Е. В. ГОБСОН

ТЕОРИЯ СФЕРИЧЕСКИХ И ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Перевод с английского
С. В. ФОМИНА

И ✱ Л

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1952

THE THEORY OF SPHERICAL and ELLIPSOIDAL HARMONICS

by

E. W. HOBSON

CAMBRIDGE
AT THE UNIVERSITY PRESS
1931

ОТ РЕДАКЦИИ

Обширная книга Гобсона по теории сферических функций содержит полное изложение общей теории этих функций и заключает в себе много ценного материала по сферическим функциям общего вида. Эта часть книги, заключенная в пятой и шестой главах, будет особенно полезна читателям, занимающимся задачами математической физики и заинтересованным в возможно полном и точном собрании формул, относящихся к сферическим функциям общего вида.

Бóльшая часть книги посвящена теории сферических функций; эллипсоидальным гармоническим функциям и функциям Ламе уделяется небольшое число страниц, на которых излагаются лишь первоначальные сведения об этих функциях.

В десятой главе дается интересное изложение малоизвестной теории тороидальных функций, связанных с функциями Лежандра и имеющих разнообразные приложения в гидродинамике и математической физике.

Многие вопросы, излагаемые в книге, не были еще освещены в русской научной литературе, и знакомство с ними представит несомненный интерес.

В заключение следует отметить, что книга Гобсона, несмотря на свой большой объем, не дает все же исчерпывающего изложения теории сферических функций. Не говоря уже о результатах, полученных за последнее время, многие важные положения и формулы этой теории, хорошо известные к моменту выхода в свет английского издания этой книги, здесь не изложены. В частности, в ней не нашло своего отражения то обогащение теории сферических функций новыми теоремами и формулами, которым мы обязаны трудам академика А. М. Ляпунова по фигурам равновесия.

ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
20	8 сн.	$\frac{(-1)^n r^{n-1}}{n!}$	$\frac{(-1)^n r^{n+1}}{n!}$
24	6 св.	$+\frac{1\cdot 3\cdot n(n-1)}{1\cdot 2(2n-1)(2n-1)}$	$+\frac{1\cdot 3\cdot n(n-1)}{1\cdot 2(2n-1)(2n-3)}$
49	1 сн.	$[n^2+(n-1)^2]$	$[n^2-(n-1)^2]$
152	4 сн.	$+n-$	$+n$
188	2 сн.	$\pi(\Pi)$	$\Pi(n)$
204	6 сн.	$\mathrm{Ln}\,(2\mu)$	$\ln\,(2\mu)$
228	1 сн.	h^{n-m}	h^{n+m}
246	2 сн.	$dw.$	$dw \Big\}.$
248	1 сн.	$\int\limits_{\mu}^{-\infty}$	$\int\limits_{\mu}^{\infty}$
304	12 св. и 17 св.	$\left(\frac{4\pi}{n\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{4}{n\pi\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}$
330	12 сн.	произведе-	поведе-
333	15—16 сн.	$f_1(\varphi, \theta)+f_2(\varphi, \theta)$	$f_1(\theta, \varphi)+f_2(\theta, \varphi)$
343	11 св.	$B\underset{n}{p}$	Bn^p
405	7 св.	$\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\cos\theta}$	$\frac{d}{d\cos\theta}P_n^m(\cos\theta)$
405	7 св.	бесконечно	бесконечной
433	9 сн.	$K_p\,\mathrm{ch}\,(\gamma)$	$K_p\,(\mathrm{ch}\,\gamma)$

Зак. 474 Гобсон «Теория сферических и эллипсоидальных функций»

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА

Уже давно у меня возникло намерение написать трактат о сферических и эллипсоидальных функциях, который, наряду с общей теорией вопроса, включал бы и результаты моих собственных исследований, полученных много лет тому назад. Обилие других дел препятствовало, вплоть до последнего времени, осуществлению этого намерения, однако эта задержка имела то преимущество, что теперь я могу принять во внимание появившиеся в последнее время многочисленные сочинения, посвященные различным специальным вопросам излагаемой теории.

С того времени, когда Лежандр и Лаплас создали в связи с некоторыми задачами теории потенциала теорию сферических функций, значение функций Лежандра и Лапласа для краевых задач и других вопросов возросло во много раз благодаря обнаружившимся связям их с различными задачами математической физики. Обобщения, принадлежащие Гейне, и, в частности, указанные им приложения функций второго рода, были изложены в его классическом трактате по этому вопросу, бывшем до сих пор единственным сколько-нибудь полным сочинением, в котором рассматривались эти функции, в то время как многочисленные другие руководства включали обычно лишь те части теории, которые более непосредственно связаны с приложениями.

Настоящее руководство посвящено главным образом изучению вида и аналитических свойств функций, возникших в связи с теми решениями уравнения Лапласа, которые соответствуют некоторым специальным краевым задачам. При этом мы, в отличие от первоначального этапа развития теории, не ограничиваемся рассмотрением функций, соответствующих одним только целым значениям степени и порядка. Наша книга не претендует на то, чтобы охватить общую теорию потенциала или теоремы существования, однако она содержит некоторые приложения к теории потенциальных функций, связанных с пространственными областями некоторых специальных типов; сведения из общей теории потенциала, используемые по ходу изложения, предполагаются известными. Я надеюсь, что данное руководство, несмотря на его чисто математический характер, будет полезным и для специалистов по математической физике, интересующихся в первую очередь приложениями.

В первых четырех главах изучаются свойства обыкновенных сферических функций. Мы старались изложить некоторые из относящихся сюда исследований в форме более строгой, чем это было сделано в соответствующих оригинальных работах. Максвеллова теория полюсов сферических функций изложена в связи с общей теоремой о дифференцировании, что придало теории большую стройность.

В главе V вводится и изучается общее понятие присоединенной функции Лежандра, соответствующей произвольным значениям степени, порядка и аргумента. С принятой в этой главе точки зрения все ее содержание представляет собой не что иное, как теорию некоторого специального класса гипергеометрических функций. Основное внимание уделяется представлениям соответствующих функций с помощью интегралов и рядов. Установленные здесь результаты используются в главе X для получения в качестве частных случаев представлений для сфероидальных, конических, тороидальных и других специальных функций, свойства которых в большинстве случаев исследовались вводившими их впервые математиками независимо для каждого отдельного типа.

В главе VI исследуется асимптотическое поведение зональных и присоединенных функций, заданных с помощью полусходящихся разложений или иным способом.

Глава VII содержит общую теорию сходимости и суммирования рядов Лежандра и Лапласа; здесь излагаются результаты, аналогичные хорошо известной теории рядов Фурье.

Глава VIII посвящена исследованию теорем сложения для функций Лежандра первого и второго рода, произвольной степени.

В главе IX исследуется распределение нулей присоединенных функций первого рода и, менее полно, присоединенных функций второго рода. Здесь даны также численные методы вычисления этих нулей.

Глава XI посвящена теории введенных Ламе эллипсоидальных функций, однако связей их с эллиптическими функциями мы не касаемся.

Во избежание увеличения объема книги я счел целесообразным не углубляться в детальное изложение теории гиперсферических функций, где применимы те же самые методы, что и в случае сферических функций, но получающиеся формулы более сложны.

Глава I

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

1. В различных областях математической физики возникает задача нахождения некоторой функции V, непрерывной вместе со своими частными производными в заданной области и удовлетворяющей в этой области уравнению

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0, \tag{1}$$

которое мы будем записывать в виде $\nabla^2 V=0$; это дифференциальное уравнение известно под названием уравнения Лапласа. От функции V требуется, кроме того, чтобы она удовлетворяла определенным условиям на границе рассматриваемой области. Понятно, что граница, на которой даны эти условия, может состоять из двух или большего числа отдельных частей, тем не менее мы можем рассматривать их все вместе как единую границу. Вид такой функции V, удовлетворяющей уравнению (1) и поставленным граничным условиям, зависит от формы границы и от типа этих краевых условий.

Часто встречаются следующие типы краевых условий:

а) V имеет заданное значение в каждой точке границы;

б) $\frac{\partial V}{\partial n}$ имеет заданное значение в каждой точке границы; $\frac{\partial}{\partial n}$ означает дифференцирование по нормали к границе, направленной внутрь той области, в которой функция V должна быть определена;

в) $h\frac{\partial V}{\partial n}+kV$ имеет заданное значение в каждой точке границы; h и k — постоянные числа.

Встречаются также задачи, в которых внутри заданного объема имеются одна или несколько поверхностей разрыва функции V, причем по обеим сторонам такой поверхности V удовлетворяет уравнению (1); вид функции V может быть различен по обеим сторонам поверхности разрыва, однако она должна удовлетворять на самой этой поверхности некоторым определенным условиям. Обозначая через V_1 и V_2 значения функции V на двух сторонах поверхности, мы можем наложить, например, условия следующих типов:

а) $V_1=V_2$, хотя значения $\frac{\partial V_1}{\partial n}$ и $\frac{\partial V_2}{\partial n}$ различны;

б) $h_1\frac{\partial V_1}{\partial n}=h_2\frac{\partial V_2}{\partial n}$ и $V_1=V_2$; h_1 и h_2 — два постоянных числа, как правило, имеющих один и тот же знак.

Основной темой данной книги является нахождение вида функций, удовлетворяющих уравнению (1) и определенным краевым условиям, в первую очередь заданным на сферической или эллипсоидальной поверхности, и исследование свойств получающихся таким образом функций. Мы покажем, что для этих и некоторых других типов границ можно получить соответствующие решения уравнения (1), а также покажем на некоторых примерах, как, комбинируя эти решения, добиться точного выполнения граничных условий.

Мы не будем останавливаться на общих вопросах существования функций V, удовлетворяющих определенным условиям, а также на вопросах единственности решения рассматриваемых задач; нашей целью является нахождение в явном виде функций, удовлетворяющих поставленным условиям, в тех случаях, когда современное состояние анализа позволяет это сделать.

Оказывается, что функции, появляющиеся в связи с уравнением Лапласа, полезны и для решения многих других уравнений в частных производных, встречающихся в физике; к числу важнейших из них принадлежат уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial t}=k\nabla^2 V,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=k\nabla^2 V,$$

решения которых в широком классе случаев можно связать с решениями уравнения $\nabla^2 V+\lambda V=0$, где λ — параметр.

2. Чтобы получить решения уравнения (1), соответствующие различным формам границы, удобно преобразовать это уравнение, вводя криволинейные ортогональные координаты. После этого в каждом отдельном случае эта система координат выбирается в соответствии с формой границы. Пусть

$$f_1(x, y, z)=h_1, \qquad f_2(x, y, z)=h_2, \qquad f_3(x, y, z)=h_3$$

уравнения трех семейств поверхностей, таких, что любая поверхность из одного семейства ортогональна любой поверхности из другого семейства; h_1, h_2, h_3 называются параметрами этих трех семейств поверхностей, и их значения в каждой точке (x, y, z) можно рассматривать как криволинейные координаты этой точки.

Предполагается, что в каждой точке значения координат h_1, h_2, h_3 определяются единственным образом.

Обозначим через H_1^2, H_2^2, H_3^2 выражение $\left(\frac{\partial h_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial h_1}{\partial z}\right)^2$ и соответствующие выражения для h_2 и h_3. Мы имеем

$$dh_1=\frac{\partial h_1}{\partial x}dx+\frac{\partial h_1}{\partial y}dy+\frac{\partial h_1}{\partial z}dz,$$

$$dh_2=\frac{\partial h_2}{\partial x}dx+\frac{\partial h_2}{\partial y}dy+\frac{\partial h_2}{\partial z}dz,$$

$$dh_3=\frac{\partial h_3}{\partial x}dx+\frac{\partial h_3}{\partial y}dy+\frac{\partial h_3}{\partial z}dz.$$

Так как $\frac{1}{H_1}\frac{\partial h_1}{\partial x}, \frac{1}{H_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}, \frac{1}{H_1}\frac{\partial h_1}{\partial z}$ являются направляющими косинусами нормали к поверхности h_1 в точке (x, y, z), мы видим из написанных равенств, принимая во внимание ортогональность трех нормалей в точке (x, y, z), что

$$\left(\frac{dh_1}{H_1}\right)^2+\left(\frac{dh_2}{H_2}\right)^2+\left(\frac{dh_3}{H_3}\right)^2=dx^2+dy^2+dz^2.$$

Следовательно, элемент длины дуги, соединяющий точки (x, y, z) и $(x+dx, y+dy, z+dz)$, выражается формулой

$$ds^2=\frac{1}{H_1^2}dh_1^2+\frac{1}{H_2^2}dh_2^2+\frac{1}{H_3^2}dh_3^2.$$

Приведение выражения $\nabla^2 V$ к виду, в котором независимыми переменными будут h_1, h_2 и h_3, проще всего выполнить, воспользовавшись обозначениями[1]) и методами тензорного анализа.

Мы имеем: $ds^2 = g_{\mu\nu} dh_\mu dh_\nu$, где μ, ν принимают значения 1, 2, 3, $g_{11} = \frac{1}{H_1^2}$, $g_{22} = \frac{1}{H_2^2}$, $g_{33} = \frac{1}{H_3^2}$ и $g_{\mu\nu} = 0$ при $\mu \neq \nu$; таким образом, $g_{\mu\nu}$ — ковариантный тензор; $g = \frac{1}{H_1^2 H_2^2 H_3^2}$, и, в соответствии с обычными правилами, выражение для ds^2 понимается как сумма слагаемых, отвечающих всем значениям 1, 2, 3 индексов μ и ν.

Соответствующим контравариантным тензором будет $g^{\mu\nu}$, где $g^{11} = H_1^2$, $g^{22} = H_2^2$, $g^{33} = H_3^2$ и $g^{\mu\nu} = 0$ при $\mu \neq \nu$.

Выражение $\nabla^2 V$ в координатах (x, y, z) может быть представлено как $g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 V}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$ или как $g^{\mu\nu} V_{\mu\nu}$, где $g^{11} = g^{22} = g^{33} = 1$ и $g^{\mu\nu} = 0$ при $\mu \neq \nu$; тензор $V_{\mu\nu}$ есть ковариантная производная от V_μ. Выражение $g^{\mu\nu} V_{\mu\nu}$ является инвариантом и, следовательно, совпадает с выражением

$$g^{\mu\nu}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial h_\mu \partial h_\nu} - \{\mu\nu, \alpha\} \frac{\partial V}{\partial h_\alpha}\right]$$

в новых координатах. Это последнее равно

$$H_1^2\left[\frac{\partial^2 V}{\partial h_1^2} - \{11, \alpha\} \frac{\partial V}{\partial h_\alpha}\right] + H_2^2\left[\frac{\partial^2 V}{\partial h_2^2} - \{22, \alpha\} \frac{\partial V}{\partial h_\alpha}\right] + H_3^2\left[\frac{\partial^2 V}{\partial h_3^2} - \{33, \alpha\} \frac{\partial V}{\partial h_\alpha}\right].$$

Здесь

$$\{11, \alpha\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial g_{1\lambda}}{\partial h_1} + \frac{\partial g_{1\lambda}}{\partial h_1} - \frac{\partial g_{11}}{h_\lambda}\right) = \frac{1}{2} g^{\alpha\alpha}\left(\frac{\partial g_{1\alpha}}{\partial h_1} + \frac{\partial g_{1\alpha}}{\partial h_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial h_\alpha}\right),$$

следовательно,

$$\{11, 1\} = \frac{1}{2} H_1^2 \frac{\partial}{\partial h_1} \frac{1}{H_1^2}, \quad \{11, 2\} = -\frac{1}{2} H_2^2 \frac{\partial}{\partial h_2} \frac{1}{H_1^2}, \quad \{11, 3\} = -\frac{1}{2} H_3^2 \frac{\partial}{\partial h_3} \frac{1}{H_1^2}.$$

Таким образом, выражение для $\nabla^2 V$ принимает вид

$$H_1^2\left[\frac{\partial^2 V}{\partial h_1^2} - \frac{\partial V}{\partial h_1} \cdot \frac{1}{2} H_1^2 \frac{\partial}{\partial h_1} \frac{1}{H_1^2} + \frac{\partial V}{\partial h_2} \cdot \frac{1}{2} H_2^2 \frac{\partial}{\partial h_2} \frac{1}{H_1^2} + \frac{\partial V}{\partial h_3} \cdot \frac{1}{2} H_3^2 \frac{\partial}{\partial h_3} \frac{1}{H_1^2}\right] +$$

+ два аналогичных слагаемых.

Оно может быть приведено к виду

$$H_1 H_2 H_3\left[\frac{\partial}{\partial h_1}\left(\frac{H_1}{H_2 H_3} \frac{\partial V}{\partial h_1}\right) + \frac{\partial}{\partial h_2}\left(\frac{H_2}{H_3 H_1} \frac{\partial V}{\partial h_2}\right) + \frac{\partial}{\partial h_3}\left(\frac{H_3}{H_1 H_2} \frac{\partial V}{\partial h_3}\right)\right].$$

Итак,

$$\nabla^2 V = H_1 H_2 H_3\left[\frac{\partial}{\partial h_1}\left(\frac{H_1}{H_2 H_3} \frac{\partial V}{\partial h_1}\right) + \frac{\partial}{\partial h_2}\left(\frac{H_2}{H_3 H_1} \frac{\partial V}{\partial h_2}\right) + \frac{\partial}{\partial h_3}\left(\frac{H_3}{H_1 H_2} \frac{\partial V}{\partial h_3}\right)\right],$$

следовательно, в криволинейных координатах h_1, h_2, h_3 уравнение Лапласа имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial h_1}\left(\frac{H_1}{H_2 H_3} \frac{\partial V}{\partial h_1}\right) + \frac{\partial}{\partial h_2}\left(\frac{H_2}{H_3 H_1} \frac{\partial V}{\partial h_2}\right) + \frac{\partial}{\partial h_3}\left(\frac{H_3}{H_1 H_2} \frac{\partial V}{\partial h_3}\right) = 0. \tag{2}$$

Если рассматриваются не три координаты, а p координат $x_1, x_2, \ldots, x_p$, то в точности тем же способом можно показать, что $\nabla_p^2 V$, т. е.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 V}{\partial x_p^2}$$

[1]) А. С. Эддингтон, Теория относительности, М.—Л., 1934, гл. II. [См. также Н. Е. Кочин, Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, М., 1951, гл. IV. (*Прим. ред.*)]

приводится к виду

$$H_1H_2\ldots H_p\left[\frac{\partial}{\partial h_1}\left(\frac{H_1}{H_2H_3\ldots H_p}\frac{\partial V}{\partial h_1}\right)+\ldots+\frac{\partial}{\partial h_p}\left(\frac{H_p}{H_1H_2\ldots H_{p-1}}\frac{\partial V}{\partial h_p}\right)\right], \qquad (2')$$

где $h_1, h_2, \ldots, h_p$ — ортогональные криволинейные координаты, и

$$H_r^2=\left(\frac{\partial h_r}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial h_r}{\partial x_2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial h_r}{\partial x_p}\right)^2.$$

3. Формула (2) для преобразования уравнения Лапласа к ортогональным криволинейным координатам была впервые получена Ламе[1]), который использовал трудоемкий метод непосредственной замены переменных. Позже другие способы, основанные на сходных соображениях, были даны Дирихле[2]) и Томсоном[3]) (Кельвин). Другой метод преобразования, основанный на иных принципах, был дан Якоби[4]) и для случая полярных координат — Грином[5]).

Укажем, не вдаваясь в детали, методы Дирихле — Кельвина и Якоби — Грина.

a) Длины ребер элементарного параллелепипеда, образованного поверхностями h_1, h_1+dh_1, h_2, h_2+dh_2, h_3, h_3+dh_3, равны $\frac{dh_1}{H_1}$, $\frac{dh_2}{H_2}$, $\frac{\partial h_3}{H_3}$. Воспользуемся следующей формулой Грина:

$$\iiint \nabla^2 V\,dxdydz=-\iint \frac{\partial V}{\partial n}\,dS.$$

Здесь интеграл в левой части равенства берется по любому объему, внутри которого функция V вместе со своими частными производными непрерывна и ограничена, а поверхностный интеграл справа берется по границе этого объема; $\frac{\partial}{\partial n}$ означает дифференцирование по внешней нормали. Если внутри рассматриваемого объема $\nabla^2 V$ равняется нулю, то

$$\iint \frac{\partial V}{\partial n}\,dS=0.$$

Применим эту формулу к элементарному объему, ограниченному шестью поверхностями $h_1, \ldots, h_3+dh_3$. Рассматриваемый поверхностный интеграл представляет собой сумму шести слагаемых, соответствующих отдельным граням. Слагаемое, соответствующее грани на поверхности h_1, равно

$$\frac{\partial V}{\partial h_1}\,\frac{H_1}{H_2H_3}\,dh_2dh_3.$$

Слагаемое, соответствующее противоположной грани, получается из данного выражения заменой h_1 на h_1+dh_1, и, так как направление внешней нормали при этом меняется на противоположное, оно равно

$$-\left\{\frac{H_1}{H_2H_3}\,\frac{\partial V}{\partial h_1}+\frac{\partial}{\partial h_1}\left(\frac{H_1}{H_2H_3}\,\frac{\partial V}{\partial h_1}\right)dh_1\right\}dh_2dh_3.$$

Слагаемые, соответствующие остальным четырем граням, получаются аналогично; таким образом мы находим, что рассматриваемый поверхност-

[1]) Journ. Polytechnique (тетр. 23), (1834); этот вывод был воспроизведен в его работе «Leçons sur les coordonnées curvilignes», 1859, § 14.

[2]) Впервые опубликовано в хаттендорфовском издании «Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen» Римана, 1869.

[3]) Camb. Math. Journ., 4 (1845), 36.

[4]) Journ. f. reine u. angew. Math., 36 (1848), 117.

[5]) Mathematical Papers, стр. 200, 216

ный интеграл равен

$$-dh_1dh_2dh_3\left[\frac{\partial}{\partial h_1}\left(\frac{H_1}{H_2H_3}\frac{\partial V}{dh_1}\right)+\frac{\partial}{\partial h_2}\left(\frac{H_2}{H_3H_1}\frac{\partial V}{\partial h_2}\right)+\frac{\partial}{\partial h_3}\left(\frac{H_3}{H_1H_2}\frac{\partial V}{\partial h_3}\right)\right],$$

и это выражение должно быть равно нулю. Мы получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial h_1}\left(\frac{H_1}{H_2H_3}\frac{\partial V}{\partial h_1}\right)+\frac{\partial}{\partial h_2}\left(\frac{H_2}{H_3H_1}\frac{\partial V}{\partial h_2}\right)+\frac{\partial}{\partial h_3}\left(\frac{H_3}{H_1H_2}\frac{\partial V}{\partial h_3}\right)=0,$$

совпадающее с уравнением (2). Этот метод был использован Дирихле и Томсоном.

б) Рассмотрим интеграл

$$\iiint\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right\}dxdydz,$$

взятый по некоторому произвольному объему; если мы разобьем этот объем на элементарные параллелепипеды, которые мы рассматривали в первом методе, то мы получим, что написанный выше тройной интеграл равен

$$\iiint\left\{H_1^2\left(\frac{\partial V}{\partial h_1}\right)^2+H_2^2\left(\frac{\partial V}{\partial h_2}\right)^2+H_3^2\left(\frac{\partial V}{\partial h_3}\right)^2\right\}\frac{1}{H_1H_2H_3}dh_1dh_2dh_3,$$

причем интеграл берется по тому же объему, что и первоначальный. Предположим теперь, что значение функции V получает в каждой точке некоторое произвольное приращение δV, причем δV имеет непрерывные частные производные по x, y, z. Если соответствующее изменение рассматриваемого интеграла I обозначить δI, то

$$\frac{1}{2}\delta I=\iiint\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial(\delta V)}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial(\delta V)}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial(\delta V)}{\partial z}\right)dxdydz=$$

$$=\iint\left(l\frac{\partial V}{\partial x}+m\frac{\partial V}{\partial y}+n\frac{\partial V}{\partial z}\right)\delta V\,dS-\iiint\left(\frac{\partial^2V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2V}{\partial z^2}\right)\delta V dxdydz,$$

где поверхностный интеграл берется по границе соответствующего объема, а (l, m, n) — направляющие косинусы нормали к элементу поверхности dS.

Аналогично можно показать, что

$$\frac{1}{2}\delta I=\iint\delta V\left(\frac{H_1}{H_2H_3}\frac{\partial V}{\partial h_1}dh_2\,dh_3+\frac{H_2}{H_3H_1}\frac{\partial V}{\partial h_2}dh_3\,dh_1+\frac{H_3}{H_1H_2}dh_1\,dh_2\right)-$$

$$-\iiint\left\{\frac{\partial}{\partial h_1}\left(\frac{H_1}{H_2H_3}\frac{\partial V}{\partial h_1}\right)+\frac{\partial}{\partial h_2}\left(\frac{H_2}{H_3H_1}\frac{\partial V}{\partial h_2}\right)+\frac{\partial}{\partial h_3}\left(\frac{H_3}{H_1H_2}\frac{\partial V}{\partial h_3}\right)\right\}\delta V dh_1dh_2dh_3;$$

первый интеграл берется, как и раньше, по границе рассматриваемого объема. Эти два выражения для δI должны быть равны, и если приращение δV выбрать так, чтобы оно обращалось в нуль во всех точках границы, то оба объемных интеграла должны быть равны друг другу. Так как

$$\left(\frac{D(h_1, h_2, h_3)}{D(x, y, z)}\right)^2=H_1^2H_2^2H_3^2,$$

то мы получаем

$$\iiint\delta V\left[\nabla^2V-\left\{\frac{\partial}{\partial h_1}\left(\frac{H_1}{H_2H_3}\frac{\partial V}{\partial h_1}\right)+\frac{\partial}{\partial h_2}\left(\frac{H_2}{H_3H_1}\frac{\partial V}{\partial h_2}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial}{\partial h_3}\left(\frac{H_3}{H_1H_2}\frac{\partial V}{\partial h_3}\right)\right\}H_1H_2H_3\right]dxdydz=0.$$

Так как это равенство имеет место для всех δV, удовлетворяющих указанным выше условиям, то из основной леммы вариационного исчисления следует

$$\nabla^2V=H_1H_2H_3\left\{\frac{\partial}{\partial h_1}\left(\frac{H_1}{H_2H_3}\frac{\partial V}{\partial h_1}\right)+\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{H_2}{H_3H_1}\frac{\partial}{\partial h_2}\right)+\frac{\partial}{\partial h_3}\left(\frac{H_3}{H_1H_2}\frac{\partial V}{\partial h_3}\right)\right\};$$

мы получили преобразованное уравнение (2). Этот метод был использован Якоби и Грином.

4. Возможность получения решения уравнения Лапласа, записанного в виде (2), зависит от вида функций h_1, h_2, h_3; можно различными способами выбрать эти параметры так, чтобы уравнение (2) имело решения вида

$$V = \varphi(h_1)\,\psi(h_2)\,\chi(h_3),$$

где φ зависит только от h_1, ψ — только от h_2 и χ — только от h_3. Если это возможно, то такое решение называется *нормальным решением* или *нормальной формой* решения. Функции, входящие в нормальное решение, содержат некоторые произвольные постоянные, так что, придавая этим постоянным различные значения, можно получить бесконечное множество нормальных решений. Так как уравнение Лапласа линейно, то сумма любого числа частных решений также удовлетворяет этому уравнению; следовательно, можно получить более общие решения, беря линейные комбинации, с произвольными постоянными коэффициентами, нормальных решений; мы получаем таким образом решения вида

$$\sum A\varphi(h_1)\,\psi(h_2)\,\chi(h_3).$$

Такие решения полезны при рассмотрении задач теории потенциала типа указанных в п. 1 в том случае, когда граница состоит из поверхностей, принадлежащих тому или иному из трех семейств координатных поверхностей.

Для любой ортогональной криволинейной системы координат, для которой существуют нормальные решения, три функции $\varphi(h_1)$, $\psi(h_2)$ и $\chi(h_3)$ могут быть получены как решения трех обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод сведения уравнения $\nabla^2 V = 0$ к обыкновенным дифференциальным уравнениям был указан Хеншелем[1]), а также Вангерином[2]). Различные случаи, в которых такое сведение возможно, будут рассмотрены в настоящей работе.

В некоторых случаях, когда нормальное решение указанного выше типа не существует, можно найти решение вида $\varphi(h_1, h_2)\,\chi(h_3)$, в котором один множитель содержит одну криволинейную координату, а другой — две таких координаты.

При рассмотрении уравнения Лапласа мы можем воспользоваться тем, что для него известно решение весьма общего вида, а именно:

$$V = \{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\}^{-\frac{1}{2}},$$

где a, b, c — произвольные постоянные; это выражение удовлетворяет уравнению в каждой точке пространства, за исключением точки (a, b, c). Эта функция может быть записана в любой системе криволинейных координат, и полученное таким образом выражение часто оказывается полезным для нахождения простой и удобной формы решения.

5. Простейшим случаем, в котором может быть получена нормальная форма решения, является случай $h_1 = x$, $h_2 = y$, $h_3 = z$, т. е. уравнение Лапласа в первоначальном виде; ортогональной системой поверхностей при этом являются три семейства плоскостей, параллельных координатным плоскостям.

Попытаемся удовлетворить рассматриваемому уравнению с помощью функции $V = XYZ$, где X зависит только от x, Y — только от y и Z —

---

[1]) Studien über die Reduction der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen, Berlin, 1893.

[2]) Berliner Manatsber. (1898), 152.

только от z; подставив это выражение в уравнение и деля на XYZ, получим

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=0.$$

В этом равенстве первое слагаемое зависит только от x, второе — только от y и третье — только от z; ясно, следовательно, что равенство может иметь место только в том случае, когда каждое из трех слагаемых есть постоянная величина и сумма этих постоянных равна нулю. Таким образом, для определения X, Y и Z мы получаем три обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\frac{d^2X}{dx^2}=a^2X, \qquad \frac{d^2Y}{dy^2}=b^2Y, \qquad \frac{d^2Z}{dz^2}=c^2Z;$$

постоянные a^2, b^2 и c^2 должны удовлетворять условию $a^2+b^2+c^2=0$ Следовательно, нормальной формой решения будет $e^{\pm ax}\cdot e^{\pm by}\cdot e^{\pm cz}$, где $a^2+b^2+c^2=0$; в полученном выражении показательные функции с мнимыми показателями можно выразить через тригонометрические функции.

Частными случаями вышеуказанной нормальной формы являются

$$e^{\pm\sqrt{m^2+n^2}\,z}\,\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\,mx\,\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\,ny, \qquad e^{\pm\alpha x\pm\beta y}\,\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\,\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,z,$$

m, n, α, β — произвольные постоянные; из этих форм мы получаем выражения

$$\sum_{m,\,n} f(m,\,n)\,e^{\pm\sqrt{m^2+n^2}\,z}\,\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\,mx\,\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\,ny,$$

$$\sum_{\alpha,\,\beta}\varphi(\alpha,\,\beta)\,e^{\pm\alpha x\pm\beta y}\,\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\,\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,z,$$

используемые в тех задачах теории потенциала, в которых граница состоит из кусков плоскостей, параллельных координатным плоскостям. Краевые условия приводят к задаче разложения произвольной функции в двойной или одинарный ряд Фурье.

Таким образом, обнаруживается, что функции, получающиеся при решении уравнения Лапласа в его первоначальной форме, суть тригонометрические и показательные функции; в следующей главе мы рассмотрим функции, которые получаются при $h_1=r$, $h_2=0$, $h_3=\varphi$, где r, θ, φ — сферические координаты точки. Это приведет нас к изучению некоторого нового весьма важного класса функций.

Глава II

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

§ 1 ВВЕДЕНИЕ

6. Если система поверхностей, соответствующих параметрам h_1, h_2, h_3, состоит из концентрических сфер ($r=\text{const}$), круговых конусов, имеющих общую ось ($\theta=\text{const}$), и плоскостей, проходящих через эту ось ($\varphi=\text{const}$), то

$$(ds)^2=(dr)^2+(rd\theta)^2+(r\sin\theta\, d\varphi)^2.$$

Следовательно, в этом случае $H_1=1$, $H_2=\frac{1}{r}$, $H_3=\frac{1}{r\sin\theta}$, и из уравнения (2) гл. I получаем

$$\nabla^2 V=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)\right\}.$$

Уравнение Лапласа в этом случае принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}=0. \tag{1}$$

В соответствии с методом, описанным в п. 4, мы будем искать решение этого уравнения в виде $V=R\Theta\Phi$, где R, Θ, Φ — функции от r, θ и φ соответственно; подставляя это выражение в уравнение и деля на $R\Theta\Phi$, получаем

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta\cdot\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=0. \tag{2}$$

Так как r входит только в первое слагаемое, то для того, чтобы равенство (2) выполнялось, необходимо, чтобы выражение

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)$$

было равно некоторой постоянной k.

Решение уравнения

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}-kR=0$$

находится по общим правилам и имеет вид

$$R=Ar^{-\frac{1}{2}+\sqrt{k+\frac{1}{4}}}+Br^{-\frac{1}{2}-\sqrt{k+\frac{1}{4}}},$$

где A и B — произвольные постоянные. Это выражение для R можно несколько упростить, если положить $k=n(n+1)$; тогда в качестве самого общего выражения для R мы получим

$$R=Ar^n+Br^{-n-1}$$

Теперь уравнение (2) можно переписать в виде

$$n(n+1)\sin^2\theta+\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=0;$$

отсюда видно, что $\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}$ должно быть равно некоторой постоянной, обозначим ее $-m^2$. Следовательно, самым общим видом функции Φ будет $C\cos m\varphi + D\sin m\varphi$, где C и D — произвольные постоянные. Теперь уравнение (2) принимает вид

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right\}\Theta=0.$$

Если здесь положить $\cos\theta=\mu$, $\Theta=u$, то получим

$$\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{du}{d\mu}\right\}+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right\}u=0; \tag{3}$$

u определяется как функция от μ из этого уравнения второго порядка. Основной задачей этой главы и следующей является исследование природы и свойств некоторых из тех функций, которые получаются при решении дифференциального уравнения (2). Предположим, что вид функции u найден из уравнения (3); тем самым будет получена и нормальная форма решения уравнения Лапласа, которая может быть записана в виде

$$r^n\cdot u\,{\cos\atop\sin}\,m\varphi,\quad r^{-n-1}\cdot u\,{\cos\atop\sin}\,m\varphi.$$

Мы увидим в дальнейшем, что постоянные m и n совершенно произвольны, они могут принимать все действительные значения. В наиболее важных приложениях получаемых здесь решений к задачам теории потенциала используются такие нормальные решения, в которых n и m — целые; поэтому в данной главе и в следующей мы сосредоточим свое внимание на этом специальном случае. Самый общий случай, когда n и m — совершенно произвольные, действительные или комплексные, будет полностью рассмотрен в гл. V. В вышеуказанной нормальной форме n, или $-n-1$, называется степенью, а m — порядком данной формы. Мы рассмотрим сейчас нормальные формы с целыми (положительными или отрицательными) степенями и целыми порядками.

§ 2. УРАВНЕНИЕ ЛЕЖАНДРА

7. В этой главе мы рассмотрим частный случай уравнения (3), соответствующий $m=0$; при этом получается уравнение

$$\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{du}{d\mu}\right\}+n(n+1)u=0. \tag{4}$$

Это дифференциальное уравнение известно под названием уравнения Лежандра; мы перейдем сейчас к нахождению всех его решений. Хотя величина μ была введена как косинус некоторого действительного угла и, следовательно, может принимать только значения, заключенные между -1 и $+1$, мы рассмотрим решения уравнения (4) также и в общем случае, когда на μ не налагается указанных ограничений.

Перепишем уравнение (4) в виде

$$(1-\mu^2)\frac{d^2u}{d\mu^2}-2\mu\frac{du}{d\mu}+n(n+1)u=0$$

и предположим, что оно имеет решение вида

$$u=a_0+a_1\mu+a_2\mu^2+\ldots,$$

где a_0, a_1, a_2, ... — постоянные. Подставляя этот ряд в уравнение и приравнивая нулю коэффициенты при всех степенях μ, получаем

$$(r+2)(r+1)a_{r+2}-r(r-1)a_r-2ra_r+n(n+1)a_r=0,$$

откуда

$$a_{r+2} = -\frac{(n-r)(n+r+1)}{(r+1)(r+2)} a_r;$$

таким образом, мы получаем решение уравнения (4) в виде

$$u = a_0 \left\{ 1 - \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\mu^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\mu^4 - \ldots + \right.$$
$$\left. + (-1)^s \frac{n(n-2)\ldots(n-2s+2)(n+1)(n+3)\ldots(n+2s-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2s}\mu^{2s} + \ldots \right\} +$$
$$+ a_1\mu \left\{ 1 - \frac{(n-1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\mu^2 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\mu^4 - \ldots \right\}.$$

Здесь предполагается, что μ принимает такие значения, при которых эти ряды сходятся.

Это решение можно записать в следующем виде:

$$u = a_0 F\left(-\frac{n}{2},\ \frac{n+1}{2};\ \frac{1}{2};\ \mu^2\right) + a_1\mu F\left(-\frac{n-1}{2},\ \frac{n+2}{2};\ \frac{3}{2};\ \mu^2\right), \qquad (5)$$

где $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$ означает сумму гипергеометрического ряда

$$1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma\cdot(\gamma+1)}x^2 + \ldots,$$

а a_0 и a_1 — произвольные постоянные; мы видим, таким образом, что (5) представляет собой общее решение дифференциального уравнения (4), если только μ таково, что указанные два ряда сходятся.

В том важном случае, когда n — целое положительное, один из двух этих рядов содержит лишь конечное число членов при любом μ. Если n четно, то этим решением будет

$$a_0 F\left(-\frac{n}{2},\ \frac{n+1}{2};\ \frac{1}{2};\ \mu^2\right),$$

т. е.

$$a_0 \left\{ 1 - \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\mu^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\mu^4 - \ldots + \right.$$
$$\left. + (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{n(n-2)\ldots 2(n+1)(n+3)\ldots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\mu^n \right\} \qquad (6)$$

при любом, комплексном или действительном, значении μ.

Это — алгебраический многочлен степени n, удовлетворяющий уравнению (4); другое решение $a_1\mu F\left(-\frac{n-1}{2},\ \frac{n+2}{2};\ \frac{3}{2};\ \mu^2\right)$ представляет собой бесконечный ряд, сходящийся при $|\mu| < 1$ и расходящийся, когда $\mu = \pm 1$ или $\mu^2 > 1$.

Если n нечетно, то решение $a_1\mu F\left(-\frac{n-1}{2},\ \frac{n+2}{2};\ \frac{3}{2};\ \mu^2\right)$, т. е.

$$a_1\mu \left\{ 1 - \frac{(n-1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\mu^2 + \ldots + \right.$$
$$\left. + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{(n-1)(n-3)\ldots 1\cdot(n+2)(n+4)\ldots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\mu^{n-1} \right\}, \qquad (7)$$

есть алгебраический многочлен степени n, удовлетворяющий уравнению (4). В этом случае

$$a_0 F\left(-\frac{n}{2},\ \frac{n+1}{2};\ \frac{1}{2};\ \mu^2\right)$$

представляет собой бесконечный ряд, сходящийся при $|\mu|<1$, и является вторым решением уравнения (4).

Попробуем теперь получить решение уравнения (4) в виде ряда по убывающим степеням μ. Положим

$$u=\mu^m+\alpha_2\mu^{m-2}+\alpha_4\mu^{m-4}+\ldots;$$

подставляя это выражение в дифференциальное уравнение, получим

$$\alpha_{2r}(m-2r)(m-2r-1)=$$
$$=\alpha_{2r+2}\{(m-2r-2)(m-2r-3)+2(m-2r-2)-n(n+1)\},$$

где r — произвольное целое положительное число. Так как $\alpha_{-2}=0$, то

$$(m-n)(m+n+1)=0,$$

или $m=n$, или $m=-n-1$; мы получаем, таким образом, два решения:

$$\alpha\left\{\mu^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}\mu^{n-4}-\ldots\right\} \tag{8}$$

и

$$\beta\left\{\frac{1}{\mu^{n+1}}+\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}\frac{1}{\mu^{n+3}}+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot 4(2n+3)(2n+5)}\frac{1}{\mu^{n+5}}+\ldots\right\}. \tag{9}$$

Если n — целое положительное число, то решение (8) представляет собой многочлен степени n, совпадающий, как легко видеть, с (6) или (7), в зависимости от того, будет n четно или нечетно. Решение (9) представляет собой бесконечный ряд по степеням $\frac{1}{\mu}$ и может быть записано в виде

$$\beta\frac{1}{\mu^{n+1}}F\left(\frac{n+1}{2},\ \frac{n+2}{2};\ \frac{2n+3}{2};\ \frac{1}{\mu^2}\right);$$

этот ряд сходится при $|\mu|>1$ и расходится при $|\mu|<1$; следовательно, ряд (9) представляет второе решение там, где ряд по возрастающим степеням, будучи расходящимся, не может быть использован для получения решения.

Если в выражении (8) значение постоянной α принять равным $\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}$, то мы получим решение, которое обозначается $P_n(\mu)$ и называется многочленом Лежандра или функцией Лежандра степени n. Если $\mu=\cos\theta$, то $P_n(\mu)$ называется также коэффициентом Лежандра степени n; основания для такой терминологии будут указаны в п. 9.

Второе решение, в котором постоянному множителю мы также предпишем некоторое определенное значение, будем обозначать $Q_n(\mu)$.

8. Окончательный результат мы можем сформулировать следующим образом:

Общее решение уравнения Лежандра

$$\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{du}{d\mu}\right\}+n(n+1)u=0, \tag{4}$$

где n — целое положительное, имеет вид

$$u=AP_n(\mu)+BQ_n(\mu);$$

A и B — произвольные постоянные. Выражение $P_n(\mu)$ представляет собой многочлен от μ степени n и определяется формулой

$$P_n(\mu)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\left\{\mu^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-2}+\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}\mu^{n-4}-\ldots\right\}=\frac{(2n)!}{2^n n!n!}\mu^n F\left(-\frac{n}{2},\ \frac{1-n}{2};\ \frac{1}{2}-n;\ \frac{1}{\mu^2}\right),$$

которую, изменяя порядок слагаемых на обратный, можно переписать для четного n в виде

$$P_n(\mu)=(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(n-1)}{2\cdot 4\ldots n}\left\{1-\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\mu^2+\frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\mu^4-\ldots\right\}=$$
$$=(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{n!}{2^n\frac{n}{2}!\,\frac{n}{2}!}F\left(-\frac{n}{2},\ \frac{n+1}{2};\ \frac{1}{2};\ \mu^2\right),$$

а для нечетного n в виде

$$P_n(\mu)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{3\cdot 5\ldots n}{2\cdot 4\ldots(n-1)}\mu\left\{1-\frac{(n-1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\mu^2+\right.$$
$$\left.+\frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\mu^4-\ldots\right\}=$$
$$=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{n!}{2^{n-1}\frac{n-1}{2}!\,\frac{n-1}{2}!}\mu F\left(-\frac{n-1}{2},\ \frac{n}{2}+1;\ \frac{3}{2};\ \mu^2\right),$$

Выражение $P_n(\mu)$ представляет собой решение уравнения (4) при $|\mu|$, большем или меньшем единицы, и при всех комплексных значениях μ.

Второе решение $Q_n(\mu)$ имеет вид

$$\beta\left\{\frac{1}{\mu^{n+1}}+\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}\frac{1}{\mu^{n+3}}+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot 4(2n+3)(2n+5)}\frac{1}{\mu^{n+5}}+\ldots\right\}$$

т. е.

$$\beta\frac{1}{\mu^{n+1}}F\left(\frac{n+1}{2},\ \frac{n}{2}+1;\ \frac{2n+3}{2};\ \frac{1}{\mu^2}\right)$$

при $\mu^2>1$ или, если μ — комплексное, при $|\mu|>1$.

Если же $\mu^2<1$ или, допуская комплексные значения μ, если $|\mu|<1$, то второе решение представляется в виде бесконечного ряда

$$a_1\mu\left\{1-\frac{(n-1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\mu^2+\frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\mu^4-\ldots\right\},$$

когда n четно, и

$$a_0\left\{1-\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\mu^2+\frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\mu^4-\ldots\right\},$$

когда n нечетно.

Аналитическое продолжение этого решения на всю плоскость μ будет рассмотрено ниже.

§ 3. КОЭФФИЦИЕНТЫ ЛЕЖАНДРА

9. Из двух полученных нами линейно независимых решений уравнения Лежандра более важным является решение $P_n(\mu)$, которое мы назвали (в случае целого n) многочленом Лежандра. Поэтому мы сперва рассмотрим эту функцию отдельно. Мы получили две нормальные формы, $r^nP_n(\mu)$ и $r^{-n-1}P_n(\mu)$, удовлетворяющие уравнению Лапласа и симметричные относительно прямой $\mu=1$. Уже в п. 4 мы указывали на преимущества для изучения уравнения Лапласа, которые получаются из того, что обратная величина расстояния до некоторой фиксированной точки удовлетворяет этому уравнению; сейчас мы вновь воспользуемся этими соображениями для того, чтобы получить указанные выше нормальные формы и таким образом подойти к функциям $P_n(\mu)$ с другой точки зрения, не связанной непосредственно с решением уравнения Лапласа.

