\deg \pi$. Если все члены формального полинома имеют одну и ту же степень, то он называется *однородным*.

Два формальных полинома называются *равными*, если их коэффициенты соответственно равны.

Для формальных полиномов естественно определяются операции сложения и умножения на число.

117. Формальные полиномы от m переменных степени, не большей p, образуют линейное пространство размерности $\frac{m^{p+1}-1}{m-1}$. Оно является прямой суммой подпространств однородных формальных полиномов степеней $0, 1, \ldots, p$.

Произведением двух формальных полиномов

$$\pi(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{\mathcal{J}_\pi} \alpha^{j_1, \ldots, j_s} z_{j_1} \ldots z_{j_s},$$

$$\rho(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{\mathcal{J}_\rho} \beta^{k_1, \ldots, k_l} z_{k_1} \ldots z_{k_l}$$

называется формальный полином

$$(\pi\rho)(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{\mathcal{J}_\pi \times \mathcal{J}_\rho} \alpha^{j_1, \ldots, j_s} \beta^{k_1, \ldots, k_l} z_{j_1} \ldots z_{j_s} z_{k_1} \ldots z_{k_l}.$$

118. $\deg(\pi\rho) = \deg\pi + \deg\rho$.

Умножение формальных полиномов дистрибутивно, перестановочно со скалярными множителями и ассоциативно, но не коммутативно. Рассмотрим проблему деления.

Деление формальных полиномов, как правило, неосуществимо:

119. Если $\pi\rho = 1$, то $\deg\pi = \deg\rho = 0$.

Ситуация может быть исправлена путем присоединения к формальным полиномам новых объектов. Этими объектами являются *формальные степенные ряды*. Они определяются точно так же, как формальные полиномы, но множество систем индексов $\mathcal{J}_\pi$ теперь уже может быть бесконечным. Вводя, если нужно, нулевые коэффициенты, можно всегда считать, что $\mathcal{J}_\pi$ состоит из всех систем индексов $(j_1, \ldots, j_s)$ $(1 \leqslant j_k \leqslant m;\ k = 1, \ldots, s;\ s = 0, 1, \ldots)$. Равенство формальных степенных рядов определяется так же, как для формальных полиномов, и действия над формальными степенными рядами производятся по тем же правилам, что и над формальными полиномами. Сверх того, для формальных степенных рядов имеет смысл операция сложения бесконечного множества слагаемых, если только в каждой однородной компоненте она приводит к сложению конечного числа слагаемых.

Обозначим свободный член формального степенного ряда a через $\varphi(a)$.

120. $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

Поэтому формальный степенной ряд со свободным членом, отличным от нуля, не может делиться на ряд без свободного члена. Однако любой формальный степенной ряд делится на ряд со свободным членом, отличным от нуля:

121. Если $\varphi(a) \neq 0$, то существует и единствен формальный степенной ряд a^{-1}, удовлетворяющий соотношениям $aa^{-1} = 1$, $a^{-1}a = 1$.

Таким образом, степенные ряды со свободным членом, отличным от нуля, образуют группу. В ней выделяется подгруппа рядов со свободным членом 1.

На основе формальных степенных рядов можно развить наиболее общую форму операторного исчисления. Каждое соотношение, справедливое для формальных степенных рядов, автоматически переносится на неформальные (сходящиеся в том или ином смысле) степенные ряды в любой ассоциативной алгебре, в частности, в алгебре операторов $\mathfrak{M}(E)$.

В дальнейшем условимся говорить кратко «степенной ряд», «полином», опуская слово «формальный». Условимся также писать сокращенно a^k вместо $\underbrace{a \dots a}_{k}$ и, как обычно, $a^0 = 1$.

Общее операторное исчисление получается присоединением к алгебраическим операциям над степенными рядами операции *суперпозиции*, т. е. подстановки в степенной ряд вместо аргументов $z_1, \dots, z_m$ произвольных степенных рядов без свободных членов. Эта операция выполняется по естественным правилам. Определим, в частности, *функцию от степенного ряда*.

Пусть $f(\lambda)$ — скалярная функция, голоморфная в окрестности нуля:

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \lambda^k.$$

Тогда для любого степенного ряда a без свободного члена

$$f(a) \underset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k a^k.$$

122. Пусть $\varphi(a) \neq 0$, $f(\lambda) = (\varphi(a) + \lambda)^{-1}$. Тогда $f(a - \varphi(a)) = a^{-1}$.

123. Если $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ — две скалярные функции, голоморфные в окрестности нуля, $f(\lambda) = f_1(\lambda) f_2(\lambda)$, то $f(a) = f_1(a) f_2(a)$ $(\varphi(a) = 0)$.

124. Если $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ — две скалярные функции, голоморфные в окрестности нуля, причем $f_2(0) = 0$, и $f(\lambda) = f_1(f_2(\lambda))$, то $f(a) = f_1(f_2(a))$ $(\varphi(a) = 0)$.

125. Если $f'(0) \neq 0$, то для того, чтобы уравнение

$$f(a) = c \qquad (*)$$

было разрешимо относительно a $(\varphi(a) = 0)$, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(c) = f(0)$. Если уравнение $(*)$ разрешимо, то его решение единственно.

В частности:

126. Формула $c = e^a$ определяет взаимно однозначное отображение множества степенных рядов без свободного члена на группу рядов со свободным членом 1. Обратное отображение определяется формулой $a = \ln(1 + (c - 1))$.

Правую часть этой формулы обозначим просто через $\ln c$

127. Если $\varphi(a)=\varphi(b)=0$ и $ab=ba$, то $e^a e^b = e^{a+b}$.

В высшей степени замечательно, что, отбросив условие $ab=ba$, можно все-таки написать явную формулу для произведения экспонент. Мы это сделаем после того, как изложим необходимые сведения об алгебре Ли степенных рядов. Эти сведения представляют и самостоятельный интерес.

Коммутатор степенных рядов a, b определяется стандартным образом:

$$[a, b] = ab - ba.$$

128. $\varphi([a, b]) = 0$.

Назовем степенной ряд (полином) без свободного члена *лиевским*, если он может быть представлен в виде

$$\sum_{(k_1, \ldots, k_s)} \gamma^{k_1, \ldots, k_s} \left[z_{j_1} \left[\ldots \left[z_{j_{s-1}}, z_{j_s}\right] \ldots\right]\right]$$

(при $s=1$ коммутаторные скобки отсутствуют).

Каждому степенному ряду $a = \sum \alpha^{j_1, \ldots, j_s} z_{j_1} \ldots z_{j_s}$ естественно отвечает лиевский ряд

$$Qa = \sum \alpha^{j_1, \ldots, j_s} \left[z_{j_1} \left[\ldots \left[z_{j_{s-1}}, z_{j_s}\right] \ldots\right]\right].$$

Очевидно,

$$Q(a+b) = Qa + Qb, \quad Q(\alpha a) = \alpha Qa.$$

Поведение отображения Q относительно умножения рядов более сложно.

129. Если a — лиевский, b — любой степенной ряд, то $Q(ab) = [a, Qb]$.

Отсюда:

130. Если a и b — лиевские ряды, то

$$Q([a, b]) = [Qa, b] + [a, Qb].$$

Обозначим через Q_s ограничение отображения Q на пространство Π_s однородных полиномов степени $s > 0$ и положим $P_s = \frac{1}{s} Q_s$.

С помощью формулы **130** нетрудно доказать, что:

131. Оператор P_s проектирует пространство Π_s на подпространство L_s лиевских однородных полиномов степени s.

Модифицируем отображение Q, полагая

$$Pa = \sum \frac{1}{s} \alpha^{j_1, \ldots, j_s} [z_{j_1} [\ldots [z_{j_{s-1}}, z_{j_s}] \ldots]]$$

для рядов a без свободного члена.

132. Для того чтобы степенной ряд a был лиевским, необходимо и достаточно, чтобы $Pa = a$.

Существует еще один важный критерий «лиевости». Для того чтобы его сформулировать, нужно ввести тензорное умножение степенных рядов.

Исходя из обычных свойств

1) $(a_1 + a_2) \otimes b = a_1 \otimes b + a_2 \otimes b, \; a \otimes (b_1 + b_2) = a \otimes b_1 + a \otimes b_2,$

2) $\alpha a \otimes b = a \otimes \alpha b = \alpha (a \otimes b)$

и свойства

3) $(a \otimes b)(c \otimes d) = ac \otimes bd,$

достаточно определить произведения вида

$$z_j \otimes z_k, \quad 1 \otimes z_k, \quad z_j \otimes 1, \quad 1 \otimes 1. \qquad (*)$$

Требуемое определение состоит в том, что эти произведения (кроме $1 \otimes 1$) объявляются новыми независимыми переменными и, кроме того, $1 \otimes 1 \underset{\text{def}}{=} 1$. Таким образом, тензорное произведение двух степенных рядов от $z_1, \ldots, z_m$ есть степенной ряд от $(m+1)^2 - 1$ новых букв.

Сопоставим теперь с каждым степенным рядом

$$a = \sum \alpha^{j_1, \ldots, j_s} z_{j_1} \ldots z_{j_s}$$

ряд

$$ha = \sum \alpha^{j_1, \ldots, j_s} h z_{j_1} \ldots h z_{j_s},$$

где положено

$$h z_k = z_k \otimes 1 + 1 \otimes z_k \qquad (k = 1, \ldots, m).$$

133. Для того чтобы степенной ряд был лиевским, необходимо и достаточно, чтобы $ha = a \otimes 1 + 1 \otimes a$.

Отсюда:

134. Экспоненциальное отображение $b = e^a$ взаимно однозначно отображает множество лиевских рядов на множество степенных рядов со свободным членом 1, удовлетворяющих соотношению $hb = b \otimes b$.

Теперь легко проверить, что:

135. Степенной ряд $\ln(e^{z_1} e^{z_2})$ является лиевским.

Он имеет вид:

$$\textbf{136.}\quad \ln(e^{z_1}e^{z_2}) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s} \sum_{p_j+q_j>0} \frac{z_1^{p_1} z_2^{q_1} \ldots z_1^{p_s} z_2^{q_s}}{p_1!\, q_1! \ldots p_s!\, q_s!}.$$

Отсюда применением оператора P (см. **132**) и подстановкой $z_1 \to a$, $z_2 \to b$ получается формула Кэмпбелла — Хаусдорфа — Дынкина:

$$\textbf{137.}\quad \ln(e^a e^b) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s} \times$$

$$\times \sum_{p_j+q_j>0} \frac{1}{\sum_{j=1}^{s}(p_j+q_j)} \frac{\left[a^{p_1}, \left[b^{q_1}, \ldots, \left[a^{p_s}, b^{q_s}\right], \ldots\right]\right]}{p_1!\, q_1! \ldots p_s!\, q_s!}.$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$[u^p, v] \underset{\text{def}}{=} [\underbrace{u, [u, \ldots, [u}_{p}, v], \ldots]],$$

$$[u^p, v^q] = 0 \ (q > 1), \quad [u^p, v^0] = u^p.$$

Выпишем начальный отрезок ряда **137**:

$$\ln(e^a e^b) = a + b + \frac{1}{2}[a, b] + r$$

(r — степенной ряд, не содержащий членов ниже третьей степени и исчезающий, если $ab = ba$).

138. В алгебре операторов $\mathfrak{M}(E)$ существует такая окрестность нуля $\mathfrak{W}$, что ряд Кэмпбелла — Хаусдорфа — Дынкина с подстановкой $a \to A$, $b \to B$ $(A, B \in \mathfrak{W})$ сходится и его сумма равна оператору $\ln(e^A e^B)$.

ГЛАВА VI

ВЕЩЕСТВЕННОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО

В предыдущих главах мы имели дело с комплексным линейным пространством. Это означало, что элементы пространства (векторы) можно умножать на любые комплексные числа. В более общей ситуации скалярами могут служить элементы любого п о л я, и тогда речь идет о пространстве над данным полем. Для анализа наиболее существенны случаи поля комплексных чисел и поля вещественных чисел. Сейчас наступил момент, когда мы должны остановиться на втором случае и обсудить его специфику. Нетрудно понять, что подавляющее большинство определений и теорем из предшествующих глав без изменений переносятся на вещественные пространства (а многое — и на пространство над произвольным полем). В особенности это относится к гл. I, III—V. В гл. II построение спектральной теории было тесно связано с существованием корней полиномов и вообще с аппаратом теории аналитических функций. Напротив, в гл. V, например, «комплексность» совершенно никакой роли не играла, и эта глава может быть дословно перенесена на вещественные пространства.

§ 1. Комплексификация

Между вещественными и комплексными пространствами существует тесная связь, вытекающая из связи между вещественными и комплексными числами. Это обстоятельство позволяет систематически сводить проблематику вещественных пространств к уже решенным вопросам для комплексных пространств (и наоборот). Разумеется, такое сведение не всегда необходимо и удобно, но в ряде случаев оно быстро ведет к цели.

В этой главе мы будем обозначать основное вещественное пространство через R, его размерность (как вещественного пространства) *) через n.

1. Поле комплексных чисел **C** является двумерным вещественным линейным пространством.

2. Тензорное произведение $\mathrm{R}^{(c)} = \mathbf{C} \otimes \mathrm{R}$ является комплексным **) линейным пространством при естественном определении умножения на скаляр: $\alpha(\beta \otimes x) = \alpha\beta \otimes x$.

Комплексное пространство $\mathrm{R}^{(c)}$ называется *комплексной оболочкой* пространства R, а переход от R к $\mathrm{R}^{(c)}$ — *комплексификацией* пространства R.

В дальнейшем мы будем для краткости писать αx ($\alpha \in \mathbf{C}$, $x \in \mathrm{R}$) вместо $\alpha \otimes x$. Исходное пространство R можно отождествить с подмножеством $\{y \mid y = 1x\}$ в $\mathrm{R}^{(c)}$. Оно является подпространством вещественного пространства $\mathrm{R}^{(c)}$.

3. Если система $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ векторов в R линейно независима, то система $\{x_1, \ldots, x_k, ix_1, \ldots, ix_k\}$ в $\mathrm{R}^{(c)}$ линейно независима.

4. Комплексная размерность пространства $\mathrm{R}^{(c)}$ равна n (т. е. вещественной размерности пространства R).

Вместе с тем, очевидно, вещественная размерность пространства $\mathrm{R}^{(c)}$ равна $2n$.

5. Каждый вектор $z \in \mathrm{R}^{(c)}$ однозначно представим в виде

$$z = x + iy \qquad (x, y \in \mathrm{R}).$$

Векторы x, y называются соответственно ***вещественной*** и *мнимой частью* вектора z. Теорема **5** говорит о том, что вещественное пространство $\mathrm{R}^{(c)}$ является прямой суммой своих подпространств R и iR.

Если $z = x + iy$ ($x, y \in \mathrm{R}$), то вектор $\bar{z} = x - iy$ называется *сопряженным* с вектором z.

6. Если $\alpha = \rho + i\sigma$ (ρ, σ — вещественные), $z = x + iy$ (x, $y \in \mathrm{R}$), то $\alpha z = (\rho x - \sigma y) + i(\sigma x + \rho y)$.

---

*) Определяемую точно так же, как для комплексного пространства. В дальнейшем мы будем, если необходимо, употреблять термины «вещественная размерность», «комплексная размерность».

**) И, очевидно, также вещественным.

7. Отображение сопряжения $jz = \bar{z}$ является эрмитовым изоморфизмом $R^{(c)} \to R^{(c)}$ и инволюцией.

Если L — подпространство в R, то под его комплексной оболочкой $L^{(c)}$ понимается его образ при тензорном умножении, т. е. множество векторов вида αx ($\alpha \in C$, $x \in L$).

8. Комплексная оболочка $L^{(c)}$ является подпространством в $R^{(c)}$.

При этом:

9. Комплексная размерность подпространства $L^{(c)}$ равна вещественной размерности подпространства L.

В силу **9** и **4** автономная комплексификация подпространства L и комплексификация, индуцированная комплексификацией всего пространства R, приводят к изоморфным пространствам.

10. Пусть R_1 и R_2 — два вещественных пространства, $h \in \mathrm{Hom}(R_1, R_2)$. Гомоморфизм h однозначно продолжается до гомоморфизма $h^{(c)}$ комплексной оболочки $R_1^{(c)}$ в комплексную оболочку $R_2^{(c)}$.

Гомоморфизм $h^{(c)}$ называется *комплексным продолжением* гомоморфизма h. Переход от h к $h^{(c)}$ называется *комплексификацией гомоморфизма* h.

11. $\mathrm{Ker}\, h^{(c)} = (\mathrm{Ker}\, h)^{(c)}$, $\mathrm{Im}\, h^{(c)} = (\mathrm{Im}\, h)^{(c)}$.

Следовательно:

12. $\mathrm{def}\, h^{(c)} = \mathrm{def}\, h$, $\mathrm{rg}\, h^{(c)} = \mathrm{rg}\, h$.

Параллельно с комплексификацией гомоморфизма существует сопряженная процедура — *эрмитова комплексификация*:

13. Пусть R_1 и R_2 — два вещественных пространства, $h \in \mathrm{Hom}(R_1, R_2)$. Гомоморфизм h однозначно продолжается до эрмитова гомоморфизма комплексной оболочки $R_1^{(c)}$ в комплексную оболочку $R_2^{(c)}$.

Сказанное по поводу гомоморфизмов, в частности, относится к линейным функционалам.

Для билинейных функционалов под комплексификацией удобно понимать продолжение до эрмитово-билинейного функционала.

14. Пусть R_1 и R_2 — два вещественных пространства, B — билинейный функционал на $R_1 \times R_2$. Функционал B

однозначно продолжается до эрмитово-билинейного функционала $B^{(c)}$ на $R_1^{(c)} \times R_2^{(c)}$.

15. При комплексификации билинейного функционала ранг и дефекты не изменяются.

16. Если B — симметричный билинейный функционал в R, то

$$B^{(c)}(z, z) = B(x, x) + B(y, y) \qquad (z = x + iy).$$

17. При комплексификации симметричного билинейного функционала получается эрмитово-симметричный билинейный функционал.

18. Пусть Q — квадратичный функционал в R. Функционал Q однозначно продолжается до вещественного (в смысле § 2 гл. III) эрмитово-квадратичного функционала $Q^{(c)}$ в $R^{(c)}$.

19. Для каждого симметричного билинейного функционала B в R существует такая система векторов $\{e_k\}_1^r \subset R$ $r = \operatorname{rg} B > 0$), что

$$B(x, y) = \sum_{k=1}^{r} \varepsilon_k B(x, e_k) B(e_k, y) \qquad (\varepsilon_k = \pm 1).$$

20. Для каждого квадратичного функционала Q в R существует такая линейно независимая система $\{f_k\}_1^r$ $(r = \operatorname{rg} Q > 0)$ линейных функционалов, что

$$Q(x) = \sum_{k=1}^{r} \varepsilon_k [f_k(x)]^2 \qquad (\varepsilon_k = \pm 1).$$

Теоремы **19**, **20** можно доказать путем комплексификации (тогда они сведутся к теоремам **41**, **43** гл. III), но, конечно, их можно доказать «без выхода из R» по образцу соответствующих теорем для комплексного пространства.

Подчеркнем, что закон инерции квадратичных функционалов без изменений переносится на вещественный случай.

21. При комплексификации квадратичного функционала индексы инерции не изменяются.

В частности, комплексификация положительного функционала приводит к положительному функционалу.

22. Если R — унитарное пространство, то комплексификация скалярного произведения превращает $R^{(c)}$ в комплексное унитарное пространство.

Рассмотрим теперь комплексификацию нормы. *Комплексным продолжением* нормы в R называется норма в $R^{(c)}$, совпадающая в R с исходной нормой.

23. Пусть R — евклидово пространство. Формула

$$\|x+iy\|_1=\sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2}$$

определяет евклидово комплексное продолжение нормы.

Этот случай уникален в том смысле, что:

24. Если R — нормированное пространство и норма в $R^{(c)}$ имеет вид

$$\|x+iy\|_1=\nu(\|x\|,\ \|y\|) \qquad (x,\ y\in R),$$

то

$$\nu(\alpha,\ \beta)=\mathrm{const}\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2},$$

а R — евклидово пространство (**12** гл. IV).

Таким образом, комплексификация неевклидовой нормы не может быть согласована с представлением $z=x+iy$. Но существует ли она вообще? Утвердительный ответ вытекает из теории кросс-норм (§ 6 гл. V).

Будем считать нормой в C модуль комплексного числа.

25. Если R нормировано, то множество комплексных продолжений нормы совпадает с классом кросс-норм в $C\otimes R$.

Следовательно,

26. Функционал

$$\|z\|=\inf\sum|\alpha_k|\cdot\|x_k\|,$$

где нижняя грань берется по всем представлениям

$$z=\sum\alpha_k x_k \qquad (\alpha_k\in C,\ x_k\in R),$$

является наибольшим комплексным продолжением нормы.

27. Индуцированная норма в $C\otimes R$ имеет вид

$$\|z\|=\sup_{f\in R'}\frac{|f^{(c)}(z)|}{\|f\|} \qquad (z=x+iy).$$

Из теоремы Шаттена следует:

28. Индуцированная норма является наименьшим комплексным продолжением нормы в R, согласованным с комплексификацией линейных функционалов:

$$\|f^{(c)}\|=\|f\| \quad (f\in R').$$

Сопоставим с каждым вектором $z = x + iy$ гомоморфизм $\hat{z}\colon \mathrm{R}' \to \mathbf{C}$ по формуле $\hat{z}f = f(x) + if(y)$.

29. Индуцированная норма в $\mathrm{R}^{(c)}$ совпадает с нормой гомоморфизма $\hat{z}$.

30. Если норма в $\mathrm{R}^{(c)}$ является комплексным продолжением нормы в R, согласованным с комплексификацией линейных функционалов, то $\|\hat{z}\| \leqslant \|z\|$.

Рассмотрим два вещественных пространства R_1 и R_2 и комплексификацию гомоморфизмов $h \in \mathrm{Hom}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$.

31. Каждая комплексификация норм в R_1 и R_2, согласованная с комплексификацией линейных функционалов, согласована также с комплексификацией гомоморфизмов:

$$\|h^{(c)}\| = \|h\| \qquad (h \in \mathrm{Hom}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)).$$

§ 2. Декомплексификация

Этот термин призван обозначать процедуру, в некотором смысле обратную комплексификации.

32. Каждое комплексное n-мерное пространство E является $2n$-мерным вещественным пространством.

В этой роли мы обозначим его через $\mathrm{E}^{(r)}$. Переход от E к $\mathrm{E}^{(r)}$ называется *декомплексификацией* пространства E.

33. Каждое m-мерное подпространство $\mathrm{L} \subset \mathrm{E}$ является $2m$-мерным подпространством в $\mathrm{E}^{(r)}$.

В этой роли мы обозначим его через $\mathrm{L}^{(r)}$.

34. Умножение на i в E является автоморфизмом пространства $\mathrm{E}^{(r)}$.

Этот автоморфизм мы обозначим через J.

35. $J^2 = -I$.

36. Для того чтобы подпространство в $\mathrm{E}^{(r)}$ совпадало с некоторым $\mathrm{L}^{(r)}$, необходимо и достаточно, чтобы оно было инвариантно относительно оператора J.

Такие подпространства в $\mathrm{E}^{(r)}$ назовем *комплексифицируемыми*.

37. Если M — подпространство в $\mathrm{E}^{(r)}$, то наименьшее подпространство $\tilde{\mathrm{M}}$ в E, содержащее M, равно сумме $\mathrm{M} + J\mathrm{M}$.

38. $\frac{1}{2}\dim \mathrm{M} \leqslant \dim \widetilde{\mathrm{M}} \leqslant \dim \mathrm{M}$.

39. Равенство $\dim \widetilde{\mathrm{M}} = \frac{1}{2}\dim \mathrm{M}$ достигается тогда и только тогда, когда M комплексифицируемо.

40. Равенство $\dim \widetilde{\mathrm{M}} = \dim \mathrm{M}$ достигается только тогда, когда $J\mathrm{M} \cap \mathrm{M} = 0$.

Такие подпространства в $\mathrm{E}^{(r)}$ назовем *комплексифицирующими*. Очевидно, каждое подпространство комплексифицирующего подпространства является комплексифицирующим.

41. Если M — комплексифицирующее подпространство, то $\dim \mathrm{M} \leqslant n$.

42. Если M — комплексифицирующее подпространство и $\dim \mathrm{M} < n$, то существует комплексифицирующее подпространство $\mathrm{M}_1 \supset \mathrm{M}$, такое, что $\dim \mathrm{M}_1 = \dim \mathrm{M} + 1$.

43. Для каждого $m \leqslant n$ существует комплексифицирующее подпространство размерности m.

44. Для того чтобы комплексифицирующее подпространство M было максимальным, необходимо и достаточно, чтобы $\dim \mathrm{M} = n$.

45. Если R — максимальное комплексифицирующее подпространство, то каждый вектор $z \in \mathrm{E}$ однозначно представим в виде $z = x + iy \quad (x, y \in \mathrm{R})$.

Тем самым устанавливается естественный изоморфизм между E и комплексной оболочкой $\mathrm{R}^{(c)}$. Однако подпространство R не определено однозначно.

Теорема **45** обращается:

46. Если подпространство R в $\mathrm{E}^{(r)}$ таково, что каждый вектор $z \in \mathrm{E}$ однозначно представим в виде $z = x + iy$, то R — максимальное комплексифицирующее подпространство.

Описание комплексифицируемых подпространств можно произвести в двойственных терминах комплексифицирующих подпространств.

47. Каждое комплексифицируемое подпространство имеет четную размерность.

48. Если подпространство M комплексифицируемо, то в нем существует такое комплексифицирующее подпространство K, что $\mathrm{M} = \mathrm{K} \dotplus J\mathrm{K}$.

Обратно:

49. Для любого комплексифицирующего подпространства К сумма $K+JK$ — прямая и является комплексифицируемым подпространством.

50. Если М — комплексифицируемое подпространство и $\dim M > 0$, то существует такое комплексифицируемое подпространство $M_1 \subset M$, что $\dim M_1 = \dim M - 2$.

51. Для каждого $m \leqslant n$ существует комплексифицируемое подпространство размерности $2m$.

52. Для того чтобы M было минимальным нетривиальным комплексифицируемым подпространством, необходимо и достаточно, чтобы $\dim M = 2$.

53. Каждое нетривиальное комплексифицируемое подпространство, в частности $E^{(r)}$, разлагается в прямую сумму двумерных комплексифицируемых подпространств.

Рассмотрим декомплексификацию гомоморфизмов и функционалов.

54. Пусть E_1, E_2 — комплексные пространства, отображение $h \in \mathrm{Hom}(E_1, E_2)$. Тогда h—гомоморфизм $E_1^{(r)}$ в $E_2^{(r)}$.

В этой роли мы обозначим его через $h^{(r)}$. Переход от h к $h^{(r)}$ называется *декомплексификацией* гомоморфизма h.

Обозначим через J_1, J_2 операторы, порождаемые умножением на i в $E_1^{(r)}$ и $E_2^{(r)}$ соответственно.

55. $h^{(r)}J_1 = J_2 h^{(r)}$.

Гомоморфизм $g \in \mathrm{Hom}(E_1^{(r)}, E_2^{(r)})$, удовлетворяющий условию $gJ_1 = J_2 g$, называется *комплексифицируемым*.

56. Если $g \in \mathrm{Hom}(E_1^{(r)}, E_2^{(r)})$ – комплексифицируемый гомоморфизм, то существует и единствен такой гомоморфизм $h \in \mathrm{Hom}(E_1, E_2)$, что $g = h^{(r)}$.

57. Если f — линейный функционал в E, то $f^{(r)}(x) = \mathfrak{Re}\, f(x)$ — линейный функционал в $E^{(r)}$.

Это — *декомплексификация* линейного функционала. Она не редуцируется к декомплексификации гомоморфизмов.

58. Декомплексификация устанавливает взаимно однозначное соответствие между сопряженными пространствами E' и $(E^{(r)})'$.

59. Если B — эрмитово-билинейный функционал на $E_1 \times E_2$, то $B^{(r)}(x, y) = \mathfrak{Re}\, B(x, y)$ — билинейный функционал на $E_1^{(r)} \times E_2^{(r)}$.

60. Декомплексификация устанавливает взаимно однозначное соответствие между пространством эрмитово-билинейных функционалов на $E_1 \times E_2$ и пространством билинейных функционалов на $E_1^{(r)} \times E_2^{(r)}$.

61. Если E — унитарное пространство, то при декомплексификации скалярного произведения пространство $E^{(r)}$ также становится унитарным.

Наконец:

62. Если E — нормированное пространство, то норма в E является нормой и в $E^{(r)}$.

В евклидовом случае декомплексификация нормы и скалярного произведения согласованы.

Очевидно:

63. Декомплексификация гомоморфизма сохраняет норму: $\|h^{(r)}\| = \|h\|$.

64. Декомплексификация линейного функционала сохраняет норму.

§ 3. Операторы в вещественном пространстве

Специфика теории операторов в вещественном пространстве определяется тем, что поле вещественных чисел в отличие от поля комплексных чисел не замкнуто алгебраически: уравнение с вещественными коэффициентами не обязательно имеет вещественные корни. Поэтому линейный оператор в вещественном пространстве R может не иметь собственных векторов. Но после комплексификации собственные векторы появляются, и остается «спроектировать» спектральную теорию в пространство R.

В этом параграфе A означает линейный оператор в R. Его собственными значениями называются собственные значения его комплексного продолжения $A^{(c)}$ в $R^{(c)}$. В этом же смысле употребляются термин «спектральный радиус» и другие термины спектральной теории.

Обозначим через j отображение сопряжения в $R^{(c)}$:

$$jz = \bar{z}.$$

65. Оператор $A^{(c)}$ коммутирует с j:

$$jA^{(c)} = A^{(c)}j.$$

Положим

$$W^s(\lambda) = \operatorname{Ker}\left(A^{(c)} - \lambda I\right)^s \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots).$$

66. Подпространства $W^s(\lambda)$ и $W^s(\bar{\lambda})$ изоморфны.

67. Если λ — собственное значение оператора A, то $\bar{\lambda}$ — собственное значение той же кратности, что и λ.

68. Характеристический полином оператора A вещественный.

69. Минимальный полином оператора A вещественный.

70. Если λ — вещественное собственное значение оператора A, то каждое из подпространств $W^s(\lambda)$ имеет вещественный базис, т. е. базис из векторов, принадлежащих R.

71. Если все собственные значения оператора A вещественны, то оператор A имеет жорданов базис в R.

Обратное утверждение тривиально.

72. Для того чтобы оператор A имел собственный базис, необходимо и достаточно, чтобы корни его минимального полинома были вещественными и простыми.

73. Каждый оператор A имеет инвариантное подпространство размерности, не большей 2.

Будем говорить, что инвариантное подпространство минимально, если оно отлично от нуля и не содержит других инвариантных подпространств. Согласно **73** размерность минимального инвариантного подпространства не больше 2. Если эта размерность равна 1, то инвариантное подпространство собственное.

74. Для того чтобы двумерное инвариантное подпространство L было минимальным, необходимо и достаточно, чтобы в некотором базисе этого подпространства матрица оператора $A \mid L$ имела вид

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

где $\beta \neq 0$. Для всех таких базисов числа α, β одинаковы.

75. Для оператора A существует цепь инвариантных подпространств

$$0 = J_0 \subset J_1 \subset \ldots \subset J_m = R$$

такая, что

$$0 < \dim J_{k+1} - \dim J_k \leqslant 2 \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1).$$

Это — вещественный аналог теоремы о треугольном представлении (58 гл. II). Соответствующая матрица получается, вообще говоря, не треугольной, а блочно-треугольной, но порядки диагональных блоков не превосходят 2. В случае порядка 2 диагональным блокам можно придать указанный выше вид. Теорема **75** находится в том же отношении к теореме **58** гл. II, как теорема о разложении вещественного полинома на линейные и квадратичные множители к теореме о разложении комплексного полинома на линейные множители.

76. Если корни минимального полинома оператора A простые, то пространство R разлагается в прямую сумму инвариантных подпространств размерности, не большей 2.

Обратное утверждение также верно.

77. Если размерность пространства R нечетна, то оператор A имеет собственный вектор.

78. В четномерном пространстве существует оператор без собственных векторов.

Предположим теперь, что пространство R унитарно. Тогда и $\mathrm{R}^{(c)}$ унитарно каноническим образом (см. **22**).

Оператор A в R называется *симметричным*, если

$$(Ax,\ y) = (x,\ Ay) \qquad (x,\ y \in \mathrm{R}).$$

79. Если A — симметричный оператор, то $A^{(c)}$ — самосопряженный оператор, и обратно.

80. Спектр симметричного оператора вещественный.

81. Симметричный оператор A обладает ортонормированным собственным базисом.

Этот результат, так же как и всю остальную теорию симметричных операторов, можно получить без комплексификации, действуя в R совершенно аналогично комплексному случаю. Но при этом существование собственных значений должно быть установлено «вещественным» методом. Оказывается, не выходя из R, можно доказать, что:

82. Число $\lambda = \min\limits_{(x,\ x)=1} (Ax,\ x)$ является собственным значением симметричного оператора A в R.

Оператор A называется *ортогональным*, если

$$(Ax,\ Ay) = (x,\ y) \qquad (x,\ y \in \mathrm{R}).$$

83. Если A — ортогональный оператор, то $A^{(c)}$—унитарный оператор, и обратно.

84. Спектр ортогонального оператора унитарный.

85. Для любого ортогонального оператора пространство R разлагается в ортогональную сумму инвариантных подпространств размерности, не большей 2.

86. В одномерном инвариантном подпространстве ортогональный оператор совпадает с оператором умножения на 1 или —1.

87. В двумерном минимальном инвариантном подпространстве матрица ортогонального оператора относительно любого ортонормированного базиса имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

где $0 < \varphi < \pi$. Угол φ не зависит от выбора базиса.

88. Детерминант ортогонального оператора равен 1 или —1.

Таким образом, ортогональные операторы унимодулярны.

Ортогональный оператор A с детерминантом 1 называется *собственно ортогональным* или *вращением*. Вектор $x \neq 0$ называется *осью вращения*, если $Ax = x$.

89. В нечетномерном пространстве каждое вращение имеет ось.

90. В четномерном пространстве существуют вращения, не имеющие оси.

Заметим теперь, что:

91. Ортогональные операторы образуют группу относительно умножения.

92. Вращения образуют подгруппу группы всех ортогональных операторов.

93. Группа вращений связна.

94. Компонентами связности группы ортогональных операторов являются группа вращений и ее дополнение, т. е. множество несобственно ортогональных операторов.

В соответствии с этим:

95. Множество ортонормированных базисов в R распадается на две компоненты связности (ср. **167** гл. IV).

Базисы одной компоненты (выбранной произвольно) можно назвать «правыми», тогда базисы другой компоненты будут называться «левыми». Выбор компоненты называется *ориентацией* пространства R. Таким образом, вещественное пространство имеет две «противоположные» ориентации.

Отметим, что теорема **95** без труда распространяется на любые базисы.

Ортогональные операторы тесно связаны с *антисимметричными* операторами, т. е. такими, что

$$(Ax,\ y) = -(x,\ Ay).$$

96. Если A—антисимметричный оператор, то $iA^{(c)}$—самосопряженный оператор и обратно.

97. Спектр антисимметричного оператора чисто мнимый.

98. В нечетномерном пространстве каждый антисимметричный оператор нерегулярен.

99. В четномерном пространстве существуют регулярные антисимметричные операторы.

100. Для любого антисимметричного оператора A

$$\det A \geqslant 0.$$

101. Для любого антисимметричного оператора A пространство R разлагается в ортогональную сумму

$$\mathrm{R} = \mathrm{Ker}\, A \oplus \mathrm{Im}\, A.$$

В свою очередь $\mathrm{Im}\, A$ разлагается в ортогональную сумму двумерных минимальных инвариантных подпространств.

102. В двумерном минимальном инвариантном подпространстве матрица антисимметричного оператора относительно любого ортонормированного базиса имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$, где $\beta \neq 0$. Число β не зависит от выбора базиса.

Связь между ортогональными и антисимметричными операторами устанавливается преобразованием Кэли (несколько модифицированным по сравнению с § 6 гл. III).

103. Если A — антисимметричный оператор, то оператор $U = (I + A)(I - A)^{-1}$ является вращением. Все вращения могут быть представлены в указанном виде.

Симметричные, антисимметричные и ортогональные операторы принадлежат классу вещественных нормальных операторов, который можно было бы определить аналогично § 7 гл. III. Вещественные нормальные операторы со спектральной точки зрения характеризуются тем, что они являются ортогональными суммами неприводимых операторов, действующих в подпространствах размерности, не большей 2.

§ 4. Дифференцируемые отображения. Гладкие нормы

Пусть даны вещественные пространства R_1, R_2 и открытое множество $G \subset R_1$. Отображение F множества G в пространство R_2 называется *дифференцируемым в точке* $x_0 \in G$, если существует такой гомоморфизм $h \in \mathrm{Hom}(R_1, R_2)$, что

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\| Fx - Fx_0 - h(x - x_0) \|}{\| x - x_0 \|} = 0,$$

т. е.

$$Fx = Fx_0 + h(x - x_0) + o(\| x - x_0 \|) \qquad (x \to x_0).$$

104. Гомоморфизм h при заданных F и x_0 определен однозначно.

Он называется *производной* отображения F в точке x_0 и обозначается $F'(x_0)$. Обычно в анализе пишут

$$x - x_0 = dx, \quad F'(x_0)\, dx = dF$$

и величины dx, dF называют *дифференциалами*.

105. Если $h_1 \in \mathrm{Hom}(R_1, R_2)$ и $h_1 \neq F'(x_0)$, то

$$\overline{\lim_{x \to x_0}} \frac{\| Fx - Fx_0 - h_1(x - x_0) \|}{\| x - x_0 \|} > 0.$$

В этом смысле производная дает наилучшее линейное приближение отображения F в точке x_0.

106. Если F — линейное отображение R_1 в R_2, т. е. $F \in \mathrm{Hom}(R_1, R_2)$, то оно дифференцируемо в каждой точке $x \in R_1$ и

$$F'(x) = F \qquad (x \in R_1).$$

107. Пусть F — отображение в R_2, Φ — отображение из R_2. Если отображение F дифференцируемо в точке x, а отображение Φ дифференцируемо в точке Fx, то их произведение ΦF дифференцируемо в точке x и

$$(\Phi F)'(x) = \Phi'(Fx)\, F'(x).$$

Это — теорема о производной от сложной функции.

Отображение F: $G \to R_2$ называется *дифференцируемым*, если оно дифференцируемо в каждой точке множества G.

Отображение называется *постоянным*, если множество $\{Fx \mid x \in G\}$ состоит из одной точки.

108. Постоянное отображение дифференцируемо, и его производная равна нулю.

Обратно:

109. Если отображение дифференцируемо и его производная равна нулю, то оно постоянно.

Таким образом, так же как в скалярном анализе, дифференцируемое отображение однозначно определяется своей производной и своим значением в одной точке. Восстановление отображения по производной — интегрирование — производится как в скалярном случае и сводится к этому случаю. Ради простоты формулировок мы рассматриваем ниже только отображения всего пространства R_1 в R_2.

110. Если F — дифференцируемое отображение, то

$$Fx = Fx_0 + \int_0^1 F'(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0)\,dt.$$

Одно из интересных следствий этой формулы состоит в оценке расстояния между точками Fx_1 и Fx_2:

111. Пусть F — дифференцируемое отображение. Тогда

$$\|Fx_1 - Fx_2\| \leqslant \mathcal{M}\|x_1 - x_2\|,$$

где

$$\mathcal{M} = \sup_{x \in [x_1,\, x_2]} \|F'(x)\|$$

и $[x_1, x_2]$ — отрезок, соединяющий x_1 с x_2:

$$[x_1, x_2] = \{x \mid x = x_1 + t(x_2 - x_1)\} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Предложение **111** играет роль теоремы о среднем в многомерном дифференциальном исчислении. Отметим одно его применение.

Отображение F называется *сжимающим*, если

$$\|Fx_1 - Fx_2\| \leqslant \|x_1 - x_2\| \qquad (x_1, x_2 \in R_1).$$

112. Для того чтобы дифференцируемое отображение F было сжимающим, необходимо и достаточно, чтобы

$$\|F'(x)\| \leqslant 1 \quad (x \in \mathrm{R}_1),$$

т. е. чтобы производная F' была сжатием в каждой точке.

Отображение F называется *строго сжимающим*, если

$$\|Fx_1 - Fx_2\| < \|x_1 - x_2\| \qquad (x_1, \ x_2 \in \mathrm{R}_1, \ x_1 \neq x_2),$$

и *равномерно сжимающим*, если существует такое число q $(0 \leqslant q < 1)$, что

$$\|Fx_1 - Fx_2\| \leqslant q \|x_1 - x_2\|.$$

Аналогично **112**:

113. Для того чтобы дифференцируемое отображение F было равномерно сжимающим, необходимо и достаточно, чтобы $\sup\limits_{x \in R_1} \|F'(x)\| < 1$.

Особый интерес представляют равномерно сжимающие отображения пространства в себя. Дело в том, что для таких отображений имеет место п р и н ц и п н е п о д в и ж н о й т о ч к и:

114. Если F — равномерно сжимающее отображение пространства R в себя, то уравнение

$$x = Fx$$

имеет и притом единственное решение.

Рассмотрим теперь производные высших порядков. Если F — дифференцируемое отображение R_1 в R_2, то оно порождает отображение пространства R_1 в пространство $\mathrm{Hom}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$ по формуле $h = F'(x)$. Если это отображение в свою очередь дифференцируемо в точке x, то его производная называется *второй производной* отображения F в точке x и обозначается $F''(x)$. Очевидно,

$$F''(x) \in \mathrm{Hom}(\mathrm{R}_1, \ \mathrm{Hom}(\mathrm{R}_1, \ \mathrm{R}_2)).$$

Повторяя это построение, можно ввести производную $F^{(m)}(x)$ любого порядка m. Это есть гомоморфизм из R_1 в пространство H_{m-1} гомоморфизмов, которому принадлежит $F^{(m-1)}(x)$. Термин «m раз дифференцируемое (в точке) отображение» не нуждается в особом пояснении.

Дифференциал m-го порядка в точке x_0 определяется по производной того же порядка следующим образом:

$$d^mF=\left(\ldots\left(\left(F^{(m)}(x_0)\,dx\right)dx\right)\ldots\right)dx \qquad (dx=x-x_0).$$

115. Если отображение F имеет вид

$$Fx=(\ldots((\Phi \underbrace{x)\,x)\ldots)\,x}_{m} \qquad (\Phi\in \mathrm{H}_m),$$

то оно m раз дифференцируемо и

$$F^{(m)}=m!\Phi,$$

а производные порядка, меньшего m, равны нулю в точке $x=0$.

116. Если отображение F m раз дифференцируемо в точке x_0 и

$$F'(x_0)=F''(x_0)=\ \ldots\ =F^{(m)}(x_0)=0,$$

то

$$Fx-Fx_0=o(\|x-x_0\|^m) \qquad (x\to x_0).$$

117. Для любого отображения F, m раз дифференцируемого в точке x_0, имеет место формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$Fx=Fx_0+dF+\frac{1}{2}d^2F+\ \ldots\ +\frac{1}{m!}d^mF+o(\|x-x_0\|^m).$$

Изложенная теория, в частности, применима к функционалам. Производная функционала есть линейный функционал. Он называется *градиентом* исходного функционала φ и обозначается $\nabla\varphi$. Итак, если функционал φ дифференцируем в точке x_0, то

$$\varphi(x)=\varphi(x_0)+\left(\nabla\varphi\,|_{x_0}\right)(x-x_0)+o(\|x-x_0\|).$$

Вторая производная функционала в каждой точке является гомоморфизмом из R в R'. Она называется *гессианом* функционала.

118. Пусть Δ — базис в R, Δ' — сопряженный базис в R'. Матрица гессиана относительно пары базисов Δ, Δ' симметрична (теорема Г. Шварца).

Если пространство R евклидово, то гессиан можно рассматривать как оператор в E. В силу теоремы Шварца этот оператор самосопряженный.

Рассмотрим теперь дифференцирование нормы в пространстве R. Заметим, что ни одна норма не дифференцируема в точке $x=0$.

Норма называется *гладкой*, если она дифференцируема при $x \neq 0$.

119. Все l^p-нормы при $1 < p < \infty$ являются гладкими.

120. c-норма и l-норма не гладкие.

121. Градиент любой гладкой нормы всюду имеет норму, равную 1.

Например:

122. Градиент евклидовой нормы равен $\frac{x}{\|x\|}$ $(x \neq 0)$ (при каноническом отождествлении линейных функционалов с векторами).

Даже не гладкие нормы дифференцируемы в некотором более общем смысле. Введем соответствующие определения.

Производной отображения F в точке x *по направлению* вектора e называется вектор

$$F'_e(x) = \lim_{t \to 0} \frac{F(x+te) - F(x)}{t}.$$

Соответственно определяется дифференцируемость по направлению.

123. Если в точке x отображение F дифференцируемо, то оно дифференцируемо по каждому направлению и $F'_e(x) = F'(x)\,e$.

124. Каждая норма дифференцируема по всем направлениям во всех точках $x \neq 0$.

Производная от нормы в данной точке $x \neq 0$ по направлению вектора e, рассматриваемая как функционал от аргумента e, по-прежнему называется *градиентом*.

125. Градиент $\gamma(e)$ нормы в любой точке $x \neq 0$ обладает следующими свойствами:

1) $\gamma(\alpha e) = \alpha\gamma(e) \qquad (\alpha > 0)$;
2) $\gamma(e_1 + e_2) = \gamma(e_1) + \gamma(e_2)$;
3) $\sup\limits_{\|e\|=1} |\gamma(e)| = 1$.

126. Для того чтобы норма была дифференцируемой в точке $x \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы ее градиент $\gamma(e)$ в этой точке был антисимметричным: $\gamma(-e) = -\gamma(e)$.

Свойство дифференцируемости нормы имеет простой геометрический смысл:

127. Для того чтобы норма была дифференцируемой в точке $x \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы все опорные функционалы в точке x были пропорциональны.

Иначе говоря, для дифференцируемости нормы в точке x необходимо и достаточно, чтобы линейный функционал f_x, удовлетворяющий условиям $f_x(x) = 1$, $\|f_x\| \cdot \|x\| = 1$, был единствен. В случае гладкой нормы тем самым определено отображение *инверсии* $y = f_x$ $(x \in \mathrm{R}, x \neq 0)$.

128. В случае евклидовой нормы инверсия имеет вид $f_x = \frac{x}{\|x\|^2}$.

129. Пусть дана гладкая норма и пусть γ_x — ее градиент в точке x. Тогда $f_x = \frac{\gamma_x}{\|x\|}$.

Отсюда видно, что дифференцируемость инверсии эквивалентна двукратной дифференцируемости нормы.

130. Инверсия является непрерывным взаимно однозначным отображением $\mathrm{R} \setminus \{0\}$ на $\mathrm{R}' \setminus \{0\}$. При этом единичной сфере пространства R соответствует единичная сфера пространства R'.

131. Если норма дважды дифференцируема, то повторная инверсия возращает в исходную точку.

Тем самым инверсия реализует двойственность нормированных пространств.

В заключение параграфа вычислим градиенты двух важных функционалов в евклидовом пространстве R. Пусть S — симметричный оператор, $y \in \mathrm{R}$.

132. Градиент неоднородного квадратичного функционала

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(Sx, x) - (y, x)$$

равен $\nabla\varphi(x) = Sx - y$.

133. Градиент функционала Рэлея

$$\varphi(x) = \frac{(Sx, x)}{(x, x)}$$

равен

$$\nabla\varphi(x) = Sx - \varphi(x)\, x, \text{ т. е. } \nabla\varphi(x) = PSx,$$

где P—ортопроектор на подпространство, ортогональное к x.

§ 5. Дифференцирование функций от оператора

Пусть $\mathfrak{S}(E)$ — вещественное пространство всех самосопряженных операторов в комплексном или вещественном унитарном пространстве E (см. **131** гл. III) и $\varphi(\lambda)$ — вещественная скалярная функция, определенная на некотором открытом подмножестве $\mathcal{G}$ вещественной оси. Положим

$$\mathfrak{G} = \{S \mid S \in \mathfrak{S}(E),\ \sigma(S) \in \mathcal{G}\}.$$

Функция $\varphi(\lambda)$ индуцирует отображение $\varphi\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{S}(E)$ по формуле $T = \varphi(S)$.

В этом параграфе мы займемся специализацией дифференциального исчисления применительно к описанным индуцированным отображениям. Пусть функции $\varphi(S)$, $\psi(S)$ дифференцируемы в точке S. Тогда, очевидно,

1) $d[\varphi(S) + \psi(S)] = d\varphi(S) + d\psi(S)$,

2) $d[\alpha\varphi(S)] = \alpha\, d\varphi(S)$.

Кроме того,

3) $d[\varphi(S)\psi(S)] = \varphi(S)\, d\psi(S) + d\varphi(S)\, \psi(S)$.

Наконец:

134. $d[\varphi(S)]^{-1} = -[\varphi(S)]^{-1}\, d\varphi(S)\, [\varphi(S)]^{-1}$.

Указанные правила дифференцирования позволяют построить простейшие примеры дифференцируемых функций от оператора.

135. Функция $\varphi(S) = S^m$ (m — натуральное число) дифференцируема и

$$d(S^m) = S^{m-1}\, dS + S^{m-2}\, dS \cdot S + \ldots + dS \cdot S^{m-1}.$$

136. Если $\varphi(\lambda)$ — полином, то функция $\varphi(S)$ дифференцируема.

137. Если $\varphi(\lambda)$ — рациональная функция, то функция $\varphi(S)$ дифференцируема.

Отправляясь от **136**, можно указать класс функций $\varphi(\lambda)$, порождающих дифференцируемые функции $\varphi(S)$.

Прежде всего отметим, что из **135** следует:

138. Для любого полинома $\varphi(\lambda)$ имеет место формула*)

$$d\varphi(S) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\varphi(\lambda_j) - \varphi(\lambda_k)}{\lambda_j - \lambda_k} P_j \cdot dSP_k,$$

*) Здесь и далее разностные отношения при совпадении узлов следует заменять соответствующими производными.

где P_j — ортопроектор на одномерное собственное подпространство оператора S, порождаемое собственным вектором e_j из ортонормированного собственного базиса $\{e_k\}_1^n$ оператора S; λ_j — соответствующее собственное значение.

Далее:

139. Если функция $\varphi(\lambda)$ имеет непрерывную производную в замкнутой окрестности спектра $\sigma(S)$, то

$$\left\| \sum_{j,\,k=1}^{n} \frac{\varphi(\lambda_j)-\varphi(\lambda_k)}{\lambda_j-\lambda_k} P_j \cdot dSP_k \right\| \leqslant \max_{\alpha \leqslant \lambda \leqslant \beta} |\tilde{\varphi}'(\lambda)| \cdot \|dS\|$$

(норма слева — операторная, справа—гильбертова), где $\tilde{\varphi}(\lambda)$— любое продолжение функции $\varphi(\lambda)$ на интервал $(\alpha, \beta) \supset \sigma(S)$ с сохранением непрерывной дифференцируемости.

Наконец:

140. Если функция $\varphi(\lambda)$ имеет непрерывную производную в окрестности спектра $\sigma(S)$, то функция $\varphi(S)$ дифференцируема в точке S и для $d\varphi(S)$ имеет место формула **138.**

141. Если функция $S(t)$ вещественного параметра t со значениями в $\mathfrak{S}(\mathrm{E})$ имеет непрерывную производную в окрестности точки t_0, а функция $\varphi(\lambda)$ имеет непрерывную производную в окрестности спектра оператора $S = S(t_0)$, то существует производная

$$\left.\frac{d\varphi(S(t))}{dt}\right|_{t=t_0} = \sum_{j,\,k=1}^{n} \frac{\varphi(\lambda_j)-\varphi(\lambda_k)}{\lambda_j-\lambda_k} P_j S'(t_0) P_k.$$

Предложения **140**, **141** нетрудно обобщить на производные и дифференциалы высших порядков. Для удобства дальнейших формулировок введем для скалярной функции $\varphi(\lambda)$ обозначения:

$$\varphi^{[0]}(\lambda) = \varphi(\lambda),$$

$$\varphi^{[1]}(\lambda, \mu) = \frac{\varphi^{[0]}(\lambda)-\varphi^{[0]}(\mu)}{\lambda-\mu},$$

$$\varphi^{[2]}(\lambda, \mu, \nu) = \frac{\varphi^{[1]}(\lambda, \mu)-\varphi^{[1]}(\lambda, \nu)}{\mu-\nu}$$

и т. д.