Обратная величина расстояния от точки (r, μ, φ) до точки на прямой $\mu = 1$, находящейся на расстоянии r' от начала, равна

$$(r^2 - 2rr'\mu + r'^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, это выражение удовлетворяет уравнению Лапласа и не зависит от угла φ. Оно может быть записано в виде

$$\frac{1}{r'}\left\{1 - 2\frac{r}{r'}\mu + \frac{r^2}{r'^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

или в виде

$$\frac{1}{r}\left\{1 - 2\frac{r'}{r}\mu + \frac{r'^2}{r^2}\right\}^{-\frac{1}{2}},$$

откуда видно, что его можно разложить в сходящийся ряд по степеням $\frac{r}{r'}$ при $r < r'$ и в сходящийся ряд по степеням $\frac{r'}{r}$ при $r > r'$. Коэффициенты при степенях $\frac{r}{r'}$ или $\frac{r'}{r}$ являются функциями от μ. Обозначим через h ту из двух величин $\frac{r}{r'}$ и $\frac{r'}{r}$, которая меньше единицы; тогда имеем

$$(1 - 2h\mu + h^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(2\mu - h)h + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}(2\mu - h)^2 h^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2n}(2\mu - h)^n h^n + \ldots$$

Этот ряд сходится при $|h(2\mu - h)| < 1$; далее, порядок следования членов можно изменить, если двойной ряд абсолютно сходится, т. е. если $h(2|\mu| + h) < 1$; при этих условиях мы получаем для коэффициента при h^n следующее выражение:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}\left\{\mu^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)}\mu^{n-4} - \ldots\right\}.$$

Это выражение мы обозначаем $P_n(\mu)$; мы видим, что оно совпадает с многочленом Лежандра, определенным в п. 7.

Следовательно, при указанных выше условиях и при действительном μ, лежащем в промежутке $(-1, 1)$,

$$(1 - 2h\mu + h^2)^{-\frac{1}{2}} = P_0(\mu) + P_1(\mu)h + P_2(\mu)h^2 + \ldots + P_n(\mu)h^n + \ldots \quad (10)$$

10. До сих пор мы предполагали, что μ и h—действительные величины, удовлетворяющие некоторым определенным условиям; однако равенство (10) остается справедливым и тогда, когда на μ и h наложены меньшие ограничения. Ясно, что приведенное нами доказательство равенства (10) применимо и в случае комплексных μ и h, если только $|2\mu h| + |h^2| < 1$; мы сейчас увидим, что эти условия могут быть значительно расширены. Представив выражение $(1 - 2\mu h + h^2)^{-\frac{1}{2}}$ в виде

$$(\mu + \sqrt{\mu^2 - 1} - h)^{-\frac{1}{2}}(\mu - \sqrt{\mu^2 - 1} - h)^{-\frac{1}{2}},$$

мы видим, что особые точки этой функции, рассматриваемой как функция от h, суть $h = \mu \pm \sqrt{\mu^2 - 1}$; в соответствии с хорошо известными теоремами теории функций, эта функция может быть разложена по степеням h, когда $|h|$ меньше, чем наименьшее из чисел $|\mu \pm \sqrt{\mu^2-1}|$. Функция $(1-2\mu h+h^2)^{-\frac{1}{2}}$ может быть продолжена на весь круг с центром в точке $h=0$ и радиусом, равным наименьшему из чисел

$$|\mu \pm \sqrt{\mu^2-1}|.$$

Степенной ряд изображает ту ветвь функции $(1-2\mu h+h^2)^{-\frac{1}{2}}$, которая принимает значение $+1$ в точке $h=0$.

Покажем теперь, что равенство (10) остается в силе и для комплексных значений h и μ, если только $|h|$ не превосходит меньшего из чисел

$$|\mu \pm \sqrt{\mu^2-1}|.$$

В частности, если μ действительно и заключено между -1 и 1, то равенство (10) верно при $|h|<1$.

Заменив h на $\frac{1}{h}$, получаем, что разложение

$$(1-2h\mu+h^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{P_0(\mu)}{h} + \frac{P_1(\mu)}{h^2} + \ldots + \frac{P_n(\mu)}{h^{n+1}} + \ldots$$

справедливо тогда, когда $|h|$ больше, чем наибольшее из двух чисел $|\mu \pm \sqrt{\mu^2-1}|$.

Разложение для $(r^2-2rr'\mu+r'^2)^{-\frac{1}{2}}$ принимает вид

$$\frac{1}{r'}P_0(\mu) + \frac{r}{r'^2}P_1(\mu) + \ldots + \frac{r^n}{r'^{n+1}}P_n(\mu) + \ldots \quad (r<r') \tag{11}$$

или

$$\frac{1}{r}P_0(\mu) + \frac{r'}{r^2}P_2(\mu) + \ldots + \frac{r'^n}{r^{n+1}}P_n(\mu) + \ldots \quad (r>r'). \tag{12}$$

Так как каждое из выражений (11) и (12) при тех значениях r', при которых выполняются условия сходимости, удовлетворяет уравнению Лапласа, то обычно отсюда делают вывод, что каждое слагаемое в отдельности удовлетворяет этому уравнению, и таким образом получают нормальные формы $r^nP_n(\mu)$ и $r^{-n-1}P_n(\mu)$. Однако этот вывод требует обоснования законности двукратного почленного дифференцирования по r и θ.

Выражение $\{x^2+y^2+(z-h)^2\}^{-\frac{1}{2}}$ может быть представлено в виде

$$\sum (-1)^n h^n \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{1}{r},$$

где $r=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$; отсюда вытекает следующая важная формула для $P_n(\mu)$:

$$P_n(\mu) = \frac{(-1)^n r^{n-1}}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{1}{r}. \tag{13}$$

11. Функция $P_n(\mu)$, где n — натуральное число, определяемая как коэффициент при h^n в разложении $(1-2h\mu+h^2)^{-\frac{1}{2}}$ по степеням h, ($|h|<1$), называется *коэффициентом Лежандра* степени n. Таким образом, коэффициенты Лежандра тождественны с многочленами Лежандра, вид которых был найден в п. 7.

Коэффициенты, или функции, Лежандра, определяемые как коэффициенты при степенях h^n в разложении (10), были введены Лежандром в его мемуаре «Sur l'attraction des Sphéroides», опубликованном в Mémoires de Mathématique et de Physique, présentés à l'Académie royale des sciences par divers savants, X, Paris, 1785. Эти функции встречаются в представленном Академии в 1782 г. мемуаре Лапласа «Théorie des attractions des sphéroïdes et de la figure des planètes», тем не менее, повидимому, они были введены Лежандром, работа которого оставалась неопубликованной в течение нескольких лет после ее написания; его работа упоминается как одобренная к печати в отчете о заседании Академии в 1783 г. Сам Лежандр заявлял, что Лаплас ввел потенциальную функцию, но само разложение было получено им. По вопросам приоритета см. Якоби[1]), Дирихле[2]) и Гейне[3]).

§ 4. ТАБЛИЦА КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛЕЖАНДРА

12. Коэффициент Лежандра степени n представляет собой алгебраический многочлен, который можно записать в виде

$$P_n(\mu)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\left\{\mu^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-2}+\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}\mu^{n-4}-\ldots\right\}; \quad (14)$$

первые несколько из этих коэффициентов таковы:

$$P_0(\mu)=1,\quad P_1(\mu)=\mu,\quad P_2(\mu)=\frac{1}{2}(3\mu^2-1),\quad P_3(\mu)=\frac{1}{2}(5\mu^3-3\mu),$$
$$P_4(\mu)=\frac{1}{8}(35\mu^4-30\mu^2+3),\quad P_5(\mu)=\frac{1}{8}(63\mu^5-70\mu^3+15\mu),$$
$$P_6(\mu)=\frac{1}{16}(231\mu^6-315\mu^4+105\mu^2-5),$$
$$P_7(\mu)=\frac{1}{16}(429\mu^7-693\mu^5+315\mu^3-35\mu).$$

Из (14) видно, что

$$P_n(1)=1,\qquad P_n(-1)=(-1)^n,$$
$$P_n(0)=0\quad\text{или}\quad(-1)^{\frac{1}{2}n}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(n-1)}{2\cdot 4\ldots n}, \quad (15)$$

в зависимости от того, нечетно или четно n.

Эти результаты можно получить проще, группируя коэффициенты при h^n в разложениях для

$$(1-h)^{-1},\qquad(1+h)^{-1},\qquad(1+h^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Нетрудно заметить, что знаменатели коэффициентов в многочленах Лежандра после возможных сокращений содержат только степени числа 2; действительно, коэффициенты в многочлене $4^nP_n(\mu)$ будут обязательно целыми[4]).

Таблицы $P_n(\mu)$ для n от 1 до 7 были составлены под руководством Глешера[5]); в них даны значения $P_n(\mu)$ с четырьмя десятичными знаками, от $\mu=0$ до $\mu=1$ через интервалы 0,01.

---

[1]) Journ. f. reine u. angew. Math., 2 (1827), 223.
[2]) Там же, 17 (1837), 35.
[3]) Kugelfunktionen, I, 1878, стр. 2.
[4]) См. Bauer, Journ. f. reine u. angew. Math., 56 (1859), 101.
[5]) Report of British Association (1879).

Четырехзначные таблицы [1]) $P_n(\cos\theta)$ для n от 1 до 7 составлены под руководством Перри, для значений θ, выраженных в градусах, от 0 до 90°, с интервалом в один градус.

Подробные таблицы были опубликованы [2]) также Мальмквистом.

§ 5. ФОРМУЛА РОДРИГА ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ ЛЕЖАНДРА

13. Выражение (14) для $P_n(\mu)$ может быть записано в таком виде:

$$P_n(\mu)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\mu^n}\left\{\mu^{2n}-n\mu^{2n-2}+\frac{n(n-1)}{2!}\mu^{2n-4}-\ldots+(-1)^n\right\},$$

откуда получается следующая формула:

$$P_n(\mu)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2-1)^n, \tag{16}$$

известная под названием формулы Родрига. Она может быть получена непосредственно из определяющего $P_n(\mu)$ равенства (10) следующим образом.

Пусть $\frac{dv}{d\mu}=\frac{1}{\sqrt{1-2h\mu+h^2}}$; тогда за v можно принять следующее выражение:

$$v=\frac{1}{h}-\frac{1}{h}\sqrt{1-2h\mu+h^2},$$

откуда получаем

$$v=\mu+\frac{h}{2}(v^2-1).$$

Применив теорему Лагранжа, разложим v по степеням h; получим

$$v=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n}{2^n n!}\frac{d^{n-1}}{d\mu^{n-1}}(\mu^2-1)^n,$$

откуда получаем, что $P_n(\mu)$ как коэффициент при h^n в разложении $\frac{dv}{d\mu}$ по степеням h равняется $\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2-1)^n$. Чтобы закончить доказательство, нужно еще проверить сходимость и возможность почленного дифференцирования разложения Лагранжа.

Эта весьма важная формула (16) была найдена Родригом; она содержится в его работе «Mémoire sur l'attraction des sphéroïdes», опубликованной в 1816 г. в Correspondance de l'Ecole Royale Polytechnique, т. III. Ранее приоретет в открытии этой формулы приписывался Ивори и Якоби; последнему принадлежит второе из приведенных выше доказательств.

§ 6. РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ ЛЕЖАНДРА НА МНОЖИТЕЛИ

14. Уравнение $(\mu^2-1)^n=0$ имеет n корней, равных 1, и n корней, равных -1; отсюда следует, что все корни уравнения

$$\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2-1)^n=0,$$

т. е.

$$P_n(\mu)=0,$$

---

[1]) Phil. Mag. (5), 32 (1891), 512.

[2]) Хельсинки, 1908.

действительны и лежат между -1 и 1. Мы покажем сейчас, что все эти корни попарно различны. Дифференцируя равенство

$$(1-\mu^2)\frac{d^2P_n}{d\mu^2}-2\mu\frac{dP_n}{d\mu}+n(n+1)P_n=0$$

s раз по μ, получаем

$$(1-\mu^2)\frac{d^{s+2}P_n}{d\mu^{s+2}}-2(s+1)\mu\frac{d^{s+1}P_n}{d\mu^{s+1}}+(n-s)(n+s+1)\frac{d^sP_n}{d\mu^s}=0.$$

Допустим теперь, что уравнение $P_n(\mu)=0$ имеет два совпадающих корня $\mu=\alpha$; тогда при этом значении μ и P_n и $\frac{dP_n}{d\mu}$ обращаются в нуль. Из уравнения Лежандра следует, что тогда при том же самом значении $\mu=\alpha$ и $\frac{d^2P_n}{d\mu^2}$ обращается в нуль; далее, полагая $s=1, 2, 3, \ldots, n-2$, получим, что

$$\frac{d^3P_n}{d\mu^3},\quad \frac{d^4P_n}{d\mu^4},\quad \ldots,\quad \frac{d^nP_n}{d\mu^n}$$

должны все обращаться в нуль при $\mu=\alpha$. Но $\frac{d^nP_n}{d\mu^n}$ есть постоянная, отличная от нуля. Таким образом, уравнение $P_n(\mu)=0$ не может иметь кратных корней. Так как $P_n(\mu)$ при четном n представляет собой функцию от μ^2, а при нечетном n — функцию от μ^2, умноженную на μ, то, следовательно, $P_n(\mu)$ имеет вид

$$\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{1\cdot2\cdot3\ldots n}(\mu^2-\alpha_1^2)(\mu^2-\alpha_2^2)\ldots\left(\mu^2-\alpha^2_{\frac{1}{2}n}\right)$$

при четном n и вид

$$\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{1\cdot2\cdot3\ldots n}\mu(\mu^2-\beta_1^2)(\mu^2-\beta_2^2)\ldots\left(\mu^2-\beta^2_{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}\right)$$

при нечетном n. Числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots$ все действительны и заключены между нулем и единицей.

Рассмотрим поверхность вращения, определяемую в сферических координатах уравнением

$$r=a+bP_n(\cos\theta);$$

эта поверхность пересекается со сферой $r=a$ в тех точках, в которых $P_n(\cos\theta)$ обращается в нуль. Эти точки лежат на n окружностях, плоскости которых перпендикулярны к оси. Сами эти окружности расположены симметрично относительно диаметральной плоскости $\theta=\frac{\pi}{2}$. Если n нечетно, то большой круг, по которому диаметральная плоскость пересекает сферу, является одной из этих окружностей и с каждой стороны от этого большого круга расположено $\frac{1}{2}(n-1)$ малых кругов. Если n четно, то с каждой стороны от этого большого круга расположено $\frac{n}{2}$ малых кругов. Эти n окружностей, лежащие на сфере, называются узловыми линиями функции $P_n(\mu)$.

Так как узловые линии делят сферическую поверхность на зоны, то функции Лежандра $P_n(\mu)$ называются *зональными гармоническими функциями*. Функции $r^nP_n(\mu)$ и $r^{-n-1}P_n(\mu)$ часто называются *телесными* (*шаровыми*) *зональными функциями* степени n и $-n-1$ соответственно. В отличие от них функция $P_n(\mu)$ называется *поверхностной зональной функцией* степени n.

§ 7. ДРУГИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ ЛЕЖАНДРА

15. Для функции $P_n(\cos\theta)$ могут быть даны различные выражения.

1. Выражая $P_n(\cos\theta)$ через косинусы углов, кратных θ, можно показать, что

$$P_n(\cos\theta) = 2\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\left\{\cos n\theta + \frac{1\cdot n}{1(2n-1)}\cos(n-2)\theta + \right.$$
$$\left. + \frac{1\cdot 3\cdot n(n-1)}{1\cdot 2(2n-1)(2n-1)}\cos(n-4)\theta + \ldots\right\}. \quad (17)$$

Для значений n от 1 до 7 это представление дает

$$P_0(\cos\theta) = 1,\quad P_1(\cos\theta) = \cos\theta,\quad P_2(\cos\theta) = \frac{1}{4}(3\cos 2\theta + 1),$$

$$P_3(\cos\theta) = \frac{1}{8}(5\cos 3\theta + 3\cos\theta),\quad P_4(\cos\theta) = \frac{1}{64}(35\cos 4\theta + 20\cos 2\theta + 9),$$

$$P_5(\cos\theta) = \frac{1}{128}(63\cos 5\theta + 35\cos 3\theta + 30\cos\theta),$$

$$P_6(\cos\theta) = \frac{1}{512}(231\cos 6\theta + 126\cos 4\theta + 105\cos 2\theta + 50),$$

$$P_7(\cos\theta) = \frac{1}{1024}(429\cos 7\theta + 231\cos 5\theta + 189\cos 3\theta + 175\cos\theta).$$

Это разложение, найденное и Лапласом и Лежандром, можно получить, записывая $(1-2h\cos\theta + h^2)^{-\frac{1}{2}}$ в виде

$$(1-he^{i\theta})^{-\frac{1}{2}}(1-he^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= \left\{1 + \frac{1}{2}he^{i\theta} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}h^2e^{2i\theta} + \ldots + \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}h^ne^{in\theta} + \ldots\right\}\times$$
$$\times\left\{1 + \frac{1}{2}he^{-i\theta} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}h^2e^{-i2\theta} + \ldots + \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}h^ne^{-in\theta} + \ldots\right\};$$

группируя члены, содержащие h^n, получим формулу (17). Законность этой операции вытекает из того, что каждый из написанных двух рядов абсолютно сходится, и, следовательно, их произведение сходится к произведению их сумм.

Если положить $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, то (17) можно, очевидно, записать в виде

$$P_n(\cos\theta) =$$
$$= \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}z^{-n}\left\{1 + \frac{1\cdot n}{1(2n-1)}\cdot z^2 + \frac{1\cdot 3\cdot n(n-1)}{1\cdot 2(2n-1)(2n-3)}z^4 + \ldots + z^{2n}\right\},$$

или

$$P_n(\mu) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}z^{-n}F\left(\frac{1}{2},\ -n;\ \frac{1}{2}-n;\ z^2\right) =$$
$$= \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}z^nF\left(\frac{1}{2},\ -n;\ \frac{1}{2}-n;\ z^{-2}\right). \quad (17')$$

Так как в действительности формула (17′) представляет собой просто алгебраическое преобразование выражения $P_n(\mu)$ как многочлена от μ, которое получается, если положить $z = \mu + \sqrt{\mu^2-1}$, то ясно, что формула (17′) остается справедливой и при $\mu > 1$, т. е. для мнимых значений θ. Ясно также, что эта формула верна для всех комплексных значений μ, если n — целое положительное.

Из формулы (17) вытекает, что если θ действительно, то $P_n(\cos\theta)$ достигает своего максимума, равного 1, при $\theta = 0$; таким образом, $P_n(\cos\theta)$

нигде не превосходит 1. Ясно также, что $P_n(\cos\theta)$ всюду не меньше, чем -1; таким образом, *если* μ *заключено между* -1 *и* 1, *то* $P_n(\mu)$ *также заключено между* -1 *и* 1.

2. Представим теперь $P_n(\cos\theta)$ в виде рядов по степеням $\sin\frac{\theta}{2}$ или по степеням $\cos\frac{\theta}{2}$; мы покажем, что

$$P_n(\cos\theta)=1-\frac{(n+1)\,n}{1^2}\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{(n+2)\,(n+1)\,n\,(n-1)}{1^2\cdot 2^2}\sin^4\frac{\theta}{2}-\ldots=$$
$$=F\left(n+1,\quad -n;\quad 1;\quad \sin^2\frac{\theta}{2}\right)\qquad(18)$$

и

$$P_n(\cos\theta)=(-1)^n\left\{1-\frac{(n+1)\,n}{1^2}\cos^2\frac{\theta}{2}+\frac{(n+2)\,(n+1)\,n\,(n-1)}{1^2\cdot 2^2}\cos^4\frac{\theta}{2}-\ldots\right\}=$$
$$=(-1)^n F\left(n+1,\quad -n;\quad 1;\quad \cos^2\frac{\theta}{2}\right).\qquad(19)$$

Выражения (18) и (19) можно записать как $F\left(n+1,\quad -n;\quad 1;\quad \frac{1-\mu}{2}\right)$ и $(-1)^n F\left(n+1,\quad -n;\quad 1;\quad \frac{1+\mu}{2}\right)$; они представляют $P_n(\mu)$ при всех действительных и комплексных значениях μ; n предполагается целым.

Чтобы получить формулу (18), запишем $(1-2h\cos\theta+h^2)^{-\frac{1}{2}}$ в виде выражения

$$(1-h)^{-1}\left\{1+\frac{4h}{(1-h)^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right\}^{-\frac{1}{2}},$$

которое может быть разложено в сходящийся ряд, если только h таково, что

$$\frac{4h}{(1-h)^2}\sin^2\frac{\theta}{2}<1;$$

тогда мы получим

$$(1-h)^{-1}-\frac{1}{2}(1-h)^{-3}\,4\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}(1-h)^{-5}\left(4\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2-\ldots$$

Если в этом ряду каждую степень $1-h$ заменить ее разложением в степенной ряд, то получится ряд абсолютно сходящийся, следовательно, его члены можно расположить любым образом, не меняя его суммы.

Группируя вместе члены с одинаковыми степенями h^n мы получим выражение (18). Это выражение можно получить также и из формулы Родрига, а именно:

$$P_n(\mu)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu-1)^n(2+\mu-1)^n=$$
$$=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\mu^n}\left\{2^n(\mu-1)^n+n\cdot 2^{n-1}(\mu-1)^{n+1}+\frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}2^{n-2}(\mu-1)^{n+2}+\ldots\right\}=$$
$$=1-\frac{(n+1)\,n}{1^2}\cdot\frac{1-\mu}{2}+\frac{(n+2)\,(n+1)\,n\,(n-1)}{1^2\cdot 2^2}\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^2-\ldots,$$

что эквивалентно формуле (18). Выражение (19) может быть получено из (18) заменой μ на $-\mu$, если, кроме того, учесть, что $P_n(-\mu)=(-1)^n P_n(\mu)$. Следует отметить, что каждый из этих рядов на самом деле содержит лишь конечное число членов, будучи просто записью $P_n(\mu)$ как функции от $1-\mu$ и от $1+\mu$ соответственно.

3. Докажем формулу

$$P_n(\cos\theta)=\cos^{2n}\frac{\theta}{2}\left\{1-\frac{n^2}{1^2}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}+\frac{n^2(n-1)^2}{1^2\cdot 2^2}\operatorname{tg}^4\frac{\theta}{2}-\frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}\operatorname{tg}^6\frac{\theta}{2}+\ldots\right\}=$$
$$=\cos^{2n}\frac{\theta}{2}F\left(-n,\ -n;\ 1;\ -\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right). \quad (20)$$

Воспользовавшись формулой Родрига, можно написать

$$P_n(\mu)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu+1)^n(\mu-1)^n=$$
$$=\frac{1}{2^n n!}\left\{(\mu+1)^n\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu-1)^n+n\frac{d}{d\mu}(\mu+1)^n\frac{d^{n-1}}{d\mu^{n-1}}(\mu-1)^n+\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{d^2}{d\mu^2}(\mu+1)^n\frac{d^{n-2}}{d\mu^{n-2}}(\mu-1)^n+\ldots\right\}=$$
$$=\frac{1}{2^n}\left\{(\mu+1)^n+n^2(\mu+1)^{n-1}(\mu-1)+\frac{n^2(n-1)^2}{1^2\cdot 2^2}(\mu+1)^{n-2}(\mu-1)^2+\ldots\right\};$$

подставляя $2\cos^2\frac{\theta}{2}$ вместо $1+\mu$ и $2\sin^2\frac{\theta}{2}$ вместо $1-\mu$, получим формулу (20).

Формулы (18), (19) и (20) были даны Мэрфи[1]). Они имеются также у Дирихле[2]).

4. Докажем формулу

$$P_n(\cos\theta)=\cos^n\theta\left\{1-\frac{n(n-1)}{2^2}\operatorname{tg}^2\theta+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2\cdot 4^2}\operatorname{tg}^4\theta-\ldots\right\}=$$
$$=\cos^n\theta\, F\left(-\frac{n}{2},\ \frac{1-n}{2};\ 1;\ -\operatorname{tg}^2\theta\right). \quad (21)$$

Имеем

$$(1-2h\mu+h^2)^{-\frac{1}{2}}=\{(1-h\mu)^2+h^2(1-\mu^2)\}^{-\frac{1}{2}}=(1-h\mu)^{-1}\left\{1+\frac{h^2(1-\mu^2)}{(1-h\mu)^2}\right\}^{-\frac{1}{2}};$$

если h таково, что $\frac{h^2(1-\mu^2)}{(1-h\mu)^2}<1$, то можно воспользоваться разложением Тейлора. Общий член будет иметь вид

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2r-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2r}h^{2r}\frac{(1-\mu^2)^r}{(1-h\mu)^{2r+1}},$$

и коэффициент при h^n в этом члене равен

$$\frac{(2r)!}{2^{2r}r!r!}\cdot\frac{n!}{2r!(n-2r)!}(1-\mu^2)^r\mu^{n-2r},$$

откуда и следует (21). Этот вывод законен, так как ряд сходится абсолютно и, следовательно, его члены можно переставлять любым образом, не меняя его суммы.

Заметим, что те выражения, которые мы получили для $P_n(\mu)$ в этом пункте, равно как и представление $P_n(\mu)$ в виде многочлена от μ, можно рассматривать как частные случаи гипергеометрического ряда. Это связано с тем, что уравнение Лежандра с помощью весьма простого преобразования может быть сведено к частному случаю гипергеометрического уравнения; указанные различные формы можно получить как частные случаи общих преобразований, применимых к гипергеометрическому ряду. Эту точку зрения мы разовьем в гл. V, где мы рассмотрим общий случай, когда n может быть любым действительным или комплексным числом.

---

[1]) Treatise on Electricity, Cambridge, 1833.

[2]) Journ. f. reine u. angew. Math., 17 (1837), 35 и 39.

§ 8. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ ЛЕЖАНДРА С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

16. Чтобы найти представление $P_n(\mu)$ в виде определенного интеграла, нам нужно вычислить интеграл $\int\limits_0^\pi \frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi}$, где a, b — заданные числа, действительные или комплексные. Так как в дальнейшем нам понадобится значение более общего интеграла $\int\limits_0^\pi \frac{\cos m\varphi}{a+b\cos\varphi}\,d\varphi$, где m — целое неотрицательное число, то нам удобнее сразу вычислить этот последний.

Имеем

$$\frac{1}{a+b\cos\varphi}=\frac{2e^{i\varphi}}{be^{2i\varphi}+2ae^{i\varphi}+b}=-\frac{2e^{i\varphi}}{b(\alpha-e^{i\varphi})(e^{i\varphi}-\beta)},$$

где α, β — корни квадратного уравнения $bz^2+2az+b=0$; таким образом, $\alpha\beta=1$, $\alpha=\frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}$, $\beta=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$. В общем случае модуль одного из этих чисел больше единицы, модуль другого — меньше. Выберем знак выражения $\sqrt{a^2-b^2}$ так, чтобы

$$\left|\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right|<1.$$

Тогда

$$\left|\frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right|>1.$$

Мы можем записать $\frac{1}{a+b\cos\varphi}$ в виде выражения

$$\frac{2}{\beta-\alpha}\left(\frac{\alpha}{\alpha-e^{i\varphi}}+\frac{\beta}{e^{i\varphi}-\beta}\right),$$

которое может быть разложено в сходящийся ряд

$$\frac{2}{\beta-\alpha}(1+\beta e^{i\varphi}+\beta^2e^{2i\varphi}+\ldots+\beta e^{-i\varphi}+\beta^2e^{-2i\varphi}+\ldots)$$

и, следовательно, равняется

$$\frac{2}{\beta-\alpha}(1+2\beta\cos\varphi+2\beta^2\cos 2\varphi+2\beta^3\cos 3\varphi+\ldots).$$

Так как $\int\limits_0^\pi \cos m\varphi\cos n\varphi\,d\varphi=0$ при $m\neq n$, то

$$\int\limits_0^\pi \frac{\cos m\varphi}{a+b\cos\varphi}\,d\varphi=\int\limits_0^\pi \frac{4\beta^m}{\beta-\alpha}\cos^2 m\varphi\,d\varphi=2\pi\frac{\beta^m}{\beta-\alpha},$$

следовательно,

$$\int\limits_0^\pi \frac{\cos m\varphi}{a+b\cos\varphi}\,d\varphi=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\left(\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)^m. \tag{22}$$

Знак корня $\sqrt{a^2-b^2}$ выбирается так, что $\left|\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right|<1$. Это невозможно только тогда, когда $\frac{b}{a}$ — действительное число, по модулю большее единицы; в этом случае $|\alpha|=|\beta|=1$, и написанное выше разложение становится расходящимся. Рассматриваемый интеграл в этом случае не имеет смысла.

В случае $m=0$ мы имеем

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}; \tag{23}$$

знак корня $\sqrt{a^2-b^2}$ определяется так же, как и выше.

17. Если в формуле (23) положить $a=1-h\mu$, $b=\mp h\sqrt{\mu^2-1}$, то получим

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{1-h\mu\mp h\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi}=\frac{\pi}{(1-2h\mu+h^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Разложим обе части этого равенства в ряд по степеням h $(h<1)$; так как ряд, получающийся в левой части, сходится равномерно по φ, то возможно почленное интегрирование. Приравнивая затем коэффициенты при h^n, получаем равенство

$$P_n(\mu)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\mu\pm\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^n\,d\varphi, \tag{24}$$

известное[1]) под названием лапласовского представления $P_n(\mu)$ в виде определенного интеграла.

Пусть теперь $a=h\mu-1$, $b=\pm h\sqrt{\mu^2-1}$, тогда

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{h\mu-1\pm h\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi}=\frac{\pi}{(1-2h\mu+h^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Предположим, что $h>1$, тогда обе части этого равенства можно разложить в сходящийся ряд по степеням $\frac{1}{h}$ и поступить так же, как и выше; приравняв коэффициенты при $\frac{1}{h^{n+1}}$, получим следующую формулу:

$$P_n(\mu)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{(\mu\mp\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^{n+1}}. \tag{25}$$

Формулы (24) и (25) эквивалентны друг другу; действительно, сделав замену переменных по формуле $(\mu\pm\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)(\mu\mp\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi')=1$, получим

$$\int_0^\pi (\mu\pm\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^n\,d\varphi=\int_0^\pi \frac{d\varphi'}{(\mu\mp\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi')^{n+1}}.$$

Важная формула (24) была получена Лапласом в V томе его «Небесной механики» (1825, книга XI, гл. II). Указанный метод доказательства принадлежит Якоби[2]). В мемуаре[3]) «О значениях, принимаемых определенным интегралом $\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-A\cos\varphi-B\sin\varphi}$ при произвольных мнимых значе-

---

[1]) См. Лаплас, Небесная механика, книга XI, гл. II.
[2]) Journ. f. reine u. angew. Math., 26.
[3]) Там же, 32.

ниях A и B'', Якоби рассматривает этот более общий интеграл. Там показано, что если знак корня выбирается так, что

$$|A-\sqrt{A^2-B^2-C^2}|<|B-iC|,$$

то

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{A-B\cos\varphi-C\sin\varphi}=\frac{2\pi}{\sqrt{A^2-B^2-C^2}};$$

исключение составляет случай

$$|A\pm\sqrt{A^2-B^2-C^2}|=|B-iC|,$$

когда этот интеграл не имеет смысла, и случай

$$|A\pm\sqrt{A^2-B^2-C^2}|<|B-iC|,$$

в котором этот определенный интеграл равен нулю. Мы исследуем этот интеграл в гл. VII.

18. Другое важное представление $P_n(\mu)$ в виде определенного интеграла может быть получено из (23). Полагая

$$a-b=2(1-2h\mu+h^2),\qquad a+b=2(1-2h\mu'+h^2),$$
$$2\xi=\mu+\mu'-(\mu-\mu')\cos\varphi,$$

получаем

$$\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{1-2h\xi+h^2}=\frac{\pi}{(1-2h\mu+h^2)^{\frac{1}{2}}(1-2h\mu'+h^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Мы находим, что

$$(\mu'-\mu)\sin\varphi=2\sqrt{(\mu'-\xi)(\xi-\mu)},$$

причем можно полагать, что $\mu'>\mu$; принимая в интеграле ξ за независимое переменное, получаем

$$\int_{\mu}^{\mu'}\frac{d\xi}{(1-2h\xi+h^2)\sqrt{(\mu'-\xi)(\xi-\mu)}}=\frac{\pi}{\sqrt{1-2h\mu+h^2}\sqrt{1-2h\mu'+h^2}}.$$

Пусть $\mu'=1$, тогда

$$\int_{\mu}^{1}\frac{(1-h)\,d\xi}{(1-2h\xi+h^2)\sqrt{(1-\xi)(\xi-\mu)}}=\frac{\pi}{\sqrt{1-2h\mu+h^2}}.$$

Положив $\xi=\cos\psi$, получаем

$$\int_0^{\arccos\mu}\frac{(1-h)\cos\frac{\psi}{2}\,d\psi}{(1-2h\cos\psi+h^2)\sqrt{2(\cos\psi-\mu)}}=\frac{\pi}{2\sqrt{1-2h\mu+h^2}}.$$

Легко показать, что

$$\frac{(1-h)\cos\frac{\psi}{2}}{1-2h\cos\psi+h^2}=\sum_{n=0}^{\infty}h^n\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\psi,\quad (h<1),$$

поэтому, интегрируя почленно и приравнивая коэффициенты при h^n в обеих частях получающегося при этом равенства, имеем

$$P_n(\mu)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\arccos\mu}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\psi}{\sqrt{2(\cos\psi-\mu)}}\,d\psi,$$

т. е.

$$P_n(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\theta \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\psi}{\sqrt{2(\cos\psi-\cos\theta)}}\,d\psi. \tag{26}$$

Пусть теперь $\mu'=-1$, тогда

$$\int\limits_{-1}^{\mu}\frac{(1+h)\,d\xi}{(1-2h\xi+h^2)\sqrt{(\mu-\xi)(\xi+1)}}=\frac{\pi}{\sqrt{1-2h\mu+h^2}};$$

Положив $\xi=\cos\psi$ и воспользовавшись разложением

$$\frac{(1+h)\sin\frac{\psi}{2}}{1-2h\cos\psi+h^2}=\sum_{n=0}^{\infty}h^n\sin\left(h+\frac{1}{2}\right)\psi,$$

получим

$$P_n(\mu)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{\arccos\mu}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\psi}{\sqrt{2(\mu-\cos\psi)}}\,d\psi,$$

т. е.

$$P_n(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}\int\limits_\theta^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\psi}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\psi)}}\,d\psi. \tag{27}$$

Формулы (26) и (27), известные под названием формул Мелера, показывают, что

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\theta \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\psi}{\sqrt{2(\cos\psi-\cos\theta)}}\,d\psi-\frac{1}{\pi}\int\limits_\theta^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\psi}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\psi)}}\,d\psi=0;$$

заменяя в этом равенстве n на $n-1$, получаем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\theta \frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\psi}{\sqrt{2(\cos\psi-\cos\theta)}}\,d\psi-\frac{1}{\pi}\int\limits_\theta^\pi \frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\psi}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\psi)}}\,d\psi=0.$$

Прибавив половину выражения, стоящего в левой части этого равенства, к полусумме выражений (26) и (27), получим

$$P_n(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\theta \frac{\cos n\psi\cos\frac{\psi}{2}}{\sqrt{2(\cos\psi-\cos\theta)}}\,d\psi+\frac{2}{\pi}\int\limits_\theta^\pi \frac{\cos n\psi\sin\frac{\psi}{2}}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\psi)}}\,d\psi. \tag{A}$$

Аналогично получается формула

$$P_n(\cos\theta)=-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\theta \frac{\sin n\psi\sin\frac{\psi}{2}}{\sqrt{2(\cos\psi-\cos\theta)}}\,d\psi+\frac{2}{\pi}\int\limits_\theta^\pi \frac{\sin n\psi\cos\frac{\psi}{2}}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\psi)}}\,d\psi. \tag{B}$$

Формулы (A) и (B) представляют собой интегральные выражения Дирихле[1]) для $P_n(\cos\theta)$; они были приведены к эквивалентным им формулам (26) и (27) Мелером[2]). Заметим, что θ должно быть действительно

[1]) Journ. f. reine u. angew. Math., 17 (1837), 41.
[2]) Math. Ann., 5 (1872), 141.

и заключено между 0 и π. Приведенное доказательство этих формул принадлежит Эрмиту[1]).

Формулы (А) и (В) Дирихле получил, полагая $h=e^{i\psi}$ в разложении выражения $(1-2h\mu+h^2)^{-\frac{1}{2}}$, которое при этом имеет вид

$$1+2P_1(\mu)(\cos\psi+i\sin\psi)+\ldots+2P_n(\mu)(\cos n\psi+i\sin n\psi)+\ldots=$$
$$=\frac{1}{e^{i\frac{\psi}{2}}\sqrt{2(\cos\psi-\cos\varphi)}}\quad\text{или}\quad\frac{1}{e^{i\frac{\psi+\pi}{2}}\sqrt{2(\cos\theta-\cos\psi)}},$$

в зависимости от того, будет ψ меньше или больше, чем θ. Приравнивая отдельно действительные и мнимые части выражений, стоящих справа и слева, получаем

$$1+2P_1(\mu)\cos\psi+\ldots+2P_n(\mu)\cos n\psi+\ldots=$$
$$=\frac{\cos\frac{\psi}{2}}{\sqrt{2(\cos\psi-\cos\theta)}}\quad\text{или}\quad\frac{\sin\frac{\psi}{2}}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\psi)}},$$

при $\theta>\psi$ и $\theta<\psi$ соответственно и

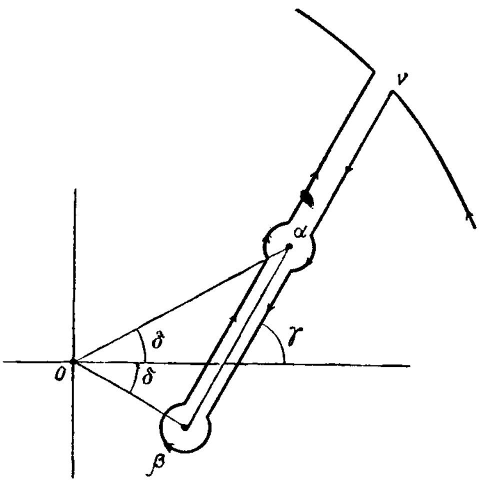
$$2P_1(\mu)\sin\psi+\ldots+2P_n(\mu)\sin n\psi+\ldots=$$
$$=\frac{-\sin\frac{\psi}{2}}{\sqrt{2(\cos\psi-\cos\theta)}}\quad\text{или}\quad\frac{\cos\frac{\psi}{2}}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\psi)}},$$

также при $\theta>\psi$ и $\theta<\psi$ соответственно. Вычисляя коэффициенты при $\cos n\psi$ и $\sin n\psi$ в разложениях этих разрывных функций по формулам Эйлера — Фурье, получим формулы (А) и (В), принадлежащие Дирихле. Этот способ нельзя рассматривать как доказательство; действительно, при h, равном по модулю единице, равенство может и не иметь места, так как на границе круга сходимости ряд не обязан сходиться; однако результат можно проверить, найдя сумму конечного числа членов ряда и исследовав затем предел этой суммы при неограниченном возрастании числа слагаемых (см. п. 19, примеры 1 и 2).

19. Другой поучительный метод получения интегральных представлений для многочленов Лежандра основан на рассмотрении значений выражения $(1-2h\mu+h^2)^{-\frac{1}{2}}$ для комплексных h. Предположим, что μ — произвольное фиксированное комплексное число; обозначим через α и β числа $\mu+\sqrt{\mu^2-1}$ и $\mu-\sqrt{\mu^2-1}$, где значение корня $\sqrt{\mu^2-1}$ выбирается так, чтобы его действительная часть имела тот же знак, что и $\mathrm{Re}(\mu)$. В том исключительном случае, когда число μ — чисто мнимое, предполагается, что $\sqrt{\mu^2-1}$ имеет тот же знак, что и μ. Так как $(1-2\mu h+h^2)^{-\frac{1}{2}}=$ $=(h-\alpha)^{-\frac{1}{2}}(h-\beta)^{-\frac{1}{2}}$, то $h=\alpha$ и $h=\beta$ являются для этой функции точками ветвления; следовательно, эта функция может быть представлена как однозначная функция на двулистной римановой поверхности, для которой прямолинейный отрезок, соединяющий точки α и β, является линией ветвления. Предположим, что верхним листом является тот, на котором $(1-2\mu h+h^2)^{-\frac{1}{2}}$ при $h=0$ принимает значение 1 и рассмотрим на этом листе фигуру, изображенную на черт. 1. Пусть γ — угол между линией ветвления и действительной осью. Так как $\alpha\beta=1$, то линии $O\alpha$ и $O\beta$ обра-

[1]) Journ. f. reine u. angew. Math., 57 (1891), 80.

зуют с действительной осью одинаковые углы δ. Значения величины $\{(h-\alpha)(h-\beta)\}^{-\frac{1}{2}}$ в точках, лежащих около линии ветвления по разные стороны от нее, равны $(\rho\rho')^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{i}{2}(\pi-2\gamma)}$ и $(\rho\rho')^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{i}{2}(\pi+2\gamma)}$, где $\rho=|h-\alpha|$ и $\rho'=|h-\beta|$. Если теперь рассмотреть точку h, движущуюся вдоль действительной оси из начала координат к точке ветвления, то при этом, очевидно, $\operatorname{Re}[(1-2\mu h+h^2)^{-\frac{1}{2}}]$ нигде не обратится в нуль. Следовательно, $\operatorname{Re}[(1-2\mu h+h^2)^{-\frac{1}{2}}]$ имеет в точке O тот же знак, что и в точке действительной оси, лежащей на линии ветвления с левой стороны. Отсюда видно, что выражение $(\rho\rho')^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{i}{2}(\pi-2\gamma)}$, действительная часть которого положительна, представляет собой значение $(1-2\mu h+h^2)$ на левой стороне линии ветвления.



Черт. 1.

Из разложения

$$(1-2h\mu+h^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum P_n(\mu)\,h^n,$$

которое справедливо при

$$|h|<|\mu-\sqrt{\mu^2-1}|,$$

применяя формулу Коши, получаем

$$P_n(\mu)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{dh}{h^{n+1}(1-2h\mu+h^2)^{\frac{1}{2}}},$$

причем интеграл может быть взят по любому замкнутому контуру, лежащему на верхнем листе и окружающему начало координат. На черт. 1 такой контур изображен в виде большой почти смыкающейся окружности радиуса R, двух прямых, идущих от разрыва на этой окружности почти до α, двух дуг, охватывающих точку α, двух прямых, идущих вдоль линии ветвления, и, наконец, почти замыкающейся окружности, охватывающей точку β. Если радиус R внешней окружности возрастает до бесконечности, то интеграл по этой окружности обращается в нуль, интегралы по лучам, идущим от этой окружности к точке α, равны по величине и противоположны по знаку, а интегралы по малым окружностям, охватывающим α и β, также сколь угодно малы, так как

$$\int(h-\alpha)^{-\frac{1}{2}}dh,\qquad \int(h-\beta)^{-\frac{1}{2}}dh$$

стремятся к нулю, когда $h-\alpha$ и $y-\beta$ стремятся к нулю. Таким образом, остаются только интегралы, взятые по обеим сторонам линии ветвления; следовательно, имеем

$$P_n(\mu)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\beta}^{\alpha}\frac{dh}{h^{n+1}(1-2h\mu+h^2)^{\frac{1}{2}}},$$

где интеграл берется по левой стороне линии ветвления.

Пусть $h=\mu-\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi$, где φ меняется от 0 до π, тогда

$$(1-2h\mu+h^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{i}{\sqrt{\mu^2-1}\sin\varphi},$$

так как в случае, соответствующем черт. 1, действительная часть $\operatorname{Re}(\sqrt{\mu^2-1})>0$ и, как мы показали выше, $\arg(1-2h\mu+h^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{2}-\gamma$, так что и $\operatorname{Im}(\sqrt{\mu^2-1})>0$. Так как $dh=\sqrt{\mu^2-1}\sin\varphi\,d\varphi$, то

$$P_n(\mu)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi\frac{d\varphi}{(\mu-\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^{n+1}}. \tag{24}$$

Заменив h на $\frac{1}{h}$, получим

$$P_n(\mu)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_\alpha^\beta\frac{h^n\,dh}{(1-2h\mu+h^2)^{\frac{1}{2}}},$$

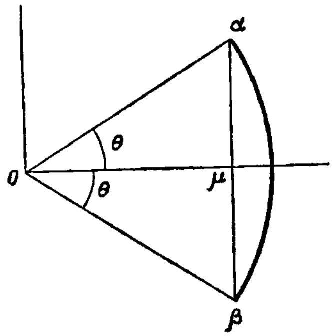
откуда при $h=\mu+\sqrt{\mu^2-1}$ имеем

$$P_n(\mu)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^n\,d\varphi. \tag{25}$$

Этот метод может быть применен также для вывода формул Дирихле и Мелера. Предположим, что μ действительно и лежит между -1 и 1, линия $\alpha\beta$ параллельна мнимой оси и точки α, β лежат на единичной окружности. Мы показали, что

$$P_n(\mu)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_\alpha^\beta\frac{dh}{h^{n+1}\sqrt{1-2h\mu+h^2}},$$

где интеграл берется вдоль линии ветвления, по ее правой стороне. Мы можем заменить этот путь дугой окружности, проходящей через точки α и β, центр которой находится в начале координат (черт. 2). Полагая при этом $h=e^{i\varphi}$ и вспоминая, что действительная часть выражения $\sqrt{1-2h\mu+h^2}$ должна быть отрицательной, приводим полученный интеграл к виду



Черт. 2.

$$P_n(\cos\theta)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\theta}^{\theta}\frac{d\varphi}{e^{in\varphi}\sqrt{1-2\cos\theta\cdot e^{i\varphi}+e^{2i\varphi}}}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\theta\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\sqrt{2\cos\varphi-2\cos\theta}}\,d\varphi. \tag{26}$$

Взяв этот интеграл по дополнительной дуге единичного круга, соединяющий точки α и β, мы получили бы формулу

$$P_n(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}\int\limits_\theta^\pi\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\sqrt{2\cos\theta-2\cos\varphi}}\,d\varphi. \tag{27}$$

Другое интегральное представление для $P_n(\mu)$ может быть получено с помощью формулы Родрига

$$P_n(\mu)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2-1)^n.$$

Именно, применяя формулу Коши, получаем

$$P_n(\mu)=\frac{1}{2^n n!\,2\pi i}\int\frac{1}{t-\mu}\,\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n\,dt,$$

где интеграл берется вдоль замкнутого контура, охватывающего точку μ; интегрируя по частям n раз, получаем формулу

$$P_n(\mu)=\frac{1}{2^n\cdot 2\pi i}\int\frac{(t^2-1)^n}{(t-\mu)^{n+1}}\,dt; \tag{28}$$

в качестве пути интегрирования можно взять любой контур, обходящий точку μ в положительном направлении. Эти интегралы были изучены методами теории функций Лораном[1]) и Шлефли[2]).

ПРИМЕРЫ

1. Получить ряды (20) и (21) для $P_n(\cos\theta)$ из интеграла Лапласа. Имеем

$$P_n(\cos\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\cos\theta+i\sin\theta\cos\varphi)^n\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left[\cos^{2n}\frac{\theta}{2}\left(1+ie^{i\varphi}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)^n\left(1+ie^{-i\varphi}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)^n\right]d\varphi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cos^{2n}\frac{\theta}{2}\int_0^\pi\left[1+ine^{i\varphi}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+\frac{n(n-1)}{2!}e^{2i\varphi}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}+\ldots\right]\times$$

$$\times\left[1+ine^{-in\varphi}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+\frac{n(n-1)}{2!}e^{-2i\varphi}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}+\ldots\right]d\varphi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cos^{2n}\frac{\theta}{2}\int_0^\pi\left[1-n^2\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}+\frac{n^2(n-1)^2}{1^2\cdot 2^2}\operatorname{tg}^4\frac{\theta}{2}+\ldots\right]d\varphi,$$

так как интегралы от косинусов углов, кратных φ, в пределах от 0 до π равны 0. Таким образом мы получаем формулу

$$P_n(\cos\theta)=\cos^{2n}\frac{\theta}{2}\left\{1-n^2\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}+\frac{n^2(n-1)^2}{1^2\cdot 2^2}\operatorname{tg}^4\frac{\theta}{2}-\ldots\right\}, \tag{20}$$

а также

$$P_n(\cos\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left\{\cos^n\theta+in\cos^{n-1}\theta\sin\theta\cos\varphi-\frac{n(n-1)}{2!}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta\cos^2\varphi+\ldots\right\}d\varphi=$$

$$=\cos^n\theta\left\{1-\frac{n(n-1)}{2^2}\operatorname{tg}^2\theta+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2\cdot 4^2}\operatorname{tg}^4\theta-\ldots\right\}. \tag{21}$$

2. Показать, что ряд

$$P_0(\cos\theta)+P_1(\cos\theta)+\ldots+P_n(\cos\theta)+\ldots$$

является сходящимся при $0<\theta<\pi$, колеблющимся при $\theta=\pi$ и расходящимся при $\theta=0$.

Из формулы (24) получаем, что

$$\sum_{r=0}^{n-1}P_r(\cos\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{1-(\cos\theta+i\sin\theta\cos\varphi)^n}{1-(\cos\theta+i\sin\theta\cos\varphi)}\,d\varphi,$$

---

[1]) См. Journ. de Liouville (3), 1 (1875), 373—398.

[2]) См. его брошюру «Über die beiden Heineschen Kugelfunktionen», Bern, 1881.

откуда, вычисляя этот интеграл с помощью формулы (23), получаем, что n-я частичная сумма данного ряда равна

$$\frac{1}{\{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta\}^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{(\cos\theta+i\sin\theta\cos\varphi)^n}{1-(\cos\theta+i\sin\theta\cos\varphi)}\,d\varphi.$$

Чтобы вычислить второй интеграл, разделим интервал $(0, \pi)$ на три части $(0, \varepsilon)$ $(\varepsilon, \pi-\varepsilon)$ и $(\pi-\varepsilon, \pi)$ и рассмотрим каждую из них отдельно. Так как

$$|\cos\theta+i\sin\theta\cos\varphi|=(\cos^2\theta+\sin^2\theta\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\leqslant 1$$

и

$$|1-\cos\theta-i\sin\theta\cos\varphi|=\{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta\cos^2\varphi\}^{\frac{1}{2}}\geqslant 1-\cos\theta$$

для всех значений φ, то

$$\left|\int_0^\varepsilon \frac{(\cos\theta+i\sin\theta\cos\varphi)^n}{1-\cos\theta-i\sin\theta\cos\varphi}\,d\varphi\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{1-\cos\theta};$$

аналогичный результат получается и для интеграла по $(\pi-\varepsilon, \pi)$.

Для интеграла по отрезку $[\varepsilon, \pi-\varepsilon]$ имеем

$$|(\cos\theta+i\sin\theta\cos\varphi)^n|\leqslant(1-\sin^2\theta\sin^2\varepsilon)^{\frac{n}{2}}<k^{\frac{n}{2}},$$

где k имеет определенное значение <1 для каждого данного θ, если только $\theta\neq 0$ и $\theta\neq\pi$. Отсюда следует, что модуль этого интеграла стремится к нулю при $n\to\infty$. Таким образом,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int_0^\pi \frac{(\cos\theta+i\sin\theta\cos\varphi)^n}{1-\cos\theta-i\sin\theta\cos\varphi}\,d\varphi\right|<\frac{2\varepsilon}{1-\cos\theta}.$$

Так как ε может быть взято произвольно малым, то этот интеграл стремится к нулю при $n\to\infty$.

Следовательно, при $0<\theta<\pi$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)$ сходится к $\dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}$; если $\theta=0$, то ряд расходится, а при $\theta=\pi$ — колеблется.

3. Показать, что ряд

$$P_0(\cos\theta)+P_1(\cos\theta)e^{i\psi}+\ldots+P_n(\cos\theta)e^{in\psi}+\ldots$$

сходится при всех значениях ψ, если $0<\theta<\pi$. Это может быть доказано незначительным изменением метода, использованного в примере 2.

§ 9. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМИ МНОГОЧЛЕНАМИ ЛЕЖАНДРА И ИХ ПРОИЗВОДНЫМИ

20. Три следующих друг за другом многочлена Лежандра связаны соотношением

$$nP_n-(2n-1)\mu P_{n-1}+(n-1)P_{n-2}=0. \tag{29}$$

Это равенство может быть доказано различными способами.

а) Если $u=(1-2h\mu+h^2)^{-\frac{1}{2}}$, то

$$(1-2h\mu+h^2)\frac{\partial u}{\partial h}+(h-\mu)u=0;$$

подставляя сюда вместо u его значение $\sum h^nP_n$ и приравнивая нулю коэффициент при h^{n-1}, получаем

$$nP_n-2\mu(n-1)P_{n-1}+(n-2)P_{n-2}+P_{n-2}-\mu P_{n-1}=0$$

или

$$nP_n-(2n-1)\mu P_{n-1}+(n-1)P_{n-2}=0. \tag{29}$$

б) Из формулы Лапласа находим

$$\frac{dP_n}{d\mu}=\frac{n}{\pi}\int_0^\pi(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^{n-1}\left(1+\frac{\mu\cos n}{\sqrt{\mu^2-1}}\right)d\varphi,$$

следовательно,

$$(\mu^2-1)\frac{dP_n}{d\mu}=\frac{n}{\pi}\int_0^\pi(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^{n-1}\left[\mu(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)-1\right]d\varphi=$$

$$=\frac{n}{\pi}\int_0^\pi\left[\mu(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^n-(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^{n-1}\right]d\varphi,$$

или

$$(\mu^2-1)\frac{dP_n}{d\mu}=n(\mu P_n-P_{n-1}). \tag{30}$$

С другой стороны,

$$\frac{dP_n}{d\mu}=-\frac{n+1}{\pi}\int_0^\pi\frac{1}{(\mu^2+\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^{n+2}}\left(1+\frac{\mu\cos\varphi}{\sqrt{\mu^2-1}}\right)d\varphi,$$

следовательно,

$$(\mu^2-1)\frac{dP_n}{d\mu}=-\frac{n+1}{\pi}\int_0^\pi\frac{\mu(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)-1}{(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^{n+2}}\,d\varphi,$$

или

$$(\mu^2-1)\frac{dP_n}{d\mu}=-(n+1)(\mu P_n-P_{n+1}). \tag{31}$$

Из формул (30) и (31) получаем

$$(n+1)(P_{n+1}-\mu P_n)-n(\mu P_n-P_{n-1})=0.$$

Если в этой формуле заменить n на $n-1$, то получим (29).

Формула (29) может быть использована для вычисления многочленов P_n; начиная с $P_0=1$, $P_1=\mu$ и последовательно полагая $n=2, 3, 4, \ldots$, можно найти все эти многочлены. Установленное соотношение показывает, что функции P_n, P_{n-1}, P_{n-2}, ... обладают теми же самыми свойствами, что и функции Штурма. Никакие две следующие друг за другом из этих функций не обращаются в нуль при одном и том же значении μ, и если одна из них обращается в нуль, то предшествующая и последующая функции имеют в этой точке различные знаки. С помощью тех же самых соображений, что и в теореме Штурма, мы получаем, что между двумя соседними корнями уравнения $P_{n-1}=0$ лежит один, и только один, корень уравнения $P_n=0$.

Из равенства (30) в силу уравнения Лежандра имеем

$$n\frac{d}{d\mu}(P_{n-1}-\mu P_n)=\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{dP_n}{d\mu}\right\}=-n(n+1)P_n,$$

следовательно,

$$nP_n=\mu\frac{dP_n}{d\mu}-\frac{dP_{n-1}}{d\mu}. \tag{32}$$

Аналогично, из (31) находим

$$(n+1) P_n = -\mu \frac{dP_n}{d\mu} + \frac{dP_{n+1}}{d\mu}. \tag{33}$$

Складывая (32) и (33), получаем

$$(2n+1) P_n = \frac{dP_{n+1}}{d\mu} - \frac{dP_{n-1}}{d\mu}. \tag{34}$$

Таким образом, исключая P_n из (32) и (33), мы получаем соотношение

$$(2n+1) \mu \frac{dP_n}{d\mu} = (n+1) \frac{dP_{n-1}}{d\mu} + n \frac{dP_{n+1}}{d\mu}. \tag{35}$$

Аналогично, исключая P_n из (30) и (31), получаем

$$(2n+1)(\mu^2-1) \frac{dP_n}{d\mu} = n(n+1)(P_{n+1} - P_{n-1}). \tag{36}$$

Эти соотношения могут быть также получены с помощью дифференцирования по μ равенства

$$u = (1 - 2h\mu + h^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum h^n P_n;$$

при этом мы получаем

$$(1 - 2h\mu + h^2)^{-\frac{3}{2}} = \sum h^{n-1} \frac{dP_n}{d\mu}.$$

Продифференцировав это же равенство по h, получаем

$$(\mu - h)(1 - 2h\mu + h^2)^{-\frac{3}{2}} = \sum nh^{n-1} P_n,$$

откуда

$$(\mu - h) \sum h^{-1} \frac{dP_n}{d\mu} = \sum nh^{n-1} P_n.$$

Сравнивая здесь коэффициенты при h^{n-1}, получаем соотношение (32). Отсюда же находим

$$(1 - h\mu) \sum h^{n-1} \frac{dP_n}{d\mu} - h \sum nh^{n-1} P_n = (1 - 2h\mu + h^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum h^n P_n.$$

Приравнивая в этом равенстве коэффициенты при h^n, получим формулу (33).

ПРИМЕРЫ

1. Доказать, что если n четно, то

$$P_n = \mu \left\{ \frac{2n-1}{n} P_{n-1} - \frac{n-1}{n} \frac{2n-5}{n-2} P_{n-3} + \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)} \frac{2n-9}{n-4} P_{n-5} - \ldots \right.$$
$$\left. + (-1)^{\frac{n-2}{2}} \frac{(n-1)(n-3)\ldots 3}{n(n-2)\ldots 4} \frac{3}{2} P_1 \right\} + (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1 \cdot 3 \ldots (n-1)}{2 \cdot 4 \ldots n},$$

а если n нечетно, то

$$P_n = \mu \left\{ \frac{2n-1}{n} P_{n-1} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{2n-5}{n-2} P_{n-3} + \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{(n-1)(n-3)\ldots 2}{n(n-2)\ldots 3} P_0 \right\}.$$

2. Доказать, что если n четно, то

$$\frac{dP_n}{d\mu} = (2n-1) P_{n-1} + (2n-5) P_{n-3} + (2n-9) P_{n-5} + \ldots + 7P_3 + 3P_1,$$

а если n нечетно, то

$$\frac{dP_n}{d\mu}=(2n-1)P_{n-1}+(2n-5)P_{n-3}+(2n-9)P_{n-5}+\ldots+5P_2+P_0.$$

3. Доказать, что если n четно, то

$$\frac{dP_n}{d\mu}=\mu\left\{\frac{2n-1}{n-1}\frac{dP_{n-1}}{d\mu}-\frac{n}{n-1}\frac{2n-5}{n-3}\frac{dP_{n-3}}{d\mu}+\frac{n(n-2)}{(n-1)(n-3)}\frac{2n-9}{n-5}\frac{dP_{n-5}}{d\mu}-\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+(-1)^{\frac{n-2}{2}}\frac{n(n-2)\ldots 4}{(n-1)(n-3)\ldots 3}\cdot\frac{3}{1}\frac{dP_1}{d\mu}\right\},$$

$$P_n-1=(\mu^2-1)\left\{\frac{2n-1}{n(n-1)}\frac{dP_{n-1}}{d\mu}+\frac{2n-5}{(n-2)(n-3)}\frac{dP_{n-3}}{d\mu}+\frac{2n-9}{(n-4)(n-5)}\frac{dP_{n-5}}{d\mu}+\ldots+\frac{3}{2\cdot 1}\frac{dP_1}{d\mu}\right\},$$

а если n нечетно, то

$$\frac{dP_n}{d\mu}=\mu\left\{\frac{2n-1}{n-1}\frac{dP_{n-1}}{d\mu}-\frac{n}{n-1}\frac{2n-5}{n-3}\frac{dP_{n-3}}{d\mu}+\ldots+(-1)^{\frac{n-3}{2}}\frac{n(n-2)\ldots 5}{(n-1)(n-3)\ldots 4}\frac{5}{2}\frac{dP_2}{d\mu}\right\}+$$
$$+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{3\cdot 5\ldots n}{2\cdot 4\ldots(n-1)},$$

$$P_n-\mu=(\mu^2-1)\left\{\frac{2n-1}{n(n-1)}\frac{dP_{n-1}}{d\mu}+\frac{2n-5}{(n-2)(n-3)}\frac{dP_{n-3}}{d\mu}+\right.$$
$$\left.+\frac{2n-9}{(n-4)(n-5)}\frac{dP_{n-5}}{d\mu}+\ldots+\frac{5}{3\cdot 2}\frac{dP_2}{d\mu}\right\}.$$

4. Доказать, что

$$\frac{d^m P_n}{d\mu^m}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-1)}[(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2m+3)](2n-2m+1)P_{n-m}+$$
$$+\frac{2\cdot 3\cdot 4\ldots m}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-1)}[(2n-3)(2n-5)\ldots(2n-2m+1)](2n-2m-3)P_{n-m-2}+$$
$$+\frac{3\cdot 4\ldots(m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-1)}[(2n-5)(2n-7)\ldots(2n-2m-1)](2n-2m-7)P_{n-m-4}+\ldots,$$

ряд обрывается на P_0 или на P_1, в зависимости от того, будет $n-m$ четно или нечетно.

5. Доказать, что если n четно, то

$$\frac{d^2P_n}{d\mu^2}=\frac{1}{2}\{n(n+1)P_0+5(n-2)(n+3)P_2+9(n-4)(n+5)P_4+\ldots+(2n-3)(4n-2)P_{n-2}\},$$

а если n нечетно, то

$$\frac{d^2P_n}{d\mu^2}=\frac{1}{2}\{3(n-1)(n+2)P_1+7(n-3)(n+4)P_3+$$
$$+11(n-5)(n+6)P_5+\ldots+(2n-3)(4n-2)P_{n-2}\}.$$

6. Доказать, что

$$(n+1)\{(2n+3)P_{n+1}^2-(2n+1)P_n^2\}=\frac{d}{d\mu}\{(1-\mu^2)(P_nP'_{n+1}-P_{n+1}P'_n)\},$$

и вывести отсюда, что

$$(2n+3)\int_0^\mu P_{n+1}^2\,d\mu-(2n+1)\int_0^\mu P_n^2\,d\mu=\mu(P_{n+1}^2+P_n^2)-2P_nP_{n+1}.$$

7[1]). Доказать, что

$$(2n+1)\int_0^\mu P_n^2\,d\mu=\mu P_n^2-\frac{2(n-1)}{2n-1}P_nP_{n-1}+$$
$$+2\left\{\frac{P_{n-1}P_n}{(2n-1)(2n-3)}+\frac{P_{n-2}P_{n-3}}{(2n-3)(2n-5)}+\ldots+\frac{P_1P_0}{3\cdot 1}\right\},$$

[1]) Примеры 1—5 заимствованы из книги: Ф. Нейман, Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen, Leipzig, 1878. Примеры 7—9 принадлежат Харгревсу [Hargreaves, Proc. Lond Math. Soc. (2), 24 (1897), 115].

и найти значение интеграла

$$\int_0^\mu (1-\mu^2)(P_n')^2\, d\mu.$$

8. Доказать, что

$$\frac{d}{d\mu}\{(1-\mu^2)P_nP_n'\}+n(n+1)P_n^2=(1-\mu^2)(P_n')^2.$$

9. Доказать, что если в качестве пределов интегрирования взяты любые из чисел 0, 1, -1 или любые из нулей многочленов $P_n(\mu)$, $P_n'(\mu)$, то

$$\int (1-\mu^2)(P_n')^2\, d\mu = n(n+1)\int P_n^2\, d\mu.$$

§ 10. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА МНОГОЧЛЕНОВ ЛЕЖАНДРА

21. Весьма важным свойством функций $P_n(\mu)$ является то, что если ее умножить на одну из степеней 1, μ, μ^2, ..., μ^{n-1} и проинтегрировать это произведение в пределах от -1 до 1, то результат будет равен нулю:

$$\int_{-1}^{1} \mu^k P_n(\mu)\, d\mu = 0, \quad k=0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{37}$$

Чтобы доказать это утверждение, воспользуемся формулой Родрига для $P_n(\mu)$; мы получим

$$\int_{-1}^{1} \mu^k P_n(\mu)\, d\mu = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} \mu^k \frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2-1)\, d\mu;$$

интегрируя k раз по частям и замечая, что все производные от $(\mu^2-1)^n$ порядков, меньших, чем n, обращаются в нуль при $\mu=\pm 1$, находим, что последний интеграл равен

$$\frac{(-1)^k k!}{2^n n!}\int_{-1}^{1} \frac{d^{n-k}}{d\mu^{n-k}}(\mu^2-1)\, d\mu,$$

а это выражение равно нулю.

Обратно можно показать, что всякий многочлен $f(\mu)$ степени n, удовлетворяющий условиям

$$\int_{-1}^{1} f(\mu)\mu^k\, d\mu = 0$$

при $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$, имеет вид $AP_n(\mu)$, где A—постоянное число. Действительно, интегрируя по частям, получим

$$\int_{-1}^{1} \mu^k f(\mu)\, d\mu = f_1(1)-kf_2(1)+k(k-1)f_3(1)-\ldots+(-1)^k k!\, f_{k+1}(1),$$

где

$$f_1(\mu)=\int_{-1}^{\mu} f(\mu)\, d\mu, \quad f_2(\mu)=\int_{-1}^{\mu} f_1(\mu)\, d\mu, \ldots$$

По условию $\int_{-1}^{1} \mu^k f(\mu)\, d\mu = 0$ при $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$, поэтому отсюда видно, что $f_1(1)=f_2(1)=\ldots=f_n(1)=0$, следовательно, функция

$$f_n(\mu)=\int\limits_{-1}^{\mu}\int\limits_{-1}^{\mu}\ldots\int\limits_{-1}^{\mu}f(\mu)\,d\mu\ldots d\mu$$

и все ее производные до $(n-1)$-го порядка включительно обращаются в нуль при $\mu=1$ и при $\mu=-1$. Так как $f_n(\mu)$ — многочлен степени $2n$ от μ, то отсюда следует, что $f_n(\mu)$ имеет вид $A(\mu+1)^n(\mu-1)^n$, т. е. $f(\mu)$ имеет вид $A\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2-1)^n$. Наше утверждение доказано. Это доказательство принадлежит Мэрфи [1]).

22. Если $n'<n$, т. е. $P_{n'}(\mu)$ представляет собой сумму степеней μ с показателями, меньшими n, то из формулы (37) следует, что

$$\int\limits_{-1}^{1}P_{n'}(\mu)\,P_n(\mu)\,d\mu=0. \tag{38}$$

Эта формула, справедливая для любых неравных значений n и n', играет фундаментальную роль во всей теории многочленов Лежандра, аналогичную той, которую соотношение

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin}{\cos}n'\theta\,\frac{\sin}{\cos}n\theta\,d\theta=0$$

играет в теории рядов Фурье.

Вычислим теперь интеграл от $\{P_n(\mu)\}^2$. Мы имеем

$$\int\limits_{-1}^{1}\{P_n(\mu)\}^2\,d\mu=\frac{1}{2^{2n}\,n!\,n!}\int\limits_{-1}^{1}\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2-1)^n\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2-1)^n\,d\mu;$$

интегрируя выражение, стоящее справа, n раз по частям, получим

$$\int\limits_{-1}^{1}\{P_n(\mu)\}^2\,d\mu=\frac{(-1)^n}{2^{2n}\,n!\,n!}\int\limits_{-1}^{1}\frac{d^{2n}}{d\mu^{2n}}(\mu^2-1)^n\cdot(\mu^2-1)^n\,d\mu=$$

$$=\frac{(2n)!}{2^{2n}\,n!\,n!}\int\limits_{-1}^{1}(1-\mu^2)^n\,d\mu=2\,\frac{(2n)!}{n!\,n!}\int\limits_{0}^{1}u^n(1-u)^n\,du,$$

т. е.

$$\int\limits_{-1}^{1}\{P_n(\mu)\}^2\,d\mu=\frac{2}{2n+1}\,. \tag{39}$$

23. Соотношения, полученные в п. 22, представляют собой частные случаи общей теоремы, вытекающие из тех дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют рассматриваемые функции. Пусть u_n и $u_{n'}$ — две произвольные функции, удовлетворяющие уравнению Лежандра и имеющие порядки n и n' соответственно; тогда

$$\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{du_n}{d\mu}\right\}+n\,(n+1)\,u_n=0,$$

$$\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{du_{n'}}{d\mu}\right\}+n'\,(n'+1)\,u_{n'}=0:$$

[1]) Electricity, 1883.

умножая первое уравнение на $u_{n'}$, второе—на u_n и вычитая, получаем

$$u_{n'}\frac{d}{d\mu}\left\{(\mu^2-1)\frac{du_n}{d\mu}\right\}-u_n\frac{d}{d\mu}\left\{(\mu^2-1)\frac{du_{n'}}{d\mu}\right\}=(n-n')(n+n'+1)u_n u_{n'}.$$

Проинтегрировав обе части полученного равенства в пределах от μ_1 до μ_2, имеем

$$(n-n')(n+n'+1)\int\limits_{\mu_1}^{\mu_2}u_n u_{n'}\,d\mu=\int\limits_{\mu_1}^{\mu_2}\left[u_{n'}\frac{d}{d\mu}\left\{(\mu^2-1)\frac{du_n}{d\mu}\right\}-\right.$$

$$\left.-u_n\frac{d}{d\mu}\left\{(\mu^2-1)\frac{du_{n'}}{d\mu}\right\}\right]d\mu=\left[(\mu^2-1)\left(u_{n'}\frac{du_n}{d\mu}-u_n\frac{du_{n'}}{d\mu}\right)\right]_{\mu_1}^{\mu_2};$$

следовательно, значение интеграла $\int\limits_{\mu_1}^{\mu_2}u_n u_{n'}\,d\mu$ выражается формулой

$$\int\limits_{\mu_1}^{\mu_2}u_n u_{n'}\,d\mu=\frac{\left[(\mu^2-1)\left(u_{n'}\dfrac{du_n}{d\mu}-u_n\dfrac{du_{n'}}{d\mu}\right)\right]_{\mu_1}^{\mu_2}}{(n-n')(n+n'+1)}. \tag{40}$$

Заметим, что эта формула носит совершенно общий характер: n и n' могут быть дробными, или даже любыми комплексными числами, а u_n и $u_{n'}$—любыми решениями соответствующих дифференциальных уравнений, конечными на отрезке $[\mu_1, \mu_2]$.

В частности[1]), пусть $\mu_1=\mu$, $\mu_2=1$, $u_n=P_n(\mu)$, $u_{n'}=P_{n'}(\mu)$, тогда полученная нами формула (40) дает

$$\int\limits_{\mu}^{1}P_n(\mu)P_{n'}(\mu)\,d\mu=\frac{(1-\mu^2)\left\{P_{n'}(\mu)\dfrac{dP_n(\mu)}{d\mu}-P_n(\mu)\dfrac{dP_{n'}(\mu)}{d\mu}\right\}}{(n-n')(n+n'+1)}=$$

$$=\frac{\{nP_{n'}(\mu)P_{n-1}(\mu)-n'P_n(\mu)P_{n'-1}(\mu)\}-\mu(n-n')P_n(\mu)P_{n'}(\mu)}{(n-n')(n+n'+1)},$$

причем последнее выражение получается с помощью формулы (30).

Если мы положим $\mu=-1$ и будем считать, что n и n'—целые действительные числа, то мы снова получим формулу

$$\int\limits_{-1}^{1}P_n(\mu)P_{n'}(\mu)\,d\mu=0 \quad \text{при} \quad n\neq n'. \tag{38}$$

Положим теперь $\mu=0$; тогда, так как $P_n(0)$ равно нулю при нечетном n и равно

$$(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{n!}{2^n\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!}$$

при четном n, а $\left(\dfrac{dP_n(\mu)}{d\mu}\right)_{\mu=0}$ равно нулю при четном n и равно

$$(-1)^{\frac{n+1}{2}}\frac{n!}{2^{n-1}\left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n-1}{2}\right)!}$$

[1]) См. Wilton, Messenger of Math., 46 (1916), 96.

при нечетном n, то

$$\int_0^1 P_n(\mu) P_{n'}(\mu)\, d\mu = 0 \quad \text{при} \quad n \neq n,$$

когда числа n и n' оба четны или нечетны, и

$$\int_0^1 P_n(\mu) P_{n'}(\mu)\, d\mu =$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}(n+n'+1)} \frac{n!\,n'!}{2^{n+n'-1}(n-n')(n+n'+1)\left\{\left(\frac{n}{2}\right)!\right\}^2 \left\{\left(\frac{n'-1}{2}\right)!\right\}^2},$$

когда n четно, а n' нечетно.

Иным методом этот результат был получен Релеем[1].

Другой способ доказательства главнейших формул в его основных чертах принадлежит Лежандру[2].

Нетрудно показать, что при $h < 1$, $h' < 1$

$$\int_{-1}^1 \frac{d\mu}{\sqrt{1-2h\mu+h^2}\sqrt{1-2h'\mu+h'^2}} = \frac{1}{\sqrt{hh'}} \ln \frac{1+\sqrt{hh'}}{1-\sqrt{hh'}}.$$

Разлагая правую и левую части этого равенства по степеням h и h' и сравнивая коэффициенты при $h^n h'^{n'}$, получаем формулу (38), а сравнивая коэффициенты при $h^n h'^n$, — формулу (39). Законность этого способа легко обосновать.

24. Интеграл $\int_0^1 \mu^k P_n(\mu)\, d\mu$ нетрудно вычислить при любом значении k, при котором интеграл сходится, а именно, когда $k > -1$, если n четно, и $k > -2$, если n нечетно.

Записав $P_n(\mu)$ в виде

$$\alpha\mu^n + \beta\mu^{n-2} + \gamma\mu^{n-4} + \ldots,$$

получаем

$$\int_0^1 \mu^k P_n(\mu)\, d\mu = \frac{\alpha}{k+n+1} + \frac{\beta}{k+n-1} + \frac{\gamma}{k+n-3} + \ldots,$$

правая часть этого равенства может быть приведена к виду

$$\frac{f(k)}{(k+n+1)(k+n-1)(k+n-3)\ldots},$$

где $f(k)$ — многочлен от k степени $\frac{n}{2}$ или $\frac{n-1}{2}$, в зависимости от того, будет n четным или нечетным. Мы знаем, что $f(k)$ обращается в нуль при

$$k = n-2,\ n-4,\ n-6,\ \ldots,$$

поэтому, так как коэффициент при высшей степени k равен $\alpha+\beta+\gamma+\ldots = P_n(1) = 1$, то

$$\int_0^1 \mu^k P_n(\mu)\, d\mu = \frac{k(k-2)(k-4)\ldots(k-n+2)}{(k+n+1)(k+n-1)\ldots(k+1)},$$

[1]) Phil. Trans., **160** (1870), 569.

[2]) См. также: Sylvester, Note on Spherical Harmonics. Phil. Mag. (1876).

если n четно, и

$$\int_0^1 \mu^k P_n(\mu)\, d\mu = \frac{(k-1)(k-3)\ldots(k-n+2)}{(k+n+1)(k+n-1)\ldots(k+2)},$$

если n нечетно. Обе эти формулы можно объединить в следующем виде:

$$\int_0^1 \mu^k P_n(\mu)\, d\mu = \frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+2)}{(k+n+1)(k+n-1)\ldots(k-n+3)}. \tag{41}$$

§ 11. РЯДЫ ПО МНОГОЧЛЕНАМ ЛЕЖАНДРА

25. Формула

$$\int_{-1}^{1} P_n(\mu) P_{n'}(\mu)\, d\mu = 0 \quad \text{при} \quad n \neq n'$$

выражает тот факт, что многочлены $P_0(\mu)$, $P_1(\mu)$, ... $P_n(\mu)$, ... представляют собой последовательность функций, ортогональных в интервале $(-1, 1)$.

Таким образом, эти функции подпадают под общее определение, гласящее, что функции

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

образуют ортогональную последовательность в интервале (a, b), если $\int_a^b f_n(x) f_{n'}(x)\, dx = 0$ для любых двух неравных значений n и n'. Отсюда следует, что ни одна из этих функций не может быть представлена как линейная комбинация, с постоянными коэффициентами, остальных функций данной последовательности. Если эти функции выбраны так, что $\int_a^b f_n^2(x)\, dx = 1$ для всех n, то данная ортогональная система называется *нормированной*.

Эта система называется *полной* ортогональной системой, если не существует никакой ненулевой суммируемой функции $\varphi(x)$, такой, что

$$\int_a^b \varphi(x) f_n(x)\, dx = 0$$

для всех n.

Мы покажем, что многочлены $P_0(\mu)$, $P_1(\mu)$, ..., $P_n(\mu)$, ... образуют на интервале $(-1, 1)$ полную ортогональную систему функций.

Если $\varphi(\mu)$ — некоторая суммируемая на интервале $(-1, 1)$ функция, ортогональная всем $P_n(\mu)$, то из равенства (29), умножая его на $\varphi(\mu)$ и интегрируя, получаем

$$n\int_{-1}^{1} P_n(\mu)\varphi(\mu)\, d\mu - (2n-1)\int_{-1}^{1} \mu P_{n-1}(\mu)\varphi(\mu)\, d\mu + (n-1)\int_{-1}^{1} P_{n-2}(\mu)\varphi(\mu)\, d\mu = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{-1}^{1} \mu P_{n-1}(\mu)\varphi(\mu)\, d\mu = 0,$$

т. е.

$$\int_{-1}^{1} \mu P_n(\mu)\,\varphi(\mu)\,d\mu = 0 \quad \text{при} \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Если вместо $\varphi(\mu)$ взять $\mu^k\varphi(\mu)$, где $k > 0$, то получим

$$n\int_{-1}^{1} \mu^k P_n(\mu)\,\varphi(\mu)\,d\mu - (2n-1)\int_{-1}^{1} \mu^{k+1}P_{n-1}(\mu)\,\varphi(\mu)\,d\mu + \\ + (n-1)\int_{-1}^{1} \mu^k P_{n-2}(\mu)\,\varphi(\mu)\,d\mu = 0.$$

Если теперь $\int_{-1}^{1} \mu^k P_n(\mu)\,\varphi(\mu)\,d\mu = 0$ для некоторого фиксированного k и для всех значений n, то отсюда вытекает, что

$$\int_{-1}^{1} \mu^{k+1}P_{n-1}(\mu)\,\varphi(\mu)\,d\mu = 0$$

и, следовательно,

$$\int_{-1}^{1} \mu^{k+1}P_n(\mu)\,\varphi(\mu)\,d\mu = 0$$

для всех n при фиксированном k. Мы доказали, что это равенство справедливо для всех целых положительных k. Отсюда получаем, что

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\mu)\,P_n(\mu)\left[1 - \frac{p^2\mu^2}{2!} + \frac{p^4\mu^4}{4!} - \ldots\right]d\mu \equiv \int_{-1}^{1} \varphi(\mu)\,P_n(\mu)\cos p\mu\,d\mu = 0,$$

так как здесь ряд сходится равномерно в интервале $(-1,\ 1)$ и, следовательно, его можно, умножив на суммируемую функцию $\varphi(\mu)\,P_n(\mu)$, проинтегрировать почленно. Аналогично доказывается, что

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\mu)\,P_n(\mu)\sin p\mu\,d\mu = 0.$$

Следовательно, все коэффициенты Фурье функции $\varphi\left(\frac{x}{\pi}\right)P_n\left(\frac{x}{\pi}\right)$, определенной на интервале $(-\pi,\ \pi)$, равны нулю. В силу известного свойства полноты системы тригонометрических функций[1]) отсюда следует, что функция $\varphi\left(\frac{x}{\pi}\right)P_n\left(\frac{x}{\pi}\right)$ равна нулю почти всюду на интервале $(-\pi,\ \pi)$. Отсюда вытекает, что функция $\varphi(\mu)$ равна нулю на интервале $(-1,\ 1)$ почти всюду, т. е. последовательность $\{P_n(\mu)\}$ полна. Из формулы (39) видно, что полную систему нормированных ортогональных функций образуют функции

$$\left(\frac{2n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} P_n(\mu).$$

[1]) См. Hobson, Theory of functions of a real variable, т. II, 1926, стр. 553. [См. также В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, М.—Л., 1952, гл. VI, § 2 (*Прим. ред.*)]

26. Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ — последовательность линейно независимых функций, определенных и суммируемых в квадрате на интервале (a, b). Тогда можно построить такую последовательность функций $\{f_n(x)\}$, что каждая $f_n(x)$ представляет собой линейную комбинацию функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ из данной системы $\{\varphi_n(x)\}$ и система $\{f_n(x)\}$ — нормирована и ортогональна на интервале (a, b).

Такая последовательность определяется формулами

$$f_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\left\{\int\limits_a^b \varphi_1^2(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

$$f_2(x) = \frac{\varphi_2(x) - f_1(x)\int\limits_a^b \varphi_2(x) f_1(x)\,dx}{\left\{\int\limits_a^b \left[\varphi_2(x) - f_1(x)\int\limits_a^b \varphi_2(x) f_1(x)\,dx\right]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

и вообще

$$f_n(x) = \\ = \frac{\varphi_n(x) - f_1(x)\int\limits_a^b \varphi_n(x) f_1(x)\,dx - f_2(x)\int\limits_a^b \varphi_n(x) f_2(x)\,dx - \ldots - f_{n-1}(x)\int\limits_a^b \varphi_n(x) f_{n-1}(x)\,dx}{\left\{\int\limits_a^b \left[\varphi_n(x) - f_1(x)\int\limits_a^b \varphi_n(x) f_1(x)\,dx - \ldots - f_{n-1}(x)\int\limits_a^b \varphi_n(x) f_{n-1}(x)\,dx\right]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Обратно функции $\varphi_n(x)$ могут быть представлены как линейные комбинации функций

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x).$$

Положив, в частности, $x = \mu$, $a = -1$, $b = 1$ и взяв за исходную систему линейно независимых функций $\{\varphi_n(\mu)\}$ последовательность $1, \mu, \mu^2, \ldots, \mu^n, \ldots$ мы получим

$$f_1(\mu) = 1,\ f_2(\mu) = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} P_1(\mu),\ \ldots,\ f_{n+1}(\mu) = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} P_n(\mu),\ \ldots$$

Таким образом, многочлены Лежандра могут быть получены с помощью указанной конструкции, если ее применить к последовательности $1, \mu, \mu^2, \ldots$

§ 12. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИИ В РЯД ПО МНОГОЧЛЕНАМ ЛЕЖАНДРА

27. Если предположить, что ряд

$$a_0 P_0(\mu) + a_1 P_1(\mu) + \ldots + a_n P_n(\mu) + \ldots$$

на интервале $(-1, 1)$ равномерно сходится к некоторой функции $f(\mu)$, то мы можем умножить этот ряд на $P_n(\mu)$ и почленно проинтегрировать. В результате получим $\int\limits_{-1}^{1} f(\mu) P_n(\mu)\,d\mu$. Воспользовавшись фундаментальными равенствами (38) и (39), мы получим

$$\int\limits_{-1}^{1} f(\mu) P_n(\mu)\,d\mu = a_n \int\limits_{-1}^{1} P_n^2(\mu)\,d\mu = \frac{2}{2n+1} a_n.$$

Таким образом, ряд

$$\frac{1}{2} P_0(\mu) \int_{-1}^{1} f(\mu) P_0(\mu)\, d\mu + \frac{3}{2} P_1(\mu) \int_{-1}^{1} f(\mu) P_1(\mu)\, d\mu + \ldots$$
$$\ldots + \frac{2n+1}{2} P_n(\mu) \int_{-1}^{1} f(\mu) P_n(\mu)\, d\mu + \ldots$$

на интервале $(-1, 1)$ равномерно сходится к функции $f(\mu)$.

Если $f(\mu)$ — некоторая функция от μ, суммируемая на интервале $(-1, 1)$, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(2n+1) P_n(\mu) \int_{-1}^{1} f(\mu) P_n(\mu)\, d\mu \tag{42}$$

называется рядом Лежандра, соответствующим функции $f(\mu)$. Нельзя указать каких-либо общих условий, обеспечивающих сходимость рассматриваемого ряда; выше было предположено, что этот ряд равномерно сходится к $f(\mu)$. Это, однако, влечет за собой довольно жесткие ограничения на функцию $f(\mu)$; при этом условие непрерывности является необходимым, но не достаточным. Тем не менее, коэффициенты соответствующего ряда имеют вполне определенные значения, независимо от того, как функция $f(\mu)$ определена, лишь бы она была суммируема на интервале $(-1, 1)$. Как и в случае обычного ряда Фурье, можно показать, что ряд Лежандра обладает определенными свойствами, независимо от того, сходится он или нет. Далее, достаточные условия могут быть получены как для сходимости ряда в заданной точке интервала $(-1, 1)$, так и для его сходимости во всех точках заданного меньшего интервала. Таким образом, теория этих рядов близка к теории рядов Фурье по тригонометрическим функциям. Общая теория сходимости и суммируемости рядов Лежандра будет дана в гл. VII; эта теория играет важную роль в применениях многочленов Лежандра к задачам теории потенциала.

28. В случае $f(\mu) = \mu^k$, где k — целое положительное число, легко видеть, что $f(\mu)$ может быть представлена как конечная линейная комбинация многочленов Лежандра. Действительно, из приведенного в п. 8 выражения для $P_k(\mu)$ видно, что μ^k можно записать как линейную комбинацию функций

$$P_k(\mu),\ \mu^{k-2},\ \mu^{k-4},\ \ldots,$$

следовательно μ^{k-2} можно записать как линейную комбинацию P_{k-2}, μ^{k-4}, μ^{k-6}, ... и т. д.

Поступая аналогично дальше и замечая, что μ^2 можно представить как линейную комбинацию функций $P_2(\mu)$ и $P_0(\mu)$ и что $\mu = P_1(\mu)$, мы видим, что

$$\mu^k = a_k P_k(\mu) + a_{k-2} P_{k-2}(\mu) + \ldots,$$

где последнее слагаемое кратно $P_1(\mu)$ или $P_0(\mu)$, в зависимости от того, является k нечетным или четным.

Для нахождения a_r воспользуемся равенством

$$a_r \frac{2}{2r+1} = \int_{-1}^{1} \mu^k P_r(\mu)\, d\mu,$$

из которого следует, что $a_r = 0$, $r > k$ или если $k - r$ нечетно.

Если $k-r$ четно, то, согласно (41),

$$a_r=(2r+1)\int_0^1 \mu^k P_r(\mu)\,d\mu=(2r+1)\frac{k(k-1)\ldots(k-r+2)}{(k+r+1)(k+r-1)\ldots(k-r+3)}.$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\mu^k=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}{3\cdot 5\ldots(2k+1)}\left\{(2k+1)P_k(\mu)+(2k-3)\frac{2k+1}{2}P_{k-2}(\mu)+\right.$$
$$\left.+(2k-7)\frac{(2k+1)(2k-1)}{2\cdot 4}P_{k-4}(\mu)+\ldots\right\}. \qquad (43)$$

Это выражение было получено Лежандром [1]) сперва для k четных, а затем для всех целых значений k.

Формула (43) была получена иным путем Кели [2]). Если $h+\frac{1}{h}=\frac{2}{\bar h}$, то $\frac{(1+h^2)^{\frac12}}{(1-2\mu h+h^2)^{\frac12}}=\frac{1}{(1-\mu\bar h)^{\frac12}}$, где предполагается, что $h<1$, $\bar h<1$.

Так как

$$\frac{1}{(1-\mu\bar h)^{\frac12}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)}{2\cdot 4\ldots 2k}\mu^k\bar h^k$$

и

$$\frac{(1+h^2)^{\frac12}}{(1-2\mu h+h^2)^{\frac12}}=\sum(1+h^2)^{\frac12}h^kP_k(\mu)=2^{\frac12}\sum\frac{\{1-(1-\bar h^2)^{\frac12}\}^{k+\frac12}}{\bar h^{k+1}}P_k(\mu)$$

где

$$h=\frac{1}{\bar h}-\left(\frac{1}{\bar h^2}-1\right)^{\frac12},$$

то формула (43) может быть получена разложением коэффициентов при $P_k(\mu)$ в ряды по степеням $\bar h$ и сравнением коэффициентов при $\bar h^k$ в двух полученных рядах.

Если k равно четному числу $2n$, то формула (43), написанная в обратном порядке, имеет вид

$$(2n+1)\mu^{2n}=1\cdot P_0(\mu)+5\frac{2n}{2n+3}P_2(\mu)+9\frac{2n(2n-2)}{(2n+3)(2n+5)}P_4(\mu)+\ldots$$
$$\ldots+(4n+1)\frac{2n(2n-2)\ldots 2}{(2n+3)\ldots(4n+1)}P_{2n}(\mu),$$

а в случае нечетного k, равного $2n+1$, получаем

$$(2n+3)\mu^{2n+1}=3P_1(\mu)+7\frac{2n}{2n+5}P_3(\mu)+11\frac{2n(2n-2)}{(2n+5)(2n+7)}P_5(\mu)+\ldots+$$
$$+(4n+3)\frac{2n(2n-2)\ldots 2}{(2n+5)\ldots(4n+3)}P_{2n+1}(\mu).$$

Для первых нескольких степеней μ получаются следующие формулы:

$$1=P_0(\mu),\quad \mu=P_1(\mu),\quad \mu^2=\frac{2}{3}P_2(\mu)+\frac{1}{3}P_0(\mu),$$

[1]) Mémoires des savants étrangers (1785).