142. Если оператор-функция $S(t)$ имеет непрерывную вторую производную в окрестности точки t_0, а функция $\varphi(\lambda)$

имеет непрерывную вторую производную в окрестности спектра оператора $S=S(t_0)$, то существует производная

$$\left.\frac{d^2\varphi(S(t))}{dt^2}\right|_{t=t_0}=2\sum\varphi^{[2]}(\lambda_j,\ \lambda_k,\ \lambda_r)P_jS'(t_0)P_kS'(t_0)P_r+\\+\sum\varphi^{[1]}(\lambda_j,\ \lambda_k)P_jS''(t_0)P_k,$$

где под знаками сумм каждый из аргументов λ_j, λ_k, λ_r пробегает спектр $\sigma(S)$ *).

Аналогично:

143. Если функция $\varphi(\lambda)$ имеет непрерывную вторую производную в окрестности спектра $\sigma(S)$, то функция $\varphi(S)$ в точке S дважды дифференцируема и

$$d^2\varphi(S)=2\sum\varphi^{[2]}(\lambda_j,\ \lambda_k,\ \lambda_r)P_j\,dSP_k\,dSP_r.$$

Более общим образом:

144. Если функция $\varphi(\lambda)$ имеет непрерывную m-ю производную в окрестности спектра $\sigma(S)$, то функция $\varphi(S)$ в точке S дифференцируема m раз и

$$d^m\varphi(S)=\\=m!\sum\varphi^{[m]}(\lambda_{j_1},\ \lambda_{j_2},\ \ldots,\ \lambda_{j_{m+1}})P_{j_1}\,dSP_{j_2}\,dS\ldots P_{j_{m+1}}.$$

Таким образом, если функция $\varphi(\lambda)$ имеет непрерывную m-ю производную в окрестности спектра оператора S, то справедлива формула Тейлора

$$\varphi(S+\Delta S)=\\=\varphi(S)+d\varphi(S)+\ \ldots\ +\frac{1}{m!}d^m\varphi(S)+o(\|\Delta S\|^m).$$

145. Остаточный член формулы Тейлора равен нулю тогда и только тогда, когда функция $\varphi(\lambda)$ в окрестности спектра $\sigma(S)$ совпадает с некоторым полиномом степени $\leqslant m$.

*) Аналогичное соглашение действует в аналогичных формулах ниже.

146. Если $\Delta S \cup S$, то

$$\varphi(S+\Delta S)=$$
$$=\varphi(S)+\varphi'(S)\Delta S+\ldots+\frac{\varphi^{(m)}(S)}{m!}\Delta S^m+o(\|\Delta S\|^m).$$

Для того чтобы аналогичным образом детализировать формулу Тейлора в общем случае, положим

$$\varphi^{[k]}(S)=\sum\varphi^{[k]}(\lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}, \ldots, \lambda_{j_{k+1}})P_{j_1}\otimes P_{j_2}\otimes\ldots\otimes P_{j_{k+1}}$$

и определим операцию *шуровского умножения* элементов из $\overset{k+1}{\otimes}\mathfrak{S}(E)$ на элементы из $\overset{k}{\otimes}\mathfrak{S}(E)$ по формуле

$$(T_1\otimes T_2\otimes\ldots\otimes T_{k+1})\circ(S_1\otimes S_2\otimes\ldots\otimes S_k)=$$
$$=T_1S_1T_2S_2\ldots T_{k+1}.$$

147. $\varphi(S+\Delta S)=\varphi(S)+\varphi^{[1]}(S)\circ\Delta S+$

$$+\frac{1}{2!}\varphi^{[2]}(S)\circ\Delta S^{(2)}+\ldots+\frac{1}{m!}\varphi^{[m]}(S)\circ\Delta S^{(m)}+o(\|\Delta S\|^m).$$

Заметим, между прочим, что для матрицы первого дифференциала в собственном базисе Δ оператора S имеем

$$(d\varphi(S))_\Delta=\left(\frac{\varphi(\lambda_j)-\varphi(\lambda_k)}{\lambda_j-\lambda_k}\right)^n_{j,\,k=1}\circ(dS)_\Delta,$$

где $\circ$ — знак *шуровского произведения матриц*, определяемого формулой

$$(\alpha_{jk})\circ(\beta_{jk})=(\alpha_{jk}\beta_{jk}).$$

Рассмотрим применения формулы Тейлора к теории возмущений самосопряженных операторов (другие применения будут приведены в § 9 гл. VIII).

Пусть $S, T\in\mathfrak{S}(E)$ и $S(\varepsilon)=S+\varepsilon T$. Тогда, если функция $\varphi(\lambda)$ равна единице в окрестности точки λ_1 и нулю в окрестности отличных от λ_1 точек спектра $\sigma(S)$, то при достаточно малых $|\varepsilon|$ оператор $P(\varepsilon)=\varphi(S(\varepsilon))$ будет ортопроектором на линейную оболочку собственных векторов оператора $S(\varepsilon)$, соответствующих его собственным значениям из окрестности точки λ_1. При этом в качестве $\varphi(\lambda)$ можно использовать сколь угодно гладкую функцию. Разложение $P(\varepsilon)$ в ряд Тейлора дает ключ к теории возмущений.

148. Если λ_1 — простое собственное значение оператора S, то

$$P(\varepsilon)=P_1+\varepsilon\sum_{k=2}^{n}\frac{P_1TP_k+P_kTP_1}{\lambda_1-\lambda_k}+\ldots,$$

где разложение может быть доведено до членов сколь угодно высокого порядка.

При тех же предположениях:

149. Собственное значение $\lambda_1(\varepsilon)$ для достаточно малых $|\varepsilon|$ является простым собственным значением оператора $S(\varepsilon)$, и соответствующий собственный вектор $e_1(\varepsilon)$ имеет вид

$$e_1(\varepsilon)=e_1+\varepsilon\sum_{k=2}^{n}\frac{(Te_1,\ e_k)}{\lambda_1-\lambda_k}e_k+\ldots$$

150. $\lambda_1(\varepsilon)=\lambda_1+\varepsilon(Te_1,\ e_1)+\ldots$

151. Для любой функции $\varphi(\lambda)$, обладающей m-й непрерывной производной,

$$\operatorname{sp}\varphi(S+\varepsilon T)=\operatorname{sp}\varphi(S)+\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\varphi'(\lambda_k)(Te_k,\ e_k)+$$
$$+\varepsilon^2\sum_{j,\,k=1}^{n}\frac{\varphi'(\lambda_j)-\varphi'(\lambda_k)}{\lambda_j-\lambda_k}|(Te_j,\ e_k)|^2+\ldots+o(\varepsilon^m).$$

§ 6. Теорема Штейница о векторных рядах

Эта теорема была сформулирована еще в § 12 гл. I. Очевидно, при доказательстве можно, не ограничивая общности, считать E вещественным евклидовым пространством. Кроме того, можно считать сумму условно сходящегося ряда равной нулю. В этих предположениях теорема Штейница формулируется так:

152. Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k=0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|x_k\|=\infty$, то множество F сумм сходящихся рядов, образованных из данного векторного ряда путем перестановки его членов, есть ортогональное дополнение к его области безусловной сходимости N.

В соответствии с § 12 гл. I N есть наибольшее из подпространств $\mathrm{L} \subset \mathrm{E}$, для которых сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \| P x_k \|$, где P — ортопроектор на L.

Отметим, что **152** при $n = 1$ совпадает с классической теоремой Римана, а при $n = 2$ дает ее обобщение на числовые ряды с комплексными членами.

Ниже приводится одна из схем доказательства теоремы Штейница. Основным элементом этой схемы является лемма:

153. Любую систему векторов $\Gamma = \{x_k\}_1^m$, удовлетворяющую условиям

$$\sum_{k=1}^{m} x_k = 0, \quad \| x_k \| \leqslant 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

можно переупорядочить так, чтобы

$$\left\| \sum_{k=1}^{r} x_{j_k} \right\| \leqslant l \qquad (r = 1, 2, \ldots, m),$$

где l не зависит от системы Г.

Геометрически лемма **153** означает: если стороны замкнутой ломаной не превосходят 1, то можно так переставить их, что диаметр полученной ломаной не превзойдет $2l$. Доказательство можно получить индукцией по размерности линейной оболочки системы Г.

154. Если вектор s является пределом некоторой подпоследовательности частичных сумм векторного ряда **152**, то $s \in \mathrm{F}$.

155. Если $s_1 \in \mathrm{F}$ и $s_2 \in \mathrm{F}$, то

$$(1 - \alpha) s_1 + \alpha s_2 \in \mathrm{F} \quad (-\infty < \alpha < \infty).$$

Следовательно, F — подпространство.

156. $\dim \mathrm{F} \neq 0$.

157. Если $\mathrm{N} = 0$, то $\mathrm{F} = \mathrm{E}$.

Из **157** уже нетрудно получить общую теорему **152**.

ГЛАВА VII

ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА В ВЕЩЕСТВЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Клинья и конусы

На протяжении этой главы через E, пока нет специальных указаний, обозначается произвольное вещественное линейное пространство.

Наряду с линейными комбинациями, коэффициенты которых—любые вещественные числа, здесь будут рассматриваться неотрицательные (и, в частности, положительные) линейные комбинации. *Неотрицательной* (*положительной*) называется линейная комбинация с неотрицательными (соответственно, положительными) коэффициентами.

Неотрицательной линейной оболочкой любого конечного или бесконечного множества векторов $F \subset E$ называется множество неотрицательных линейных комбинаций векторов из F. *Положительной линейной оболочкой* конечного множества векторов $F \subset E$ называется множество положительных линейных комбинаций этих векторов, дополненное нулем. Векторы $\{x_k\}_1^m$ назовем *положительно линейно независимыми*, если любая их неотрицательная линейная комбинация, за исключением тривиальной, отлична от нуля.

Множество $K \subset E$ называется *клином*, если 1) из $x_1, x_2 \in K$ следует $x_1 + x_2 \in K$, 2) из $x \in K$ при любом $\alpha \geqslant 0$ следует $\alpha x \in K$. Клин K называется *конусом* *), если из $x \in K$ $(x \neq 0)$ следует $-x \bar{\in} K$ **).

---

*) Более удачными были бы термины «выпуклый клин» и «выпуклый конус», но они мало распространены.

**) Точно так же определяются клин и конус в комплексном пространстве.

Очевидно, любое подпространство (в частности, 0 и E) является клином, но не конусом, если оно отлично от нуля.

Размерностью (или *верхней размерностью*) $\dim K$ клина K называется размерность наименьшего подпространства, содержащего этот клин. Клинья максимальной размерности $\dim K = n$ называются *телесными.*

Простым примером клина (не совпадающего с подпространством), является множество $K = \{\alpha x \mid \alpha \geqslant 0\}$ при $x \in E$ $(x \neq 0)$. Этот клин имеет размерность 1 и называется *полупрямой* (или *лучом*). Очевидно, полупрямая является конусом. Двойственный пример — множество $K = \{x \mid f(x) \geqslant 0\}$ при $f \in E'$ $(f \neq 0)$. Этот клин имеет размерность $n-1$ и называется *замкнутым полупространством.*

Множество всех опорных линейных функционалов к единичной сфере нормированного пространства E в точке x_0, для которых $f(x_0) > 0$, также является клином (в E').

Суммой (или *векторной суммой*) конечного множества подмножеств $\{F_k\}_1^m$ пространства E называется множество всех сумм вида $\sum\limits_{k=1}^{m} x_k$ $(x_k \in F_k)$. Если множество подмножеств $F_\nu \subset E$ бесконечно, то определять сумму имеет смысл лишь при условии, что все подмножества F_ν (кроме, быть может, конечного числа) содержат нулевой вектор. В этом случае суммой называется множество всех конечных сумм вида $\sum x_{\nu_k}$ $(x_{\nu_k} \in F_{\nu_k}$, ν_k попарно различны$)$.

1. Сумма $K = \sum K_\nu$ множества клиньев $\{K_\nu\}$ есть клин. Этот клин является наименьшим из клиньев, содержащих все K_ν.

Двойственным образом:

2. Пересечение $K = \bigcap K_\nu$ множества клиньев $\{K_\nu\}$ есть клин. Этот клин является наибольшим из клиньев, содержащихся во всех K_ν.

3. Сумма конечного или бесконечного множества полупрямых есть клин.

Двойственным образом:

4. Пересечение конечного или бесконечного множества замкнутых полупространств есть клин.

5. Положительная линейная оболочка любого конечного множества векторов $F \subset E$ есть клин.

Двойственным образом:

6. Пусть F' — конечное множество функционалов из E'. Тогда множество $\{x \mid f(x) > 0,\ f \in F'\} \cup \{0\}$ есть клин.

Если в **6** множество F' состоит из одного функционала $f \neq 0$, то соответствующий клин называется *открытым полупространством* *).

7. Пусть $\{x_k\}_1^m$ — линейно независимая система векторов из E $(m \geqslant 2)$. Множество

$$K = \left\{ x \mid x = \sum_{k=1}^{m} \xi_k x_k,\ \xi_m^2 - \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k^2 \geqslant 0,\ \xi_m \geqslant 0 \right\}$$

есть клин. Множество

$$\left\{ x \mid x = \sum_{k=1}^{m} \xi_k x_k,\ \xi_m^2 - \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k^2 > 0,\ \xi_m \geqslant 0 \right\},$$

дополненное нулем, также есть клин. При $m = n$ оба клина являются телесными конусами (*конусы Минковского*).

8. Если векторы, определяющие полупрямые в **3**, линейно независимы, то соответствующий клин является конусом. Если векторы множества F в **5** линейно независимы, то соответствующий клин является конусом.

9. Пересечение любого множества конусов есть конус.

10. Среди подпространств L, содержащихся в клине K, существует наибольшее.

Наибольшее из линейных подпространств L, содержащихся в клине K, называется его ***линейной частью***, а число $\dim L$ — его ***нижней размерностью***.

11. Если K — клин, а L — подпространство, то множество $\left\{ [x]_L \mid x \in K \right\}$ есть клин в фактор-пространстве E/L.

12. Если L — линейная часть клина K, то множество $\left\{ [x]_L \mid x \in K \right\}$ есть конус в E/L.

Из **12** следует, что:

13. Каждый клин представим в виде суммы своей линейной части и некоторого конуса.

14. Если клин представлен в виде суммы подпространства и конуса, то это подпространство является его линейной частью.

---

*) Открытое полупространство не является открытым множеством, но становится таковым после удаления нуля.

Таким образом, для того чтобы клин был конусом, необходимо и достаточно, чтобы его линейная часть равнялась нулю.

Клин, представимый в виде суммы конечного числа полупрямых, называется *конечным клином*. Нулевое подпространство считается конечным клином по определению. Конечный клин иначе называют *многогранным* клином. Примером конечного клина может служить *положительный гипероктант*, определяемый относительно какого-нибудь базиса $\{e_k\}_1^n$ системой неравенств $\xi_k \geqslant 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Очевидно, положительный гипероктант является конусом.

Любое множество векторов, неотрицательная линейная оболочка которого совпадает с конечным клином K, называется *остовом* этого клина. Минимальный (по числу векторов) остов называется *базисом* конечного клина. Число векторов базиса клина K называется *порядком* (или *аффинным рангом*) клина K и обозначается через $\operatorname{ord} K$. Очевидно, $\operatorname{ord} K \geqslant \dim K$.

15. Любое подпространство L есть конечный клин порядка $\dim L + 1$.

16. Любое замкнутое полупространство есть конечный клин порядка $n + 1$.

Отметим, что клин, определенный в **5**, конечен лишь при $\operatorname{rg} F \leqslant 1$, а клин, определенный в **6**, конечен лишь тогда, когда его размерность $\leqslant 1$. В **7** первый клин конечен лишь при $m = 2$, а второй не конечен.

Вектор $x_0 \in K$ $(x_0 \neq 0)$ называется *крайним* (или *экстремальным*) вектором клина K, если он не может быть представлен в виде $x_0 = x_1 + x_2$, где x_1 и x_2 — линейно независимые векторы из K. Вместе с x_0 экстремальным является вектор αx_0 $(\alpha > 0)$.

17. Конечный конус K есть неотрицательная линейная оболочка множества своих крайних векторов. Порядок конуса K равен максимальному числу положительно линейно независимых экстремальных векторов конуса K.

18. Если L — линейная часть клина K, то

$$\operatorname{ord} K = \operatorname{ord} L + \operatorname{ord} K/L.$$

19. Сумма конечного числа конечных клиньев есть конечный клин.

20. Пересечение конечного числа конечных клиньев есть конечный клин.

В частности:

21. Пересечение конечного числа замкнутых полупространств есть конечный клин.

Обращение этой теоремы будет рассмотрено в § 3.

Пусть L — наименьшее подпространство, содержащее клин K. В дальнейшем термины «внутренняя (граничная) точка клина» и др. мы употребляем в смысле топологии в L. Очевидно, любой конечный клин замкнут.

22. Для того чтобы клин K был замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы его пересечение с любым двумерным подпространством было конечным клином.

Множество внутренних точек клина K обозначим через $\operatorname{Int} K$.

23. Если клин K замкнут, то равенство $K = \operatorname{Int} K$ имеет место тогда и только тогда, когда K — подпространство.

24. Пересечение любого множества замкнутых клиньев есть замкнутый клин.

25. Сумма конечного числа замкнутых клиньев есть замкнутый клин.

26. Замыкание $\overline{K}$ любого клина K есть клин. Например, в **7** замыкание второго клина есть первый клин.

Легко видеть, что замыкание конуса не всегда является конусом.

27. Если $h \in \operatorname{Hom}(E, E_1)$ и K — клин в E, то множество hK есть клин в E_1.

28. Если клин K конечный, то hK также конечный клин.

29. $\dim hK \leqslant \dim K$.

30. Если клин K конечный, то $\operatorname{ord} hK \leqslant \operatorname{ord} K$.

31. Если K - конус и $\operatorname{Ker} h = 0$, то и hK — конус.

Более общим образом:

32. Для того чтобы клин hK был конусом, необходимо и достаточно, чтобы $L \subset \operatorname{Ker} h$, где L — линейная часть клина K.

33. Если K — клин в E, то множество

$$K' = \{f \mid f(x) \geqslant 0, \ x \in K\}$$

есть клин в E'.

Клин K' называется ***сопряженным*** по отношению к K.

34. Сопряженный клин всегда замкнут: $\overline{K'} = K'$.

35. $(\overline{K})' = K'$.

36. Если клин L есть подпространство, то $L' = L^{\perp}$.

37. Если клин K конечный, то и клин K' конечный.

38. С точностью до канонического изоморфизма, для любого клина K

$$K \subset K''.$$

39. $(K_1 + K_2)' = K_1' \cap K_2'$.

40. $(K_1 \cap K_2)' \supset K_1' + K_2'$.

Если в **38** и **40** клинья K, K_1, K_2 являются подпространствами, то включение можно заменить равенством (см. **182**, **184** гл. I). Но в общем случае этого сделать нельзя. Соответствующие примеры легко построить, используя незамкнутые клинья. В § 3 выяснится, что для замкнутых клиньев в **38** и **40** имеет место равенство. Тогда соотношения **39** и **40** станут взаимно двойственными, а соотношение **38** — самодвойственным.

41. Отображение ($'$) является монотонно убывающим: если $K_1 \subset K_2$, то $K_1' \supset K_2'$ (ср. **183** гл. I).

42. Для того чтобы клин K' был телесным, необходимо и достаточно, чтобы клин K был конусом.

Более общим образом:

43. Если m — верхняя размерность клина K, а m' — нижняя размерность сопряженного клина K', то справедлива *формула дополнения*

$$m + m' = n$$

(ср. **181** гл. I).

44. Если конус K задан в некотором базисе Δ неравенством

$$\xi_n \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n-1} | \xi_k |^p \right)^{1/p} \qquad (1 \leqslant p \leqslant \infty),$$

то конус K' в сопряженном базисе Δ' определяется неравенством

$$\eta_n \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n-1} | \eta_k |^q \right)^{1/q},$$

где $1/p + 1/q = 1$ (ср. **104** гл. IV).

В заключение этого параграфа остановимся на случае, когда E — евклидово пространство. Тогда можно считать $K' \subset E$.

45. $K + K' = E$.

46. Если $K \cap (-K') = 0$, то K есть подпространство.

Клин K евклидова пространства E называется *острым*, если $(x, y) \geqslant 0$ для любых $x, y \in K$, и *тупым*, если для любого $y \bar{\in} K$ существует $x \in K$ такой, что $(x, y) < 0$. Клин назовем *прямым*, если он является одновременно острым и тупым.

47. Острый клин является конусом.

48. Тупой клин телесен.

49. Для того чтобы клин K был острым, необходимо и достаточно, чтобы $K \subset K'$.

50. Для того чтобы клин K был тупым, необходимо и достаточно, чтобы $K \supset K'$.

Клин K называется *самосопряженным*, если $K = K'$. Очевидно, для того чтобы клин был прямым, необходимо и достаточно, чтобы он был самосопряженным. Простым примером самосопряженного клина является положительный гипероктант относительно ортонормированного базиса. Он называется *положительным ортантом*.

51. Для того чтобы клин K был тупым, необходимо и достаточно, чтобы клин K' был острым.

Определим в ортонормированном базисе конус K_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ неравенством $\xi_n \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n-1} |\xi_k|^p \right)^{1/p}$.

52. $K'_p = K_q$ $(1/p + 1/q = 1)$.

53. Конус K_p острый при $1 \leqslant p \leqslant 2$ и тупой при $2 \leqslant p \leqslant \infty$.

Таким образом, конус K_2 прямой. Он называется *круглым конусом Минковского*.

§ 2. Выпуклые множества

Клинья и абсолютно выпуклые множества в вещественном пространстве*) являются частными случаями выпуклых множеств, определяемых следующим образом**).

---

*) Абсолютно выпуклые множества в вещественном и комплексном пространствах определяются одинаково.

**) Это определение сохраняется для выпуклых множеств в комплексном пространстве.

Множество $W \subset E$ называется *выпуклым*, если из x_1, $x_2 \in W$ следует

$$(1-\theta)x_1 + \theta x_2 \in W \qquad (0 < \theta < 1).$$

Аффинным многообразием G в E называется сумма

$$G = x_0 + L,$$

где x_0 — вектор, а L — подпространство. *Размерностью* аффинного многообразия G называется число $\dim G = \dim L$. При $\dim G = n-1$ аффинное многообразие называется *гиперплоскостью.*

Каждая гиперплоскость может быть задана уравнением $f(x) = \alpha$ ($f \in E'$, $f \neq 0$) и, наоборот, каждое такое уравнение задает некоторую гиперплоскость. Гиперплоскость $f(x) = \alpha$ разбивает пространство E на два *открытых полупространства* *) $f(x) > \alpha$ и $f(x) < \alpha$.

Очевидно, аффинное многообразие выпукло.

Линейной размерностью (или *размерностью*) $\dim F$ произвольного (в частности, выпуклого) множества $F \subset E$ называется размерность наименьшего аффинного многообразия, содержащего F.

Выпуклое множество размерности n называется *выпуклым телом.*

54. Выпуклое множество W является абсолютно выпуклым тогда и только тогда, когда оно симметрично относительно нуля (т. е. вместе с x содержит $-x$).

55. Если множество W выпукло, то и множество αW выпукло.

56. Для того чтобы выпуклое множество W было клином, необходимо и достаточно, чтобы $\alpha W \subset W$ ($\alpha \geqslant 0$).

57. Если W — выпуклое множество в E и $h \in \operatorname{Hom}(E, E_1)$, то множество hW выпукло в E_1.

58. Если W — выпуклое множество, то множество $\bigcup\limits_{\alpha \geqslant 0} \alpha W$ является клином (конусом, если $0 \overline{\in} W$).

59. Если W — выпуклое множество, то при каждом $x_0 \in E$ множество $x_0 + W$ также выпукло.

---

*) Значение термина «открытое полупространство» здесь отличается от указанного в предыдущем параграфе.

Из **58** и **59** следует:

60. Если $\tilde{E} = E + E_1$ ($\dim E_1 = 1$), W — выпуклое множество в E и $y_0 \in E_1$, то множество $K = \bigcup_{\alpha \geqslant 0} \alpha(y_0 + W)$ является клином в $\tilde{E}$ (конусом, если $y_0 \neq 0$).

Расширение выпуклого множества $W \subset E$ до клина K, описанное в **60**, позволяет редуцировать некоторые теоремы о выпуклых множествах к соответствующим теоремам о клиньях. Для обратной редукции может быть использовано *сужение* клина K до исходного выпуклого множества W.

61. Пересечение $W = \bigcap W_\nu$ произвольного множества $\{W_\nu\}$ выпуклых множеств есть выпуклое множество. При этом W есть наибольшее выпуклое множество, содержащееся во всех W_ν.

62. Сумма $W = \sum W_\nu$ произвольного множества $\{W_\nu\}$ выпуклых множеств есть выпуклое множество.

Заметим, что (в отличие от **1**) сумма W, вообще говоря, не содержит множеств W_ν.

Выпуклой комбинацией векторов $\{x_k\}_1^m$ называется сумма вида

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k \qquad \left(\alpha_k \geqslant 0, \ \sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1\right).$$

Выпуклой оболочкой Co F множества $F \subset E$ называется множество выпуклых комбинаций векторов из F.

63. $\mathrm{Co}(F_1 + F_2) = \mathrm{Co}\,F_1 + \mathrm{Co}\,F_2$, $\mathrm{Co}(\alpha F) = \alpha\,\mathrm{Co}\,F$.

64. $\mathrm{Co}(F_1 \cup F_2) = \mathrm{Co}(\mathrm{Co}\,F_1 \cup \mathrm{Co}\,F_2)$,
$\mathrm{Co}(F_1 \cap F_2) \subset \mathrm{Co}\,F_1 \cap \mathrm{Co}\,F_2$.

65. Выпуклая оболочка Co F есть наименьшее выпуклое множество, содержащее F.

В частности:

66. Выпуклая оболочка $\mathrm{Co}(\bigcup F_\nu)$ объединения произвольных множеств $F_\nu \subset E$ является наименьшим выпуклым множеством, содержащим все F_ν.

Пусть G — наименьшее аффинное многообразие, содержащее выпуклое множество $W \subset E$. Все топологические термины, относящиеся к W, мы будем понимать в смысле топологии, естественно индуцируемой в G топологией пространства E. Множество внутренних точек множества W обозначим через Int W. Замыкание $\overline{\mathrm{Co}}\,F$ множества Co F называется *замкнутой выпуклой оболочкой* множества $F \subset E$.

67. Пересечение $\bigcap W_\nu$ произвольного множества замкнутых выпуклых множеств есть замкнутое выпуклое множество.

68. Сумма $W = \sum W_k$ конечного числа замкнутых выпуклых множеств есть замкнутое выпуклое множество.

69. Выпуклая оболочка $\mathrm{Co}(\bigcup F_k)$ объединения конечного множества $\{F_k\}$ замкнутых множеств замкнута.

70. Если $\dim F = m$, то каждая точка $x \in \mathrm{Co}\, F$ является выпуклой комбинацией $m+1$ точек из F (зависящих, вообще говоря, от x и не обязательно различных).

При некоторых дополнительных ограничениях теорема **70** допускает уточнение, а именно:

71. Если множество F связно (или имеет не более m связных компонент), то каждая точка $x \in \mathrm{Co}\, F$ является выпуклой комбинацией m точек из F (теорема Каратеодори).

72. Если множество $F \subset E$ содержит по крайней мере $n+2$ различных точек, то его можно разбить на такие непустые части F_1, F_2 $(F = F_1 \cup F_2,\ F_1 \cap F_2 = \varnothing)$, что $\mathrm{Co}\, F_1 \cap \mathrm{Co}\, F_2 \neq \varnothing$.

73. Если пересечение любых $n+1$ из k $(k \geqslant n+2)$ компактных выпуклых тел пространства E не пусто, то пересечение всех k тел также не пусто (теорема Хелли).

Для доказательства можно воспользоваться индукцией по k. Теорема Хелли остается справедливой и при $k = \infty$.

Двойственный по отношению к **73** характер носит следующее предложение (вытекающее из **73**):

74. Если компактное выпуклое тело $W \subset E$ покрыто некоторым конечным множеством открытых полупространств, то из этого множества можно выделить $n+1$ полупространств, покрывающих W.

Последние предложения относятся к комбинаторной геометрии, которой мы более касаться не будем. Но с одним частным случаем теоремы **73** в алгебраическом аспекте мы еще встретимся (см. **52** гл. VIII).

Выпуклая оболочка W конечного множества $F \subset E$ называется *выпуклым многогранником*, а множество F — его *остовом*. Выпуклые многогранники аналогичны конечным клиньям (но никакой клин $K \neq 0$ не является выпуклым многогранником).

75. Выпуклый многогранник является компактным множеством.

76. Если W — выпуклый многогранник, то αW — также выпуклый многогранник.

77. Если W — выпуклый многогранник в E и $h \in \mathrm{Hom}(E, E_1)$, то множество hW является выпуклым многогранником в E_1.

78. Сумма, пересечение и выпуклая оболочка конечного множества выпуклых многогранников являются выпуклыми многогранниками.

79. Для того чтобы выпуклое множество W было выпуклым многогранником, необходимо и достаточно, чтобы его расширение до клина было конечным конусом.

80. Если пересечение W конечного числа замкнутых полупространств есть ограниченное множество, то оно является выпуклым многогранником.

Обращение этой теоремы будет дано далее в **99**.

В заключение рассмотрим вопрос о характеризации евклидова пространства в терминах проекционных констант (см. **71** гл. IV).

Пусть E — нормированное пространство и норма в E дважды дифференцируема, причем ее вторая производная является изоморфизмом $E \to E'$.

81. Если проекционные константы всех подпространств коразмерности 1 равны единице, то пространство E евклидово.

Для доказательства достаточно рассмотреть случай, когда E — трехмерное пространство. В этом случае можно ввести в E какое-нибудь скалярное произведение и установить следующие геометрические леммы.

82. Если одно из плоских сечений тела W есть круг, то все параллельные ему плоские сечения также являются круговыми.

83. Для каждой граничной точки x_0 тела W существует линейный оператор A_0, удовлетворяющий условию $A_0 x_0 = x_0$ и преобразующий тело W в такое тело, для которого x_0 есть точка округления границы (т. е. в точке x_0 кривизна всех нормальных сечений границы одинакова).

Отметим, что теорема **81** остается справедливой без каких-либо предположений о норме *).

---

*) См. S. Kakutani, Some characterisations of Euclidean space, Japan J. Math. 16 (1939), 93—97.

§ 3. Теоремы отделимости

Пусть K — клин в E и подпространство $L \subset E$таково, что $\dim(K \cap L) \geqslant 1$. Линейный функционал $f \in L'$ называется *неотрицательным* относительно K, если $f(x) \geqslant 0$ при всех $x \in K \cap L$ и $f(x) > 0$ для некоторого $x \in K \cap L$.

84. Если подпространство L содержит внутреннюю точку клина K, то любой неотрицательный линейный функционал на L допускает продолжение до неотрицательного линейного функционала $\tilde{f}(x)$, определенного на всем E (теорема М. Г. Крейна).

Доказательство легко провести по индукции относительно $\dim L$, если воспользоваться следующим замечанием.

85. Если $x \bar{\in} L$, то в L существуют векторы x' и x'' такие, что $x - x' \in K$, $x'' - x \in K$. При этом

$$\sup_{x'} f(x') \leqslant \inf_{x''} f(x'').$$

Можно также воспользоваться обобщением теоремы Хана — Банаха на преднормированные пространства (см. **96** гл. IV).

Из теоремы Крейна, в частности, следует:

86. Для любого клина $K \neq E$ существует по крайней мере один неотрицательный относительно него функционал $f \in E'$.

Таким образом, если $K \neq E$, то $K' \neq 0$.

Из теоремы Крейна также следует теорема об отделяющей гиперплоскости:

87. Если K — замкнутый клин в E и $x \bar{\in} K$, то существует функционал $f \in K$ такой, что $f(x) < 0$.

Теперь мы можем дополнить теоремы **38**, **21** и **40**.

88. Для справедливости соотношения $K = K''$ необходима и достаточна замкнутость клина K (ср. **38**).

89. Для любого клина K

$$K'' = \overline{K}.$$

Поэтому:

90. Замкнутый клин K является пересечением множества всех замкнутых полупространств, содержащих K. Для произвольного клина K это пересечение есть $\overline{K}$.

В частности, имеет место обращение теоремы **21**:

91. Любой конечный клин является пересечением конечного числа замкнутых полупространств.

92. Если клинья K_1 и K_2 замкнуты, то

$$(K_1 \cap K_2)' = K_1' + K_2'$$

(ср. **40**).

Отметим, что теорема **87** об отделяющей гиперплоскости содержит нетривиальную часть следующих предложений о конечных клиньях.

93. Для любого конечного клина K

$$K'' = K$$

(теорема Фаркаша).

94. Для любого конечного клина $Q \subset E'$ существует клин $K \subset E$ такой, что $K' = Q$ (теорема Минковского).

95. Для любого конечного клина $Q \subset E'$ существует клин $K \subset E$ такой, что $K' = Q$ и $Q' = K$ (теорема Г. Вейля).

96. Отображение сопряжения является взаимно однозначным и монотонным отображением множества всех конечных клиньев пространства E на множество всех конечных клиньев пространства E'.

Как уже частично отмечалось выше, все эти предложения верны для множества всех замкнутых, а не только конечных клиньев.

Имеет также место следующий аналог теоремы **90**:

97. Замкнутое выпуклое множество W является пересечением всех замкнутых полупространств, содержащих W. Для произвольного выпуклого множества W это пересечение есть $\overline{W}$.

Далее:

98. Замкнутая выпуклая оболочка любого множества $F \subset E$ совпадает с пересечением всех замкнутых полупространств, содержащих F.

Следующее предложение обращает **80**:

99. Любой выпуклый многогранник является пересечением конечного числа замкнутых полупространств (ср. **91**).

Теорема об отделяющей гиперплоскости допускает развитие:

100. Если для клиньев K_1 и K_2

$$\operatorname{Int} K_1 \cap \operatorname{Int} K_2 = \varnothing,$$

то существует функционал $f \in E'$ $(f \neq 0)$ такой, что $f(x) \geqslant 0$ при $x \in K_1$ и $f(x) \leqslant 0$ при $x \in K_2$.

В частности:

101. Если подпространство L не содержит внутренних точек клина K, то существует неотрицательный функционал $f \in E'$ такой, что $f(x)=0$ при $x \in L$.

Это предложение обобщается на произвольные выпуклые множества. Соответствующую формулировку мы приведем на геометрическом языке:

102. Если аффинное многообразие G не содержит внутренних точек выпуклого множества W, то существует гиперплоскость $H \supset G$ такая, что W расположено по одну сторону от H.

Это – более общая формулировка теоремы Асколи — Мазура (см. **82**, **83** гл. IV). Если G сводится к одной точке $x_0 \in W$, то H превращается в *опорную гиперплоскость* к множеству W в точке x_0.

Развитие теоремы Крейна завершается следующим предложением об отделимости выпуклых множеств.

103. Если для выпуклых множеств W_1 и W_2

$$\operatorname{Int} W_1 \cap \operatorname{Int} W_2 = \varnothing,$$

то существует гиперплоскость, отделяющая W_1 от W_2, т. е. существует функционал $f \in E'$ ($f \neq 0$), для которого

$$\sup_{x_1 \in W_1} f(x_1) \leqslant \inf_{x_2 \in W_2} f(x_2).$$

Рассмотрим некоторые приложения теорем отделимости к проблемам моментов.

Пусть $\{x_\nu\}$ — некоторое множество векторов нормированного пространства E, $\{\alpha_\nu\}$ – некоторое множество вещественных чисел.

104. Для существования функционала $f \in E'$ с нормой $\|f\| \leqslant \rho$, удовлетворяющего неравенствам

$$f(x_\nu) \geqslant \alpha_\nu$$

при всех ν, необходимо и достаточно, чтобы для любого конечного набора индексов $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ и любых положительных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ было

$$\rho \left\| \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_{\nu_k} \right\| \geqslant \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \alpha_k.$$

105. Пусть K — клин. Если при некотором $\nu=\nu_0$

$$x_{\nu_0}\in \operatorname{Int} K, \qquad \alpha_{\nu_0}>0,$$

то для существования неотрицательного относительно K функционала $f\in E'$, удовлетворяющего уравнениям

$$f(x_\nu)=\alpha_\nu$$

при всех ν, необходимо и достаточно, чтобы для любого конечного набора индексов $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ и любых вещественных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, для которых

$$\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\alpha_k=0,$$

было

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_{\nu_k}\bar{\in} \operatorname{Int} K.$$

106. Пусть $\{S_\nu\}$ — некоторое множество самосопряженных операторов в унитарном пространстве, $\{\alpha_\nu\}$ — некоторое множество вещественных чисел. Если при некотором $\nu=\nu_0$ оператор S_{ν_0} положителен и $\alpha_{\nu_0}>0$, то для существования неотрицательного самосопряженного оператора C, удовлетворяющего уравнениям

$$\operatorname{sp}(CS_\nu)=\alpha_\nu$$

при всех ν, необходимо и достаточно, чтобы для любого конечного набора индексов $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ и любых вещественных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, для которых

$$\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\alpha_{\nu_k}=0,$$

оператор

$$\sum_{k=1}^{m}\lambda_k S_{\nu_k}$$

не был положительным.

Рассмотрим попутно так называемую $\mathscr{L}$-проблему моментов:

107. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{m}$ $(m < n)$ — линейно независимая система векторов нормированного пространства E, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ — вещественные числа. Положим

$$\mu = \inf_{\{\lambda_k\}} \left\| \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k \right\| \qquad \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \lambda_k = 1 \right).$$

Для существования функционала $f \in E'$, удовлетворяющего условиям

$$f(x_k) = \alpha_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m), \qquad \|f\| < \mathscr{L},$$

необходимо и достаточно выполнения неравенства $\mathscr{L} \geqslant 1/\mu$.

108. Если $\mathscr{L} > 1/\mu$, то решения $\mathscr{L}$-проблемы моментов образуют $(n-m)$-мерное выпуклое множество, являющееся пересечением единичного шара с некоторым $(n-m)$-мерным аффинным многообразием.

109. Если пространство E' строго нормировано, то для единственности решения $\mathscr{L}$-проблемы моментов необходимо и достаточно, чтобы $\mathscr{L} = 1/\mu$.

§ 4. Крайние точки

Пусть W — выпуклое множество. Точка $x \in W$ называется *крайней* (или *экстремальной*) точкой множества W, если представление $x = (1-\theta)x_1 + \theta x_2$, где $0 < \theta < 1$, $x_1, x_2 \in W$, возможно лишь при $x_1 = x_2$. Если все граничные точки множества W являются крайними, то W называется *строго выпуклым* множеством.

110. Для того чтобы точка $x \in W$ была крайней, необходимо и достаточно, чтобы из

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \qquad x_1 \in W, \quad x_2 \in W,$$

следовало $x_1 = x_2 = x$.

111. Каждая крайняя точка выпуклого многогранника принадлежит любому его остову.

112. Выпуклый многогранник совпадает с выпуклой оболочкой множества своих крайних точек.

Таким образом, множество крайних точек выпуклого многогранника является его наименьшим остовом (*базисом*). Число крайних точек выпуклого многогранника W называется его *порядком* (или *аффинным рангом*) и обозначается через ord W.

113. Каждое компактное выпуклое множество W имеет крайнюю точку.

Например:

114. Если $y \bar{\in} W$, то наиболее удаленная от y точка $x \in W$ является крайней.

Отметим, что множество крайних точек выпуклого компакта может быть незамкнутым.

115. Любое компактное выпуклое множество совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой множества своих крайних точек (теорема Крейна — Мильмана).

Из этой теоремы и теорем **70**, **71** непосредственно вытекает:

116. Если W — компактное выпуклое множество и $\dim W = m$, то каждая точка $x \in W$ является выпуклой комбинацией некоторых $m+1$ его крайних точек. Если множество крайних точек связно (или имеет не более m связных компонент), то каждая точка $x \in W$ является выпуклой комбинацией m крайних точек.

Ниже мы рассмотрим некоторые применения теорем о выпуклых множествах. Предварительно введем два специальных класса операторов и изучим их спектральные свойства. Зафиксируем некоторый базис Δ.

Оператор $T \in \mathfrak{M}(E)$ называется *пермутатором* относительно базиса Δ, если он осуществляет перестановку векторов базиса Δ. Множество пермутаторов относительно базиса Δ обозначим через $\mathfrak{P}$. Оператор $A \in \mathfrak{M}(E)$ называется *стохастическим* относительно базиса Δ, если элементы α_{jk} $(j, k = 1, 2, \ldots, m)$ его матрицы в этом базисе неотрицательны и удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} = 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Если, кроме того,

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} = 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

то оператор A называется ***дважды стохастическим*** (*бистохастическим*) относительно базиса Δ. Матрица $\|\alpha_{jk}\|_1^n$ стохастического (дважды стохастического) оператора в базисе Δ называется *стохастической* (соответственно *дважды стохастической* или *бистохастической*). Множество дважды стохастических операторов относительно базиса Δ обозначим через $\mathfrak{W}$. Очевидно, $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{W}$.

Пусть $T \in \mathfrak{P}$, $\Delta = \{e_k\}_1^n$, $Te_k = e_{j_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и разложение подстановки

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ j_1, & j_2, & \ldots, & j_n \end{pmatrix}$$

на независимые циклы есть

$$\sigma = \left(r_1, r_2, \ldots, r_{p_1}\right) \ldots \left(s_1, s_2, \ldots, s_{p_m}\right).$$

117. Оператор T^* является пермутатором, и его подстановка σ^* обратна подстановке σ.

118. Имеет место равенство $T^p = I$, где p — наименьшее кратное порядков циклов подстановки σ.

119. Каждое собственное значение пермутатора есть натуральный корень из единицы.

120. Кратность собственного значения $\lambda = 1$ пермутатора T равна числу циклов подстановки σ.

Заметим, что из **44** гл. II следует, что пермутатор является оператором скалярного типа. Следующее предложение содержит **119** и **120**.

121. Характеристический полином пермутатора T равен

$$\mathscr{D}(\lambda;\ T) = \left(\lambda^{p_1} - 1\right)\left(\lambda^{p_2} - 1\right) \cdot \ \ldots \ \cdot \left(\lambda^{p_m} - 1\right).$$

Обратно:

122. Если характеристический полином оператора T скалярного типа имеет вид **121**, то T — пермутатор относительно некоторого базиса в $\mathrm{E}^{(c)}$.

Остановимся на спектральных свойствах стохастических операторов.

123. Спектральный радиус стохастического оператора равен единице.

124. Характеристический полином стохастического оператора A имеет вид

$$\mathscr{D}(\lambda;\ A) = (\lambda^m - 1)\, Q(\lambda),$$

где $Q(\lambda)$ — полином, корни которого лежат внутри единичного круга.

Исследуем строение множества $\mathfrak{W}$ дважды стохастических операторов.

125. Множество $\mathfrak{W}$ есть выпуклый компакт, $\dim \mathfrak{W} = (n-1)^2$.

126. Множество крайних точек множества $\mathfrak{W}$ совпадает с $\mathfrak{P}$.

Таким образом, $\mathfrak{W}$ есть многогранник и $\operatorname{ord} \mathfrak{W} = n!$. Итак:

127. Множество дважды стохастических операторов совпадает с выпуклой оболочкой множества пермутаторов (теорема Г. Биркгофа).

128. Каждый дважды стохастический оператор является выпуклой комбинацией некоторых $n^2 - 2n + 2$ пермутаторов.

Отметим один аналог теоремы Биркгофа. Назовем оператор *квазипермутатором* относительно базиса $\Delta = \{e_k\}_1^n$, если

$$Te_k = \pm e_{j_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

где $j_1, j_2, \ldots, j_n$ — перестановка индексов $1, 2, \ldots, n$.

129. Если оператор T является сжатием в c-норме и в l-норме относительно базиса Δ, то он принадлежит выпуклой оболочке квазипермутаторов относительно Δ, и обратно.

Для любой последовательности вещественных чисел $\{\alpha_j\}_1^n$ условимся через $\{\overset{>}{\alpha}_j\}_1^n$ обозначать числа α_j, перенумерованные в порядке невозрастания. Пусть $x, y \in \mathrm{R}^n$, $x = \{\xi_j\}_1^n$, $y = \{\eta_j\}_1^n$. Условимся писать $x \ll y$, если

$$\sum_{j=1}^{k} \overset{>}{\xi}_j \leqslant \sum_{j=1}^{k} \overset{>}{\eta}_j \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

а в случае, когда при этом

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_j = \sum_{j=1}^{n} \eta_j,$$

будем писать $x \prec y$. Очевидно, $\ll$ и $\prec$ суть отношения порядка.

При фиксированном векторе $y = \{\eta_j\}_1^n$ из R^n обозначим через W множество векторов $x \in \mathrm{R}^n$, удовлетворяющих соотношению $x \prec y$.

130. Множество W является выпуклым компактом.

131. Для того чтобы точка $x \in W$ была крайней точкой множества W, необходимо и достаточно, чтобы

$$x = \{\eta_{j_k}\}_{k=1}^{n},$$

где $j_1, j_2, \ldots, j_n$ — какая-нибудь перестановка индексов 1, 2, ..., n.

Следовательно, множество W есть многогранник и $\operatorname{ord} W \leqslant n!$.

Итак:

132. Для любого вектора $y \in R^n$ множество W векторов $x \in R^n$, удовлетворяющих соотношению $x \prec y$, совпадает с выпуклой оболочкой множества векторов, получаемых из вектора y с помощью перестановки его координат (теорема Радо).

Между теоремами Биркгофа и Радо имеется следующая связь, которую также можно использовать для доказательства теоремы Радо.

'133. Для того чтобы $x \prec y$, необходимо и достаточно, чтобы $x = Ay$, где A — дважды стохастический оператор относительно канонического базиса пространства R^n.

Результаты **130—132** допускают развитие.

134. Множество W векторов $x = \{\xi_j\}_1^n$, которые при фиксированном $y \in R^n$ удовлетворяют соотношению*) $|x| \ll |y|$, является выпуклым компактом.

135. Для того чтобы точка $x \in W$ была крайней точкой множества W, необходимо и достаточно, чтобы $x = \{\varepsilon_k \eta_{j_k}\}_{k=1}^{n}$, где $j_1, j_2, \ldots, j_n$ — какая-нибудь перестановка индексов 1, 2, ..., n и $\varepsilon_k = \pm 1$.

Следовательно, множество W есть многогранник и $\operatorname{ord} W \leqslant 2^n n!$.

Итак:

136. Для любого $y \in R^n$ множество W векторов $x \in R^n$, удовлетворяющих соотношению $|x| \ll |y|$, совпадает с выпуклой оболочкой множества векторов, получаемых из вектора $|y|$ с помощью перестановки его координат и умножения их на ± 1 (теорема А. С. Маркуса).

---

*) Знак модуля означает здесь замену координат вектора их абсолютными значениями.

§ 5. Неравенства между собственными значениями и сингулярными числами

Мы рассмотрим здесь неравенства между собственными значениями и s-числами, связанные с отношениями порядка $\prec$ и $\preccurlyeq$.

Пусть $\mathrm{K}\subset\mathrm{R}^n$ есть клин, определяемый равенством

$$\mathrm{K}=\left\{x=\{\xi_k\}_1^n \,\middle|\, \xi_1\geqslant\xi_2\geqslant\ldots\geqslant\xi_n\right\}.$$

Если $x,\ y\in\mathrm{K},\ x=\{\xi_k\}_1^n,\ y=\{\eta_k\}_1^n$, то отношение $x\preccurlyeq y$ равносильно системе неравенств

$$\sum_{k=1}^m \xi_k\leqslant\sum_{k=1}^m \eta_k \qquad (m=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Систему собственных значений $\lambda(S)=\{\lambda_k(S)\}_1^n$ самосопряженного оператора S мы будем рассматривать как вектор пространства R^n. Аналогично вводится вектор $s(A)$:

$$s(A)=\lambda\left((A^*A)^{1/2}\right).$$

Таким образом, для любых операторов $S\in\mathfrak{S}(\mathrm{E}),\ A\in\mathfrak{M}(\mathrm{E})$ в комплексном евклидовом пространстве E

$$\lambda(S)\in\mathrm{K},\quad s(A)\in\mathrm{K}.$$

Для любого оператора A занумеруем его собственные значения, взятые с учетом кратности, в порядке невозрастания их модулей и обозначим через $\omega_k(A)$ модуль k-го собственного значения ($k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$). В частности, $\omega_1(A)=\rho(A)$. Введем вектор $\omega(A)=\{\omega_k(A)\}_1^n\in\mathrm{R}^n$. Очевидно, $\omega(A)\in\mathrm{K}$.

Если, наконец, $\varphi(\xi)$ — неубывающая функция, то при $x\in\mathrm{K},\ x=\{\xi_k\}_1^n$

$$\varphi(x)\underset{\text{def}}{=}\{\varphi(\xi_k)\}_1^n\in\mathrm{K}.$$

Следующий признак монотонности функционала, определенного на клине K, является источником ряда неравенств, связывающих собственные значения с s-числами.

137. Если функционал $\Phi(x)$ определен на K, дифференцируем и

$$\nabla\Phi(x) = \left\{\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_k}\right\}_1^n \in \mathrm{K} \qquad (x \in \mathrm{K}),$$

то из соотношения $x \prec\!\!\!\preccurlyeq y$ $(x,\ y \in \mathrm{K})$ следует неравенство

$$\Phi(x) \leqslant \Phi(y).$$

Доказательство можно провести с помощью замены переменных $\zeta_k = \sum_{j=1}^{k} \xi_j$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

Применения теоремы **137** основаны на следующих замечательных неравенствах Г. Вейля:

138. $\prod_{k=1}^{m} \omega_k(A) \leqslant \prod_{k=1}^{m} s_k(A)$ $\quad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

Для доказательства можно использовать внешние степени оператора (см. **89** гл. V).

139. В неравенствах **138** при $m \geqslant \operatorname{rg} A$ имеет место знак равенства. Для того чтобы знак равенства имел место во всех неравенствах **138**, необходимо и достаточно, чтобы оператор A был нормален (см. **252** гл. III).

Неравенства Вейля являются точными в том смысле, что:

140. Для любых комплексных чисел $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ $(|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|)$ и неотрицательных чисел $s_1 \geqslant s_2 \geqslant \ldots \geqslant s_n$, удовлетворяющих соотношениям

$$\left|\prod_{k=1}^{m} \lambda_k\right| \leqslant \prod_{k=1}^{m} s_k \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

$$\left|\prod_{k=1}^{n} \lambda_k\right| = \prod_{k=1}^{n} s_k,$$

существует оператор A с собственными значениями $\{\lambda_k\}_1^n$ и сингулярными числами $\{s_k\}_1^n$ (теорема Хорна).

Неравенства Вейля можно также получить из следующей теоремы, непосредственно вытекающей из перемежаемости собственных значений (см. **232** гл. III).

141. Для любой ортонормированной системы векторов $\{e_k\}_1^m$

$$\det((Ae_j,\ Ae_k))_{j,\,k=1}^{m} \leqslant \prod_{k=1}^{m} s_k(A).$$

Более общим образом:

142. Для любой системы векторов $\{e_k\}_1^m$ $(m \leqslant n)$

$$\det((Ae_j,\ Ae_k))_{j,\,k=1}^m \leqslant \left(\prod_{k=1}^m s_k(A)\right)\det((e_j,\ e_k))_{j,\,k=1}^m.$$

При $m=n$ имеет место знак равенства.

Рассмотрим теперь применения теоремы **137.**

143. Пусть функционал $F(y)$, определенный на пересечении клина К с положительным гипероктантом, порождает функционал

$$\Phi(x)=F(e^x) \qquad (x \in \text{К}),$$

удовлетворяющий условиям теоремы **137.** Тогда

$$F(\omega(A)) \leqslant F(s(A))$$

(теорема Островского).

Из теоремы Островского следует:

144. Если функция

$$\varphi(\xi)=f(e^\xi) \qquad (-\infty<\xi<\infty)$$

выпукла, то

$$\sum_{k=1}^m f(\omega_k(A)) \leqslant \sum_{k=1}^m f(s_k(A)) \qquad (m=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

(теорема Г. Вейля).