[2]) Cambridge and Dublin Journ., 3 (1848), 120.

$$\mu^3 = \frac{2}{5} P_3(\mu) + \frac{3}{5} P_1(\mu), \quad \mu^4 = \frac{8}{35} P_4(\mu) + \frac{4}{7} P_2(\mu) + \frac{1}{5} P_0(\mu),$$
$$\mu^5 = \frac{8}{63} P_5(\mu) + \frac{4}{9} P_3(\mu) + \frac{3}{7} P_1(\mu),$$
$$\mu^6 = \frac{16}{231} P_6(\mu) + \frac{24}{77} P_4(\mu) + \frac{10}{21} P_2(\mu) + \frac{1}{7} P_0(\mu),$$
$$\mu^7 = \frac{16}{429} P_7(\mu) + \frac{8}{39} P_5(\mu) + \frac{14}{33} P_3(\mu) + \frac{1}{3} P_1(\mu).$$

Если $f(\mu) = c_0 + c_1\mu + c_2\mu^2 + \ldots + c_n\mu^n + \ldots$ и если вместо каждой степени μ мы подставим ее выражение через многочлены Лежандра, то мы получим для $f(\mu)$ выражение

$$f(\mu) = b_0 P_0(\mu) + b_1 P_1(\mu) + \ldots + b_n P_n(\mu) + \ldots,$$

где

$$b_k = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k-1)} \left\{ c_k + \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)} c_{k+2} + \right.$$
$$\left. + \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{2 \cdot 4 \cdot (2k+3)(2k+5)} c_{k+4} + \ldots \right\}. \tag{44}$$

Если ряд $c_0 + c_1\mu + c_2\mu^2 + \ldots$ бесконечен, то полученный результат пока является чисто формальным и должен быть дополнен теми или иными условиями сходимости.

29. Докажем следующее утверждение[1]). *Если m и n целые, то при $m > n$ и $m+n$ нечетном*

$$\int_0^\pi P_n(\cos\theta)\sin m\theta\, d\theta = 2\frac{(m-n+1)(m-n+3)\ldots(m+n-1)}{(m-n)(m-n+2)\ldots(m+n)}. \tag{45}$$

В других случаях этот интеграл равен нулю.

Так как $\sin m\theta$ равен $\sin\theta$, умноженному на многочлен степени $m-1$ от $\cos\theta$, то этот интеграл может быть представлен как сумма некоторого числа слагаемых вида $\int_{-1}^{1} P_n(\mu)\mu^r d\mu$, где $r \leqslant m-1$. Из (37) следует, что такой интеграл равен нулю в случае $m \leqslant n$; таким образом, остается рассмотреть случай $m \geqslant n$.

Подставляя вместо $P_n(\cos\theta)$ его выражение (17), представляющее собой линейную комбинацию косинусов дуг, кратных θ, получаем

$$\int_0^\pi P_n(\cos\theta)\sin m\theta\, d\theta = \sum \lambda_r \int_0^\pi \cos(n-2r)\theta \sin m\theta\, d\theta.$$

где

$$\lambda_r = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2r-1)\, n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \ldots r\,(2n-1)\ldots(2n-2r+1)}$$

и r принимает значения от 0 до $\frac{n}{2}$ или $\frac{n-1}{2}$, в зависимости от того, четно n или нечетно. Таким образом, рассматриваемый интеграл равен

$$\frac{\lambda_r}{2}\left\{\frac{1-\cos(m+n)\pi}{m+n-2r} + \frac{1-\cos(m-n)\pi}{m-n+2r}\right\};$$

это выражение равно нулю, когда $m \pm n$ четно. Поэтому предположим,

[1]) Heine, Kugelfunktionen, т. I, 1878, стр. 89.

что $m+n$ нечетно. Суммируя по r, получим

$$\sum \lambda_r \left(\frac{1}{m+n-2r} - \frac{1}{m-n+2r} \right).$$

Эта сумма может быть преобразована в дробь, представляющую собой рациональную функцию от m, знаменатель которой равен

$$(m+n)(m-n)(m+n-2)(m-n+2)\ldots$$

Если n нечетно, то числитель обращается в нуль при $m=\pm 2, \pm 4, \ldots$ $\ldots, \pm(n-1)$, а если n четно, то он обращается в нуль также при $m=0$. Так как степень числителя меньше степени знаменателя, то ни при каких других значениях m числитель в нуль не обращается. Следовательно, значение интересующего нас определенного интеграла может быть записано в виде

$$\lambda \cdot \frac{(m-n+1)(m-n+3)\ldots(m+n-1)}{(m-n)(m-n+2)\ldots(m+n)},$$

где λ не зависит от m.

Так как

$$\int_0^\pi m \sin m\theta \, P_n(\cos\theta)\, d\theta = \left[-\cos m\theta \, P_n(\cos\theta)\right]_0^\pi + \int_0^\pi P_n(\cos\theta)\cos m\theta \, d\theta$$

и, в силу хорошо известной теоремы, принадлежащей Лебегу,

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^\pi P_n(\cos\theta)\cos m\theta\, d\theta = 0,$$

то

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^\pi m\sin m\theta\, P_n(\cos\theta)\, d\theta = 2,$$

следовательно, $\lambda=2$. Наше утверждение доказано.

Из этой теоремы с помощью разложения в ряд Фурье по синусам получаем следующее разложение, принадлежащее Гейне:

$$\frac{\pi}{4} P_n(\cos\theta) = \frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}{3\cdot 5\ldots(2n+1)} \left[\sin(n+1)\theta + \frac{1\cdot(n+1)}{1\cdot(2n+3)}\sin(n+3)\theta + \right.$$
$$\left. + \frac{1\cdot 3\cdot(n+1)(n+2)}{1\cdot 2(2n+3)(2n+5)}\sin(n+5)\theta + \ldots \right], \tag{46}$$

где $0<\theta<\pi$.

Сходимость этого ряда следует из того факта, что производная $\frac{d}{d\theta}P_n(\cos\theta)$ существует и конечна.

30. Можно получить следующие разложения по многочленам Лагранжа для $\sin n\theta$ и $\cos n\theta$:

$$\frac{4}{\pi}\cdot\frac{2\cdot 4\ldots(2n-2)}{1\cdot 3\ldots(2n-3)} \sin n\theta = (2n-1)P_{n-1}(\cos\theta) + (2n+3)\frac{(n-1)^2-n^2}{(n+2)^2-n^2}P_{n+1}(\cos\theta) +$$
$$+ (2n+7)\frac{[(n-1)^2-n^2][(n+1)^2-n^2]}{[(n+2)^2-n^2][(n+4)^2-n^2]}P_{n+3}(\cos\theta) + \ldots, \tag{47}$$

где $0<\theta<\pi$;

$$2\cdot\frac{3\cdot 5\ldots(2n+1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\cos n\theta = (2n+1)P_n(\cos\theta) + (2n-3)\frac{n^2-(n+1)^2}{n^2-(n-2)^2}P_{n-2}(\cos\theta) +$$
$$+ (2n-7)\frac{[n^2-(n+1)^2][n^2+(n-1)^2]}{[n^2-(n-2)^2][n^2-(n-4)^2]}P_{n-4}(\cos\theta) + \ldots \tag{48}$$

Чтобы получить первую из этих формул, воспользуемся равенствами

$$\sin n\theta = \sum P_m(\cos\theta)\frac{2m+1}{2}\int_0^\pi P_m(\cos\theta)\sin n\theta\sin\theta\,d\theta$$

и

$$\int_0^\pi P_m(\cos\theta)\sin n\theta\sin\theta\,d\theta =$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\pi P_m(\cos\theta)\cos(n-1)\,\theta\,d\theta - \frac{1}{2}\int_0^\pi P_m(\cos\theta)\cos(n+1)\,\theta\,d\theta.$$

Теперь из (17), принимая во внимание формулы для коэффициентов Фурье функции $P_n(\cos\theta)$, получаем, что интеграл

$$\int_0^\pi P_n(\cos\theta)\cos n\theta\,d\theta$$

равен нулю, за исключением тех случаев, когда $r=n-2s$, где

$$s=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \frac{n}{2}\ \text{или}\ \frac{n-1}{2};$$

в этих случаях рассматриваемый интеграл равен [1])

$$\frac{\pi\Pi\left(s-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(n-s-\frac{1}{2}\right)}{\Pi(s)\,\Pi(n-s)},$$

как это видно после упрощения коэффициентов ряда.

Заменив n на m и r на $n-1$ или $n+1$, получаем значения двух интересующих нас интегралов

$$\int_0^\pi P_m(\cos\theta)\cos(n-1)\,\theta\,d\theta,\qquad \int_0^\pi P_m(\cos\theta)\cos(n+1)\,\theta\,d\theta,$$

а следовательно, и интеграла

$$\int_0^\pi P_m(\cos\theta)\sin n\theta\sin\theta\,d\theta.$$

Таким образом мы получаем ряд для $\sin n\theta$.

Чтобы получить соответствующее выражение вида

$$a_0P_0(\cos\theta)+a_1P_1(\cos\theta)+\ldots+a_rP_r(\cos\theta)+\ldots$$

для $\cos n\theta$, находим коэффициенты a_r из равенства

$$\int_0^\pi P_r(\cos\theta)\,\text{co}\ \ n\theta\sin\theta\,d\theta=\frac{2}{2r+1}a_r;$$

[1]) Здесь функция $\Pi(m)$ есть эйлеров интеграл второго рода от $m+1$ и связана с функцией Г соотношением

$$\Pi(m)=\Gamma(m+1)=\int_0^\infty e^{-x}x^m\,dx$$

(Прим. ред.)

получаем

$$a_r = \frac{2r+1}{4}\left[\int_0^\pi P_r(\cos\theta)\sin(n+1)\theta\,d\theta - \int_0^\pi P_r(\cos\theta)\sin(n-1)\theta\,d\theta\right].$$

Вычисляя значения входящих сюда интегралов, получаем указанное выше представление для $\cos n\theta$.

ПРИМЕРЫ

1. Доказать [1]), что

$$\int_{-1}^{1}\frac{P_{2n}(\mu)}{(1+k\mu^2)^{n+\frac{3}{2}}}\,d\mu = \frac{2}{2n+1}\,\frac{(-k)^n}{(1+k)^{n+\frac{1}{2}}},$$

где $-1 < k < 1$.

Разлагая $(1+k\mu^2)^{-n-\frac{3}{2}}$ в степенной ряд и замечая, что этот ряд равномерно сходится в интервале $(-\mu, \mu)$, в силу чего его можно почленно интегрировать, получаем, что интеграл, стоящий слева, равен

$$\sum_{r=0}^{\infty}\int_{-1}^{1}P_{2n}(\mu)\,\frac{\left(n+\frac{3}{2}\right)\ldots\left(n+\frac{3}{2}+r-1\right)}{r!}\,(-k)^r\mu^{2r}\,d\mu.$$

Те слагаемые, для которых $r < n$, равны нулю, следовательно, это выражение можно переписать в виде

$$\sum_{s=0}^{\infty}\int_{-1}^{1}P_{2n}(\mu)\,\frac{\left(n+\frac{3}{2}\right)\ldots\left(n+\frac{3}{2}+n+s-1\right)}{(n+s)!}\,(-k)^{n+s}\mu^{2n+2s}\,d\mu.$$

Но, согласно (41),

$$\int_{-1}^{1}P_{2n}(\mu)\,\mu^{2n}\,d\mu = 2^{n+1}\,\frac{n(n-1)\ldots1}{(4n+1)(4n-1)\ldots(2n+1)},$$

$$\int_{-1}^{1}P_{2n}(\mu)\,\mu^{2n+2s}\,d\mu = 2\,\frac{(2n+2s)(2n+2s-2)\ldots(2s+2)}{(4n+2s+1)(4n+2s-1)\ldots(2n+2s+1)},$$

поэтому рассматриваемое выражение приводится к виду

$$\frac{2}{2n+1}(-k)^n\left[1+\left(n+\frac{1}{2}\right)(-k)+\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{3}{2}\right)}{2!}(-k)^2+\ldots\right],$$

т. е.

$$\frac{2}{2n+1}\cdot\frac{(-k)^n}{(1+k)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

2. Проверить следующие разложения, установленные Бауэром [2]):

$$(2n+1)\mu^{2n} = 1\cdot P_0(\mu) + 5\,\frac{2n}{2n+3}\,P_2(\mu) + 9\,\frac{2n(2n-2)}{(2n+3)(2n+5)}\,P_4(\mu) + \ldots,$$

$$(2n+3)\mu^{2n+1} = 3\cdot P_1(\mu) + 7\,\frac{2n}{2n+5}\,P_3(\mu) + 11\,\frac{2n(2n-2)}{(2n+5)(2n+7)}\,P_5(\mu) + \ldots.$$

[1]) Legendre, Mémoires présentées par les savans étrangers, X, 1785.
[2]) Journ. f. reine u. angew. Math., 56 (1859), 113.

где n — целое положительное число;

$$\frac{2}{\pi(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}} = P_0(\mu) + 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 P_2(\mu) + 9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 P_4(\mu) + 13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 P_6(\mu) + \ldots,$$

$$\frac{8}{\pi}\arcsin\mu = 3P_1(\mu) + 7\left(\frac{1}{4}\right)^2 P_3(\mu) + 11\left(\frac{1\cdot 3}{4\cdot 6}\right)^2 P_5(\mu) + \ldots,$$

$$\frac{2}{\pi}(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}P_0(\mu) - 5\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 P_2(\mu) - 9\cdot\frac{3}{6}\left(\frac{1}{2\cdot 4}\right)^2 P_4(\mu) - 13\cdot\frac{5}{8}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 P_6(\mu) + \ldots,$$

$$\frac{2}{\pi}\frac{\mu}{(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}} = 3\cdot\frac{1}{2}P_1(\mu) + 7\cdot\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 P_3(\mu) + 11\cdot\frac{5}{6}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 P_5(\mu) + \ldots$$

Условия сходимости этих бесконечных рядов к соответствующим функциям, указанные в гл. VII, можно считать выполненными.

§ 13. ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА ВТОРОГО РОДА

31. Перейдем теперь к детальному изучению второго частного решения уравнения Лежандра. Если считать, что частное решение $P_n(\mu)$ известно, то можно воспользоваться общими правилами нахождения общего решения линейного уравнения второго порядка.

В уравнении (4) положим $u = P_n(\mu)\cdot w$; тогда для определения w получим следующее уравнение:

$$(1-\mu)^2\left\{\frac{d^2w}{d\mu^2}P_n(\mu) + 2\frac{dw}{d\mu}\frac{dP_n(\mu)}{d\mu}\right\} - 2\mu P_n(\mu)\frac{dw}{d\mu} = 0,$$

которое может быть записано в виде

$$\frac{\frac{d^2w}{d\mu^2}}{\frac{dw}{d\mu}} + 2\frac{\frac{dP_n(\mu)}{d\mu}}{P_n(\mu)} - \frac{2\mu}{1-\mu^2} = 0.$$

Из этого уравнения получаем

$$\frac{dw}{d\mu} = \frac{A}{(1-\mu^2)P_n^2(\mu)},$$

где A — произвольная постоянная; таким образом,

$$w = A\int^{\mu}\frac{d\mu}{(1-\mu^2)P_n^2(\mu)};$$

нижний предел в этом интеграле — любое постоянное число. Итак, общее решение уравнения Лапласа имеет вид

$$u = P_n(\mu)\left\{A' + A\int^{\mu}\frac{d\mu}{(1-\mu^2)P_n^2(\mu)}\right\}, \tag{49}$$

где A, A' — произвольные постоянные, а нижний предел интеграла — любое фиксированное число.

Выражение

$$\frac{1}{(1-\mu^2)P_n^2(\mu)},$$

будучи рациональной дробью, может быть записано в виде

$$\frac{a_0}{1-\mu} + \frac{b_0}{1+\mu} + \sum_{r=1}^{n}\left\{\frac{c_r}{\mu-\alpha_r} + \frac{d_r}{(\mu-\alpha_r)^2}\right\},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — корни уравнения $P_n(\mu)=0$.

Умножая это выражение на $(1-\mu^2)P_n^2(\mu)$ и полагая сперва $\mu=1$, а потом $\mu=-1$, мы получаем, что $a_0=\frac{1}{2}$, $b_0=\frac{1}{2}$; покажем, что $c_r=0$. Непосредственно видно, что

$$c_r=\frac{d}{d\mu}\left[\frac{(\mu-\alpha_r)^2}{(1-\mu^2)P_n^2(\mu)}\right]_{\mu=\alpha_r},$$

т. е.

$$c_r=\frac{d}{d\mu}\left[\frac{1}{(1-\mu^2)L^2(\mu)}\right]_{\mu=\alpha_r},$$

где $P_n(\mu)=(\mu-\alpha_r)L(\mu)$. Выполняя дифференцирование и подставляя $\mu=\alpha_r$, получаем

$$c_r=\frac{2\{\alpha_r L(\alpha_r)-(1-\alpha_r^2)L'(\alpha_r)\}}{(1-\alpha_r^2)L^3(\alpha_r)}.$$

Подставляя в уравнение Лежандра $(\mu-\alpha_r)L(\mu)$ вместо $P_n(\mu)$ и полагая затем $\mu=\alpha_r$, сразу получаем, что $(1-\alpha_r^2)L'(\alpha_r)-\alpha_r L(\alpha_r)=0$, следовательно, $c_r=0$.

Выражение

$$\int^{\mu}\frac{d\mu}{(1-\mu^2)P_n^2(\mu)}$$

имеет вид

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+\mu}{1-\mu}-\sum\frac{d_r}{\mu-\alpha_r}+\text{постоянная};$$

следовательно, общее решение уравнения Лежандра имеет вид

$$u=A'P_n(\mu)+A\left[\frac{1}{2}P_n(\mu)\ln\frac{1+\mu}{1-\mu}-P_n(\mu)\sum\frac{d_r}{\mu-\alpha_r}\right].$$

Если μ действительно и заключено между -1 и 1, то это выражение содержит только действительные величины; если μ действительно и больше единицы, то решение удобнее записать в форме

$$u=A'P_n(\mu)+A\left[\frac{1}{2}P_n(\mu)\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}-P_n(\mu)\sum\frac{d_r}{\mu-\alpha_r}\right],$$

которая получается из указанной выше просто прибавлением величины

$$\frac{1}{2}A\ln(-1)P_n(\mu).$$

Выражение

$$P_n(\mu)\sum\frac{d_r}{\mu-\alpha_r}$$

представляет собой рациональную функцию степени $n-1$, мы обозначим ее $W_{n-1}(\mu)$; таким образом,

$$u=A'P_n(\mu)+A\left[\frac{1}{2}P_n(\mu)\ln\frac{1+\mu}{1-\mu}-W_{n-1}(\mu)\right]$$

или

$$u=A'P_n(\mu)+A\left[\frac{1}{2}P_n(\mu)\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}-W_{n-1}(\mu)\right] \tag{50}$$

есть общее решение уравнения Лежандра.

32. Если μ произвольное комплексное число или действительное, но не лежащее между -1 и 1, то функции Лежандра второго ряда и целой положительной степени n определяются формулой

$$Q_n(\mu)=\frac{1}{2}P_n(\mu)\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}-W_{n-1}(\mu), \tag{51}$$

причем

$$\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}=\ln\frac{\rho}{\rho'}+i\,(\varphi-\varphi'),$$

где

$$\mu+1=\rho e^{i\varphi},\quad \mu-1=\rho' e^{i\varphi'};$$

здесь ρ и ρ' действительны, а φ и φ' заключены между $-\pi$ и π. Если исключить действительную полуось от $-\infty$ до 1, то в оставшейся области $Q_n(\mu)$ представляет собой однозначную функцию от μ. Мы можем предполагать, что разрез сделан вдоль действительной оси от точки -1 до точки 1.

Если μ лежит на верхнем берегу этого разреза, то $\varphi=0$, $\varphi'=\pi$; положим $\mu=\cos\theta+i\cdot 0$, тогда

$$Q_n(\cos\theta+i\cdot 0)=\frac{1}{2}P_n(\cos\theta)\left\{\ln\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}-i\pi\right\}-W_{n-1}(\cos\theta).$$

Аналогично,

$$Q_n(\cos\theta-i\cdot 0)=\frac{1}{2}P_n(\cos\theta)\left\{\ln\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}+i\pi\right\}-W_{n-1}(\cos\theta).$$

Здесь $Q_n(\cos\theta+i\cdot 0)$ означает $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}Q_n(\cos\theta+i\varepsilon)$, а $Q_n(\cos\theta-i\cdot 0)$ означает $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}Q_n(\cos\theta-i\varepsilon)$.

Значения $Q_n(\mu)$ при

$$\mu+1=e^{i\pi}|\mu+1|,\qquad \mu-1=e^{i\pi}|\mu-1|$$

и при

$$\mu+1=e^{-i\pi}|\mu+1|,\qquad \mu-1=e^{-i\pi}|\mu-1|$$

одинаковы.

Если μ — действительное число, заключенное между -1 и 1, так что $\mu=\cos\theta$, где θ — действительный угол, то $Q_n(\mu)$ определяется формулой

$$Q_n(\mu)=\frac{1}{2}P_n(\mu)\ln\frac{1+\mu}{1-\mu}-W_{n-1}(\mu) \tag{52}$$

и, следовательно, принимает действительные значения.

Функция $Q_n(\mu)$ непрерывна во всей плоскости μ, из которой исключен отрезок $[-1,\ 1]$ действительной оси. Вдоль пути, пересекающего этот отрезок, $Q_n(\mu)$ при переходе из верхней полуплоскости в нижнюю претерпевает скачок, равный $i\pi P_n(\cos\theta)$. В точках 1 и -1 функция $Q_n(\mu)$ имеет логарифмические особенности.

Мы показали, таким образом, что при $\mu=\cos\theta$, согласно формулам (51) и (52),

$$Q_n(\mu\pm i\cdot 0)=Q_n(\mu)\mp\frac{1}{2}i\pi P_n(\mu).$$

Следовательно,

$$Q_n(\cos\theta)=\frac{1}{2}\{Q_n(\cos\theta+i\cdot 0)+Q_n(\cos\theta-i\cdot 0)\}. \tag{53}$$

Ясно, что определенная таким образом функция $Q_n(\cos\theta)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) при всех действительных значениях θ.

Мы показали также, что

$$Q_n(\cos\theta+i\cdot 0)-Q_n(\cos\theta-i\cdot 0)=-i\pi P_n(\cos\theta). \tag{54}$$

33. Мы показали [п. 7, формула (9)], что при $|\mu|>1$ второе решение уравнения Лежандра, отличное от $P_n(\mu)$ и стремящееся к нулю при $|\mu|\to\infty$, имеет вид

$$\beta\left\{\frac{1}{\mu^{n+1}}+\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}\frac{1}{\mu^{n+3}}+\ldots\right\}.$$

Так как выражение (51) не содержит μ^n, то оно должно совпадать с (9), а следовательно, в (51) должны пропадать все члены, содержащие μ в положительных степенях, т. е. должно быть

$$W_{n-1}(\mu)=\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{1\cdot2\cdot3\ldots n}\left\{\mu^{n-1}+\mu^{n-3}\left(\frac{1}{3}-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\right)+\right.$$
$$\left.+\mu^{n-5}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4(2n-1)(2n-3)}\right)+\ldots\right\}.$$

Проверим теперь, что при соответствующем выборе значения β оба выражения для $Q_n(\mu)$ согласуются друг с другом.

В выражении (51) для $Q_n(\mu)$ коэффициент при $\frac{1}{\mu^{n+2s+1}}$ равен

$$\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{1\cdot2\cdot3\ldots n}\left\{\frac{1}{2n+2s+1}-\frac{n(n-1)}{2\cdot(2n-1)}\cdot\frac{1}{2n+2s-1}+\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4\cdot(2n-1)\cdot(2n-3)}\cdot\frac{1}{2n+2s-3}-\ldots\right\},$$

что в свою очередь равно

$$\int_0^1\mu^{n+2s}P_n(\mu)\,d\mu,$$

т. е.

$$\frac{1}{2^n n!}\int_0^1\mu^{n+2s}\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2-1)^n\,d\mu.$$

Интегрируя n раз по частям, получим отсюда, считая s положительным, выражение

$$\frac{1}{2^n n!}(n+2s)(n+2s-1)\ldots(2s+1)(-1)^n\int_0^1\mu^{2s}(\mu^2-1)^n\,d\mu;\ldots$$

здесь

$$\int_0^1\mu^{2s}(\mu^2-1)^n\,d\mu=(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2s}\theta\sin^{2n+1}\theta\,d\theta=(-1)^n\frac{1}{2}\frac{\Pi\left(s-\frac{1}{2}\right)\Pi(n)}{\Pi\left(n+s+\frac{1}{2}\right)}.$$

Если s отрицательно, так что $0<n+2s<n$, то, проинтегрировав по частям $n+2s$ раз, получаем, что рассматриваемый интеграл равен нулю.

Следовательно, коэффициент при $\frac{1}{\mu^{n+2s+1}}$ равен

$$\frac{(n+2s)!}{(2s)!}\frac{(2s-1)(2s-3)\ldots1}{(2n+2s+1)(2n+2s-1)\ldots1},$$

т. е.

$$\frac{1\cdot2\cdot3\ldots n}{3\cdot5\ldots(2n+1)}\cdot\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+2s)}{2\cdot4\ldots2s\cdot(2n+3)(2n+5)\ldots(2n+2s+1)}.$$

Таким образом,

$$Q_n(\mu)=\frac{1\cdot2\cdot3\ldots n}{3\cdot5\ldots(2n+1)}\left\{\frac{1}{\mu^{n+1}}+\frac{(n+1)(n+2)}{2\cdot(2n+3)}\cdot\frac{1}{\mu^{n+3}}+\ldots\right\}. \tag{55}$$

Для того чтобы полученные в п. 8 ряды приводили к тому же результату, что и данное в этом пункте определение функции $Q_n(\mu)$, постоянную β (п. 8) следует положить равной

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{3\cdot 5\ldots (2n+1)}.$$

34. Найденное Кристоффелем[1]) выражение для W_{n-1} в виде ряда по многочленам Лежандра может быть получено следующим образом. Подставив выражение

$$Q_n(\mu)=\frac{1}{2}P_n(\mu)\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}-W_{n-1}(\mu)$$

в уравнение Лежандра, заметим, что W_{n-1} удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$(1-\mu^2)\frac{d^2W_{n-1}}{d\mu^2}-2\mu\frac{dW_{n-1}}{d\mu}+n(n+1)W_{n-1}=2\frac{dP_n(\mu)}{d\mu}.$$

В п. 20 (пример 2) мы получили как следствие из (34), что

$$\frac{dP_n(\mu)}{d\mu}=(2n-1)P_{n-1}(\mu)+(2n-5)P_{n-3}(\mu)+(2n-9)P_{n-5}(\mu)+\ldots,$$

поэтому, если предположить, что W_{n-1} записывается в виде выражения

$$W_{n-1}=a_1P_{n-1}(\mu)+a_3P_{n-3}(\mu)+a_5P_{n-5}(\mu)+\ldots,$$

представляющего собой многочлен степени $n-1$ от μ и, следовательно, имеющего требуемую форму, то, подставляя его в написанное выше дифференциальное уравнение, получаем

$$a_1[n(n+1)-(n-1)n]P_{n-1}(\mu)+a_3[n(n+1)-(n-3)(n-2)]P_{n-3}(\mu)+\ldots=$$
$$=2[(2n-1)P_{n-1}(\mu)+(2n-5)P_{n-3}(\mu)+\ldots].$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при каждом из $P_k(\mu)$ в обеих частях равенства, получаем, что

$$a_1=\frac{2n-1}{1\cdot n},\quad a_3=\frac{2n-5}{3(n-1)},\quad a_5=\frac{2n-9}{5(n-2)},\ \ldots,$$

и, таким образом, приходим к формуле Кристоффеля

$$W_{n-1}(\mu)=\frac{2n-1}{1\cdot n}P_{n-1}(\mu)+\frac{2n-5}{3(n-1)}P_{n-3}(\mu)+\frac{2n-9}{5(n-2)}P_{n-5}(\mu)+\ldots \quad (56)$$

В п. 43 будет показано, что $W_{n-1}(\mu)$ может быть записано также в виде

$$W_{n-1}(\mu)=\frac{1}{n}P_0(\mu)P_{n-1}(\mu)+\frac{1}{n-1}P_1(\mu)P_{n-2}(\mu)+$$
$$+\frac{1}{n-2}P_2(\mu)P_{n-3}(\mu)+\ldots+1\cdot P_{n-1}(\mu)P_0(\mu).$$

Каждое из этих выражений эквивалентно, разумеется, выражению $P_n(\mu)\sum\frac{d_r}{\mu-a_r}$, данному в п. 31.

Другое выражение для $W_{n-1}(\mu)$, которое может быть использовано для представления функции Бесселя $Y_0(\rho)$ второго рода в виде предела $Q_n\left(\cos\frac{\rho}{n}\right)$ при $n\to\infty$, получается следующим образом.

[1]) Journ. f. reine u. angew. Math., 55 (1858), 61—82.

Сделаем в дифференциальном уравнении, которому удовлетворяет $W_{n-1}(\mu)$, замену переменного, положив $\nu=\frac{1}{2}(\mu-1)$; тогда, воспользовавшись для $P_n(\mu)$ выражением (18), мы можем привести это дифференциальное уравнение к виду

$$-\nu(\nu+1)\frac{d^2W_{n-1}}{d\nu^2}-(2\nu+1)\frac{dW_{n-1}}{d\nu}+n(n+1)W_{n-1}=$$
$$=\left\{\frac{(n+1)n}{1^2}+\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1^2\cdot 2^2}2\nu+\right.$$
$$\left.+\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}3\nu^2+\ldots\right\}.$$

Положим

$$W_{n-1}=A_0+A_1\nu+A_2\nu^2+\ldots+A_{n-1}\nu^{n-1},$$

тогда, подставляя это выражение в полученное дифференциальное уравнение и приравнивая нулю коэффициенты при каждой из степеней ν, получаем

$$n(n+1)A_0-A_1=\frac{(n+1)n}{1^2},$$

$$n(n+1)A_1-2A_2-2A_1-2A_2=\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1^2\cdot 2^2}\cdot 2,$$

$$n(n+1)A_2-3A_3-4A_2-6A_3-2A_2=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}\cdot 3.$$

. . . .

Отсюда

$$A_1=n(n+1)(A_0-1)$$

и

$$4A_2=(n+2)(n-1)A_1-\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1^2\cdot 2^2}\cdot 2,$$

т. е.

$$A_2=\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1^2\cdot 2^2}\left(A_0-1-\frac{1}{2}\right).$$

Далее получаем

$$9A_3=(n+3)(n-2)A_2-\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}\cdot 3,$$

т. е.

$$A_3=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}\left(A_0-\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right),$$

и т. д. Так как $A_n=0$, то

$$A_0=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=k_n;$$

таким образом, мы приходим к следующему выражению:

$$W_{n-1}(\mu)=k_n+(k_n-1)\frac{n(n+1)}{1^2}\left(\frac{\mu-1}{2}\right)+$$
$$+\left(k_n-1-\frac{1}{2}\right)\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1^2\cdot 2^2}\left(\frac{\mu-1}{2}\right)^2+$$
$$+\left(k_n-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}\left(\frac{\mu-1}{2}\right)^3+\ldots,\quad(57)$$

где

$$k_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

§ 14. ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ $Q_n(\mu)$

35. Формулы для $Q_n(\mu)$, аналогичные формуле Родрига для $P_n(\mu)$ (п. 13), могут быть найдены при $\mu > 1$.

Если проинтегрировать выражение

$$(\mu^2-1)^{-n-1} = \frac{1}{\mu^{2n+2}} + \frac{n+1}{1!}\,\frac{1}{\mu^{2n+4}} + \frac{(n+1)(n+2)}{2!}\,\frac{1}{\mu^{2n+6}} + \ldots$$

$n+1$ раз в пределах от μ до ∞, то получим

$$\int_\mu^\infty\int_\mu^\infty \ldots \int_\mu^\infty (\mu^2-1)^{-n-1} d\mu\, d\mu \ldots d\mu = \frac{1}{(2n+1)\,2n\ldots(n+1)} \times$$

$$\times \left\{\frac{1}{\mu^{n+1}} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}\,\frac{1}{\mu^{n+3}} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot 4\,(2n+3)(2n+5)}\,\frac{1}{\mu^{n+5}} + \ldots\right\};$$

следовательно,

$$Q_n(\mu) = 2^n\cdot n! \int_\mu^\infty\int_\mu^\infty \ldots \int_\mu^\infty \frac{d\mu\, d\mu \ldots d\mu}{(\mu^2-1)^{n+1}}, \tag{58}$$

где $\int_\mu^\infty\int_\mu^\infty \ldots \int_\mu^\infty$ означает $(n+1)$-кратный интеграл; μ предполагается больше 1.

Другое выражение для $Q_n(\mu)$ может быть получено следующим образом: выражение $w = (\mu^2-1)^n$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-\mu)^2 \frac{d^2w}{d\mu^2} + 2(n-1)\,\mu\frac{dw}{d\mu} + 2nw = 0;$$

продифференцировав это уравнение n раз и положив $u = \frac{d^n w}{d\mu^n}$, получим

$$(1-\mu^2)\frac{d^2u}{d\mu^2} - 2\mu\frac{du}{d\mu} + n(n+1)\,u = 0,$$

т. е. уравнение Лежандра. Первый интеграл уравнения для w имеет вид

$$(1-\mu^2)\frac{dw}{d\mu} + 2n\mu w = -B,$$

где B — постоянная, или

$$\frac{1}{(\mu^2-1)^n}\frac{dw}{d\mu} - \frac{2n\mu}{(\mu^2-1)^{n+1}}\,w = \frac{B}{(\mu^2-1)^{n+1}}.$$

Следовательно, общим решением будет

$$w = A(\mu^2-1)^n + B(\mu^2-1)^n \int_\mu^\infty \frac{d\mu}{(\mu^2-1)^{n+1}},$$

где μ может принимать любые значения, за исключением действительных, лежащих между -1 и 1. Таким образом, мы получили представление $Q_n(\mu)$ как n-й производной выражения

$$K\,(\mu^2-1)^n \int_\mu^\infty \frac{d\mu}{(\mu^2-1)^{n+1}},$$

где K — постоянная, значение которой должно быть найдено; мы полагаем $A=0$, так как полиномиальная часть выражения $Q_n(\mu)$ имеет степень $n-1$. Член с наинизшей степенью $\frac{1}{\mu}$ в этом выражении равен $\frac{K}{(2n+1)\mu}$, причем $|\mu|>1$; продифференцировав этот член n раз, получим $\frac{(-1)^n K\cdot n!}{(2n+1)\mu^{n+1}}$. Сравнивая с формулой (55), отсюда получаем $K=\frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n)!}$. Таким образом мы приходим к следующей формуле:

$$Q_n(\mu)=(-1)^n\frac{2^n n!}{(2n)!}\frac{d^n}{d\mu^n}\left\{(\mu^2-1)^n\int\limits_\mu^\infty\frac{d\mu}{(\mu^2-1)^{n+1}}\right\}. \tag{59}$$

Эта формула справедлива при всех значениях μ, за исключением лежащих на отрезке $[-1,1]$ действительной оси.

Чтобы приспособить эту формулу к случаю $\mu=\cos\theta$, мы полагаем

$$Q_n(\cos\theta\pm i\cdot 0)=(-1)^n\frac{2^n\cdot n!}{(2n)!}\frac{d^n}{d\mu^n}\left\{(-1)^n(1-\mu^2)^n\int\limits_\mu^\infty\frac{d\mu}{(\mu^2-1)^{n+1}}\right\},$$

где интеграл берется от точки $\cos\theta$ до бесконечности вдоль пути, лежащего в верхней полуплоскости для $\cos\theta+i\cdot 0$ и в нижней полуплоскости для $\cos\theta-i\cdot 0$. Этот интеграл можно брать от $\cos\theta$ до 0 вдоль действительной оси и затем от 0 до $+i\cdot\infty$ или до $-i\cdot\infty$ вдоль мнимой оси. Мы получим тогда

$$Q_n(\cos\theta\pm i\cdot 0)=$$
$$=(-1)^n\frac{2^n n!}{(2n)!}\frac{d^n}{d\mu^n}\left\{(1-\mu^2)^n\int\limits_0^\mu\frac{d\mu}{(1-\mu^2)^{n+1}}\mp(1-\mu^2)^n\int\limits_0^\infty\frac{i\,dw}{(w^2+1)^{n+1}}\right\}.$$

Но

$$\int\limits_0^\infty\frac{dw}{(w^2+1)^{n+1}}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}\psi\,d\psi,$$

где $w=\operatorname{tg}\psi$, следовательно,

$$\int\limits_0^\infty\frac{dw}{(w^2+1)^{n+1}}=\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\,\frac{\pi}{2}.$$

Воспользовавшись формулой Родрига для $P_n(\mu)$, получаем

$$Q_n(\mu\pm i\cdot 0)=(-1)^n\frac{2^n n!}{(2n)!}\frac{d^n}{d\mu^n}\left\{(1-\mu^2)^n\int\limits_0^\mu\frac{d\mu}{(1-\mu^2)^{n+1}}\right\}\mp i\frac{\pi}{2}P_n(\mu).$$

Теперь из формулы (53) следует, что

$$Q_n(\mu)=(-1)^n\frac{2^n n!}{(2n)!}\frac{d^n}{d\mu^n}\left\{(1-\mu^2)^n\int\limits_0^\mu\frac{d\mu}{(1-\mu^2)^{n+1}}\right\}, \tag{60}$$

где $\mu=\cos\theta$. Это — аналог формулы Родрига.

§ 15. РАЗЛОЖЕНИЕ $Q_n(\mu)$ И $P_n(\mu)$ ПО СТЕПЕНЯМ $\mu-\sqrt{\mu^2-1}$

36. Если в дифференциальном уравнении (2) мы примем $\xi=(\mu-\sqrt{\mu^2-1})^2$ за независимое переменное, то это дифференциальное уравнение примет вид

$$\xi^2(1-\xi)\frac{d^2v}{d\xi^2}+\xi\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\xi\right)\frac{dv}{d\xi}-\frac{1}{4}n(n+1)(1-\xi)v=0.$$

Если теперь мы положим $v=\xi^{\frac{n+1}{2}}v'$, то мы получим, что v' удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2v'}{d\xi^2}+\left\{\left(n+\frac{3}{2}\right)-\left(n+\frac{5}{2}\right)\xi\right\}\frac{dv'}{d\xi}-\frac{1}{2}(n+1)v'=0.$$

Сравнивая его с уравнением

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2v'}{d\xi^2}+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)\xi\}\frac{dv'}{d\xi}-\alpha\beta v'=0,$$

которому удовлетворяет $v'=F(\alpha,\beta;\gamma;\xi)$, мы видим, что при $\alpha=n+1$, $\beta=\frac{1}{2}$, $\gamma=n+\frac{3}{2}$ эти уравнения тождественны.

Отсюда следует, что уравнению (2) удовлетворяют функции

$$u_1=z^{-(n+1)}F\left(\frac{1}{2},\ n+1;\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{z^2}\right)$$

и

$$u_2=z^nF\left(\frac{1}{2},\ -n;\ \frac{1}{2}-n;\ \frac{1}{z^2}\right),$$

где

$$z=\mu+\sqrt{\mu^2-1}.$$

Ряд u_1 сходится при всех значениях μ, за исключением принадлежащих отрезку $[-1, 1]$ действительной оси. Так как n — целое, то ряд u_2 обрывается. При больших значениях $|\mu|$ главный член ряда u_1 есть $\frac{1}{(2\mu)^{n+1}}$, так как $z\sim 2\mu$. Сравнение с полученной выше для $Q_n(\mu)$ формулой (55) показывает, что

$$Q_n(\mu)=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot 2^{n+1}}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}z^{-(n+1)}F\left(\frac{1}{2},\ n+1;\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{z^2}\right),\qquad(61)$$

где $z=\mu+\sqrt{\mu^2-1}$ и μ не принадлежит отрезку $[-1, 1]$ действительной оси.

Выражение для u_2 дает формула (17):

$$P_n(\mu)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}z^nF\left(\frac{1}{2},\ -n;\ \frac{1}{2}-n;\ \frac{1}{z^2}\right);$$

это выражение содержит лишь конечное число членов.

§ 16. $Q_n(\mu)$ КАК КОЭФФИЦИЕНТ В НЕКОТОРОМ РАЗЛОЖЕНИИ

37. Пусть μ и u действительны и $\mu>1$, а $|u|\leqslant 1$, тогда

$$\frac{1}{\mu-u}=\frac{1}{\mu}+\frac{u}{\mu^2}+\ldots+\frac{u^n}{\mu^{n+1}}+\ldots$$

Подставляя сюда вместо $u, u^2, \ldots, u^n, \ldots$ полученные в п. 28 выражения их через многочлены Лежандра, а именно

$$u^n=\frac{n!}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}\left\{(2n+1)P_n(u)+(2n-3)\frac{2n+1}{2}P_{n-2}(u)+\right.$$
$$\left.+(2n-7)\frac{(2n+1)(2n-1)}{2\cdot 4}P_{n-4}(u)+\ldots\right\},$$

мы получаем, что $\frac{1}{\mu-u}$ представляется как сумма абсолютно сходящегося ряда, в котором можно, не меняя его суммы, сгруппировать члены, содержащие

$$P_0(u),\ P_1(u), \ldots, P_n(u), \ldots$$

Таким образом мы получаем, что

$$\frac{1}{\mu-u}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,P_n(u)\,Q_n(\mu), \tag{62}$$

где

$$Q_n(\mu)=\frac{n!}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}\left\{\mu^{-n-1}+\frac{(n+1)(n+2)}{2\cdot(2n+3)}\,\mu^{-n-3}+\ldots\right\},$$

что совпадает с $Q_n(\mu)$, определяемой формулой (55). Формула (62) впервые была получена Гейне[1]), которым и была введена в рассмотрение функция $Q_n(\mu)$.

В п. 38 мы покажем, что формула (62) верна для всех значений μ и u, действительных или комплексных, удовлетворяющих условию

$$\left|u+(u^2-1)^{\frac{1}{2}}\right|<\left|\mu+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\right|.$$

Легко проверить, что если $Q_n(\mu)$ определить как коэффициент при

$$(2n+1)\,P_n(u)$$

в разложении $\frac{1}{\mu-u}$, то $Q_n(\mu)$ удовлетворяет уравнению Лежандра.

Положив $w=\frac{1}{\mu-u}$, получим

$$1-u^2=(1-\mu^2)+2\mu(\mu-u)-(\mu-u)^2,$$

так что

$$(1-u^2)\frac{\partial w}{\partial u}=-(1-\mu^2)\frac{\partial w}{\partial\mu}+2\mu w-1,$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{(1-u^2)\frac{\partial w}{\partial u}\right\}=\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial w}{\partial\mu}\right\}.$$

Подставив в это тождество ряд (62) для w и воспользовавшись уравнением Лежандра для $P_n(u)$, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,P_n(u)\left[\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{dQ_n(\mu)}{d\mu}\right\}+n(n+1)\,Q_n(\mu)\right]=0.$$

Это равенство возможно только в том случае, если коэффициент при каждом $P_n(u)$ равен нулю, следовательно,

$$\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{dQ_n(\mu)}{d\mu}\right\}+n(n+1)\,Q_n(\mu)=0.$$

38. Мы сейчас установим справедливость полученного для $(\mu-u)^{-1}$ разложения при менее ограничительных условиях, чем в п. 37.

Пусть $\mu=x+iy=\operatorname{ch}(\xi+i\eta)$; тогда $x=\operatorname{ch}\xi\cos\eta$, $y=\operatorname{sh}\xi\sin\eta$ и $\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2\xi}+\frac{y^2}{\operatorname{sh}^2\xi}=1$. Следовательно, ξ сохраняет постоянное значение на эллипсе с фокусами -1 и 1 и большой полуосью $\operatorname{ch}\xi$. Этот эллипс проходит через

[1]) Journ. f. reine u. angew. Math., 17 (1851), 70—82.

Если μ фиксировано и u — переменная точка внутри или на границе некоторого эллипса с фокусами -1 и 1, лежащего внутри того эллипса, на котором лежит точка μ, то ясно, что $\frac{1}{|\mu-u|}$ имеет конечный максимум по всем этим значениям u, и так как

$$(n+1)^{\frac{1}{2}}\left|\frac{u+\sqrt{u^2-1}}{\mu+\sqrt{\mu^2-1}}\right|^n$$

стремится к нулю при $n\to\infty$ равномерно по всем указанным значениям u, то отсюда следует, что ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty}(2r+1)P_r(u)Q_r(\mu)$$

сходится равномерно к $\frac{1}{\mu-u}$.