В частности:

145. $(\omega(A))^p \prec\!\!\!\prec (s(A))^p \quad (p>0)$.

В развернутом виде соотношение **145** означает, что

$$\sum_{k=1}^m \omega_k^p(A) \leqslant \sum_{k=1}^m s_k^p(A) \qquad (m=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (*)$$

При $p=1$ и $p=2$ последнее из этих неравенств уже встречалось ранее (см. **257**, **259** гл. III). Заметим также, что при $p=2$ все указанные неравенства можно установить непосредственно, используя базис Шура.

146. Пусть $F_r(\tau_1,\ \tau_2,\ \ldots,\ \tau_m)$ — r-я элементарная симметрическая функция:

$$F_r(\tau_1,\ \tau_2,\ \ldots,\ \tau_m)=\sum_{1\leqslant j_1<\ldots<j_r\leqslant m}\tau_{j_1}\tau_{j_2}\ldots\tau_{j_r}.$$

Тогда

$$F_r(\omega_1(A), \omega_2(A), \ldots, \omega_m(A)) \leqslant F_r(s_1(A), s_2(A), \ldots, s_m(A))$$
$$(1 \leqslant r \leqslant m \leqslant n).$$

Неравенства (*) при $p=1$ позволяют обобщить теорему **265** гл. III:

147. Для любого $m \leqslant n$

$$\sup\left|\sum_{k=1}^{m}(UAe_k, e_k)\right| = \sum_{k=1}^{m} s_k(A),$$

где верхняя грань берется по всем $U \in \mathfrak{U}(E)$ и всем ортонормированным системам $\{e_k\}_1^m$.

В частности, имеют место неравенства

$$\sum_{k=1}^{m}|(Ae_k, e_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{m} s_k(A) \qquad (m=1, 2, \ldots, n).$$

Из этих неравенств и теоремы Островского следует:

148. Для любой ортонормированной системы $\{e_k\}_1^m$

$$\{|(Ae_k, e_k)|^p\}_1^n \ll \{s_k^p(A)\}_1^n \qquad (p>0).$$

Из неравенств (*) (при $p=1$) и **147** вытекают также следующие неравенства Фань Цзи (ср. **264** гл. III):

149. $s(A+B) \ll s(A)+s(B)$.

В частности:

150. Для $S, T \in \mathfrak{S}$ (E)

$$\omega(S+T) \ll \omega(S)+\omega(T).$$

Это соотношение для неотрицательных S, T можно получить независимо от **137** из следующей теоремы:

151. Для $S, T \in \mathfrak{S}$ (E)

$$\lambda(S+T)-\lambda(T) \prec \lambda(S)$$

(теорема Виландта).

Теорему Виландта можно установить индуктивно, опираясь на теорию Фишера — Куранта.

152. Пусть $A \in \mathfrak{M}(\mathrm{E})$, и $\tilde{A} \in \mathfrak{M}(\tilde{\mathrm{E}})$, где $\tilde{\mathrm{E}} = \mathrm{E} + \mathrm{E}$, определен блочной матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{т. е.} \quad \tilde{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ay \\ A^*x \end{pmatrix} \qquad (x,\ y \in \mathrm{E}).$$

Тогда собственные значения оператора $\tilde{A}$ равны $\pm s_k(A)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Из этого замечания и теоремы Виландта следует:

153. Для $A, B \in \mathfrak{M}(\mathrm{E})$

$$\{|s_k(A+B) - s_k(B)|\}_1^n \ll s(A)$$

(теорема Мирского).

Из теоремы Мирского снова следуют неравенства Фань Цзи.

Дальнейшие теоремы являются мультипликативными аналогами предложений **149**, **150**, **153**, **151**.

154. Для регулярных операторов $A, B \in \mathfrak{M}(\mathrm{E})$

$$\ln s(AB) \prec \ln s(A) + \ln s(B)$$

(неравенства Хорна).

155. Для положительных операторов $S, T \in \mathfrak{S}(\mathrm{E})$

$$\ln \lambda(ST) \prec \ln \lambda(S) + \ln \lambda(T).$$

156. Для регулярных операторов $A, B \in \mathfrak{M}(\mathrm{E})$

$$\{|\ln s_k(AB) - \ln s_k(B)|\}_1^n \ll \ln s(A)$$

(теорема Амир-Моэза).

157. Для положительных операторов $S, T \in \mathfrak{S}(\mathrm{E})$

$$\{|\ln \lambda_k(ST) - \ln \lambda_k(T)|\}_1^n \ll \ln \lambda(S).$$

§ 6. Выпуклые множества в задачах локализации спектра самосопряженных операторов

Очевидно, образ пространства $\mathfrak{S}(\mathrm{E})$ при отображении λ: $\mathfrak{S}(\mathrm{E}) \to \mathrm{R}^n$ $(\lambda = \lambda(S))$ совпадает с клином K, определенным в предыдущем параграфе.

Задача локализации спектра оператора S, отнесенного к некоторому множеству $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{S}(\mathrm{E})$, состоит в описании образа $\lambda(\mathfrak{H})$.

Условимся называть внешним диаметром конечной последовательности вещественных чисел разность между наибольшим и наименьшим из них, а внутренним диаметром — наименьшую из абсолютных величин разностей двух чисел этой последовательности.

Начнем с локализации спектра суммы операторов с фиксированными спектрами.

Пусть $a=\{\alpha_k\}_1^n$, $b=\{\beta_k\}_1^n$ — фиксированные векторы из К и

$$\Sigma=\{C \mid C=S+T;\ S,\ T\in\mathfrak{S}(\mathrm{E}),\ \lambda(S)=a,\ \lambda(T)=b\}.$$

158. Множество $\lambda(\Sigma)$ связно.

Из теорем Виландта и Радо вытекает теорема Лидского о локализации спектра суммы двух самосопряженных операторов:

159. Пусть U_1 и U_2 — выпуклые оболочки множеств векторов вида $\{\alpha_k+\beta_{j_k}\}_{k=1}^n$ и $\{\beta_k+\alpha_{j_k}\}_{k=1}^n$ соответственно, где $j_1, j_2, \ldots, j_n$ пробегает множество перестановок индексов $1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$\lambda(\Sigma)\subset \mathrm{U}_1\cap \mathrm{U}_2.$$

Между прочим, отсюда сразу вытекает, что:

160. Если внешний диаметр спектра одного из самосопряженных операторов S, T меньше внутреннего диаметра спектра другого оператора, то оператор $S+T$ не имеет кратных собственных значений.

В теореме Лидского знак включения нельзя, вообще говоря, заменить знаком равенства (даже тогда, когда $U_1\cap U_2\subset K$). Однако:

161. Если внешний диаметр одной из последовательностей a, b меньше внутреннего диаметра другой, то

$$\lambda(\Sigma)=\mathrm{U}_1\cap \mathrm{U}_2.$$

Таким образом, в условиях теоремы **161** множество $\lambda(\Sigma)$ выпукло.

Перейдем теперь к задаче локализации спектра произведения операторов.

Пусть $a=\{\alpha_k\}_1^n$, $b=\{\beta_k\}_1^n$ — фиксированные векторы с положительными координатами, принадлежащие конусу К и

$$\Pi=\{C \mid C=ST;\ S,\ T\in\mathfrak{S}(E),\ \lambda(S)=a,\ \lambda(T)=b\}.$$

162. Множество $\lambda(\Pi)$ связно.

Из теорем Амир-Моэза и Маркуса вытекает теорема Лидского о локализации спектра произведения двух операторов:

163. Пусть V_1 и V_2 — выпуклые оболочки множеств векторов вида $\{\ln\alpha_k+\ln\beta_{j_k}\}_{k=1}^n$ и $\{\ln\beta_k+\ln\alpha_{j_k}\}_{k=1}^n$ соответственно, где $j_1, j_2, \ldots, j_n$ пробегает множество перестановок индексов $1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$\ln\lambda(\Pi)\subset V_1\cap V_2.$$

164. Пусть S и T — положительные операторы. Если внешний диаметр последовательности координат одного из векторов $\ln\lambda(S)$, $\ln\lambda(T)$ меньше внутреннего диаметра последовательности координат другого, то оператор ST не имеет кратных собственных значений.

165. Если внешний диаметр последовательности координат одного из векторов $\ln a$, $\ln b$ меньше внутреннего диаметра последовательности координат другого, то

$$\ln\lambda(\Pi)=V_1\cap V_2.$$

Таким образом, в условиях теоремы **165** множество $\lambda(\Pi)$ выпукло.

Отметим еще две теоремы Маркуса о локализации s-чисел суммы и произведения операторов, аналогичные теоремам Лидского.

166. Пусть $a=\{\alpha_k\}_1^n$, $b=\{\beta_k\}_1^n$ — фиксированные векторы из K с неотрицательными координатами и

$$\Sigma=\{C\mid C=A+B;\ A, B\in\mathfrak{M}(E),\ s(A)=a,\ s(B)=b\}.$$

Тогда

$$s(\Sigma)\subset U_1\cap U_2,$$

где U_1 и U_2 — выпуклые оболочки множеств векторов вида $\{\alpha_k+\varepsilon_k\beta_{j_k}\}_{k=1}^n$ и $\{\beta_k+\varepsilon_k\alpha_{j_k}\}_{k=1}^n$ соответственно; здесь j_1, $j_2, \ldots, j_n$ пробегает множество перестановок индексов 1, $2, \ldots, n$ и $\varepsilon_k=\pm1$.

167. Пусть $a=\{\alpha_k\}_1^n$, $b=\{\beta_k\}_1^n$ — фиксированные векторы из K с положительными координатами и

$$\Pi=\{C\mid C=AB;\ A, B\in\mathfrak{M}(E),\ s(A)=a,\ s(B)=b\}.$$

Тогда

$$\ln s(\Pi) \subset V_1 \cap V_2,$$

где V_1 и V_2 — выпуклые оболочки множеств векторов вида $\{\ln \alpha_k + \ln \beta_{j_k}\}_{k=1}^n$ и $\{\ln \beta_k + \ln \alpha_{j_k}\}_{k=1}^n$ соответственно; здесь $j_1, j_2, \ldots, j_n$ пробегает множество перестановок индексов $1, 2, \ldots, n$.

Существует также аналог теоремы Лидского **163** для унитарных операторов, но этого мы не будем касаться.

Рассмотрим теперь одну обратную задачу локализации. Вообще обратная задача локализации состоит в описании множества операторов, спектр каждого из которых удовлетворяет заданному ограничению.

Пусть Λ – произвольное множество в пространстве R^n. Через $\mathfrak{W}(\Lambda)$ обозначим множество самосопряженных операторов, собственные значения каждого из которых при любом порядке нумерации представляют точку из Λ. Вместе с $\mathfrak{W}(\Lambda)$ введем множество $\mathfrak{B}_0(\Lambda)$ самосопряженных операторов, собственные значения каждого из которых, занумерованные в подходящем порядке, представляют точку из Λ.

168. Если множество Λ замкнуто и выпукло, то и множество $\mathfrak{W}(\Lambda)$ замкнуто и выпукло.

Эта теорема следует из **169** и **170**.

169. Если Λ есть пересечение произвольного множества $\{\Lambda_\nu\}$ замкнутых полупространств пространства R^n

$$\Lambda = \bigcap \Lambda_\nu,$$

то $\mathfrak{W}(\Lambda) = \bigcap \mathfrak{W}(\Lambda_\nu)$.

170. Если Λ — замкнутое полупространство пространства R^n, определяемое неравенством

$$\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \ldots + \alpha_n\lambda_n \geqslant \alpha,$$

то $\mathfrak{W}(\Lambda)$ совпадает с множеством самосопряженных операторов S, удовлетворяющих неравенству

$$\operatorname{sp}(AS) \geqslant \alpha \qquad \left(A \in \mathfrak{S}(E),\ \mathfrak{S}(A) = \{\alpha_k\}_1^n\right).$$

Нетривиальную часть этой теоремы можно установить с помощью теоремы Биркгофа.

Теорема **168** допускает следующее развитие.

171. Если множество $\Lambda \subset R^n$ инвариантно относительно всевозможных перестановок координат точек $\{\lambda_k\}_1^n$ и является замкнутой выпуклой оболочкой некоторого множества $M \subset R^n$, то $\mathfrak{W}(\Lambda) = \mathrm{Co}\,\mathfrak{V}_0(M)$.

Отсюда и из теоремы Каратеодори следует:

172. Если M — коническое множество пространства R^n (т. е. $\gamma M \subset M$ при $\gamma \geqslant 0$), то $\mathfrak{W}(\Lambda)$ есть множество операторов, представимых в виде суммы n операторов из $\mathfrak{V}_0(M)$.

В частности, здесь содержится очевидное следствие спектральной теоремы для самосопряженных операторов:

173. Каждый неотрицательный оператор представим в виде суммы n неотрицательных операторов ранга $\leqslant 1$.

§ 7. Унитарио-нивариантные нормы и симметричио-выпуклые тела

В этом параграфе E по-прежнему означает комплексное *) евклидово пространство. Норма в пространстве $\mathfrak{M}(E)$ называется *унитарно-инвариантной*, если при любом $U \in \mathfrak{U}(E)$

$$\|UA\| = \|AU\| = \|A\| \qquad (A \in \mathfrak{M}(E)).$$

174. Операторная норма $\|A\| = s_1(A)$ унитарно-инвариантна.

175. Гильбертова норма

$$\|A\| = \sqrt{\mathrm{sp}\, A^*A} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} s_k^2(A)}$$

унитарно-инвариантна.

176. Функционал $p(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} s_k(A)$ $(A \in \mathfrak{M}(E))$ является унитарно-инвариантной нормой (см. **264** гл. III).

Ниже $\|\,.\,\|$ означает произвольную унитарно-инвариантную норму. При одновременном рассмотрении нормы $\|\,.\,\|$ и операторной нормы последнюю будем обозначать через $|\,.\,|$.

Унитарно-инвариантная норма оператора зависит лишь от его операторного модуля:

177. $\|A\| = \|(A^*A)^{1/2}\| = \|(AA^*)^{1/2}\|$.

Далее:

---

*) Излагаемая ниже теория без изменений переносится на случай вещественного пространства E, но, разумеется, роль унитарных операторов будут играть ортогональные операторы.

178. Если при некотором $\gamma \geqslant 0$

$$s_k(A) \leqslant \gamma s_k(B) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

то $\| A \| \leqslant \gamma \| B \|$.

Отсюда следует, что унитарно-инвариантная норма оператора зависит лишь от его s-чисел:

179. Если $s_k(A) = s_k(B)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то $\| A \| = \| B \|$.

Из **266** гл. III и **178** следует, что:

180. $\| BAC \| \leqslant | B | \cdot | C | \cdot \| A \|$.

Между прочим, любая норма в $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$, удовлетворяющая неравенству **180**, унитарно-инвариантна.

181. Если $\operatorname{rg} A = 1$, то $\| A \| = \alpha | A |$, где α — положительное число, не зависящее от A.

Норму $N(A)$ в $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$, удовлетворяющую условию

$$N(A) = | A | \qquad (\operatorname{rg} A = 1),$$

назовем *кросс-нормой* в $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$. Это определение согласуется с общим определением кросс-нормы при учете канонического изоморфизма $\mathfrak{M}(\mathrm{E}) \approx \mathrm{E}' \otimes \mathrm{E}$.

182. Любая унитарно-инвариантная кросс-норма удовлетворяет неравенству

$$s_1(A) \leqslant \| A \| \leqslant \sum_{k=1}^{n} s_k(A) \qquad (A \in \mathfrak{M}(\mathrm{E}))$$

(см. **250** гл. III).

Очевидно, любая норма, удовлетворяющая неравенству **182**, является кросс-нормой.

Таким образом, множество унитарно-инвариантных кросс-норм обладает наименьшим и наибольшим элементами:

$$\| A \|_{\min} = s_1(A), \quad \| A \|_{\max} = \sum_{k=1}^{n} s_k(A).$$

Отметим, что из **180** и **182** следует:

183. Все унитарно-инвариантные кросс-нормы кольцевые.

Как уже было отмечено, любая унитарно-инвариантная норма является функцией от s-чисел:

$$\| A \| = p(s(A)), \tag{$*$}$$

где p — некоторый функционал, определенный на конусе

$$\mathrm{K}^{+} = \{ x = \{\xi_k\}_1^n \mid \xi_1 \geqslant \xi_2 \geqslant \ldots \geqslant \xi_n \geqslant 0 \},$$

Возникает задача описания класса функционалов p, порождающих по формуле (*) унитарно-инвариантные нормы. Ключ к решению этой задачи дает теорема **189**, которой мы предпошлем необходимые определения и некоторые простые предложения.

Обозначим через X множество векторов, получающихся из вектора $x=\{\xi_k\}_1^n$ путем перестановок его координат и умножения их на ± 1. Через $\hat{x}$ обозначим тот вектор множества X, который принадлежит конусу K^+.

Преднорму $p(x)$ в R^n назовем *симметричной*, если она инвариантна относительно перестановок координат вектора x и умножения их на ± 1, т. е. $p(x)=p(\hat{x})$.

Замкнутое выпуклое множество $W \subset R^n$ назовем *симметрично-выпуклым*, если из $x \in W$ следует $X \subset W$.

184. Симметрично-выпуклое множество, отличное от $\{0\}$, является выпуклым телом.

Поэтому вместо термина «симметрично-выпуклое множество» мы ниже будем употреблять термин *симметрично-выпуклое тело.*

185. Для того чтобы преднорма p была симметричной, необходимо и достаточно, чтобы единичный p-шар был симметрично-выпуклым телом.

186. Норма в вещественном пространстве l^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ является симметричной преднормой.

Поэтому:

187. Единичный шар вещественного пространства l^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ является симметрично-выпуклым телом.

Любая симметричная преднорма p монотонна в том смысле, что:

188. Если p — симметричная преднорма и $\hat{x} \leqslant \hat{y}$ *), то $p(x) \leqslant p(y)$.

С помощью теоремы Радо это предложение можно существенно усилить:

189. Если p — симметричная преднорма и $x \prec y$, то $p(x) \leqslant p(y)$ (теорема Фань Цзи).

Если некоторый функционал $p \neq 0$ определен лишь на конусе K^+, то условимся через $\tilde{p}$ обозначать его симметричное

---

*) То есть каждая координата вектора $\hat{x}$ не превосходит соответствующей координаты вектора $\hat{y}$.

продолжение на все R^n, определяемое однозначно условием $\tilde{p}(x)=p(\hat{x})\quad(x\in R^n)$.

190. Для того чтобы функционал $\tilde{p}$ был симметричной преднормой, необходимо и достаточно, чтобы функционал p при $x, y\in K^+$ удовлетворял условиям:

1) $p(x)>0\quad(x\neq 0)$;
2) $p(\alpha x)=\alpha p(x)\quad(\alpha\geqslant 0)$;
3) $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$;
4) $p(x)\leqslant p(y)$ при $x\prec y$.

191. Для того чтобы функционал p, определенный на конусе K^+, порождался по формуле (*) некоторой унитарно-инвариантной нормой, необходимо и достаточно, чтобы его симметричное продолжение $\tilde{p}$ было преднормой (теорема Шаттена).

Неравенство треугольника, составляющее нетривиальную часть теоремы Шаттена, следует из **264** гл. III и теоремы **189**.

Симметрично-выпуклое тело назовем *нормированным*, если соответствующая преднорма $p(x)$ удовлетворяет условию

$$p(e)=1\qquad(e=\{1,\ 0,\ \ldots,\ 0\}).$$

В силу теоремы Шаттена унитарно-инвариантные кросснормы в $\mathfrak{M}(E)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с нормированными симметрично-выпуклыми телами в R^n. В этом соответствии теореме **182** отвечает следующее предложение, которое можно установить и независимо:

192. Каждое нормированное симметрично-выпуклое тело $W\subset R^n$ удовлетворяет соотношению

$$W_1\subset W\subset W_\infty,$$

где

$$W_1=\left\{x=\{\xi_k\}_1^n\,\Big|\,\sum_{k=1}^n|\xi_k|\leqslant 1\right\},$$

$$W_\infty=\left\{x=\{\xi_k\}_1^n\,\Big|\,\max_k|\xi_k|\leqslant 1\right\}.$$

Таким образом, множество нормированных симметрично-выпуклых тел обладает наименьшим и наибольшим элементами: $W_{\min}=W_1$, $W_{\max}=W_\infty$.

Из теоремы Шаттена в частном случае симметричной преднормы

$$p(x)=\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^p}$$

следует неравенство:

193. $\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} s_k^p(A+B)} \leqslant \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} s_k^p(A)} + \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} s_k^p(B)}$

$(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

Это неравенство для $p=1,\ 2,\ \infty$ уже встречалось ранее. Пространство $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$, наделенное унитарно-инвариантной нормой

$$\|A\|=\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} s_k^p(A)} \qquad (1 \leqslant p \leqslant \infty),$$

обозначается через $\mathrm{S}_p(\mathrm{E})$. Пространство $\mathrm{S}_p(\mathrm{E})$ является операторным аналогом пространства l^p. Поэтому естественно ожидать, что пространства $\mathrm{S}_p(\mathrm{E})$ и $\mathrm{S}_q(\mathrm{E})$ при $1/p+1/q=1$ взаимно сопряжены.

Для проверки этого предположения рассмотрим более общую задачу об отыскании нормы в пространстве, сопряженном к пространству $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$ с заданной унитарно-инвариантной нормой.

Для произвольной симметричной преднормы $\tilde{p}$ в R^n положим

$$\tilde{p}^*(y)=\sup_{x\in \mathrm{K}^+}\left(\frac{1}{\tilde{p}(x)}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\xi_k\right)$$

при $y\in \mathrm{K}^+$, $y=\{\eta_k\}_1^n$, $x=\{\xi_k\}_1^n$.

Пользуясь предложением **190**, можно установить, что:

194. Функционал $\tilde{p}^*(y)$ есть симметричная преднорма в R^n.

195. Пространство, сопряженное пространству R^n, наделенному нормой $\tilde{p}$, изометрично пространству R^n, наделенному нормой $\tilde{p}^*$.

196. Если $\tilde{p}$ — симметричная преднорма в R^n, то пространство, сопряженное пространству $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$ с нормой $\tilde{p}(s(A))$, изометрично пространству $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$ с нормой $\tilde{p}^*(s(A))$ (см. **203** гл. II).

В частности:

197. Пространства $S_p(E)$ и $S_q(E)$ при $1/p+1/q=1$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ взаимно сопряжены.

В заключение сформулируем две интерполяционные теоремы. Пусть A — линейный оператор в R^n и $\|A\|_p$ — его операторная норма в l^p относительно канонического базиса. Скалярное произведение в R^n введем стандартным образом.

198. Если $\|A\|_1 \leqslant 1$ и $\|A\|_\infty \leqslant 1$, то для любой унитарно-инвариантной нормы, сохраняющей единицу, $\|A\| \leqslant 1$ (теорема Митягина).

В частности:

199. Если $\|A\|_1 \leqslant 1$, $\|A\|_\infty \leqslant 1$, то $\|A\|_p \leqslant 1$ при всех $p \geqslant 1$ (теорема М. Рисса).

Для доказательства можно воспользоваться теоремой **129.** В **198** вместо унитарной инвариантности достаточно предполагать лишь, что нормы всех квазипермутаторов (относительно канонического базиса) равны 1. Отметим, что теоремы **198—199** переносятся на случай комплексного пространства.

ГЛАВА VIII

УПОРЯДОЧЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Отношение порядка в линейном пространстве

Вещественное линейное пространство E называется *квазиупорядоченным*, если в нем выделен некоторый клин K (называемый *положительным*) и отношение квазипорядка определяется правилом: $x \geqslant y$ (или $y \leqslant x$) тогда и только тогда, когда $x - y \in K$. Если K — положительный клин, то, очевидно,

$$K = \{x \mid x \geqslant 0\}.$$

Векторы $x \geqslant 0$ будем называть *неотрицательными*, а векторы $x \leqslant 0$ — *неположительными*. В случае, когда $x \geqslant 0$, $x \neq 0$, будем писать $x \succ 0$. Аналогичный смысл имеет неравенство $x \prec 0$.

Если положительный клин K телесный, то условимся писать $x > 0$ при $x \in \operatorname{Int} K$ и $x < 0$ при $-x \in \operatorname{Int} K$. Векторы $x > 0$ будем называть *положительными*, а векторы $x < 0$ — *отрицательными*. Неравенство $x > y$ означает, что $x - y > 0$.

Отношение $\leqslant$ обладает свойствами квазипорядка:

1) $x \leqslant x$ (рефлексивность);

2) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$ (транзитивность).

Кроме того:

3) если $x \leqslant y$, то $\alpha x \leqslant \alpha y$ при любом $\alpha \geqslant 0$ (положительная однородность);

4) если $x_1 \leqslant y_1$ и $x_2 \leqslant y_2$, то $x_1 + x_2 \leqslant y_1 + y_2$ (аддитивность),

1. Если в E задано отношение квазипорядка, удовлетворяющее условиям 3) — 4), то неравенство $x \geqslant 0$ определяет клин, порождающий это отношение.

2. Если клин K является конусом, то:

5) из $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$ следует $x = y$ (антисимметричность).

Таким образом, если положительный клин является конусом, то определяемый им квазипорядок является порядком, а пространство E в этом случае называется *упорядоченным* *).

3. Если в E задано отношение порядка, удовлетворяющее условиям 3) — 4), то неравенство $x \geqslant 0$ определяет конус, порождающий это отношение.

4. Если положительный клин K телесен, то:

6) для любого $x \in E$ существует $y > x$.

Обратно, если отношение квазипорядка удовлетворяет условию 6), то положительный клин телесен.

5. Если положительный клин K замкнут, то:

7) из $x_k \geqslant 0$, $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = x$ следует $x \geqslant 0$.

Обратно, если отношение квазипорядка удовлетворяет условию 7), то положительный клин замкнут.

6. Если в E определено отношение порядка, удовлетворяющее условиям 3) — 4), и любые x, $y \in$ E сравнимы, то $\dim$ E $= 1$.

Если отношение $\leqslant$ в пространстве E удовлетворяет аксиомам 1) — 7), то упорядоченное пространство E будем называть *пространством Канторовича*.

Из сформулированных выше предложений следует, что пространства Канторовича совпадают с упорядоченными пространствами, в которых отношение порядка определяется замкнутым телесным конусом K.

Если для векторов x, y из пространства Канторовича существует вектор z такой, что $z \geqslant x$, $z \geqslant y$ и для любого w, удовлетворяющего неравенствам $w \geqslant x$, $w \geqslant y$, имеет место соотношение $z \leqslant w$, то будем писать $z = \sup\{x, y\}$. Аналогично определяется $\inf\{x, y\}$.

Для произвольного множества F $\subset$ E понятия $\sup$ F и $\inf$ F вводятся таким же образом, как и для множества из двух элементов.

---

*) Упорядоченное пространство называют также полуупорядоченным.

7. Если элемент $z = \sup\{x, y\}$ существует, то он определяется однозначно.

8. Если существует $z = \sup\{x, y\}$, то

$$z + u = \sup\{x + u, y + u\} \qquad (u \in \mathrm{E}).$$

9. Если существуют $\sup\{x, y\}$ и $\inf\{x, y\}$, то

$$\sup\{x, y\} + \inf\{x, y\} = x + y.$$

10. Если $\sup\{x, y\}$ существует для любых x, y, то для любых x, y существует также $\inf\{x, y\} = -\sup\{-x, -y\}$.

Замкнутый телесный конус K называется *миниэдральным*, если для любых $x, y \in \mathrm{K}$ существует $\sup\{x, y\}$.

11. Положительный гипероктант в R^n является миниэдральным конусом.

12. Конус K_p (§ 1 гл. VII) миниэдрален при $p = 1, \infty$ и не миниэдрален при $1 < p < \infty$.

13. Для того чтобы замкнутый телесный конус был миниэдральным, необходимо и достаточно, чтобы для любых $x, y \in \mathrm{K}$ существовал такой $z \in \mathrm{K}$, что

$$(\mathrm{K} + x) \cap (\mathrm{K} + y) = \mathrm{K} + z.$$

При этом $z = \sup\{x, y\}$.

14. Для того чтобы замкнутый телесный конус K был миниэдральным, необходимо и достаточно, чтобы он был конечным конусом порядка n.

Таким образом:

15. Пространство Канторовича E с миниэдральным положительным конусом изотонно изоморфно арифметическому пространству R^n, в котором отношение порядка порождается положительным гипероктантом, т. е. существует изоморфизм $\mathrm{E} \approx \mathrm{R}^n$, сохраняющий порядок (теорема Юдина).

16. Если E — пространство Канторовича с миниэдральным конусом, то для любого $x \in \mathrm{E}$ существует и единственно разложение

$$x = x_+ - x_- \qquad (x_- \geqslant 0 \;\; x_+ \geqslant 0)$$

такое, что если $x = x' - x''$, $x' \geqslant 0$, $x'' \geqslant 0$, то $x' \geqslant x_+$, $x'' \geqslant x_-$.

Разложение с указанными свойствами называется *минимальным*. Векторы x_+ и x_- называются *положительной* и *отрицательной* частью вектора x, а вектор

$$|x| = x_+ + x_-$$

называется ***абсолютным значением*** вектора x.

17. $|x| = \sup\{x, -x\}$.

18. $|-x| = |x|$.

19. $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

Сделаем некоторые замечания, относящиеся к предельному переходу в пространстве Канторовича.

20. Если неубывающая последовательность векторов $\{x_k\}_1^\infty$ ограничена сверху, т. е. существует такой x, что $x_k \leqslant x$ ($k = 1, 2, \ldots$), то она сходится и $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \sup\limits_k x_k$.

21. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ с неотрицательными членами сходится, то он сходится безусловно.

22. Если для ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \qquad (*)$$

существует такой сходящийся ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ с неотрицательными членами, что

$$-y_k \leqslant x_k \leqslant y_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

то ряд (*) сходится безусловно.

23. Если положительный конус — миниэдральный и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|$ сходится, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится безусловно.

В заключение отметим, что:

24. В пространстве Канторовича с миниэдральным положительным конусом существует $\sup F$ для любого множества F, ограниченного сверху.

§ 2. Теория линейных неравенств

Пусть квазипорядок в пространстве E определен замкнутым клином K. Сопряженный клин K' определяет *сопряженный* квазипорядок в E'. Будем считать, что в сопряженном пространстве квазипорядок всегда вводится таким способом

Пусть, далее, E и E_1 — квазиупорядоченные пространства с положительными клиньями K и K_1 и пусть $h \in \mathrm{Hom}(E, E_1)$. Положим

$$\mathrm{Im}^+ h = hK, \quad \mathrm{Ker}^+ h = h^{-1} K_1.$$

25. Если $K = E$, то $\mathrm{Im}^+ h = \mathrm{Im}\, h$ и $\mathrm{Ker}^+ h' = \mathrm{Ker}\, h'$.

Двойственным образом:

26. Если $K_1 = 0$, то $\mathrm{Ker}^+ h = \mathrm{Ker}\, h$ и $\mathrm{Im}^+ h' = \mathrm{Im}\, h'$.

Впредь в этом параграфе пространства E и E_1 считаются пространствами Канторовича. Тогда пространства E' и E_1' также будут пространствами Канторовича (см. **42** гл. VII).

27. $\dim \mathrm{Im}^+ h = \mathrm{rg}\, h$.

Следующая теорема обобщает фундаментальные соотношения **197** гл. I. Для ее доказательства можно использовать теорему отделимости выпуклых множеств.

28. $\mathrm{Im}^+ h' = (\mathrm{Ker}^+ h)'$, $\mathrm{Ker}^+ h' = (\mathrm{Im}^+ h)'$.

Распространим теорию Фредгольма на линейные неравенства.

Следующие теоремы (**29—31**) являются аналогами третьей теоремы Фредгольма. Из **28** вытекает:

29. Для того чтобы неоднородное уравнение $hx = y$ имело неотрицательное решение, необходимо и достаточно, чтобы для любого решения g однородного неравенства $h'g \geqslant 0$ было $g(y) \geqslant 0$.

30. Для того чтобы неоднородное неравенство $hx \geqslant y$ имело решение, необходимо и достаточно, чтобы для любого неотрицательного решения однородного уравнения $h'g = 0$ было $g(y) \leqslant 0$.

Теорему **30** можно вывести из **29**, рассматривая пространство $\tilde{E} = E + R^1$ и определяя гомоморфизм $\tilde{h}$ формулой

$$\tilde{h}(x + \xi) = hx + \xi y \qquad (x \in E, \ \xi \in R^1).$$

Аналогичным путем можно установить теоремы **31**, **33** и **34**.

31. Для того чтобы неоднородное неравенство $hx \geqslant y$ имело неотрицательное решение, необходимо и достаточно, чтобы для любого неотрицательного решения однородного неравенства $h'g \leqslant 0$ было $g(y) \leqslant 0$.

Ближайшие предложения **32—34** являются аналогами первой теоремы Фредгольма.

32. Для того чтобы неоднородное уравнение $hx = y$ при любом $y \in E_1$ имело неотрицательное решение, необходимо и достаточно, чтобы однородное неравенство $h'g \geqslant 0$ имело только тривиальное решение $g = 0$.

В частности, необходимо, чтобы h' был мономорфизмом.

33. Для того чтобы неоднородное неравенство $hx \geqslant y$ имело решение при любом $y \in \mathrm{E}_1$, необходимо и достаточно, чтобы однородное уравнение $h'g = 0$ имело только тривиальное неотрицательное решение.

В частности, достаточно, чтобы h' был мономорфизмом.

34. Для того чтобы неоднородное неравенство $hx \geqslant y$ при любом $y \in \mathrm{E}_1$ имело неотрицательное решение, необходимо и достаточно, чтобы однородное неравенство $h'g \leqslant 0$ имело только тривиальное неотрицательное решение.

Следующие три предложения об однородных уравнениях и неравенствах можно отнести к аналогам второй теоремы Фредгольма.

35. Для того чтобы однородное уравнение $hx = 0$ имело нетривиальное неотрицательное решение *), необходимо и достаточно, чтобы неравенство $h'g > 0$ не имело решений.

36. Для того чтобы неравенство $hx \succ 0$ имело решение, необходимо и достаточно, чтобы однородное уравнение $h'g = 0$ не имело положительных решений.

37. Для того чтобы однородное неравенство $hx \leqslant 0$ имело нетривиальное неотрицательное решение, необходимо и достаточно, чтобы неравенство $h'g < 0$ не имело неотрицательных решений.

38. Множества $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}_1$ тех y, для которых разрешимы уравнения или неравенства в **29**, **30**, **31**, замкнуты.

Как и в случае уравнений, можно перейти от языка гомоморфизмов к языку функционалов. При этом E_1 становится m-мерным вещественным арифметическим пространством R^m. В качестве положительного конуса в R^m возьмем положительный гипероктант.

Перевод на язык функционалов предложений **29—37** приводит к результатам **39—47**, где $f_k \in \mathrm{E}'$ ($k = 1, 2, \ldots, m$).

39. Для того чтобы система уравнений

$$f_k(x) = a_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

*) То есть решение $x \succ 0$.

имела иеотрицательное решение, необходимо и достаточно, чтобы из неравенства

$$\sum_{k=1}^{m} \gamma_k f_k \geqslant 0$$

вытекало неравенство

$$\sum_{k=1}^{m} \gamma_k \alpha_k \geqslant 0.$$

40. Для того чтобы система неравенств

$$f_k(x) \geqslant \alpha_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

имела решение, необходимо и достаточно, чтобы из равенства

$$\sum_{k=1}^{m} \gamma_k f_k = 0$$

при $\gamma_k \geqslant 0$ вытекало неравенство

$$\sum_{k=1}^{m} \gamma_k \alpha_k \leqslant 0.$$

41. Для того чтобы система неравенств

$$f_k(x) \geqslant \alpha_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

имела неотрицательное решение, необходимо и достаточно, чтобы из неравенства

$$\sum_{k=1}^{m} \gamma_k f_k \leqslant 0$$

при $\gamma_k \geqslant 0$ вытекало неравенство

$$\sum_{k=1}^{m} \gamma_k \alpha_k \leqslant 0.$$

42. Для того чтобы система уравнений

$$f_k(x) = \alpha_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

при любых правых частях имела неотрицательное решение, необходимо и достаточно, чтобы из неравенства

$$\sum_{k=1}^{m} \gamma_k f_k \geqslant 0$$

вытекало $\gamma_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$.

43. Для того чтобы система неравенств

$$f_k(x) \geqslant \alpha_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

имела решение при любых правых частях, необходимо и достаточно, чтобы из равенства

$$\sum_{k=1}^{m} \gamma_k f_k = 0$$

при $\gamma_k \geqslant 0$ вытекало $\gamma_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$.

44. Для того чтобы система неравенств

$$f_k\ x) \geqslant \alpha_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

имела неотрицательное решение при любых правых частях необходимо и достаточно, чтобы из неравенства

$$\sum_{k=1}^{m} \gamma_k f_k \leqslant 0$$

при $\gamma_k \geqslant 0$ вытекало $\gamma_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$.

45. Для того чтобы система уравнений

$$f_k(x) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

имела нетривиальное неотрицательное решение, необходимо и достаточно, чтобы неравенство

$$\sum_{k=1}^{m} \gamma_k f_k > 0$$

не выполнялось ни при каких γ_k.

46. Для того чтобы система неравенств

$$f_k(x) \geqslant 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

имела f-нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$\sum_{k=1}^{m} \gamma_k f_k = 0$$

не выполнялось ни при каких $\gamma_k > 0$ (решение называется *f-нетривиальным*, если $f_k(x)$ не равны нулю одновременно).

47. Для того чтобы система неравенств

$$f_k(x) \geqslant 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

имела нетривиальное неотрицательное решение, необходимо и достаточно, чтобы неравенство

$$\sum_{k=1}^{m} \gamma_k f_k < 0$$

не выполнялось ни при каких $\gamma_k \geqslant 0$.

Язык функционалов удобен, когда приходится индивидуализировать отдельные уравнения системы. Рассмотрим несколько примеров такого рода.

48. Пусть система

$$f_k(x) = \alpha_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m-1),$$
$$f_m(x) \geqslant \alpha_m$$

совместна. Для того чтобы все решения системы

$$f_k(x) = \alpha_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m-1)$$

удовлетворяли неравенству

$$f_m(x) \geqslant \alpha_m,$$

необходимо и достаточно, чтобы функционал f_m был линейной комбинацией функционалов $f_1, f_2, \ldots, f_{m-1}$.

49. Пусть система

$$f_k(x) \geqslant \alpha_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m) \qquad (*)$$

совместна и $\operatorname{rg}\{f_1, f_2, \ldots, f_m\} = r \geqslant 1$. Тогда можно из функционалов $\{f_k\}_1^m$ выбрать подсистему $f_{k_1}, f_{k_2}, \ldots, f_{k_r}$ такую, что каждое решение системы уравнений

$$f_{k_s}(x) = \alpha_{k_s} \qquad (s = 1, 2, \ldots, r)$$

будет решением системы неравенств (*) (принцип граничных решений).

50. Пусть система

$$f_k(x) \geqslant \alpha_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m-1) \qquad (**)$$

совместна. Если неравенство

$$f_m(x) \geqslant \alpha_m \qquad (***)$$

является следствием этой системы, но не следует ни из какой ее подсистемы, то

$$\mathrm{rg}\,\{f_1, f_2, \ldots, f_{m-1}\} = m - 1.$$

51. Для того чтобы неравенство (***) следовало из совместной системы (**), необходимо и достаточно существования чисел $\gamma_k \geqslant 0$ $(k = 1, 2, \ldots, m-1)$ таких, что

$$f_m = \sum_{k=1}^{m-1} \gamma_k f_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{m-1} \gamma_k \alpha_k \geqslant \alpha_m.$$

52. Для совместности системы

$$f_k(x) \geqslant \alpha_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

необходима и достаточна совместность каждой ее подсистемы из $n+1$ неравенств.

Отсюда снова следует теорема Хелли.

Система (*) называется *неприводимо несовместной*, если она несовместна, но любая ее собственная подсистема совместна.

53. Система (*) неприводимо несовместна тогда и только тогда, когда любые $m-1$ из функционалов $f_1, f_2, \ldots, f_m$ линейно независимы и существуют числа $\gamma_k > 0$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{m} \gamma_k f_k = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \alpha_k > 0.$$

Если пространства E и E_1 евклидовы и положительные конусы $K \subset E$, $K_1 \subset E_1$ — самосопряженные, то предложения **29—37** принимают вид **54—59**.

54. Для того чтобы неоднородное уравнение $hx = y$ имело решение $x \geqslant 0$, необходимо и достаточно, чтобы для любого решения однородного неравенства $h'z \geqslant 0$ было $(y, z) \geqslant 0$. Для глобальной разрешимости необходимо и достаточно, чтобы неравенство $h'z \geqslant 0$ имело только тривиальное решение $z = 0$.

55. Для того чтобы неоднородное неравенство $hx \geqslant y$ имело решение, необходимо и достаточно, чтобы для любого решения $z \geqslant 0$ однородного уравнения $h'z = 0$ было $(y, z) \leqslant 0$ Для глобальной разрешимости необходимо и достаточно, чтобы это уравнение имело только тривиальное неотрицательное решение.

56. Для того чтобы неоднородное неравенство $hx \geqslant y$ имело решение $x \geqslant 0$, необходимо и достаточно, чтобы для любого решения $z \geqslant 0$ однородного неравенства $h'z \leqslant 0$ было $(y, z) \leqslant 0$. Для глобальной разрешимости необходимо и достаточно, чтобы однородное неравенство $h'z \leqslant 0$ имело только тривиальное неотрицательное решение.

57. Для того чтобы однородное уравнение $hx = 0$ имело решение $x \succ 0$, необходимо и достаточно, чтобы неравенство $h'z > 0$ не имело решений.

58. Для того чтобы неравенство $hx \succ 0$ имело решение, необходимо и достаточно, чтобы однородное уравнение $h'z = 0$ не имело положительных решений.

59. Для того чтобы однородное неравенство $hx \geqslant 0$ имело решение $x \succ 0$, необходимо и достаточно, чтобы неравенство $h'z < 0$ не имело неотрицательных решений.

В частности:

60. Если $E = E_1$ и h — антисимметричный оператор, то однородное неравенство $hx \leqslant 0$ имеет решение $x \succ 0$.

Вернемся теперь к первоначальному языку гомоморфизмов и изучим структуру множества решений неравенства $hx \geqslant y$.

61. Множество V решений неравенства $hx \geqslant y$ выпукло.

62. Множество Q решений однородного неравенства $hx \geqslant 0$ есть клин.

63. Множество Q есть векторная сумма $Q = \operatorname{Ker} h + K$, где K — некоторый конус.

64. Если множество Q представлено в виде векторной суммы подпространства и конуса $Q = L + K$, то $L = \operatorname{Ker} h$ и $K \cap L = 0$.

65. В любом представлении **64** разложение $x \in Q$ по формуле $x = x_1 + x_2$ $(x_1 \in K,\ x_2 \in L)$ единственно.

66. Множество V решений неравенства $hx \geqslant y$ ограничено тогда и только тогда, когда однородное неравенство $hx \geqslant 0$ имеет только тривиальное решение.

67. Множество V есть векторная сумма $V = W + Q$, где W — некоторое компактное выпуклое тело.

68. Если множество V представлено в виде векторной суммы ограниченного выпуклого множества и клина $V = W_1 + Q_1$, то $Q_1 = Q$.

69. В любом представлении **68** разложение $x \in V$ по формуле $x = x_0 + z$ $(x_0 \in W,\ z \in Q)$ единственно.

70. Множество V решений неравенства $hx \geqslant y$ имеет вид

$$V = W + K + L,$$

где W — компактное выпуклое тело, K — конус, $L = \operatorname{Ker} h$.

71. В любом представлении **70** разложение $x \in V$ по формуле

$$x = x_0 + x_1 + x_2 \qquad (x_0 \in W,\ x_1 \in K,\ x_2 \in L)$$

единственно.

72. Если положительный конус пространства E_1 конечен, то в **70** W — многогранник, K — конечный конус и общее решение уравнения $hx \geqslant y$ имеет вид

$$x = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_{0k} + \sum_{k=1}^{q} \beta_k x_{1k} + \sum_{k=1}^{r} \gamma_k x_{2k},$$

где $\alpha_k \geqslant 0$, $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k = 1$, $\beta_k \geqslant 0$, γ_k — произвольные вещественные числа, $\{x_{0k}\}_1^p$ — базис многогранника W, $\{x_{1k}\}_1^q$ — базис конуса K, $\{x_{2k}\}_1^r$ — базис подпространства L. Значения всех коэффициентов α_k, β_k, γ_k определяются вектором $x \in V$ однозначно (т е о р е м а М о ц к и н а).

§ 3. Линейные и выпуклые задачи на экстремум

Вещественный функционал $p(x)$, определенный на выпуклом множестве $W \subset E$, называется *выпуклым*, если при любых $x_1, x_2 \in W$

$$p((1-\theta)x_1 + \theta x_2) \leqslant (1-\theta)p(x_1) + \theta p(x_2) \qquad (0 < \theta < 1).$$

Если в этом соотношении знак равенства имеет место лишь при $x_1 = x_2$, то функционал p называется *строго выпуклым*. Любой линейный функционал является выпуклым (но не строго выпуклым).

73. Если p_0, p_1 — выпуклые функционалы в W, то и функционалы $p_\tau = (1-\tau)\,p_0 + \tau p_1$ $(0 < \tau < 1)$ выпуклы.

74. Если $\{p_\nu\}$ — множество выпуклых функционалов в W и при каждом $x \in W$ числовое множество $\{p_\nu(x)\}$ ограничено, то функционал

$$p(x) = \sup_\nu p_\nu(x) \qquad (x \in W)$$

выпуклый.

75. Выпуклый функционал непрерывен.

76. Пусть функционал p непрерывен в W и дифференцируем в Int W, а функционал $f_{x,y} \in E'$ определен равенством

$$f_{x,y} = p'(x) - p'(y) \qquad (x,\ y \in \operatorname{Int} W).$$

Для выпуклости функционала p необходимо и достаточно, чтобы

$$f_{x,y}(x-y) \geqslant 0 \qquad (x,\ y \in \operatorname{Int} W).$$

77. Пусть функционал p непрерывен в W и дважды дифференцируем в Int W, а гомоморфизм $h_x \in \operatorname{Hom}(E, E')$ и функционал $g_{x,y} \in E'$ определены равенствами

$$h_x = p''(x),\ g_{x,y} = h_x y \qquad (x,\ y \in \operatorname{Int} W).$$

Для выпуклости функционала p необходимо и достаточно, чтобы

$$g_{x,y}(y) \geqslant 0 \qquad (x,\ y \in \operatorname{Int} W).$$

Впредь область определения W выпуклого функционала p предполагается замкнутой.

78. Все точки локального максимума строго выпуклого функционала являются крайними точками его области определения.

79. Каждая точка локального минимума выпуклого функционала p является точкой глобального минимума (т. е. в ней $p(x)$ принимает наименьшее значение).

80. Множество V_p точек глобального минимума выпуклого функционала p замкнуто и выпукло.

81. Если p — строго выпуклый функционал, то множество V_p содержит не более одной точки.

82. Линейный функционал $f \neq 0$ не имеет на замкнутом выпуклом множестве W локальных экстремумов, отличных от глобальных экстремумов, которые могут достигаться лишь на границе множества W.

При этом:

83. Крайние точки множества V_f являются крайними точками множества W.

Следовательно, если множество W строго выпукло, то V_f состоит не более чем из одной точки.

Очевидно, аналогичные утверждения справедливы для множества точек глобального максимума функционала f на W.

Остановимся на специальном случае квадратичного функционала

$$q(x)=(Sx,\ x)-2(y,\ x) \qquad (x\in E)$$

в евклидовом пространстве E. Здесь S — самосопряженный оператор и $y\in E$.

84. Для того чтобы квадратичный функционал q был выпуклым (строго выпуклым), необходимо и достаточно, чтобы оператор S был неотрицательным (положительным).

85. Если S — неотрицательный оператор и $y=0$, то

$$\min q(x)=0, \quad V_q=\operatorname{Ker} S.$$

86. Если S — положительный оператор, то точка минимума функционала q единственна и совпадает с решением уравнения

$$Sx=y. \tag{$*$}$$

87. Если S — неотрицательный оператор и уравнение $(*)$ не имеет решения, то функционал q не ограничен снизу.

88. Если S — неотрицательный оператор и уравнение $(*)$ разрешимо, то функционал q ограничен снизу и множество V_q совпадает с аффинным многообразием решений уравнения $(*)$.

Итак, во всех случаях $V_q=\{x\,|\,Sx=y\}$.

Пусть теперь E и E_1 — пространства Канторовича, $f\in E'$, $h\in \operatorname{Hom}(E,\ E_1)$ и $y\in E_1$. Исследуем задачу отыскания минимума

$$\min_x f(x) \qquad (x\in E) \tag{I}$$

при ограничениях

$$hx\geqslant y, \tag{II}$$

$$x\geqslant 0. \tag{III}$$

Эту задачу (называемую *задачей линейной оптимизации* *)), в которой f, h и y заданы, мы будем обозначать $\langle f, h, y\rangle$.

Вектор x называется *допустимым* вектором задачи $\langle f, h, y\rangle$, если он удовлетворяет условиям (II), (III). Если задача имеет допустимый вектор, то она называется *допустимой*. Если для допустимой задачи функционал f ограничен снизу на множестве допустимых векторов, то она называется *ограниченной*.

89. Если задача $\langle f, h, y\rangle$ ограничена, то существует $\min\limits_x f(x)$.

Величина $\min\limits_x f(x)$ называется *значением* задачи, а вектор, на котором это значение достигается, — *оптимальным*.

90. Множество оптимальных векторов задачи $\langle f, h, y\rangle$ выпукло.

Задача, *двойственная* к $\langle f, h, y\rangle$, состоит в отыскании максимума

$$\max_g g(y) \qquad (g \in E_1') \tag{I'}$$

при ограничениях

$$h'g \leqslant f, \tag{II'}$$

$$g \geqslant 0. \tag{III'}$$

Данные выше определения естественным образом переносятся на двойственную задачу $\langle y, h', f\rangle$.

91. Пусть $x \in E$ и $g \in E'$ — допустимые векторы задач $\langle f, h, y\rangle$ и $\langle y, h' f\rangle$ соответственно. Тогда $f(x) \geqslant g(y)$.

92. Если в **91** имеет место знак равенства, то x и g являются оптимальными векторами соответствующих задач (признак оптимальности).

93. Если одна из двух взаимно двойственных задач $\langle f, h, y\rangle$ и $\langle y, h', f\rangle$ не является допустимой, то другая не имеет оптимальных векторов (т. е. она недопустима или допустима, но не ограничена).

94. Если обе взаимно двойственные задачи линейной оптимизации допустимы, то обе они имеют оптимальные векторы и одинаковое значение (теорема двойственности).

---

*) Или задачей линейного программирования.

Для доказательства достаточно установить существование неотрицательного решения $x \geqslant 0$, $g \geqslant 0$ у системы неравенств

$$\begin{aligned} hx &\geqslant y, \\ -h'g &\geqslant -f, \\ g(y) - f(x) &\geqslant 0, \end{aligned}$$

которую можно представить в виде

$$\tilde{h}\begin{pmatrix} x \\ g \end{pmatrix} \geqslant \begin{pmatrix} y \\ -f \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\tilde{h}$ — понятный гомоморфизм из $\mathrm{E} + \mathrm{E}'$ в $\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}' + \mathrm{R}^1$, порядок в R^1 обычный, декартовы суммы упорядочиваются покомпонентно.

Предложения **93** и **94** можно объединить в виде следующей теоремы существования:

95. Для того чтобы задача линейной оптимизации имела оптимальный вектор, необходимо и достаточно, чтобы она была допустима вместе с двойственной задачей.

С помощью **94** можно также установить следующее предложение.

96. Пусть $\breve{x}$ есть оптимальный вектор задачи $\langle f, h, y \rangle$,

$$\mathrm{G} = \{g \mid g(h\breve{x} - y) = 0, \quad g \geqslant 0\}$$

и

$$\mathrm{Z} = \{z \mid g(z) = 0, \quad g \in \mathrm{G}\}.$$

Если $\hat{g}$ есть оптимальный вектор двойственной задачи $\langle y, h' f \rangle$, то $\hat{g}(z) = 0$ при всех $z \in \mathrm{Z}$.

Следующее, более законченное, предложение называется теоремой равновесия.

97. Для того чтобы допустимые векторы x_0 и g_0 задач $\langle f, h, y \rangle$ и $\langle y, h', f \rangle$ были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} g_0(z) &= 0 \quad \text{при всех} \quad z \in \mathrm{Z}, \\ h(x_0) &= 0 \quad \text{при всех} \quad h \in \mathrm{H}, \end{aligned}$$

где

$$Z = \{z \mid g(z) = 0, \quad g \in G\}, \quad G = \{g \mid g(hx_0 - y) = 0, \quad g \geqslant 0\}$$

и

$$H = \{h \mid h(x) = 0, \quad x \in X\}, \quad X = \{x \mid (f - h'g)(x) = 0, \ x \geqslant 0\}.$$

Функционал (или *функция*) *Лагранжа* пары взаимно двойственных задач $\langle f, h, y\rangle$ и $\langle y, h', f\rangle$ определяется на $E \times E'$ при $x \geqslant 0$, $g \geqslant 0$ равенством

$$\varphi(x, g) = f(x) + g(y - hx) = g(y) + (f - h'g)(x)$$
$$(x \in E, \quad g \in E').$$

Если заменить в (II) знак неравенства равенством, то $\varphi(x, g)$ превращается в известную из анализа функцию Лагранжа для задачи на условный экстремум *).

Пара (x_0, g_0) называется *седловой точкой* функционала $\varphi(x, g)$, если при всех $x \geqslant 0$, $g \geqslant 0$

$$\varphi(x_0, g) \leqslant \varphi(x_0, g_0) \leqslant \varphi(x, g_0).$$

Очевидно, седловая точка функции $\varphi(x, g)$ является ее стационарной точкой в смысле дифференциального исчисления.

Значение функционала Лагранжа для задач линейной оптимизации определяется предложениями **98** и **99**. Первое из них устанавливается непосредственно, а второе можно вывести из теоремы двойственности **94** или установить с помощью теоремы об отделимости выпуклых множеств.

98. Если (x_0, g_0)—седловая точка функционала Лагранжа $\varphi(x, g)$, то x_0 и g_0 — оптимальные векторы задач $\langle f, h, y\rangle$ и $\langle y, h', f\rangle$. При этом $\varphi(x_0, g_0)$ есть общее значение этих задач.

Обратно:

99. Если x_0 и g_0 — оптимальные векторы задач $\langle f, h, y\rangle$ и $\langle y, h', f\rangle$, то $\varphi(x_0, g_0)$ есть общее значение этих задач и (x_0, g_0) — седловая точка функционала Лагранжа.

Результаты **98**, **99** можно также представить в минимаксной форме:

---

*) Роль лагранжевых множителей играют: для задачи $\langle f, h, y\rangle$ — функционал g, а для задачи $\langle y, h', f\rangle$ — вектор x.

100. Если задачи $\langle f, h, y\rangle$ и $\langle y, h', f\rangle$ допустимы, то

$$\max_{g\geqslant 0}\min_{x\geqslant 0}\varphi(x, g)=\min_{x\geqslant 0}\max_{g\geqslant 0}\varphi(x, g),$$

и обратно, из этого равенства следует допустимость обеих задач. При этом общее значение обеих частей равенства совпадает с общим значением обеих задач.

Теперь перейдем к выпуклым задачам на экстремум. При этом отображение $F\colon \mathrm{E}\to\mathrm{E}_1$ назовем *вогнутым*, если для любых $x_1, x_2\in\mathrm{E}$ и $0<\theta<1$

$$F((1-\theta)x_1+\theta x_2)\geqslant(1-\theta)Fx_1+\theta Fx_2.$$

101. Вогнутое отображение непрерывно.

102. Если отображение F вогнуто, то множество решений неравенства $Fx\geqslant 0$ замкнуто и выпукло.

Исследуем задачу $\langle p, F\rangle$ (называемую *задачей выпуклой оптимизации* *)), состоящую в отыскании

$$\min_x p(x),$$

где p — выпуклый функционал на E, при ограничениях

$$Fx\geqslant 0, \quad x\geqslant 0,$$

где $F\colon \mathrm{E}\to\mathrm{E}_1$ — вогнутое отображение.

Терминология, введенная ранее для задачи $\langle f, h, y\rangle$, переносится естественным путем на задачу $\langle p, F\rangle$.

Функционал (или ***функция***) ***Лагранжа*** задачи $\langle p, F\rangle$ определяется на $\mathrm{E}+\mathrm{E}_1'$ при $x\geqslant 0$, $g\geqslant 0$ равенством

$$\varphi(x, g)=p(x)-g(Fx)\qquad (x\in\mathrm{E},\ g\in\mathrm{E}_1').$$

103. Если (x_0, g_0) — седловая точка функционала Лагранжа $\varphi(x, g)$ задачи $\langle p, F\rangle$, то x_0 есть оптимальный вектор этой задачи, а $\varphi(x_0, g_0)$ — ее значение.

Обратно:

104. Если $Fx>0$ при некотором $x\geqslant 0$, то из оптимальности вектора x_0 следует существование функционала $g_0\in\mathrm{E}_1'$, $g_0\geqslant 0$ такого, что (x_0, g_0) есть седловая точка функционала Лагранжа $\varphi(x, g)$ задачи $\langle p, F\rangle$.

---

*) Или задачей выпуклого программирования.

Для доказательства можно определить в пространстве $\tilde{E} = E + R^1$ выпуклые множества

$$\tilde{W}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ \xi \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y \\ \xi \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} Fx \\ -p(x) \end{pmatrix} \right\},$$

$$\tilde{W}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ \xi \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y \\ \xi \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 0 \\ -p(x_0) \end{pmatrix} \right\}$$

и воспользоваться теоремой отделимости.

Объединение предложений **103** и **104** составляет теорему Куна—Таккера. Эта теорема и предложение **100** являются модификацией следующей теоремы Неймана о седловой точке.

105. Пусть $h \in \mathrm{Hom}(E, E_1)$, U и V — компактные выпуклые множества в E и E_1. Тогда

$$\min_{x \in U} \max_{g \in V} g(hx) = \max_{g \in V} \min_{x \in U} g(hx).$$

Отметим родственную теорему:

106. Пусть U и V — компактные выпуклые множества в E и E_1. Тогда

$$\min_{x \in U} \max_{f \in V} |f(x)| = \max_{f \in V} \min_{x \in U} |f(x)|.$$

Рассмотрим еще в плане выпуклой и линейной оптимизации одну задачу чебышевского приближения. Назовем *чебышевской точкой* системы уравнений

$$f_k(x) = \alpha_k \qquad (f_k \in E', \ k = 1, 2, \ldots, m) \qquad (*)$$

вектор $\breve{x} \in E$, для которого

$$\max_k |f_k(\breve{x}) - \alpha_k| = \min_{x \in E} \max_k |f_k(x) - \alpha_k|.$$

Если система (*) имеет решение, то множество ее чебышевских точек совпадает с множеством ее решений. В отличие от решения, чебышевская точка существует у любой системы (*).

Так как функционал

$$p(x) = \max_k |f_k(x) - \alpha_k| \qquad (x \in E) \qquad (**)$$

выпуклый, то отыскание чебышевской точки системы (*) есть задача выпуклой оптимизации. Однако ее можно свести к задаче линейной оптимизации:

107. Пусть $\tilde{\mathrm{E}} = \mathrm{E} + \mathrm{R}^1$ и функционал $\tilde{f} \in \tilde{\mathrm{E}}'$ определен равенством $\tilde{f}(\tilde{x}) = \xi$ при $\tilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}$, $x \in \mathrm{E}$, $\xi \in \mathrm{R}^1$. Множество чебышевских точек системы уравнений (*) совпадает с множеством векторов $x \in \mathrm{E}$, для которых вектор $\tilde{x}$ является решением задачи минимизации линейного функционала $\tilde{f}(\tilde{x})$ при линейных ограничениях

$$|f_k(x) - \alpha_k| \leqslant \xi \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

108. Для того чтобы чебышевская точка системы уравнений (*) при любых правых частях была единственной, необходимо и достаточно, чтобы ранг системы функционалов $\{f_k\}_1^m$ был равен n (условие Хаара).

109. Пусть $\breve{x}$ — чебышевская точка системы (*) и

$$\mathscr{L} = \max_k |f_k(\breve{x}) - \alpha_k|.$$

Если $m > n$ и выполнено условие Хаара, то по крайней мере для $n+1$ значений индекса k имеет место равенство $|f_k(\breve{x}) - \alpha_k| = \mathscr{L}$.

Заметим, что аналогичное предложению **107** приведение задачи выпуклой оптимизации к задаче линейной оптимизации возможно всегда, когда функционал является *кусочно линейным*. Таковы, в частности, задачи отыскания чебышевской точки, удовлетворяющей дополнительным линейным связям в виде равенств (*задача Маркова*) или неравенств.

В заключение параграфа остановимся кратко на задаче минимизации «произвольного» функционала при «любых» ограничениях (но теперь уже в локальном, а не в глобальном смысле). Предварительно отметим одно общее предложение, вытекающее из теорем отделимости.

110. Пусть $\mathrm{K}_0, \mathrm{K}_1, \ldots, \mathrm{K}_m$ — открытые телесные клинья, а K_{m+1} — замкнутый клин. Для того чтобы $\bigcap_{j=0}^{m+1} \mathrm{K}_j = 0$, необходимо и достаточно, чтобы существовали функционалы $f_j \in K'_j$ $(j=0, 1, \ldots, m+1)$, не все равные нулю и удовлетворяющие условию $\sum_{j=0}^{m+1} f_j = 0$.

Задача локальной минимизации состоит в отыскании локальных минимумов функционала $\Phi(x)$ при ограничениях

$$\varphi_j(x) \geqslant 0 \qquad (j=1, 2, \ldots, m), \tag{*}$$

$$\psi_k(x) = 0 \qquad (k=1, 2, \ldots, r), \tag{**}$$

где функционалы $\Phi(x)$, $\varphi_j(x)$, $\psi_k(x)$ предполагаются определенными и непрерывными во всем E.

Мы ограничимся лишь необходимыми условиями минимума.

Вектор $y_0 \neq 0$ называется запрещенной вариацией в точке x_0, если для всех y из некоторой окрестности точки y_0 и всех $\varepsilon > 0$ из некоторой окрестности нуля

$$\Phi(x_0 + \varepsilon y) \leqslant \Phi(x_0).$$

Вектор $y_0 \neq 0$ называется допустимой вариацией по ограничению $\varphi(x) \geqslant 0$ в точке x_0, если для всех y из некоторой окрестности точки y_0 и всех $\varepsilon > 0$ из некоторой окрестности нуля

$$\varphi(x_0 + \varepsilon y) \geqslant 0.$$

Вектор $y_0 \neq 0$ называется допустимой вариацией по ограничению $\psi(x) = 0$, если для любой окрестности U точки y_0 и любого $\varepsilon_0 > 0$ найдутся число ε $(0 < \varepsilon < \varepsilon_0)$ и вектор $y \in U$ такие, что

$$\psi(x_0 + \varepsilon y) = 0.$$

Определенные выше множества вариаций обозначим через K_Φ, K_φ и K_ψ соответственно. Присоединив к каждому из них точку $y_0 = 0$, получим множества $\dot{K}_\Phi$, $\dot{K}_\varphi$, $\dot{K}_\psi$. Эти множества, вообще говоря, не являются клиньями, но:

111. Если $y \in \dot{K}_\Phi$ (или $y \in \dot{K}_\varphi$, или $y \in \dot{K}_\psi$), то $\alpha y \in \dot{K}_\Phi$ (соответственно $\alpha y \in \dot{K}_\varphi$ и $\alpha y \in \dot{K}_\psi$) при $\alpha \geqslant 0$.

112. Если множества K_Φ, K_φ, K_ψ выпуклы и $K_\Phi \neq \varnothing$, $K_\varphi \neq \varnothing$, то $\dot{K}_\Phi$ и $\dot{K}_\varphi$ — открытые телесные клинья, а $\dot{K}_\psi$ — замкнутый клин.

113. Пусть в точке x_0, удовлетворяющей ограничениям (*), (**), функционал $\Phi(x)$ имеет локальный минимум, т. е. $\Phi(x_0) \leqslant \Phi(x)$ для любой точки x, удовлетворяющей (*), (**), и принадлежащей некоторой окрестности точки x_0. Если множества вариаций K_Φ, K_{φ_j}, K_{ψ_k} ($j = 1, 2, \ldots, m$; $k = 1, 2, \ldots, r$) выпуклы, то существуют функционалы $f_0 \in \dot{K}'_\Phi$, $f_j \in \dot{K}'_{\varphi_j}$, $f_{m+k} \in \dot{K}'_{\psi_k}$, не все равные нулю и удовлетворяющие условию

$$\sum_{j=0}^{m+r} f_j(x) = 0$$

(уравнение Эйлера — Лагранжа).

§ 4. Задачи на экстремум в пространстве операторов

В этом параграфе мы рассмотрим несколько различных задач на экстремум в нормированном пространстве $\mathfrak{M}(E)$, где E — комплексное евклидово пространство и норма в $\mathfrak{M}(E)$ есть соответствующая операторная норма или любая унитарно-инвариантная норма. При этом, как и в § 7 гл. VII, мы будем обозначать операторную норму через $|\cdot|$.

Начнем с одной задачи, относящейся к нормальным операторам.

Пусть A_0 — нормальный оператор со спектром $\sigma(A_0) = \{\lambda_k\}_1^n$ и ортонормированным собственным базисом $\Delta = \{e_k\}_1^n$, а $\{\mu_k\}_1^n$ — заданная система точек комплексной плоскости. Через $\mathfrak{B}$ обозначим множество нормальных операторов B со спектром $\sigma(B) = \{\mu_k\}_1^n$. Требуется вычислить наименьшее и наибольшее значения гильбертовой нормы $\|A_0 - B\|$ при $B \in \mathfrak{B}$.

Решение этой задачи содержится в **114—118**.

Пусть $B_0 \in B$. Очевидно, множество $\mathfrak{B}$ совпадает с множеством операторов, унитарно подобных оператору B_0.

114. Если $(u_{jk})_1^n$ есть матрица унитарного оператора U в базисе Δ, то

$$\|A_0 - B\|^2 = \|A_0 - UB_0U^*\|^2 =$$
$$= \operatorname{sp}(A_0A_0^* + B_0B_0^*) + \sum_{j,k=1}^{n} (\lambda_j\bar{\mu}_k + \bar{\lambda}_j\mu_k)|u_{jk}|^2.$$

115. Матрица $(|u_{jk}|^2)$ — дважды стохастическая.

Множество операторов, определяемых в каноническом базисе Δ_0 арифметического пространства R^n всевозможными матрицами $(|u_{jk}|^2)$ $(U \in \mathfrak{U}(\mathrm{E}))$, обозначим через $\mathfrak{W}_0$.

116. Множество $\mathfrak{W}_0$ содержит все пермутаторы относительно Δ_0.

117. Наименьшее и наибольшее значения величины $\| A_0 - B \|$ при $B \in \mathfrak{B}$ достигаются на одном из операторов $B \in \mathfrak{B}$, обладающих собственным базисом Δ.

Поэтому:

118. Имеют место равенства

$$\min_{B \in \mathfrak{B}} \| A_0 - B \| = \min \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k - \mu_{j_k}|^2 \right)^{1/2},$$

$$\max_{B \in \mathfrak{B}} \| A_0 - B \| = \max \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k - \mu_{j_k}|^2 \right)^{1/2},$$

где минимум и максимум в правых частях берутся по всевозможным перестановкам $j_1, j_2, \ldots, j_n$ индексов $1, 2, \ldots, n$.

119. Если оператор A_0 самосопряженный и вещественные числа $\{\lambda_k\}_1^n$, $\{\mu_k\}_1^n$ занумерованы в порядке убывания, то

$$\min_{B \in \mathfrak{B}} \| A_0 - B \| = \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k - \mu_k|^2 \right)^{1/2},$$

$$\max_{B \in \mathfrak{B}} \| A_0 - B \| = \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k - \mu_{n-k+1}|^2 \right)^{1/2}.$$

Оператор $A \in \mathfrak{M}(\mathrm{E})$ назовем *ортогонализующим* нормированный базис Δ пространства E, если $A\Delta$ — ортонормированный базис. Множество операторов, ортогонализующих базис Δ, обозначим через $\mathfrak{O}_\Delta$. Если $A \in \mathfrak{O}_\Delta$, $U \in \mathfrak{U}(\mathrm{E})$, то $UA \in \mathfrak{O}_\Delta$. Далее, если $A_1, A_2 \in \mathfrak{O}_\Delta$ и U_1, U_2 — правые фазовые множители в полярных представлениях операторов A_1, A_2, то $U_1^{-1}A_1 = U_2^{-1}A_2$.

120. Если $\Delta = \{u_k\}_1^n$ — нормированный базис, то

$$\min_{A \in \mathfrak{O}_\Delta} \sum_{k=1}^{n} \| u_k - Au_k \|^2 = \operatorname{sp}(S^{1/2} - I)^2,$$

где S — оператор, порождаемый матрицей Грама системы Δ в каком-нибудь ортонормированном базисе. Минимум достигается при $A = U^{-1}B$, где $B \in \mathfrak{D}_\Delta$ и U — правый фазовый множитель в полярном представлении оператора B (теорема М. Г. Крейна).

121. Если $S \in \mathfrak{S}(\mathrm{E})$ и $\omega_1 \geqslant \omega_2 \geqslant \ldots \geqslant \omega_n$ — модули собственных значений оператора S, то

$$\min_{\substack{X \in \mathfrak{S}(\mathrm{E}),\\ \operatorname{rg} X = m}} |S - X| = \omega_{m+1}.$$

Минимум достигается при $X = PS$, где P — ортопроектор на линейную оболочку собственных векторов оператора S, соответствующих его m наибольшим по модулю собственным значениям.

122. Значение минимума в **121** и точка его достижения не изменяются при более широком варьировании: $X \in \mathfrak{M}(\mathrm{E})$, $\operatorname{rg} X = m$.

123. Для каждого $A \in \mathfrak{M}(\mathrm{E})$

$$\min_{\substack{X \in \mathfrak{M}(\mathrm{E}),\\ \operatorname{rg} X = m}} |A - X| = s_{m+1}(A).$$

Минимум достигается на отрезке разложения Шмидта

$$X = \sum_{k=1}^{m} s_k(A)(\cdot, e'_k)\, e_k.$$

124. Пусть $A \in \mathfrak{M}(\mathrm{E})$ и $\mathfrak{P}_m \subset \mathfrak{M}(\mathrm{E})$ — множество ортопроекторов ранга m. Тогда

$$\min_{X \in \mathfrak{P}_m} \max_{\substack{y = Ax,\\ \|x\| \leqslant 1}} \|y - Xy\| = s_{m+1}(A)$$

и

$$\max_{\substack{y = Ax,\\ \|x\| \leqslant 1}} \|y - Py\| = s_{m+1}(A)$$

при $P = \sum_{k=1}^{m} (\cdot, e_k)\, e_k$.

Таким образом, линейная оболочка системы векторов $\{e_k\}_1^m$ есть m-мерное подпространство, наименее уклоняющееся от A-образа единичного шара пространства E.

Следующее предложение является обобщением теоремы **123** на произвольные унитарно-инвариантные нормы.

125. Если $\tilde{p}(x) = \tilde{p}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — симметричная преднорма в R^n и $A \in \mathfrak{M}(\mathrm{E})$, то

$$\min_{\substack{X \in \mathfrak{M}(\mathrm{E}), \\ \mathrm{rg}\, X = m}} \tilde{p}(s(A - X)) = \tilde{p}(0, 0, \ldots, 0, s_{m+1}(A), \ldots, s_n(A)).$$

Минимум достигается на отрезке разложения Шмидта

$$X = \sum_{k=1}^{m} s_k(A)(\cdot, e'_k)\, e_k.$$

В частности:

126. Для каждого $A \in \mathfrak{M}(\mathrm{E})$

$$\min_{\substack{X \in \mathfrak{M}(\mathrm{E}), \\ \mathrm{rg}\, X = m}} \mathrm{sp}(A^* - X^*)(A - X) = \sum_{k=m+1}^{n} s_k^2(A).$$

Минимум достигается при $X = \sum_{k=1}^{m} s_k(A)(\cdot, e'_k)\, e_k$.

В заключение остановимся на экстремальных свойствах декартова и полярного представлений оператора $A \in \mathfrak{M}(\mathrm{E})$.

127. Если $A = S + iT$ $(S, T \in \mathfrak{S}(\mathrm{E}))$, то для произвольной унитарно-инвариантной нормы

$$\min_{X \in \mathfrak{S}(\mathrm{E})} \| A - X \| = \| A - S \|.$$

128. Если $A = UR$, где U — унитарный оператор, R — неотрицательный самосопряженный оператор, то для любой унитарно-инвариантной нормы

$$\min_{X \in \mathfrak{U}(\mathrm{E})} \| A - X \| = \| A - U \|, \qquad \max_{X \in \mathfrak{U}(\mathrm{E})} \| A - X \| = \| A + U \|.$$

Теорему **128** можно редуцировать к неравенствам

129. $\| R - I \| \leqslant \| R - X \| \leqslant \| R + I \| \qquad (X \in \mathfrak{U}(\mathrm{E}))$.

Эти неравенства вытекают из теоремы **189** гл. VII и неравенств

130. $$\sum_{k=1}^{m} s_k(R - I) \leqslant \sum_{k=1}^{m} s_k(R - X) \leqslant \sum_{k=1}^{m} s_k(R + I)$$
$$(m = 1, 2, \ldots, n).$$

Для доказательства правых неравенств **130** достаточно, пользуясь теоремой **263** гл. III, установить, что:

131. $s_k(R - X) \leqslant s_k(R + I) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$.

Для доказательства левых неравенств **130** можно применить теорему Виландта к операторам $S = \tilde{R} - \tilde{X}$ и $T = \tilde{R} - \tilde{I}$, где знак $\sim$ имеет тот же смысл, что и в теореме **152** гл. VII.

§ 5. Монотонные операторы

Пусть E — пространство Канторовича с положительным конусом K. Отображение F: E $\to$ E называется *монотонным*, если $Fx_1 \geqslant Fx_2$ при $x_1 \geqslant x_2$ ($x_1, x_2 \in$ E).

132. Для того чтобы оператор $A \in \mathfrak{M}$(E) был монотонным, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял условию $Ax \geqslant 0$ ($x \in$ E, $x \geqslant 0$).

Последнее условие означает, что конус K инвариантен относительно оператора A

$$A\mathrm{K} \subset \mathrm{K}.$$

133. Множество $\mathfrak{K}$ монотонных операторов является замкнутым телесным конусом в $\mathfrak{M}$(E).

Поэтому пространство $\mathfrak{M}$(E), в котором порядок задан конусом $\mathfrak{K}$, является пространством Канторовича. Монотонность оператора A, рассматриваемого как элемент этого пространства, равносильна его неотрицательности *). Употребляемые в этом параграфе соотношения $A \geqslant 0$ ($A > 0$) понимаются в смысле указанного порядка в $\mathfrak{M}$(E). Аналогично упорядочивается пространство $\mathfrak{M}$(E′).

Целью этого параграфа является исследование спектральных свойств операторов, неотрицательных в $\mathfrak{M}$(E).

134. Для того чтобы было $A > 0$, необходимо и достаточно, чтобы для всех $x \succ 0$ было $Ax > 0$.

135. Неравенства $A \geqslant 0$ и $A' \geqslant 0$ эквивалентны. Аналогично неравенства $A > 0$ и $A' > 0$ эквивалентны.

136. Для того чтобы конус $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{M}$(E) был конечным, необходимо и достаточно, чтобы был конечным конус K $\subset$ E.

137. Если конус K миниэдральный и $A \geqslant 0$, то $|Ax| \leqslant A|x|$ при любом $x \in E$.

138. Если $A \geqslant 0$, то $R_\lambda(A) \leqslant 0$ при $\lambda > \rho(A)$.

---

*) **Для самосопряженных операторов так определяемая неотрицательность не совпадает с неотрицательностью в смысле § 5 гл. III.**

139. Если оператор $A \geqslant 0$ имеет положительное собственное значение $\rho = \rho(A)$ порядка r, то в разложении Лорана резольвенты

$$R_\lambda = \frac{c_{-r}}{(\lambda - \rho)^r} + \frac{c_{-r+1}}{(\lambda - \rho)^{r-1}} + \ldots$$

коэффициент c_{-r} неположителен.

140. При условиях теоремы **139** собственному значению $\rho = \rho(A)$ соответствует по крайней мере один собственный вектор $x_0 \geqslant 0$ оператора A.

Теорема **140** представляет собой предварительный вариант теоремы Фробениуса (см. **143**), в окончательной формулировке которой принадлежность $\rho(A)$ к спектру следует из неотрицательности оператора A, а не предполагается заранее. В случае, когда на окружности $|\lambda| = \rho(A)$ имеется собственное значение λ, для которого $\arg \lambda$ соизмерим с 2π, теорема Фробениуса следует из **141**, а в общем случае — из **141** и **142**.

141. Если $A \geqslant 0$ и для некоторого натурального p

$$A^p y = \mu y \qquad (\mu > 0,\ y \succ 0),$$

то для

$$x = \rho^{p-1} y + \rho^{p-2} A y + \ldots + \rho A^{p-2} y + A^{p-1} y$$

при $\rho = \sqrt[p]{\mu} > 0$ будет $Ax = \rho x$, $x \succ 0$.

142. Если λ ($|\lambda| = \rho(A)$) есть собственное значение оператора $A \geqslant 0$, имеющее наибольшую вещественную часть среди всех собственных значений с модулем $\rho(A)$, то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ числа $\lambda + \varepsilon\lambda^2$ и $\bar{\lambda} + \varepsilon\bar{\lambda}^2$ являются наибольшими по модулю собственными значениями оператора $A + \varepsilon A^2$.

143. Для любого неотрицательного оператора A спектральный радиус $\rho(A)$ является собственным значением. Этому собственному значению соответствует по крайней мере один неотрицательный собственный вектор x_0 (теорема Фробениуса).

Первую часть теоремы Фробениуса можно также доказать, применяя к разложению резольвенты

$$R_\lambda = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}} \qquad (|\lambda| > \rho(A))$$

теорему Прингсгейма: радиус сходимости степенного ряда с неотрицательными коэффициентами является особой точкой суммы ряда.

В случае миниэдрального конуса К можно сделать следующее интересное заключение о наибольших по модулю собственных значениях оператора A.

144. Если конус $К \subset Е$ миниэдральный и оператор A неотрицательный, то каждое его собственное значение, равное по модулю $\rho = \rho(A)$, имеет вид $\rho\omega$, где ω — некоторый натуральный корень из единицы. При этом все точки $\rho\omega^k$ ($k = 1, 2, \ldots$) принадлежат спектру $\sigma(A)$.

Описывая К системой неравенств $f_k(x) \geqslant 0$ ($f_k \in E'$; $k = 1, 2, \ldots, n$) и комплексифицируя пространство Е, можно с помощью **124** гл. VII свести **144** к:

145. Если в условиях **144** $\rho(A) = 1$, $Ax_0 = x_0$ ($x_0 \geqslant 0$) и $A^{(c)}x = e^{i\alpha}x$, то

$$e^{i\alpha}f_j^{(c)}(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} f_k^{(c)}(x) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

где функционалы $f_k^{(c)}(x)$ нормированы условием

$$f_k^{(c)}(x_0) = 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

и $(\alpha_{jk})_{j,\,k=1}^{n}$ — стохастическая матрица.

Если $A > 0$, то теорема Фробениуса допускает ряд уточнений, которые мы рассмотрим шаг за шагом, а окончательный результат сформулируем в **156**.

146. Если $A > 0$, то $\rho(A) > 0$.

Таким образом, положительный оператор не может быть нильпотентным.

147. Оператор $A > 0$ не имеет собственных векторов на границе $\partial К$ конуса К.

148. Порядок собственного значения $\rho(A)$ оператора $A > 0$ равен единице.

149. Кратность собственного значения $\rho(A)$ оператора $A > 0$ равна единице.

150. Собственный вектор x_0 оператора $A > 0$, соответствующий собственному значению $\rho(A)$, является единственным*) неотрицательным собственным вектором оператора A. Вектор x_0 положителен.

---

*) С точностью до скалярного множителя.

Последнее можно установить, опираясь на следующее вспомогательное предложение.

151. Если $A \gg 0$ и $Ax = \mu x$ $(\mu > 0,\ x > 0)$, то для любого $y > 0$ последовательность $\{\mu^{-m} A^m y\}_1^\infty$ не имеет предельных точек на ∂K.

Предложение **151** в свою очередь вытекает из следующего простого замечания:

152. Для любых $x > 0$ и $y > 0$ при достаточно малом $\alpha > 0$ имеет место неравенство $y \gg \alpha x$.

153. Если $A > 0$, то собственное значение $\rho(A)$ больше модуля любого другого собственного значения.

Для доказательства **153** можно использовать вспомогательные предложения **154—156**, а также **151**.

154. Если $\lambda = re^{i\alpha}$ $(0 < r \leqslant \rho,\ 0 < \alpha < 2\pi)$ есть некоторое собственное значение оператора $A > 0$, а $x_1 + ix_2$ $(x_1,\ x_2 \in E)$ — соответствующий собственный вектор, то вещественная линейная оболочка векторов x_1, x_2 пересекается с конусом K лишь в его вершине.

155. Для любого $x > 0$ при некоторых вещественных α_1, α_2 будет $x + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in \partial K$.

156. Если в **153** $p\alpha = 2q\pi$ (p, q — натуральные), то $r < \rho(A)$.

Окончательно получаем:

157. Любой оператор $A > 0$ имеет единственный неотрицательный собственный вектор x_0. Этот вектор положителен. Соответствующее собственное значение ρ является простым и больше модуля любого другого собственного значения оператора A (теорема Перрона).

Следующее предложение является обобщением теоремы **146**.

158. Если $A \gg 0$, $x > 0$ и при некотором $\alpha > 0$

$$Ax \gg \alpha x,$$

то $\rho(A) \geqslant \alpha$.

Уточняя это предложение, можно прийти к следующему аналогу экстремального свойства наибольшего собственного значения самосопряженного оператора.

159. Спектральный радиус оператора $A \gg 0$ равен

$$\rho(A) = \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \alpha,$$

где $\mathscr{A} = \{\alpha \mid Ax \geqslant \alpha x$ для некоторого $x > 0\}$. Он равен также

$$\rho(A) = \min_{\beta \in \mathscr{B}} \beta,$$

где $\mathscr{B} = \{\beta \mid Ax \leqslant \beta x$ для некоторого $x > 0\}$.

Поэтому:

160. При любом $x > 0$ из неравенств $\alpha x \leqslant Ax$ и $\beta x \geqslant Ax$ вытекают неравенства $\alpha \leqslant \rho(A)$ и $\beta \geqslant \rho(A)$.

Из **159** можно получить следующие две формулы для $\rho(A)$:

161. $\rho(A) = \inf\limits_{\substack{g \geqslant 0,\\ g \in E'}} \sup\limits_{\substack{x \geqslant 0,\\ x \in E}} \frac{g(Ax)}{g(x)}$, $\rho(A) = \sup\limits_{\substack{x \geqslant 0,\\ x \in E}} \inf\limits_{\substack{g \geqslant 0,\\ g \in E'}} \frac{g(Ax)}{g(x)}$.

Таким образом:

162. Для функционала $\varphi(x, g) = \frac{g(Ax)}{g(x)}$ в $E \times E'$ имеет место соотношение

$$\inf_{g \in K'} \sup_{x \in K} \varphi(x, g) = \sup_{x \in K} \inf_{g \in K'} \varphi(x, g)$$

(ср. **105**).

163. Нижняя грань в левой части и верхняя грань в правой части соотношения **161** достигаются на соответствующих собственных векторах операторов A и A'.

Используя **159**, легко также получить следующие теоремы:

164. Спектральный радиус $\rho(A)$ при $A \geqslant 0$ есть монотонная функция от A, т. е. $\rho(A_2) \geqslant \rho(A_1)$, если $A_2 \geqslant A_1 \geqslant 0$.

165. Если $A \geqslant 0$ и $R_\lambda(A) \leqslant 0$, то $\lambda > \rho(A)$ (ср. **138**).

Приведем одно применение теорем **138** и **165** к исследованию устойчивости операторов. Оператор $B \in \mathfrak{M}(E)$ называется *строго устойчивым*, если его спектр $\sigma(B)$ лежит в открытой левой полуплоскости. Оператор $B \in \mathfrak{M}(E)$ назовем *трансляционно положительным*, если при некотором $\mu > 0$

$$B + \mu I > 0.$$

166. Для того чтобы трансляционно положительный оператор B был строго устойчивым, необходимо и достаточно выполнения неравенства $B^{-1} \leqslant 0$.

Оператор $A \geqslant 0$ называется *примитивным*, если $A^p > 0$ при некотором натуральном p.

167. Все утверждения теоремы Перрона остаются справедливыми при замене условия положительности оператора A условием его примитивности.

Это обобщение является окончательным в том смысле, что:

168. Если оператор $A \geqslant 0$ обладает положительным простым собственным значением, которое больше модулей остальных собственных значений, а соответствующие собственные векторы операторов A и A' положительны, то оператор A примитивен.

В заключение параграфа отметим одно предложение, представляющее собой развитие теоремы Перрона. С этой целью рассмотрим внешнюю степень $\overset{r}{\wedge}\mathrm{E}$ с положительным конусом $\overset{r}{\wedge}\mathrm{K}$. Оператор $A \in \mathfrak{M}(\mathrm{E})$ называется *вполне положительным*, если $\overset{r}{\wedge} A > 0$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$.

Из **89** гл. V и теоремы Перрона следует:

169. Все собственные значения вполне положительного оператора положительные и простые (теорема Гантмахера — Крейна).

§ 6. Отношения порядка в пространстве операторов

Каждый замкнутый телесный конус $\mathrm{K} \subset \mathrm{E}$ индуцирует в $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$ порядок, определяемый конусом

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(\mathrm{K})$$

монотонных операторов. Такие порядки в $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$ мы будем называть *операторными*. Операторные порядки занимают по отношению к произвольным упорядочениям пространства $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$ место, аналогичное месту операторных норм среди произвольных норм в $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$. Постановка задач и результаты этого параграфа аналогичны изложенным в § 10 гл. IV (см. также § 6 гл. V).

Конус $\mathfrak{K} = \mathfrak{M}(\mathrm{E})$ назовем *кольцевым*, если $AB \in \mathfrak{K}$ при $A, B \in \mathfrak{K}$.

170. Конус $\mathfrak{K}(\mathrm{K})$ является кольцевым и содержит единичный оператор.

171. Конус $\operatorname{Int}\mathfrak{K}(\mathrm{K})$ также кольцевой, но не содержит единичного оператора.

Порядок в $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$ будем называть *кольцевым*, если $AB \geqslant 0$ при $A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$. Согласно **170** любой операторный порядок является кольцевым и, кроме того, $I \geqslant 0$.

Исследуем строение сопряженного конуса $\mathfrak{K}' = [\mathfrak{K}(\mathrm{K})]'$. Это приведет нас к одной из характеризаций операторного порядка.

Пусть $f \in \mathrm{E}'$, $x \in \mathrm{E}$. Рассмотрим в $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$ линейный функционал φ, определяемый формулой

$$\varphi(A) = f(Ax).$$

Функционал такого вида можно трактовать как тензорное произведение и соответственно обозначать $f \otimes x$. Вместе с тем это произведение можно трактовать и как оператор в E:

$$(f \otimes x)\, y = f(y)\, x.$$

Выбор интерпретации тензорного произведения $f \otimes x$ будет каждый раз ясен из контекста.

172. Если $x \in \mathrm{K}$, $f \in \mathrm{K}'$, то $f \otimes x \in \mathfrak{K}'$.

Обратно:

173. Если $f \otimes x \in \mathfrak{K}'$, то $x \in \mathrm{K}$, $f \in \mathrm{K}'$ (или $-x \in \mathrm{K}$, $-f \in \mathrm{K}'$).

Обозначим через $\mathfrak{F}'$ множество всех функционалов вида $f \otimes x$ ($x \in \mathrm{E}$, $f \in \mathrm{E}'$). В силу **172** $\mathfrak{F}' \subset \mathfrak{K}'$, но $\mathfrak{F}' \neq \mathfrak{K}'$, ибо множество $\mathfrak{F}'$ не является клином. Однако:

174. Конус $\mathfrak{K}'$ есть выпуклая оболочка множества $\mathfrak{F}'$:

$$\mathfrak{K}' = \mathrm{Co}\, \mathfrak{F}'.$$

175. Если $x \in \mathrm{K}$ и $f \in \mathrm{K}'$ — экстремальные векторы конусов K и K′, то функционал $f \otimes x$ является экстремальным вектором конуса $\mathfrak{K}'$.

Обратно:

176. Если ψ есть экстремальный вектор конуса $\mathfrak{K}'$, то $\psi = f \otimes x$, где x и f — некоторые экстремальные векторы конусов K и K′.

Теоремы **172—176** с очевидными изменениями в формулировке переносятся на операторную интерпретацию тензорного произведения $f \otimes x$.

177. Для того чтобы замкнутый телесный конус $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{M}(\mathrm{E})$ был представим в виде $\mathfrak{Q} = \mathfrak{K}(\mathrm{K})$, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

1) если

$$K_1=\{x \mid x\in E,\ f\otimes x\in\mathfrak{Q} \text{ при некотором } f\in E'\},$$
$$K_2=\{f \mid f\in E',\ f\otimes x\in\mathfrak{Q}' \text{ при некотором } x\in E\},$$

то K_1 — замкнутый телесный конус и $K_2=K_1'$.

2) $\mathfrak{Q}'$ есть выпуклая оболочка множества всех функционалов вида $f\otimes x$, принадлежащих $\mathfrak{Q}$.

Таким образом, мы получили характеристику операторных порядков в терминах пары конусов $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$. Результатом дальнейших теорем будет характеризация таких порядков в терминах самого конуса $\mathfrak{Q}$.

178. Если K_1, K_2 — замкнутые телесные конусы в E, то конусы $\mathfrak{K}_1=\mathfrak{K}(K_1)$ и $\mathfrak{K}_2=\mathfrak{K}(K_2)$ либо несравнимы (т. е. ни один из них не является собственной частью другого), либо совпадают. В последнем случае $K_2=K_1$ или $K_2=-K_1$.

Далее:

179. Если $\mathfrak{Q}$ — замкнутый телесный кольцевой конус в $\mathfrak{M}(E)$, то существуют такие $f\in E'$, $x\in E$ $(f\neq 0,\ x\neq 0)$, что $f\otimes x\in\mathfrak{Q}$.

Таким образом:

180. Множество

$$K=\{x \mid x\in E,\ f\otimes x\in\mathfrak{Q} \text{ при некотором } f\in E'\}$$

есть замкнутый конус в E.

181. Имеет место соотношение $\mathfrak{Q}\subset\mathfrak{K}(K)$.

Следовательно, конус K телесный.

Из **178** и **181** следует:

182. Для того чтобы замкнутый телесный кольцевой конус $\mathfrak{Q}\subset\mathfrak{M}(E)$ определял в $\mathfrak{M}(E)$ операторный порядок, необходимо и достаточно, чтобы он был максимальным по включению.

Теперь легко установить существование неоператорных кольцевых порядков в $\mathfrak{M}(E)$, удовлетворяющих условию $I\geqslant 0$. Например:

183. Если K_1 и $K_2\neq K_1$ — замкнутые телесные конусы в E и конус $K_1\cap K_2$ также телесный, то пересечение $\mathfrak{K}(K_1)\cap\mathfrak{K}(K_2)$ является замкнутым телесным кольцевым конусом, содержащим единицу, но определяемый им порядок не является операторным.

§ 7. Упорядоченное пространство самосопряженных операторов

Рассмотрим неотрицательность (положительность) самосопряженных операторов в смысле § 5 гл. III с точки зрения теории упорядоченных пространств.

184. Множество $\mathfrak{S}_+(E)$ неотрицательных операторов есть замкнутый телесный конус в $\mathfrak{S}(E)$.

Таким образом, пространство $\mathfrak{S}(E)$ с отношением порядка, определяемым конусом $\mathfrak{S}_+(E)$, является пространством Канторовича. Соответствующее отношение порядка в $\mathfrak{S}(E)$ назовем *спектральным.*

185. Множество положительных операторов совпадает с $\operatorname{Int}\mathfrak{S}_+(E)$.

186. При $n \geqslant 2$ конус $\mathfrak{S}_+(E)$ не является конечным.

187. При $n \geqslant 2$ конус $\mathfrak{S}_+(E)$ не является кольцевым.

Таким образом, спектральный порядок не является операторным.

188. Конус $\mathfrak{S}_+(E)$ унитарно инвариантен: если $S \in \mathfrak{S}_+(E)$, то

$$USU^{-1} \in \mathfrak{S}_+(E) \qquad (U \in \mathfrak{U}(E)).$$

189. Общий вид линейного неотрицательного функционала в пространстве $\mathfrak{S}(E)$ определяется формулой $f(S) = \operatorname{sp}(CS)$, где $C = \mathfrak{S}_+(E)$.

Таким образом:

190. Конус $\mathfrak{S}_+(E)$ — самосопряженный (при естественном отождествлении пространств $[\mathfrak{S}(E)]'$ и $\mathfrak{S}(E)$).

191. Пусть A — самосопряженный оператор. Тогда множество операторов вида $S = \varphi(A)$, где φ — произвольная вещественная функция, есть подпространство в $\mathfrak{S}(E)$, а его пересечение с конусом $\mathfrak{S}_+(E)$ есть конечный конус.

192. Если $S_1 \geqslant 0$, $S_2 \geqslant 0$ и $S_1 \smile S_2$, то $S_1S_2 \geqslant 0$.

Условие $S_1 \smile S_2$ не может быть опущено, т. е. из $S_1 \geqslant 0$, $S_2 \geqslant 0$ не следует $S_1S_2 \geqslant 0$. Этого «недостатка» лишено *шуровское* произведение матриц.

193. Если операторы S_1, S_2 неотрицательны и их матрицы в некотором ортонормированном базисе суть $\mathfrak{s}_1$ и $\mathfrak{s}_2$, то самосопряженный оператор S, определяемый в этом же базисе матрицей $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 \circ \mathfrak{s}_2$, неотрицателен. Если при этом $S_1 > 0$, $S_2 > 0$, то и $S > 0$.

194. Если $S_1 \leqslant S_2$, $S \geqslant 0$ и $S \smile S_1$, $S \smile S_2$ (или по крайней мере $S \smile (S_1 - S_2)$), то $S_1 S \leqslant S_2 S$.

Введем положительную и отрицательную части самосопряженного оператора S формулами

$$S_+ = p_+(S), \quad \text{где} \quad p_+(\lambda) = \max\{0, \lambda\},$$
$$S_- = p_-(S), \quad \text{где} \quad p_-(\lambda) = \max\{0, -\lambda\}.$$

Заметим, что правый и левый операторные модули самосопряженного оператора S совпадают и равны

$$|S| = p_+(S) + p_-(S).$$

Вместе с тем

$$S = p_+(S) - p_-(S).$$

195. Оператор $|S|$ удовлетворяет соотношениям $|S| \smile S$, $-|S| \leqslant S \leqslant |S|$ и является наименьшим из операторов, удовлетворяющих таким соотношениям при данном S (ср. **17**).

196. Оператор S_+ удовлетворяет соотношениям $S_+ \smile S$, $S_+ \geqslant S$ и является наименьшим из операторов, удовлетворяющих таким соотношениям при данном S.

Аналогичным образом характеризуется оператор S_-.

Эти предложения являются частными случаями следующей теоремы:

197. Если $S_1 \smile S_2$, то в классе самосопряженных операторов, коммутирующих с S_1 и S_2,

$$\sup\{S_1, S_2\} = \frac{1}{2}(S_1 + S_2 + |S_1 - S_2|),$$

$$\inf\{S_1, S_2\} = \frac{1}{2}(S_1 + S_2 - |S_1 - S_2|).$$

Рассмотрим отношение спектрального порядка для ортопроекторов.

198. Для ортопроекторов неравенство $P \leqslant Q$ эквивалентно соотношению $\operatorname{Im} P \subset \operatorname{Im} Q$.

Таким образом, из соотношения $P \leqslant Q$ следует $P \smile Q$.

199. Если ортопроекторы P_1 и P_2 коммутируют, то в классе всех ортопроекторов, коммутирующих с P_1 и P_2,

$$\sup\{P_1, P_2\} = P_1 + P_2 - P_1 P_2, \qquad \inf\{P_1, P_2\} = P_1 P_2.$$

200. Ортопроектор $P = P(\operatorname{Im} S)$ монотонно зависит от S при $S \geqslant 0$:

$$P(\operatorname{Im} S_1) \leqslant P(\operatorname{Im} S_2) \qquad (0 \leqslant S_1 \leqslant S_2).$$

Следующие теоремы относятся в существенном к верхним и нижним граням бесконечных множеств в $\mathfrak{S}(\mathrm{E})$. Пусть $\mathfrak{H}$ — какое-нибудь множество в $\mathfrak{S}(\mathrm{E})$.

201. Если $T = \sup \mathfrak{H}$, то

$$(Tx, x) = \sup_{S \in \mathfrak{H}} (Sx, x) \qquad (x \in \mathrm{E}).$$

Обратно:

202. Если

$$(Tx, x) = \sup_{S \in \mathfrak{H}} (Sx, x) \qquad (x \in \mathrm{E}),$$

то $T = \sup \mathfrak{H}$.

203. Если

$$\sup_{S \in \mathfrak{H}} (Sx, x) < \infty \qquad (x \in \mathrm{E}) \qquad (*)$$

и для любых $S_1, S_2 \in \mathfrak{H}$ существует в $\mathfrak{H}$ мажоранта S ($S \geqslant S_1$, $S \geqslant S_2$), то множество $\mathfrak{H}$ обладает верхней гранью.

Необходимость условия (*) очевидна.

204. Если $T = \sup \mathfrak{H}$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует оператор $S_\varepsilon \in \mathfrak{H}$ такой, что для всех $S \in \mathfrak{H}$, удовлетворяющих условию $S \geqslant S_\varepsilon$, выполняется неравенство $\| T - S \| \leqslant \varepsilon$.

Предложения, аналогичные **201**—**204**, справедливы для нижней грани.

Рассмотрим некоторые специальные задачи на отыскание верхней грани.

Положим $\mathfrak{A} = \{S \mid S \in \mathfrak{S}(\mathrm{E}),\ S \leqslant A,\ \operatorname{Ker} S \supset \mathrm{L}\}$, где L — подпространство, $A \geqslant 0$.

Обозначим через Q ортопроектор на ортогональное дополнение к подпространству $A^{1/2}\mathrm{L}$.

205. $A^{1/2} Q A^{1/2} \in \mathfrak{A}$.

206. Для любого $S \in \mathfrak{A}$

$$(Sx, x) \leqslant \| A^{1/2} x - A^{1/2} y \| \qquad (x \in \mathrm{E},\ y \in \mathrm{L}).$$

207. Для любого $S \in \mathfrak{A}$

$$S \leqslant A^{1/2} Q A^{1/2}.$$

Таким образом, $\sup \mathfrak{A} = A^{1/2}QA^{1/2}$, и верхняя грань достигается.

Отметим еще, что:

208. $\operatorname{Im} A^{1/2}QA^{1/2} = L^{\perp} \cap \operatorname{Im} A^{1/2}$.

В заключение рассмотрим итерационный процесс извлечения квадратного корня из оператора.

209. Если $0 \leqslant S \leqslant I$, то последовательность

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{2}\left(S - S_k^2\right) \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ S_0 = 0)$$

имеет предел $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \sup\limits_k S_k = S^{1/2}$ (см. **20**).

§ 8. Положительные операторы и неравенства для собственных значений

Мы посвятим этот параграф разным задачам, связанным со спектральным порядком в пространстве $\mathfrak{S}(E)$. Некоторые из них примыкают к теории Фишера — Куранта.

Пусть $S > 0$. Положим $\lambda_1 = \lambda_1(S)$, $\lambda_n = \lambda_n(S)$.

210. $\min\limits_{\|x\|=1} \left\{(Sx,\ x)\left(S^{-1}x,\ x\right)\right\} = 1$.

211. $\max\limits_{\|x\|=1} \left\{(Sx,\ x)\left(S^{-1}x,\ x\right)\right\} = \dfrac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}$.

Это — неравенство Канторовича.

212. $\max\limits_{\|x\|=1} \left\{\|Sx\|^2 - (Sx,\ x)^2\right\} = \dfrac{(\lambda_1 - \lambda_n)^2}{4}$.

213. $\min\limits_{\|x\|=1} \dfrac{(Sx,\ x)}{\|Sx\|} = \dfrac{4\lambda_1\lambda_n}{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}$.

Отметим еще следующее неравенство.

214. Если $\mathcal{S} = (s_{jk})_{j,\,k=1}^n$ — матрица оператора S в каком-нибудь ортонормированном базисе и

$$d_m = \det (s_{jk})_{j,\,k=1}^m \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ d_0 = 1),$$

то

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{\lambda_k(S)} \geqslant \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{d_k}{d_{k-1}}},$$

где знак равенства имеет место лишь в случае диагональной матрицы $\mathfrak{G}$ (неравенство М. Г. Крейна).

Эта теорема легко выводится из **265** гл. III, если воспользоваться следующими двумя замечаниями.

215. Если $\{u_k\}_1^n$ — базис и $\mathfrak{g}_j$ — матрица Грама системы векторов $\Gamma_j = \{u_k\}_1^j$, то расстояние ρ_j вектора u_j от линейной оболочки системы Γ_{j-1} ($\mathrm{L}(\Gamma_0) = 0$) равно

$$\rho_j = \sqrt{\frac{\det \mathfrak{g}_j}{\det \mathfrak{g}_{j-1}}} \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ \det \mathfrak{g}_0 = 1).$$

216. Если ортонормированная система $\{e_k\}_1^n$ получена из системы $\{u_k\}_1^n$ с помощью процесса ортогонализации Сонина — Шмидта, то $(e_j,\ u_j) = \rho_j \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

Отметим теперь обобщение неравенства Шварца (см. **9** гл. IV).

217. Если $T \geqslant 0$, то

$$|(Tx,\ y)|^2 \leqslant (Tx,\ x)(Ty,\ y) \qquad (x,\ y \in \mathrm{E}).$$

Отсюда:

218. Если $(Tx,\ x) = 0$, то $Tx = 0$.

Пусть $T > 0$. Тогда функционал $[x,\ y] = (Tx,\ y)$ является новым скалярным произведением в E. Соответствующее унитарное пространство обозначим через $\mathrm{E}[T]$ и назовем *пространством Фридрихса.*

219. Формула $A = T^{-1}S$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между $\mathfrak{S}(\mathrm{E})$ и $\mathfrak{S}(\mathrm{E}[T])$. При этом конус $\mathfrak{S}_+(\mathrm{E})$ переходит в конус $\mathfrak{S}_+(\mathrm{E}[T])$.

Спектр оператора $T^{-1}S$ совпадает с множеством значений λ, для которых уравнение

$$Sx - \lambda Tx = 0 \qquad (*)$$

имеет решение $x \neq 0$, а сами решения совпадают с соответствующими собственными векторами. Оператор-функция $S - \lambda T$ называется *линейным операторным пучком*, а указанные выше значения λ и решения уравнения (*) — его *собственными значениями* и *собственными векторами.*

220. Собственные значения операторного пучка $S-\lambda T$ $(T>0)$ вещественны, а собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, T-ортогональны: $(Tu, v)=0$.

221. Существует T-ортонормированный базис из собственных векторов операторного пучка $S-\lambda T$ $(T>0)$.

Отсюда, между прочим, следует:

222. Если S — самосопряженный и T — положительный оператор в E, то $A=TS$ — оператор скалярного типа с вещественным спектром.

223. Для того чтобы собственные значения пучка $S-\lambda T$ $(T>0)$ были заключены в интервале (α, β), необходимо и достаточно, чтобы $S-\alpha T>0$, $\beta T-S>0$.

В частности:

224. Если $S>0$, $T>0$, то собственные значения пучка $S-\lambda T$ положительны.

Рассмотрим в заключение неравенства для собственных значений как функционалов на $\mathfrak{S}(\mathrm{E})$.

225. Спектры операторов S и $T\geqslant S$ удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_k(S)\leqslant\lambda_k(T)\qquad(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

226. Число знаков равенства в последних соотношениях не превосходит $\operatorname{def}(T-S)$. В частности, из

$$\lambda_k(S)=\lambda_k(T)\qquad(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

и $T\geqslant S$ следует $T=S$.