Таким образом доказано следующее:

Если u — некоторая точка внутри эллипса с фокусами -1 и 1, проходящего через точку μ, то при

$$|u+\sqrt{u^2-1}|<|\mu+\sqrt{\mu^2-1}|$$

справедливо разложение

$$\frac{1}{\mu-u}=\sum_{r=0}^{\infty}(2r+1)P_r(u)Q_r(\mu).$$

Этот ряд сходится равномерно для всех μ, лежащих на фиксированном эллипсе с фокусами -1 и 1, и для u, лежащих внутри или на границе меньшего эллипса с теми же фокусами.

Частным случаем эллипса, на котором может лежать u, является отрезок действительной оси, соединяющей точки -1 и 1.

Первая часть этой теоремы была доказана Гейне[1]).

39. Покажем, что если $f(\mu)$ — функция, аналитическая внутри и на границе некоторого эллипса с фокусами -1 и 1, то $f(u)$ может быть разложена в ряд по многочленам Лежандра $P_0(u), P_1(u), \ldots, P_r(u), \ldots$, равномерно сходящийся для всех u, лежащих внутри или на границе любого меньшего эллипса с теми же фокусами.

Пусть μ — некоторая точка на эллипсе; мы показали, что ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty}(2r+1)P_r(u)Q_r(\mu)$$

сходится к $\frac{1}{\mu-u}$. По теореме Коши

$$f(u)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{f(\mu)}{\mu-u}\,d\mu,$$

где (c) — эллипс, на котором лежат μ. Так как ряд $\sum(2r+1)P_r(u)Q_r(\mu)$ сходится равномерно для всех указанных значений u и μ, то отсюда получаем

$$f(u)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{r=0}^{\infty}\int_{(c)}(2r+1)P_r(u)Q_r(\mu)f(\mu)\,d\mu,$$

[1]) Journ. f. reine u. angew. Math., 42 (1851), 72; см. также Kugelfunktionen, т. I, стр. 198. Приведенное там вычисление предела $P_n(x)\cdot Q_n(y)$ нуждается, повидимому, в некоторых исправлениях.

т. е.

$$f(u) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r P_r(u),$$

где

$$a_r = \frac{2r+1}{2\pi i} \int_{(c)} Q_r(\mu) f(\mu) \, d\mu.$$

Это и есть искомое разложение; оно принадлежит К. Нейману[1]).

ПРИМЕР[2])

Доказать, что

$$\int_0^{\mu - \sqrt{\mu^2 - 1}} \frac{(1-h^2)\,dh}{(1-2uh+h^2)^{\frac{3}{2}}(1-2\mu h+h^2)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(u) Q_n(\mu)$$

и

$$\int_0^{\mu - \sqrt{\mu^2 - 1}} \frac{dh}{(1-2uh+h^2)^{\frac{1}{2}}(1-2\mu h+h^2)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(u) Q_n(\mu),$$

где

$$|\mu + \sqrt{\mu^2-1}| > |u + \sqrt{u^2-1}|.$$

Отсюда получить, что

$$K - F(h, \varphi_0) = \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - h^2 \sin^2\varphi}} = \{(u+1)(\mu-1)\}^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(u) Q_n(\mu),$$

где u и μ действительны и больше 1, $u < \mu$ и $\varphi_0 = \arcsin \dfrac{\mu - 1}{u+1}$.

§ 17. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ Q_n В ВИДЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

40. Умножим ряд (62) на $P_n(u)$ и проинтегрируем по u в пределах от -1 до 1. Предполагая почленное интегрирование законным[3]), получаем в силу формулы (38), что

$$(2n+1) Q_n(\mu) \int_{-1}^{1} P_n^2(u)\, du = \int_{-1}^{1} \frac{P_n(u)}{\mu - u}\, du.$$

Таким образом мы представили $Q_n(\mu)$ в виде определенного интеграла: подставив вместо интеграла, стоящего в левой части равенства, его значение, окончательно получаем

$$Q_n(\mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{P_n(u)}{\mu - u}\, du. \tag{63}$$

---

[1]) Über die Entwickelung einer Function nach den Kugelfunktionen, Halle, 1862; см. также Thomae, Journ. f. reine u. angew. Math., 64 (1866), 337.

[2]) См. Baer, Die Kugelfunktion als Lösung einer Differentialgleichung, Kiel, 1898.

[3]) Так как при $-1 < u < 1$ выражение $\dfrac{1}{\mu - u}$ представляет собой монотонную функцию от u, то это вытекает из результатов гл. VII.

точку $(\operatorname{ch}\xi, 0)$ на действительной оси, в ней $\eta = 0$. В точках, лежащих между -1 и 1 на действительной оси, $\xi = 0$ и $|\eta|$ заключается между 0 и π. Все точки плоскости μ, за исключением лежащих на отрезке, соединяющем фокусы, однозначно определяются значениями ξ и η, если ξ лежит в интервале $(0, \infty)$, а η — в интервале $(-\pi, \pi)$. На эллипсе, на котором $\xi = \mathrm{const}$, η представляет собой эксцентрический угол точки (ξ, η). При $\xi = 0$, т. е. в точках, лежащих на отрезке действительной оси, соединяющем фокусы этих софокусных эллипсов, соответствие является двузначным, так как η можно взять как положительным, так и отрицательным.

Так как (см. п. 42)

$$(2r+1)\mu Q_r(\mu) - (r+1) Q_{r+1}(\mu) - rQ_{r-1}(\mu) = 0,$$
$$(2r+1) uP_r(u) - (r+1) P_{r+1}(u) - rP_{r-1}(u) = 0,$$

то

$$(2r+1)(\mu - u) Q_r(\mu) P_r(u) = (r+1)\{Q_{r+1}(\mu) P_r(u) - P_{r+1}(u) Q_r(\mu)\} - \\ - r\{Q_r(\mu) P_{r-1}(u) - P_r(u) Q_{r-1}(\mu)\}.$$

Отсюда, придавая r значения $n, n-1, n-2, \ldots$ и суммируя, получаем

$$(\mu - u)\sum_{r=0}^{n}(2r+1) Q_r(\mu) P_r(u) = \\ = (n+1)\{Q_{n+1}(\mu) P_n(u) - Q_n(\mu) P_{n+1}(u)\} + 1;$$

следовательно,

$$\frac{1}{\mu - u} = \sum_{r=0}^{n}(2n+1) P_r(u) Q_r(\mu) + \frac{n+1}{\mu - u}\{P_{n+1}(u) Q_n(\mu) - P_n(u) Q_{n+1}(\mu)\}.$$

Эта формула принадлежит Кристоффелю[1]).

Вычислим значение второго слагаемого в правой части полученной формулы.

Так как

$$P_n(u) = \frac{\Pi\left(n - \frac{1}{2}\right)}{\Pi(n)\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)} z^n F\left(\frac{1}{2},\ -n;\ \frac{1}{2} - n;\ \frac{1}{z^2}\right),$$

где $z = u + \sqrt{u^2 - 1}$, то, согласно (17), при $u = 1$, $z = 1$, имеем

$$1 = P_n(1) = \frac{\Pi\left(n - \frac{1}{2}\right)}{\Pi(n)\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)} F\left(\frac{1}{2},\ -n;\ \frac{1}{2} - n;\ 1\right).$$

Следовательно, для всех значений u

$$|P_n(u)| \leqslant \frac{\Pi\left(n - \frac{1}{2}\right)}{\Pi(n)\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)} |z^n| \left\{1 + \frac{\frac{1}{2}(-n)}{1\left(\frac{1}{2} - n\right)}\frac{1}{|z|^2} + \ldots\right\} \leqslant \\ \leqslant |z|^n \frac{\Pi\left(n - \frac{1}{2}\right)}{\Pi(n)\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}\left\{1 + \frac{\frac{1}{2}(-n)}{1\left(\frac{1}{2} - n\right)} + \ldots\right\} \leqslant |z|^n$$

[1]) Journ. f. reine u. angew. Math., 55 (1858), 61—82.

Таким образом мы доказали, что *для всех значений* u

$$|P_n(u)| \leqslant |u+\sqrt{u^2-1}|^n,$$

где n — *целое положительное число.*

Это — обобщение неравенства $|P_n(u)| \leqslant 1$, установленного для всех действительных значений u, лежащих в интервале $(-1, 1)$ (см. п. 15).

Этот результат может быть получен также и из формулы

$$P_n(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (u+\sqrt{u^2-1}\cos\psi)^n\,d\psi,$$

в которой u произвольно, а n — целое положительное число. Действительно, очевидно, что наибольшее значение выражения $|u+\sqrt{u^2-1}\cos\psi|$ на отрезке $0 \leqslant \psi \leqslant \pi$ равно $|u+\sqrt{u^2-1}|$.

Из формулы (61) получаем

$$Q_n(\mu) = \frac{\Pi(n)\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)} z^{-(n+1)} F\left(\frac{1}{2},\ n+1;\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{z^2}\right),$$

где $z = \mu+\sqrt{\mu^2-1}$; эта формула справедлива для всех значений μ, за исключением принадлежащих отрезку $[-1, 1]$ действительной оси.

Таким образом, получаем

$$|Q_n(\mu)| < \left(\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{1}{2}} |z|^{-(n+1)} \left\{1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}\frac{1}{|z|^2} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2!}\frac{1}{|z|^4} + \ldots\right\} <$$

$$< \left(\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{1}{2}} |z|^{-(n+1)} \left(1 - \frac{1}{|z|^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

т. е.

$$|Q_n(\mu)| < \left(\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{|z|^{-(n+1)}}{\left(1-\frac{1}{|z|^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

для $|z| > 1$, *т. е. для всех* μ, *не принадлежащих отрезку* $[-1, 1]$ *действительной оси* (здесь, как и выше, $z = \mu+\sqrt{\mu^2-1}$).

Из этих двух оценок для $P_n(u)$ и $Q_n(\mu)$ получаем

$$(n+1)|P_n(u)\,Q_{n+1}(\mu)| <$$

$$< \pi^{\frac{1}{2}}(n+1)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{u+\sqrt{u^2-1}}{\mu+\sqrt{\mu^2-1}}\right)^n \frac{1}{|\mu+\sqrt{\mu^2-1}|^2\,|1-|\mu-\sqrt{\mu^2-1}|^2|^{\frac{1}{2}}}.$$

Из этого неравенства следует, что

$$(n+1)|P_n(u)\,Q_{n+1}(\mu)|$$

стремится к нулю при $n \to \infty$, если только

$$|u+\sqrt{u^2-1}| < |\mu+\sqrt{\mu^2-1}|.$$

Аналогично, можно показать, что при соблюдении этого неравенства

$$(n+1)|P_{n+1}(u)\,Q_n(\mu)|$$

стремится к нулю, когда $n \to \infty$.

Это представление, найденное Ф. Нейманом[1]), справедливо не только для действительных значений μ, больших единицы, но и вообще для всех μ, не принадлежащих отрезку $[-1, 1]$ действительной оси. Это равенство может быть принято за определение функции $Q_n(\mu)$.

Пусть $z=\mu+\sqrt{\mu^2-1}$, $u=\cos\theta$; тогда, так как $z+z^{-1}=2\mu$, из (63) следует

$$Q_n(\mu)=z\int_{-1}^{1}\frac{P_n(\cos\theta)}{1-2z\cos\theta+z^2}\,du$$

для всех действительных μ, больших 1, или для всех z, таких, что $|z|>1$. Разлагая подинтегральное выражение в ряд по степеням z и замечая, что почленное интегрирование законно, получаем, что

$$Q_n(\mu)=\sum_{m=1}^{\infty}z^{-m}\int_0^{\pi}P_n(\cos\theta)\sin m\theta\,d\theta.$$

Отсюда, используя для $\int_0^{\pi}P_n(\cos\theta)\sin m\theta\,d\theta$ формулу (45), получаем

$$Q_n(\mu)=2\,\frac{2\cdot 4\ldots 2n}{3\cdot 5\ldots(2n+1)}\,z^{-(n+1)}\,F\left(\frac{1}{2},\ n+1;\ n+\frac{3}{2};\ z^{-2}\right).$$

Этот ряд можно просуммировать с помощью формулы

$$F(a, b; c; x)=\frac{\Pi(c-1)}{\Pi(b-1)\,\Pi(c-b-1)}\int_0^1 v^{b-1}\,(1-v)^{c-b-1}\,(1-vx)^{-a}\,dv;$$

таким образом,

$$Q_n(\mu)=z^{-(n+1)}\int_0^1 v^{-\frac{1}{2}}\,(1-v)^n\,(1-vz^{-2})^{-n-1}\,dv.$$

Делая в этом интеграле подстановку $v=\frac{w-1}{w+1}$, находим

$$Q_n(\mu)=2^{n+1}\int_1^{\infty}\left\{\left(z+\frac{1}{z}\right)+w\left(z-\frac{1}{z}\right)\right\}^{-n-1}\frac{dw}{\sqrt{w^2-1}},$$

или, полагая $w=\operatorname{ch}\psi$,

$$Q_n(\mu)=\int_0^{\infty}\frac{d\psi}{(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\operatorname{ch}\psi)^{n+1}}. \tag{64}$$

Это представление $Q_n(\mu)$ в виде определенного интеграла справедливо для всех значений μ, не принадлежащих отрезку $[-1, 1]$ действительной оси, если только значение $\sqrt{\mu^2-1}$ выбрано соответствующим образом; именно: если $\mu>1$, то $\sqrt{\mu^2-1}$ следует брать положительным, для комплексных μ должно быть

$$\sqrt{\mu^2-1}=\sqrt{\mu-1}\,\sqrt{\mu+1},$$

где

$$\sqrt{\mu-1}=\rho^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\varphi}{2}},\qquad \sqrt{\mu+1}=\rho'^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\varphi'}{2}},$$

[1]) Journ. of reine u. angew. Math., 37 (1848), 24; см также Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen, Leipzig, 1878.

причем ρ и ρ' действительны, а φ и φ' заключены между $-\pi$ и π. Полученное интегральное представление соответствует формуле (25) для $P_n(\mu)$. Оно принадлежит Гейне[1]).

Подстановка

$$(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\operatorname{ch}\psi)(\mu-\sqrt{\mu^2-1}\operatorname{ch}\chi)=1$$

приводит полученную формулу к виду

$$Q_n(\mu)=\int_0^{\chi_0}(\mu-\sqrt{\mu^2-1}\operatorname{ch}\chi)^n\,d\chi, \tag{65}$$

где

$$\chi_0=\frac{1}{2}\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}.$$

Это отвечает интегралу Лапласа (24) для $P_n(\mu)$.

Для комплексных значений μ законность использованной подстановки требует проверки; мы не будем, однако, останавливаться здесь на этом вопросе, так как полученные интегралы будут рассмотрены более подробно в гл. V.

41. Формула (65) дает простой способ вычисления значений $Q_0(\mu)$, $Q_1(\mu)$, $Q_2(\mu)$, ...; так, например,

$$Q_0(\mu)=\int_0^{\chi_0}d\chi=\frac{1}{2}\ln\frac{\mu+1}{\mu-1};$$

$$Q_1(\mu)=\mu\chi_0-\sqrt{\mu^2-1}\operatorname{sh}\chi_0=\frac{\mu}{2}\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}-1;$$

$$Q_2(\mu)=\frac{1}{2}\,\frac{3\mu^2-1}{2}\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}-\frac{3}{2}\mu.$$

Мы имеем

$$Q_n(\cos\theta\pm i\cdot 0)=\int_0^{\infty}\frac{d\psi}{(\cos\theta\pm i\sin\theta\operatorname{ch}\psi)^{n+1}},$$

откуда

$$Q_n(\cos\theta)=\frac{1}{2}\left\{\int_0^{\infty}\frac{d\psi}{(\cos\theta+i\sin\theta\operatorname{ch}\psi)^{n+1})}+\int_0^{\infty}\frac{d\psi}{(\cos\theta-i\cdot\sin\theta\operatorname{ch}\psi)^{n+1}}\right\}. \tag{66}$$

Аналогично,

$$\int_0^{\infty}\frac{d\psi}{(\cos\theta+i\sin\theta\operatorname{ch}\psi)^{n+1}}-\int_0^{\infty}\frac{d\psi}{(\cos\theta-i\sin\theta\operatorname{ch}\psi)^{n+1}}=-i\pi P_n(\cos\theta). \tag{66'}$$

Эта формула (66′) может быть получена также следующим образом. Имеем

$$\frac{1}{\sqrt{1-2h\mu+h^2}}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{du}{1-2h\mu+h^2+u^2}=\frac{2}{\pi}h\sqrt{1-\mu^2}\int_0^{\infty}\frac{dv}{h^2[1+(1-\mu^2)v^2]-2h\mu+1},$$

где $u=hv\sqrt{1-\mu^2}$. Пусть $v=\operatorname{sh}\psi$, тогда

$$h^2[1+(1-\mu^2)\operatorname{sh}^2\psi]-2h\mu+1=(h\mu-1)^2+h^2(1-\mu^2)\operatorname{ch}^2\psi=$$
$$=(h\mu-1+ih\sin\theta\operatorname{ch}\psi)(h\mu-1-ih\sin\theta\operatorname{ch}\psi),$$

[1]) Journ. of reine u. angew. Math., 47 (1851), 73 и 75.

следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2h\cos\theta+h^2}}=\frac{i}{\pi}\int_0^\infty\left\{\frac{1}{1-h(\cos\theta+i\sin\theta\,\mathrm{ch}\,\psi)}-\frac{1}{1-h(\cos\theta-i\sin\theta\,\mathrm{ch}\,\psi)}\right\}d\psi;$$

разлагая обе части этого равенства по степеням $\frac{1}{h}$, где $h>1$, и приравнивая коэффициенты при $\frac{1}{h^{n+1}}$, получаем формулу (66′).

Воспользовавшись формулой (61) для $Q_n(\mu)$ и положив

$$\mu=\cos\theta+i\cdot 0,\quad z=\cos\theta+i\sin\theta,$$

получим две формулы

$$Q_n(\cos\theta)=2\frac{2\cdot 4\dots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n+1)}\left\{\cos(n+1)\theta+\frac{1(n+1)}{1(2n+3)}\cos(n+3)\theta+\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot 3(n+1)(n+2)}{1\cdot 2(2n+3)(2n+5)}\cos(n+5)\theta+\dots\right\},$$

$$\frac{\pi}{4}P_n(\cos\theta)=\frac{2\cdot 4\dots 2n}{3\cdot 5\dots(2n+1)}\left\{\sin(n+1)\theta+\frac{1(n+1)}{1(2n+3)}\sin(n+3)\theta+\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot 3\cdot(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot(2n+3)(2n+5)}\sin(n+5)\theta+\dots\right\};\qquad(67)$$

последняя формула была получена иным способом в п. 29.

Сделав в формуле (65) подстановку

$$h=\mu-\sqrt{\mu^2-1}\,\mathrm{ch}\,\chi,$$

получим $dh=-\sqrt{1-2\mu h+h^2}\,d\chi$ и,

$$Q_n(\mu)=\int_0^{\frac{1}{z}}\frac{h^n}{(1-2\mu h+h^2)^{\frac{1}{2}}}\,dh,\qquad(68)$$

где $z=\mu+\sqrt{\mu^2-1}$.

Это — аналог формулы

$$P_n(\mu)=\frac{1}{i\pi}\int_{\frac{1}{z}}^{z}\frac{h^n}{(1-2h\mu+h^2)^{\frac{1}{2}}}\,dh,$$

полученной в п. 19.

Записав формулу (68) в виде

$$Q_n(\mu)=\int_0^{\frac{1}{z}}h^n(1-hz)^{-\frac{1}{2}}(1-hz^{-1})^{-\frac{1}{2}}\,dh$$

и введя вместо h новую переменную v, $h=z^{-1}(1-v)$, получим

$$Q_n(\mu)=\frac{1}{z^n(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}\int_0^1 v^{-\frac{1}{2}}(1-v)^n\left(1-\frac{v}{1-z^2}\right)^{-\frac{1}{2}}dv.$$

Разлагая $\left(1-\frac{v}{1-z^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ в ряд и почленно интегрируя, получаем при

$|1-z^2|>1$, формулу

$$Q_n(\mu)=\frac{\Pi(n)\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\frac{1}{z^n(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{1-z^2}\right), \tag{69}$$

справедливую при $|z^2-1|>1$, т. е., в частности, при μ действительном и большем $\frac{3}{\sqrt{8}}$.

§ 18. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ФУНКЦИЯМИ Q_n

42. Формула Неймана

$$Q_n(\mu)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_n(u)}{\mu-u}\,du$$

может быть использована для получения соотношений между функциями $Q_n(\mu)$, соответствующими различным значениям n, аналогичных полученным в п. 20 соотношениям для $P_n(\mu)$.

Эта формула может быть записана в виде

$$Q_n(\mu)=\frac{1}{2}P_n(\mu)\int_{-1}^{1}\frac{du}{\mu-u}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_n(\mu)-P_n(u)}{\mu-u}\,du,$$

откуда, согласно формуле (51),

$$W_{n-1}(\mu)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_n(\mu)-P_n(u)}{\mu-u}\,du.$$

Ясно, что выражение под интегралом представляет собой многочлен степени $n-1$ от $\mu-u$, следовательно, W_{n-1} является, как уже было показано в п. 31, многочленом степени $n-1$ от μ.

Мы имеем

$$nQ_n-(2n-1)\mu Q_{n-1}+(n-1)Q_{n-2}=$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{nP_n(u)+(n-1)P_{n-2}(u)-(2n-1)\mu P_{n-1}(u)}{\mu-u}\,du=$$
$$=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(2n-1)P_{n-1}(u)\,du.$$

Отсюда, используя (29), получаем:

$$nQ_n(u)-(2n-1)\mu Q_{n-1}(\mu)+(n-1)Q_{n-2}(\mu)=0; \tag{70}$$

таким образом, функции $Q_n(\mu)$, соответствующие трем последовательным значениям n, удовлетворяют соотношению такого же вида, что и (29).

С другой стороны,

$$\frac{dQ_n(\mu)}{d\mu}=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_n(u)}{(\mu-u)^2}\,du=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1-\mu}-\frac{(-1)^n}{1+\mu}\right\}+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\mu-u}\frac{dP_n(u)}{du}\,du,$$

следовательно,

$$\frac{dQ_{n+1}(\mu)}{d\mu}-\frac{dQ_{n-1}(\mu)}{d\mu}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\mu-u}\left\{\frac{dP_{n+1}(u)}{du}-\frac{dP_{n-1}(u)}{du}\right\}du=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_n(u)}{\mu-u}\,du,$$

отсюда в силу (34) имеем

$$\frac{dQ_{n+1}}{d\mu}-\frac{dQ_{n-1}}{d\mu}=(2n+1)\,Q_n; \tag{71}$$

из этой последней формулы можно получить

$$-\frac{dQ_n}{d\mu}=(2n+3)\,Q_{n+1}+(2n+7)\,Q_{n+3}+(2n+11)\,Q_{n+5}+\ldots \tag{72}$$

ПРИМЕРЫ

1. [1]) Доказать, что

$$(2n+1)\int\limits_1^\infty Q_n^2\,d\mu-(2n-1)\int\limits_1^\infty Q_{n-1}^2\,d\mu=-\frac{1}{n^2},$$

где $\mu>1$, и

$$(2n+1)\int\limits_0^1 Q_n^2\,d\mu-(2n-1)\int\limits_0^1 Q_{n-1}^2\,d\mu=\frac{1}{n^2},$$

где $\mu<1$.

Вывести отсюда, что в указанных двух случаях соответственно

$$(2n+1)\int\limits_1^\infty Q_n^2\,d\mu=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots,$$

$$(2n+1)\int\limits_0^1 Q^2\,d\mu=\frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}-\ldots$$

2. Доказать, что

$$(1-\mu^2)\,(P_n'Q_n'-P_{n+1}'Q_{n+1}')=(n+1)^2\,(P_{n+1}Q_{n+1}-P_nQ_n)$$

и

$$(2n+3)\int\limits_1^\mu P_{n+1}Q_{n+1}\,d\mu-(2n+1)\int\limits_1^\mu P_nQ_n\,d\mu=$$

$$=\mu\,(P_{n+1}Q_{n+1}+P_nQ_n)-(P_nQ_{n+1}+P_{n+1}Q_n),$$

где $\mu>1$. Если $\mu<1$ и интеграл берется в пределах от 0 до μ, то в правой части следует изменить знак.

Вывести отсюда, что при $\mu<1$

$$(2n+1)\int\limits_0^1 P_nQ_n\,d\mu-(2n-1)\int\limits_0^1 P_{n-1}Q_{n-1}\,d\mu=\frac{(-1)^n}{n}$$

и

$$(2n+1)\int\limits_0^1 P_nQ_n\,d\mu=(-1)^{n+1}\left\{\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+3)(n+4)}+\ldots\right\}.$$

3. Доказать, что $P_{n+1}(\mu)\,Q_{n-1}(\mu)-P_{n-1}(\mu)\,Q_{n+1}(\mu)=\dfrac{2n+1}{n\,(n+1)}\,\mu.$

(Math. Tripos, 1894.)

§ 19. ЕЩЕ ОДНО ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ $Q_n(\mu)$

43. Чтобы найти производящую функцию ряда

$$Q_0(\mu)+hQ_1(\mu)+h^2Q_2(\mu)+\ldots+h^nQ_n(\mu)+\ldots,$$

---

[1]) Примеры 1 и 2 заимствованы у Харгревса (Proc. Lond. Math. Soc. (1), 29 (1897), 115)

где $0 < h < \mu - \sqrt{\mu^2-1}$ и $\mu > 1$, заметим, воспользовавшись неймановским представлением (63) для $Q_n(\mu)$, что этот ряд можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-1}^{1} h^n \frac{P_n(u)}{\mu-u}\,du.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} h^n P_n(u)$ равномерно сходится к $\dfrac{1}{\sqrt{1-2hu+h^2}}$, то мы видим, что сумма рассматриваемого ряда равна

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\mu-u}\,\frac{du}{\sqrt{1-2hu+h^2}},$$

где значение корня $\sqrt{1-2hu+h^2}$ берется положительным. Это выражение может быть представлено в виде

$$\frac{1}{2\sqrt{2h}}\int_{-1}^{1}\frac{du}{(\mu-u)\sqrt{p-u}},$$

где

$$p=\frac{1}{2}\left(h+\frac{1}{h}\right).$$

Если $z=\sqrt{\dfrac{p-u}{\mu-u}}$, то последнее выражение приводится к

$$\frac{1}{2h}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dz}{\sqrt{p-\mu}\,\sqrt{z^2-1}},$$

где

$$\beta=\sqrt{\frac{p-1}{\mu-1}} \quad \text{и} \quad \alpha=\sqrt{\frac{p+1}{\mu+1}}.$$

При $h < \mu-\sqrt{\mu^2-1}$, т. е. при $p > \mu$, значение полученного выражения равно

$$\frac{1}{\sqrt{1-2h\mu+h^2}}\ln\frac{\mu-h+\sqrt{1-2h\mu+h^2}}{\sqrt{\mu^2-1}}. \tag{73}$$

Если $\mu > 1$ и $h < \mu-\sqrt{\mu^2-1}$, то коэффициент при h^n в разложении этой функции по степеням h равен $Q_n(\mu)$. Сходимость соответствующего ряда вытекает из того, что в силу формулы (64)

$$\frac{Q_{n+1}(\mu)}{Q_n(\mu)} < \mu-\sqrt{\mu^2-1}.$$

Учитывая сказанное в п. 32, где $Q_n(\mu)$ было определено для действительных μ, заключенных между -1 и 1, мы видим, что в этом случае $Q_n(\mu)$ представляет собой коэффициент при h^n в разложении функции

$$\frac{1}{\sqrt{1-2h\mu+h^2}}\ln\frac{\mu-h+\sqrt{1-2h\mu+h^2}}{\sqrt{1-\mu^2}}.$$

Используя (66), можно показать, что соответствующий ряд сходится при $0<\theta<\pi$, $|h|<1$.

Если $h=\frac{r'}{r}$, $\mu=\cos\theta$, $(r'<r)$, то $Q_n(\mu)$ представляет собой коэффициент при $\frac{r'^n}{r^{n+1}}$ в разложении функции

$$\frac{1}{\sqrt{r^2-2rr'\cos\theta+r'^2}}\ln\frac{z+\sqrt{r^2-2rr'\cos\theta+r'^2}-r'}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-r')^2}}\ln\frac{z+\sqrt{x^2+y^2+(z-r')^2}-r'}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

этот коэффициент равен

$$\frac{(-1)^n r^{n+1}}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\left\{\frac{1}{r}\ln\frac{z+r}{\sqrt{x^2+y^2}}\right\}.$$

Таким образом мы получаем формулу

$$Q_n(\mu)=\frac{(-1)^n r^{n+1}}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\left\{\frac{1}{r}\ln\sqrt{\frac{r+z}{r-z}}\right\}\quad(-1\leqslant\mu\leqslant1),\tag{74}$$

аналогичную формуле (13) для $P_n(\mu)$.

Если мы, используя формулу Лейбница, выполним дифференцирование в формуле (74), то получим

$$Q_n(\mu)=\frac{(-1)^n r^{n+1}}{n!}\left\{\ln\sqrt{\frac{r+z}{r-z}}\frac{d^n}{dr^n}\frac{1}{r}+n\cdot\frac{1}{r}\frac{d^{n-1}}{dr^{n-1}}\frac{1}{r}+\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d^{n-2}}{dr^{n-2}}\frac{1}{r}+\ldots+\frac{d^{n-1}}{dr^{n-1}}\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{r}\right\},$$

т. е.

$$Q_n(\mu)=P_n(\mu)\ln\sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}}-P_0(\mu)P_{n-1}(\mu)-$$

$$-\frac{1}{2}P_1(\mu)P_{n-2}(\mu)-\ldots-\frac{1}{n}P_{n-1}(\mu)P_0(\mu);$$

отсюда получаем выражение для $W_{n-1}(\mu)$;

$$W_{n-1}(\mu)=\frac{1}{n}P_0(\mu)P_{n-1}(\mu)+\frac{1}{n-1}P_1(\mu)P_{n-2}(\mu)+\ldots+P_{n-1}(\mu)P_0(\mu).$$

44. Можно получить для $Q_n(\mu)$ еще другое выражение; оно аналогично формуле Родрига для $P_n(\mu)$. Вывод в обоих этих случаях примерно одинаков.

Пусть

$$y=\mu+\frac{1}{2}h(y^2-1),$$

тогда

$$y=\frac{1}{h}-\frac{\sqrt{1-2h\mu+h^2}}{h},\quad\frac{dy}{d\mu}=\frac{1}{\sqrt{1-2h\mu+h^2}}.$$

Если h достаточно мало, то по формуле Лагранжа

$$f(y)=\sum\frac{h^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{d\mu^{n-1}}\left\{\left(\frac{\mu^2-1}{2}\right)^n f'(\mu)\right\},$$

откуда

$$f'(y)\frac{dy}{d\mu}=\sum\frac{h^n}{n!}\frac{d^n}{d\mu^n}\left\{\left(\frac{\mu^2-1}{2}\right)^n f'(\mu)\right\}.$$

Пусть теперь

$$f'(y) = \ln \sqrt{\frac{y+1}{y-1}},$$

тогда

$$\frac{1}{\sqrt{1-2h\mu+h^2}} \ln \sqrt{\frac{y+1}{y-1}} = \sum \frac{h^n}{n!} \frac{d^n}{d\mu^n} \left\{ \left(\frac{\mu^2-1}{2} \right)^n \ln \sqrt{\frac{\mu+1}{\mu-1}} \right\}. \tag{75}$$

Далее,

$$\left(\frac{y+1}{y-1}\right)^2 \frac{\mu-1}{\mu+1} = \frac{y+1}{y-1} \cdot \frac{(\mu-1)+y(\mu-1)}{-(\mu+1)+y(\mu+1)};$$

но последнее выражение равно

$$\frac{y+1}{y-1} \cdot \frac{(1+\mu)(y-1)-2(y-\mu)}{-(1-\mu)(y+1)+2(y-\mu)},$$

т. е.

$$\frac{1+\mu-\dfrac{2(y-\mu)}{y-1}}{-(1-\mu)+\dfrac{2(y-\mu)}{y+1}},$$

или

$$\frac{1+\mu-h(y+1)}{\mu-1+h(y-1)},$$

что в свою очередь равно

$$\frac{\mu-h+\sqrt{1-2h\mu+h^2}}{-\sqrt{1-2h\mu+h^2}+(\mu-h)}$$

или

$$\frac{[\mu-h+\sqrt{1-2h\mu+h^2}]^2}{\mu^2-1}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2h\mu+h^2}} \ln \sqrt{\frac{y+1}{y-1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-2h\mu+h^2}} \left\{ \frac{1}{2} \ln \sqrt{\frac{\mu+1}{\mu-1}} + \frac{1}{2} \ln \frac{\mu-h+\sqrt{1-2h\mu+h^2}}{\sqrt{\mu^2-1}} \right\}.$$

Из формул (73) и (75) получаем

$$Q_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} \left\{ (\mu^2-1)^n \ln \frac{\mu+1}{\mu-1} \right\} - \ln \sqrt{\frac{\mu+1}{\mu-1}} P_n(\mu). \tag{76}$$

Если μ действительно и заключено между -1 и 1, то эта формула заменяется формулой

$$Q_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} \left\{ (\mu^2-1)^n \ln \frac{1+\mu}{1-\mu} \right\} - \ln \sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}} P_n(\mu).$$

§ 20. СООТНОШЕНИЯ, СВЯЗЫВАЮЩИЕ ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДОВ

45. Комбинируя формулы (70) и (29)

$$nQ_n(\mu) + (n-1) Q_{n-2}(\mu) = (2n-1) \mu Q_{n-1}(\mu),$$

$$nP_n(\mu) + (n-1) P_{n-2}(\mu) = (2n-1) \mu P_{n-1}(\mu),$$

получаем следующие два равенства:

$$n\,[Q_n(\mu)\,P_{n-1}(\mu)-Q_{n-1}(\mu)\,P_n(\mu)]=$$
$$=(n-1)\,[Q_{n-1}(\mu)\,P_{n-2}(\mu)-Q_{n-2}(\mu)\,P_{n-1}(\mu)],$$
$$n\,[Q_n(\mu)\,P_{n-2}(\mu)-Q_{n-2}(\mu)\,P_n(\mu)]=$$
$$=(2n-1)\,\mu\,[Q_{n-1}(\mu)\,P_{n-2}(\mu)-Q_{n-2}(\mu)\,P_{n-1}(\mu)];$$

из первого сразу получается, что

$$n\,[Q_n(\mu)\,P_{n-1}(\mu)-Q_{n-1}(\mu)\,P_n(\mu)]=Q_1(\mu)\,P_0(\mu)-Q_0(\mu)\,P_1(\mu),$$

и так как

$$Q_0(\mu)=\frac{1}{2}\ln\frac{\mu+1}{\mu-1},\quad Q_1(\mu)=\frac{\mu}{2}\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}-1,$$

то

$$P_n(\mu)\,Q_{n-1}(\mu)-P_{n-1}(\mu)\,Q_n(\mu)=\frac{1}{n}. \tag{77}$$

Второе из полученных нами равенств принимает вид

$$P_n(\mu)\,Q_{n-2}(\mu)-P_{n-2}(\mu)\,Q_n(\mu)=\frac{2n-1}{n\,(n-1)}\,\mu. \tag{78}$$

Из равенства (77) получаем

$$\frac{Q_n(\mu)}{P_n(\mu)}-\frac{Q_{n-1}(\mu)}{P_{n-1}(\mu)}=-\frac{1}{nP_n(\mu)\,P_{n-1}(\mu)},$$

откуда, заменяя n на $n-1$, $n-2$, ..., 1 и суммируя получающиеся равенства, имеем

$$\frac{Q_n(\mu)}{P_n(\mu)}=Q_0(\mu)-\left\{\frac{1}{nP_n(\mu)\,P_{n-1}(\mu)}+\frac{1}{(n-1)\,P_{n-1}(\mu)\,P_{n-1}(\mu)}+\ldots+\frac{1}{P_1(\mu)\,P_0(\mu)}\right\}.$$

Отсюда получаем выражение для $W_{n-1}(\mu)$:

$$W_{n-1}(\mu)=P_n(\mu)\left[\frac{1}{nP_n(\mu)\,P_{n-1}(\mu)}+\frac{1}{(n-1)\,P_{n-1}(\mu)\,P_{n-2}(\mu)}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{1}{P_1(\mu)\,P_0(\mu)}\right]. \tag{79}$$

46. Так как и $P_n(\mu)$ и $Q_n(\mu)$ удовлетворяют уравнению Лежандра, то

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\left(P_n(\mu)\frac{dQ_n(\mu)}{d\mu}-Q_n(\mu)\frac{dP_n(\mu)}{d\mu}\right)\right]=0$$

и, следовательно,

$$(1-\mu^2)\left[P_n(\mu)\frac{dQ_n(\mu)}{d\mu}-Q_n(\mu)\frac{dP_n(\mu)}{d\mu}\right]=A,$$

где A не зависит от μ. Это равенство справедливо для любых значений n, но если n будет целым положительным, то, подставляя в полученное выражение

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\mu^n\left\{1+\frac{\alpha}{\mu^2}+\frac{\beta}{\mu^4}+\ldots\right\}$$

вместо $P_n(\mu)$ и

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{3\cdot 5\ldots(2n+1)}\frac{1}{\mu^{n+1}}\left\{1+\frac{\alpha'}{\mu^2}+\frac{\beta'}{\mu^4}+\ldots\right\}$$

вместо $Q_n(\mu)$, получаем

$$A=(-1)\,[-(n+1)-|n|]\,\frac{1}{2n+1},$$

т. е. $A=1$; таким образом, если n — целое положительное число, то

$$(1-\mu^2)\left[P_n(\mu)\frac{dQ_n(\mu)}{d\mu}-Q_n(\mu)\frac{dP_n(\mu)}{d\mu}\right]=1. \tag{80}$$

ПРИМЕРЫ

1. Доказать, что

$$P_n(\cos\theta)=\frac{(-1)^n}{n}\csc^{n+1}\theta\frac{d^n(\sin\theta)}{(d\operatorname{ctg}\theta)^n}.$$

(Math. Tripos, 1893.)

2. Уравнение

$$r=1+\varepsilon[P_1(\cos\theta)+P_3(\cos\theta)+\ldots+P_{2n-1}(\cos\theta)],$$

где ε мало, изображает поверхность вращения, близкую к сферической. Показать, что если величиной ε^2 можно пренебречь, то радиус кривизны меридиана равен

$$1+\varepsilon\sum_{m=0}^{n-1}[n(4m+3)-(m+1)(8m+3)]P_{2m+1}(\cos\theta).$$

(Там же, 1894.)

3. Доказать, что если

$$Y_s=\frac{(2n+1)(2n+3)\ldots(2n+2s-1)}{n(n^2-1)(n^2-2^2)\ldots[n^2-(s-1)^2](n+s)}(\mu^2-1)^s\frac{d^sP_n}{d\mu^s},$$

то

$$Y_2=P_{n+2}-\frac{2(2n+1)}{2n-1}P_n+\frac{2n+3}{2n-1}P_{n-2},$$

$$Y_3=P_{n+3}-\frac{3(2n+3)}{2n-1}P_{n+1}+\frac{3(2n+5)}{2n-3}P_{n-1}-\frac{(2n+3)(2n+5)}{(2n-1)(2n-3)}P_{n-3};$$

найти общую формулу.

(Там же, 1896.)

4. Доказать, что если n целое положительное, то

$$P_n(\mu)=\sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^p(n+p)!}{(n-p)!\,p!\,p!\,2^{p+1}}[(1-\mu)^p+(-1)^n(1+\mu)^p].$$

(Там же, 1898.)

5. Доказать, что

$$\int_{-1}^{1}\mu(1-\mu^2)\frac{dP_n(\mu)}{d\mu}\frac{dP_m(\mu)}{d\mu}d\mu$$

равняется нулю при всех значениях $m-n$, кроме -1 и 1; вычислить указанный интеграл для этих случаев.

(Там же, 1896.)

6. Доказать по индукции или иным способом, что при целом положительном n

$$(2n+1)\int_{\mu}^{1}P_n^2(\mu)\,d\mu=1-\mu P_n^2(\mu)-2\mu[P_1^2(\mu)+P_2^2(\mu)+\ldots+P_{n-1}^2(\mu)]+$$
$$+2[P_1(\mu)P_2(\mu)+P_2(\mu)P_3(\mu)+\ldots+P_{n-1}(\mu)P_n(\mu)].$$

(Там же, 1899.)

7. Доказать, что

$$\mu^2P_n''(\mu)=n(n-1)P_n(\mu)+\sum_{r=1}^{p}(2n-4r+1)[r(2n-2r+1)-2]P_{n-2r}(\mu),$$

где $p=\frac{n}{2}$ или $\frac{n-1}{2}$.

(Там же, 1904.)

8. Доказать равенство

$$\sin^n \theta P_n(\sin\theta) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \cos^r \theta P_r(\cos\theta).$$

(Там же, 1907.

9 [1]) Доказать, что

$$P_n(\cos\theta) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{P_m(\cos\theta)}{n+m+1} \sin(n+m+1)\theta$$

и

$$Q_n(\cos\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{P_m(\cos\theta)}{n+m+1} \cos(n+m+1)\theta,$$

где $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

10 [1]). С помощью формулы (77) доказать, что

$$Q_n(\mu) = P_n(\mu) \sum_{r=n}^{\infty} \frac{1}{(r+1)\,P_r(\mu)\,P_{r+1}(\mu)},$$

где $\mu > 1$.

11. Доказать равенства

$$P_{2n}(\mu) = \frac{\mu}{n!} \frac{d^n}{d(\mu^2)^n} [\mu^{2n-1}(\mu^2-1)^n],$$

$$P_{2n+1}(\mu) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d(\mu^2)^n} [\mu^{2n+1}(\mu^2-1)^n].$$

(Wangerin.)

12. Доказать, что

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^r P_m(\mu)}{d\mu^r} \cdot \frac{d^r P_n(\mu)}{d\mu^r} (1-\mu^2)^r \, d\mu = \begin{cases} \dfrac{2\,(n+r)!}{(2n+1)\,(n-r)!} & \text{при } m=n \\ 0 & \text{при } m \neq n. \end{cases}$$

(Math. Tripos, 1893.)

13. Доказать, что если m четно, а n нечетно, то

$$\int_0^1 P_m(\mu)\,P_n(\mu)\,d\mu = \frac{n\,(-1)^{\frac{n+m-1}{2}}}{(n-m)\,(n+m+1)} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots m} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(n-2)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(n-1)}.$$

(Там же, 1901.)

14. Доказать, что

$$\mu^2 \frac{d^2 P_n}{d\mu^2} = n\,(n-1)\,P_n + \sum_{r=1}^{k} (2n-4r+1)\,[r\,(2n-2r-1)-2]\,P_{n-2r},$$

где $k = \frac{n}{2}$, если n четно, и $k = \frac{n-1}{2}$, если n нечетно.

15. Доказать, что

$$\int_{-1}^{1} (1-\mu^2)^{\frac{3}{2}} \frac{d^2 P_n(\mu)}{d\mu^2} d\mu = -3n\,(n+1) \int_0^{\pi} \sin^2\theta P_n(\cos\theta)\,d\theta.$$

[1]) См. Baer, Die Kugelfunktion als Lösung einer Differentialgleichung, Kiel, 1898.

16. Если $\varphi(\mu)$ имеет скачки $c_1, c_2, \ldots, c_r$ в точках $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ соответственно и если

$$\varphi(\mu) = A_0P_0(\mu) + A_1P_1(\mu) + A_2P_2(\mu) + \ldots,$$

то

$$\frac{d\varphi}{d\mu} = B_0P_0(\mu) + B_1P_1(\mu) + B_2P_2(\mu) + \ldots,$$

где

$$B_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\left[\varphi(1)P_n(1) - \varphi(-1)P_n(-1) - \sum_s c_sP_n(\mu_s)\right] - (2n-1)A_{n-1} - \\ -(2n-5)A_{n-3} - (2n-9)A_{n-5}.$$

Аналогично,

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{d\varphi}{d\mu}\right] = E_0P_0(\mu) + E_1P_1(\mu) + \ldots,$$

где

$$E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\left[\sum_s (1-\mu_s^2)c_s'P_n(\mu_s) - \sum_s (1-\mu_s^2)c_sP_n'(\mu_s)\right] - n(n+1)A_n$$

и c_s' — скачки функции $\frac{d\varphi}{d\mu}$ в точках μ_s. Показать, что, отбросив члены, содержащие c, c', мы получили бы бесконечное значение и разрыв в каждой из точек $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$.

17. Вычислить интегралы $\int_0^1 P_m(\mu)P_n(\mu)\,d\mu$ и $\int_0^1 P_n^2(\mu)\,d\mu$ и показать, что если m четно, а n нечетно, то первый из них равен

$$\frac{n(-1)^{\frac{n+m-1}{2}}}{(n-m)(n+m+1)}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(m-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots m}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(n-2)}{2\cdot4\cdot6\ldots(n-1)}.$$

(Там же, 1900.)