Первое и последнее собственные значения (в отличие от промежуточных) обладают следующим свойством:

227. Функционал $\lambda_1(S)$—вогнутый, а функционал $\lambda_n(S)$ — выпуклый: при $0<\theta<1$

$$\lambda_1((1-\theta)S_1+\theta S_2)\leqslant(1-\theta)\lambda_1(S_1)+\theta\lambda_1(S_2),$$
$$\lambda_n((1-\theta)S_1+\theta S_2)\geqslant(1-\theta)\lambda_n(S_1)+\theta\lambda_n(S_2).$$

Оценим возмущение спектра самосопряженного оператора через норму или ранг возмущения оператора.

228. $|\lambda_k(T)-\lambda_k(S)|\leqslant\|T-S\|$.

229. Если $S\leqslant T$ и $\operatorname{rg}(T-S)\leqslant r$, то

$$\lambda_k(T)\leqslant\lambda_{k-r}(S)\qquad(k=r+1,\ \ldots,\ n).$$

В частности:

230. Если $S \leqslant T$ и $\operatorname{rg}(T-S)=1$, то

$$\lambda_k(T) \leqslant \lambda_{k-1}(S) \qquad (k=2, \ldots, n).$$

Таким образом, спектры операторов S и T перемежаются:

$$\lambda_1(T) \geqslant \lambda_1(S) \geqslant \lambda_2(T) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n(S)$$

(ср. **231** гл. III).

Теоремы **228** и **230** не допускают обращения, но:

231. Если

$$|\lambda_k(T)-\lambda_k(S)| \leqslant \varepsilon \qquad (k=1, 2, \ldots, n;\ \varepsilon > 0),$$

то существует унитарный оператор U такой, что

$$\|UTU^{-1}-S\| \leqslant \varepsilon.$$

При этом если $S \leqslant T$, то оператор U можно выбрать так, чтобы $S \leqslant UTU^{-1}$.

232. Если $S \leqslant T$ и

$$\lambda_k(T) \leqslant \lambda_{k-1}(S) \qquad (k=2, \ldots, n),$$

где хотя бы одно из неравенств строгое, то существует унитарный оператор U такой, что $S \leqslant UTU^{-1}$ и $\operatorname{rg}(UTU^{-1}-S)=1$.

При доказательстве можно ограничиться случаем вещественного пространства E и искать оператор U в виде вращения.

§ 9. Монотонные и выпуклые функции от самосопряженного оператора

Пусть $\varphi(\lambda)$ — скалярная вещественная функция, определенная на конечном или бесконечном интервале (α, β).

Функция $\varphi(S)$ от оператора $S \in \mathfrak{S}(\mathrm{E})$ называется *монотонной* в интервале $(\alpha I, \beta I)=\{S \mid \alpha I \leqslant S \leqslant \beta I\}$, если из $S \leqslant T$; $S, T \in (\alpha I, \beta I)$ следует $\varphi(S) \leqslant \varphi(T)$.

233. Функция $\varphi(S)=-S^{-1}$ монотонна в интервалах $S>0$ и $S<0$.

234. Функция $\varphi(S)=-R_\lambda(S)$ монотонна в интервалах $S>\lambda I$ и $S<\lambda I$.

235. Дробно-линейная функция

$$\varphi(S)=(\gamma_{11}S+\gamma_{12}I)(\gamma_{21}S+\gamma_{22}I)^{-1},$$

где γ_{jk} вещественны и $\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}\gamma_{21}>0$, монотонна в интервалах $S>-\frac{\gamma_{22}}{\gamma_{21}}I$ и $S<-\frac{\gamma_{22}}{\gamma_{21}}I$.

236. Рациональная функция

$$\varphi(S)=\beta_0 I+\beta_1 S+\sum_{k=1}^{m}\gamma_k(S-\alpha_k I)^{-1},$$

где $\beta\geqslant 0$, $\beta_1\geqslant 0$, $\gamma_k\leqslant 0$, $\mathfrak{Im}\,\alpha_k=0$, монотонна в каждом интервале, не содержащем ее «полюсов» $\alpha_k I$ $(k=1, 2, \ldots, m)$.

237. Функция $\varphi(S)=S^{1/2}$ монотонна на полуоси $S\geqslant 0$. Это вытекает из следующих предложений:

238. Если $0\leqslant S\leqslant T$, то вещественная часть оператора

$$\left(T^{1/2}+S^{1/2}+\mu I\right)\left(S^{1/2}-T^{1/2}+\mu I\right)$$

при любом $\mu>0$ положительна.

239. Если S_1, $S_2\in\mathfrak{S}(\mathrm{E})$ и $S_1>0$, то оператор S_1+iS_2 обратим (см. **224**).

Общие критерии монотонности можно получить с помощью формулы Тейлора для функций от оператора.

240. Если*) $\varphi(\lambda)\in\mathcal{C}_1(\alpha, \beta)$, то для монотонности функции $\varphi(S)$ необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$\left.\frac{d\varphi(S+t\,\Delta S)}{dt}\right|_{t=0}\geqslant 0$$

при всех $S\in(\alpha I, \beta I)$ и $\Delta S\geqslant 0$.

241. Если $\varphi(\lambda)\in\mathcal{C}_1(\alpha, \beta)$, то для монотонности функции $\varphi(S)$ необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$\varphi^{[1]}(S)\circ dS\geqslant 0$$

при всех $S\in(\alpha I, \beta I)$ и $dS\geqslant 0$.

Это условие равносильно неравенству $\varphi^{[1]}(S)\geqslant 0$.

242. Если $\varphi(\lambda)\in\mathcal{C}_1(\alpha, \beta)$, то для монотонности функции $\varphi(S)$ необходима и достаточна неотрицательность квадратичной формы

$$\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\varphi(\lambda_j)-\varphi(\lambda_k)}{\lambda_j-\lambda_k}\xi_j\xi_k$$

при любых $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\ldots\geqslant\lambda_n$ из интервала (α, β).

---

*) $\mathcal{C}_1(\alpha, \beta)$ — класс скалярных функций, непрерывно дифференцируемых в интервале (α, β).

Ниже мы укажем еще одно необходимое условие монотонности. При его выводе дифференцируемость функции $\varphi(\lambda)$ не предполагается. Более того, можно рассматривать функцию $\varphi(\lambda)$, определенную на любом точечном множестве $\mathscr{E} \subset (\alpha, \beta)$, содержащем не менее $2n$ различных точек. При этом функция $\varphi(S)$ будет определена лишь на множестве $\{S \mid \sigma(S) \subset \mathscr{E}\}$. Предварительно отметим следующую простую лемму.

243. Если функция $\varphi(S)$ монотонна в $\mathfrak{S}(\mathrm{E})$, то она монотонна в $\mathfrak{S}(\mathrm{E}_1)$ при $\dim \mathrm{E}_1 < \dim \mathrm{E}$.

244. Если функция $\varphi(S)$ монотонна, то квадратичная форма

$$\sum_{j,\,k=1}^{n} \frac{\varphi(\lambda_j) - \varphi(\mu_k)}{\lambda_j - \mu_k} \xi_j \xi_k$$

неотрицательна при любых $\mu_1 > \lambda_1 > \mu_2 > \ldots > \mu_n > \lambda_n$ из $\mathscr{E}$.

Для доказательства можно использовать **232**, после чего вычислить матрицу оператора $\varphi(U^{-1}SU) - \varphi(S)$ в собственном базисе оператора S.

Теорема **244** позволяет обнаружить ряд неожиданных свойств монотонных функций, из которых наиболее значительны **248** и **249**. В теоремах **245**—**249** предполагается $\dim \mathrm{E} > 1$. В силу **243** можно при доказательстве считать $\dim \mathrm{E} = 2$.

245. *Любая монотонная в интервале $(\alpha I, \beta I)$ функция $\varphi(S)$, отличная от константы, возрастает строго, т. е. $\varphi(S) < \varphi(T)$ при $S < T$.*

Таким образом, функция $\varphi(\lambda)$ обратима. Однако обратная функция $\varphi^{-1}(S)$, вообще говоря, не является монотонной:

246. Если функция $\varphi(S)$ монотонна вместе со своей обратной, то $\varphi(S) = (\gamma_{11}S + \gamma_{12}I)(\gamma_{21}S + \gamma_{22}I)^{-1}$.

В частности:

247. Единственной монотонной на всей оси $(-\infty I, \infty I)$ функцией $\varphi(S)$, обладающей монотонным обращением, является линейная функция $\varphi(S) = \beta_0 I + \beta_1 S$.

248. Если функция $\varphi(S)$ монотонна в интервале $(\alpha I, \beta I)$, то функция $\varphi(\lambda)$ непрерывна в интервале (α, β).

Более того:

249. Если функция $\varphi(S)$ монотонна в интервале $(\alpha I, \beta I)$, то функция $\varphi(\lambda)$ непрерывно дифференцируема в интервале (α, β).

Отсюда следует, что можно усилить критерий **242**:

250. Для того чтобы функция $\varphi(S)$ была монотонна в интервале $(\alpha I,\ \beta I)$, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывно дифференцируемой и чтобы квадратичная форма

$$\sum_{j,\ k=1}^{n} \frac{\varphi(\lambda_j)-\varphi(\lambda_k)}{\lambda_j-\lambda_k}\xi_j\xi_k$$

была неотрицательной при любых $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ из $(\alpha,\ \beta)$.

Изложенные нами теоремы о монотонных функциях от оператора представляют начала теории Лёвнера. Наиболее замечательные результаты этой теории относятся к свойствам гладкости и аналитичности. Оказывается, что в условиях **249** функция $\varphi(\lambda)$ обладает не только первой, но и следующими непрерывными производными вплоть до $(n-1)$-го порядка. А если функция $\varphi(S)$ монотонна в интервале $(\alpha I,\ \beta I)$ при любой размерности пространства E, то функция $\varphi(\lambda)$ аналитична в интервале $(\alpha,\ \beta)$, продолжаема в верхнюю полуплоскость и имеет там неотрицательную мнимую часть (т. е. является $\mathcal{N}$-функцией). Последнее свойство является характеристическим для функций $\varphi(\lambda)$, порождающих функции $\varphi(S)$, монотонных при всех n.

Перейдем теперь к выпуклым функциям от оператора.

Функция $\varphi(S)$ называется *выпуклой* в интервале $(\alpha I,\ \beta I)$, если для любых операторов S и T из интервала $(\alpha I,\ \beta I)$

$$\varphi((1-\theta)S+\theta T) \leqslant (1-\theta)\varphi(S)+\theta\varphi(T) \qquad (0<\theta<1).$$

251. Функция $\varphi(S)=S^2$ выпукла на оси $(-\infty I,\ \infty I)$.

252. Функция $\varphi(S)=|S|$ выпукла в интервале $(\alpha I,\ \beta I)$ тогда (и при $\dim \mathrm{E}>1$ только тогда), когда интервал $(\alpha,\ \beta)$ не содержит нуля.

253. Если*) $\varphi(\lambda)\in\mathcal{C}_2(\alpha,\ \beta)$, то для выпуклости функции $\varphi(S)$ необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$\left.\frac{d^2\varphi(S+t\,\Delta S)}{dt^2}\right|_{t=0} \geqslant 0$$

при всех $S\in(\alpha I,\ \beta I)$ и $\Delta S\in\mathfrak{S}(\mathrm{E})$ (ср. **240**).

---

*) $\mathcal{C}_2(\alpha,\ \beta)$ — класс скалярных функций, дважды непрерывно дифференцируемых в интервале $(\alpha,\ \beta)$.

254. Если $\varphi(\lambda) \in \mathcal{C}_2(\alpha, \beta)$, то для выпуклости функции $\varphi(S)$ необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$\varphi^{[2]}(S) \circ dS^{(2)} \geqslant 0$$

при всех $S \in (\alpha I, \beta I)$ и $dS \in \mathfrak{S}(\mathrm{E})$ (ср. **241**).

255. Если $\varphi(\lambda) \in \mathcal{C}_2(\alpha, \beta)$, то для выпуклости функции $\varphi(S)$ необходима и достаточна неотрицательность квадратичных форм

$$\sum_{j,\, k=1}^{n} \varphi^{[2]}(\lambda_j, \lambda_0, \lambda_k)\, \xi_j \xi_k$$

при любых $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ из интервала (α, β) (ср. **242**).

256. Если $\varphi(\lambda) \in \mathcal{C}_2(\alpha, \beta)$, то для выпуклости функции $\varphi(S)$ необходима и достаточна монотонность функции $\psi_\mu(S) = \varphi^{[1]}(\mu, S)$ при любом $\mu \in (\alpha, \beta)$.

ГЛАВА IX
РАСШИРЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ

§ 1. Линейные операторы, действующие с подпространства линейного пространства

В этой главе изучаются гомоморфизмы $A \in \mathrm{Hom}(\mathrm{D}_A, \mathrm{E})$, где D_A — подпространство комплексного пространства E. При $\mathrm{D}_A = \mathrm{E}$ гомоморфизм A является оператором в смысле гл. II. Этот же термин сохраняется при $\mathrm{D}_A \neq \mathrm{E}$ (хотя более естественны были бы названия «частичный оператор» или «предоператор»). Теперь, в отличие от гл. II, вектор Ax существует лишь при $x \in \mathrm{D}_A$, а соотношения

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2, \quad A(\alpha x) = \alpha Ax$$

должны иметь место при всех x_1, x_2, $x \in \mathrm{D}_A$ и любом комплексном α.

Подпространство D_A называется *областью определения* оператора и в дальнейшем обозначается $\mathrm{Dom}\, A$. Его коразмерность называется *дефектным числом* оператора A и обозначается $\delta(A)$. Образ $\mathrm{Im}\, A$ называется *областью значений* оператора A. Вся терминология введенная для гомоморфизмов в гл. I, сохраняет смысл для операторов, определенных на подпространстве.

Операторы A_1 и A_2 называются *равными*, если

$$\mathrm{Dom}\, A_1 = \mathrm{Dom}\, A_2 \quad \text{и} \quad A_1 x = A_2 x$$

при всех возможных x.

Оператор $\tilde{A}$ (в соответствии с определением гл. I) называется *расширением* оператора A (на $\mathrm{Dom}\, \tilde{A}$), а оператор A — *сужением* оператора $\tilde{A}$ (на $\mathrm{Dom}\, A$), если

$$\mathrm{Dom}\, A \subset \mathrm{Dom}\, \tilde{A} \quad \text{и} \quad \tilde{A}x = Ax \qquad (x \in \mathrm{Dom}\, A).$$

При этом будем писать $A \subset \tilde{A}$. Расширение $\tilde{A} \supset A$ называется *полным*, если

$$\operatorname{Dom} \tilde{A} = \mathrm{E}.$$

1. Множество всех полных расширений оператора A выпукло.

Рассмотрим сначала арифметические действия над операторами.

Приводимые ниже определения суммы (разности) и произведения операторов согласуются с действиями над гомоморфизмами, введенными в гл. I. За операторами 0 и I сохраняется их первоначальный смысл, указанный в гл. II (так что $\operatorname{Dom} 0 = \mathrm{E}$, $\operatorname{Dom} I = \mathrm{E}$).

Сумма и *разность* $A = A_1 \pm A_2$ операторов A_1 и A_2 определяются равенствами

$$Ax = A_1x \pm A_2x$$

на подпространстве

$$\operatorname{Dom} A = \operatorname{Dom} A_1 \cap \operatorname{Dom} A_2.$$

2. $(A_1 + A_2) + A_3 = A_1 + (A_2 + A_3)$.

3. $A_1 + A_2 = A_2 + A_1$.

4. $A + 0 = A$.

5. $A_1 - A_2 = A_1 + (-A_2)$.

6. $A - A \subset 0$.

7. $(A_1 - A_2) + A_2 \subset A_1$.

Произведение $A = A_2A_1$ операторов A_1 и A_2 определяется равенством

$$Ax = A_2(A_1x)$$

на подпространстве

$$\mathrm{D}_A = \{x \mid x \in \operatorname{Dom} A_1,\ A_1x \in \operatorname{Dom} A_2\}.$$

Если $A_1A_2 = A_2A_1$, то операторы A_1 и A_2 называются *коммутирующими*; как и прежде, это записывается в виде $A_1 \smile A_2$. Произведение m одинаковых множителей A обозначается через A^m.

8. $(A_1A_2)A_3 = A_1(A_2A_3)$.

9. $(A_1 + A_2)A_3 = A_1A_3 + A_2A_3$.

Однако:

10. $A_3(A_1 + A_2) \supset A_3A_1 + A_3A_2$.

11. $IA = AI = A$.

12. $\dim(\mathrm{Dom}\, A_1A_2) = \dim(\mathrm{Dom}\, A_1 \cap \mathrm{Im}\, A_2) + \mathrm{def}\, A_2$ (ср. **133—136** гл. I).

13. Если A_2^{-1} существует, то

$$\dim(\mathrm{Dom}\, A_1A_2) = \\ = \dim(\mathrm{Dom}\, A_1) + \dim(\mathrm{Dom}\, A_2) - \dim\left(\mathrm{Dom}\, A_1 + \mathrm{Dom}\, A_2^{-1}\right).$$

По поводу степеней оператора отметим лишь, что:

14. При любом натуральном m

$$\mathrm{Dom}\, A^m \supset \mathrm{Dom}\, A^{m+1}.$$

Если при некотором натуральном m_0 в этом соотношении имеет место знак равенства, то он сохраняется при всех $m > m_0$.

15. $m_0 + \delta(A) \leqslant n$.

Подпространство $\mathrm{L} \subset \mathrm{Dom}\, A$ называется *инвариантным* относительно A, если $Ax \in \mathrm{L}$ при любом $x \in \mathrm{L}$.

16. Подпространство

$$\mathrm{L}_A = \bigcap_{k=1}^{n-1} \mathrm{Dom}\, A^k = \bigcap_{k=1}^{m_0} \mathrm{Dom}\, A^k$$

инвариантно относительно A.

17. Подпространство L_A не является частью какого-либо другого инвариантного подпространства оператора A.

18. Подпространство L_A содержит любое инвариантное подпространство оператора A.

Таким образом, L_A есть наибольшее инвариантное подпространство оператора A.

Оператор A называется *простым*, если он не имеет отличных от нуля инвариантных подпространств.

19. Для того чтобы оператор A был простым, необходимо и достаточно, чтобы $\bigcap_{k=1}^{n-1} \mathrm{Dom}\, A^k = 0$.

В частности:

20. Если $\mathrm{Ker}\, A = 0$ и $\mathrm{Dom}\, A \cap \mathrm{Im}\, A = 0$, то оператор A простой.

21. Любое сужение простого оператора есть простой оператор.

Используемые в этой главе понятия собственного вектора и подпространства определяются обычным образом.

22. Для того чтобы оператор был простым, необходимо и достаточно, чтобы он не имел собственных векторов.

23. Если оператор A простой, то кратность каждого собственного значения любого полного расширения $\tilde{A}$ оператора A не превосходит дефектного числа $\delta(A)$.

Обратно:

24. Если кратность каждого собственного значения любого полного расширения $\tilde{A}$ оператора A не превосходит $\delta(A)$, то оператор A простой.

Для доказательства достаточно воспользоваться следующим предложением:

25. Пусть L — какое-нибудь дополнение подпространства $\mathrm{Dom}\, A$. Для полного расширения $\tilde{A} \supset A$, определяемого равенством $\tilde{A}x = 0$ $(x \in \mathrm{L})$, будет

$$\mathrm{Ker}\, \tilde{A} = \mathrm{Ker}\, A \dotplus \mathrm{L}.$$

Оператор A называется *прямой суммой* операторов A_1 и A_2:

$$A = A_1 \dotplus A_2,$$

если подпространства $\mathrm{Dom}\, A_1$ и $\mathrm{Dom}\, A_2$ взаимно независимы и

$$\mathrm{Dom}\, A = \mathrm{Dom}\, A_1 \dotplus \mathrm{Dom}\, A_2, \quad Ax = A_1x_1 + A_2x_2,$$

где $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \mathrm{Dom}\, A_1$, $x_2 \in \mathrm{Dom}\, A_2$.

§ 2. Линейные операторы, действующие с подпространства унитарного пространства

В этом параграфе E означает унитарное пространство. Оператор S называется *эрмитовым*, если

$$(Sx, y) = (x, Sy) \qquad (x, y \in \mathrm{Dom}\, S).$$

При $\mathrm{Dom}\, S = \mathrm{E}$ эрмитов оператор S — самосопряженный.

Оператор V называется *изометрическим*, если

$$\|Vx\| = \|x\| \qquad (x \in \mathrm{Dom}\, V).$$

При $\mathrm{Dom}\, V = \mathrm{E}$ изометрический оператор V — унитарный.

26. Любое сужение самосопряженного оператора является эрмитовым оператором.

27. Любое сужение унитарного оператора является изометрическим оператором.

Обратно:

28. Любой изометрический оператор допускает унитарные расширения.

Вопрос об обращении теоремы **26** откладывается до § 4. Следующие предложения являются обобщениями соответствующих теорем § 5 и 6 гл. III.

29. Для того чтобы оператор S был эрмитовым, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\mathfrak{Im}(Sx, x) = 0 \qquad (x \in \operatorname{Dom} S).$$

30. Если оператор S эрмитов, то оператор αS эрмитов при любом вещественном α.

31. Сумма эрмитовых операторов есть эрмитов оператор.

32. Если эрмитов оператор S обратим, то оператор S^{-1} также является эрмитовым.

33. Собственные значения эрмитова оператора вещественны.

34. Собственные векторы эрмитова оператора, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

35. Для того чтобы оператор V был изометрическим, необходимо и достаточно выполнения условия

$$(Vx, Vy) = (x, y) \qquad (x, y \in \operatorname{Dom} V).$$

36. Если оператор V изометрический, то при $|\alpha| = 1$ оператор αV также изометрический.

37. Произведение изометрических операторов есть изометрический оператор.

38. Оператор, обратный к изометрическому, существует и является изометрическим.

39. Собственные значения изометрического оператора по модулю равны единице.

40. Собственные векторы изометрического оператора, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

41. Для любого оператора A существует и единствен *сопряженный* оператор A^*, определенный на всем $\mathbf{E}$ и удовлетворяющий условиям:

1) $(Ax, y) = (x, A^*y) \qquad (x \in \operatorname{Dom} A,\ y \in \mathrm{E})$,
2) $\operatorname{Im} A^* \subset \operatorname{Dom} A$.

42. $A \subset A^{**}$.

43. Если полное расширение $\tilde{A}$ оператора A определено равенством $\tilde{A}x = 0$ $\left(x \in (\operatorname{Dom} A)^{\perp}\right)$, то $\tilde{A}^* = A^*$.

Обратно:

44. Если B есть полное расширение оператора A и $B^* = A^*$, то $B = \tilde{A}$.

45. $\operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Ker} A^* = \mathrm{E}$.

В следующих задачах P_A означает ортопроектор на D_A.

46. Если операторы A и B связаны соотношением

$$(Ax, y) = (x, By) \qquad (x \in \operatorname{Dom} A, \ y \in \operatorname{Dom} B),$$

то $P_A B \subset A^*$.

Обратно:

47. Если $P_A B \subset A^*$, то операторы A и B связаны соотношением

$$(Ax, y) = (x, By) \qquad (x \in \operatorname{Dom} A, \ y \in \operatorname{Dom} B).$$

48. Для того чтобы оператор A был эрмитовым, необходимо и достаточно, чтобы $P_A A \subset A^*$.

49. Для того чтобы оператор B был сопряженным к некоторому эрмитову оператору, необходимо и достаточно, чтобы он имел вид $B = PS$, где S — самосопряженный оператор, P — ортопроектор.

50. Пусть S, $\tilde{S}$ — эрмитовы операторы и $\operatorname{Dom} \tilde{S} \supset \operatorname{Dom} S$. Для того чтобы было $\tilde{S} \supset S$, необходимо и достаточно, чтобы $P_S \tilde{S} \subset S^*$.

51. Если $\mathrm{D}_B \supset \mathrm{D}_A$ и $P_A B^* = A^*$, то $B \supset A$.

Обратно:

52. Если $B \supset A$, то $P_A B^* = A^*$.

53. Пусть S — эрмитов, $\tilde{S}$ — самосопряженный оператор. Для того чтобы $\tilde{S}$ был расширением оператора S, необходимо и достаточно, чтобы $P_S \tilde{S} = S^*$.

54. Множество всех самосопряженных расширений заданного эрмитова оператора выпукло (ср. 1).

55. Каков бы ни был оператор A, операторы A^*A и AA^* являются самосопряженными (первый — в $\operatorname{Dom} A$, второй — в E) и неотрицательными.

56. Для положительности оператора A^*A (в $\mathrm{Dom}\, A$) необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{Ker}\, A = 0$.

57. Для положительности оператора AA^* (в E) необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{Dom}\, A = \mathrm{E}$.

58. Для изометричности оператора V необходимо и достаточно, чтобы $V^*V \subset I$.

59. Если V — изометрический оператор, то VV^* есть ортопроектор на область значений оператора V.

60. Для того чтобы оператор B был сопряженным к некоторому изометрическому оператору, необходимо и достаточно, чтобы он имел вид $B = PU$, где U — унитарный оператор, P — ортопроектор.

61. Если V — изометрический оператор, то $V^{-1} \subset V^*$.

Обратно:

62. Если оператор V обратим и $V^{-1} \subset V^*$, то V — изометрический оператор.

63. Пусть V, $\widetilde{V}$ — изометрические операторы и $\mathrm{Dom}\, \widetilde{V} \supset \mathrm{Dom}\, V$. Для того чтобы было $\widetilde{V} \supset V$, необходимо и достаточно, чтобы $V^{-1} \subset \widetilde{V}^*$.

64. Пусть V — изометрический, $\widetilde{V}$ — унитарный оператор. Для того чтобы $\widetilde{V}$ был расширением оператора V, необходимо и достаточно равенства $V^*\widetilde{V} = P_V$.

Оператор B, определенный на всем E, называется *частично изометрическим*, если он является расширением некоторого изометрического оператора V и $Bx = 0$ при $x \in (\mathrm{Dom}\, V)^{\perp}$. Например, частично изометрическим является оператор, сопряженный к любому изометрическому.

65. Если B — частично изометрический оператор, то и B^* — частично изометрический оператор.

66. Если B — частично изометрический оператор, то $B^*B = P$, $BB^* = Q$, где P и Q — ортопроекторы на $\mathrm{Dom}\, B$ и $\mathrm{Im}\, B$ соответственно.

67. Если оператор B определен на всем E и B^*B (или BB^*) есть ортопроектор, то B — частично изометрический оператор.

68. Для того чтобы оператор B ($\mathrm{Dom}\, B = \mathrm{E}$) был частично изометрическим, необходимо и достаточно, чтобы его операторный модуль был ортопроектором.

69. $\mathrm{L}_A^{\perp} = \sum_{k=0}^{n-1} (A^*)^k (\mathrm{Dom}\, A)^{\perp}$ (см. **16**).

70. Если $B \supset A$, то

$$\mathrm{L}_A^{\perp} = \sum_{k=0}^{n-1} (B^*)^k (\mathrm{Dom}\ A)^{\perp}.$$

71. Если S — эрмитов оператор, а $\tilde{S}$ — какое-нибудь его самосопряженное расширение, то

$$\mathrm{L}_S^{\perp} = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{S}^k (\mathrm{Dom}\, S)^{\perp}.$$

72. Если V — изометрический оператор, а U — какое-нибудь его унитарное расширение, то

$$\mathrm{L}_V^{\perp} = \sum_{k=0}^{n-1} U^{-k} (\mathrm{Dom}\, V)^{\perp}.$$

Из **69** и **72** можно получить критерии простоты оператора. Введем понятие порождающего подпространства.

Подпространство L называется *порождающим* для оператора T ($\mathrm{Dom}\ T = \mathrm{E}$), если

$$\sum_{k=0}^{n-1} T^k \mathrm{L} = \mathrm{E}$$

(ср. § 3 гл. II).

73. Для того чтобы оператор A был простым, необходимо и достаточно, чтобы подпространство $(\mathrm{Dom}\, A)^{\perp}$ было порождающим для A^*.

74. Для того чтобы симметрический оператор S был простым, необходимо, чтобы подпространство $(\mathrm{Dom}\, S)^{\perp}$ было порождающим для любого самосопряженного расширения $\tilde{S} \supset S$, и достаточно, чтобы оно было порождающим для какого-нибудь самосопряженного расширения $\tilde{S} \supset S$.

75. Для того чтобы изометрический оператор V был простым, необходимо, чтобы подпространство $(\mathrm{Dom}\, V)^{\perp}$ было порождающим для любого унитарного расширения $\tilde{V} \supset V^{-1}$, и достаточно, чтобы оно было порождающим для какого-нибудь унитарного расширения $\tilde{V} \supset V^{-1}$.

§ 3. Обобщенный обратный оператор

Пусть A — произвольный оператор, определенный на всем унитарном пространстве E. Оператор A^{-1} может не существовать, но, сужая A до оператора A_0 с областью определения $\operatorname{Dom} A_0 = (\operatorname{Ker} A)^{\perp}$, получим обратимый оператор $A_0 \subset A$. Однако при этом оператор A_0^{-1} будет, вообще говоря, определен не во всем E. Расширение $A^{(-1)}$ оператора A_0^{-1} на все E, определяемое формулой

$$A^{(-1)} = A_0^{-1} P,$$

где P — ортопроектор на $\operatorname{Im} A$, называется *обобщенным обратным* оператором к A.

76. Если оператор A^{-1} существует, то $A^{(-1)} = A^{-1}$.

77. $\operatorname{Im} A^{(-1)} = (\operatorname{Ker} A)^{\perp}$, $\operatorname{Ker} A^{(-1)} = (\operatorname{Im} A)^{\perp}$.

78. $AA^{(-1)} = P$.

Обозначим через Q ортопроектор на $(\operatorname{Ker} A)^{\perp}$.

79. $A^{(-1)}A = Q$.

80. $A^{(-1)}P = QA^{(-1)} = A^{(-1)}$.

81. Оператор $A^{(-1)}$ удовлетворяет системе независимых уравнений

$$AXA = A, \quad XAX = A, \quad AX = X^*A^*, \quad XA = A^*X^*.$$

82. Система уравнений **81** не имеет решений, отличных от $A^{(-1)}$.

83. $\left[A^{(-1)}\right]^{(-1)} = A$.

84. $[A^*]^{(-1)} = \left[A^{(-1)}\right]^*$.

85. Если оператор B обратим и подпространство $\operatorname{Im} A$ инвариантно относительно B^*B, то $[BA]^{(-1)} = A^{(-1)}B^{-1}$.

86. Если оператор B обратим и подпространство $\operatorname{Ker} A$ инвариантно относительно BB^*, то $[AB]^{(-1)} = B^{-1}A^{(-1)}$.

87. Для того чтобы имело место равенство $A^{(-1)} = A^*$, необходимо и достаточно, чтобы оператор A был частично изометрическим.

Значение обобщенных обратных операторов для решения неоднородного уравнения

$$Ax = y \tag{*}$$

определяется дальнейшими предложениями.

88. Для разрешимости уравнения (*) необходимо и достаточно, чтобы $AA^{(-1)}y = y$.

89. Общее решение однородного уравнения

$$Ax = 0$$

дается формулой $x = \left[I - A^{(-1)}A\right] z \quad (z \in \mathrm{E})$.

90. Если уравнение (*) разрешимо, то его общее решение дается формулой

$$\check{x} = A^{(-1)}y + \left[I - A^{(-1)}A\right] z \qquad (z \in \mathrm{E}).$$

91. При любом y вектор $\check{x}$, определяемый формулой **90**, является решением уравнения (*) в смысле принципа наименьших квадратов, т. е. *)

$$\| A\check{x} - y \| = \min_{x \in \mathrm{E}} \| Ax - y \|.$$

Переходя от векторных уравнений к операторным, можно получить следующее предложение, которое полнее характеризует экстремальные свойства обобщенного обратного оператора.

92. $\left\| AA^{(-1)} - I \right\| = \min\limits_{X \in \mathfrak{M}(\mathrm{E})} \| AX - I \|$.

93. Функционал $p(X) = \| AX - I \|$ имеет единственную точку минимума в $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$.

94. Для любого $B \in \mathfrak{M}(\mathrm{E})$

$$\left\| A\left(A^{(-1)}B\right) - B \right\| = \min_{X \in \mathfrak{M}(\mathrm{E})} \| AX - B \|$$

и минимум достигается только при $X = A^{(-1)}B$.

Понятие обобщенного обратного оператора можно распространить на случай $\operatorname{Dom} A \neq \mathrm{E}$, определяя $A^{(-1)}$ той же формулой, что и при $\operatorname{Dom} A = \mathrm{E}$. При этом теоремы **88—94** остаются в силе.

§ 4. Теория расширений эрмитовых и изометрических операторов

Прямая сумма операторов A_1 и A_2 в унитарном пространстве E называется *ортогональной*, если $\operatorname{Dom} A_1 \perp \operatorname{Dom} A_2$. Ортогональная сумма операторов обозначается знаком $\oplus$.

---

*) Ср. с задачей чебышевского приближения (§ 3 гл. VIII), а также 127 гл. IV.

95. Формула $\tilde{A}=A\oplus B$, где B пробегает множество всех операторов с областью определения $(\operatorname{Dom} A)^{\perp}$, устанавливает взаимно однозначное соответствие между полными расширениями $\tilde{A}$ оператора A и операторами B.

96. Если V — изометрический оператор, то формула $\tilde{V}=V\oplus B$, где B пробегает множество всех изометрических операторов, для которых

$$\operatorname{Dom} B=(\operatorname{Dom} V)^{\perp}, \quad \operatorname{Im} B=(\operatorname{Im} V)^{\perp},$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между унитарными расширениями $\tilde{V}$ оператора V и операторами B.

97. Если S — эрмитов оператор, то формула

$$\tilde{S}=S\oplus(S^*+A),$$

где A пробегает множество всех самосопряженных операторов в подпространстве $(\operatorname{Dom} S)^{\perp}$, устанавливает взаимно однозначное соответствие между самосопряженными расширениями $\tilde{S}$ оператора S и операторами A.

Заметим, что из **96** непосредственно вытекает описание всех изометрических расширений оператора V:

98. Если V — изометрический оператор, то формула $\tilde{V}=V\oplus B$, где B пробегает множество всех изометрических операторов, для которых

$$\operatorname{Dom} B\subset(\operatorname{Dom} V)^{\perp}, \quad \operatorname{Im} B\subset(\operatorname{Im} V)^{\perp},$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между изометрическими расширениями $\tilde{V}$ оператора V и операторами B.

В отличие от **98** предложение **97** непосредственно не приводит к описанию всех эрмитовых расширений оператора S. Последнее можно получить с помощью преобразования Кэли, которое для случая самосопряженных и унитарных операторов уже было определено ранее (см. § 6 гл. III).

Преобразование Кэли V_{ω} эрмитова оператора S называется оператор

$$V_{\omega}=(S-\bar{\omega}I)(S-\omega I)^{-1},$$

где $\mathfrak{Im}\,\omega\neq 0$.

99. Оператор V_ω изометрический и

$$\operatorname{Dom} V_\omega = \operatorname{Im}(S - \omega I), \quad \operatorname{Im} V_\omega = \operatorname{Im}(S - \bar{\omega} I).$$

100. Единица не является собственным значением оператора V_ω.

101. Оператор S выражается через свое преобразование Кэли V_ω по формуле

$$S = (\omega V_\omega - \bar{\omega} I)(V_\omega - I)^{-1}.$$

Если V — изометрический оператор, для которого единица не является собственным значением, то при $\mathfrak{Im}\,\omega \neq 0$ существует оператор

$$S_\omega = (\omega V - \bar{\omega} I)(V - I)^{-1},$$

называемый *преобразованием Кэли* изометрического оператора V.

102. Оператор S_ω эрмитов и

$$\operatorname{Dom} S_\omega = \operatorname{Im}(V - I), \quad \operatorname{Im} S_\omega = \operatorname{Im}(\omega V - \bar{\omega} I).$$

103. Оператор V выражается через свое преобразование Кэли S_ω по формуле

$$V = (S_\omega - \bar{\omega} I)(S_\omega - \omega I)^{-1}.$$

Заметим, что формулы для введенных выше преобразований Кэли, в отличие от соответствующих формул § 6 гл. III, не допускают, вообще говоря, перестановки сомножителей.

104. Для того чтобы эрмитов оператор был простым, необходимо и достаточно, чтобы было простым его преобразование Кэли.

105. Если $\tilde{S}$ есть эрмитово (самосопряженное) расширение эрмитова оператора S, то преобразование Кэли оператора $\tilde{S}$ является изометрическим (соответственно унитарным) расширением преобразования Кэли оператора S.

106. Если $\tilde{V}$ есть изометрическое (унитарное) расширение изометрического оператора V и единица не является собственным значением оператора $\tilde{V}$, то преобразование Кэли оператора $\tilde{V}$ является эрмитовым (соответственно унитарным) расширением преобразования Кэли оператора V.

107. Если S — эрмитов оператор и число λ не является его собственным значением (в частности, если $\mathfrak{Im}\,\lambda \neq 0$), то $\operatorname{rg}(S-\lambda I)+\delta(S)=n$.

Таким образом:

108. Число $\operatorname{rg}(S-\lambda I)$ не зависит от λ при $\lambda \overline{\in} \sigma(S)$.

Подпространство

$$N_\lambda = (\operatorname{Im}(S-\lambda I))^{\perp}$$

при $\lambda \overline{\in} \sigma(S)$ называется *дефектным подпространством* оператора S в точке λ. Предложение **108** есть теорема об инвариантности размерности дефектного подпространства.

109. Дефектное подпространство N_λ совпадает с множеством решений уравнения

$$S^* x = \bar{\lambda} P x,$$

где P — ортопроектор на $\operatorname{Dom} S$.

110. Для самосопряженности эрмитова оператора S необходимо и достаточно, чтобы его дефектное число равнялось нулю.

111. Если V_λ есть преобразование Кэли эрмитова оператора S, то

$$(\operatorname{Dom} V_\lambda)^{\perp} = N_\lambda, \quad (\operatorname{Im} V_\lambda)^{\perp} = N_{\bar{\lambda}} \qquad (\mathfrak{Im}\,\lambda \neq 0).$$

Из **111** следует, что дефектное число является инвариантом преобразования Кэли.

Теперь из **98** вытекает следующее описание эрмитовых расширений оператора S:

112. Пусть V_λ преобразование Кэли оператора S. Положим $\tilde{V}_\lambda = V_\lambda \oplus B$, где B — изометрический оператор, $\operatorname{Dom} B \subset N_\lambda$, $\operatorname{Im} B \subset N_{\bar{\lambda}}$, и такой, что единица не является собственным значением оператора $\tilde{V}_\lambda$. Тогда формула

$$\tilde{S} = (\lambda \tilde{V}_\lambda - \bar{\lambda} I)(\tilde{V}_\lambda - I)^{-1}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между эрмитовыми расширениями $\tilde{S}$ оператора S и операторами B.

Дальнейшие построения имеют целью заменить условие $1 \overline{\in} \sigma(\tilde{V}_\lambda)$ более обозримым ограничением на оператор B. Окончательный результат содержится в **119**.

113. $N_\lambda \cap \mathrm{Dom}\, S = 0$.

114. Если Q_λ — ортопроектор на N_λ, то

$$V_\lambda Q_\lambda x = Q_{\bar\lambda} x \qquad (x \in (\mathrm{Dom}\, S)^\perp).$$

115. Формулы

$$\begin{cases} y = Q_\lambda x, \\ W y = Q_{\bar\lambda} x \end{cases} \qquad (x \in (\mathrm{Dom}\, S)^\perp)$$

определяют изометрический оператор $W = W_\lambda$ с областью определения $\mathrm{Dom}\, W_\lambda = N_\lambda$ и областью значений $\mathrm{Im}\, W_\lambda = N_{\bar\lambda}$.

116. Пусть $\tilde V_\lambda$ — изометрическое расширение преобразования Кэли V_λ оператора S. Если существует вектор

$$y \in \mathrm{Dom}\, W_\lambda \cap \mathrm{Dom}\, \tilde V_\lambda \qquad (y \neq 0)$$

такой, что $\tilde V_\lambda y = W_\lambda y$, то единица является собственным значением оператора $\tilde V_\lambda$.

Это предложение легко обратить, заметив сначала, что:

117. Если $\tilde V_\lambda x = x$, то $x \in (\mathrm{Dom}\, S)^\perp$.

118. Если единица является собственным значением оператора $\tilde V_\lambda$, то существует вектор

$$y \in \mathrm{Dom}\, W_\lambda \cap \mathrm{Dom}\, \tilde V_\lambda \qquad (y \neq 0)$$

такой, что $\tilde V_\lambda y = W_\lambda y$.

Теперь **112** можно представить в следующем виде:

119. Пусть $\mathfrak{B}$ — множество всех изометрических операторов B с $\mathrm{Dom}\, B \subset N_\lambda$, $\mathrm{Im}\, B \subset N_{\bar\lambda}$, удовлетворяющих условию $(B - W_\lambda)\, y \neq 0 \quad (y \neq 0)$. Тогда формула

$$\tilde S = (\lambda \tilde V_\lambda - \bar\lambda I)(\tilde V_\lambda - I)^{-1},$$

где $\tilde V_\lambda = V_\lambda \oplus B$, устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством эрмитовых расширений $\tilde S$ оператора S и множеством $\mathfrak{B}$.

120. Для того чтобы в **119** расширение $\tilde S$ было самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{Dom}\, B = N_\lambda$.

Полученные результаты можно также выразить параметрическими **формулами Неймана**:

121. Если расширение $\tilde{S}$ соответствует оператору $B \in \mathfrak{B}$. то любой $x \in \operatorname{Dom} \tilde{S}$ однозначно представим в виде

$$x = u + v - Bv \qquad (u \in \operatorname{Dom} S,\ v \in \operatorname{Dom} B)$$

и

$$\tilde{S}x = Su + \bar{\lambda}v - \lambda Bv.$$

§ 5. Самосопряженные расширения с сохранением нормы

Согласно гл. IV норма оператора A как гомоморфизма определяется соотношением

$$\| A \| = \max_{x \in \operatorname{Dom} A} \frac{\| Ax \|}{\| x \|}.$$

Далее, как и в гл. IV, имеет место:

122. $\| A \| = \max\limits_{\substack{x \in \operatorname{Dom} A, \\ y \in E}} \dfrac{|(Ax, y)|}{\| x \| \, \| y \|}$.

123. $\| A^* \| = \| A \|$.

124. Если $B \supset A$, то $\| B \| \geqslant \| A \|$.

«Продолжение нулем» сохраняет норму оператора:

125. Оператор $\tilde{A} = A \oplus C$, где $\operatorname{Dom} C = (\operatorname{Dom} A)^{\perp}$ и $C = 0$, есть расширение оператора A на все пространство с сохранением нормы: $\| \tilde{A} \| = \| A \|$ (ср. **72** гл. IV).

126. Если оператор S эрмитов и $\operatorname{Im} S \subset \operatorname{Dom} S$, то его расширение $\tilde{S}$ по формуле **125** является самосопряженным. При этом $\tilde{S} = S^*$.

Переходя к построению теории самосопряженных расширений с сохранением нормы для произвольного эрмитова оператора S, будем, не ограничивая общности, считать

$$\| S \| = 1.$$

При этом сначала примиримся с малым увеличением нормы, имея в виду впоследствии избавиться от него с помощью предельного перехода.

Представим оператор S в виде $S = S_1 + S_2$, где $S_1 = PS$, $S_2 = P^{\perp}S$ (P — ортопроектор на $\operatorname{Dom} S$), и будем в отдельности расширять S_1 и S_2.

127. Оператор $A_1 = S_1^*$ есть полное расширение оператора S_1 с нормой $\| A_1 \| \leqslant 1$.

128. Пусть $0 < \rho < 1$ и $\mathrm{G}_\rho = \left[\operatorname{Im}(I - \rho S_1^2)\right]^\perp$. Тогда

$$\operatorname{Dom} S \dotplus \mathrm{G}_\rho = \mathrm{E}.$$

Введем проектор R на подпространство $\operatorname{Dom} S$ параллельно подпространству G_ρ.

129. Оператор $A_2 = S_2 R$ есть полное расширение оператора S_2 и удовлетворяет неравенству

$$\| A_2 x \|^2 \leqslant \| x \|^2 - \rho^2 \| A_1 x \|^2.$$

130. Оператор $A = A_1 + A_2$ есть полное расширение оператора S и $\| A \| \leqslant 1 + \varepsilon$, где $\varepsilon = 1 - \rho^2$.

131. Оператор A^* является расширением оператора S.

132. Оператор $\tilde{S} = \frac{1}{2}(A + A^*)$ является самосопряженным расширением оператора S и $\| \tilde{S} \| \leqslant 1 + \varepsilon$ $(\varepsilon = 1 - \rho^2)$.

Отсюда с помощью предельного перехода $\rho \to 1$ получаем следующий фундаментальный результат:

133. Любой эрмитов оператор допускает самосопряженное расширение с сохранением нормы.

Однако, получив **133** из **132** путем предельного перехода, мы утратили конструкцию, ибо при $\rho = 1$ не верно **128** и, следовательно, теряют смысл дальнейшие построения. Для получения конструктивной формы теоремы существования **133** используем технику фактор-пространств.

Определяя A_1 как в **127**, введем оператор $I - A_1^* A_1 \geqslant 0$ и положим $\operatorname{Ker}(I - A_1^* A_1) = \mathrm{L}$.

Далее образуем фактор-пространство E / L и превратим его в унитарное пространство, вводя скалярное произведение по формуле

$$\langle [x], [y] \rangle = \left(\{I - A_1^* A_1\} x, y\right).$$

134. Если $x, y \in \operatorname{Dom} S$ и $x \equiv y \pmod{\mathrm{L}}$, то $S_2 x = S_2 y$.

Тем самым S_2 можно рассматривать как гомоморфизм из $\operatorname{Dom} S / \mathrm{L}$ в $(\operatorname{Dom} S)^\perp$.

135. Пусть A_2 есть расширение гомоморфизма

$$S_2 \in \operatorname{Hom}(\operatorname{Dom} S / \mathrm{L}, (\operatorname{Dom} S)^\perp)$$

на все E/L, определяемое равенством $A_2 = S_2Q$, где Q—ортопроектор в E/L на $\operatorname{Dom} S/L$. Тогда при любом $[x] \in E/L$

$$(A_2[x],\ A_2[x]) \leqslant \langle [Q[x],\ Q[x] \rangle.$$

136. $\|A_2\| \leqslant 1$.

Теперь для получения неравенства **129** с $\rho = 1$ остается превратить естественным образом гомоморфизм

$$A_2 \in \operatorname{Hom}\left(E/L,\ (\operatorname{Dom} S)^{\perp}\right)$$

в оператор $A_2 \in \mathfrak{M}(E)$.

С этой целью положим $A_2x = A_2[x]$ $(x \in E)$.

137. Оператор A_2 есть полное расширение оператора S_2 и удовлетворяет неравенству $\|A_2x\|^2 \leqslant \|x\|^2 - \|A_1x\|^2$.

Остается сделать два очевидных шага, соответствующих **130** и **131**.

138. Оператор $A = A_1 + A_2$ есть полное расширение оператора S и $\|A\| \leqslant 1$.

139. Оператор A^* является расширением оператора S.

Теперь мы получаем усиление теоремы **132**:

140. Оператор $\tilde{S} = \frac{1}{2}(A + A^*)$ является самосопряженным расширением оператора S и $\|\tilde{S}\| = 1$.

Обозначим через $\mathfrak{W}$ множество всех самосопряженных расширений оператора S с сохранением нормы.

141. Множество $\mathfrak{W}$ выпукло.

Поэтому:

142. Если самосопряженное расширение с сохранением нормы не единственно, то множество таких расширений бесконечно.

Отметим один простой частный признак неединственности самосопряженного расширения с сохранением нормы:

143. Если хотя бы одно из чисел $\lambda = \pm 1$ не является собственным значением эрмитова оператора S, то самосопряженное расширение $\tilde{S} \supset S$ с сохранением нормы не единственно.

К общим критериям единственности мы перейдем после исследования структуры множества $\mathfrak{W}$.

144. Пусть $\tilde{S} \in \mathfrak{W}$. Для того чтобы $T \in \mathfrak{W}$, необходимо и достаточно, чтобы оператор T был представим в виде

$T = \tilde{S} + C$, где C — самосопряженный оператор, удовлетворяющий условиям

$$\operatorname{Ker} C \supset \operatorname{Dom} S, \quad -(I+\tilde{S}) \leqslant C \leqslant (I-\tilde{S}).$$

Теперь естественно воспользоваться результатами **204—207** гл. VIII.

145. Пусть $T \in \mathfrak{W}$ и $Q_{1,2}$ — ортопроекторы на ортогональные дополнения подпространств $(I \pm \tilde{S}) \operatorname{Dom} S$ соответственно. Тогда операторы

$$S' = \tilde{S} - (I+\tilde{S})^{1/2} Q_1 (I+\tilde{S})^{1/2}$$

и

$$S'' = \tilde{S} + (I-\tilde{S})^{1/2} Q_2 (I-\tilde{S})^{1/2}$$

принадлежат $\mathfrak{W}$.

146. Для того чтобы самосопряженное расширение T оператора S принадлежало $\mathfrak{W}$, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло неравенству

$$S' \leqslant T \leqslant S''.$$

Отсюда, между прочим, вытекает, что построенные в **145** операторы S' и S'' не зависят от выбора расширения $\tilde{S} \in \mathfrak{W}$. Следующее предложение позволит улучшить результат **146**.

147. Любой самосопряженный оператор T, удовлетворяющий неравенству **146**, является расширением оператора S.

Таким образом, окончательное описание всех самосопряженных расширений оператора S с сохранением нормы принимает следующий вид:

148. Множество $\mathfrak{W}$ есть замкнутый интервал $[S', S'']$ в упорядоченном пространстве $\mathfrak{S}(\mathrm{E})$ (теорема М. Г. Крейна).

149. Для того чтобы оператор $\tilde{S}$ был единственным самосопряженным расширением оператора S с сохранением нормы, необходимо и достаточно, чтобы

$$(I+\tilde{S})^{1/2} Q_1 (I+\tilde{S})^{1/2} = 0, \quad (I-\tilde{S})^{1/2} Q_2 (I-\tilde{S})^{1/2} = 0.$$

Недостаток полученного критерия единственности состоит в том, что он сформулирован в терминах $\tilde{S}$, а не S. Предложение **149** мы используем как промежуточный результат для получения критерия в терминах самого S.

150. Если в **145** заменить $\tilde{S}$ на $\tilde{S}_0 = \frac{1}{2}(S' + S'')$, то будет

$$(I + \tilde{S}_0)^{1/2} Q_1 (I + \tilde{S}_0)^{1/2} = (I - \tilde{S}_0)^{1/2} Q_2 (I - \tilde{S}_0)^{1/2}.$$

151. Пусть $x_0 \in \operatorname{Dom} S$ и $\|x_0\| = 1$, $\|Sx_0\| = 1$. Тогда при любом $T \in \mathfrak{W}$ имеет место представление $x_0 = x_1 + x_2$, где $Tx_1 = x_1$, $Tx_2 = -x_2$.

152. Если оператор $\tilde{S}_0$ определен как в **150**, а вектор x_0 — как в **151**, то при любом $y \neq 0$ из области значений оператора $(I - \tilde{S}_0)^{1/2} Q_2 (I - \tilde{S}_0)^{1/2}$ будет $(Sx_0, y) = 0$.

153. Если для всех векторов x_0, удовлетворяющих условиям **151**, при некотором $y \in (\operatorname{Dom} S)^{\perp}$, $y \neq 0$, выполняется соотношение $(Sx_0, y) = 0$, то самосопряженное расширение оператора с сохранением нормы не единственно.

При доказательстве **153** удобно вначале рассмотреть случай $\delta(S) = 1$.

Окончательный критерий единственности имеет вид:

154. Для того чтобы оператор S допускал единственное самосопряженное расширение с сохранением нормы, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $y \in (\operatorname{Dom} S)^{\perp}$, $y \neq 0$, существовал такой вектор x, удовлетворяющий условиям $x \in \operatorname{Dom} S$, $\|x\| = 1$, $\|Sx\| = 1$, что $(Sx, y) = 0$.

§ 6. Спектры самосопряженных и унитарных расширений

В этом параграфе S означает эрмитов оператор с дефектным числом $\delta(S) = m$.

Интервал (α, β) $(-\infty < \alpha < \beta < \infty)$ называется *спектральной лакуной* (или *люком*) эрмитова оператора S, если

$$\left\| Sx - \frac{\alpha + \beta}{2} x \right\| \geqslant \frac{\beta - \alpha}{2} \|x\| \qquad (x \in \operatorname{Dom} S).$$

155. Спектральная лакуна не содержит собственных значений.

При $m = 0$ верно и обратное:

156. Если интервал (α, β) не содержит собственных значений самосопряженного оператора, то (α, β) — его спектральная лакуна.

При $m > 0$ можно лишь утверждать, что:

157. Если вещественная точка λ_0 не является собственным значением оператора S, то некоторая окрестность этой точки является спектральной лакуной оператора S.

Если при всех $x \in \operatorname{Dom} S$

$$a(x, x) \leqslant (Sx, x) \leqslant b(x, x),$$

то интервалы $(-\infty, a)$ и (b, ∞) называются *полубесконечными спектральными лакунами* оператора S. Предложения **155—156** очевидным образом переносятся на случай полубесконечных лакун.

Ближайшие предложения основаны на оценке размерности пересечения $\operatorname{Dom} S \cap \mathrm{F}$ при условии

$$\dim \mathrm{F} > \delta(S),$$

где подпространство F выбирается подходящим образом.

158. Сумма кратностей собственных значений любого самосопряженного расширения $\tilde{S} \supset S$, лежащих в спектральной лакуне (α, β) оператора S, не превосходит m.

159. Сумма кратностей собственных значений любого самосопряженного расширения $\tilde{S} \supset S$, лежащих в полубесконечной спектральной лакуне оператора S, не превосходит m.

160. Сумма кратностей собственных значений любого самосопряженного расширения $\tilde{S} \supset S$, по модулю бóльших $\|S\|$, не превосходит m.

161. Если ν есть максимальная размерность подпространств $\mathrm{L} \subset \operatorname{Dom} S$, на которых

$$\left\| Sx - \frac{\alpha+\beta}{2} x \right\| < \frac{\beta-\alpha}{2} \|x\| \qquad (x \neq 0),$$

то сумма кратностей собственных значений любого самосопряженного расширения $\tilde{S} \supset S$, лежащих в интервале (α, β), не превосходит $\nu + m$.

162. В условиях **161** сумма кратностей собственных значений любого самосопряженного расширения $\tilde{S} \supset S$, лежащих в интервале (α, β), не менее ν.

163. Если ν — максимальная размерность подпространств $\mathrm{L} \subset \mathrm{E}$, на которых $(Sx, x) < a(x, x)$ $(x \neq 0)$, то сумма кратностей собственных значений любого самосопряженного расширения $\tilde{S} \supset S$, лежащих левее точки a, не превосходит $\nu + m$.

164. В условиях **163** сумма кратностей собственных значений любого самосопряженного расширения $\tilde{S} \supset S$, лежащих левее точки a, не менее ν.

165. Если ν — максимальная размерность подпространств $\mathrm{L} \subset \mathrm{E}$, на которых $\|Sx\| > \rho\|x\|$ $(x \neq 0)$, то сумма кратностей собственных значений любого самосопряженного расширения, по модулю бо́льших ρ, не превосходит $\nu + m$.

166. В условиях **165** сумма кратностей собственных значений любого самосопряженного расширения, по модулю бо́льших ρ, не менее ν.

167. Если некоторый интервал (α, β) содержит (с учетом кратности) r собственных значений некоторого самосопряженного расширения $\tilde{S} \supset S$, то этот интервал содержит (с учетом кратности) не менее $r - m$ собственных значений любого другого самосопряженного расширения оператора S.

168. При $m = 1$ спектры двух любых самосопряженных расширений оператора S перемежаются.

169. Для строгой перемежаемости спектров в **168** необходима и достаточна простота оператора S.

Перейдем к некоторым задачам на построение самосопряженных расширений с заданными спектральными свойствами.

170. Пусть $\mathrm{Ker}\, S = 0$, $(\mathrm{Dom}\, S)^{\perp} \cap \mathrm{Im}\, S = 0$. Тогда

$$\mathrm{Dom}\, S \dot{+} (\mathrm{Im}\, S)^{\perp} = \mathrm{E}.$$

171. В условиях **170** расширение $\tilde{S} \supset S$, определяемое соотношением $\tilde{S}x = 0$ $\left(x \in (\mathrm{Im}\, S)^{\perp}\right)$, является самосопряженным.

Положим $\mathrm{L}_\lambda = (\mathrm{Dom}\, S)^{\perp} \cap \mathrm{N}_\lambda^{\perp}$.

172. Если вещественное число λ не является собственным значением оператора S и $\mathrm{L}_\lambda = 0$, то существует самосопряженное расширение $\tilde{S} \supset S$, для которого число λ является собственным значением кратности m.

Обратно:

173. Если вещественное число λ не является собственным значением оператора S и существует самосопряженное расширение $\tilde{S} \supset S$, для которого число λ является собственным значением кратности m, то $\mathrm{L}_\lambda = 0$.

174. Если число λ является r-кратным собственным значением оператора S и $L_\lambda = 0$, то существует самосопряженное расширение $\tilde{S} \supset S$, для которого число λ является собственным значением кратности $r+m$.

Обратно:

175. Если число λ является r-кратным собственным значением оператора S и существует самосопряженное расширение $\tilde{S} \supset S$, для которого число λ является собственным значением кратности $r+m$, то $\mathrm{L}_\lambda = 0$.

176. Если вещественное число λ не является собственным значением оператора S и $\dim \mathrm{L}_\lambda = s < m$, то существует самосопряженное расширение $\tilde{S} \supset S$, для которого число λ является $(m-s)$-кратным собственным значением.

Обратно:

177. Если вещественное число λ не является собственным значением оператора S и максимальная кратность собственного значения λ в спектрах $\sigma(\tilde{S})$ всевозможных самосопряженных расширений $\tilde{S} \supset S$ равна $m-s>0$, то $\dim \mathrm{L}_\lambda = s$.

178. Если число λ является собственным значением оператора S кратности $r<m$ и $\dim \mathrm{L}_\lambda = s < m+r$, то существует самосопряженное расширение $\tilde{S} \supset S$, для которого число λ является собственным значением кратности $m+r-s$.

Обратно:

179. Если число λ является собственным значением оператора S кратности $r<m$ и максимальная кратность собственного значения λ в спектрах $\sigma(\tilde{S})$ всевозможных самосопряженных расширений $\tilde{S} \supset S$ равна $m+r-s>0$, то $\dim \mathrm{L}_\lambda = s$.

180. Если вещественное число λ удовлетворяет неравенству

$$\lambda(x, x) < (Sx, x) \qquad (x \in \mathrm{Dom}\, S,\ x \neq 0),$$

то подпространства $\mathrm{Dom}\, S$ и N_λ взаимно независимы.

181. В условиях 180 $\mathrm{Dom}\, S \dot{+} \mathrm{N}_\lambda = \mathrm{E}$.

182. Оператор $\tilde{S} \supset S$, определяемый в условиях 180 равенством $\tilde{S}x = \lambda x$ $(x \in \mathrm{N}_\lambda)$, является самосопряженным расширением оператора S.

Таким образом (если еще учесть 159) установлено:

183. Если точка λ принадлежит одной из полубесконечных лакун $(-\infty, a)$ или (b, ∞) оператора S, то существует самосопряженное расширение $\tilde{S} \supset S$, для которого число λ

является собственным значением кратности m. Любое такое расширение не имеет других собственных значений в соответствующей лакуне.

Для дальнейшего удобно специализировать **183**:

184. Если $S \geqslant 0$ и $\lambda < 0$, то существует самосопряженное расширение $\tilde{S} \supset S$, для которого число λ является собственным значением кратности m. Любое такое расширение не имеет других отрицательных собственных значений.

185. Если $\lambda > \|S\|$, то существует самосопряженное расширение $\tilde{S} \supset S$, для которого число λ является собственным значением кратности m. Любое такое расширение не имеет других собственных значений, превосходящих $\|S\|$ по модулю.

Заметим, что с помощью предельного перехода $\lambda \to \|S\|$ из **185** можно снова получить **133**, но аналогичный предельный переход $\lambda \to 0$ в **184** возможен не всегда, и самосопряженные расширения, сохраняющие нижнюю грань оператора, могут не существовать.

Развитие приема, описанного в **180**—**182**, позволяет получить следующее обобщение теоремы **184**.

186. Если $S \geqslant 0$, то для произвольно заданных отрицательных λ_k и натуральных $r_k (k = 1, \ldots, p)$,

$$\sum_{k=1}^{p} r_k = m,$$

существует самосопряженное расширение $\tilde{S} \supset S$, для которого числа λ_k являются собственными значениями кратности r_k $(k = 1, \ldots, p)$. Любое такое расширение не имеет других отрицательных собственных значений.

187. Расширение $\tilde{S}$ в **186** определяется однозначно тогда и только тогда, когда $m = 1$.

Результат **186** можно очевидным образом переформулировать на случай произвольной полубесконечной лакуны. В **191** этот результат переносится на область $\lambda > \|S\|$ с помощью теорем **188** и **189** о дробно-линейном преобразовании.

188. Если оператор S эрмитов и $\|S\| < 1$, то оператор

$$T = (I + S)(I - S)^{-1}$$

с областью определения $\operatorname{Dom} T = \operatorname{Im}(I - S)$ также эрмитов и $T > 0$. При этом $\delta(T) = \delta(S)$.

Обратно:

189. Если оператор T эрмитов и $T > 0$, то оператор

$$S = (T - I)(T + I)^{-1}$$

с областью определения $\operatorname{Dom} S = \operatorname{Im}(T + I)$ также эрмитов и $\|S\| < 1$. При этом $\delta(S) = \delta(T)$.

190. Если спектр самосопряженного расширения $\widetilde{T}$ оператора $T < 0$ не содержит точку $\lambda = -1$, то оператор

$$\widetilde{S} = (\widetilde{T} - I)(\widetilde{T} + I)^{-1}$$

является самосопряженным расширением оператора

$$S = (T - I)(T + I)^{-1}.$$

191. Для произвольно заданных вещественных λ_k, таких, что $|\lambda_k| > \|S\|$, и натуральных r_k $(k = 1, \ldots, p)$

$$\sum_{k=1}^{p} r_k = m$$

существует самосопряженное расширение $\widetilde{S} \supset S$, для которого числа λ_k являются собственными значениями кратности r_k. Любое такое расширение не имеет других собственных значений, превосходящих $\|S\|$ по модулю.

192. Расширение $\widetilde{S}$ в **191** определяется однозначно тогда и только тогда, когда $m = 1$.

193. Если вещественные последовательности $\{\lambda'_k\}_{k=1}^{n}$ и $\{\lambda''_k\}_{k=1}^{n}$ перемежаются, то существуют эрмитов оператор S с дефектным числом $m = 1$ и самосопряженные расширения $\widetilde{S}_1 \supset S$, $\widetilde{S}_2 \supset S$ такие, что

$$\sigma(\widetilde{S}_1) = \{\lambda'_k\}_{k=1}^{n}, \quad \sigma(\widetilde{S}_2) = \{\lambda''_k\}_{k=1}^{n}.$$

Обратная спектральная задача **193** имеет в существенном единственное решение:

194. Оператор S в **193** определяется двумя заданными спектрами однозначно с точностью до унитарного подобия.

В дальнейшем V означает изометрический оператор с дефектным числом $\delta(V) = m$.

Дугу *) $(e^{i\alpha}, e^{i\beta})$ $(0 \leqslant \alpha < \beta)$ единичной окружности назовем *спектральной лакуной* (или *люком*) изометрического оператора V, если

$$\left\| Vx - e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} x \right\| \geqslant 2 \sin \frac{\beta-\alpha}{4} \| x \| \qquad (x \in \operatorname{Dom} V).$$

195. Если две дуги в совокупности покрывают единичную окружность, то хотя бы одна из них не является спектральной лакуной.

196. Спектральная лакуна не содержит собственных значений. При $m=0$ верно и обратное:

197. Если дуга единичной окружности не содержит собственных значений унитарного оператора, то она является его спектральной лакуной.

При $m>0$ можно лишь утверждать, что:

198. Если точка λ_0 $(|\lambda_0|=1)$ не является собственным значением оператора V, то некоторая дуга единичной окружности, содержащая эту точку, является спектральной лакуной оператора V.

199. Сумма кратностей собственных значений любого унитарного расширения $\tilde{V} \supset V$, лежащих в спектральной лакуне оператора V, не превосходит m.

200. Если ν — максимальная размерность подпространств $L \subset \operatorname{Dom} V$, на которых

$$\left\| Vx - e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} x \right\| < 2 \sin \frac{\beta-\alpha}{4} \| x \| \qquad (x \neq 0),$$

то сумма кратностей собственных значений любого унитарного расширения $\tilde{V} \supset V$, лежащих на дуге $(e^{i\alpha}, e^{i\beta})$, не превосходит $\nu+m$.

201. В условиях **200** сумма кратностей собственных значений любого унитарного расширения $\tilde{V} \supset V$, лежащих на дуге $(e^{i\alpha}, e^{i\beta})$, не менее ν.

202. Если дуга единичной окружности содержит (с учетом кратности) r собственных значений некоторого унитарного расширения $\tilde{V} \supset V$, то эта дуга содержит (с учетом кратности) не менее $r-m$ собственных значений любого другого унитарного расширения оператора V.

*) Дугу мы всегда считаем открытой.

203. При $m=1$ спектры двух любых унитарных расширений оператора V перемежаются.

204. Для строгой перемежаемости спектров в **203** необходима и достаточна простота оператора V.

Рассмотрим несколько задач на построение унитарных расширений с заданными спектральными свойствами.

205. Если $\left(e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)$ — спектральная лакуна изометрического оператора V, то его преобразование Кэли

$$S=i(V+I)(V-I)^{-1}$$

есть эрмитов оператор с нормой $\|S\|\leqslant 1$. При этом $\delta(S)=\delta(V)$.

206. Если эрмитов оператор S удовлетворяет неравенству $\|S\|\leqslant 1$, то дуга $\left(e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)$ является спектральной лакуной его преобразования Кэли

$$V=(S+iI)(S-iI)^{-1}$$

и

$$\delta(V)=\delta(S).$$

207. Для произвольно заданных чисел λ_k ($|\lambda_k|=1$), лежащих в спектральной лакуне изометрического оператора V, и натуральных r_k $\left(k=1, \ldots, p;\ \sum_{k=1}^{p} r_k=m\right)$ существует унитарное расширение $\widetilde{V}\supset V$, для которого числа λ_k являются собственными значениями кратности r_k. Любое такое расширение не имеет в этой лакуне других собственных значений.

Из **207**, в частности, следует:

208. Если число λ_0 ($|\lambda_0|=1$) не является собственным значением оператора V, то существует унитарное расширение $\widetilde{V}\supset V$, для которого число λ_0 является собственным значением кратности m.

209. Каковы бы ни были числа λ_k ($|\lambda_k|=1$; $k=1, \ldots, m$), существует унитарное расширение $\widetilde{V}\supset V$, для которого числа λ_k являются простыми собственными значениями.

210. Расширение $\widetilde{V}$ в **207** определяется однозначно тогда и только тогда, когда $m=1$.

Из **207** предельным переходом можно получить:

211. Среди унитарных расширений изометрического оператора V со спектральной лакуной $(e^{i\alpha}, e^{i\beta})$ существует расширение, сохраняющее эту спектральную лакуну.

212. Если последовательности $\{\lambda'_k\}_{k=1}^n$ и $\{\lambda''_k\}_{k=1}^n$ точек на единичной окружности перемежаются, то существуют изометрический оператор V с дефектным числом $m=1$ и унитарные расширения $\tilde{V}_1 \supset V$, $\tilde{V}_2 \supset V$ такие, что

$$\sigma(\tilde{V}_1) = \{\lambda'_k\}_{k=1}^n, \qquad \sigma(\tilde{V}_2) = \{\lambda''_k\}_{k=1}^n.$$

213. Оператор V в **212** определяется двумя заданными спектрами однозначно с точностью до унитарного подобия.

§ 7. Квазисамосопряженные и квазиунитарные расширения

Полное расширение $\tilde{S}$ эрмитова оператора S называется *квазисамосопряженным*, если $S \subset \tilde{S}^*$. *Рангом несамосопряженности* любого оператора A, определенного на всем пространстве E, называется $\mathrm{rg}(A - A^*)$.

214. Ранг несамосопряженности любого квазисамосопряженного расширения $\tilde{S}$ эрмитова оператора S не превосходит его дефектного числа m.

215. Любой оператор A с рангом несамосопряженности m является квазисамосопряженным расширением некоторого эрмитова оператора S с дефектным числом m.

216. Пусть A — линейный оператор, определенный на всем E. Среди подпространств $\mathrm{L} \subset \mathrm{E}$, которые инвариантны относительно A и A^* и на которых $Ax = A^*x$, существует наибольшее.

Обозначим его через L_A.

217. Сужение $A \mid \mathrm{L}_A$ является самосопряженным оператором.

Это сужение называется *самосопряженной компонентой* оператора A. При $\mathrm{L}_A = 0$ оператор A называется *простым несамосопряженным*. Сужение $A \mid \mathrm{L}_A^{\perp}$ является максимальной простой несамосопряженной частью оператора A.

218. $\mathrm{L}_A = \mathrm{L}_{A^*}$.

219. $\mathrm{L}_A \subset \mathrm{Ker}(A - A^*)$.

220. $\mathrm{L}_A^\perp = \sum_{k=0}^{n-1} A^k \{\mathrm{Im}(A - A^*)\}$.

221. Подпространство $\mathrm{L}_A^\perp$ инвариантно относительно A и сужение $A \mid \mathrm{L}_A^\perp$ является простым несамосопряженным оператором.

222. Спектры двух различных квазисамосопряженных расширений простого эрмитова оператора S с дефектным числом $\delta(S) = 1$ не имеют общих точек (ср. **168**, **169**).

Расширение $\tilde{V}$ изометрического оператора V на все пространство E называется *квазиунитарным*, если $\tilde{V}^* V \subset I$. *Рангом неунитарности* любого оператора B, определенного на всем E, называется $\mathrm{rg}(I - B^*B)$.

223. Ранг неунитарности любого квазиунитарного расширения $\tilde{V}$ изометрического оператора V не превосходит его дефектного числа m.

224. Любой оператор B с рангом неунитарности m является квазиунитарным расширением некоторого изометрического оператора V с дефектным числом m.

225. Пусть B — произвольный линейный оператор, определенный на всем E. Среди подпространств $\mathrm{M} \subset \mathrm{E}$, которые инвариантны относительно B и B^* и на которых $B^*Bx = x$, существует наибольшее.

Обозначим его через M_B.

226. Сужение $B \mid \mathrm{M}_B$ является унитарным оператором.

Это сужение называется *унитарной компонентой* оператора B. При $\mathrm{M}_B = 0$ оператор B называется *простым неунитарным*. Сужение $B \mid \mathrm{M}_B^\perp$ является максимальной простой неунитарной частью оператора B.

227. $\mathrm{M}_B = \mathrm{M}_{B^*}$.

228. $\mathrm{M}_B \subset \mathrm{Ker}(I - BB^*) \cap \mathrm{Ker}(I - B^*B)$.

229. $\mathrm{M}_B^\perp = \sum_{k=0}^{n-1} B^k \{\mathrm{Im}(I - BB^*) \cap \mathrm{Im}(I - B^*B)\}$.

230. Подпространство $\mathrm{M}_B^\perp$ инвариантно относительно B и сужение $B \mid \mathrm{M}_B^\perp$ является простым неунитарным оператором.

231. Спектры двух различных квазиунитарных расширений простого изометрического оператора V с дефектным числом $\delta(V) = 1$ не имеют общих точек.

232. Если $\tilde{S}$ — квазисамосопряженное расширение эрмитова оператора S и невещественное число ω не принадлежит спектру $\sigma(\tilde{S})$, то оператор

$$\tilde{V} = (\tilde{S} - \bar{\omega} I)(\tilde{S} - \omega I)^{-1}$$

является квазиунитарным расширением изометрического оператора

$$V = (S - \bar{\omega} I)(S - \omega I)^{-1}$$

и $1 \bar{\in} \sigma(\tilde{V})$.

233. Если $\tilde{V}$ — квазиунитарное расширение изометрического оператора V и $1 \bar{\in} \sigma(\tilde{V})$, то при любом невещественном ω оператор

$$\tilde{S} = (\omega \tilde{V} - \bar{\omega} I)(\tilde{V} - I)^{-1}$$

является квазисамосопряженным расширением эрмитова оператора

$$S = (\omega V - \bar{\omega} I)(V - I)^{-1}$$

и $\omega \bar{\in} \sigma(\tilde{S})$.

234. Если S — эрмитов оператор, числа α, β, γ, δ вещественны и $-\frac{\delta}{\gamma}$ не является собственным значением оператора S, то оператор

$$T = (\alpha S + \beta I)(\gamma S + \delta I)^{-1}$$

также эрмитов и $\delta(T) = \delta(S)$.

235. Если в условиях 232 $\tilde{S}$ есть квазисамосопряженное расширение оператора S и $-\frac{\delta}{\gamma} \bar{\in} \sigma(\tilde{S})$, то оператор

$$\tilde{T} = (\alpha \tilde{S} + \beta I)(\gamma \tilde{S} + \delta I)^{-1}$$

является квазисамосопряженным расширением оператора T.

236. Если V — изометрический оператор, число $\bar{\alpha}^{-1}$ не является собственным значением V и $|\gamma| = 1$, то оператор

$$W = \gamma (V - \alpha I)(I - \bar{\alpha} V)^{-1}$$

также изометрический и $\delta(W) = \delta(V)$.

237. Если в условиях **234** $\tilde{V}$ есть квазиунитарное расширение оператора V и $\bar{\alpha}^{-1} \overline{\in} \sigma(\tilde{V})$, то оператор

$$\tilde{W} = \gamma(\tilde{V} - \alpha I)(I - \bar{\alpha}\tilde{V})^{-1}$$

является квазиунитарным расширением оператора W.

В **238—244** V — простой изометрический оператор с дефектным числом $\delta(V) = 1$, а U_0 — его фиксированное унитарное расширение.

238. При любом $y \in (\mathrm{Dom}\, V)^{\perp}$, $y \neq 0$, формула $U_\varphi y = e^{i\varphi}U_0 y$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между полуинтервалом $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ и множеством унитарных расширений $U_\varphi \supset V$.

239. Пусть $R_\lambda[U_\varphi]$ — резольвента расширения $U_\varphi \supset V$ и

$$w_\varphi(\lambda) = \frac{\lambda(R_\lambda[U_\varphi]\, y,\ y)}{1 + \lambda(R_\lambda[U_\varphi]\, y, y)}.$$

Тогда $w_\varphi(\lambda) = e^{i\varphi}w_0(\lambda)$.

240. Множество корней функции $w_0(\lambda)$ совпадает со спектром квазиунитарного расширения $VP \supset V$, где P — ортопроектор на $\mathrm{Dom}\, V$.

241. Если оператор $\tilde{V}$ пробегает множество унитарных расширений оператора V, то точка $(R_\lambda[\tilde{V}]\, y,\ y)$ пробегает окружность $\mathcal{C}_\lambda(V)$, определяемую формулой

$$(R_\lambda[\tilde{V}]\, y,\ y) = \frac{1}{\lambda}\,\frac{w_0(\lambda)\, e^{i\varphi}}{1 - w_0(\lambda)\, e^{i\varphi}} \qquad (0 \leqslant \varphi < 2\pi).$$

Если $\lambda \overline{\in} \sigma(VP)$, то эта окружность не вырождается в точку и соответствие между множеством унитарных расширений $\tilde{V} \supset V$ и окружностью $\mathcal{C}_\lambda(V)$ взаимно однозначно.

Круг $\mathcal{W}_\lambda(V)$, ограниченный окружностью $\mathcal{C}_\lambda(V)$ при $\lambda \overline{\in} \sigma(VP)$, назовем *кругом Вейля — Гамбургера*. Следующее предложение дополняет теорему **241**.

242. Внутренность круга Вейля — Гамбургера $\mathcal{W}_\lambda(V)$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством квазиунитарных расширений $\tilde{V} \supset V$, для которых $\tilde{V}^*\tilde{V} \prec I$. Внешность круга $\mathcal{W}_\lambda(V)$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством квазиунитарных расширений $\tilde{V} \supset V$, для которых $\tilde{V}^*\tilde{V} \succ I$.

Функция $w_0(\lambda)$, определенная в **239**, называется *характеристической функцией* простого изометрического оператора V. Очевидно, $w_0(\lambda)$ — рациональная функция. Из **239** следует, что характеристическая функция оператора V определяется этим оператором с точностью до постоянного множителя, равного по модулю единице. В дальнейшем вместо $w_0(\lambda)$ будем писать $w(\lambda;\ V)$.

243. Характеристическая функция $w(\lambda;\ V)$ регулярна в единичном круге и отображает его на себя; при этом $w(0;\ V) = 0$.

Следующие два предложения выражают фундаментальные свойства характеристических функций.

244. Если $\tilde{V}$ — квазиунитарное расширение оператора V, определяемое формулой $\tilde{V}y = \alpha U_0 y$ $(|\alpha| \neq 1)$, то спектр $\sigma(\tilde{V})$ совпадает с множеством корней уравнения

$$w(\lambda;\ V) = \alpha.$$

245. Для того чтобы простые изометрические операторы V_1 и V_2 были унитарно подобны, необходимо и достаточно, чтобы их характеристические функции $w(\lambda;\ V_1)$ и $w(\lambda;\ V_2)$ совпадали с точностью до постоянного множителя, равного по модулю единице.

В **246**—**251** результаты **238**—**245** переносятся на эрмитовы операторы. Доказательства можно получить с помощью преобразования Кэли. В **246**—**250** S — простой эрмитов оператор с дефектным числом $\delta(S) = 1$.

246. Пусть

$$V = (S - iI)(S + iI)^{-1},$$

U_φ — оператор, определенный в **238** и S_φ — его преобразование Кэли:

$$S_\varphi = i(U_\varphi + I)(U_\varphi - I)^{-1},$$

а $R_\mu[S_\varphi]$ — резольвента оператора S_φ. Тогда для функции $w_\varphi(\lambda)$ из **239** при вещественных μ имеет место равенство

$$w_\varphi\left(\frac{\mu - i}{\mu + i}\right) = \frac{\mu - i}{\mu + i} \cdot \frac{(\{I + (\mu - i) R_\mu[S_\varphi]\} y,\ U_\varphi y)}{(\{I + (\mu - i) R_\mu[S_\varphi]\} y,\ y)}.$$

247. Если оператор $\tilde{S}$ пробегает множество самосопряженных расширений оператора S, то точка $(R_\mu[\tilde{S}]y, y)$ пробегает некоторую окружность $\mathcal{C}_\mu(S)$. Если число μ не принадлежит спектру преобразования Кэли оператора VP (P — ортопроектор на $\operatorname{Dom} V$), то эта окружность не вырождается в точку и соответствие между множеством самосопряженных расширений $\tilde{S} \supset S$ и окружностью $\mathcal{W}_\mu(S)$ взаимно однозначно.

Соответствующий круг $\mathcal{W}_\mu(S)$ по-прежнему называется *кругом Вейля—Гамбургера*. Следующее предложение дополняет теорему **247**.

248. Внутренность круга Вейля — Гамбургера $\mathcal{W}_\mu(S)$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством квазисамосопряженных расширений $\tilde{S} \supset S$, для которых $\tilde{S} - \tilde{S}^* \succ 0$. Внешность круга $\mathcal{W}_\mu(S)$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством квазисамосопряженных расширений $\tilde{S} \supset S$, для которых $\tilde{S} - \tilde{S}^* \prec 0$.

Функция

$$v(\mu;\ S) = w_0\left(\frac{\mu - i}{\mu + i}\right)$$

называется *характеристической функцией* простого эрмитова оператора S. Очевидно, $v(\mu;\ S)$ — рациональная функция. Характеристическая функция $v(\mu;\ S)$ определяется оператором S с точностью до постоянного множителя, равного по модулю единице.

249. Характеристическая функция $v(\mu;\ S)$ регулярна в верхней полуплоскости и отображает ее на единичный круг; при этом $v(i;\ S) = 0$.

250. Если квазисамосопряженное расширение $\tilde{S} \supset S$ определяется формулой

$$\tilde{S} = i(\tilde{V} + I)(\tilde{V} - I)^{-1},$$

где $\tilde{V} \supset V$ и $\tilde{V}y = \alpha U_0 y$ $(|\alpha| = 1)$, то спектр $\sigma(\tilde{S})$ совпадает с множеством корней уравнения $v(\mu;\ S) = \alpha$.

251. Для того чтобы простые эрмитовы операторы S_1 и S_2 были унитарно подобны, необходимо и достаточно, чтобы их характеристические функции $v(\mu;\ S_1)$ и $v(\mu;\ S_2)$ совпадали с точностью до постоянного множителя, равного по модулю единице.

Результаты **238—245** и **246—251** можно обобщить на изометрические и эрмитовы операторы с произвольным дефектным числом. Мы намечаем это обобщение в **252—263**, ограничиваясь изометрическими операторами. Пусть V — простой изометрический оператор, $\delta(V)=m$. Для некоторого унитарного расширения $U_0 \supset V$ введем оператор-функцию

$$\hat{R}_0(\lambda)=QR_\lambda[U_0] \mid (\mathrm{Dom}\, V)^\perp,$$

где Q — ортопроектор на $(\mathrm{Dom}\, V)^\perp$. Аналогично **239** определим *характеристическую оператор-функцию* $W_0(\lambda)= W(\lambda;\ V)$ оператора V формулой

$$W_0(\lambda)=\lambda\hat{R}_0(\lambda)(I+\lambda\hat{R}_0(\lambda))^{-1}.$$

Очевидно, $W(\lambda;\ V)$ — рациональная оператор-функция от λ и $W(0,\ V)=0$.

252. При $|\lambda|<1$ вещественная часть оператора $\frac{1}{2}I+ \lambda\hat{R}_0(\lambda)$ неотрицательна.

253. Оператор $W(\lambda;\ V)$ является строгим сжатием при $|\lambda|<1$ и унитарен при $|\lambda|=1$.

254. Если U_0 — унитарное расширение оператора V, то при любом $y \in (\mathrm{Dom}\, V)^\perp$, $y\neq 0$, формула $U_\Phi y=e^{i\Phi}U_0 y$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством самосопряженных операторов Φ в пространстве $(\mathrm{Im}\, V)^\perp$, удовлетворяющих неравенству $0\leqslant\Phi\prec 2\pi I$, и множеством унитарных расширений $U_\Phi \supset V$.

255. Если

$$\hat{R}_\Phi(\lambda)=QR_\lambda[U_\Phi] \mid (\mathrm{Dom}\, V)^\perp$$

и

$$W_\Phi(\lambda)=\lambda\hat{R}_\Phi(\lambda)(I+\lambda\hat{R}_\Phi(\lambda))^{-1},$$

то $W_\Phi(\lambda)=W(\lambda;\ V)\hat{U}$, где $\hat{U}$ — унитарный оператор в пространстве $(\mathrm{Dom}\, V)^\perp$.

256. Множество корней уравнения $\det W_0(\lambda)=0$ совпадает со спектром квазиунитарного расширения $VP \supset V$, где P — ортопроектор на $\mathrm{Dom}\, V$.

Положим при $\lambda \bar{\in} \sigma(VP)$ для любого квазиунитарного расширения $\tilde{V} \supset V$

$$\hat{R}(\lambda;\ \tilde{V})=QR_\lambda[\tilde{V}] \mid (\mathrm{Dom}\, V)^\perp.$$

257. Если оператор $\tilde{V}$ пробегает множество квазиунитарных расширений оператора V, то оператор $\hat{R}(\lambda;\ \tilde{V})$ пробегает множество, описываемое формулой

$$\hat{R}(\lambda;\ \tilde{V}) = \frac{1}{\lambda} W_0(\lambda) Z (I - W_0(\lambda) Z)^{-1},$$

где Z пробегает пространство операторов в $(\mathrm{Dom}\, V)^{\perp}$.

258. В **257** унитарные расширения $\tilde{V} \supset V$ находятся во взаимно однозначном соответствии с унитарными операторами Z.

Кроме того:

259. *Оператор $\tilde{V}$ является сжатием тогда и только тогда,* когда Z является сжатием.

Множество операторов

$$\mathfrak{W} = \{\hat{R}(\lambda;\ \tilde{V}) \mid Z^*Z \leqslant I\}$$

является операторным аналогом круга Вейля — Гамбургера.

260. Пусть $\tilde{V}$ — квазиунитарное расширение оператора V, определенное формулой

$$\tilde{V}y = AU_0y \qquad \left(y \in (\mathrm{Dom}\, V)^{\perp},\ y \neq 0\right),$$

где A — оператор в $(\mathrm{Im}\, V)^{\perp}$. *Тогда спектр $\sigma(\tilde{V})$ совпадает с множеством корней уравнения*

$$\det\{W(\lambda;\ V) - A\} = 0.$$

261. *Для того чтобы простые изометрические операторы V_1 и V_2 были унитарно подобны, необходимо и достаточно, чтобы их характеристические оператор-функции $W(\lambda;\ V_1)$ и $W(\lambda;\ V_2)$ совпадали с точностью до постоянных унитарных множителей слева и справа* (теорема Лившица).

§ 8. Блочно-треугольное представление операторов с ненулевым рангом несамосопряженности

В этом параграфе A есть оператор, определенный на всем E и $m = \mathrm{rg}(A - A^*)$. При $m = 0$ треугольное представление Шура (см. § 9 гл. III) оператора A совпадает с диагональным, так что в этом случае диагональные элементы треугольного представления Шура определяют A с точностью до унитарного подобия. Это свойство, вообще говоря, не сохраняется при $m > 0$. Однако в определенном смысле оно может быть восстановлено путем надлежащего обобщения треугольного представления. Впрочем, при $m = 1$ обобщения не потребуется.

262. Пусть $m = 1$ и μ — отличное от нуля собственное значение оператора $\frac{1}{i}(A - A^*)$. Если $\{e_k\}_1^n$ — какой-нибудь базис Шура оператора A, то матрица $\mathfrak{a} = (a_{jk})_{j,\,k=1}^n$ оператора A в этом базисе имеет вид

$$a_{jk} = \begin{cases} \alpha_k + \frac{i}{2} |\gamma_k|^2 \operatorname{sign} \mu & (j = k), \\ i\gamma_j \bar{\gamma}_k \operatorname{sign} \mu & (j > k), \\ 0 & (j < k), \end{cases}$$

где α_k вещественны, а γ_k не все равны нулю.

263. В условиях **262** существует ортонормированный базис, в котором матрица $\mathfrak{a}$ имеет вид

$$a_{jk} = \begin{cases} \alpha_k + \frac{i}{2} \beta_k^2 \operatorname{sign} \mu & (j = k), \\ i\beta_j \beta_k \operatorname{sign} \mu & (j > k), \\ 0 & (j < k), \end{cases}$$

где α_k вещественны, а β_k неотрицательны и не все равны нулю.

Треугольное представление **263** мы будем считать *каноническим*.

Из **263** следует:

264. Если спектры двух операторов ранга несамосопряженности единица совпадают, то эти операторы унитарно подобны.

При $m > 1$ мы перейдем от обычных к блочным треугольным представлениям.

Обозначим через μ_k $(k = 1, \ldots, m)$ отличные от нуля собственные значения оператора

$$S = \frac{1}{i}(A - A^*) \qquad (\operatorname{rg} S = m).$$

Пусть $\{e_k\}_1^n$ — некоторый базис Шура оператора A, $\mathfrak{S} = \{s_{jk}\}_{j,\,k=1}^n$ — матрица оператора S в этом базисе и $\mathfrak{j}$ — диагональная матрица с диагональю $\{\operatorname{sign}\mu_k\}_1^m$. Диагональные элементы матрицы оператора $R = \frac{1}{2}(A + A^*)$ в том же базисе обозначим через α_k $(k = 1, \ldots, n)$.

Пусть $\tilde{\mathrm{E}} = \mathrm{E} + \mathrm{E}_1$ $(\dim \tilde{\mathrm{E}} = nm)$ и $\{e_j\}_1^{mn}$ — ортонормированный базис пространства $\tilde{\mathrm{E}}$, в котором $\tilde{e}_{(k-1)\,m+1} = e_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Обозначим через $\tilde{S} \in \mathfrak{M}(\tilde{\mathrm{E}})$ расширение оператора S, определенное условием $\tilde{S} \mid \mathrm{E}_1 = 0$.

265. Матрица $\tilde{\mathfrak{S}}$ оператора $\tilde{S}$ в базисе $\{\tilde{e}_j\}_1^{mn}$ имеет вид

$$\tilde{\mathfrak{S}} = (\mathfrak{f}_{jk})_{j,\,k=1}^n,$$

где

$$\mathfrak{f}_{jk} = \left(t_{rs}^{(j,\,k)}\right)_{r,\,s=1}^m, \qquad t_{rs}^{(j,\,k)} = \begin{cases} s_{jk} & (r = 1,\ s = 1), \\ 0 & (r \neq 1 \text{ или } s \neq 1). \end{cases}$$

266. Если $\mathfrak{u} = (u_{jk})_{j,\,k=1}^n$ — унитарная матрица, приводящая матрицу $\mathfrak{S}$ к диагональному виду, так что

$$\mathfrak{u}^*\mathfrak{S}\mathfrak{u} = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \mu_m & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix},$$

то

$$\mathfrak{f}_{jk} = \mathfrak{f}_j \mathfrak{j} \mathfrak{f}_k^*,$$

где

$$\mathfrak{f}_j = \begin{pmatrix} t_{j1} & t_{j2} & \ldots & t_{jm} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

$$t_{j\nu} = \bar{u}_{j\nu} \sqrt{|\mu_\nu|} \qquad (j = 1, \ldots, n;\ \nu = 1, \ldots, m).$$

Пусть $\tilde{R} \in \mathfrak{M}(\mathrm{E})$ есть расширение оператора R, определенное формулами

$$\tilde{R}e_{(k-1)m+\nu} = \alpha_k \tilde{e}_{(k-1)m+\nu} \qquad (k=1, \ldots, n; \ \nu=1, \ldots, m).$$

Расширение $\tilde{A} = \tilde{R} + \frac{i}{2}\tilde{S}$ оператора A будем считать *каноническим*.

267. Каноническое расширение $\tilde{A}$ оператора A есть ортогональная сумма этого оператора и некоторого самосопряженного оператора в E. Матрица $\tilde{\mathfrak{a}}$ оператора $\tilde{A}$ в базисе $\{\tilde{e}_j\}_1^{mn}$ имеет блочно-треугольный вид

$$\tilde{\mathfrak{a}} = (\mathfrak{a}_{jk})_{j,\,k=1}^{n},$$

где

$$\mathfrak{a}_{jk} = \begin{cases} \alpha_k \mathfrak{e} + \frac{i}{2}\mathfrak{f}_k \mathfrak{j} \mathfrak{f}_k^* & (j=k), \\ i\mathfrak{f}_j \mathfrak{j} \mathfrak{f}_k^* & (j>k), \\ 0 & (j<k) \end{cases}$$

и $\mathfrak{e}$ — единичная матрица m-го порядка.

Полученное представление аналогично **262**. Из него можно вывести блочно-треугольное представление, соответствующее **263**:

268. В ортонормированном базисе

$$\tilde{g}_{(k-1)m+\nu} = \mathfrak{d}_k \tilde{e}_{(k-1)m+\nu} \qquad (k=1, \ldots, n; \quad \nu=1, \ldots, m),$$

где $\mathfrak{d}_k$ есть левый фазовый множитель в полярном представлении $\mathfrak{f}_k = \mathfrak{d}_k \mathfrak{b}_k$, матрица $\tilde{\mathfrak{a}}$ оператора $\tilde{A}$ имеет вид

$$\tilde{\mathfrak{a}} = (\mathfrak{a}_{jk})_{j,\,k=1}^{n},$$

где

$$\mathfrak{a}_{jk} = \begin{cases} \alpha_k \mathfrak{e} + \frac{i}{2}\mathfrak{b}_k \mathfrak{j} \mathfrak{b}_k & (j=k), \\ i\mathfrak{b}_j \mathfrak{j} \mathfrak{b}_k & (j>k), \\ 0 & (j<k). \end{cases}$$

Ранги блоков $\mathfrak{a}_{jk}$ $(j \neq k)$ не превосходят единицы.

Описанное в **268** блочно-треугольное представление также считается *каноническим*.

269. Пусть $\tilde{\mathfrak{a}}^{(1)}$ и $\tilde{\mathfrak{a}}^{(2)}$ — матрицы вида

$$\tilde{\mathfrak{a}}^{(p)}=\left(\mathfrak{a}_{jk}^{(p)}\right)_{j,\,k=1}^{n}\qquad (p=1,\ 2),$$

$$\mathfrak{a}_{jk}^{(p)}=\begin{cases}\alpha_k^{(p)}\mathfrak{e}+\frac{i}{2}\,\mathfrak{b}_k^{(p)}\mathfrak{j}\mathfrak{b}_k^{(p)} & (j=k),\\ i\mathfrak{b}_j^{(p)}\mathfrak{j}\mathfrak{b}_k^{(p)} & (j>k),\\ 0 & (j<k),\end{cases}$$

где $\mathfrak{b}_j^{(p)}$ — самосопряженные неотрицательные матрицы и

$$\operatorname{rg}\mathfrak{b}_j^{(p)}=\operatorname{rg}\mathfrak{b}_j^{(p)}\mathfrak{j}\mathfrak{b}_j^{(p)}\leqslant 1.$$

Тогда, если $\mathfrak{a}_{kk}^{(1)}=\mathfrak{a}_{kk}^{(2)}$ $(k=1,\ \ldots,\ n)$, то $\tilde{\mathfrak{a}}^{(1)}=\tilde{\mathfrak{a}}^{(2)}$.

Операторы $A_1,\ A_2\in\mathfrak{M}(\mathrm{E})$ с одинаковым рангом несамосопряженности назовем стабильно унитарно подобными, если их канонические расширения унитарно подобны.

270. Если диагональные блоки канонических блочно-треугольных представлений операторов $A_1,A_2\in\mathfrak{M}(\mathrm{E})$ совпадают, то эти операторы стабильно унитарно подобны.

Таким образом:

271. Если диагональные блоки канонических блочно-треугольных представлений операторов A_1, $A_2\in\mathfrak{M}(\mathrm{E})$ совпадают, то их максимальные простые несамосопряженные части унитарно подобны (т е о р е м а Л и в ш и ц а).

§ 9. Проблема моментов

Пусть $S\in\mathfrak{S}(\mathrm{E})$, $x\in\mathrm{E}$. Вещественные числа

$$s_k=(S^kx,\ x)\qquad (k=0,\ 1,\ \ldots)$$

называются *моментами* оператора S на векторе x. Задача отыскания самосопряженного оператора S с простым спектром, который на каком-нибудь порождающем векторе x имеет заданные моменты

$$s_k=(S^kx,\ x)\qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ p;\ p\leqslant\infty),\qquad (*)$$

представляет операторную интерпретацию с т е п е н н о й п р о б л е м ы м о м е н т о в. Если S - решение проблемы моментов (*), то оператор USU^{-1} при $U \in \mathfrak{U}(E)$ также является решением этой проблемы моментов. Унитарно подобные решения не считаются различными. Проблема моментов (*) называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если она имеет более одного решения. Аналитическим аппаратом исследования проблемы моментов являются вещественные эрмитово-квадратичные формы вида

$$\mathfrak{H}_m = \sum_{j,\,k=0}^{m-1} s_{j+k}\xi_j\bar{\xi}_k,$$

называемые *ганкелевыми формами.*

272. Если проблема моментов (*) имеет решение, то ганкелева форма $\mathfrak{H}_{[p/2+1]}$ неотрицательна и

$$\operatorname{rg}\mathfrak{H}_m = \min(m, n) \qquad \left(m = 1, \ldots, \left[\frac{p}{2}+1\right]\right).$$

273. Если $p = 2n - 1$ и проблема моментов (*) имеет решения S_1, S_2, то их характеристические полиномы совпадают.

Поэтому:

274. Если $p = 2n - 1$ и проблема моментов (*) разрешима, то она является определенной.

275. Пусть $p = 2n - 2$ и проблема моментов (*) имеет решение S, а T есть сужение оператора S на линейную оболочку системы векторов $\{S^k x\}_0^{n-2}$. Тогда множество решений проблемы моментов (*) совпадает с множеством самосопряженных расширений $\tilde{T}$ оператора T.

Поэтому:

276. Если $p = 2n - 2$ и проблема моментов (*) разрешима, то она является неопределенной.

277. В условиях теоремы **276** проблема моментов (*) имеет континуум решений и спектры двух различных решений строго перемежаются.

278. В условиях теоремы **275** формула

$$s_{p+1} = (\tilde{T}^{p+1}x, x)$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между самосопряженными расширениями $\tilde{T}$ оператора T и точками s_{p+1} вещественной оси.

Таким образом:

279. Если $p=2n-2$ и проблема моментов (*) разрешима, то расширенная проблема моментов, получаемая присоединением к (*) дополнительного уравнения

$$(S^{p+1}x,\ x)=s_{p+1},$$

также разрешима при любом вещественном s_{p+1}.

Ключ к исследованию разрешимости проблемы моментов дает теорема **280**.

Пусть заданные моменты s_k $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ 2n-2)$ таковы, что ганкелева форма $\mathfrak{H}_n$ положительна. Введем в пространстве полиномов Π^n скалярное произведение

$$(\mathscr{P},\ \mathscr{Q})=\sum_{j,\ k=0}^{n-1} s_{j+k}\xi_j\overline{\xi}_k \qquad \left(\mathscr{P}=\sum_{j=0}^{n-1}\xi_j\lambda^j,\ \mathscr{Q}=\sum_{k=0}^{n-1}\eta_k\lambda^k\right)$$

и рассмотрим оператор T умножения на λ:

$$T\left(\sum_{k=0}^{n-2}\xi_k\lambda^k\right)=\sum_{k=0}^{n-2}\xi_k\lambda^{k+1} \qquad (\operatorname{Dom} T=\Pi^{n-1}).$$

280. Оператор T — простой эрмитов, его дефектное число равно единице и моменты оператора T на полиноме $\mathscr{P}(\lambda)=1$ равны s_k $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ 2n-2)$.

Теперь уже легко провести полное исследование проблемы моментов (*).

281. Для разрешимости проблемы моментов (*) необходимо и достаточно, чтобы ганкелева форма $\mathfrak{H}_{[p/2+1]}$ была неотрицательна и

$$\operatorname{rg}\mathfrak{H}_m=\min(m,\ n) \qquad \left(m=1,\ \ldots,\ \left[\frac{p}{2}+1\right]\right).$$

282. Если проблема моментов (*) разрешима, то для ее определенности необходимо и достаточно, чтобы $p\geqslant 2n-1$.

Аналогичным образом можно рассмотреть операторную интерпретацию т р и г о н о м е т р и ч е с к о й п р о б л е м ы м о м е н т о в. Она состоит в отыскании унитарного оператора U с простым спектром, который на каком-нибудь порождающем векторе x имеет заданные *моменты*

$$c_k=(U^kx,\ x) \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ p;\ p\leqslant\infty). \qquad (**)$$

Вместе с U любой оператор, унитарно подобный оператору U, также является решением проблемы моментов (**). Унитарно подобные решения не считаются различными. Проблема моментов (**) называется о п р е д е л е н н о й, если она имеет единственное решение, и н е о п р е д е л е н н о й, если она имеет более одного решения. Аналитическим аппаратом исследования проблемы моментов (**) являются вещественные эрмитово-квадратичные формы вида

$$\mathfrak{T}_m = \sum_{j,\, k=0}^{m-1} c_{j-k}\xi_j\bar{\xi}_k \qquad (c_{-k} = \bar{c}_k),$$

называемые *теплицевыми формами*.

283. Если проблема моментов (**) имеет решение, то теплицева форма $\mathfrak{T}_{p+1}$ неотрицательна и

$$\operatorname{rg}\mathfrak{T}_m = \min(m,\ n) \qquad (m = 1,\ \ldots,\ p+1).$$

284. Если $p = n$ и проблема моментов (**) разрешима, то она является определенной.

285. Пусть $p = n - 1$ и проблема моментов (**) имеет решение U, а V есть сужение оператора U на линейную оболочку системы векторов $\{U^k x\}_0^{n-2}$. Тогда множество решений проблемы моментов (**) совпадает с множеством унитарных расширений $\tilde{V}$ оператора V.

Поэтому:

286. Если $p = n - 1$ и проблема моментов (**) разрешима, то она является неопределенной.

287. В условиях теоремы **286** проблема моментов имеет континуум решений и спектры двух ее различных решений строго перемежаются.

288. В условиях теоремы **285** формула

$$c_{p+1} = \left(\tilde{V}^{p+1}x,\ x\right)$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между унитарными расширениями $\tilde{V}$ оператора V и точками c_{p+1} окружности

$$\det\begin{Vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_{n-1} & z \\ c_{-1} & c_0 & \ldots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{z} & c_{1-n} & \ldots & c_{-1} & c_0 \end{Vmatrix} = 0. \qquad (***)$$

Таким образом:

289. Если $p = n - 1$ и проблема моментов (**) разрешима, то расширенная проблема моментов, получаемая присоединением к (**) дополнительного уравнения

$$(U^{p+1}x, \ x) = c_{p+1},$$

также разрешима при любом комплексном c_{p+1}, лежащем на окружности (***).

Пусть заданные моменты c_k ($k = 0, 1, \ldots, n-1$) таковы, что теплицева форма $\mathfrak{T}_n$ положительна. Введем в пространстве T^n тригонометрических полиномов $\sum\limits_{k=0}^{n-1}{}' \xi_k e^{ik\theta}$ скалярное произведение

$$(\mathscr{P}, \mathscr{Q}) = \sum_{j, k=0}^{n-1} c_{j-k}\xi_j\bar{\xi}_k \qquad \left(\mathscr{P} = \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j e^{ij\theta}, \quad \mathscr{Q} = \sum_{k=0}^{n-1} \eta_k e^{ik\theta}\right)$$

и рассмотрим оператор V умножения на $e^{i\theta}$.

290. Оператор V — простой изометрический, его дефектное число равно единице и моменты оператора V на полиноме $\mathscr{P}(\theta) = 1$ равны c_k ($k = 0, 1, \ldots, n-1$).

Окончательно имеем:

291. Для разрешимости проблемы моментов (**) необходимо и достаточно, чтобы теплицева форма $\mathfrak{T}_{p+1}$ была неотрицательна и

$$\operatorname{rg} \mathfrak{T}_m = \min(m, n) \qquad (m = 1, \ldots, p+1).$$

292. Если проблема моментов (**) разрешима, то для ее определенности необходимо и достаточно, чтобы $p \geqslant n$.

ГЛАВА X

НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ КЛАССЫ ОПЕРАТОРОВ

§ 1. Диссипативные операторы и сжатия в евклидовом пространстве

Оператор A, действующий в евклидовом пространстве E, называется *диссипативным*, если

$$\frac{1}{2i}(A - A^*) \geqslant 0.$$

1. Множество диссипативных операторов есть телесный клин в $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$. Его линейная часть есть $\mathfrak{S}(\mathrm{E})$.

2. Если $\tilde{S}$ — квазисамосопряженное расширение эрмитова оператора S с дефектным числом $\delta(S)=1$, то по крайней мере один из операторов $\tilde{S}$ или $-\tilde{S}$ диссипативен.

3. В полуплоскости $\mathfrak{Im}\,\lambda < 0$ резольвента R_λ любого диссипативного оператора A удовлетворяет неравенству

$$\|R_\lambda\| \leqslant \frac{1}{|\mathfrak{Im}\,\lambda|} \tag{*}$$

(ср. **236** гл. IV).

Обратно:

4. Если резольвента R_λ некоторого оператора A удовлетворяет неравенству (*) в полуплоскости $\mathfrak{Im}\,\lambda < 0$, то оператор A диссипативен (ср. **237** гл. IV).

5. Спектр диссипативного оператора лежит в полуплоскости $\mathfrak{Im}\,\lambda \geqslant 0$.

6. Если x, y — собственные векторы диссипативного оператора, соответствующие собственным значениям λ, μ и $\|x\|=\|y\|=1$, то

$$|(x, y)|^2 \leqslant \frac{4\,\mathfrak{Im}\,\lambda \cdot \mathfrak{Im}\,\mu}{|\lambda - \bar{\mu}|^2}.$$

В частности:

7. Собственные векторы диссипативного оператора, соответствующие различным вещественным собственным значениям, ортогональны.