§ 21. РАЗЛОЖЕНИЕ $\frac{1}{2}\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}$ В НЕПРЕРЫВНУЮ ДРОБЬ

47. Рассмотрим непрерывную дробь вида

$$\cfrac{1}{\mu - \cfrac{a_1}{\mu - \cfrac{a_2}{\mu - \ldots}}},$$

где $a_1, a_2, \ldots$ — фиксированные числа. Предположим, что μ действительно и больше единицы. Если $\frac{p_n}{q_n}$ означает n-ю подходящую дробь данной непрерывной дроби, то

$$p_n = \mu p_{n-1} - a_{n-1}p_{n-2}$$

и

$$q_n = \mu q_{n-1} - a_{n-1}q_{n-2}.$$

Первые три подходящие дроби имеют вид

$$\frac{1}{\mu},\quad \frac{\mu}{\mu^2-a_1},\quad \frac{\mu^2-a_2}{\mu^3-(a_1+a_2)\mu}.$$

Воспользуемся равенствами

$$nP_n(\mu) - (2n-1)\mu P_{n-1}(\mu) + (n-1)P_{n-2}(\mu) = 0,$$
$$nQ_n(\mu) - (2n-1)\mu Q_{n-1}(\mu) + (n-1)Q_{n-2}(\mu) = 0.$$

Умножив первое из них на $\frac{1}{2}\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}$ и вычтя из него второе, получим, согласно (52),

$$nP_n(\mu)-(2n-1)\mu P_{n-1}(\mu)+(n-1)P_{n-2}(\mu)=0,$$
$$nW_{n-1}(\mu)-(2n-1)\mu W_{n-2}(\mu)+(n-1)W_{n-3}(\mu)=0.$$

Пусть

$$\frac{n!}{1\cdot 3\ldots(2n-1)}P_n(\mu)=N_n(\mu),\qquad \frac{n!}{1\cdot 3\ldots(2n-1)}W_{n-1}(\mu)=Z_n(\mu);$$

тогда

$$N_n(\mu)=\mu N_{n-1}(\mu)-a_{n-1}N_{n-2}(\mu),$$
$$Z_n(\mu)=\mu Z_{n-1}(\mu)-a_{n-1}Z_{n-2}(\mu),$$

где $a_n=\frac{n^2}{4n^2-1}$; таким образом, $N_n(\mu)$ и $Z_n(\mu)$ удовлетворяют тем же самым уравнениям, что числители и знаменатели подходящих дробей непрерывной дроби

$$\cfrac{1}{\mu-\cfrac{a_1}{\mu-\cfrac{a_2}{\mu-\ldots\cfrac{\ldots}{\mu-\cfrac{a_{n-1}}{\mu-\ldots}}}}},$$

в которой $a_n=\frac{n^2}{4n^2-1}$. Непосредственное вычисление показывает, что

$$Z_1(\mu)=1,\quad Z_2(\mu)=\mu,\quad Z_3(\mu)=\frac{2}{5}\left[5P_2(\mu)+\frac{1}{6}\right]=\mu^2-\frac{4}{15},$$
$$N_1(\mu)=\mu,\quad N_2(\mu)=\mu^2-\frac{1}{3},\quad N_3(\mu)=\mu^3-\frac{3\mu}{5}.$$

Следовательно, три дроби

$$\frac{Z_1(\mu)}{N_1(\mu)},\qquad \frac{Z_2(\mu)}{N_2(\mu)},\qquad \frac{Z_3(\mu)}{N_3(\mu)}$$

совпадают с тремя первыми подходящими дробями рассматриваемой непрерывной дроби. Но тогда $\frac{Z_n(\mu)}{N_n(\mu)}$ должно совпадать с ее n-й подходящей дробью.

Мы имеем

$$\frac{Z_n(\mu)}{N_n(\mu)}=\frac{W_{n-1}(\mu)}{P_n(\mu)}=\frac{1}{2}\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}-\frac{Q_n(\mu)}{P_n(\mu)}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Q_n(\mu)}{P_n(\mu)}=0,$$

так как $\lim\limits_{n\to\infty}Q_n(\mu)=0$, когда μ действительно и больше единицы.

Таким образом мы доказали, что *непрерывная дробь*

$$\cfrac{1}{\mu-\cfrac{a_1}{\mu-\cfrac{a_2}{\mu-\ldots}}},$$

где $a_n=\frac{n^2}{4n^2-1}$, *сходится к* $\frac{1}{2}\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}$ *при* $\mu>1$.

Тот факт, что данная непрерывная дробь связана с функциями Лежандра, был открыт по существу Гауссом[1]), который получил этот результат, преобразуя ряд

$$\frac{1}{\mu} F\left(\frac{1}{2},\ 1;\ \frac{3}{2};\ \frac{1}{\mu^2}\right),$$

представляющий функцию $\frac{1}{2}\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}$. В явном виде отождествление знаменателей подходящих дробей с многочленами Лежандра было сделано Якоби[2]).

§ 22. ПРИБЛИЖЕННЫЕ КВАДРАТУРЫ

48. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция от x в интервале $(-1, 1)$. Под приближенной квадратурой мы будем понимать приближенное вычисление интеграла

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx.$$

Различные методы решения этой задачи основаны на замене функции $f(x)$ другой функцией $\varphi(x)$, для которой интеграл $\int_{-1}^{1} \varphi(x)\,dx$ может быть легко вычислен и мало отличается от интеграла $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$. Мы изложим здесь один из этих методов, основанный на использовании многочленов Лежандра. Этот метод был предложен Гауссом[3]).

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — точки в интервале $(-1, 1)$ и пусть

$$F(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n).$$

Функция

$$\varphi(x) = F(x)\left[\frac{f(a_1)}{(x-a_1)F'(a_1)} + \frac{f(a_2)}{(x-a_2)F'(a_2)} + \ldots + \frac{f(a_n)}{(x-a_n)F'(a_n)}\right]$$

представляет собой многочлен степени $n-1$, принимающей в точках a_1, $a_2, \ldots, a_n$ значения $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)$ соответственно. Если мы положим

$$A_r = \frac{1}{F'(a_r)}\int_{-1}^{1}\frac{F(x)\,dx}{x-a_r},$$

то получим

$$\int_{-1}^{1}\varphi(x)\,dx = A_1 f(a_1) + A_2 f(a_2) + \ldots + A_n f(a_n).$$

Величины $A_1, A_2, \ldots, A_n$ не зависят от выбора функции $f(x)$ и могут быть вычислены раз и навсегда, если только точки $a_1, a_2, \ldots, a_n$ считать фиксированными. В более ранних способах Ньютона и Котеса в качестве чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ брались члены арифметической прогрессии и затем $\int_{-1}^{1}\varphi(x)\,dx$ принималось за приближенное значение интеграла $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

---

[1]) См. Heine, Kugelfunktionen, т. I, стр. 270 и след.

[2]) Journ. f. reine u. angew. Math., 2 (1827), 226.

[3]) Methodus nova integralium valores per approx. inveniendi. Gött. Comm., 3 (1814), или Werke, т. III, стр. 163.

Однако Гаусс показал, что более выгодно брать за $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не члены арифметической прогрессии, а нули функции $P_n(x)$, т. е. n-го многочлена Лежандра.

Замена интеграла $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx$ интегралом $\int\limits_{-1}^{1} \varphi(x)\,dx$ влечет за собой ошибку, равную

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx - \sum_{r=1}^{n} A_r f(a_r).$$

Если $f(x)$ — многочлен степени $\leqslant n-1$, то эта ошибка равна нулю, и, следовательно, формула $\sum\limits_{r=1}^{n} A_r f(a_r)$ дает точное значение рассматриваемого интеграла. Однако Гаусс показал, что если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — нули многочлена $P_n(x)$, то $\sum\limits_{r=1}^{n} A_r f(a_r)$ дает точное значение интеграла $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx$ для всякой $f(x)$, представляющей собой многочлен степени не выше $2n-1$. Функция $f(x)-\varphi(x)$ делится на $F(x)$; полагая

$$\frac{f(x)-\varphi(x)}{F(x)} = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-1}x^{n-1},$$

получаем, что

$$f(x) = \varphi(x) + F(x)(c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-1}x^{n-1}).$$

Для того чтобы разность

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx - \int\limits_{-1}^{1} \varphi(x)\,dx$$

обращалась в нуль при любых значениях $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$, необходимо и достаточно, чтобы каждый из интегралов

$$\int\limits_{-1}^{1} x^r F(x)\,dx \qquad (r = 0, 1, \ldots, n-1)$$

был равен нулю. В п. 21 было доказано, что для этого в свою очередь необходимо и достаточно, чтобы $F(x)$ было кратным $P_n(x)$. Так как коэффициент при x^n в $F(x)$ равен 1, то отсюда следует, что

$$F(x) = \frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)} P_n(x).$$

Если за $a_1, a_2, \ldots, a_n$ приняты нули многочлена $P_n(x)$, то $a_r = -a_{n-r+1}$; в случае нечетного n одно из этих чисел равно нулю. Таким образом

$$F(-x) = (-1)^n F(x), \qquad F'(-x) = (-1)^{n-1} F'(x),$$

следовательно,

$$F'(a_{n-r+1}) = (-1)^{n-1} F'(a_r).$$

Отсюда получаем

$$A_{n-r+1} = (-1)^{n-1} \frac{1}{F'(a_r)} \int\limits_{-1}^{1} \frac{F(x)}{x+a_r}\,dx = \frac{1}{F'(a_r)} \int\limits_{-1}^{1} \frac{F(x)}{x-a_r}\,dx = A_r.$$

Итак, мы доказали, что *если $f(x)$ — многочлен степени $\leqslant 2n-1$, то*

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{r=1}^{n} A_r f(a_r),$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — нули многочлена $P_n(x)$ и

$$A_r = \frac{1}{P_n'(a_r)} \int_{-1}^{1} \frac{P_n(x)}{x-a_r}\,dx;$$

при этом $A_r = A_{n-r+1}$.

Положив $f(x) \equiv 1$, получаем, что

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = 1,$$

и это равенство справедливо всегда, так как A_r не зависят от выбора функции $f(x)$.

49. Предположим, что $f(x)$ можно представить в виде суммы ряда

$$c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots,$$

сходящегося на отрезке

$$-1 \leqslant x \leqslant 1,$$

откуда следует[1]), что он сходится равномерно в интервале $(-1, 1)$, и пусть Dx^r означает величину

$$\int_{-1}^{1} x^r dx - A_1 a_1^r - A_2 a_2^r - \ldots - A_n a_n^r,$$

представляющую собой ту ошибку, которую мы делаем, заменяя интеграл $\int_{-1}^{1} x^r dx$ соответствующим интегралом от интерполирующей функции.

Если r нечетно, то эта ошибка обращается в нуль, так как

$$\int_{-1}^{1} x^r dx = 0, \quad A_1 = A_n, \quad a_1^r = -a_n^r, \quad A_2 = A_{n-1} \quad a_2^r = -a_{n-1}^r, \ldots$$

Если r четно, то

$$\frac{1}{2} Dx^r = \frac{1}{r+1} - A_1 a_1^r - A_2 a_2^r - \ldots - A_\nu a_\nu^r,$$

где ν равно целому из двух чисел $\frac{n}{2}$ и $\frac{n-1}{2}$.

Рассмотрим ряд $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{Dx^r}{z^{r+1}}$, производящей функцией для которого служит

$$\ln\frac{z+1}{z-1} - z \sum_{m=1}^{n} \frac{A_m}{z^2 - a_m^2},$$

т. е.

$$\ln\frac{z+1}{z-1} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{P'(a_m)} \frac{1}{z-a_m} \int_{-1}^{1} \frac{P_n(x)}{x-a_m}\,dx - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{P'(a_m)} \frac{1}{z+a_m} \int_{-1}^{1} \frac{P_n(x)}{x-a_m}\,dx.$$

[1]) Hobson, Functions of a real variable т. II, 1926, стр. 174. [См. также В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. I, М.—Л., 1952, гл. IV, § 3. (*Прим. ред.*)]

Так как $a_m = a_{n-m+1}$, то это последнее выражение равно

$$\ln\frac{z+1}{z-1} - \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{P'(a_m)}\frac{1}{z-a_m}\int_{-1}^{1}\frac{P_n(x)}{x-a_m}\,dx.$$

Положим

$$u(z) = \int_{-1}^{1}\frac{P_n(x)-P_n(z)}{x-z}\,dx,$$

тогда $u(z)$ — многочлен степени $n-1$. Так как $P_n(a_m)=0$, то

$$u(a_m) = \int_{-1}^{1}\frac{P_n(x)}{x-a_m}\,dx.$$

В соответствии с п. 48 имеем

$$u(z) = P_n(z)\sum_{m=1}^{n}\frac{u(a_m)}{P'_n(a_m)(z-a_m)}$$

и, следовательно,

$$\frac{u(z)}{P_n(z)} = \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{P'_n(a_m)}\frac{1}{z-a_m}\int_{-1}^{1}\frac{P_n(x)}{x-a_m}\,dx.$$

Таким образом, производящая функция ряда $\sum_{r=0}^{\infty}\frac{Dx^r}{z^{r+1}}$ равна

$$\ln\frac{z+1}{z-1} - \frac{u(z)}{P_n(z)}.$$

Но

$$u(z) = \int_{-1}^{1}\frac{P_n(x)}{x-z}\,dx + P_n(z)\ln\frac{z+1}{z-1},$$

следовательно, эта производящая функция равна $\frac{1}{P_n(z)}\int_{-1}^{1}\frac{P_n(x)}{z-x}\,dx$, т. е., согласно (63),

$$\frac{2Q_n(z)}{P_n(z)}.$$

Итак, мы пришли к следующему результату:

Ряд $\sum_{r=0}^{\infty}\frac{Dx^r}{z^{r+1}}$ *имеет своей производящей функцией* $2\frac{Q_n(z)}{P_n(z)}$, *т. е.*

$$\ln\frac{z+1}{z-1} - 2\frac{W_{n-1}(z)}{P_n(z)},$$

где

$$W_{n-1}(z) = \frac{2n-1}{1\cdot n}P_{n-1}(z) + \frac{2n-5}{3(n-1)}P_{n-3}(z) + \dots$$

Мы знаем, что разложение $\frac{Q_n(z)}{P_n(z)}$ по степеням $\frac{1}{z}$ начинается со степени $\frac{1}{z^{2n+1}}$; это находится в соответствии с тем фактом, что $Dx^r = 0$ при $r < 2n$, а также при любом нечетном r.

Если $f(x)$ представляет собой сумму сходящегося ряда $c_0 + c_1x + \dots$, то ошибка, которая получается при вычислении интеграла $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

по методу Гаусса, равна

$$c_{2n} D x^{2n} + c_{2n+2} D x^{2n+2} + \ldots$$

50. Беря в разложении $Q_n(z)$ по степеням $\frac{1}{z}$ первый член и учитывая значения коэффициентов при z^n и z^{n-2} в $P_n(z)$, легко получить, что $D x^{2n}$ приближенно равняется

$$\frac{2}{2n+1}\left\{\frac{n!}{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}\right\}^2.$$

Для определения значений $A_1, A_2, \ldots, A_n$ можно воспользоваться разложением $\ln\frac{z+1}{z-1}$ в непрерывную дробь.

Ниже приводится таблица вычисленных Гауссом для $n = 1, 2, 3, \ldots, 7$ значений нулей многочленов $P_n(x)$ и величин $A_1, A_2, \ldots$ Сам вид этой таблицы мы заимствуем у Гейне[1]); вместо фигурирующего у Гаусса интервала $(0,1)$ рассматривается интервал $(-1, 1)$.

$n = 1 \qquad a_1 = 0 \quad \frac{1}{2}A_1 = 1, \quad Dx^2 = \frac{2}{3}.$

$n = 2 \qquad a_1 = -a_2 = 0{,}5773502691896258,$

$$\frac{1}{2}A_1 = \frac{1}{2}A_2 = \frac{1}{2}, \qquad Dx^4 = \frac{8}{45}.$$

$n = 3 \qquad a_1 = -a_3 = 0{,}7745966692414834, \quad a_2 = 0,$

$$\frac{1}{2}A_1 = \frac{1}{2}A_3 = \frac{5}{18}, \quad \frac{1}{2}A_2 = \frac{4}{9}, \quad D x^6 = \frac{8}{175}.$$

$n = 4 \qquad a_1 = -a_4 = 0{,}8611363115940492,$

$a_2 = -a_3 = 0{,}3399810435848646,$

$\frac{1}{2}A_1 = \frac{1}{2}A_4 = 0{,}1739274225687284, \quad \lg = 9{,}2403680612,$

$\frac{1}{2}A_2 = \frac{1}{2}A_3 = 0{,}3260725774312716, \quad \lg = 9{,}5133142764,$

$$D x^8 = \frac{128}{11025}.$$

$n = 5 \qquad a_1 = -a_5 = 0{,}9061798459386640,$

$a_2 = -a_4 = 0{,}5384693101056830, \quad a_3 = 0,$

$\frac{1}{2}A_1 = \frac{1}{2}A_5 = 0{,}1184634425280945, \quad \lg = 9{,}0735843490,$

$\frac{1}{2}A_2 = \frac{1}{2}A_4 = 0{,}2393143352496832, \quad \lg = 9{,}3789687142,$

$\frac{1}{2}A_3 = \frac{64}{225} \quad = 0{,}2844444444444444, \quad \lg = 9{,}4539974559,$

$$D x^{10} = \frac{128}{43659}.$$

$n = 6 \qquad a_1 = -a_6 = 0{,}9324695142031520,$

$a_2 = -a_5 = 0{,}6612093864662644,$

$a_3 = -a_4 = 0{,}2386191860831970,$

$\frac{1}{2}A_1 = \frac{1}{2}A_6 = 0{,}0856622461895852, \quad \lg = 8{,}9327894580,$

[1]) Kugelfunktionen, т. II, 1881, стр. 15.

$$\frac{1}{2}A_2=\frac{1}{2}A_5=0{,}1803807865240693, \quad \lg=9{,}2561902763,$$

$$\frac{1}{2}A_3=\frac{1}{2}A_4=0{,}2339569672863455, \quad \lg=9{,}3691359831,$$

$$Dx^{12}=\frac{512}{693693}.$$

$n=7$

$$a_1=-a_7=0{,}9491079123427596,$$

$$a_2=-a_6=0{,}7415311855993944,$$

$$a_3=-a_5=0{,}4058451513773970, \quad a_4=0,$$

$$\frac{1}{2}A_1=\frac{1}{2}A_7=0{,}0647424830844348, \quad \lg=8{,}8111893529$$

$$\frac{1}{2}A_2=\frac{1}{2}A_6=0{,}1398526957446384, \quad \lg=9{,}1456708421,$$

$$\frac{1}{2}A_3=\frac{1}{2}A_5=0{,}1909150252525595, \quad \lg=9{,}2808401093,$$

$$\frac{1}{2}A_4=\frac{256}{1225}=0{,}2089795918367347 \quad \lg=9{,}3201038766,$$

$$Dx^{14}=\frac{512}{2760615}.$$

51. Рассмотрим выражение

$$f(x)-F(x)\sum_{r=0}^{n}\frac{f(a_r)}{(x-a_r)F'(a_r)},$$

где $f(x)$ — некоторая заданная функция, представляющая собой сумму степенного ряда, сходящегося при всех x, таких, что $|x|<1+\eta$ (η — некоторое положительное число), а $F(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$ — многочлен, пропорциональный $P_n(x)$; величины $a_1, a_2, \ldots, a_n$, следовательно, зависят только от n. Мы покажем, что при $n\to\infty$ написанная выше разность стремится к нулю.

По теореме Коши эта разность равна

$$\frac{F(x)}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{(z-x)F(z)}\,dz, \tag{81}$$

где интеграл берется по некоторой окружности с центром в точке $z=0$ и радиусом $R>1$, так что точки $x, a_1, a_2, \ldots, a_n$ лежат внутри данного контура. Эту окружность можно выбрать так, чтобы внутри нее функция $f(z)$ была голоморфна.

Выражение (81) равно

$$\frac{P_n(x)}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{(z-x)P_n(z)}\,dz,$$

и его модуль не превосходит

$$\frac{|P_n(x)|}{2\pi}\int\left|\frac{f(z)}{z-x}\right|\frac{|dz|}{|P_n(z)|}. \tag{82}$$

Так как на рассматриваемой окружности $|f(z)|$ ограничен, а $|z-x|$ для всех x из интервала $(-1, 1)$ не меньше, чем некоторая положительная величина, и так как $|P_n(x)|\leqslant 1$, то выражение (82) не превосходит

$$K\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi}{|P_n(z)|},$$

где $z=Re^{i\varphi}$ и $K=\text{const}$.

Мы имеем

$$P_n(z)=\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}(z^2-a_1^2)(z^2-a_2^2)\ldots(z^2-a_m^2)\,[z],$$

где множитель z входит только при нечетном n и $m=\frac{n}{2}$ или $m=\frac{n-1}{2}$ соответственно при четном или нечетном n; далее,

$$|z^2-a^2|=(R^4+a^4-2a^2R^2\cos 2\varphi)^{\frac{1}{2}},$$

и эта величина достигает минимума при $\cos 2\varphi=1$, т. е. при $\varphi=0$.

Таким образом $|P_n(z)|\geqslant P_n(R)$, т. е.

$$\frac{1}{|P_n(z)|}\leqslant\frac{1}{P_n(R)},$$

и, следовательно, выражение (82) не превосходит некоторой фиксированной постоянной, умноженной на $\frac{1}{P_n(R)}$.

Так как $1-a^2<1-\frac{a^2}{R^2}$, где $R>1$, то

$$\frac{P_n(1)}{P_n(R)}=\frac{(1-a_1^2)(1-a_2^2)\ldots(1-a_m^2)}{(R^2-a_1^2)(R^2-a_2^2)\ldots(R^2-a_m^2)\,[R]}=\frac{1}{R^n}\,\frac{(1-a_1^2)(1-a_2^2)\ldots(1-a_m^2)}{\left(1-\frac{a_1^2}{R^2}\right)\left(1-\frac{a_2^2}{R^2}\right)\ldots\left(1-\frac{a_m^2}{R^2}\right)}.$$

Итак, мы доказали, что рассматриваемое выражение (82) меньше, чем некоторая постоянная, умноженная на R^{-n}, и, следовательно, при $n\to\infty$ оно стремится к нулю равномерно для всех x из интервала $(-1, 1)$. Таким образом нами доказана следующая теорема, представляющая собой теоретическое обоснование излагаемого приближенного метода квадратур:

Если $f(x)$ может быть разложена в степенной ряд, сходящийся для всех x, по модулю меньших, чем некоторое число, большее единицы, то величина

$$A_1 f(a_1)+A_2 f(a_2)+\ldots+A_n f(a_n),$$

где

$$A_r=\frac{1}{P_n'(a_r)}\int_{-1}^{1}\frac{P_n(x)}{x-a_r}\,dx$$

и $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — нули многочлена $P_n(x)$, стремится к значению интеграла $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$, когда $n\to\infty$.

§ 23. ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ МНОГОЧЛЕНОВ ЛЕЖАНДРА

52. Метод составления дифференциального уравнения, которому удовлетворяет произведение $P_p(\mu)\,P_q(\mu)$ двух многочленов Лежандра степеней p и q соответственно, был дан Ф. Нейманом[1]).

Пусть u и v — решения дифференциальных уравнений

$$\frac{d(fu')}{d\mu}+Au=0,\qquad \frac{d(fv')}{d\mu}+Bv=0,$$

[1]) Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen, ч. 2, Leipzig, 1878, стр. 91. Метод составления дифференциального уравнения, которому удовлетворяет произведение решений двух данных линейных дифференциальных уравнений, был дан Клаузеном [Journ. f. reine u. angew. Math., 3 (1828), 89].

где $f=1-\mu^2$, $A=p(p+1)$ и $B=q(q+1)$; таким образом, эти два уравнения представляют собой уравнения Лежандра порядков p и q соответственно. Пусть $y=uv$; тогда

$$fy'=u\cdot fv'+v\cdot fu'$$

или

$$\frac{d(fy')}{d\mu}=-(A+B)\,y+2z, \qquad (\alpha)$$

где $z=fu'v'$. Далее, так как $fz=fu'\cdot fv'$, то

$$\frac{d(fz)}{d\mu}=-fu'\cdot Bv-fv'\cdot Au,$$

откуда, дифференцируя еще раз, получаем

$$\frac{d^2(fz)}{d\mu^2}=2ABy-(A+B)\,z. \qquad (\beta)$$

Исключая z из уравнений (α) и (β), имеем

$$\frac{d^2}{d\mu^2}\left[f\frac{d(fy')}{d\mu}\right]+(A+B)\frac{d(2fy'+f'y)}{d\mu}+(A-B)^2y=0. \qquad (\gamma)$$

Это последнее уравнение можно переписать следующим образом:

$$\frac{d^2}{d\mu^2}\left[f\frac{d(fy')}{d\mu}\right]+2(A+B)\frac{d(fy'-\mu y)}{d\mu}+(A-B)^2y=0. \qquad (\gamma')$$

Записав первое слагаемое в (γ') в виде

$$\frac{d}{d\mu}\left[f\frac{d^2(fy')}{d\mu^2}\right]-2\frac{d(fy')}{d\mu}-2\mu\frac{d^2(fy')}{d\mu^2},$$

мы получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d}{d\mu}\left[f\frac{d^2(fy')}{d\mu^2}\right]+2(K-1)\frac{d(fy')}{d\mu}+Hy=2\mu\left\{Ky'+\frac{d^2(fy')}{d\mu^2}\right\}=0, \qquad (\delta)$$

где

$$f=1-\mu^2,$$
$$K=A+B=p(p+1)+q(q+1),$$
$$H=(A-B)^2-2(A+B)=[p(p+1)-q(q+1)]^2-2[p(p+1)+q(q+1)].$$

Общее решение этого уравнения четвертого порядка имеет вид

$$y=C_1P_p(\mu)P_q(\mu)+C_2Q_p(\mu)Q_q(\mu)+C_3P_p(\mu)Q_q(\mu)+C_4Q_p(\mu)P_q(\mu).$$

В случае $p=q$ уравнение (α) превращается в $\frac{d}{d\mu}(fy')=-2Ay+2z$, а уравнение ($\beta$) превращается в $\frac{d(fz)}{d\mu}=-Afy'$; таким образом, исключая z, получаем для этого случая уравнение третьего порядка

$$\frac{d}{d\mu}\left[f\frac{d(fy')}{d\mu}\right]+4A(fy'-\mu y)=0, \qquad (\delta')$$

общее решение которого имеет вид

$$y=C_1P_p^2(\mu)+C_2Q_p^2(\mu)+C_3P_p(\mu)Q_p(\mu).$$

Легко видеть, что $z=fu'v'$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{d\mu}\left[f\frac{d^3(fz)}{d\mu^3}\right]+(A+B)\left[\frac{d(fz')}{d\mu}+\frac{d^2(fz)}{d\mu^2}\right]+(A-B)^2z=0.$$

Это уравнение получается исключением y из (α) и (β). Его общее решение имеет вид

$$(1-\mu^2)\left[C_1\frac{dP_p(\mu)}{d\mu}\frac{dP_q(\mu)}{d\mu}+C_2\frac{dQ_p(\mu)}{d\mu}\frac{dQ_q(\mu)}{d\mu}+\right.$$
$$\left.+C_3\frac{dP_p(\mu)}{d\mu}\frac{dQ_q(\mu)}{d\mu}+C_4\frac{dQ_p(\mu)}{d\mu}\frac{dP_q(\mu)}{d\mu}\right].$$

53. При целых положительных p и q уравнение (δ) было использовано Ф. Нейманом[1]) для того, чтобы представить каждое из произведений $P_p(\mu)P_q(\mu)$, $Q_p(\mu)Q_q(\mu)$, $P_p(\mu)Q_q(\mu)$, $Q_p(\mu)P_q(\mu)$ в виде суммы функций P и Q; он представил эти результаты в виде таблиц.

Мы ограничимся здесь наиболее важным случаем, а именно произведением $P_n(\mu)P_q(\mu)$; так как оно представляет собой многочлен от μ степени $p+q$, содержащий только степени с показателями $p+q$, $p+q-2$, $p+q-4$, ... то его можно, очевидно, записать в виде суммы

$$a_{p+q}P_{p+q}(\mu)+a_{p+q-2}P_{p+q-2}+\ \ldots\ +a_{p+q-2s}P_{p+q-2s}(\mu)+\ \ldots,$$

последний член которой содержит $P_0(\mu)$ или $P_1(\mu)$, в зависимости от того, является $p+q$ четным или нечетным. Если подставить это выражение в дифференциальное уравнение (δ) и вспомнить, что

$$\frac{d(fP_r')}{d\mu}=-r(r+1)P_r,\quad \frac{d}{d\mu}\left[f\frac{d^2(fP_r')}{d\mu^2}\right]=r^2(r+1)^2P_r,$$
$$\frac{d^2(fP_r')}{d\mu^2}=-r(r+1)P_r',$$

то получим

$$\sum_r N_ra_rP_r+2\mu\sum_r L_ra_rP_r'=0,$$

где r принимает значения $p+q$, $p+q-2$, ..., $p+q-2s$, ...

$$N_r=r^2(r+1)^2-2(K-1)r(r+1)+H$$

и

$$L_r=r(r+1)-K.$$

Так как

$$\mu P_r'=rP_r+P_{r-1}',$$

то

$$\sum_r(N_ra_r+2L_ra_rr)P_r+2\sum_r L_ra_rP_{r-1}'=0,$$

а так как

$$P_{r-1}'=(2r-3)P_{r-2}+(2r-7)P_{r-4}+(2r-11)P_{r-6}+\ \ldots,$$

то отсюда следует, что

$$[N_{p+q}+2(p+q)L_{p+q}]a_{p+q}P_{p+q}+\ \ldots\ +$$
$$+[N_{p+q-2s}+2(p+q-2s)L_{p+q-2s}]a_{p+q-2s}P_{p+q-2s}+\ \ldots\ +$$
$$+2a_{p+q}L_{p+q}[(2p+2q-3)P_{p+q-2}+(2p+2q-7)P_{p+q-4}+\ \ldots]+$$
$$+2a_{p+q-2}L_{p+q-2}[(2p+2q-7)P_{p+q-4}+(2p+2q-11)P_{p+q-6}+\ \ldots]+$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+2a_{p+q-2s}L_{p+q-2s}[(2p+2q-4s-3)P_{p+q-2s-2}+\ \ldots]+\ \ldots$$

[1]) См. предыдущую сноску.

Приравнивая нулю коэффициенты при P_{p+q}, P_{p+q-2}, ..., получаем

$$N_{p+q}+2(p+q)L_{p+q}=0,$$

$$[N_{p+q-2}+2(p+q-2)L_{p+q-2}]\,a_{p+q-2}+2a_{p+q}L_{p+q}(2p+2q-3)=0,$$

$$[N_{p+q-4}+2(p+q-4)L_{p+q-4}]\,a_{p+q-4}+ \\ +2(a_{p+q}L_{p+q}+a_{p+q-2}L_{p+q-2})(2p+2q-7)=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$[N_{p+q-2s}+2(p+q-2s)L_{p+q-2s}]\,a_{p+q-2s}+2(a_{p+q}L_{p+q}+a_{p+q-2}L_{p+q-2}+\ldots+ \\ +a_{p+q-2s+2}L_{p+q-2s+2})(2p+2q-4s+1)=0.$$

Положим

$$\alpha_{2s}=\frac{N_{p+q-2s}+2L_{p+q-2s}(p+q-2s)}{2p+2q-4s+1},$$

тогда получаем

$$\alpha_{2s}a_{p+q-2s}+2(a_{p+q}L_{p+q}+a_{p+q-2}L_{p+q-2}+\ \ldots\ +a_{p+q-2s+2}L_{p+q-2s+2})=0,$$

откуда следует, что

$$\alpha_{2s}a_{p+q-2s}-\alpha_{2s-2}\,a_{p+q-2s+2}+2\,a_{p+q-2s+2}L_{p+q-2s+2}=0$$

или

$$\alpha_{2s}a_{p+q-2s}=\beta_{2s-2}\,a_{p+q-2s+2},$$

где

$$\beta_{2s}=\alpha_{2s}-2L_{p+q-2s}=\frac{N_{p+q-2s}-2L_{p+q-2s}(p+q-2s+1)}{2p+2q-4s+1}.$$

Учитывая написанные выше выражения для N_r и L_r, получаем, что

$$N_r+2rL_r=(r-p-q)(r+p+q+2)(r-p+q+1)(r+p-q+1),$$

$$N_r-2(r+1)L_r=(r-p-q-1)(r+p+q+1)(r-p+q)(r+p-q).$$

Таким образом,

$$\alpha_{2s}=\frac{-2s(2p+2q-2s+2)(2q-2s+1)(2p-2s+1)}{2p+2q-4s+1},$$

$$\beta_{2s}=\frac{(-2s-1)(2p+2q-2s+1)(2q-2s)(2p-2s)}{2p+2q-4s+1}.$$

Если мы в равенстве

$$P_p(\mu)\,P_q(\mu)=\sum_s a_{p+q-2s}P_{p+q+2s}(\mu)$$

приравняем коэффициенты при μ^{p+q} справа и слева, то получим

$$a_{p+q}=\frac{[(p+q)!]^2(2p)!\,(2q)!}{(2p+2q)!\,[p!q!]^2}.$$

Искомая формула имеет вид

$$P_p(\mu)\,P_q(\mu)=a_{p+q}\Big[P_{p+q}+\frac{\beta_0}{\alpha_0}P_{p+q-2}+ \\ +\frac{\beta_0\beta_2}{\alpha_2\alpha_4}P_{p+q-4}+\ \ldots\ +\frac{\beta_0\beta_2\ \ldots\ \beta_{2s-2}}{\alpha_2\alpha_4\ \ldots\ \alpha_{2s}}P_{p+q-2s}+\ldots\Big], \quad (83)$$

где α_{2s}, β_{2s}, a_{p+q} **имеют указанные выше значения. Заметим, что** $\beta_{2s}=0$, когда s равно меньшему из двух чисел p и q. Если $p>q$, то последнее слагаемое в формуле (83) содержит P_{p-q}.

Воспользуемся полученной формулой для вычисления интеграла

$$\int_{-1}^{1} P_p(\mu) P_q(\mu) P_r(\mu)\, d\mu.$$

Из формулы (37) п. 21 вытекает, что этот интеграл равен нулю, если сумма каких-либо двух из чисел p, q, r меньше, чем третье. Предположим, что $p+q \geqslant r$, $p \geqslant q$ и $p+q+r$ четно.

Тогда, применяя формулу (39) п.22, получаем равенство

$$\int_{-1}^{1} P_p P_q P_r d\mu = \frac{2}{2r+1} \frac{[(p+q)!]^2 (2p)!\,(2q)!}{(2p+2q)!\,[p!\,q!]^2} \frac{\beta_0\beta_2 \ldots \beta_{p+q-r-2}}{\alpha_2\alpha_4 \ldots \alpha_{p+q-r}},$$

которое может быть приведено к виду

$$\int_{-1}^{1} P_p P_q P_r d\mu = \frac{2}{p+q+r+1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \ldots (p+q-r-1)}{2 \cdot 4 \ldots (p+q-r)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \ldots (p+r-q-1)}{2 \cdot 4 \ldots (p+r-q)} \times$$
$$\times \frac{1 \cdot 3 \ldots (r+q-p-1)}{2 \cdot 4 \ldots (r+q-p)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \ldots (p+q+r)}{1 \cdot 3 \ldots (p+q+r-1)}.$$

Это равенство было дано без доказательства Феррерсом [1]; его доказательство было опубликовано Адамсом [2].

ПРИМЕРЫ

1. Доказать, что если x действительно и заключено между -1 и 1, $T_0(x)=1$, $T_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n \arccos x)$, то

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)\, T_m(x) \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\, dx = 0 \text{ при } n \neq m.$$

Показать также, что

$$\frac{1-t^2}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)\,(2t)^n,$$

$$T_{n+1}(x) - xT_n(x) + \frac{1}{4} T_{n-1}(x) = 0$$

и что $T_n(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} - x\frac{du}{dx} + n^2u = 0.$$

Функции $T_n(x)$ называются многочленами Чебышева [3]).

2. Показать, что если [4])

$$G_n(p, q, x) = \frac{x^{1-q}(1-x)^{q-p}}{q(q+1)\ldots(q+n-1)} \frac{d^n}{dx^n}[x^{q+n-1}(1-x)^{p+n-q}],$$

то

$$\frac{(1-x)^{1-q}(1+x)^{q-p}[t-1+\sqrt{(1-2tx+t^2)^{q-1}}][t+1-\sqrt{(1-2tx+t^2)^{p-q}}]}{t^{p-1}\sqrt{1-2tx+t^2}} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{q+n-1}{n} G_n\left(p, q, \frac{1-x}{2}\right) t^n.$$

---

[1]) Spherical Harmonics, London, 1877, стр, 156. Множитель 2 там пропущен.

[2]) Proc. Roy. Soc., 27 (1878), 63, а также Collected Scientific Papers, т. I, стр. 487.

[3]) Изв. Петербургской Академии Наук (6), 7 (1859), 199. [См. также П. Л. Чебышев, Полное собрание сочинений, т. II, стр. 151. Изд. АН СССР, 1947. (*Прим. ред.*)]

[4]) Это—многочлены Якоби. См. Journ. f. reine u. angew. Math., 56 (1859), 149, а также Werke, т. VI, 1891, стр. 184.

При $p=q=1$

$$P_n(x)=G_n\left(1,\ 1,\ \frac{1-x}{2}\right)=F\left(n+1,\ -n;\ 1;\ \frac{1-x}{2}\right);$$

при $p=0,\ q=\frac{1}{2}$

$$T_n(x)+\frac{1}{2^{n-1}}G_n\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1-x}{2}\right)=\frac{1}{2^{n-1}}F\left(n,\ -n;\ \frac{1}{2};\ \frac{1-x}{2}\right),$$

где $T_n(x)$ — многочлены Чебышева, а F — гипергеометрическая функция.

Показать также, что

$$x(1-x)G_n''(x)+[q-(p+1)]G_n'(x)+(p+n)nG_n(x)=0.$$

3. Пусть

$$e^{-t^2+2tx}\equiv e^{x^2}\cdot e^{-(t-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n;$$

показать, что

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2},$$

$$H_n'(x)=2nH_{n-1}(x),$$

$$H_{n+1}(x)-2xH_n(x)+2nH_{n-1}(x)=0,$$

$$H_n''(x)-2xH_n'(x)+2nH_n(x)=0;$$

показать также, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx=(-1)^n\int_{-\infty}^{\infty}H_m(x)\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}dx.$$

Для $n>m$ показать также с помощью повторного интегрирования по частям, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_n^2(x)e^{-x^2}dx=2^n\pi^{\frac{1}{2}}n!;$$

функции H_n называются многочленами Эрмита [1]).

4. Положим

$$L_n(x)=x^n\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})=(-1)^n\left\{x^n-\frac{n^2}{1!}x^{n-1}+\frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2}+\ldots+(-1)^n n!\right\};$$

показать, что

$$\frac{1}{1-t}\exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(x)}{n!}t^n,$$

$$L_{n+1}(x)-(2n+1-x)L_n(x)+n^2L_{n-1}(x)=0,$$

$$xL_n''(x)+(1-x)L_n'(x)+nL_n(x)=0$$

и

$$\int_0^{\infty}e^{-x}L_n(x)L_m(x)dx=0 \text{ при } n\neq m.$$

Функции $L_n(x)$ называются многочленами Лагерра [2]).

---

[1]) Compt. Rend., 58, 93 и 226, а также Œuvres, т. II, 1908, стр. 293, и Compt. Rend., 60 (1865), 370, 432, 461.

[2]) См. Bull. Soc. Math. de France, 7 (1879), 72, и Œuvres, т. I, 1898, стр. 428.

Глава III

ПРИСОЕДИНЕННЫЕ ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

54. В п. 6 было показано, что уравнению Лапласа удовлетворяют выражения

$$\left.\begin{matrix} r^n \\ r^{-n-1} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} m\varphi \cdot u_n^m,$$

где u_n^m — решение дифференциального уравнения

$$\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{du}{d\mu}\right\}+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right\}u=0. \tag{1}$$

Числа n и m не подчинены никаким ограничениям, но сейчас мы будем рассматривать главным образом тот важный случай, когда n и m целые положительные и $n \geqslant m$. Однако некоторое внимание мы уделим и тому случаю, когда m и n целые и $m > n$, а также случаю целых отрицательных m.

Пусть $u=(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}v$, тогда, как мы покажем ниже, v удовлетворяет уравнению

$$(1-\mu^2)\frac{d^2v}{d\mu^2}-2(m+1)\mu\frac{dv}{d\mu}+(n-m)(n+m+1)v=0. \tag{2}$$

Если уравнение Лежандра

$$(1-\mu^2)\frac{d^2u}{d\mu^2}-2\mu\frac{du}{d\mu}+n(n+1)u=0$$

продифференцировать m раз, то мы получим

$$(1-\mu^2)\frac{d^{m+2}u}{d\mu^{m+2}}-2(m+1)\mu\frac{d^{m+1}u}{d\mu^{m+1}}+(n-m)(n+m+1)\frac{d^mu}{d\mu^m}=0;$$

таким образом, $\frac{d^mu}{d\mu^m}$ удовлетворяет уравнению (2); следовательно, общее решение этого уравнения имеет вид

$$v=A\frac{d^mP_n(\mu)}{d\mu^m}+B\frac{d^mQ_n(\mu)}{d\mu^m},$$

где A и B — произвольные постоянные. Отсюда вытекает, что общим решением уравнения (1) является

$$u=A(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^mP_n(\mu)}{d\mu^m}+B(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^mQ_n(\mu)}{d\mu^m}. \tag{3}$$

Пусть μ принимает произвольные значения, за исключением принадлежащих отрезку $[-1, 1]$ действительной оси; функции

$$(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^mP_n(\mu)}{d\mu^m}, \qquad (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^mQ_n(\mu)}{d\mu^m},$$

где аргументы чисел $\mu-1$ и $\mu+1$ равны нулю, когда μ действительно и больше 1, и заключены между $-\pi$ и π в остальных случаях, называются присоединенными функциями Лежандра первого и второго рода соответственно и обозначаются $P_n^m(\mu)$ и $Q_n^m(\mu)$.

Если точка μ движется из некоторого начального положения на действительной оси, отстоящего больше, чем на 1 от начала координат, к некоторой точке интервала $(-1, 1)$, причем ее путь выбран так, что $\arg(\mu-1)$ растет от 0 до π, а $\arg(\mu+1)$ равен нулю в конечной точке пути, то $P_n^m(\mu)$ имеет предел

$$P_n^m(\cos\theta+i\cdot 0)=\lim_{\varepsilon\to 0} P_n^m(\cos\theta+i\cdot\varepsilon).$$

Если путь выбран так, что $\arg(\mu-1)$ меняется от 0 до $-\pi$, то $P_n^m(\mu)$ имеет своим пределом $P_n^m(\cos\theta-i\cdot 0)$.

Мы видим, таким образом, что

$$P_n^m(\cos\theta+i\cdot 0)=e^{\frac{1}{2}m\pi i}\sin^m\theta\,\frac{d^mP_n(\cos\theta)}{d(\cos\theta)^m}$$

и

$$P_n^m(\cos\theta-i\cdot 0)=e^{-\frac{1}{2}m\pi i}\sin^m\theta\,\frac{d^mP_n(\cos\theta)}{d(\cos\theta)^m}.$$

Если μ изменяется вдоль пути, лежащего в верхней полуплоскости, от некоторого действительного значения, большего 1, до значения $-\mu$, действительного и меньшего -1, то $\arg(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}$ меняется от 0 до $m\pi$ и, следовательно, величина $(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}$ переходит в $(-1)^m(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}$; легко видеть, что то же самое конечное значение получается и в случае пути, расположенного в нижней полуплоскости (m предполагается целым). Таким образом, функцию $P_n^m(\mu)$ можно рассматривать как однозначно определенную для всех отрицательных $\mu<-1$. Точками разрыва для $P_n^m(\mu)$ являются только точки интервала $(-1, 1)$.

§ 2. ТЕССЕРАЛЬНЫЕ И СЕКТОРИАЛЬНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

55. Удобно определить $P_n^m(\cos\theta)$ формулой

$$P_n^m(\cos\theta)=e^{\frac{1}{2}m\pi i}P_n^m(\cos\theta+i\cdot 0)=e^{-\frac{1}{2}m\pi i}P_n^m(\cos\theta-i\cdot 0)$$

или

$$P_n^m(\cos\theta)=(-1)^m\sin^m\theta\,\frac{d^mP_n(\cos\theta)}{d(\cos\theta)^m}. \tag{4}$$

Если вместо $\cos\theta$ писать μ, где μ заключено между -1 и 1, то $P_n^m(\cos\theta)$ определяется соответственно как

$$(-1)^m(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^mP_n(\mu)}{d\mu^m},$$

где при нечетном m для $(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m}$ берется положительное значение.