8. Среди инвариантных подпространств L диссипативного оператора A, на которых оператор $A|\mathrm{L}$ самосопряжен, существует наибольшее и оно совпадает с подпространством L_A, определенным в § 7 гл. IX.

При $\mathrm{L}_A = 0$ оператор A называется ***простым диссипативным*** оператором.

9. Каждый диссипативный оператор является ортогональной суммой самосопряженного и простого диссипативного оператора.

10. Для того чтобы диссипативный оператор A был простым диссипативным, необходимо и достаточно, чтобы его спектр лежал в открытой верхней полуплоскости.

Параллельно с диссипативными операторами мы будем рассматривать сжатия. Они играют по отношению к унитарным операторам такую же роль, как диссипативные операторы по отношению к самосопряженным. В евклидовом пространстве сжатия характеризуются неравенством $I - B^*B \geqslant 0$.

11. Множество сжатий есть выпуклое тело в $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$. Множество его крайних точек совпадает с $\mathfrak{U}(\mathrm{E})$.

12. Если $\widetilde{V}$ — квазиунитарное расширение изометрического оператора V с дефектным числом $\delta(V) = 1$, то по крайней мере один из операторов $\widetilde{V}$ или $\widetilde{V}^{-1}$ является сжатием (если $\widetilde{V}$ не является сжатием, то $\widetilde{V}^{-1}$ существует).

Спектральные свойства сжатий (см. **204—206** гл. IV) аналогичны спектральным свойствам диссипативных операторов. Отметим аналог теоремы **6**:

13. Если x, y ($\|x\| = \|y\| = 1$) — собственные векторы сжатия, соответствующие собственным значениям λ, μ, то

$$|(x, y)|^2 \leqslant \frac{(1 - |\lambda|)(1 - |\mu|)}{|1 - \lambda\bar{\mu}|^2}.$$

14. Среди инвариантных подпространств М сжатия B на которых оператор $B|\mathrm{M}$ унитарен, существует наибольшее и оно совпадает с подпространством M_B, определенным в § 7 гл. IX.

При $\mathrm{M}_B = 0$ сжатие B называется ***простым***.

15. Каждое сжатие является ортогональной суммой унитарного оператора и простого сжатия.

16. Для того чтобы сжатие B было простым, необходимо и достаточно, чтобы его спектр лежал в открытом единичном круге.

Между диссипативными операторами и сжатиями может быть установлена связь с помощью преобразования Кэли:

17. Если A — диссипативный оператор, то при $\mathfrak{Im}\,\omega < 0$ преобразование Кэли

$$B = (A - \bar{\omega} I)(A - \omega I)^{-1}$$

является сжатием и $1 \overline{\in} \sigma(B)$.

Обратно:

18. Если B — сжатие и $1 \overline{\in} \sigma(B)$, то при $\mathfrak{Im}\,\omega < 0$ преобразование Кэли

$$A = (\omega B - \bar{\omega} I)(B - I)^{-1}$$

является диссипативным оператором.

Следующие две теоремы соответствуют дробно-линейным преобразованиям полуплоскости и круга на себя.

19. Если A — диссипативный оператор, числа α, β, γ, δ вещественны, $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$ и $-\delta/\gamma \overline{\in} \sigma(A)$, то оператор

$$D = (\alpha A + \beta I)(\gamma A + \delta I)^{-1}$$

также диссипативен. Если оператор A самосопряженный, то D также самосопряженный.

20. Если B — сжатие и числа α, γ удовлетворяют условиям $|\alpha| \leqslant 1$, $|\gamma| = 1$, $1/\bar{\alpha} \overline{\in} \sigma(B)$, то оператор

$$C = \gamma(B - \alpha I)(I - \bar{\alpha} B)^{-1}$$

также является сжатием. Если оператор B унитарный, то C также унитарный.

21. Пусть $\tilde{\mathrm{E}} \supset \mathrm{E}$, $\tilde{P}$ — ортопроектор на E в $\tilde{\mathrm{E}}$, $\tilde{Q}$ — произвольный ортопроектор в $\tilde{\mathrm{E}}$. Тогда оператор $\tilde{P}\tilde{Q}|\mathrm{E}$ является неотрицательным самосопряженным сжатием в E.

Кроме того:

22. Если $\tilde{U}$ — унитарный оператор в пространстве $\tilde{\mathrm{E}}$, то $\tilde{P}\tilde{U}|\mathrm{E}$ — сжатие в E.

Обращения этих двух очевидных предложений содержатся в **23** и **25**.

23. Если оператор S является неотрицательным самосопряженным сжатием, то существуют пространство $\tilde{\mathrm{E}} \supset \mathrm{E}$ и ортопроектор $\tilde{Q} \in \mathfrak{M}(\tilde{\mathrm{E}})$ такие, что $S = \tilde{P}\tilde{Q}|\mathrm{E}$, где $\tilde{P}$ — ортопроектор на E в $\tilde{\mathrm{E}}$.

Эта теорема вытекает из следующего предложения, содержащего эффективное построение пространства $\tilde{\mathrm{E}}$ и оператора $\tilde{Q}$.

24. В пространстве $\tilde{\mathrm{E}} = \mathrm{E} + \mathrm{E}$ блочная матрица

$$\begin{pmatrix} S & S^{1/2}(I-S)^{1/2} \\ S^{1/2}(I-S)^{1/2} & S \end{pmatrix}$$

определяет ортопроектор $\tilde{Q}$.

25. Если $B \in \mathfrak{M}(\mathrm{E})$ — сжатие, то существуют **пространство** $\tilde{\mathrm{E}} \supset \mathrm{E}$ и унитарный оператор $\tilde{U}$ в $\tilde{\mathrm{E}}$ такие, что $B = \tilde{P}\tilde{U}|\mathrm{E}$, где $\tilde{P}$ — ортопроектор на E в $\tilde{\mathrm{E}}$.

Эта теорема вытекает из следующего построения.

26. В пространстве $\tilde{\mathrm{E}} = \mathrm{E} + \mathrm{E}$ блочная матрица

$$\begin{pmatrix} B & (I-BB^*)^{1/2} \\ -(I-B^*B)^{1/2} & B^* \end{pmatrix}$$

определяет унитарный оператор $\tilde{U}$.

Предложение **25** содержится также в более общей теореме **27**, которую можно установить с помощью **28** и **29**.

27. Если $B \in \mathfrak{M}(\mathrm{E})$ — сжатие и m — натуральное число, то существуют пространство $\tilde{\mathrm{E}} \supset \mathrm{E}$ и унитарный оператор $\tilde{U} \in \mathfrak{U}(\tilde{\mathrm{E}})$ такие, что

$$B^k = \tilde{P}\tilde{U}^k|\mathrm{E} \qquad (k = 1, \ldots, m),$$

где $\tilde{P}$ — ортопроектор на E в $\tilde{\mathrm{E}}$ (теорема Секефальви-Надя).

28. В пространстве $\tilde{\mathrm{E}} = \underbrace{\mathrm{E} + \mathrm{E} + \ldots + \mathrm{E}}_{m+1}$ блочная матрица

$$\begin{pmatrix} B & S_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -I \\ -S_2 & B^* & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

где $S_1 = (I - BB^*)^{1/2}$, $S_2 = (I - B^*B)^{1/2}$, определяет унитарный оператор.

29. Первая строка блочной матрицы оператора $\tilde{U}^k$ $(k = 1, \ldots, m)$ имеет вид

$$(B^k,\ B^{k-1}S_1,\ -B^{k-2}S_1,\ B^{k-3}S_1,\ \ldots,\ (-1)^{k-1}S_1,\ \underbrace{0, \ldots, 0}_{m-k}).$$

§ 2. Спектральные множества

Замкнутое множество Λ комплексной плоскости называется *спектральным множеством* оператора T, действующего в евклидовом пространстве E, если $\sigma(T) \subset \Lambda$ и для любой голоморфной в окрестности множества функции $\varphi(\lambda)$, удовлетворяющей неравенству

$$|\varphi(\lambda)| \leqslant 1 \qquad (\lambda \in \Lambda),$$

имеет место соотношение

$$\|\varphi(T)\| \leqslant 1.$$

30. Если Λ — спектральное множество оператора T и замкнутое множество $\tilde{\Lambda}$ содержит Λ, то $\tilde{\Lambda}$ — также спектральное множество оператора T.

Следующее предложение аналогично теореме об отображении спектров (§ 5 гл. II).

31. Если Λ — спектральное множество оператора T и функция $\psi(\lambda)$ голоморфна в окрестности множества Λ, то множество $\psi(\Lambda)$ является спектральным для оператора $\psi(T)$.

32. Единичная окружность является спектральным множеством любого унитарного оператора. Вещественная ось является спектральным множеством любого самосопряженного оператора.

Точнее (и более общим образом):

33. Если T — нормальный (в частности, унитарный или самосопряженный) оператор, то спектр $\sigma(T)$ является его спектральным множеством.

Если множество Λ является спектральным для любого сжатия, то, очевидно, оно содержит единичный круг $|\lambda| \leqslant 1$. Оказывается, это замечание обращается:

34. Единичный круг $|\lambda| \leqslant 1$ является спектральным множеством для любого сжатия (*теорема Неймана*).

Одно из возможных доказательств основано на **27**. Из теоремы Неймана вытекает:

35. Полуплоскость $\mathfrak{Im}\,\lambda \geqslant 0$ является спектральным множеством для любого диссипативного оператора.

Наоборот, из теоремы **35** можно вывести теорему Неймана. Отметим также, что из **35** следует:

36. Если λ_0 — регулярная точка оператора T, то множество

$$\Lambda = \{\lambda \mid |\lambda - \lambda_0|^{-1} \leqslant \| R_{\lambda_0}(T) \| \}$$

является спектральным для T.

Поэтому:

37. Пересечение всех спектральных множеств любого оператора T совпадает со спектром $\sigma(T)$.

Из теоремы Неймана с помощью теоремы об отображении спектральных множеств нетрудно получить:

38. Если A — диссипативный оператор, то $B = e^{iA}$ — сжатие.

Обратно:

39. Если регулярный оператор B является сжатием, то существует диссипативный оператор A такой, что $B = e^{iA}$.

Необходимость условия регулярности очевидна.

Теперь можно обратить теорему **32**.

40. Если единичная окружность является спектральным множеством оператора T, то T — унитарный оператор.

41. Если вещественная ось является спектральным множеством оператора T, то T — самосопряженный оператор.

Следующее предложение содержит обращение теоремы **33**:

42. Если оператор T обладает конечным спектральным множеством (в частности, если спектр $\sigma(T)$ является спектральным множеством), то оператор T нормален.

В заключение параграфа рассмотрим задачи, связанные с развитием теоремы Неймана при переходе от евклидова пространства к произвольным нормированным пространствам. При этом определение спектрального множества переносится на нормированные пространства без изменений.

Прежде всего, отметим, что **34** имеет место не в любом нормированном пространстве. Например:

43. Если оператор B в двумерном пространстве l определен формулой $B\{\xi_1, \xi_2\} = \{\xi_2, \xi_1\}$, то $\|B\| = 1$, но

$$\|(2B - iI)(2I + iB)^{-1}\| > 1,$$

хотя

$$|(2\lambda - i)(2 + i\lambda)^{-1}| \leqslant 1 \qquad (|\lambda| \leqslant 1).$$

Более того, теорема Неймана имеет место только в евклидовом пространстве:

44. Если единичный круг является спектральным множеством для всех сжатий нормированного пространства E, то пространство E евклидово (теорема Фойаша).

Эта теорема редуцируется к более простой формулировке:

45. Если для всех сжатий B нормированного пространства E дробно-линейное преобразование

$$(B - \alpha I)(I - \bar{\alpha} B)^{-1}$$

при каждом α $(|\alpha| < 1)$ также является сжатием, то пространство E евклидово.

Доказательство можно получить, следуя **46—47**.

46. Если в условиях **45** оператор B определен равенством

$$Bx = f_0(x)\,x_0 \qquad (x \in \mathrm{E}),$$

где $\|f_0\|\|x_0\| \leqslant 1$ $(x_0 \in \mathrm{E},\ f_0 \in \mathrm{E}')$, то при каждом α $(|\alpha| \leqslant 1)$

$$\|f_0(x)\,x_0 - \alpha x\| \leqslant \|x - \bar{\alpha} f_0(x)\,x_0\| \qquad (x \in \mathrm{E}).$$

47. При тех же условиях для любых $x, y \in \mathrm{E}$ $(\|x\| \geqslant \|y\| > 0)$

$$\|y - \alpha x\| \leqslant \|x - \bar{\alpha} y\| \qquad (|\alpha| \leqslant 1),$$

а при $\|x\| = \|y\|$

$$\|y - \alpha x\| = \|x - \bar{\alpha} y\|$$

для любого α.

Из **47**, учитывая предложение **12** гл. IV, легко вывести евклидовость пространства E.

Полученные результаты естественным образом приводят к вопросу: существуют ли вообще в любом нормированном пространстве спектральные множества всех сжатий, отличные от всей плоскости?

Назовем круг $|\lambda|\leqslant\rho$ $(\rho>0)$ кругом Бора, если для любой функции $\varphi(\lambda)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k\lambda^k$, голоморфной в этом круге и удовлетворяющей неравенству $|\varphi(\lambda)|\leqslant 1$, выполняется неравенство $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|\alpha_k|\leqslant 1$.

48. Каждый круг Бора является спектральным множеством для всех сжатий в любом нормированном пространстве.

Обратно:

49. Пусть оператор B определен формулой

$$Be_k=e_{k+1}\qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1),\qquad Be_n=0$$

относительно некоторого базиса $\{e_k\}_1^n$ пространства E. Тогда в c-норме относительно этого базиса

$$\|B\|=1,\quad \|\varphi(B)\|=\sum_{k=0}^{n-1}|\alpha_k|$$

для любой функции

$$\varphi(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\lambda^k,$$

голоморфной в круге $|\lambda|\leqslant 1$.

Поэтому:

50. Если круг $|\lambda|\leqslant\rho$ является спектральным множеством для всех сжатий во всех нормированных пространствах, то он является кругом Бора.

Из теоремы Фойаша следует, что круг $|\lambda|\leqslant 1$ не является кругом Бора. Очевидно также, что если $|\lambda|\leqslant\rho_0$ — круг Бора, то $|\lambda|\leqslant\rho$ $(\rho>\rho_0)$ — тоже круг Бора. Обозначим через $\mathscr{K}$ круг Бора наименьшего радиуса. В силу **48** круг $\mathscr{K}$ является спектральным множеством для всех сжатий в любом нормированном пространстве *).

*) Радиус этого круга равен 3 (см. E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neurerer Ergebnisse der Functionentheorie, Berlin, Verl. J. Springer, 1916).

§ 3. Абстрактная задача Коши и связанные с нею классы операторов в нормированном пространстве

Пусть $F(t, x)$ при каждом значении вещественного переменного t является отображением нормированного *) пространства E в себя. Дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x) \qquad (t_0 \leqslant t < t_1)$$

относительно вектор-функции $x = x(t)$ вместе с начальным условием

$$x(t_0) = x_0$$

составляют *абстрактную задачу Коши*. Мы будем заниматься только линейной задачей, когда

$$F(t, x) = A(t)\,x,$$

где $A(t)$ — функция, значениями которой являются линейные операторы в E. Для простоты будем считать функцию $A(t)$ непрерывной, а решение $x(t)$ — принадлежащим классу вектор-функций с непрерывной производной на $[t_0, t_1)$. Для определенности положим $t_0 = 0$, $t_1 = \infty$ и будем писать

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(t)\,x & (0 \leqslant t < \infty), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Термин «абстрактная задача Коши» в дальнейшем относится только к этой линейной задаче.

51. Для любого решения абстрактной задачи Коши выполняется оценка

$$\| x(t) \| \leqslant \| x_0 \| \, e^{\int_0^t \| A(s) \| \, ds}.$$

52. Если решение абстрактной задачи Коши существует, то оно единственно.

---

*) Наличие нормы используется далеко не во всех задачах этого параграфа.

53. Ряд

$$I + \int_0^t A(s)\,ds + \int_0^t A(s)\,ds \int_0^s A(s_1)\,ds_1 + \ldots$$

сходится равномерно на каждом отрезке $[0, \alpha]$ $(0 < \alpha < \infty)$.

Сумму этого ряда обозначим через U_t; при каждом t — это линейный оператор в E.

54. Операторная функция U_t на $[0, \infty)$ непрерывна и имеет непрерывную производную. При этом

$$\frac{dU_t}{dt} = A(t)\,U_t.$$

Кроме того, очевидно, $U_0 = I$.

55. Формула $x(t) = U_t x_0$ определяет решение абстрактной задачи Коши.

Оператор U_t называется *эволюционным*.

Итак, рассматриваемая абстрактная задача Коши при любом начальном векторе x_0 имеет единственное решение.

56. Решения абстрактной задачи Коши, отвечающие всевозможным начальным векторам, образуют линейное пространство относительно естественных операций сложения и умножения на число.

57. Пространство решений изоморфно основному пространству E.

Таким образом, существуют такие n линейно независимых решений, что каждое решение является их линейной комбинацией. Это — основная теорема теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.

Особый интерес представляет случай, когда $A(t)$ — постоянный оператор: $A(t) = A$.

В этом предположении*):

58. $U_{t_1+t_2} = U_{t_1} U_{t_2}$.

Таким образом, множество $\{U_t\}_{t \geq 0}$ есть однопараметрическая полугруппа. Для нее можно написать явную формулу:

59. $U_t = e^{At}$.

---

*) Которое сохраняется и дальше, если не оговорено противное.

Поэтому:

60. Имеет место формула

$$\int_0^\infty U_t e^{-\lambda t}\,dt = -R_\lambda(A) \qquad (\Re\lambda > \alpha),$$

где $\alpha = \overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \dfrac{\ln\|e^{At}\|}{t}$.

Эта формула связывает эволюционный оператор с резольвентой оператора A. Интеграл, фигурирующий слева, есть преобразование Лапласа функции U_t.

Между прочим:

61. $\alpha = \sup\limits_{\lambda\in\sigma(A)} \Re\lambda$.

По существу, все однопараметрические полугруппы операторов могут быть получены путем, указанным в **59**:

62. Если $U_t\,(t \geqslant 0)$ — непрерывная однопараметрическая полугруппа, $U_0 = I$, то существует и единствен такой оператор A, что $U_t = e^{At}$.

Оператор A называется *инфинитезимальным* оператором полугруппы.

Для доказательства **62** можно использовать преобразование Лапласа и теорему **133** гл. II. Действительно:

63. Если $U_t\,(t \geqslant 0)$ — непрерывная однопараметрическая полугруппа, то ее преобразование Лапласа

$$V(\lambda) = \int_0^\infty U_t e^{-\lambda t}\,dt$$

в некоторой полуплоскости $\Re\lambda > \beta$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{V(\lambda) - V(\mu)}{\lambda - \mu} = -V(\lambda)V(\mu).$$

Отметим, что из **62** следует:

64. Любая непрерывная однопараметрическая полугруппа U_t, для которой $U_0 = I$, имеет непрерывную производную.

Непрерывность и условие $U_0 = I$ подразумеваются выполненными для всех рассматриваемых ниже однопараметрических полугрупп операторов.

Полугруппа U_t называется *сжимающей*, если оператор U_t при каждом t является сжатием.

65. Для того чтобы полугруппа U_t в евклидовом пространстве была сжимающей, необходимо и достаточно, чтобы ее инфинитезимальный оператор имел вид $A = iD$, где D — диссипативный оператор (ср. **38**, **39**).

Отправляясь от **3**, **4**, назовем оператор в любом нормированном пространстве *диссипативным*, если он не имеет спектра в открытой нижней полуплоскости и его резольвента удовлетворяет неравенству

$$\| R_\lambda \| \leqslant \frac{1}{|\Im \lambda|} \qquad (\Im \lambda < 0).$$

66. Для того чтобы полугруппа U_t в нормированном пространстве была сжимающей, необходимо и достаточно, чтобы ее инфинитезимальный оператор имел вид $A = iD$, где D — диссипативный оператор.

Полугруппа U_t называется *изометрической*, если оператор U_t при каждом t является изометрическим.

67. Для того чтобы полугруппа U_t в евклидовом пространстве была изометрической, необходимо и достаточно, чтобы ее инфинитезимальный оператор имел вид $A = iS$, где S — самосопряженный оператор (ср. **196**, **197** гл. III).

Отправляясь от **236**, **237** гл. IV, назовем оператор в любом нормированном пространстве *консервативным*, если он не имеет невещественного спектра и его резольвента удовлетворяет неравенству

$$\| R_\lambda \| \leqslant \frac{1}{|\Im \lambda|} \qquad (\Im \lambda \neq 0).$$

68. Для того чтобы полугруппа U_t в любом нормированном пространстве была изометрической, необходимо и достаточно, чтобы ее инфинитезимальный оператор имел вид $A = iS$, где S — консервативный оператор.

Свойства диссипативности и консервативности легко интерпретировать в терминах абстрактной задачи Коши. Диссипативность означает, что нормы решений не возрастают. Консервативность означает, что нормы решений сохраняются.

Абстрактная задача Коши называется у с т о й ч и в о й, если норма эволюционного оператора ограничена:

$$\sup_t \| U_t \| < \infty.$$

Для устойчивости достаточна (но, конечно, не необходима) диссипативность оператора $-iA$.

69. Для устойчивости абстрактной задачи Коши необходимо и достаточно, чтобы спектр оператора A лежал в полуплоскости $\Re\lambda \leqslant 0$ и часть оператора, соответствующая мнимым точкам спектра, была скалярного типа.

Оператор A, обладающий указанными свойствами, называется *устойчивым*. В § 5 гл. VIII мы встречались с понятием строго устойчивого оператора. Такому оператору соответствует асимптотически устойчивая абстрактная задача Коши, т. е. такая, что

$$\lim_{t\to\infty} U_t = 0.$$

70. Если абстрактная задача Коши устойчива, то существует норма в E, относительно которой оператор $-iA$ диссипативен.

В евклидовом пространстве этот результат можно усилить:

71. Если в евклидовом пространстве абстрактная задача Коши устойчива, то оператор $-iA$ подобен диссипативному.

Теоремы **69—71** являются континуальными аналогами некоторых результатов § 8 гл. IV. Остановимся еще на случае строго устойчивого оператора.

72. Для того чтобы оператор A в евклидовом пространстве был строго устойчивым, необходимо и достаточно существования оператора $C > 0$ такого, что оператор $-iCA$ диссипативен (теорема Ляпунова).

Достаточность очевидна. Для доказательства необходимости можно предварительно проверить, что:

73. Если оператор A строго устойчив, то для любого $B > 0$ оператор

$$C = 2\int_0^\infty e^{A^*t} B e^{At}\, dt$$

удовлетворяет уравнению Ляпунова

$$A^*C + CA = -2B.$$

Интересно, что некоторые из полученных фактов распространяются на общий случай переменного оператора $A(t)$.

74. Если оператор $-iA(t)$ при каждом значении t диссипативен, то U_t является сжатием при каждом t.

75. Если оператор $-iA(t)$ при каждом значении t консервативен, то U_t является изометрическим при каждом t.

Теоремы **74** и **75** иллюстрируют так называемый принцип замораживания коэффициентов. Заметим, однако, что проблема устойчивости не может быть решена путем замораживания. Теорему **69** можно заменить лишь более слабыми утверждениями. Например:

76. Если существует такое $\omega > 0$, что при всех t резольвента $R_\lambda = R_\lambda(A(t))$ удовлетворяет неравенству

$$\|R_\lambda\| \leqslant \frac{1}{\lambda+\omega} \qquad (\lambda > 0),$$

то абстрактная задача Коши асимптотически устойчива и, более того, $\|U_t\| \leqslant e^{-\omega t}$ $(t \geqslant 0)$.

Отметим, что:

77. В евклидовом пространстве условие

$$\|R_\lambda\| \leqslant \frac{1}{\lambda+\omega} \qquad (\lambda > 0)$$

эквивалентно тому, что хаусдорфово множество оператора A лежит в полуплоскости $\mathfrak{Re}\,\lambda < -\omega$.

Теорема **77** наталкивает на обобщение понятия хаусдорфова множества оператора A, относящееся к любому нормированному пространству. Возьмем какой-нибудь луч $\lambda = \rho e^{i\theta}$ $(0 \leqslant \theta < 2\pi)$ и рассмотрим все такие вещественные значения α, для каждого из которых

$$\|R_\lambda(A)\| \leqslant \frac{1}{\rho-\alpha} \qquad (\lambda = \rho e^{i\theta},\ \rho > \rho(\alpha) \geqslant \alpha).$$

Нижнюю грань значений α обозначим через $\alpha(\theta;\ A)$.

78. В евклидовом пространстве хаусдорфово множество оператора A совпадает с пересечением полуплоскостей

$$\mathfrak{Re}\,(\lambda e^{-i\theta}) \leqslant \alpha(\theta;\ A) \qquad (0 \leqslant \theta < 2\pi).$$

В произвольном нормированном пространстве полученное описание можно принять за определение: ***хаусдорфовым множеством*** оператора A называется пересечение полуплоскостей

$$\mathfrak{Re}\,(\lambda e^{-i\theta}) \leqslant \alpha(\theta;\ A) \qquad (0 \leqslant \theta < 2\pi).$$

Оно, очевидно, выпукло и содержит спектр.

79. Для любого оператора A

$$\varlimsup_{\substack{|\zeta|\to\infty \\ \arg\zeta=\theta}} \frac{\ln\|e^{A\zeta}\|}{|\zeta|}=\alpha(\theta;\ A).$$

Таким образом, $\alpha(\theta;\ A)$ совпадает с так называемым индикатором роста целой функции $e^{A\zeta}$, а хаусдорфово множество — с ее индикаторной диаграммой *).

§ 4. Псевдометрика

Пусть E снова означает евклидово пространство и $J\in\mathfrak{M}(\mathrm{E})$ — самосопряженный оператор с двумя точками спектра $\lambda=\pm 1$, а $P_\pm$ — ортопроекторы на соответствующие собственные подпространства $\mathrm{E}_\pm$ ($\dim\mathrm{E}_+=\varkappa$).

Билинейный функционал

$$[x,\ y]=(Jx,\ y)$$

называется *псевдометрикой* (или, иначе, *индефинитной* метрикой) в E. Пространство E, наделенное псевдометрикой, называется *пространством Понтрягина* (или *индефинитным* пространством).

Этот параграф является введением к § 5 и 6, где изучаются некоторые классы операторов в пространстве Понтрягина.

Приведем сначала необходимые определения.

В соответствии с терминологией § 2 гл. III, подпространство $\mathrm{L}\subset\mathrm{E}$ называется J-неотрицательным (J-положительным, J-неположительным, J-отрицательным, J-нейтральным), если $[x,\ x]\geqslant 0$ (соответственно $[x,\ x]>0$ при $x\neq 0$, $[x,\ x]\leqslant 0$, $[x,\ x]<0$ при $x\neq 0$, $[x,\ x]=0$) при $x\in\mathrm{L}$. J-ортогональное дополнение подпространства L будем обозначать через $\mathrm{L}^{(\perp)}$.

Вектор $x\in\mathrm{L}$ называется *изотропным* вектором подпространства L, если $[x,\ y]=0$ при всех $y\in\mathrm{L}$. Множество N всех изотропных векторов подпространства L является подпространством; оно называется *изотропным* подпространством подпространства L.

*) По поводу понятий индикатора роста и индикаторной диаграммы см. Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, Гостехиздат, М., 1956.

Теоремы этого параграфа примыкают к предложениям § 2 гл. III и частично содержатся в них, но сформулированы в терминах геометрии пространства Понтрягина.

80. Для любого подпространства L

$$\left(\mathrm{L}^{(\perp)}\right)^{(\perp)} = \mathrm{L}.$$

81. Пространства L и $\mathrm{L}^{(\perp)}$ обладают общим изотропным подпространством $\mathrm{N} = \mathrm{L} \cap \mathrm{L}^{(\perp)}$.

82. Равенство $\mathrm{L} \dot{+} \mathrm{L}^{(\perp)} = \mathrm{E}$ имеет место тогда и только тогда, когда $\mathrm{L} \cap \mathrm{L}^{(\perp)} = 0$.

83. Если L — произвольное J-неотрицательное подпространство, то ортопроектор P_+ осуществляет взаимно однозначное отображение подпространства L на $P_+\mathrm{L}$.

84. Для того чтобы J-неотрицательное подпространство L было максимальным, необходимо и достаточно, чтобы $P_+\mathrm{L} = \mathrm{E}_+$.

85. Для того чтобы J-нейтральное подпространство L было максимальным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из соотношений $P_+\mathrm{L} = \mathrm{E}_+$, $P_-\mathrm{L} = \mathrm{E}_-$.

86. Все максимальные J-неотрицательные и J-положительные подпространства имеют размерность $\varkappa$. Все максимальные J-неположительные и J-отрицательные подпространства имеют размерность $n - \varkappa$. Все максимальные J-нейтральные подпространства имеют размерность $\min(\varkappa, n - \varkappa)$.

87. Любое максимальное J-нейтральное подпространство L является либо максимальным J-неотрицательным, либо максимальным J-неположительным, либо обладает обоими этими свойствами.

В последнем случае подпространство L называется ***гипермаксимальным J-нейтральным.***

88. Подпространство L является гипермаксимальным J-нейтральным тогда и только тогда, когда $\mathrm{L} = \mathrm{L}^{(\perp)}$. Это возможно лишь при $n = 2\varkappa$.

89. Если L — максимальное J-неотрицательное (J-положительное) подпространство, то $\mathrm{L}^{(\perp)}$ — максимальное J-неположительное (J-отрицательное) подпространство.

Если для подпространства L существует оператор $K \in \mathfrak{M}(\mathrm{E})$ такой, что

$$K\mathrm{E}_+ \subset \mathrm{E}_-, \quad \operatorname{Ker} K \supset \mathrm{E}_-, \quad \mathrm{L} = (I + K)\,\mathrm{E}_+,$$

то K называется *угловым оператором* подпространства L относительно E_+. Аналогично определяется угловой оператор относительно E_-. Угловой оператор не единствен.

90. Если K — какой-нибудь угловой оператор подпространства L относительно E_+, то K^* — угловой оператор подпространства $L^{(\perp)}$ относительно E_-.

91. Для того чтобы подпространство L было максимальным J-неотрицательным, необходимо и достаточно, чтобы существовал угловой оператор K подпространства L относительно E_+, являющийся сжатием.

92. В условиях **91** подпространство L будет максимальным J-положительным тогда и только тогда, когда $\|Kx\| < \|x\|$ $(x \in E_+,\ x \neq 0)$.

93. В условиях **91** подпространство L будет максимальным J-нейтральным тогда и только тогда, когда $\|Kx\| = \|x\|$ $(x \in E_+)$.

Если подпространство L J-положительно, то таковыми же будут подпространства, близкие к L в смысле раствора. Точнее:

94. Если подпространство L J-положительно и

$$\theta(L,\ M) < \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1-\|K\|}{\sqrt{1+\|K\|}},$$

то подпространство M также J-положительно.

Эта оценка точна.

§ 5. Псевдосамосопряженные и псевдоунитарные операторы

Введем аналоги самосопряженного и унитарного операторов в пространстве Понтрягина.

Оператор S называется *псевдосамосопряженным* (или *J-самосопряженным*), если

$$[Sx,\ y] = [x,\ Sy] \qquad (x,\ y \in E),$$

т. е. $S = JS^*J$.

Оператор U называется *псевдоунитарным* (или *J-унитарным*), если

$$[Ux,\ Uy] = [x,\ y] \qquad (x,\ y \in E),$$

т. е. $U^*JU = J$.

95. Если подпространство L приводит псевдосамосопряженный оператор S, то подпространство $L^{(\perp)}$ также приводит S.

96. Если подпространство L приводит псевдоунитарный оператор U, то подпространство $L^{(\perp)}$ также приводит U.

97. Спектр псевдосамосопряженного оператора симметричен относительно вещественной оси.

98. Спектр псевдоунитарного оператора симметричен относительно единичной окружности (т. е. если $\lambda \in \sigma(U)$, то $\bar{\lambda}^{-1} \in \sigma(U)$).

99. Если S — псевдосамосопряженный оператор и $\omega \bar{\in} \sigma(S)$, то его преобразование Кэли

$$U = (S - \bar{\omega}I)(S - \omega I)^{-1}$$

есть псевдоунитарный оператор и $1 \bar{\in} \sigma(U)$.

Обратно:

100. Если U — псевдоунитарный оператор и $1 \bar{\in} \sigma(U)$, то его преобразование Кэли

$$S = (\omega U - \bar{\omega}I)(U - I)^{-1}$$

есть псевдосамосопряженный оператор.

101. Если S — псевдосамосопряженный оператор, то оператор $U = e^{iS}$ псевдоунитарный.

Обратно:

102. Если U — псевдоунитарный оператор, то существует псевдосамосопряженный оператор S такой, что $U = e^{iS}$.

103. Если спектр псевдосамосопряженного оператора S положителен, то оператор S_1 с положительным спектром, удовлетворяющий уравнению $S_1^2 = S$, также псевдосамосопряженный.

Существование и единственность оператора S_1 обеспечиваются теоремами **150**, **190** гл. II.

104. Если псевдосамосопряженный оператор S псевдонеотрицателен, т. е. $[Sx, x] \geqslant 0$ $(x \in \mathrm{E})$, то его спектр вещественный.

Два подпространства называются *косо-связанными*, если ни в одном из них нет вектора $x \neq 0$, J-ортогонального другому подпространству.

105. Корневые подпространства $W_\zeta(U)$ и $W_{1/\bar{\zeta}}(U)$ псевдоунитарного оператора U при $|\zeta| \neq 1$ косо-связаны.

106. Корневые подпространства $W_\lambda(S)$ и $W_{\bar\lambda}(S)$ псевдосамосопряженного оператора S при $\lambda \neq \bar\lambda$ косо-связаны.

107. Если $\lambda \neq \bar\mu^{-1}$, то корневые подпространства $W_\lambda(U)$ и $W_\mu(U)$ псевдоунитарного оператора U J-ортогональны. В частности, при $|\zeta| \neq 1$ корневое подпространство $W_\zeta(U)$ J-ортогонально к себе.

108. Если $\lambda \neq \bar\mu$, то корневые подпространства $W_\lambda(S)$ и $W_{\bar\lambda}(S)$ псевдосамосопряженного оператора S J-ортогональны. В частности, при $\lambda \neq \bar\lambda$ корневое подпространство $W_\lambda(S)$ J-ортогонально к себе.

109. Кратность каждого собственного значения $\zeta\,(|\zeta| \neq 1)$ псевдоунитарного оператора не превосходит $\min(\varkappa, n-\varkappa)$.

110. Кратность каждого собственного значения λ $(\lambda \neq \bar\lambda)$ псевдосамосопряженного оператора не превосходит $\min(\varkappa, n-\varkappa)$.

111. Число не равных по модулю единице различных собственных значений псевдоунитарного оператора не превосходит $2\min(\varkappa, n-\varkappa)$.

112. Число различных невещественных собственных значений псевдосамосопряженного оператора не превосходит $2\min(\varkappa, n-\varkappa)$.

Предложения **109—112** можно обобщить:

113. Если U — псевдоунитарный оператор и L — сумма всех его корневых подпространств $W_\zeta(U)$ при $|\zeta| > 1$ (или при $|\zeta| < 1$), то $\dim \mathrm{L} \leqslant \min(\varkappa, n-\varkappa)$.

114. Если S — псевдосамосопряженный оператор и L — сумма всех его корневых подпространств $W_\lambda(S)$ при $\operatorname{Im}\lambda > 0$ (или при $\operatorname{Im}\lambda < 0$), то $\dim \mathrm{L} \leqslant \min(\varkappa, n-\varkappa)$.

§ 6. Инвариантные подпространства псевдосамосопряженных и псевдоунитарных операторов

Этот параграф посвящен вопросу о существовании и свойствах знакопостоянных инвариантных подпространств. Мы сначала исследуем его для одного специального класса операторов (так называемых строгих псевдорастяжений), множество предельных точек которого содержит псевдоунитарные операторы. Таким образом можно будет установить существование упомянутых подпространств для псевдоунитарных операторов путем предельного перехода. Перенести полученный результат на псевдосамосопряженные операторы можно с помощью преобразования Кэли **99**.

Оператор B называется *псевдорастяжением*, если

$$[Bx, Bx] \geqslant [x, x] \qquad (x \in \mathrm{E}).$$

Псевдорастяжение B называется *строгим*, если в этом соотношении знак равенства имеет место лишь при $x = 0$. Аналогично определяются *псевдосжатие* и *строгое псевдосжатие*. Очевидно, если B — обратимое псевдосжатие (строгое псевдосжатие), то B^{-1} — псевдорастяжение (соответственно строгое псевдорастяжение).

115. Если B — строгое псевдорастяжение, то прямая сумма корневых подпространств, соответствующих его собственным значениям λ, для которых $|\lambda| < 1$ ($|\lambda| > 1$), есть J-отрицательное (соответственно J-положительное) подпространство.

Доказательство можно получить, итерируя неравенство

$$[Bx, Bx] > [x, x].$$

116. Любое строгое псевдорастяжение обладает максимальным J-положительным инвариантным подпространством M_+ ($\dim M_+ = \varkappa$) и максимальным J-отрицательным инвариантным подпространством M_- ($\dim M_- = n - \varkappa$). При этом $M_+ \dotplus M_- = \mathrm{E}$ и спектр $\sigma(B \mid M_+)$ лежит в области $|\lambda| > 1$, а спектр $\sigma(B \mid M_-)$ — в области $|\lambda| < 1$.

117. Любое псевдорастяжение B обладает максимальным J-неотрицательным инвариантным подпространством, в котором все его собственные значения по модулю не меньше единицы.

Доказательство можно получить с помощью предельного перехода.

118. Любое обратимое псевдорастяжение B обладает максимальным J-неотрицательным инвариантным подпространством M_+ ($\dim M_+ = \varkappa$) и максимальным J-неположительным инвариантным подпространством M_- ($\dim M_- = n - \varkappa$). При этом $\sigma(B \mid M_+)$ лежит в замкнутой области $|\lambda| \geqslant 1$, а $\sigma(B \mid M_-)$ — в замкнутой области $|\lambda| \leqslant 1$.

Формулировка соответствующих предложений для псевдосжатий не представляет труда и может быть опущена.

Так как любой псевдоунитарный оператор является обратимым псевдорастяжением, то:

119. Любой псевдоунитарный оператор U обладает максимальными J-неотрицательным и J-неположительным инвариантными подпространствами.

А так как оператор U одновременно является обратимым псевдосжатием, то при $\varkappa \leqslant n - \varkappa$:

120. Любой псевдоунитарный оператор U обладает $\varkappa$-мерными J-неотрицательными подпространствами M_e и M_i такими, что $\sigma(U \mid M_e)$ лежит в замкнутой области $|\lambda| \geqslant 1$, а $\sigma(U \mid M_i)$ — в замкнутой области $|\lambda| \leqslant 1$.

121. Подпространство M_e содержит все корневые подпространства $W_\zeta(U)$ с $|\zeta| > 1$, а подпространство M_i — все корневые подпространства $W_\zeta(U)$ с $|\zeta| < 1$.

Прямая сумма M всех корневых подпространств псевдоунитарного оператора U, соответствующих собственным значениям ζ с $|\zeta| \neq 1$, называется *гиперболическим* инвариантным подпространством оператора U.

122. Подпространства $\mathrm{M} \cap M_e$, $\mathrm{M} \cap M_i$ косо-связаны и

$$\mathrm{M} = (\mathrm{M} \cap M_e) \dot{+} (\mathrm{M} \cap M_i).$$

123. Если M — гиперболическое инвариантное подпространство псевдоунитарного оператора, то $\mathrm{M} \dot{+} \mathrm{M}^{(\perp)} = \mathrm{E}$.

124. Спектр $\sigma\left(U \mid \mathrm{M}^{(\perp)}\right)$ лежит на единичной окружности.

125. Имеет место равенство

$$\dim(\mathrm{M} \cap M_e) = \dim(\mathrm{M} \cap M_i)$$

и существуют в $\mathrm{M} \cap M_e$ и $\mathrm{M} \cap M_i$ базисы $\Delta_e = \{g_j\}_1^r$ и $\Delta_i = \{h_k\}_1^r$ такие, что

$$[g_j, h_k] = \delta_{jk} \qquad (j, k = 1, \ldots, r).$$

В базисе $\{g_1, \ldots, g_r, h_1, \ldots, h_r\}$ блочная матрица псевдоунитарного оператора U имеет вид

$$\begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & (V^*)^{-1} \end{pmatrix}.$$

126. Жордановы структуры псевдоунитарного оператора U в корневых подпространствах $W_\zeta(U)$ и $W_{1/\bar{\zeta}}(U)$ при $|\zeta| \neq 1$ одинаковы.

127. Любой псевдосамосопряженный оператор S обладает максимальными J-неотрицательным и J-неположительным инвариантными подпространствами.

128. Любой псевдосамосопряженный оператор S обладает $\varkappa$-мерными (при $\varkappa \leqslant n - \varkappa$) J-неотрицательными подпространствами L_i и L_e такими, что $\sigma(S \mid \mathrm{L}_i)$ лежит в замкнутой области $\mathfrak{Im}\,\lambda \geqslant 0$, а $\sigma(S \mid \mathrm{L}_e)$ в замкнутой области $\mathfrak{Im}\,\lambda \leqslant 0$.

129. Подпространство L_i содержит все корневые подпространства $\mathrm{W}_\lambda(S)$ с $\mathfrak{Im}\,\lambda > 0$, а подпространство L_e — все корневые подпространства $\mathrm{W}_\lambda(S)$ с $\mathfrak{Im}\,\lambda < 0$.

Прямая сумма L всех корневых подпространств псевдосамосопряженного оператора S, соответствующих невещественным собственным значениям, называется ***гиперболическим*** инвариантным подпространством оператора S.

130. Подпространства $\mathrm{L} \cap \mathrm{L}_i$, $\mathrm{L} \cap \mathrm{L}_e$ косо-связаны и

$$\mathrm{L} = (\mathrm{L} \cap \mathrm{L}_i) \dot{+} (\mathrm{L} \cap \mathrm{L}_e).$$

131. Если L—гиперболическое инвариантное подпространство псевдосамосопряженного оператора S, то $\mathrm{L} \dot{+} \mathrm{L}^{(\perp)} = \mathrm{E}$.

132. Спектр $\sigma(S \mid \mathrm{L}^{(\perp)})$ вещественный.

133. Имеет место равенство

$$\dim(\mathrm{L} \cap \mathrm{L}_i) = \dim(\mathrm{L} \cap \mathrm{L}_e)$$

и существуют в $\mathrm{L} \cap \mathrm{L}_i$ и $\mathrm{L} \cap \mathrm{L}_e$ базисы $\Delta_i = \{g_j\}_1^r$ и $\Delta_e = \{h_k\}_1^r$ такие, что

$$[g_j, h_k] = \delta_{jk} \qquad (j, k = 1, \ldots, r).$$

В базисе $\{g_1, \ldots, g_r, h_1, \ldots, h_r\}$ блочная матрица псевдосамосопряженного оператора S имеет вид

$$\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T^* \end{pmatrix}.$$

134. Жордановы структуры псевдосамосопряженного оператора S в корневых подпространствах $\mathrm{W}_\lambda(S)$ и $\mathrm{W}_{\bar{\lambda}}(S)$ при $\mathfrak{Im}\,\lambda \neq 0$ одинаковы.

В заключение параграфа отметим, что теоремы о существовании знакопостоянных инвариантных подпространств имеют место и при более широких предположениях, чем принимавшиеся выше. Так, например, в **115** можно, не меняя доказательства, предполагать, что неравенство

$$[Bx, Bx] > [x, x]$$

выполняется лишь при $[x, x] \geqslant 0$ $(x \neq 0)$. Еще более общий характер носит приводимая ниже теорема **135**.

Пусть A — произвольный оператор и Δ — его жорданов базис. Отберем из Δ J-положительные собственные векторы и векторы, присоединенные к ним. Линейную оболочку выбранных векторов обозначим через M_+. Аналогично построим подпространство M_-.

135. Если оператор A удовлетворяет условию

$$[Ax, Ax] > 0 \qquad ([x, x] \geqslant 0, \ x \neq 0),$$

то пространство M_+ — максимальное J-положительное, пространство M_- — максимальное J-отрицательное и $\mathrm{M}_+ \dot{+} \mathrm{M}_- = \mathrm{E}$.

Для доказательства можно использовать леммы **136** и **137**.

136. Если модули собственных значений некоторого оператора $T \in \mathfrak{M}(\mathrm{E})$ различны, то для любого вектора $x \in \mathrm{E}$ $(x \neq 0)$ найдется вещественная числовая последовательность $\{\alpha_k\}_1^\infty$ такая, что существует и отличен от нуля предел $\lim\limits_{k \to \infty} \alpha_k T^k x$.

Этот предел, очевидно, является собственным вектором оператора T.

137. Множество операторов A, удовлетворяющих условию $[Ax, Ax] > 0$ $([x, x] \geqslant 0, \ x \neq 0)$, открыто в $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$.

Отметим, что из **135** предельным переходом получается:

138. Если оператор A удовлетворяет условию $[Ax, Ax] \geqslant 0$ $([x, x] \geqslant 0)$, то он обладает максимальным J-неотрицательным инвариантным подпространством.

Укажем еще на связь рассматриваемых вопросов с операторными дробно-линейными преобразованиями:

139. Пусть оператор A удовлетворяет условиям **136** и обратим. Если L — произвольное максимальное J-неотрицательное подпространство, то $A\mathrm{L}$ — также максимальное J — неотрицательное подпространство.

140. Если в условиях **136** K — угловой оператор подпространства L относительно E_+, то оператор

$$\Phi(K) = (A_{11} + A_{12}K)(A_{21} + A_{22}K)^{-1}.$$

где $A_{11}=P_-AP_+$, $A_{12}=P_-AP_-$, $A_{21}=P_+AP_+$, $A_{22}=P_+AP_-$, является угловым оператором подпространства $A\mathrm{L}$ относительно E_+.

Согласно **91** при $\|K\|\leqslant 1$ выполняется неравенство $\|\Phi(K)\|\leqslant 1$, и теорема **140** сводится к существованию неподвижной точки у преобразования Φ в «операторном круге» $\|K\|\leqslant 1$.

§ 7. Квадратичный пучок самосопряженных операторов

Квадратичным пучком самосопряженных операторов называется квадратный трехчлен

$$K(\lambda)=\lambda^2 I+\lambda B+C$$

с самосопряженными коэффициентами B, C. Если при некотором комплексном λ_0 уравнение

$$K(\lambda)x=0$$

имеет нетривиальное решение, то число λ_0 называется *собственным значением* пучка $K(\lambda)$. Количество различных собственных значений пучка $K(\lambda)$ не превосходит $2n$. Множество собственных значений пучка $K(\lambda)$ назовем его *спектром* и будем обозначать $\sigma(K)$.

Определим в пространстве $\tilde{\mathrm{E}}=\mathrm{E}+\mathrm{E}$ оператор A с помощью блочной матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{C} \\ -\sqrt{C} & -B \end{pmatrix},$$

где $\sqrt{C}$ — какой-нибудь квадратный корень из C. Оператор A называется ассоциированным с пучком $K(\lambda)$.

141. $\sigma(K)=\sigma(A)$.

142. Спектр $\sigma(K)$ симметричен относительно вещественной оси.

143. Если $C\leqslant 0$, то спектр $\sigma(K)$ вещественный.

144. Если $B>0$ ($\geqslant 0$), то спектр $\sigma(K)$ лежит в открытой (замкнутой) левой полуплоскости.

145. Если $B^2<4\theta^2C$ $(0<\theta<1)$, то спектр $\sigma(K)$ лежит в области $|\pi/2\pm\arg\lambda|<\alpha$, где $\alpha=\arcsin\theta$.

С квадратичным пучком $K(\lambda)$ ассоциируется также операторное квадратное уравнение

$$Z^2 + BZ + C = 0. \qquad (*)$$

146. Если оператор Z является корнем уравнения $(*)$, то $\sigma(Z) \subset \sigma(K)$.

147. Если Z_1—корень уравнения $(*)$ и $Z_2 = -(B + Z_1^*)$, то

$$K(\lambda) = (\lambda I - Z_2^*)(\lambda I - Z_1).$$

При этом оператор Z_2 также является корнем уравнения $(*)$ и имеют место «операторные формулы Виета»

$$Z_1 + Z_2^* = -B, \quad Z_2^* Z_1 = C.$$

Корни Z_1, Z_2 называются взаимно сопутствующими.

Если $C \geqslant 0$ и при всех $x \neq 0$

$$(Bx, x)^2 > 4(Cx, x)(x, x),$$

то пучок $K(\lambda)$ называется *сильно демпфированным.*

148. Собственные значения сильно демпфированного пучка $K(\lambda)$ отрицательны.

149. Если $K(\lambda)$ — сильно демпфированный пучок, то ассоциированный с ним оператор A является J-самосопряженным, где оператор J определяется в $\breve{\mathrm{E}} = \mathrm{E} + \mathrm{E}$ блочной матрицей

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

150. Если $K(\lambda)$ — сильно демпфированный пучок, а K — угловой оператор максимального J-неотрицательного инвариантного подпространства оператора A, то оператор $Z_1 = K\sqrt{C}$ является корнем квадратного уравнения $(*)$.

В дальнейших задачах этого параграфа пучок $K(\lambda)$ предполагается сильно демпфированным.

151. Корень Z_1 удовлетворяет неравенству $Z_1^* Z_1 \leqslant C$. Сопутствующий корень Z_2 удовлетворяет неравенству $Z_2^* Z_2 \geqslant C$.

152. Корни уравнения $(*)$, удовлетворяющие неравенствам **151**, определяются однозначно и являются взаимно сопутствующими.

153. $Z_2 - Z_1 > 0$.

154. Операторы Z_1 и Z_2 являются самосопряженными в пространстве Фридрихса $\mathrm{E}[Z_2 - Z_1]$.

155. $\sigma(K) = \sigma(Z_1) \cup \sigma(Z_2)$.

Занумеруем собственные значения $\lambda_k^{(1)}$ и $\lambda_k^{(2)}$ $(k = 1, \ldots, n)$ операторов Z_1 и Z_2 обычным образом.

Собственные значения $\lambda_1^{(1)}, \ldots, \lambda_n^{(1)}, \lambda_1^{(2)}, \ldots, \lambda_n^{(2)}$ квадратичного пучка $K(\lambda)$ обладают минимаксимальными свойствами, аналогичными соответствующим свойствам для самосопряженного оператора S, но теперь роль (Sx, x) будет играть пара функционалов

$$p^{(1,2)}(x) = -(Bx, x) \mp \sqrt{(Bx, x)^2 - 4(Cx, x)(x, x)}.$$

156. Имеют место формулы Даффина:

$$\lambda_1^{(1)} = \max_{\substack{\|x\|=1,\\ x\in\mathrm{E}}} p^{(1)}(x), \quad \lambda_{n-k+1}^{(1)} = \max_{\mathrm{L}} \min_{\substack{\|x\|=1,\\ x\in\mathrm{L}}} p^{(1)}(x) \quad (k = 2, \ldots, n),$$

$$\lambda_1^{(2)} = \max_{\substack{\|x\|=1,\\ x\in\mathrm{E}}} p^{(2)}(x), \quad \lambda_{n-k+1}^{(2)} = \max_{\mathrm{L}} \min_{\substack{\|x\|=1,\\ x\in\mathrm{L}}} p^{(2)}(x) \quad (k = 2, \ldots, n),$$

где L пробегает множество подпространств коразмерности $k-1$.

При этом:

157. $\lambda_1^{(1)} < \lambda_n^{(2)}$.

§ 8. Дробно-линейные преобразования с операторными коэффициентами

Мы уже встречались с этими преобразованиями в **140** и § 7 гл. IX. Здесь мы рассмотрим такие преобразования в связи с операторными окружностями.

Операторной окружностью называется множество операторов $Z \in \mathfrak{M}(\mathrm{E})$, определяемое уравнением

$$Z^*AZ + Z^*B + B^*Z + C = 0 \tag{1}$$

или уравнением

$$ZAZ^* + ZB + B^*Z^* + C = 0, \tag{1*}$$

где $A > 0$, $C = C^*$.

Операторные окружности (1) и (1*) взаимно двойственны. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением окружностей вида (1).

158. Для того чтобы операторная окружность была непустым множеством, необходимо и достаточно, чтобы $B^*AB - C \geqslant 0$.

Последнее неравенство всюду ниже предполагается выполненным.

159. Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$Z = Z_0 + R_1 U R_2,$$

где

$$Z_0 = -A^{-1}B, \quad R_1 = A^{-1/2}, \quad R_2 = (B^*AB - C)^{1/2}, \quad U \in \mathfrak{U}(\mathrm{E}).$$

Оператор Z_0 называется центром операторной окружности, а R_1 и R_2 — ее левым и правым радиусами.

160. Если $Z_0 \in \mathfrak{M}(\mathrm{E})$ и $R_1 > 0$, $R_2 > 0$, то точка $Z = Z_0 + R_1 U R_2$, где U пробегает множество унитарных операторов, пробегает операторную окружность с центром в точке Z_0 и левым и правым радиусами R_1, R_2.

161. Линейная функция $W = W_0 + FZG$ с любым $W_0 \in \mathfrak{M}(\mathrm{E})$ и обратимыми коэффициентами F, G преобразует операторную окружность в операторную окружность.

162. Инверсия $W = Z^{-1}$ преобразует операторную окружность в операторную окружность, если $C > 0$.

В простейшем случае, когда уравнение (1) имеет вид $Z^*Z = I$, операторная окружность превращается в множество $\mathfrak{U}(\mathrm{E})$ унитарных операторов, а область

$$\mathfrak{K} = \{Z \mid Z^*Z < I\},$$

называемая единичным открытым *операторным кругом*, — в множество строгих сжатий. Замыкание этой области есть единичный замкнутый операторный круг

$$\bar{\mathfrak{K}} = \{Z \mid Z^*Z \leqslant I\}.$$

Операторный круг $\mathfrak{K}$ и его замыкание $\bar{\mathfrak{K}}$ совпадают соответственно с открытым и замкнутым единичным шаром пространства $\mathfrak{M}(\mathrm{E})$ в операторной норме. Подчеркнем, что окружность $Z^*Z = I$ не совпадает с границей круга $Z^*Z \leqslant I$, а составляет лишь ее часть (а именно, множество всех крайних точек этого круга как выпуклого тела, см. 11).

Займемся изучением дробно-линейных преобразований круга $\mathfrak{K}$ на себя.

Следующая теорема является обобщением теоремы **20**:

163. При любом $B \in \mathfrak{K}$ преобразование

$$W = (I - BB^*)^{-1/2}(Z - B)(I - B^*Z)^{-1}(I - B^*B)^{1/2}$$

отображает взаимно однозначно каждое из множеств $\mathfrak{K}$, $\bar{\mathfrak{K}}$ и $\mathfrak{U}(\mathrm{E})$ на себя.

Для доказательства можно воспользоваться тем, что:

164. Имеет место равенство

$$I - W^*W = T^*(I - Z^*Z)T,$$

где $T = (I - B^*Z)^{-1}(I - B^*B)^{1/2}$.

Обозначим для краткости дробно-линейное преобразование **163** через $W = \Phi[Z;\ B]$.

165. Если $W = \Phi[Z;\ B]$ $(Z,\ B \in \mathfrak{K})$, то

$$Z = \Phi[W;\ -B].$$

166. Если $Z \in \bar{\mathfrak{K}}$, $B \in \mathfrak{K}$ и $U \in \mathfrak{U}(\mathrm{E})$, то

$$\Phi[UZ;\ B] = U\Phi[Z;\ U^*B],$$
$$\Phi[ZU;\ B] = \Phi[Z;\ BU^*]\,U.$$

167. Если $Z \in \bar{\mathfrak{K}}$, B_1, $B_2 \in \mathfrak{K}$, то

$$\Phi[\Phi[Z;\ B_1];\ B_2] = V\Phi[Z;\ \Phi[B_2;\ -B_1]]\,V^{-1},$$

где

$$V = (I - \Phi[B_2;\ -B_1]^*\Phi[B_2;\ -B_1])^{-1/2}C,$$
$$C = (I - B_1^*B_1)^{1/2}(I + B_2^*B_1)^{-1}(I - B_2^*B_2)^{1/2}.$$

168. Оператор V унитарный.

Подведем итог:

169. Пусть $\mathfrak{G}$ — множество преобразований вида

$$U_1\Phi[\circ;\ B]\,U_2,$$

где $B \in \mathfrak{K}$, U_1, $U_2 \in \mathfrak{U}(\mathrm{E})$. Это множество обладает следующими свойствами:

1) каждое преобразование из $\mathfrak{G}$ отображает взаимно однозначно круг $\mathfrak{K}$ (а также множества $\bar{\mathfrak{K}}$ и $\mathfrak{U}(\mathrm{E})$) на себя;

2) вместе с каждым преобразованием множество $\mathfrak{G}$ содержит обратное преобразование;

3) произведение двух преобразований из $\mathfrak{C}$ также принадлежит $\mathfrak{C}$.

Таким образом, $\mathfrak{C}$ есть группа.

170. Если дробно-линейное преобразование

$$W = (A_{11} + A_{12}Z)(A_{21} + A_{22}Z)^{-1}$$

отображает взаимно однозначно операторный круг $\mathfrak{K}$ на себя, то оно принадлежит $\mathfrak{C}$.

Как известно, в скалярном случае имеет место более сильное утверждение: если аналитическая функция $w(z)$ взаимно однозначно отображает единичный круг на себя, то она имеет вид

$$w(z) = \gamma \frac{z - \beta}{1 - \bar{\beta} z} \qquad (|\gamma| = 1, \ |\beta| < 1).$$

Это предложение также может быть распространено на операторный случай *).

*) См. C. L. Siegel, Symplectic geometry, Amer. J. Math. 45 (1943), 1—86.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОБЩИЕ РУКОВОДСТВА

Алгебра

1. Биркгоф Г., Теория структур, ИЛ, 1952.
2. Бурбаки Н., Алгебра (Модули, кольца, формы), «Наука», 1966.
3. Бэр Р., Линейная алгебра и проективная геометрия, ИЛ, 1955.
4. Ван дер Варден, Современная алгебра, I, II, Гостехиздат, 1947.
5. Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, Физматгиз, 1962.
6. Курош А. Г., Теория групп, изд. 3, доп., «Наука», 1967.

Анализ

7. Бурбаки Н., Функции действительного переменного, «Наука», 1965.
8. Дьедонне Ж., Основы современного анализа, «Мир», 1964.
9. Рудин У., Основы математического анализа, «Мир», 1966.

Топология

10. Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, Гостехиздат, 1948.
11. Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, Физматгиз, 1958.
12. Хаусдорф Ф., Теория множеств, ОНТИ, 1937.

Линейная алгебра

13. Бурбаки Н., Алгебра (Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра), Физматгиз, 1962.
14. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, «Наука», 1966.
15. Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, изд. 3, «Наука», 1966.

16. Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, Гостехиздат, 1948.
17. Халмош П., Конечномерные векторные пространства, Физматгиз, 1963.
18. Шилов Г. Е., Введение в теорию линейных пространств, Гостехиздат, 1952.
19. Шрейер О., Шпернер Е., Введение в линейную алгебру в геометрическом изложении, ОНТИ, 1934.
20. Шрейер О., Шпернер Е., Теория матриц, ОНТИ, 1936.

Функциональный анализ

21. Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, «Наука», 1966.
22. Банах С. С., Курс функціонального аналізу, «Рад. школа», 1948.
23. Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, ИЛ, 1959.
24. Вулих Б. З., Введение в функциональный анализ, «Наука», 1967.
25. Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы (общая теория), ИЛ, 1962.
26. Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы (спектральная теория), «Мир», 1966.
27. Дэй М. М., Нормированные линейные пространства, ИЛ, 1961.
28. Иосида К., Функциональный анализ, «Мир», 1967.
29. Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1959.
30. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, «Наука», 1968.
31. Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, «Наука», 1965.
32. Морен К., Методы гильбертова пространства, «Мир», 1965.
33. Плеснер А. И., Спектральная теория линейных операторов, «Наука», 1965.
34. Райков Д. А., Векторные пространства, Физматгиз, 1962.
35. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, ИЛ, 1954.
36. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. V, Физматгиз, 1959.

СПЕЦИАЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА *)

К главе I

1. Ароншайн Н., Квадратичные формы на векторных пространствах, Сб. перев. «Математика» 8:5 (1964), 102—155 [8, 9, 10].

---

*) В квадратных скобках указываются номера параграфов, к которым относится цитируемый источник. Если такого указания нет, то соответствующий источник относится к главе в целом.

2. Гельфанд И. М., Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren, Мат. сб. **4** (1938), 235—286 [12].
3. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Категории конечномерных пространств, Вестник МГУ, сер. мат. № 4 (1963), 27—48.
4. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., Основные положения о дефектных числах, корневых векторах и индексах линейных операторов, УМН **XII**, вып. 2 (74) (1957), 43—118 [4, 7, 8].
5. Гротендик А., Теория Фредгольма, Сб. перев. «Математика», **2** : 5 (1958), 51—103 [4, 7].
6. Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, ИЛ, 1960 [5, 8].
7. Рисс Ф., О линейных функциональных уравнениях, УМН **1** (1936), 175—199 [4, 7].
8. Скорняков Л. А., Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца, Физматгиз, 1961 [3].
9. Шмульян В. Л., Линейные топологические пространства и их связь с пространствами типа (B), ДАН СССР **22** (1939), 475—477 [12].
10. Dunford N., Integration in general analysis, Trans. Amer. Math. Soc., **37** (1935), 441—453 [12].
11. Frendholm I., Sur une classe d' equations fonctionelles, Acta Math. **27** (1903), 365—390 [4, 7].
12. Grothendick A., Produits tensoriels topologiques et spaces nucléaires, Memoirs Amer. Math. Soc., № 16 (1955) [8].
13. Hilbert D., Grundzuge einer allgemeinen Theorie des linearen Integralgleichungen, Verl. Teubner, 1912.
14. Neumann J. von, On complete topological space, Trans. Amer. Math. Soc. **37** (1937), 1—20 [11].
15. Schauder J., Über lineare vollstetige Funktional-operationen, Studia Math. **2** (1930), 183—196 [4, 7].
16. Steinitz E., Bedingt konvergente Reihen und convexe Systeme, J. reine und angew. Math. **143** (1914—1916), 144 [12].

К главе II

1. Аронштайн Н., Смит К. Т., Инвариантные подпространства вполне непрерывных операторов, Сб. перев. «Математика», **2** : 1 (1958), 97—102 [2].
2. Бродский М. С., О жордановых клетках бесконечномерных операторов, ДАН СССР **111** (1956), 926—929 [4, 5].
3. Бродский М. С., Об одноклеточности оператора интегрирования и одной теореме Титчмарша, УМН **XX**, вып. 5 (1965), 189—192 [4, 5].
4. Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, ИЛ, 1947.
5. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, «Наука», 1965.
6. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения, «Наука», 1967.

7. Данфорд Н., Обзор теории спектральных операторов, Сб. перев. «Математика» 4 : 1 (1960), 53—100 [3, 8].
8. Джекобсон Н., Теория колец, ИЛ, 1947 [1, 6].
9. Джекобсон Н., Алгебры Ли, «Мир», 1964 [7].
10. Лаппо-Данилевский И. А., Теория функций от матриц и системы линейных дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1934 [5, 6, 10].
11. Любич Ю. И., Мацаев В. И., Об операторах с отделимым спектром, Мат. сб. 56 (1962), 433—468 [3].
12. Наймарк М. А., Континуальный аналог леммы Шура и его применение к формуле Планшереля для комплексных классических групп, Изв. АН СССР, сер. мат. 20 (1956), 3—16 [1].
13. Рисс Ф., О функциях эрмитовых операторов в пространстве Гильберта, УМН IX (1941), 182—190 [6].
14. Чеботарев Н. Г., Введение в теорию алгебр, Гостехиздат, 1949 [1].
15. Friedrichs K. O., Perturbations of spectra in Hilbert space, Amer. Math. Soc., 1965 [9].
16. Halmos P. R., Commutators of operators, I, Amer. J. Math. 74 (1952), 237—240; Amer. J. Math. 76 (1954), 191—198 [7].
17. Kato T., Perturbation theory for linear operators, Springer — Verlag, 1966 [9].
18. Koch H. von, Sur quelques points de la théorie des déterminants infinis, Acta Math. 24, (1900), 89—122 [10].
19. Nelson H., Lectures on invariant subspaces, Acad. Press, New-York — London, 1964 [2, 3].
20. Neumann J. von, Zur algebra der Funktionaloperationen und der Theorie der normalen Operatoren, Math. Ann. 102 (1929), 370—427 [1—6].
21. Neumann J. von, Über Funktionen von Funktionaloperatoren, Ann. Math. 32 (1931), 191—226 [5, 6].
22. Neumann J. von, Über einen Satz von Herrn M. Stone, Ann. Math. 33 (1932), 567—573 [6].
23. Putman C. R., On commutators of bounded matrices, Amer. J. Math. 73 (1951), 127—131 [7].
24. Putman C. R., On the spectra of commutators, Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954), 929—931 [7].
25. Schur I., Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere, Sitzungsber. Preuss. Akad., (1905), 406 [1, 6].
26. Sikorski R., On Lezanski's determinantes of linear equation in Banach spaces, Studia Math. 14 (1958), 24—48 [10].
27. Stampfli G., Sums of projections, Duke Math. J. 31, 3 (1964), 455—461 [8].
28. Sz.-Nagy B., Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raums, Erg. d. Math., Berlin, 1942 [6].
29. Taylor A. E., Spectral theory of unbounded closed operators, Proc. symp. Oklahoma (1951), 267—275 [5].
30. Wermer J., The existence of invariant subspaces, Duke Math. J. 19, 4 (1952), 615—622 [3].

К главе III

1. Аронштайн Н., Квадратичные формы на векторных пространствах, Сб. перев. «Математика» **8** : 5 (1964), 102—155 [1, 2].
2. Бродский М. С., О треугольном представлении вполне непрерывных операторов с одной точкой спектра, УМН **XVI**, вып. 1 (1961), 135—141 [9].
3. Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, ИЛ, 1947.
4. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, «Наука», 1965.
5. Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, т. 1, Гостехиздат, 1951.
6. Нейман И. фон, Математические основы квантовой механики, «Наука», 1964.
7. Сахнович Л. А., Исследование треугольной модели несамосопряженных операторов, Изв. вузов, Математика, № 4 (1959), 141—149 [9].
8. Carleman T., Sur les équations intégrales singulières a noyau réel et symmetrique, Uppsala, 1923 [5].
9. Fischer E., Über quadratische Formen mit reelen Koeffizienten, Monatsh. Math. Physik **16** (1905), 234—249 [8].
10. Frobenius G., Über unitäre Matrizen, Sitzungsber. Kön. Preuss. Akad. Wiss. **XVI** (1911), 373—378 [6].
11. Gram J. P., Ueber die Entwickelung reeler Funktionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate, J. Crelle **XCIV** (1883), 41—73 [3].
12. Hausdorff F., Der Wertevorrat einer Bilinearform, Math. Z. **3** (1919), 314—316 [10].
13. Hildebrandt S., Über numerischen Wertebereich eines Operators, Math. Ann. **163**, № 3 (1966) [10].
14. Kaczmarz S., Angenäherte Auflösung von Systemen linearer Gleichungen, Bull. Internat. Acad. Polon. Sci., Ser. A (1937), 355—357 [5].
15. Ky Fan, Maximum properties and inequalities for the eigenvalues of completely continuous operator, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **37** (1951), 760—766 [9].
16. Mirsky L., The spread of a matrix, Mathematica 3, № 6 (1956), 127—130 [9].
17. Neumann J. von, Allgemeine eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, Math. Ann. **102** (1929—1930), 49—131.
18. Neumann J. von, Zur Algebra der Funktionaloperatoren und der Theorie der normalen Operatoren, Math. Ann. **102** (1929), 370—427.
19. Schur I., Über die charakteristischen Wurzeln einer linearen Substitution mit einer Anwendung auf die Theorie der Integralgleichungen, Math. Ann. **66** (1909), 488—510 [9].
20. Weierstrass K., Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen, Monatsh. Akad. Wiss., Berlin (1867), 310—338 [1, 2, 5].

21. Weyl H., Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen, Math. Ann. **71** (1912), 441—479 [8].
22. Wielandt H., An extremum property of sums of eigenvalues, Proc. Amer. Math. Soc. **6**, № 1 (1955), 106—110 [8].

К главе IV

1. Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, «Наука», 1965 [6].
2. Белицкий Г. Р., О цепях матричных норм, ДАН СССР **151** (1963), 9—10 [10].
3. Белицкий Г. Р., Об автоморфизмах структуры порядка на множестве норм матриц, Мат. сб. **73** (1967) [10].
4. Бернштейн С. Н., Sur le problème inverse de la théorie de la meilleure approximation des fonctions continues, C. R. Acad. Sci. **206** (1938), 1520—1523 [6].
5. Винер Н., Пэли Р., Преобразование Фурье в комплексной области, «Наука», 1964 [7].
6. Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е., Коммутативные нормированные кольца, Физматгиз, 1960 [9, 10].
7. Гохберг И. Ц., Маркус А. С., Две теоремы о растворе подпространств банахова пространства, УМН **14**, вып. 5 (1959), 135—140 [7].
8. Гурарий В. И., Пространства универсального расположения, ДАН СССР **163** (1965), 1050—1053 [5].
9. Гурарий В. И., О наклонах подпространств и существовании ортогонального базиса в пространстве Банаха, Уч. зап. Харьк. мат. об-ва **30** (1964), 34—37 [7].
10. Гурарий В. И., О растворах и наклонах подпространств банахова пространства, Теория функций, функц. ан. и прил., вып. 1 (1965), 194—204 [6, 7].
11. Гурарий В. И., Кадец М. И., Мацаев В. И., О расстояниях между конечномерными аналогами пространств L_p, Мат. сб. **170** (1966), 481—489 [5].
12. Кадец М. И., Доказательство топологической эквивалентности всех сепарабельных бесконечномерных пространств Банаха. Функциональный анализ и его приложения, **1** вып. 1 (1967), 61—70 [5].
13. Кадец М. И., О гомеоморфизме некоторых пространств Банаха, ДАН СССР **92** (1953), 465—468 [6].
14. Колмогоров А. Н., Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes, Studia Math. **5** (1934), 29—33 [1, 2, 3].
15. Колмогоров А. Н., О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале, Уч. зап. МГУ **30** (1939), 3—16 [11].
16. Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б., Выпуклые функции и пространства Орлича, Физматгиз, 1959 [1, 2, 3, 5].
17. Крейн М. Г., О базисах Бари пространства Гильберта, УМН XII, вып. 3 (1957), 333—341 [7].

18. Крейн М. Г., Красносельский М. А., Мильман Д. П., О дефектных числах линейных операторов в банаховом пространстве и некоторых геометрических вопросах, Сб. трудов Ин-та мат. АН УССР 11 (1948), 97—112 [7].
19. Крейн М. Г., Мильман Д. П., Рутман М. А., Об одном свойстве базиса в пространстве Banach'а, Уч. зап. Харьк. мат. об-ва, сер. 4, **16** (1940), 106—110 [7].
20. Левитан Б. М., Почти периодические функции, Гостехиздат, 1953 [8].
21. Любич Ю. И., Почти периодические функции в спектральном анализе операторов, ДАН СССР **132** (1960), 518—520 [8].
22. Любич Ю. И., Об операторных нормах матриц, УМН **XVIII**, вып. 4 (1963), 161—164 [10].
23. Любич Ю. И., О неравенствах между степенями линейного оператора, Изв. АН СССР, сер. мат. **24** (1960), 825—864 [11].
24. Любич Ю. И., Одна теорема об операторах класса K, Теория функций, функц. ан. и прил., вып. 1 (1965), 212—218 [11].
25. Пич А., Ядерные локально-выпуклые пространства, «Мир», 1967.
26. Соломяк М. З., Об ортогональном базисе в пространстве Банаха, Вестник ЛГУ, сер. мат. **1** (1957), 27—36 [6].
27. Урысон П. С., Sur un espace métrique universel, Bull. de Sci. Math. **51** (1927), 1—38 [5].
28. Халмош П. Р., Лекции по эргодической теории, ИЛ, 1959 [8].
29. Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г., Неравенства, ИЛ, 1948 [1, 5, 11].
30. Хаусдорф Ф., Добавление к теории линейных метрических пространств, в книге «Теория множеств», ОНТИ, 1937, 266—290 [1].
31. Ascoli G., Sugli spazi lineari metrici e le loro varieta lineari, Ann. Mat. Pura Appl. **10** (1932), 33—81, 203—232 [4].
32. Banach S., Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, Fund. Math. **3** (1922), 133—181.
33. Dvoretzky A., Rogers C. A., Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **36** (1950), 192—197 [1].
34. Hahn H., Ueber lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen, J. Crelle **CLVII** (1927), 214—229 [4].
35. James R. C., Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **61** (1947), 261—292 [4].
36. Jordan P., Neumann J. von, On line inner products in linear metric spaces, Ann. Math. **36** (1935), 719—723 [1].
37. Mazur S., Über convexe Mengen in linearen normierten Räumen, Studia Math. **4** (1933), 70—84 [4].
38. Mazur S., Ulam S., Sur les transformations isométriques d'espace vectoriel normés, C. R., Acad. Sci. Paris **194** (1932), 946—948 [5].
39. Minkowski H., Gesammelte Abhandlungen, v. II, 1911.
40. Neumann J. von, On complete topological space, Trans. Amer. Math. Soc. **37** (1937), 1—20 [1, 2, 3].

41. Rutovitz D., Some parameters associated with finite dimensional Banach spaces, J. Lond. Math. Soc. **40** (1965), 241—255 [5].
42. Sz.-Nagy B., Perturbations des transformations autoadjointes dans l'espace de Hilbert, Comm. Math. Helv. **19** (1947), 347—366 [7].
43. Sz.-Nagy B., On uniformly bounded linear transformations in Hilbert space, Acta Sci. Math. Szeged **11** (1947), 152—157 [8].
44. Wiener N., Limit in terms of continuous transformations, Bull. Soc. Math. France **50** (1922), 124—134 [1].

К главе V

1. Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, ИЛ, 1947.
2. Де Рам Ж., Дифференцируемые многообразия, ИЛ, 1956, [3].
3. Джекобсон Н., Алгебры Ли, «Мир», 1964 [7].
4. Картан Э., Геометрия римановых пространств, ОНТИ, 1936 [3].
5. Картье П., Теорема Пуанкаре — Биркгофа — Витта, в сб. «Теория алгебр Ли, Топология групп Ли» под ред. Дынкина Е. Б., ИЛ, 1962, 9—22 [7].
6. Картье П., Формула Кэмпбелла — Хаусдорфа, в сб. «Теория алгебр Ли. Топология групп Ли», под ред. Дынкина Е. Б., ИЛ, 1962, 259—264 [7].
7. Уитни Х., Геометрическая теория интегрирования, ИЛ, 1960 [3].
8. Фавар Ж., Курс локальной дифференциальной геометрии, ИЛ, 1960.
9. Чеботарев Н. Г., Теория групп Ли, ОНТИ, 1940 [7].
10. Широков П. А., Тензорное исчисление, Гостехиздат, 1934.
11. Neumann J. von, Some matrix inequalities and metrization of matrix space, Изв. Ин-та мат. и мех. Томск. ун-та **1** (1937), 286—300 [6].
12. Schatten R., A theory of cross-spaces, Princeton, 1950 [6].
13. Weil A., Sur les théorèms de de Rham, Comm. Math. Helv. **26** (1952), 119—145 [3].

К главе VI

1. Далецкий Ю. Л., Интегрирование и дифференцирование операторов, зависящих от параметров, УМН **XII**, вып. 1 (1957), 182—186 [5].
2. Далецкий Ю. Л., Крейн С. Г., Интегрирование и дифференцирование функций эрмитовых операторов и приложения к теории возмущений, Тр. Воронеж. ун-та, вып. 1 (1956), 81—105 [5].
3. Картан Э., Теория спиноров, ИЛ, 1947 [3].
4. Немыцкий В. В., Метод неподвижных точек в анализе, УМН **1** (1936), 141—175 [4].
5. Перов А. И., О многомерных линейных дифференциальных уравнениях с постоянными коэффициентами, ДАН СССР **154** (1964), 1266—1269 [4].

6. Шмульян Ю. Л., О дифференцируемости нормы в пространстве Банаха, ДАН СССР **27** (1940), 643—648 [4].
7. Steinitz E., Bedingt konvergente Reihen und convexe Systeme, J. reine und angew. Math. **143** (1914—1916), 144 [6].

К главе VII

1. Ахиезер Н. и Крейн М., О некоторых вопросах теории моментов, ДНТВУ, 1938 [3].
2. Вейль Г., Элементарная теория выпуклых многогранников, в сб. «Матричные игры» под ред. Воробьева Н. Н., Физматгиз, 1961, 254—273 [2, 3].
3. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, «Наука», 1965 [5].
4. Дмитриев Н. А., Дынкин Е. Б., Характеристические корни стохастических матриц, Изв. АН СССР, сер. мат. **10** (1946), 167—184 [4].
5. Карпелевич Ф. И., О характеристических корнях матрицы с неотрицательными элементами, Изв. АН СССР, сер. мат. **15** (1951), 361—383 [4].
6. Крейн М. Г., О некоторых вопросах геометрии выпуклых ансамблей, принадлежащих линейному нормированному и полному пространству, ДАН СССР **XIV** (1937), 5—8 [3].
7. Крейн М. Г., Про позитивні адитивні функціонали в лінійних нормованих просторах, Уч. зап. Харьк. мат. об-ва **XIV** (1937), 227—237 [3].
8. Крейн М. Г., Мильман Д. П., On extreme points of regularly convex set, Studia Math. **9** (1940), 133—138 [4].
9. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Шкалы банаховых пространств, УМН **XXI**, вып. 2 (1966), 89—168 [7].
10. Лидский В. Б., О собственных значениях суммы и произведения симметрических матриц, ДАН СССР **75** (1950), 769—772 [6].
11. Маркус А. С., Собственные и сингулярные числа суммы и произведения линейных операторов, УМН **XIX**, вып. 4 (1964), 93—123 [4, 5].
12. Митягин Б. С., Интерполяционная теорема для модулярных пространств, Мат. сб. **66** (1965), 473—482 [7].
13. Нудельман А. А., Шварцман П. А., О спектре произведения унитарных матриц, УМН **XIII**, вып. 6 (1958), 111—117 [6].
14. Пароди М., Локализация характеристических чисел матриц и ее применения, ИЛ, 1960 [6].
15. Романовский В. И., Дискретные цепи Маркова, Гостехиздат, 1948 [4].
16. Фань Цзи, О системах линейных неравенств, в сб. «Линейные неравенства», под ред. Канторовича Л. В. и Новожилова В. В., ИЛ, 1959, 214—262 [3].
17. Хадвигер Г., Дебруннер Г., Комбинаторная геометрия плоскости, «Наука», 1965 [2].
18. Хелли Э., О совокупностях выпуклых тел с общими точками, УМН II (1936), 80—81 [2].

19. Amir-Moez A., Extreme properties of eigenvalues of a Hermitian transformations and singular values of the sum and product of linear transformations, Duke Math. J. **23** (1956), 463—476 [5, 6].
20. Birkhoff G., Tres observations Sobre el algebra lineal, Rev. Univ. Nac. Tukuman **5** (1946), 147—151 [4].
21. Bonnesen T., Fenchel W., Theorie der konvexen Körper, Springer — Verlag, 1934.
22. Eidelheit M., Zur Theorie der konvexen Mengen in linearen normierten Räumen, Studia Math. **6** (1936), 104—111 [3].
23. Farkas J., Theorie der einfachen Unfleichungen, J. reine und angew. Math. **124** (1901), 1—27 [3].
24. Horn A., Eigenvalues of sums of Hermitian matrices, Pacif. J. Math. **12** (1962), 225—241 [5, 6].
25. Horn A., On the eigenvalues of a matrix with prescribed singular values, Proc. Amer. Math. Soc. **5** (1954), 4—7 [5].
26. Horn A., On the singular values of product of completely continuous operators, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **36** (1950), 374—375 [5, 6].
27. John F., On symmetric matrices whose eigenvalues satisfy linear inequalities, Proc. Amer. Math. Soc. **17**, 5 (1966), 1140—1145 [6].
28. Ky Fan, On a theorem of Weyl concerning eigenvalues of linear transformations, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **35** (1949), 652—655 [5].
29. Ky Fan, Maximum properties and inequalities for eigenvalues of completely continuous operators, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **37** (1951), 760—766 [5, 6].
30. Minkowski H., Gesammelte Abhandlungen, v. II, 1911.
31. Mirsky L., Symmetric gauge functions and unitarily invariant norms, Quart, J. Math. **11** (1960), 50—59 [5, 6, 7].
32. Ostrowski A., Sur quelques applications des fonctions convexes et concages au sens de I. Schur, J. Math. pur. et appl. **31** (1952), 253—292 [5].
33. Rado R., An inequality, J. Lond. Math. Soc. **27** (1952), 1—6 [4].
34. Ries M., Sur les maxima des formes bilineaires et sur les fonctionelles linéaires, Acta Math. **49**, (1926), 465—497 [7].
35. Schatten R., Norm ideals of completely continuous operator, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1961 [7].
36. Weyl H., Inequalities between the two kinds of eigenvalues of a linear transformation, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **35** (1949), 408—411 [5].
37. Wielandt H., An extremum property of sums of eigenvalues, Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 106—110 [5, 6].

К главе VIII

1. Беккенбах Э., Беллман Р., Неравенства, «Мир», 1965 [5].
2. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г., Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, Гостехиздат, 1950 [5].

3. Гейл Д., Теория линейных экономических моделей, ИЛ, 1963 [2, 3].
4. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, «Наука», 1965 [4].
5. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А., Задачи на экстремум при наличии ограничений, Журн. выч. мат. и мат. физ. **5** (1965), 395—493 [3].
6. Канторович Л. В., О полуупорядоченных линейных пространствах и их применениях в теории линейных операций, ДАН СССР **IV** (1935), 11—14 [1].
7. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Гостехиздат, 1950.
8. Карлин С., Математические методы в теории игр, программировании и экономике, «Мир», 1964 [2, 3].
9. Крейн М. Г., О базисах Бари пространства Гильберта, УМН **XII**, вып. 3 (1957), 333—341 [4].
10. Крейн М. Г., Рутман М. А., Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, УМН **III**, вып. 1 (1948), 3—95 [5].
11. Фань Цзи, О системах линейных неравенств, в сб. «Линейные неравенства», под ред. Канторовича Л. В. и Новожилова В. В., ИЛ, 1959, 214—262 [2].
12. Шмульян Ю. Л., Операторный интеграл Хеллингера, Мат. сб. **49** (1959), 381—430 [7].
13. Юдин А., Решение двух проблем теории полуупорядоченных пространств, ДАН СССР **XXIII** 1939, 418—422 [1].
14. Davis C., Notions generalising convexity for functions defined on spaces of matrices, в сб. «Convexity», Amer. Math. Soc. (1963), 187—201 [9].
15. Frobenius G., Über Matrizen aus nicht negativen Elementen, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. (1912), 456—477 [5].
16. Haar A., Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen, Math. Ann. **78** (1918) [3].
17. Hoffman A. J., Wielandt H. W., The variation of spectrum of a normal matrix, Duke Math. J. **20** (1953), 37—39 [4].
18. Kraus F., Über konvexe Matrixfunktionen, Math. Zeitschr. **41** (1936), 18—42 [9].
19. Ky Fan, Hoffman A. J., Some metric inequalities in the space of matrices, Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 111—116 [4].
20. Löwner K., Über monotone Matrixfunktionen, Math. Zeitschr. **38** (1934), 177—216 [9].
21. Motzkin T. S., Beiträge zur Theorie der linearen Ungleichungen, Jerusalem, 1936 [2].
22. Neumann J. von, Morgenstern O., Theory of games and economic behavior, Princeton Univ. Press, 1953 [2, 3].
23. Perron O., Jacobischer Kettenbruchalgorithmus, Math. Ann. **64** (1907), 1—76 [5].
24. Sz.-Nagy B., Sur les latic linèiares de dimension fini, Comm. Math. Helv. **17** (1944—1945), 209—213 [1].

К главе IX

1. Ахиезер Н. И., Классическая проблема моментов, Физматгиз, 1961 [9].
2. Ахиезер Н. И., Крейн М. Г., О некоторых вопросах теории моментов, ДНТВУ, 1938 [9]
3. Бирман М. С., О спектре сингулярных граничных задач, Мат. сб. 55 (1961), 125—170 [6].
4. Бродский М. С., Лившиц М. С., Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы, УМН **XIII**, вып. 1 (1958), 3—86 [8].
5. Глазман И. М., Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, Физматгиз, 1963 [6].
6. Глазман И. М., Об одном классе решений классической проблемы моментов, Уч. зап. Харьк. мат. об-ва **XX** (1959), 95—98 [9].
7. Глазман И. М., Найман П. Б., О выпуклой оболочке ортогональных спектральных функций, ДАН СССР **102** (1955), 445—448 [9].
8. Красносельский М. А., О самосопряженных расширениях эрмитовых операторов, УМЖ, № 1 (1949), 21—38 [4].
9. Крейн М. Г., Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m), УМЖ, № 2 (1949), 3—66 [4].
10. Крейн М. Г., Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения, I, Мат. сб. **20** (1947), 431—498; II, Мат. сб. **88** (1947), 365—404 [5].
11. Крейн М. Г., Красносельский М. А., Основные теоремы о расширении эрмитовых операторов и некоторые их применения к теории ортогональных полиномов и проблеме моментов, УМН **II**, вып. 3 (1947), 60—106 [5, 9].
12. Лившиц М. С., Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве, Мат. сб. **19** (1946), 239—262 [7].
13. Лившиц М. С., К теории изометрических операторов с равными дефектными числами, ДАН СССР, **58** (1947), 13—15 [7].
14. Лившиц М. С., О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов, Мат. сб. **34** (1954), 145—199 [8].
15. Лившиц М. С., Операторы, колебания, волны, «Наука», 1966 [8].
16. Наймарк М. А., Спектральные функции симметрического оператора, Изв. АН СССР **4** (1940), 277—318 [7].
17. Наймарк М. А., Экстремальные спектральные функции симметрического оператора, Изв. АН СССР **11** (1947), 327—344 [7].
18. Штраус А. В., Характеристические функции линейных операторов, Изв. АН СССР **24** (1960), 43—74 [7].
19. Friedrichs K. O., Spectraltheorie halbbeschränkten Operatoren, Math. Ann. **109** (1934), 465—487, 685—713; **110** (1935), 777—779 [5].
20. Kilpi Y., Über selbstadjungierte Vortsetzungen symmetrischen Transformationen im Hilbertschen Raum, Ann. Acad. Fenn. **23** (1959), [5].

21. Neumann J. von, Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitiesche Funktionaloperatoren, Math. Ann. **102** (1929—1930), 49—131.
22. Penrose R., On best approximate solutions of linear matrix equations, Proc. Cambr. Phil. Soc. **52** (1956), 17—19 [3].

К главе X

1. Беллман Р., Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, ИЛ, 1954 [3].
2. Глазман И. М., О разложимости по системе собственных элементов диссипативных операторов, УМН **XIII**, вып. 3 (1958), 179—181 [1].
3. Гинзбург Ю. И., Иохвидов И. С., Исследования по геометрии бесконечномерных пространств с билинейной метрикой, УМН **XVIII**, вып. 4 (1962), 3—56 [4].
4. Иохвидов И. С., Крейн М. Г., Спектральная теория операторов в пространстве с индефинитной метрикой, Тр. Моск. мат. об-ва **5** (1956), 367—432; **8** (1959), 413—496 [4, 5, 6].
5. Кацнельсон В. Э., Об условиях базисности корневых векторов в некоторых классах несамосопряженных операторов, Функц. ан. и прил., **I**, вып. 2 (1967), 39—59 [1].
6. Кацнельсон В. Э., Мацаєв В. И., О спектральных множествах операторов в банаховом пространстве и оценках функций от конечномерных операторов, Теория функций, функц. ан. и прил., вып. 3 (1966), 3—10 [2].
7. Крейн М. Г., Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, Изд-во АН УССР, 1964 [3].
8. Крейн М. Г., Лангер Г. К., О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуумов, Тр. межд. симп. по прим. теории функций в мех. спл. среды (1965), 283—322 [7].
9. Лумер Г., Филлипс Р., Диссипативные операторы в банаховом пространстве, Сб. перев. «Математика» **7** : 6 (1963), 81—98 [3].
10. Любич Ю. И., Классическое и локальное преобразование Лапласа в абстрактной задаче Коши, УМН **XXI**, вып. 3 (1966), 3—51 [3].
11. Любич Ю. И., Консервативные операторы, УМН **XX**, вып. 5 (1965), 221—225 [3].
12. Маркус А. С., Некоторые признаки полноты системы корневых векторов линейного оператора в банаховом пространстве, Мат. сб. **70** (1966), 526—561 [1].
13. Нейман Дж., Спектральная теория общих операторов в унитарном пространстве, Сб. перев. «Математика» **4** : 1 (1960), 101—124 [2].
14. Понтрягин Л. С., Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой, Изв. АН СССР **8** (1944), 243—280 [4, 5, 6].
15. Потапов В. П., Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций, Тр. Моск. мат. об-ва **4** (1955), 125—236 [8].

16. Пятецкий-Шапиро И. И., Геометрия классических областей и теория автоморфных функций, Физматгиз, 1961 [8].
17. Секефальви-Надь Б., О сжатиях гильбертова пространства, Сб. перев. «Математика» **3** : 6 (1959), 73—77, 79—89 [1].
18. Филлипс Р., Диссипативные операторы и гиперболические системы дифференциальных уравнений в частных производных, Сб. перев. «Математика» **6** : 4 (1962), 11—70 [1].
19. Фойаш К., О некоторых теоремах Дж. Неймана, касающихся спектральных множеств, Сб. перев. «Математика» **4** : 1 (1960), 125—129 [2].
20. Хуа Ло Кен, Гармонический анализ функций комплексных переменных в классических областях, ИЛ, 1959 [8].
21. Шмульян Ю. Л., Нерастягивающие операторы в конечномерном пространстве с индефинитной метрикой, УМН **XVIII**, вып. 6 (1963), 225—230 [5, 6].
22. Duffin R. J., A minimax theory for overdamped networks, J. Rat. Mech. and Anal. **4** (1955), 221—233 [7].
23. Hille E., Le problème abstrait de Cauchy, Rand. Sem. Mat. Univ. e Politech. Torino, **12** (1953), 95—103 [3].

СЛОВАРЬ ОБЩИХ ПОНЯТИЙ

Группа — множество G, наделенное операцией у м н о ж е н и я, которая относит каждой упорядоченной паре $g_1, g_2 \in G$ п р о и з в е д е н и е $g = g_1 g_2 \in G$, причем должны быть выполнены следующие аксиомы:

1) $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$ (а с с о ц и а т и в н ы й з а к о н);

2) существует е д и н и ц а, $e \in G$, обладающая тем свойством, что $ge = eg = g \quad (g \in G)$;

3) для каждого $g \in G$ существует о б р а т н ы й элемент g^{-1}, обладающий тем свойством, что $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.

Легко доказать, что единица и обратный элемент определены однозначно.

Из аксиом группы непосредственно следует однозначная разрешимость уравнений

$$gx = h, \qquad yg = h.$$

Именно: $x = g^{-1}h$, $y = hg^{-1}$. Тем самым определены операции л е в о г о и п р а в о г о д е л е н и й соответственно.

Группа называется а б е л е в о й, если в ней выполняется к о м м у т а т и в н ы й з а к о н: $g_1 g_2 = g_2 g_1$.

В абелевой группе левое и правое деления совпадают.

Г о м о м о р ф и з м о м группы G_1 в группу G_2 называется отображение φ: $G_1 \to G_2$, обладающее тем свойством, что

$$\varphi(g_1 g_2) = (\varphi g_1)(\varphi g_2).$$

Очевидно, при этом $\varphi e = e$, $\varphi(g^{-1}) = (\varphi g)^{-1}$.

Категория (в узком смысле) — класс множеств M_γ с семейством отображений $H_{\beta\alpha} = \{\varphi^{\nu}_{\beta\alpha}\}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $\varphi^{\nu}_{\beta\alpha}$ отображает M_α в M_β при любом ν;

2) произведение $\varphi^{\mu}_{\gamma\beta}\varphi^{\nu}_{\beta\alpha}$ принадлежит семейству $H_{\gamma\alpha}$ при любых $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu$;

3) $H_{\alpha\alpha}$ содержит единичное отображение $M_\alpha \to M_\alpha$ при любом α.

Квазипорядок — бинарное отношение $x < y$ на каком-нибудь множестве M, удовлетворяющее условиям:

1) если $x < y$ и $y < z$, то $x < z$ (т р а н з и т и в н о с т ь);

2) $x < x$ для всех $x \in M$ (р е ф л е к с и в н о с т ь).

Множество, наделенное квазипорядком, называется квазиупорядоченным.

Квазипорядок называется порядком, если из того, что $x \prec y$ и $y \prec x$, следует $x = y$. Множество, наделенное порядком, называется упорядоченным.

Элементы x, y квазиупорядоченного множества называются сравнимыми, если $x \prec y$ или $y \prec x$.

Кольцо — множество R, наделенное операциями сложения и умножения, причем

1) R является абелевой группой относительно сложения;
2) имеют место дистрибутивные законы:

$$(r_1 + r_2) r = r_1 r + r_2 r, \quad r (r_1 + r_2) = r r_1 + r r_2.$$

Оставляя в кольце только операцию сложения, получаем аддитивную группу кольца. Ее единица называется нулем кольца и обычно обозначается через 0. Элемент, обратный к r в аддитивной группе кольца, называется противоположным к r и обозначается через $-r$. Таким образом,

$$r + 0 = 0 + r = r \quad \text{и} \quad r + (-r) = (-r) + r = 0.$$

Термин «деление» в аддитивной группе кольца заменяется термином «вычитание». Соответственно пишут $r - s = r + (-s)$.

Кольцо называется коммутативным, если умножение в нем коммутативно; оно называется ассоциативным, если умножение ассоциативно.

Кольцо R называется полем, если множество $R \setminus \{0\}$ является абелевой группой относительно умножения.

Метрическое пространство — множество, наделенное метрикой, т. е. числовой функцией $\rho(x, y)$, удовлетворяющей условиям:

1) $\rho(x, y) > 0 \quad (x \neq y)$, $\rho(x, x) = 0$;
2) $\rho(y, x) = \rho(x, y)$;
3) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Последнее неравенство называется неравенством треугольника.

Величина $\rho(x, y)$ называется расстоянием между точками x, y.

Пусть $x_0 \in M$, $\varepsilon > 0$. Множества

$$\{x \mid \rho(x, x_0) < \varepsilon\}, \quad \{x \mid \rho(x, x_0) \leqslant \varepsilon\}, \quad \{x \mid \rho(x, x_0) = \varepsilon\}$$

называются открытым шаром, замкнутым шаром и сферой соответственно. Точка x_0 называется центром, число ε — радиусом.

Последовательность $\{x_k\}_1^\infty$ в метрическом пространстве называется сходящейся к x, если

$$\lim_{k \to \infty} \rho(x_k, x) = 0.$$

Каждая сходящаяся последовательность фундаментальна: $\lim\limits_{j, k \to \infty} \rho(x_k, x_j) = 0$. Метрическое пространство называется полным, если в нем каждая фундаментальная последовательность сходится.

Отношение эквивалентности — бинарное отношение $x \sim y$ на каком-нибудь множестве M, удовлетворяющее условиям:

1) если $x \sim y$ и $y \sim z$, то $x \sim z$ (транзитивность);
2) если $x \sim y$, то $y \sim x$ (симметричность);
3) $x \sim x$ (рефлексивность).

Каждое отношение эквивалентности на M определяет разбиение множества M на классы эквивалентности K_α:

$$M = \bigcup_\alpha K_\alpha, \quad K_\alpha \cap K_\beta = \varnothing \qquad (\alpha \neq \beta).$$

Классы должны быть непустыми, и при этом условии разбиение однозначно характеризуется тем, что $x \sim y$ тогда и только тогда, когда x и y входят в один класс.

Полугруппа — множество, наделенное ассоциативным умножением.

Топологическое пространство — множество X, наделенное топологией. Это означает, что в X выделено множество подмножеств G_α, называемых открытыми множествами, с соблюдением следующих требований:

1) объединение любого множества открытых множеств открыто;

2) пересечение конечного множества открытых множеств открыто;

3) множества $\varnothing$, X открыты.

Множество F в топологическом пространстве называется замкнутым, если его дополнение открыто. Имеют место следующие основные утверждения о замкнутых множествах:

1') пересечение любого множества замкнутых множеств замкнуто;

2') объединение конечного множества замкнутых множеств замкнуто;

3') множества X, $\varnothing$ замкнуты.

Топологическое пространство X называется связным, если в нем не существует множеств, являющихся одновременно открытыми и замкнутыми, кроме X и $\varnothing$. Замкнутое множество M в топологическом пространстве X называется связным, если его нельзя разбить на две непустые замкнутые непересекающиеся части.

Подмножество B множества непустых открытых множеств называется базой, а его элементы окрестностями, если каждое непустое открытое множество является объединением некоторого множества элементов из B. При этом элемент $V \in B$ называется окрестностью точки x, если $x \in V$.

Пусть в некотором множестве X выделено множество B непустых подмножеств с соблюдением следующих свойств:

1) если V_1, $V_2 \in B$, то существует такое $V_3 \in B$, что $V_3 \subset V_1 \cap V_2$;

2) для каждой точки x существует такое $V \in B$, что $x \in V$.
Тогда множество X можно наделить (и притом единственным образом) такой топологией, для которой B будет базой. Эта процедура называется заданием топологии с помощью окрестностей. В каждом метрическом пространстве естественно определяется топология с помощью окрестностей вида

$$V(x_0, \varepsilon) = \{x \mid \rho(x, x_0) < \varepsilon\},$$

т. е. всевозможных открытых шаров.

Если одно и то же множество X наделено двумя топологиями и если каждое множество, открытое в одной топологии, является открытым и в другой топологии, то говорят, что первая топология слабее второй (а вторая сильнее первой).

Пусть M — какое-нибудь подмножество топологического пространства X. Точка $x \in X$ называется предельной точкой множества M, если каждое открытое множество, содержащее точку x, содержит некоторую точку $y \in M$, $y \neq x$. Множество предельных точек множества M называется производным множеством множества M и обозначается через M'. Множество $\overline{M} = M \cup M'$ называется замыканием множества M. Оно совпадает с пересечением всех замкнутых множеств, содержащих M. Множество $\partial M = \overline{M} \setminus M$ называется границей множества M, а его точки — граничными точками множества M. Множество $\operatorname{Int} M = M \setminus \partial M$ называется внутренностью множества M, а его точки — внутренними точками множества M.

Говорят, что множества $H_\alpha \subset X$ образуют покрытие множества M, если $M \subset \bigcup_\alpha H_\alpha$. Покрытие называется открытым, если все его элементы открыты.

Топологическое пространство называется отделимым (или хаусдорфовым), если для любых двух точек $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ существуют такие открытые множества G_1, G_2, что

$$x_1 \in G_1, \quad x_2 \in G_2, \quad G_1 \cap G_2 = \varnothing.$$

Множество M в отделимом топологическом пространстве называется компактным (или компактом), если каждое его открытое покрытие $\{H_\alpha\}$ содержит некоторое конечное покрытие $H_{\alpha_1}, H_{\alpha_2}, \ldots, H_{\alpha_m}$. Компактное множество замкнуто. Множество M называется предкомпактным, если его замыкание $\overline{M}$ компактно.

Если X, Y — два топологических пространства, то их топологическим произведением называется декартово произведение $X \times Y$ (т. е. множество пар $\{x, y\}$, где $x \in X$, $y \in Y$), наделенное топологией, в которой открытые множества имеют вид $G \times H$, где $G \subset X$, $H \subset Y$ — открытые множества.

Отображение $\varphi\colon X \to Y$ топологических пространств называется непрерывным, если для любого открытого множества $H \subset Y$ его полный прообраз $\varphi^{-1} H$ открыт.

УКАЗАТЕЛЬ ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\overset{}{\underset{\text{def}}{=}}$ равенство по определению.

$\subset$ нестрогое включение.

$\mathrm{Int}\,\mathrm{F}$ подмножество внутренних точек множества F.

$\partial\mathrm{F}$ граница множества F.

$\mathfrak{Re}$ вещественная часть комплексного числа.

$\mathfrak{Im}$ мнимая часть комплексного числа.

E линейное пространство.

n размерность пространства E.

C^n арифметическое пространство размерности n.

L (Г) линейная оболочка системы векторов Г.

Co выпуклая оболочка.

E/L фактор-пространство E по модулю L.

Hom (E, E_1) пространство гомоморфизмов из E в E_1.

$\mathfrak{B}$ (E_1, E_2) пространство билинейных функционалов на $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$.

$\mathfrak{M}$ (E) пространство операторов в E.

$\sigma(A)$ спектр оператора A.

$\mathrm{sp}\,A$ след оператора A.

R_λ, $R_\lambda(A)$ резольвента оператора A.

$\mathrm{Dom}\,A$ область определения оператора A.

$A\,|\,\mathrm{L}$ сужение оператора на подпространство L.

$\delta(A)$ дефектное число оператора A.

$\tilde{A}$ расширение оператора A.

P проектор.

$\overline{P}$ проектор, дополнительный к P.

$P^\perp$ проектор, ортогональный к проектору P.

S самосопряженный (эрмитов) оператор.

U унитарный оператор.

$[A, B]$ коммутатор операторов A и B.

$\dot{+}$, $\dot{\sum}$ прямая сумма.

$\oplus$, $\bigoplus\limits_{k=1}^{n}$ ортогональная сумма.

(x, y) скалярное произведение векторов x и y.

$\|\ \|$ норма.

$\mathfrak{S}$ (E) пространство самосопряженных операторов в E.

$\mathfrak{U}$ (E) пространство унитарных операторов в E.

$\dim \mathrm{L}$ размерность подпространства L.

$\mathrm{codim}\,\mathrm{L}$ коразмерность подпространства L.

$\mathrm{Ker}\,h$ ядро гомоморфизма h.

$\mathrm{Im}\,h$ образ гомоморфизма h.

$\mathrm{rg}\,h$ ранг гомоморфизма h.

$\mathrm{def}\,h$ дефект гомоморфизма h.

$\mathrm{ind}\,h$ индекс гомоморфизма h.

E′ пространство, сопряженное пространству E.

h' гомоморфизм, сопряженный гомоморфизму h.

K′ клин, сопряженный клину K.

$\mathfrak{a}'$ транспонированная матрица.

$\mathrm{L}^\perp$ подпространство, ортогональное подпространству L.

E* пространство, эрмитово-сопряженное подпространству E.

A^* оператор, эрмитово-сопряженный оператору A.

$\rho(A)$ спектральный радиус оператора A.

$\times$ декартово произведение.

$\otimes$, $\bigotimes_{k=1}^{n}$ тензорное произведение.

$\wedge$ внешнее произведенве.

$\circ$ шуровское произведение.

$\smile$ отношение коммутирования.

$\leqslant$ отношение квазипорядка в линейном пространстве.

$<$ строгое отношенне порядка в линейном пространстве.

$\prec$ полустрогое отношение порядка в линейном пространстве.

$\prec$ отношение квазипорядка в произвольном множестве.

$\approx$ изоморфизм пространств или подобие операторов.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ ТЕОРЕМ *)

Теорема:

*) Здесь ссылки даются на номер главы и номер задачи.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ ТЕРМИНОВ

Израиль Марксович Глазман
Юрий Ильич Любич
Конечномерный линейный анализ

М., 1969 г., 476 стр.

Редакторы *А. З. Рывкин* и *Л. Я. Цлаф*
Техн. редактор *А. А. Благовещенская*
Корректор *М. Ф. Алексеева*

Сдано в набор 23/IV 1968 г. Подписано к печати 27/XI 1968 г. Бумага $84 \times 108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 14,875. Условн. печ. л. 24,99. Уч.-изд. л. 23,70. Тираж 17 000 экз. Т-15892. Цена книги 1 р. 69 к. Заказ № 1229.

Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати
при Совете Министров СССР.
Измайловский проспект, 29.