Это определение удобно тем, что $P_n^m(\mu)$ в этом случае принимает действительные значения, когда μ действительно и лежит в интервале $(-1, 1)$. Множитель $(-1)^m$ иногда опускают и тогда вместо $P_n^m(\cos\theta)$ пишут $T_n^m(\cos\theta)$; мы, однако, этого делать не будем, так как введенное здесь определение находится в соответствии с более общим определением, которое будет дано в гл. V для случая, когда m и n не предполагаются непременно ни целыми, ни даже действительными.

Если μ действительно и лежит между -1 и 1, то выражение $\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi \cdot P_n^m(\mu)$ называются *тессеральной сферической функцией*, если только $m \neq n$; при $m = n$ оно называется *секториальной сферической функцией* (первого рода).

Для физических приложений основную роль играют функции $\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi \times P_n^m(\mu)$, где $-1 \leqslant \mu \leqslant 1$, однако функции $\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi \cdot Q_n^m(\mu)$, т. е. $\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi \times (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} \frac{d^m Q_n(\mu)}{d\mu^m}$, где $\mu > 1$, также встречаются в вопросах теории потенциала, связанных с распределением масс в сфероидах.

§ 3. ПРИСОЕДИНЕННЫЕ ФУНКЦИИ ПЕРВОГО РОДА

56. Так как

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2-1)^n,$$

то очевидно, что для μ, не принадлежащих отрезку $[-1, 1]$ действительной оси,

$$P_n^m(\mu) = \frac{1}{2^n n!} (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} \frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}} (\mu^2-1)^n,$$

или, что то же самое,

$$P_n^m(\mu) = \frac{(2n)!}{2^n n!\,(n-m)!} (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} \left\{ \mu^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)} \mu^{n-m-2} + \right.$$
$$\left. + \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)} \mu^{n-m-4} - \ldots \right\}; \quad (5)$$

эта формула получается дифференцированием выражения

$$\mu^{2n} - n\cdot\mu^{2n-2} + \frac{n(n-1)}{2!}\mu^{2n-4}\ldots,$$

равного $(\mu^2-1)^n$. Равенство (5) определяет значения $P_n^m(\mu)$ для всех μ, не принадлежащих интервалу $(-1, 1)$ действительной оси.

Обозначая выражение, стоящее в (5) в фигурных скобках, символом $f(n, m, \mu)$, получаем

$$P_n^m(\mu) = \frac{(2n)!}{2^n n!\,(n-m)!} (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} f(n, m, \mu).$$

Выражение $f(n, m, \mu)$ может быть записано в виде

$$b_0\mu^{n-m} + b_1\mu^{n-m-2}\nu^2 + b_2\mu^{n-m-4}\nu^4 + \ldots,$$

где $\nu^2 = 1-\mu^2$. Чтобы определить коэффициенты $b_0, b_1, b_2, \ldots$, представим сперва $f(n, m, \mu)$ в виде

$$\mu^{n-m} + a_1\mu^{n-m-2} + a_2\mu^{n-m-4} + \ldots,$$

или, что то же самое, в виде

$$\mu^{n-m}\{1 + a_1(1+t^2) + a_2(1+t^2)^2 + \ldots\},$$

где $t^2 = \frac{\nu^2}{\mu^2}$. Приравняв коэффициенты при t^{2r} в этих двух выражениях для

$f(n, m, \mu)$, получим

$$b_r = a_r + (r+1)\,a_{r+1} + \frac{(r+1)(r+2)}{2!}\,a_{r+2} + \ldots =$$

$$= a_r\left\{1 - \frac{(n-m-2r)(n-m-2r-1)}{2(2n-2r-1)} + \frac{(n-m-2r)\ldots(n-m-2r-3)}{2\cdot 4(2n-2r-1)(2n-2r-3)} - \ldots\right\}$$

и, таким образом,

$$b_r = a_r f(n-r,\ m+r,\ 1).$$

Чтобы найти значение $f(n, m, 1)$, заметим, что так как $P_n(\mu)$ представляет собой коэффициент при h^n в разложении $(1-2\mu h+h^2)^{-\frac{1}{2}}$ по степеням h, то $\frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu^m}$ есть коэффициент при h^n в разложении в степенной ряд функции

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\ldots\frac{2m-1}{2}(2h)^m(1-2\mu h+h^2)^{-m-\frac{1}{2}};$$

при $\mu = 1$ он равен

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\ldots\frac{2m-1}{2}\cdot 2^m\frac{(2m+1)(2m+2)\ldots(m+n)}{(n-m)!},$$

т. е.

$$\frac{(n+m)!}{(n-m)!\,2^m m!}.$$

Таким образом,

$$\frac{(2n)!}{2^n n!\,(n-m)!}f(n,\ m,\ 1) = \frac{(n+m)!}{(n-m)!\,2^m m!},$$

т. е.

$$f(n,\ m,\ 1) = \frac{2^{n-m} n!\,(n+m)!}{m!\,(2n)!},$$

и, следовательно,

$$b_0 = \frac{2^{n-m} n!\,(n+m)!}{m!\,(2n)!},\quad b_1 = b_0\,\frac{f(n-1,\ m+1,\ 1)}{f(n,\ m,\ 1)},$$

т. е.

$$b_1 = -b_0\,\frac{(n-m)(n-m-1)}{4(m+1)\,1!},$$

$$b_2 = b_0\,\frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{4^2(m+1)(m+2)\,2!},\ \text{и т. д.}$$

Мы получили для $f(n, m, 1)$ следующее выражение:

$$\frac{2^{n-m} n!\,(n+m)!}{m!\,(2m)!}\left\{\mu^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{4(m+1)\,1!}\mu^{n-m-2}\nu^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{4^2(m+1)(m+2)\,2!}\mu^{n-m-4}\nu^4 - \ldots\right\},$$

откуда

$$P_n^m(\mu) = \frac{(n+m)!}{2^m m!\,(n-m)!}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\left\{\mu^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{(2m+2)\,2}\mu^{n-m-2}\nu^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{(n-m)\ldots(n-m-3)}{(2m+2)(2m+4)2\cdot 4}\mu^{n-m-4}\nu^4 - \ldots\right\}, \qquad (6)$$

где μ не принадлежит отрезку $[-1,\ 1]$ действительной оси.

При $m = 0$ полученная формула сводится к

$$P_n(\mu) = \mu^n - \frac{n(n-1)}{2^2}\mu^{n-2}\nu^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2\cdot 4^2}\mu^{n-4}\nu^4 - \ldots$$

в соответствии с формулой (21) гл. II.

В случае $\mu = \cos\theta$, принадлежащего отрезку $[-1, 1]$, мы имеем

$$P_n^m(\cos\theta) = (-1)^m \frac{(2n)!}{2^n n!\,(n-m)!} \sin^m\theta \left\{ \cos^{n-m}\theta - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)} \cos^{n-m-2}\theta + \frac{(n-m)\dots(n-m-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)} \cos^{n-m-4}\theta - \dots \right\}, \quad (7)$$

а также

$$P_n^m(\cos\theta) = (-1)^m \frac{(m+n)!}{2^m\, m!\,(n+m)!} \sin^m\theta \left\{ \cos^{n-m}\theta - \frac{(n-m)(n-m-1)}{(2m+2)\,2} \cos^{n-m-2}\theta \sin^2\theta + \frac{(n-m)\dots(n-m-3)}{(2m+2)(2m+4)\cdot 2\cdot 4} \cos^{n-m-4}\theta \sin^4\theta - \dots \right\}. \quad (8)$$

57. Существует значительное несогласие в обозначениях, применяемых различными авторами, рассматривающими присоединенные функции Лежандра. Ферререс[1]), который ограничивается только случаем $\mu = \cos\theta$, обозначает символом $T_n^m(\mu)$ выражение

$$\frac{(2n)!}{2^n\, n!\,(n-m)!} (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m} \left\{ \mu^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)} \mu^{n-m-2} + \dots \right\},$$

равное

$$(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m} \frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu^m}.$$

Таким образом, $T_n^m(\cos\theta)$ совпадает с функцией, которую мы обозначили

$$(-1)^m P_n^m(\cos\theta).$$

Томсон и Тэт[2]) обозначают выражение

$$(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m} \left\{ \mu^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)} \mu^{n-m-2} + \dots \right\}$$

символом $\Theta_n^{(m)}$, а выражение

$$(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m} \left\{ \mu^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{(2m+2)\cdot 2} \mu^{n-m-2}(1-\mu^2) + \dots \right\}$$

символом $\vartheta_n^{(m)}$. Таким образом,

$$(-1)^m P_n^m(\cos\theta) = \frac{(2n)!}{2^n\, n!\,(n-m)!} \Theta_n^{(m)}(\mu) = \frac{(n+m)!}{2^m\, m!\,(n-m)!} \vartheta_n^{(m)}(\mu).$$

Гейне использует символы $P_m^{(n)}(\mu)$, $\mathfrak{P}_m^{(n)}(\mu)$, $Q_m^{(n)}(\mu)$, $\mathfrak{Q}_m^{(n)}(\mu)$ для случая произвольных значений μ. Они связаны с теми функциями, которые мы здесь обозначаем $P_n^m(\mu)$ и $Q_n^m(\mu)$, соотношениями

$$P_m^{(n)}(\mu) = P_{-m}^{(n)}(\mu) = (\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m} \mathfrak{P}_m^{(n)}(\mu) = (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} \mathfrak{P}_{-m}^{(n)}(\mu) = \frac{2^n\, n!\,(n-m)!}{(2n)!} P_n^m(\mu),$$

$$Q_m^{(n)}(\mu) = Q_{-m}^{(n)}(\mu) = (\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m} \mathfrak{Q}_m^{(n)}(\mu) = (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} \mathfrak{Q}_{-m}^{(n)}(\mu) = (-1)^m \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n+1)}{(n+m)!} Q_n^m(\mu).$$

---

[1]) Spherical Harmonics, 1877, стр. 76.

[2]) Natural Philosophy, т. I, 1879, стр. 187, 205.

§ 4. ТЕССЕРАЛЬНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПЕРВОГО РОДА

58. Рассмотрим функцию

$$P_n^m(\mu) = (-1)^m (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m} \frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu^m} \quad (-1 \leqslant \mu \leqslant 1).$$

Эта функция может быть записана в виде

$$P_n^m(\mu) = \frac{(-1)^m}{2^n n!} (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m} \frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}} (\mu^2-1)^n.$$

Помимо нулей в точках -1 и 1, эта функция имеет еще $n-m$ нулей, которые все лежат между -1 и 1 и могут быть разбиты на пары чисел с одинаковыми абсолютными величинами и противоположными знаками; $\mu=0$ входит в число этих нулей, если $n-m$ нечетно.

Рассмотрим на сфере с центром в начале координат геометрическое место точек, определяемое уравнением

$$P_n^m(\cos\theta) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi = 0;$$

оно представляет собой сеть, состоящую из $n-m$ параллелей, симметричных относительно экватора, и m больших кругов, проходящих через полюсы, каждый из них получается из соседнего поворотом на угол $\frac{\pi}{m}$. Таким образом эта сеть делит всю поверхность сферы на ячейки (*tessera*); отсюда и происходит название «тессеральные» сферические функции. В случае $m=n$ число параллелей равно нулю и поверхность сферы делится на секторы, а соответствующие сферические функции называются секториальными функциями.

Если в написанном выше выражении для $P_n^m(\mu)$ сперва разложить $(\mu^2-1)^n$ по формуле бинома Ньютона, а потом выполнить дифференцирование, то получится формула

$$P_n^m(\mu) = \frac{(2n)!\,(-1)^m}{2^n n!\,(n-m)!} (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m} \left\{ \mu^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)} \mu^{n-m-2} + \right.$$
$$\left. + \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)} \mu^{n-m-4} - \ldots \right\}, \quad (9)$$

эквивалентная формуле (5); при $m=n$ получаем

$$P_n^n(\mu) = \frac{(2n)!\,(-1)^n}{2^n n!} (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}n}.$$

Если $(\mu^2-1)^n$ записать в виде

$$2^n(\mu-1)^n \left(1+\frac{\mu-1}{2}\right)^n$$

и затем разложить это выражение по степеням $\mu-1$, то получится формула

$$P_n^m(\mu) = (-1)^m \frac{2^n}{n!} (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m} \frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}} \left\{ \left(\frac{\mu-1}{2}\right)^{2n} + n\left(\frac{\mu-1}{2}\right)^{2n-1} + \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{\mu-1}{2}\right)^{2n-2} + \ldots \right\} =$$
$$= \frac{(-1)^m 2^{-m} (2n)!}{n!\,(n-m)!} (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m} \left\{ \left(\frac{\mu-1}{2}\right)^{n-m} + \frac{n(n-m)}{2n}\left(\frac{\mu-1}{2}\right)^{n-m-1} + \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-m)(n-m-1)}{1\cdot 2\cdot 2n(2n-1)}\left(\frac{\mu-1}{2}\right)^{n-m-2} + \ldots \right\}, \quad (10)$$

которую можно переписать также в следующем виде:

$$P_n^m(\mu)=\frac{(-1)^m(n+m)!}{2^m m!(n-m)!}(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m}\left\{1+\frac{(n-m)(n+m+1)}{1(m+1)}\frac{\mu-1}{2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(n-m)(n-m-1)(n+m+1)(n+m+2)}{1\cdot 2(m+1)(m+2)}\left(\frac{\mu-1}{2}\right)^2+\ldots\right\}$$

или

$$P_n^m(\cos\theta)=\frac{(n+m)!(-1)^m}{2^m m!(n-m)!}\sin^m\theta\left\{1-\frac{(n-m)(n+m+1)}{1\cdot(m+1)}\sin^2\frac{\theta}{2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(n-m)(n-m-1)(n+m+1)(n+m+2)}{1\cdot 2(m+1)(m+2)}\sin^4\frac{\theta}{2}-\ldots\right\};\qquad(11)$$

это последнее равенство представляет собой обобщение формулы Мэрфи (18) гл. II.

Рассмотрим выражение

$$\frac{d^n}{d\mu^n}\{(\mu-1)^{n+m}(\mu+1)^{n-m}\},$$

которое можно записать в виде

$$2^{n-m}\frac{d^n}{d\mu^n}\left[(\mu-1)^{n+m}\left\{1+\frac{\mu-1}{2}\right\}^{n-m}\right]$$

или в виде

$$2^{n-m}\frac{d^n}{d\mu^n}\left\{\frac{1}{2^{n-m}}(\mu-1)^{2n}+\frac{1}{2^{n-m-1}}(n-m)(\mu-1)^{2n-1}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2^{n-m-2}}\frac{(n-m)(n-m-1)}{2!}(\mu-1)^{2n-2}+\ldots\right\}.$$

Выполнив дифференцирование, получим

$$2^n\frac{(2n)!}{n!}\left\{\left(\frac{\mu-1}{2}\right)^n+\frac{n(n-m)}{1\cdot 2n}\left(\frac{\mu-1}{2}\right)^{n-1}+\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-m)(n-m-1)}{1\cdot 2(2n)(2n-1)}\left(\frac{\mu-1}{2}\right)^{n-2}+\ldots\right\}.$$

Сравнивая полученный результат с формулой (10), находим, что

$$P_n^m(\mu)=\frac{1}{2^n(n-m)!}\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^n}{d\mu^n}\{(\mu-1)^{n+m}(\mu+1)^{n-m}\}.\qquad(12)$$

Это—обобщение формулы Родрига, которая получается отсюда при $m=0$.

Из формулы (4) следует, что $P_n^m(\mu)=(-1)^{n-m}P_n^m(-\mu)$, поэтому

$$P_n^m(\mu)=\frac{(-1)^m}{2^n(n-m)!}\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^n}{d\mu^n}\{(\mu+1)^{n+m}(\mu-1)^{n-m}\}.\qquad(13)$$

Эта формула близка к формуле (12).

Аналогично, заменив в формуле (10) μ на $-\mu$, получим

$$P_n^m(\mu)=\frac{(-1)^n(n+m)!}{2^m m!(n-m)!}(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m}\left\{1-\frac{(n-m)(n+m+1)}{1(m+1)}\frac{\mu+1}{2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(n-m)(n-m-1)(n+m+1)(n+m+2)}{1\cdot 2(m+1)(m+2)}\left(\frac{\mu+1}{2}\right)^2+\ldots\right\}$$

или

$$P_n^m(\mu)=(-1)^n\frac{(n+m)!}{2^m m!(n-m)!}\sin^m\theta\left\{1-\frac{(n-m)(n+m+1)}{1(m+1)}\cos^2\frac{\theta}{2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(n-m)(n-m-1)(n+m+1)(n+m+2)}{1\cdot 2(m+1)(m+2)}\cos^4\frac{\theta}{2}-\ldots\right\}.\qquad(14)$$

В формулах (12) и (13) μ предполагается действительным и принадлежащим интервалу $(-1, 1)$.

Очевидно, что в общем случае, т. е. при μ, не принадлежащем указанному интервалу, соответствующие формулы имеют вид

$$P_n^m(\mu)=\frac{1}{2^n(n-m)!}\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^n}{d\mu^n}\{(\mu-1)^{n+m}(\mu+1)^{n-m}\}, \tag{15}$$

$$P_n^m(\mu)=\frac{1}{2^n(n-m)!}\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^n}{d\mu^n}\{(\mu+1)^{n+m}(\mu-1)^{n-m}\}. \tag{16}$$

§ 5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ $P_n^m(\mu)$ В ВИДЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

59. К функциям $P_n^m(\mu)$ можно прийти еще иным путем, если заметить, что так как $(z+ix)^n$, т. е. $r^n(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^n$, есть решение уравнения Лапласа, то решение вида $r^n\cos m\varphi\cdot u_n^m$ можно получить, представив $(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^n$ в виде суммы косинусов дуг, кратных φ.

При этом нет необходимости ограничиваться только теми значениями μ, которые принадлежат интервалу $(-1, 1)$.

Мы имеем

$$(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^n=\frac{e^{-in\varphi}}{2^n(\mu^2-1)^{\frac{n}{2}}}\{(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\,e^{i\varphi})^2-1\}^n;$$

разлагая выражение, стоящее в правой части этого равенства, в ряд по степеням $\sqrt{\mu^2-1}\,e^{i\varphi}$, получаем

$$(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^n=\frac{e^{-in\varphi}}{2^n(\mu^2-1)^{\frac{n}{2}}}\sum_{r=0}^{2n}\frac{1}{r!}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}r}e^{ir\varphi}\frac{d^r}{d\mu^r}(\mu^2-1)^n=$$

$$=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2-1)^n+\frac{1}{2^n}\sum_{m=1}^{n}\left\{\frac{e^{im\varphi}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}}{(n+m)!}\frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}}(\mu^2-1)^n+\right.$$

$$\left.+\frac{e^{-im\varphi}(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m}}{(n-m)!}\frac{d^{n-m}}{d\mu^{n-m}}(\mu^2-1)^n\right\}.$$

Подставляя вместо $e^{im\varphi}$, $e^{-im\varphi}$ выражения $\cos m\varphi+i\sin m\varphi$ и $\cos m\varphi-i\sin m\varphi$ и учитывая, что получающаяся в результате сумма не может содержать слагаемых, в которые входит $\sin m\varphi$, имеем тождество

$$\frac{(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}}{(n+m)!}\frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}}(\mu^2-1)^n=\frac{(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m}}{(n-m)!}\frac{d^{n-m}}{d\mu^{n-m}}(\mu^2-1)^n \tag{17}$$

и с помощью этого тождества приходим к следующей формуле:

$$(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^n=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2-1)^n+$$

$$+\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{(n+m)!}\cos m\varphi\cdot(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}}(\mu^2-1)^n,$$

которая выражает $(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^n$ в виде комбинации сферических функций; если вместо φ написать $\pi+\varphi$, то полученный результат можно представить в следующем виде:

$$(\mu \pm \sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^n = \\ = P_n(\mu) + 2\sum_{m=1}^{n}(\pm 1)^m \frac{n!}{(n+m)!}\cos m\varphi\, P_n^m(\mu), \qquad (18)$$

где μ не принадлежит отрезку $[-1, 1]$ действительной оси.

Если μ действительно и заключено между -1 и 1, то

$$(\mu \pm \sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^n = P_n(\mu + i\cdot 0) + 2\sum_{m=1}^{n}(\pm 1)^m \frac{n!}{(n+m)!}\cos m\varphi\cdot P_n^m(\mu + i\cdot 0),$$

и так как в силу формулы (4)

$$P_n^m(\mu + i\cdot 0) = e^{-\frac{1}{2}m\pi i}P_n^m(\mu),$$

то

$$(\mu \pm \sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^n = P_n(\mu) + 2\sum_{m=1}^{n}(\pm 1)^m e^{-\frac{1}{2}m\pi i}\frac{n!}{(n+m)!}\cos m\varphi\cdot P_n^m(\mu), \quad (19)$$

где

$$\mu = \cos\theta, \qquad \sqrt{\mu^2-1} = i\sin\theta.$$

Если мы сравним равенство (19) с разложением выражения

$$(\mu \pm \sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^n$$

в ряд Фурье, то получим

$$\frac{(n+m)!}{n!\pi}\int_0^\pi (\mu \pm \sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^n\cos m\varphi\, d\varphi = (\pm 1)^m e^{-\frac{1}{2}m\pi i}P_n^m(\mu), \qquad (20)$$

где $\mu = \cos\theta$.

Если μ не принадлежит отрезку $[-1, 1]$ действительной оси, то из формулы (18) имеем

$$P_n^m(\mu) = (\pm 1)^m \frac{(n+m)!}{n!\,\pi}\int_0^\pi (\mu \pm \sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^n\cos m\varphi\, d\varphi. \qquad (21)$$

Заменяя φ на $\varphi - u$, получаем из равенства (20), что

$$\int_{-\pi}^{\pi}(z + ix\cos u + iy\sin u)^n \frac{\cos}{\sin} mu\, du$$

представляет собой решение уравнения Лапласа. Это — частные случаи общей формы решения

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(z + ix\cos u + iy\sin u,\ u)\, du,$$

найденной Уиттекером[1]).

§ 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ $P_n^{-m}(\mu)$

60. Уравнение (1) не изменится, если в нем заменить m на $-m$, следовательно, ему удовлетворяет функция $(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m}v$, где v — решение

[1]) Math. Ann., 57 (1902), 333.

уравнения

$$(1-\mu^2)\frac{d^2v}{d\mu^2}-2(1-m)\mu\frac{dv}{d\mu}+(n+m)(n-m+1)v=0,$$

получающегося из уравнения (2) заменой m на $-m$.

Если мы продифференцируем это уравнение m раз по μ, то получим, что v удовлетворяет уравнению

$$(1-\mu^2)\frac{d^{m+2}v}{d\mu^{m+2}}-2\mu\frac{d^{m+1}v}{d\mu^{m+1}}+n(n+1)\frac{d^m v}{d\mu^m}=0,$$

и, следовательно, общим видом для $\frac{d^m v}{d\mu^m}$ является $AP_n(\mu)+BQ_n(\mu)$.

Отсюда следует, что

$$(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m}\int_1^\mu\int_1^\mu\dots\int_1^\mu P_n(\mu)\,d\mu\,d\mu\dots d\mu$$

(интеграл берется m-кратный) и аналогичное выражение с $Q_n(\mu)$ вместо $P_n(\mu)$ удовлетворяет уравнению (1). В случае $Q_n(\mu)$ в качестве пределов интегрирования следует брать μ и ∞.

Два полученных таким образом частных решения мы обозначим $P_n^{-m}(\mu)$ и $Q_n^{-m}(\mu)$, причем предполагается, что μ не принадлежит отрезку $[-1, 1]$ действительной оси.

С помощью формулы (17) получается следующее соотношение:

$$P_n^{-m}(\mu)=\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\mu), \tag{22}$$

где предполагается, что $n\geqslant m\geqslant 0$; в противном случае эта формула теряет смысл, так как $P_n^m(\mu)$ при $m>n$ обращается в нуль, а $(n-m)!$ — в бесконечность.

При $\mu=\cos\theta$ мы определим $P_n^m(\cos\theta)$ как $e^{-\frac{1}{2}m\pi i}P_n^{-m}(\cos\theta+i\cdot 0)$ в соответствии с тем, как в п. 55 мы определили $P_n^m(\cos\theta)$ равенством

$$P_n^m(\cos\theta)=e^{\frac{1}{2}m\pi i}P_n^m(\cos\theta+i\cdot 0),$$

отсюда следует, что

$$P_n^{-m}(\cos\theta)=(-1)^m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\theta). \tag{23}$$

Справедлива также следующая формула:

$$P_n^{-m}(\cos\theta)=e^{-\frac{1}{2}m\pi i}(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m}\int_1^\mu\dots\int_1^\mu P_n(\mu)(d\mu)^m,$$

т. е.

$$P_n^{-m}(\cos\theta)=\sin^{-m}\theta\int_\mu^1\dots\int_\mu^1 P_n(\mu)(d\mu)^m.$$

Заметим, что

$$(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m}\int_\mu^1\dots\int_\mu^1 P_n(\mu)(d\mu)^m$$

представляет собой конечное решение уравнения (1) даже и при $m > n$, в то время как выражение $(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu^m}$ в этом случае теряет смысл.

Общему решению

$$u=(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\left(\frac{d}{d\mu}\right)^m [AP_n(\mu)+BQ_n(\mu)],$$

полученному выше, отвечает теперь формула

$$u=(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m}\left(\frac{d}{d\mu}\right)^{-m} [AP_n(\mu)+BQ_n(\mu)],$$

которая получается заменой m на $-m$; при этом $\left(\frac{d}{d\mu}\right)^{-m} f(\mu)$ понимается как $\int^{\mu}\int^{\mu}\ldots\int^{\mu} f(\mu)(d\mu)^m$. Таким образом, имеется полная симметрия между выражениями общего решения для положительных и для отрицательных m.

§ 7. ФОРМУЛЫ ДЛЯ $P_n^m(\mu)$ И $P_n^{-m}(\mu)$

61. Для μ, не принадлежащих интервалу $(-1, 1)$ действительной оси, функция $P_n^m(\mu)$ была определена в п. 54 как

$$(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m}{d\mu^m}P_n(\mu).$$

Таким образом,

$$P_n^m(\mu)=(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{1}{2^n n!}\frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}}(\mu^2-1)^n;$$

если $(\mu^2-1)^n$ записать в виде $2^n(\mu-1)^n\left[1+\frac{1}{2}(\mu-1)\right]^n$ и разложить это выражение по формуле бинома Ньютона по степеням $\frac{1}{2}(1-\mu)$, а затем выполнить дифференцирование, то получится формула

$$P_n^m(\mu)=\frac{(n+m)!}{2^m m!(n-m)!}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}F\left(m-n;\ m+n+1;\ m+1;\ \frac{1-\mu}{2}\right). \tag{24}$$

Так как $m\leqslant n$, то гипергеометрическая функция, входящая в это равенство, на самом деле представляет собой многочлен степени $n-m$.

С другой стороны, записывая $(\mu^2-1)^n$ в виде $(\mu-1)^n(\mu+1)^n$ и пользуясь при дифференцировании формулой Лейбница, получаем

$$P_n^m(\mu)=\frac{1}{m!}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{2}m}\left(\frac{\mu+1}{2}\right)^n F\left(-n, m-n;\ m+1;\ \frac{\mu-1}{\mu+1}\right). \tag{25}$$

В силу известного соотношения

$$F(\alpha, \beta, \gamma;\ x)=(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta;\ \gamma;\ x)$$

эта последняя формула эквивалентна следующей:

$$P_n^m(\mu)=\frac{(n+m)!}{m!(n-m)!}\left(\frac{\mu-1}{\mu+2}\right)^{\frac{1}{2}m}\left(\frac{2}{\mu+1}\right)^{n+1}F\left(m+n+1, n+1;\ m+1;\ \frac{\mu-1}{\mu+1}\right). \tag{26}$$

Мы показали, что

$$P_n^{-m}(\mu)=\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\mu);$$

поэтому при $n \geqslant m \geqslant 0$ из (24) вытекает

$$P_n^{-m}(\mu) = \frac{1}{2^m m!} (\mu^2 - 1)^{\frac{1}{2}m} F\left(m-n,\ m+n+1;\ m+1;\ \frac{1-\mu}{2}\right). \tag{27}$$

Преобразуя гипергеометрическую функцию с помощью только что упомянутого соотношения, получаем

$$P_n^{-m}(\mu) = \frac{1}{m!}\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(n+1,\ -n;\ m+1;\ \frac{1-\mu}{2}\right). \tag{28}$$

Аналогично, из (26) имеем

$$P_n^{-m}(\mu) = \frac{1}{m!}\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{2}m}\left(\frac{2}{\mu+1}\right)^{n+1} F\left(n+m+1,\ n+1;\ m+1;\ \frac{\mu-1}{\mu+1}\right). \tag{29}$$

Стоящий справа гипергеометрический ряд сходится, когда μ или $\operatorname{Re}(\mu)$ больше нуля, кроме, однако, μ, принадлежащих интервалу (0, 1) действительной оси.

Формулы (27), (28) и (29) были получены в предположении, что $m \leqslant n$, однако можно показать, что они справедливы и при $m > n$. Согласно определению, введенному в п. 60, мы можем получить выражение для $P_n^{-m}(\mu)$, подставив в выражение

$$(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m} \int_1^\mu \ldots \int_1^\mu P_n(\mu)\,(d\mu)^m$$

вместо $P_n(\mu)$ его значение

$$F\left(-n,\ n+1;\ 1;\ \frac{1-\mu}{2}\right)$$

и затем интегрируя почленно. Таким путем мы должны прийти к формуле, эквивалентной при $m \leqslant n$ выражению (27) или (28). Но получающаяся формула остается неизменной и при $m > n$, следовательно, формулы (27) и (28) верны для всех целых положительных значений m. Мы видим, что формула (28) содержит лишь конечное число членов, в то время как в формуле (27) при $m > n$ число слагаемых бесконечно. Формула (29) может быть получена из (27) с помощью гомографического преобразования гипергеометрической функции, приводящего к гипергеометрической функции с $\frac{\mu-1}{\mu+1}$ в качестве четвертого аргумента. Это преобразование имеет один и тот же вид как при $m > n$, так и при $m \leqslant n$, следовательно, формула (29) справедлива при $m > n$.

§ 8. РАЗЛОЖЕНИЕ $(\mu + \sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^{-n-1}$ В РЯД ПО ПРИСОЕДИНЕННЫМ ФУНКЦИЯМ

62. Так как $(z+ix)^{-n-1}$, т. е. $r^{-n-1}(\mu + \sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^{-n-1}$, представляет собой решение уравнения Лапласа, то, разлагая $(\mu + \sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^{-n-1}$ по косинусам дуг, кратных φ, мы получим для уравнения (1) решения тессерального типа. Мы предположим сперва, что μ не принадлежит интервалу $(-1, 1)$. Положив $w = (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi}$, мы, как и в п. 59, получим

$$(\mu + \sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^{-n-1} = (2w)^{n+1}\left[(\mu+w)^2 - 1\right]^{-n-1}.$$

Предположим, что действительная часть μ положительна; тогда $\left|\frac{\mu-1}{\mu+1}\right| < 1$ и $|w|$ лежит между $|\mu-1|$ и $|\mu+1|$.

Что касается множителей $(\mu+w-1)^{-n-1}$ и $(\mu+w+1)^{-n-1}$, то первый из них можно разложить в сходящийся ряд по степеням $\frac{\mu-1}{w}$, а второй — в ряд по степеням $\frac{w}{\mu+1}$.

Мы имеем

$$(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^{-n-1}=2^{n+1}(\mu+1)^{-n-1}\left(1+\frac{\mu-1}{w}\right)^{-n-1}\left(1+\frac{w}{\mu+1}\right)^{-n-1}$$

Предположим теперь (n — целое положительное), что биномиальные разложения для $\left(1+\frac{\mu-1}{w}\right)^{-n-1}$ и $\left(1+\frac{w}{\mu+1}\right)^{-n-1}$ суть

$$a_0+a_1+a_2+\ldots$$

и

$$b_0+b_1+b_2+\ldots;$$

каждый из этих рядов абсолютно сходится при всех значениях φ.

Пусть $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\ldots$ — разложение в биномиальный ряд выражения $\left(1-\left|\frac{\mu-1}{\mu+1}\right|^{\frac{1}{2}}\right)^{-n-1}$, тогда $|a_r|=\alpha_r$ и $|b_r|=\alpha_r$ для всех r.

Произведение абсолютно сходящегося ряда $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\ldots$ на себя есть $\alpha_0^2+2\alpha_0\alpha_1+\ldots+(\alpha_0\alpha_r+\alpha_1\alpha_{r-1}+\ldots+\alpha_r\alpha_0)+\ldots$; этот ряд сходится, и его сумма равна $\left(1-\left|\frac{\mu-1}{\mu+1}\right|^{\frac{1}{2}}\right)^{-2n-2}$.

Таким образом, двойной ряд $\sum\limits_{r=0}^{\infty}\sum\limits_{s=0}^{\infty}\alpha_r\alpha_s$ абсолютно сходится и, следовательно, его члены можно расположить в любом порядке, не изменив его суммы; отсюда вытекает, что ряд

$$(\alpha_0^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots)+2(\alpha_0\alpha_1+\alpha_1\alpha_2+\ldots)+\ldots+2(\alpha_0\alpha_r+\alpha_1\alpha_{r+1}+\ldots)+\ldots$$

сходится.

Так как $|a_r b_s|=\alpha_r\alpha_s$, то двойной ряд $\sum\limits_{r=0}^{\infty}\sum\limits_{s=0}^{\infty}a_r b_s$ абсолютно сходится, и поэтому его члены можно переставить в любом порядке, не нарушив его сходимости и не изменив значения его суммы. Отсюда следует, что ряд

$$(a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2+\ldots)+(a_0b_1+a_1b_2+\ldots)+(a_1b_0+a_2b_1+\ldots)+\ldots$$
$$\ldots+(a_0b_r+a_1b_{r+1}+\ldots)+(a_rb_0+a_{r+1}b_1+\ldots)+\ldots$$

имеет ту же сумму, что и произведение двух абсолютно сходящихся рядов

$$a_0+a_1+a_2+\ldots \quad \text{и} \quad b_0+b_1+b_2+\ldots,$$

которое равно

$$\left(1+\frac{\mu-1}{w}\right)^{-n-1}\left(1+\frac{w}{\mu+1}\right)^{-n-1}.$$

С помощью признака Вейерштрасса легко проверить, что ряд с общим членом

$$(a_0b_r+a_1b_{r+1}+\ldots)+(a_rb_0+a_{r+1}b_1+\ldots)$$

равномерно сходится при всех φ. Действительно, указанный общий член по абсолютной величине не больше чем $2(\alpha_0\alpha_r+\alpha_1\alpha_{r+1}+\ldots)$, что представляет собой общий член некоторого абсолютно сходящегося ряда. Следовательно, мы можем перемножить ряды, соответствующие выражениям

$\left(1+\frac{\mu-1}{w}\right)^{-n-1}$ и $\left(1+\frac{w}{\mu+1}\right)^{-n-1}$, и затем сгруппировать члены, содержащие одинаковые степени w, не изменив при этом суммы получившегося ряда.

Если мы выполним это, то получим, что коэффициенты при w^m и w^{-m} в выражении

$$2^{n+1}(\mu+1)^{-n-1}\left(1+\frac{\mu-1}{w}\right)^{-n-1}\left(1+\frac{w}{\mu+1}\right)^{-n-1}$$

равны соответственно

$$2^{n+1}(\mu+1)^{-n-m-1}\frac{(n+m)!}{n!\,m!}(-1)^m F\left(n+1,\ n+m+1;\ m+1;\ \frac{\mu-1}{\mu+1}\right)$$

и

$$2^{n+1}(\mu+1)^{-n-1}(\mu-1)^m\frac{(n+m)!}{n!\,m!}(-1)^m F\left(n+1,\ n+m+1;\ m+1;\ \frac{\mu-1}{\mu+1}\right).$$

Известно [см. формулу (29)], что

$$P_n^{-m}(\mu)=\frac{1}{m!}\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{2}m}\left(\frac{\mu+1}{2}\right)^{-n-1}F\left(n+1,\ n+m+1;\ m+1;\ \frac{\mu-1}{\mu+1}\right).$$

Следовательно, члены, содержащие $e^{im\varphi}$ и $e^{-im\varphi}$, равны

$$(-1)^m\frac{(n+m)!}{n!}P_n^{-m}(\mu)\,e^{im\varphi}\quad \text{и}\quad (-1)^m\frac{(n+m)!}{n!}P_n^{-m}(\mu)\,e^{-im\varphi}.$$

Мы показали, таким образом, что

$$(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^{-n-1}=P_n(\mu)+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{(n+m)!}{n!}P_n^{-m}(\mu)\cos m\varphi. \tag{30}$$

Заменив здесь φ на $\varphi+\pi$, получим

$$(\mu-\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^{-n-1}=P_n(\mu)+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(n+m)!}{n!}P_n^{-m}(\mu)\cos m\varphi. \tag{31}$$

Мы предполагали, что действительная часть μ положительна; тот случай, когда действительная часть μ отрицательна, можно рассмотреть, заменив μ на $-\mu$.

Если μ действительно и заключено между 0 и 1, то мы имеем

$$(\mu\pm\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^{-n-1}=P_n(\mu+i\cdot 0)+ \\ +2\sum(\mp 1)^m\frac{(n+m)!}{n!}P_n^{-m}(\mu+i\cdot 0)\cos m\varphi,$$

и так как

$$P_n^{-m}(\mu+i\cdot 0)=e^{\frac{1}{2}m\pi i}P_n^{-m}(\mu),$$

то

$$(\cos\theta\pm i\sin\theta\cos\varphi)^{-n-1}=P_n(\cos\theta)+2\sum(\mp 1)^m e^{\frac{1}{2}m\pi i}P_n^{-m}(\cos\theta)\cos m\varphi. \tag{32}$$

§ 9. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ $P_n^m(\mu)$

63. Из формулы (30) следует (μ — произвольно), что

$$P_n^{-m}(\mu)=(-1)^m\frac{n!}{(n+m)!}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos m\varphi}{(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^{n+1}}d\varphi \qquad (m>0). \tag{33}$$

Равенство выражения

$$\frac{(n+m)!}{n!}\int\limits_0^\pi (\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^n \cos m\varphi\, d\varphi$$

для $P_n^m(\mu)$, даваемого формулой (21), и выражения

$$\frac{n!}{(n-m)!}(-1)^m \int\limits_0^\pi \frac{\cos m\varphi}{(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^{n+1}}\, d\varphi$$

при $n \geqslant m$ можно проверить с помощью способа, принадлежащего Якоби. Заметим, что в случае $m > n$ это равенство становится тривиальным, так как каждое из этих выражений обращается в нуль.

Воспользовавшись формулой

$$\cos m\varphi = \frac{(-1)^m 2^m m!}{(2m)!}\,\frac{d^m (1-z^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dz^m}\sin\varphi,$$

где $z=\cos\varphi$, получаем

$$\int\limits_0^\pi (\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^n \cos m\varphi\, d\varphi = \frac{(-1)^m 2^m m!}{(2m)!}\int\limits_{-1}^{1}(\mu+z\sqrt{\mu^2-1})^n \frac{d^m (1-z^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dz^m}\, dz.$$

После m-кратного интегрирования по частям правая часть этого равенства дает

$$\frac{2^m m!}{(2m)!}\, n(n-1)\,\ldots\,(n-m+1)\,(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int\limits_{-1}^{1}(\mu+z\sqrt{\mu^2-1})^{n-m}(1-z^2)^{m-\frac{1}{2}}\, dz,$$

следовательно, в силу (21)

$$P_n^m(\mu) = \frac{2^m m!\,(n+m)!\,(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}}{(2m)!\,(n-m)!}\int\limits_0^\pi (\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^{n-m}\sin^{2m}\varphi\, d\varphi. \qquad (34)$$

Воспользовавшись подстановкой

$$\cos\psi = \frac{\mu\cos\varphi+\sqrt{\mu^2-1}}{\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi},$$

получаем

$$P_n^m(\mu) = \frac{2^m m!\,(n+m)!}{(2m)!\,(n-m)!}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int\limits_0^\pi \frac{\sin^{2m}\psi}{(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\psi)^{n+m+1}}\, d\psi. \qquad (35)$$

Теперь, как и выше, можно показать, что

$$\int\limits_0^\pi (\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\psi)^{-n-1}\cos m\psi\, d\psi =$$

$$= \frac{2^m m!}{(2m)!}(n+1)(n+2)\ldots(n+m)(-1)^m \int\limits_0^\pi (\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\psi)^{-n-m-1}\sin^{2m}\psi\, d\psi,$$

и требуемое равенство доказано. Здесь всюду предполагается, что действительная часть μ положительна и что $n \geqslant m \geqslant 0$.

§ 10. ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ ДЛЯ СТЕПЕННОГО РЯДА С КОЭФФИЦИЕНТАМИ $P_n^m(\cos\theta)$

64. Пусть μ действительно и заключено между -1 и 1. Тогда, если $h<1$, то

$$\frac{1}{\sqrt{1-2h\mu+h^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\mu)\,h^n.$$

Дифференцируя обе части этого равенства m раз по μ, получаем

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-1)\,h^m}{(1-2h\mu+h^2)^{m+\frac{1}{2}}}=\sum_{n=m}^{\infty}h^n\frac{d^mP_n(\mu)}{d\mu^m}.$$

Почленное дифференцирование здесь допустимо, так как в каждом интервале, лежащем внутри $(-1, 1)$, ряд, получающийся после m-кратного дифференцирования, равномерно сходится.

Отсюда получаем, что коэффициент при h^{n-m} в разложении

$$\frac{1}{(1-2h\mu+h^2)^{m+\frac{1}{2}}}$$

по степеням h равен

$$\frac{2^m m!\,(-1)^m}{(2m)!}(1-\mu^2)^{-\frac{1}{2}m}P_n^m(\mu).$$

Полагая $h=\frac{r'}{r}$, $\mu=\cos\theta$, где $r'<r$, имеем

$$\frac{1}{\left(\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta}\right)^{m+\frac{1}{2}}}=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{2^m m!\,(-1)^m r'^{n-m}}{(2m)!\,r^{n+m+1}}(1-\mu^2)^{-\frac{1}{2}m}P_n^m(\mu).$$

Так как

$$\frac{1}{(r^2+r'^2-2rr'\cos\theta)^{m+\frac{1}{2}}}=\frac{1}{[x^2+y^2+(z-r')^2]^{m+\frac{1}{2}}}=$$

$$=\sum_{n=m}^{\infty}(-1)^{n-m}\frac{r'^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}}\frac{1}{r^{2m+1}},$$

то мы приходим к следующей формуле:

$$P_n^m(\cos\theta)=(-1)^n\frac{(2m)!}{2^m m!}\frac{\sin^m\theta}{(n-m)!}r^{n+m+1}\frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}}\frac{1}{r^{2m+1}},\tag{36}$$

представляющей собой обобщение формулы (13) гл. II для $P_n(\cos\theta)$.

Если выражение $\frac{1}{\sqrt{1-2h\mu+h^2}}$ проинтегрировать m раз по μ в пределах от 1 до μ, то получится

$$(-1)^m\frac{2^m m!}{(2m)!}\frac{1}{h^m}(1-2h\mu+h^2)^{m-\frac{1}{2}}$$

плюс некоторое рациональное выражение, содержащее только степени h, причем наивысшая отрицательная из этих степеней есть h^{-m}; это выражение должно быть равно $\sum h^nP_n^{-m}(\mu)(-1)^m(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m}$, следовательно, коэффициент при h^{n+m} в разложении $\frac{2^m m!}{(2m)!}(1-2h\mu+h^2)^{m-\frac{1}{2}}$ по степеням h

равен $\sin^m\theta\, P_n^{-m}(\cos\theta)$. Полагая $h=\frac{r'}{r}$, мы видим, что коэффициент при r'^{n+m} в разложении выражения

$$(r^2+r'^2-2rr'\cos\theta)^{m-\frac{1}{2}}$$

равен

$$\frac{(-1)^{n+m}}{(n+m)!}\frac{\partial^{n+m}}{\partial z^{n+m}}r^{2m-1}.$$

Таким образом, мы получаем следующую формулу:

$$P_n^{-m}(\cos\theta)=(-1)^{n+m}\sin^{-m}\theta\frac{2^m m!}{(2m)!\,(n+m)!}\frac{1}{r^{m-n-1}}\frac{\partial^{n+m}}{\partial z^{n+m}}r^{2m-1}. \tag{37}$$

65. Если в формуле

$$\int_0^\pi \frac{\cos m\varphi}{a+b\cos\varphi}\,d\varphi=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\left\{\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right\}^m$$

мы положим $a=\mu-h$, $b=+\sqrt{\mu^2-1}$, то получим равенство

$$\int_0^\pi \frac{\cos m\varphi\,d\varphi}{\mu-h+\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi}=\frac{\pi}{\sqrt{1-2h\mu+h^2}}\left\{\frac{h-\mu+\sqrt{1-2h\mu+h^2}}{\sqrt{\mu^2-1}}\right\}^m,$$

справедливое при условии, что $\frac{h-\mu}{\sqrt{\mu^2-1}}$ не принадлежит интервалу $(0, 1)$ действительной оси. Предполагая, что $h<1$, разложим подинтегральное выражение в левой части по степеням h; из формулы (33) мы видим, что

$$(-1)^m\frac{(n+m)!}{n!}P_n^{-m}(\mu)$$

равняется коэффициенту при h^n в разложении выражениия

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\mu h+h^2}}\left\{\frac{h-\mu+\sqrt{1-2\mu h+h^2}}{\sqrt{\mu^2-1}}\right\}^m$$

по степеням h. Здесь предполагается, что μ не принадлежит интервалу $(-1, 1)$ действительной оси.

Если μ действительно и лежит между -1 и 1, то положим $h=\frac{r'}{r}$; в этом случае $P_n^{-m}(\mu)$ следует заменить на $e^{\frac{1}{2}m\pi i}P_n^{-m}(\mu)$, и мы получаем, что $\frac{(n+m)!}{n!}P_n^{-m}(\mu)$ — коэффициент при $\left(\frac{r'}{r}\right)^n$ в разложении

$$\frac{r}{\sqrt{r^2-2\mu rr'+r'^2}}\left\{\frac{z-r'-\sqrt{r^2+r'^2-2\mu rr'}}{r\sqrt{1-\mu^2}}\right\}^m$$

— равняется

$$\frac{(-1)^{n+m}}{n!}\sin^{-m}\theta\frac{1}{r^{m-n-1}}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{(r-z)^m}{r}.$$

Отсюда

$$P_n^{-m}(\cos\theta)=\frac{(-1)^n}{(n-m)!}\frac{\sin^{-m}\theta}{r^{m-n-1}}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{(r-z)^m}{r},$$

или, согласно (23),

$$P_n^m(\cos\theta)=\frac{(-1)^{n+m}}{(n-m)!}\frac{\sin^{-m}\theta}{r^{m-n-1}}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{(r-z)^m}{r}=\frac{(-1)^{n+m}}{(n-m)!}r^{n+m+1}\sin^m\theta\frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{1}{(r+z)^m}.$$

Таким образом,

$$P_n^m(\cos\theta)=\frac{(-1)^{n+m}}{(n-m)!}r^{n+1}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left\{\frac{1}{r}\left(\frac{r-z}{r+z}\right)^{\frac{1}{2}m}\right\}; \tag{38}$$

если z заменить на $-z$, то эта формула примет вид

$$P_n^m(\cos\theta)=\frac{(-1)^n}{(n-m)!}r^{n+1}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left\{\frac{1}{r}\left(\frac{r+z}{r-z}\right)^{\frac{1}{2}m}\right\}. \tag{39}$$

Эти формулы могут быть получены также из (13) с помощью формулы Лагранжа. Пусть $y=\mu+h\frac{y^2-1}{2}$ и $f'(y)=\left(\frac{y+1}{y-1}\right)^m$. Тогда

$$f'(y)\frac{dy}{d\mu}=\sum\frac{h^n}{n!}\frac{d^n}{d\mu^n}\left\{\left(\frac{\mu^2-1}{2}\right)^n\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^m\right\},$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{1-2h\mu+h^2}}\left(\frac{y+1}{y-1}\right)^m=\sum\frac{h^n}{n!}2^n(n-m)!\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{1}{2}m}P_n^m(\mu).$$

Подставляя, как и в п. 44, вместо дроби $\frac{y+1}{y-1}$ ее значение и приравнивая коэффициенты при h^n, мы получим ту же самую производящую функцию, что и выше.

§ 11. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ФУНКЦИЯМИ С СОСЕДНИМИ НОМЕРАМИ

66. В п. 54 было показано, что $\frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu^m}$ удовлетворяет уравнению

$$(\mu^2-1)\frac{d^{m+2}}{d\mu^{m+2}}P_n(\mu)+2(m+1)\mu\frac{d^{m+1}}{d\mu^{m+1}}P_n(\mu)-$$
$$-(n-m)(n+m+1)\frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu^m}=0.$$

Отсюда с помощью равенства

$$(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu^m}=P_n^m(\mu)$$

получаем следующее соотношение:

$$P_n^{m+2}(\mu)+2(m+1)\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2-1}}P_n^{m+1}(\mu)-(n-m)(n+m+1)P_n^m(\mu)=0, \tag{40}$$

представляющее собой рекуррентное соотношение между тремя функциями $P_n^{m+2}(\mu)$, $P_n^{m+1}(\mu)$ и $P_n^m(\mu)$, причем μ не является действительным числом, меньшим 1. В случае $\mu=\cos\theta$ мы имеем

$$(-1)^m(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu^m}=P_n^m(\mu),$$

откуда получаем для этого случая

$$P_n^{m+2}(\cos\theta)+2(m+1)\operatorname{ctg}\theta P_n^{m+1}(\cos\theta)+(n-m)(n+m+1)P_n^m(\cos\theta)=0. \tag{41}$$

Чтобы получить рекуррентное соотношение между $P_{n+2}^m(\mu)$, $P_{n+1}^m(\mu)$ и $P_n^m(\mu)$, мы можем воспользоваться следующими формулами:

$$(2n+1)\mu P_n(\mu)-(n+1)P_{n+1}(\mu)-nP_{n-1}(\mu)=0,$$
$$\frac{dP_{n+1}(\mu)}{d\mu}-\frac{dP_{n-1}(\mu)}{d\mu}=(2n+1)P_n(\mu),$$

которые были получены в п. 20.

Дифференцируя первое из этих равенств m раз по μ, получаем

$$(2n+1)\mu\frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu^m}+(2n+1)m\frac{d^{m-1}P_n(\mu)}{d\mu^{m-1}}-\\ -(n+1)\frac{d^m P_{n+1}(\mu)}{d\mu^m}-n\frac{d^m P_{n-1}(\mu)}{d\mu^m}=0.$$

Дифференцируя второе равенство $m-1$ раз по μ, получаем

$$\frac{d^m P_{n+1}(\mu)}{d\mu^m}-\frac{d^m P_{n-1}(\mu)}{d\mu^m}=(2n+1)\frac{d^{m-1}P_n(\mu)}{d\mu^{m-1}}.$$

Исключая $\frac{d^{m-1}P_n(\mu)}{d\mu^{m-1}}$ из полученных равенств, имеем

$$(2n+1)\mu\frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu^m}-(n-m+1)\frac{d^m P_{n+1}(\mu)}{d\mu^m}-(n+m)\frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu^m}=0,$$

т. е.

$$(2n+1)\mu P_n^m(\mu)-(n-m+1)P_{n+1}^m(\mu)-(n+m)P_{n-1}^m(\mu) \tag{42}$$

или

$$(n-m+2)P_{n+2}^m(\mu)-(2n+3)\mu P_{n+1}^m(\mu)+(n+m+1)P_n^m(\mu)=0. \tag{42'}$$

Это и есть искомое рекуррентное соотношение.

§ 12. СВЯЗЬ МЕЖДУ $Q_n^{-m}(\mu)$ И $Q_n^m(\mu)$

67. Воспользовавшись представлением $Q_n(\mu)$ в виде ряда по возрастающим степеням $\frac{1}{\mu}$

$$Q_n(\mu)=\frac{2^n n!\,n!}{(2n+1)!}\left\{\frac{1}{\mu^{n+1}}+\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}\frac{1}{\mu^{n+3}}+\ldots\right\}=\\ =\frac{2^n n!\,n!}{(2n+1)!}\frac{1}{\mu^{n+1}}F\left(\frac{n+2}{2},\ \frac{n+1}{2};\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{\mu^2}\right),$$

справедливым при $|\mu|>1$, получаем, дифференцируя m раз по μ,

$$Q_n^m(\mu)=(-1)^m\frac{2^n n!\,(n+m)!}{(2n+1)!}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\left\{\frac{1}{\mu^{n+m+1}}+\right.\\ \left.+\frac{(n+m+1)(n+m+2)}{2(2n+3)}\frac{1}{\mu^{n+m+3}}+\ldots\right\}=(-1)^m\frac{2^n n!\,(n+m)!}{(2n+1)!}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\times\\ \times\frac{1}{\mu^{n+m+1}}F\left(\frac{n+m+2}{2},\ \frac{n+m+1}{2};\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{\mu^2}\right). \tag{43}$$

Эта формула определяет $Q_n^m(\mu)$ при $|\mu|>1$ не только $m\leqslant n$, но и вообще для всех целых положительных значений m; более того, она может быть принята за определение $Q_n^m(\mu)$ и для целых отрицательных m, таких, что $n+m>0$.

Воспользовавшись известным соотношением

$$F(\alpha,\beta;\gamma;x)=(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta;\ \gamma;\ x),$$

мы видим, что

$$Q_n^m(\mu)=(-1)^m\frac{2^n n!\,(n+m)!}{(2n+1)!}(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m}\frac{1}{\mu^{n-m+1}}\times\\ \times F\left(\frac{n-m+2}{2},\ \frac{n-m+1}{2};\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{\mu^2}\right). \tag{43'}$$

Отсюда приходим к следующему соотношению:

$$\frac{Q_n^m(\mu)}{(n+m)!}=\frac{Q_n^{-m}(\mu)}{(n-m)!}\qquad (n\geqslant m). \tag{44}$$

§ 13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ $Q_n^m(\cos\theta)$

68. Если $\mu=\cos\theta$, то $Q_n^m(\cos\theta)$ удобно определить следующим равенством:

$$(-1)^m Q_n^m(\cos\theta)=\frac{1}{2}\left[e^{-\frac{1}{2}m\pi i} Q_n^m(\cos\theta+i\cdot 0)+e^{\frac{1}{2}m\pi i} Q_n^m(\cos\theta-i\cdot 0)\right] \quad (45)$$

(см. п. 54), которое при $m=0$ согласуется с определением $Q_n(\cos\theta)$, данным в п. 32. Ясно, что так определенная функция $Q_n^m(\cos\theta)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Лежандра для действительных μ.

То единственное слагаемое в выражении (59) гл. II для случая произвольных значений μ, которое не является многочленом, входит в качестве слагаемого в выражение

$$Q_n^m(\mu)=(-1)^n\frac{2^n n!}{(2n)!}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\left[\frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}}(\mu^2-1)^n\right]\cdot\int_\mu^\infty\frac{d\mu}{(\mu^2-1)^{n+1}},$$

содержащее $\ln(\mu-1)$ и $\ln(\mu+1)$. Это слагаемое равно

$$(-1)^n\frac{2^n n!}{(2n)!}e^{\pm\frac{1}{2}m\pi i}(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m}\left[\frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}}(\mu^2-1)^n\right]\times$$
$$\times\left[\int_\mu^0\frac{d\mu}{(\mu^2-1)^{n+1}}\mp(-1)^n i\int_0^\infty\frac{dw}{(w^2+1)^{n+1}}\right],$$

где $\mu=\cos\theta\pm i\cdot 0$, так как интеграл от 0 до ∞ следует брать вдоль мнимой оси в положительном или в отрицательном направлении, в зависимости от того, берется в выражении $\cos\theta\pm i\cdot 0$ знак $+$ или $-$.

Отсюда следует, что

$$e^{-\frac{1}{2}m\pi i}Q_n^m(\cos\theta+i\cdot 0)-e^{\frac{1}{2}m\pi i}(\cos\theta-i\cdot 0)=$$
$$=(-2i)\frac{2^n n!}{(2n)!}(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}}(\mu^2-1)^n\int_0^\infty\frac{dw}{(w^2+1)^{n+1}}.$$

Таким образом, мы приходим к следующему соотношению:

$$e^{-\frac{1}{2}m\pi i}Q_n^m(\mu+i\cdot 0)-e^{\frac{1}{2}m\pi i}Q(\mu-i\cdot 0)=-i\pi(-1)^m P_n^m(\mu). \quad (46)$$

Из определения (45) и равенства (46) получаем

$$Q_n^m(\mu+i\cdot 0)=e^{\frac{3}{2}m\pi i}\left\{Q_n^m(\mu)-\frac{i\pi}{2}P_n^m(\mu)\right\},$$
$$Q_n^m(\mu-i\cdot 0)=e^{\frac{1}{2}m\pi i}\left\{Q_n^m(\mu)+\frac{i\pi}{2}P_n^m(\mu)\right\},$$

где $\mu=\cos\theta$.

Мы предполагали выше, что $m\leqslant n$, так как иначе рассматриваемое выражение обращается в нуль. Однако соотношение (46) остается в силе и без этого ограничения, так как $P_n^m(\mu)=0$ при $m>n$, и равенство (46) принимает вид

$$e^{-\frac{1}{2}m\pi i}Q_n^m(\mu+i\cdot 0)=e^{\frac{1}{2}m\pi i}Q_n^m(\mu-i\cdot 0).$$

§ 14. ФУНКЦИИ $Q_n^m(\mu)$, $Q_n^m(\cos\theta)$

69. Для μ, не принадлежащих отрезку $[-1, 1]$ действительной оси, функция $Q_n^m(\mu)$ была определена в п. 54 как $(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\dfrac{d^m Q_n(\mu)}{d\mu^m}$; в силу

формулы (59) гл. II это эквивалентно равенству

$$Q_n^m(\mu) = (-1)^n \frac{2^n n!}{(2n)!} (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} \frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}} \left[(\mu^2-1)^n \int_\mu^\infty \frac{d\mu}{(\mu^2-1)^{n+1}} \right],$$

где μ не принадлежит действительной полупрямой $(-\infty, 1)$.

Чтобы получить для $Q_n^m(\mu)$ выражение, аналогичное формуле (13) для $P_n^m(\mu)$, положим $u=(\mu-1)^{n-m}(\mu+1)^{n+m}$. Тогда u удовлетворяет следующему уравнению:

$$(1-\mu^2)\frac{du}{d\mu} + 2(n\mu - m)u = 0,$$

откуда, дифференцируя по μ, получаем

$$(1-\mu^2)\frac{d^2u}{d\mu^2} + [2(n-1)\mu - 2m]\frac{du}{d\mu} + 2nu = 0.$$

Чтобы найти общее решение этого уравнения второго порядка, положим $u=(\mu-1)^{n-m}(\mu+1)^{n+m}w$; мы получим тогда для w дифференциальное уравнение

$$\frac{\dfrac{d^2w}{d\mu^2}}{\dfrac{dw}{d\mu}} = 2\,\frac{\dfrac{d}{d\mu}\left[(\mu-1)^{n-m}(\mu+1)^{n+m}\right]}{(\mu-1)^{n-m}(\mu+1)^{n+m}} + \frac{2(n-1)\mu - 2m}{1-\mu^2} = 0,$$

откуда

$$\frac{dw}{d\mu}(\mu-1)^{2n-2m}(\mu+1)^{2n+2m}(\mu^2-1)^{-n+1}(\mu+1)^{-m}(\mu-1)^m = C',$$

т. е.

$$w = C\int^\mu \frac{d\mu}{(\mu-1)^{n-m+1}(\mu+1)^{n+m+1}}.$$

Таким образом, выражение

$$u = (\mu-1)^{n-m}(\mu+1)^{n+m}\left[A + B\int^\mu \frac{d\mu}{(\mu-1)^{n-m+1}(\mu+1)^{n+m+1}}\right]$$

представляет собой общее решение дифференциального уравнения

$$(1-\mu^2)\frac{d^2u}{d\mu^2} + [2(n-1)\mu - 2m]\frac{du}{d\mu} + 2nu = 0.$$

Дифференцируя это уравнение n раз по μ, получаем, что

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{d^{n+1}u}{d\mu^{n+1}}\right] - 2m\frac{d^{n+1}u}{d\mu^{n+1}} + n(n+1)\frac{d^n u}{d\mu^n} = 0.$$

Это последнее уравнение легко сводится к тому уравнению, которому удовлетворяют $P_n^m(\mu)$ и $Q_n^m(\mu)$. Положив в уравнении (1) $u=\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{2}m}U$, получим, что U удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dU}{d\mu}\right] - 2m\frac{dU}{d\mu} + n(n+1)U = 0.$$

Таким образом, общее решение уравнения (1) имеет вид

$$u = \left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^n}{d\mu^n}\left[(\mu-1)^{n-m}(\mu+1)^{n+m}\left(A + B\int^\mu \frac{d\mu}{(\mu-1)^{n-m+1}(\mu+1)^{n+m+1}}\right)\right].$$

Первая часть этого решения совпадает с выражением (13) для $P_n^m(\mu)$; вторая часть, обращающаяся в бесконечность при $\mu = \pm 1$ и стремящаяся к нулю при $|\mu| \to \infty$, дает

$$Q_n^m(\mu) = K\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{2}m} \frac{d^n}{d\mu^n}\left[(\mu-1)^{n-m}(\mu+1)^{n+m}\int\limits_\mu^\infty \frac{d\mu}{(\mu-1)^{n-m+1}(\mu+1)^{n+m+1}}\right].$$

Все это выражение является алгебраическим, за исключением слагаемого, которое содержит член $\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}$, появляющийся при интегрировании.

Чтобы определить постоянную K, предположим, что $|\mu| \to \infty$, тогда главная часть рассматриваемого выражения равна

$$K\frac{d^n}{d\mu^n}\left[\mu^{2n}\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{\mu^{2n+1}}\right],$$

т. е.

$$\frac{K}{2n+1}\cdot\frac{n!\,(-1)^n}{\mu^{n+1}};$$

с другой стороны, из формулы (43) следует, что главная часть есть

$$(-1)^m\frac{2^n n!\,(n+m)!}{(2n+1)!}\,\frac{1}{\mu^{n+1}},$$

отсюда

$$K = (-1)^{m-n}\frac{2^n(n+m)!}{(2n)!}.$$

Таким образом, мы получаем следующую формулу:

$$Q_n^m(\mu) = (-1)^{n-m}\frac{2^n(n+m)!}{(2n)!}\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^n}{d\mu^n}\left[(\mu-1)^{n-m}(\mu+1)^{n+m}\times\right.$$
$$\left.\times\int\limits_\mu^\infty\frac{d\mu}{(\mu-1)^{n-m+1}(\mu+1)^{n+m+1}}\right], \qquad (47)$$

аналогично формуле (13) для $P_n^m(\mu)$.

70. Полагая $\mu = \cos\theta \pm i\cdot 0$, получаем, что

$$Q_n^m(\cos\theta \pm i\cdot 0) = \frac{2^n(n+m)!}{(2n)!}\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^{\frac{1}{2}m} e^{\pm\frac{1}{2}m\pi i}(-1)^{n-m+1}\times$$
$$\times\frac{d^n}{d\mu^n}\left[(1-\mu)^{n-m}(1+\mu)^{n+m}\int\limits_\mu^\infty\frac{d\mu}{(1-\mu)^{n-m+1}(1+\mu)^{n+m+1}}\right].$$

Интеграл от μ до ∞ берется вдоль пути, идущего выше или ниже действительной оси, в соответствии с тем, берется в выражении $\cos\theta \pm i\cdot 0$ знак $+$ или $-$.

Интеграл от μ до ∞ можно разбить на две части, первая вдоль действительной оси до 0, а вторая вдоль мнимой оси от 0 до $\pm i\infty$, тогда этот интеграл примет вид

$$\int\limits_\mu^\infty\frac{d\mu}{(1-\mu)^{n-m+1}(1+\mu)^{n+m+1}} \pm i\int\limits_0^\infty\frac{d\xi}{(1+\xi^2)^{n-m+1}(1+i\xi)^{2m}}.$$

Положив $\xi = \operatorname{tg}\psi$, получим

$$\int\limits_0^\infty\frac{d\xi}{(1+\xi^2)^{n-m+1}(1+i\xi)^{2m}} = \int\limits_0^\pi\cos^{2n}\psi\,(\cos 2m\psi - i\sin 2m\psi)\,d\psi.$$

Далее, разлагая $\cos^{2n}\psi$ по косинусам кратных дуг, легко показать, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\psi \sin 2m\psi\, d\psi = 0$$

и

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\psi \cos 2m\psi\, d\psi = \frac{1}{2^{2n+1}} \frac{(2n)!\,\pi}{(n-m)!\,(n+m)!}.$$

Воспользовавшись формулой (45) для $Q_n^m(\cos\theta)$, получаем

$$Q_n^m(\cos\theta) = (-1)^n \frac{2^n (n+m)!}{(2n)!} \left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^{\frac{1}{2}m} \frac{d^n}{d\mu^n}\left[(1-\mu)^{n-m}(1+\mu)^{n+m} \times \right.$$
$$\left. \times \int_0^{\mu} \frac{d\mu}{(1-\mu)^{n-m+1}(1+\mu)^{n+m+1}}\right], \qquad (48)$$

где $\mu = \cos\theta$, $n \geqslant m \geqslant 0$. При $m=0$ получаем формулу (60) гл. II.

Равенство (46)

$$e^{-\frac{1}{2}m\pi i} Q_n^m(\mu + i\cdot 0) - e^{\frac{1}{2}m\pi i} Q_n^m(\mu - i\cdot 0) = -i\pi(-1)^m P_n^m(\mu)$$

легко проверить, воспользовавшись приведенным выше выражением для $Q_n^m(\mu \pm i\cdot 0)$ и формулой (13) для $P_n^m(\mu)$.

Формулу (48) легко распространить на любые целые значения m.

§ 15. РАЗЛОЖЕНИЕ $Q_n^m(\mu)$ И $P_n^m(\mu)$ ПО СТЕПЕНЯМ $\mu-\sqrt{\mu^2-1}$

71. Если в уравнении (2) за новое независимое переменное принять $\xi = (\mu - \sqrt{\mu^2-1})^2$, то получим

$$\xi^2(1-\xi)\frac{d^2v}{d\xi^2} + \xi\left[\frac{1}{2} - m - \left(m+\frac{3}{2}\right)\xi\right]\frac{dv}{d\xi} - \frac{1}{4}(n-m)(n+m+1)(1-\xi)v = 0;$$

если теперь положить $v = \xi^{\frac{1}{2}(n+m+1)}v'$, то для v' получается следующее дифференциальное уравнение:

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2v'}{d\xi^2} + \left[\left(n+\frac{3}{2}\right) - \left(n+2m+\frac{5}{2}\right)\xi\right]\frac{dv'}{d\xi} - (n+m+1)\left(m+\frac{1}{2}\right)v' = 0.$$

Сравнивая его с дифференциальным уравнением

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2v'}{d\xi^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)\xi]\frac{dv'}{d\xi} - \alpha\beta v' = 0,$$

которому удовлетворяет $v' = F(\alpha, \beta; \gamma; \xi)$, мы видим, что при $\alpha = n+m+1$, $\beta = m+\frac{1}{2}$, $\gamma = n+\frac{3}{2}$ эти уравнения совпадают. Таким образом, основному уравнению (1) удовлетворяют функции

$$u_1 = \xi^{\frac{1}{2}(n+m+1)}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} F\left(\frac{1}{2}+m,\ n+m+1;\ n+\frac{3}{2};\ \xi\right)$$

и

$$u_2 = \xi^{\frac{1}{2}(m-n)}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} F\left(\frac{1}{2}+m,\ m-n;\ \frac{1}{2}-n,\ \xi\right).$$

Заменяя m на $-m$, мы видим, что уравнению (1) удовлетворяют также функции

$$u_3=\xi^{\frac{1}{2}(n-m+1)}(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m}F\left(\frac{1}{2}-m,\ n-m+1;\ n+\frac{3}{2};\ \xi\right)$$

и

$$u_4=\xi^{-\frac{1}{2}(n+m)}(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m}F\left(\frac{1}{2}-m,\ -m-n;\frac{1}{2}-n;\ \xi\right).$$

Ряды u_1 и u_2 сходятся для всех значений μ, не принадлежащих отрезку $[-1,\ 1]$; u_3 и u_4 сходятся для всех μ, так как действительная часть $\sqrt{\mu^2-1}$ имеет тот же знак, что и действительная часть μ. Чтобы получить выражение для $Q_n^m(\mu)$, достаточно, полагая $|\mu|\to\infty$, сравнить полученные решения с выражением (43), в котором главный член равен

$$(-1)^m\frac{2^n n!\,(n+m)!}{(2n+1)!}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{1}{\mu^{n+m+1}};$$

таким образом, $Q_n^m(\mu)$ можно выразить через ряд u_1, в котором главный член равен $\frac{1}{2^{n+m+1}}\cdot\frac{1}{\mu^{n+m+1}}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}$, и мы приходим к следующей формуле:

$$Q_n^m(\mu)=(-1)^m\frac{2^{2n+m+1}}{(2n+1)!}z^{-(n+m+1)}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\times$$
$$\times F\left(\frac{1}{2}+m,\ n+m+1;\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{z^2}\right),\tag{49}$$

где $z=\mu+\sqrt{\mu^2-1}$.

Воспользовавшись соотношением

$$F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ x)=(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta;\ \gamma;\ x),$$

мы получаем также формулу

$$Q_n^m(\mu)=(-1)^m\frac{2^{2n-m+1}n!\,(n+m)!}{(2n+1)!}z^{m-n-1}(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m}\times$$
$$\times F\left(\frac{1}{2}-m,\ n-m+1;\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{z^2}\right),\tag{50}$$

где $z=\mu+\sqrt{\mu^2-1}$.

Заметим, что ряд (46) сходится при $|z|=1$, $m>0$, т. е. при $\mu=\cos\theta$, и в силу теоремы Абеля сумма этого ряда непрерывна, как и его сумма при $|z|>1$. Это следует из известного факта, что гипергеометрический ряд $F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ 1)$ сходится, когда $\gamma-\alpha-\beta>0$.

Если μ велико по модулю, то главный член ряда u_2 есть $(2\mu)^{n-m}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}$; сравнение с формулой (5) показывает, что главный член в выражении для $P_n^m(\mu)$ равен

$$\frac{(2n)!}{2^n n!\,(n-m)!}\mu^{n-m}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}.$$

Отсюда получаем следующую формулу:

$$P_n^m(\mu)=\frac{2^{m-2n}(2n)!}{n!\,(n-m)!}\xi^{\frac{1}{2}(m-n)}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}F\left(\frac{1}{2}+m,\ m-n;\ \frac{1}{2}-n;\ \xi\right),\tag{51}$$

где $\xi=(\mu-\sqrt{\mu^2-1})^2=\frac{1}{z^2}$. Так как $n\geqslant m$, то выражение (51) представляет собой многочлен от ξ.

Формула (51) может быть приведена к следующему виду:

$$P_n^m(\mu)=\frac{2^{-m-2n}(2n)!}{n!\,(n-m)!}\,\xi^{-\frac{1}{2}(m+n)}(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m}F\left(-n-m,\ \frac{1}{2}-m;\ \frac{1}{2}-n;\ \xi\right). \tag{52}$$

С помощью определений, изложенных в п. 55 и 68, из формул (49) и (51) можно получить разложения $P_n^m(\cos\theta)$, $Q_n^m(\cos\theta)$ по косинусам дуг, кратных θ.

§ 16. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ $Q_n^m(\mu)$

72. Выражение (49) можно записать в интегральной форме с помощью следующего равенства:

$$F(\alpha,\beta;\gamma;x)=\frac{\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\gamma-\alpha-1)}\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-xu)^{-\beta}\,du;$$

таким образом, получаем при $n\geqslant m$, что

$$Q_n^m(\mu)=(-1)^m\frac{2^{2n+m+1}n!\,(n+m)!}{(2n+1)!}\,\frac{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)\Pi(n-m)}\,\xi^{\frac{1}{2}(n+m+1)}\times$$

$$\times(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int_0^1 u^{m-\frac{1}{2}}(1-u)^{n-m}(1-\xi u)^{-n-m-1}\,du,$$

или, полагая $u=\dfrac{v-1}{v+1}$,

$$Q_n^m(\mu)=(-1)^m\frac{2^{n+2m}(n+m)!\,(m-1)!}{(n-m)!\,(2m-1)!}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\times$$

$$\times\int_1^\infty(v^2-1)^{m-\frac{1}{2}}\left[2\mu+2v\sqrt{\mu^2-1}\right]^{-n-m-1}dv.$$

Эта формула подстановкой $v=\operatorname{ch}\psi$ приводится к виду

$$Q_n^m(\mu)=(-1)^m\frac{2^m(n+m)!\,(m)!}{(n-m)!\,(2m)!}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int_0^\infty\frac{\operatorname{sh}^{2m}\psi\,d\psi}{\left(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\operatorname{ch}\psi\right)^{n+m+1}}, \tag{53}$$

где $n-m\geqslant 0$ и μ не принадлежит отрезку $[-1,1]$ действительной оси.

В случае $\mu=\cos\theta$ из определения, сформулированного в п. 68, получаем

$$Q_n^m(\cos\theta)=\frac{2^{m-1}(n+m)!\,m!}{(n-m)!\,(2m)!}\sin^m\theta\left[\int_0^\infty\frac{\operatorname{sh}^{2m}\psi\,d\psi}{(\cos\theta+i\sin\theta\operatorname{ch}\psi)^{n+m+1}}+\right.$$

$$\left.+\int_0^\infty\frac{\operatorname{sh}^{2m}\psi\,d\psi}{(\cos\theta-i\sin\theta\operatorname{ch}\psi)^{n+m+1}}\right],$$

а также

$$\pi i P_n^m(\cos\theta)=\frac{2^m(n+m)!\,m!}{(n-m)!\,(2m)!}\sin^m\theta\left[\int_0^\infty\frac{\operatorname{sh}^{2m}\psi\,d\psi}{(\cos\theta-i\sin\theta\operatorname{ch}\psi)^{n+m+1}}-\right.$$

$$\left.-\int_0^\infty\frac{\operatorname{sh}^{2m}\psi\,d\psi}{(\cos\theta+i\sin\theta\operatorname{ch}\psi)^{n+m+1}}\right].$$

Записав выражение

$$\int_0^\infty \frac{(v^2-1)^{m-\frac{1}{2}}}{(\mu+v\sqrt{\mu^2-1})^{m+n+1}}\,dv$$

в виде

$$\frac{n!}{(n+m)!}(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m}\int_0^\infty \frac{d^m(v^2-1)^{m-\frac{1}{2}}}{dv^m}\,\frac{dv}{(\mu+v\sqrt{\mu^2-1})^{n+1}}$$

и воспользовавшись формулой

$$\frac{d^{m-1}(1-v^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dv^{m-1}}=(-1)^{m-1}\frac{(2m)!}{2^m m!}\,\frac{\sin m\theta}{m},$$

где $v=\cos\theta$, мы получим выражение

$$\frac{n!\,(2m)!}{2^m(n+m)!\,m!}(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m}\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} m\psi}{(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\operatorname{ch}\psi)^{n+1}}\,d\psi,$$

где $\theta=i\psi$. Таким образом мы пришли к следующей формуле:

$$Q_n^m(\mu)=(-1)^m\frac{n!}{(n-m)!}\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} m\psi}{(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\operatorname{ch}\psi)^{n+1}}\,d\psi, \tag{54}$$

где $n\geqslant m$ и μ не принадлежит отрезку $[-1, 1]$ действительной оси.

Сделав в формуле (49) подстановку

$$\operatorname{ch}\psi'=\frac{\mu\operatorname{ch}\psi+\sqrt{\mu^2-1}}{\mu+\sqrt{\mu^2-1}\operatorname{ch}\psi},$$

получаем

$$Q_n^m(\mu)=(-1)^m 2^{3m}\frac{(n+m)\,m!}{(n-m)!\,(2m)!}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\times$$
$$\times\int_0^{\ln\sqrt{\frac{\mu+1}{\mu-1}}}(\mu-\sqrt{\mu^2-1}\operatorname{ch}\psi')^{n-m}\operatorname{sh}^{2m}\psi'\,d\psi',$$

где $n\geqslant m$.

Преобразовав это выражение по формуле Якоби, мы приходим к следующей формуле:

$$Q_n^m(\;\;=\;-1)^m\frac{(n+m)!}{n!}\int_0^{\ln\sqrt{\frac{\mu+1}{\mu-1}}}(\mu-\sqrt{\mu^2-1}\operatorname{ch}\psi)^n\operatorname{ch} m\psi\,d\psi, \tag{55}$$

справедливой при всех значениях m; она удобна для фактического нахождения значений $Q_n^m(\mu)$, так как, пользуясь ею, приходится вычислять только интегралы вида

$$\int_0^{\ln\sqrt{\frac{\mu+1}{\mu-1}}}\operatorname{ch}^r\psi\operatorname{ch} m\psi\,d\psi.$$

§ 17. ВИД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ

73. В п. 40 было показано, что для всех значений μ, не принадлежащих отрезку $[-1, 1]$ действительной оси,

$$Q_n(\mu)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_n(u)}{\mu-u}\,du;$$

дифференцируя обе части этого равенства m раз по μ и умножая на $(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}$, получаем

$$Q_n^m(\mu)=(-1)^m\frac{1}{2}\,m!\,(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int_{-1}^{1}\frac{P_n(u)}{(\mu-u)^{m+1}}\,du.$$

Эта формула наводит на мысль, что уравнению (2) должен удовлетворять определенный интеграл вида

$$\int_a^b\frac{P_n(t)}{(\mu-t)^{m+1}}\,dt,$$

где интеграл берется вдоль некоторого пути, не проходящего через точку μ.

Положив

$$v=\int_a^b\frac{P_n(t)}{(\mu-t)^{m+1}}\,dt,$$

имеем

$$(1-\mu^2)\frac{d^2v}{d\mu^2}-2(m+1)\mu\frac{dv}{d\mu}+(n-m)(n+m+1)v=$$
$$=\int_a^b[(m+1)(m+2)(1-\mu^2)+2\mu(m+1)^2(\mu-t)+$$
$$+(n-m)(n+m+1)(\mu-t)^2]\frac{P_n(t)}{(\mu-t)^{m+3}}\,dt.$$

Далее,

$$\frac{d}{dt}\frac{1-t^2}{(\mu-t)^{m+2}}=(m+2)\frac{1-t^2}{(\mu-t)^{m+3}}-\frac{2t}{(\mu-t)^{m+1}}=$$
$$=\frac{(m+2)[(1-\mu^2)+2\mu(\mu-t)-(\mu-t)^2]}{(\mu-t)^{m+3}}+\frac{2[(\mu-t)-\mu]}{(\mu-t)^{m+1}}=$$
$$=(m+2)\frac{1-\mu^2}{(\mu-t)^{m+3}}+\frac{2(m+1)\mu}{(\mu-t)^{m+2}}-\frac{m}{(\mu-t)^{m+1}}.$$

Следовательно, рассматриваемый интеграл равен

$$\int_a^b\left[(m+1)\frac{d}{dt}\frac{1-t^2}{(\mu-t)^{m+2}}+\frac{n(n+1)}{(\mu-t)^{m+1}}\right]P_n(t)\,dt,$$

т. е.

$$\left[(m+1)\frac{1-t^2}{(\mu-t)^{m+2}}P_n(t)\right]_a^b-$$
$$-\int_a^b\left[(m+1)\frac{1-t^2}{(\mu-t)^{m+2}}\frac{dP_n(t)}{dt}-\frac{n(n+1)}{(\mu-t)^{m+1}}P_n(t)\right]dt.$$

Так как $P_n(t)$ удовлетворяет уравнению Лежандра, то последнее выражение равно

$$\left[(m+1)\frac{1-t^2}{(\mu-t)^{m+2}}P_n(t)-\frac{1-t^2}{(\mu-t)^{m+1}}\frac{dP_n(t)}{dt}\right]_a^b.$$

Мы заведомо можем добиться, чтобы эта величина обращалась в нуль, положив $b=1$, $a=-1$. Так как многочлен $P_n(t)$ имеет степень n, то при $m>n$ мы можем получить тот же результат, положив $b=\infty$, $a=1$ или $b=\infty$, $a=-1$. Далее, если m отрицательно и по абсолютной величине больше 2, то мы можем положить $b=1$, $a=\mu$ или $b=-1$, $a=\mu$. Таким образом, мы получаем решения уравнения (1) в следующих видах:

а) $(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int\limits_{-1}^{1}\frac{P_n(u)}{(\mu-u)^{m+1}}du$, где μ не принадлежит отрезку $[-1, 1]$ действительной оси; этот вид мы уже рассматривали;

б) $(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int\limits_{1}^{\infty}\frac{P_n(u)}{(u-\mu)^{m+1}}du$, где $m>n$;

в) $(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int\limits_{-1}^{\infty}\frac{P_n(u)}{(u-\mu)^{m+1}}du$, где $m>n$;

г) $(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m}\int\limits_{\mu}^{1}(u-\mu)^{m-1}P_n(u)\,du$, где $m>2$;

д) $(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m}\int\limits_{-1}^{\mu}(u-\mu)^{m-1}P_n(u)\,du$, где $m>2$.

Формы «б» и «в» представляют собой два независимых решения уравнения (1) при $m>n$, причем путь интегрирования не должен проходить через точку $u=\mu$.

Формы «в» и «г» при $m\leqslant n$ обе представляют решение $P_n^m(\mu)$. Эти решения и их разложения в ряды были подробно изучены Ф. Нейманом[1]).

Заметим, что указанные выше формы решений уравнения (2) остаются в силе и при произвольных (т. е. не обязательно целых или даже действительных) значениях n и m, хотя Нейман в своих исследованиях ограничивался целыми n и m.

[1]) Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen, Leipzig, 1878, стр. 25—40.

Глава IV

СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

74. Мы переходим к изучению решений уравнения Лапласа в его первоначальной форме

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0. \tag{1}$$

Эти решения будут получены в виде однородных функций от x, y, z. Решения, найденные в гл. II и III, получатся при этом в качестве частных случаев. Многие результаты, полученные в гл. II и III, будут здесь изложены с иной точки зрения.

Функции, однородные степени n относительно x, y и z и удовлетворяющие уравнению (1), называются *шаровыми функциями*. Степень n может быть целой, положительной или отрицательной, но может быть и дробной или даже любой комплексной.

В этой главе мы рассмотрим только случай целых степеней (положительных и отрицательных), отложив изучение функций дробных и комплексных степеней до гл. V.

Если x, y, z заменить их выражениями в сферических координатах, то шаровая функция степени n примет вид $r^n \cdot f_n(\theta, \varphi)$; при этом множитель $f_n(\theta, \varphi)$ называется *сферической* (*поверхностной*) *функцией* степени n.

Удобство пользования шаровыми функциями, записанными в декартовых координатах, было замечено почти одновременно Томсоном (лорд Кельвин) в Англии и Клебшем в Германии. Наиболее полное изложение этого вопроса содержится в хорошо известном Приложении В «Натуральной философии» Томсона и Тэта.

Термин «сферические функции», введенный Кельвином, связан с тем обстоятельством, что с помощью этих функций может быть записан потенциал, удовлетворяющий тем или иным определенным условиям, заданным на поверхности некоторой сферы.

75. Пусть V_n означает произвольную шаровую функцию степени n, тогда

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(r^m V)=r^m\frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2}+2mr^{m-2}x\frac{\partial V_n}{\partial x}+\{mr^{m-2}+m(m-2)x^2r^{m-4}\}V_n;$$

выписав соответствующие выражения для $\frac{\partial^2}{\partial y^2}(r^m V_n)$ и $\frac{\partial^2}{\partial z^2}(r^m V_n)$ и сложив все три равенства, получим

$$\nabla^2(r^m V_n)=2mr^{m-2}\left(x\frac{\partial V_n}{\partial x}+y\frac{\partial V_n}{\partial y}+z\frac{\partial V_n}{\partial z}\right)+m(m+1)r^{m-2}V_n;$$

так как

$$x\frac{\partial V_n}{\partial x}+y\frac{\partial V_n}{\partial y}+z\frac{\partial V_n}{\partial z}=nV_n,$$

то отсюда имеем

$$\nabla^2(r^m V_n)=m(2n+m+1)r^{m-2}V_n. \tag{2}$$

Если в уравнении (2) положить $m = -(2n+2)$, то получим

$$\nabla^2 r^{-2n-1} V_n = 0. \tag{3}$$

Таким образом мы приходим к следующему фундаментальному результату: если V_n — шаровая функция степени n, то шаровая функция степени $-n-1$ получается делением V_n на r^{2n+1}.

Формулы (2) и (3) остаются справедливыми при любых значениях n. Каждой шаровой функции целой положительной степени n соответствует, как мы видели, шаровая функция целой отрицательной степени $-n-1$. Этот результат можно сформулировать следующим образом: каждой (поверхностной) сферической функции $f_n(\theta, \varphi)$ отвечают две шаровые функции $r^n f_n(\theta, \varphi)$ и $r^{-n-1} f_n(\theta, \varphi)$.

Результат (3) представляет собой частный случай следующего более общего факта: если $F(x, y, z)$ — произвольная функция, удовлетворяющая уравнению $\nabla^2 F = 0$, то функция $\frac{1}{r} F\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right)$ удовлетворяет тому же самому дифференциальному уравнению. Это утверждение, которое можно проверить непосредственным дифференцированием, тесно связано с томсоновской теорией инверсии; действительно, пусть (x', y', z') — точка, которая получается из точки (x, y, z) с помощью инверсии относительно сферы радиуса 1 с центром в начале координат, и $F(x, y, z)$ представляет собой некоторый потенциал, тогда значение потенциала в точке (x', y', z') равно

$$\frac{1}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2}} F(x, y, z),$$

т. е.

$$\frac{1}{r'} F\left(\frac{x'}{r'^2}, \frac{y'}{r'^2}, \frac{z'}{r'^2}\right).$$

Эта последняя функция представляет собой потенциальную функцию независимых переменных x', y', z'.

Если f_n — однородная функция степени n, не обязательно сферическая, то вместо (2) мы получаем более общую формулу

$$\nabla^2 (r^m f_n) = m(2n + m + 1) r^{m-2} f_n + r^m \nabla^2 f_n, \tag{4}$$

которая совпадает с (2), когда f_n — сферическая функция.

В случае $m = -(2n+1)$ имеем

$$\nabla^2 \left(\frac{f_n}{r^{2n+1}}\right) = \frac{\nabla^2 f_n}{r^{2n+1}}. \tag{5}$$

§ 2. ОБЫКНОВЕННЫЕ ШАРОВЫЕ ФУНКЦИИ

76. Наиболее важными шаровыми функциями целой положительной степени n являются те, которые представляют собой многочлены степени n относительно x, y, z. Эти шаровые функции вместе с соответствующими им шаровыми функциями отрицательной степени $-n-1$, получающимися из первых умножением на r^{-2n-1}, можно назвать *обыкновенными* (*ordinary*) или *полными* (*complete*) шаровыми функциями. Эти функции мы здесь и рассмотрим; другие типы шаровых функций будут изучены ниже. Наиболее общий однородный многочлен степени n содержит $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ произвольных коэффициентов; если его подставить в уравнение Лапласа, то получится выражение степени $n-2$, которое следует приравнять нулю. Так как коэффициент при каждом члене, содержащем $x^{p_1} y^{p_2} z^{p_3}$, где

$p_1+p_2+p_3=n-2$, должен быть равен нулю, то $\frac{1}{2}$ $n+1)(n+2)$ коэффициентов исходного многочлена должны удовлетворять $\frac{1}{2}n(n-1)$ соотношениям. Если все эти соотношения независимы собой, то $\frac{1}{2}n(n-1)$ коэффициентов могут быть выражены через остальные; таким образом, совокупность гармонических функций указанного типа зависит от $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}n(n-1)=2n+1$ независимых параметров. Следовательно, среди этих функций должно существовать $2n+1$ линейно независимых, а все остальные гармонические функции данного типа представляются в виде их линейных комбинаций. Например, линейно независимыми гармоническими многочленами степени 1 являются x, y, z, выражения y^2-z^2, z^2-x^2, yz, zx, xy представляют собой пять линейно независимых гармонических многочленов степени 2.

Мыслимо, однако[1]), что эти $\frac{1}{2}n(n-1)$ соотношений между коэффициентами не будут независимы между собой; в этом случае число тех коэффициентов, которые можно выразить через остальные, было бы меньше, чем $\frac{1}{2}n(n-1)$, и, следовательно, число линейно независимых гармонических функций степени n оказалось бы больше, чем $2n+1$. Это было бы в том случае, если бы существовали гармонические многочлены степени $n-2$, которые нельзя получить применением оператора ∇^2 к однородному многочлену степени n, т. е. если бы произвольный многочлен степени $n-2$ нельзя было бы получить применением оператора ∇^2 к многочлену степени n. В п. 80 будет непосредственно доказано, что это не так. Если это предположить доказанным, то отсюда непосредственно вытекает, что число линейно независимых однородных гармонических многочленов степени n равно в точности $2n+1$. Сейчас мы дадим косвенное доказательство этого факта, основанное на результатах гл. III.

Подставим в произвольный однородный многочлен степени n от x, y, z вместо x, y и z их выражения в сферических координатах:

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\qquad y=r\sin\theta\sin\varphi,\qquad z=r\cos\theta,$$

запишем выражения вида $\cos^p\varphi\sin^q\varphi$ через синусы и косинусы кратных дуг и приведем подобные члены. Воспользовавшись выражением (1) гл. II для ∇^2 в сферических координатах, получаем, что если $P_n(x, y, z)$ — произвольный однородный многочлен степени n, то $\nabla^2 P_n(x, y, z)$ записывается в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left[r^n\left\{A_0u_0+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{m=1}^{n}(A_m u_m\cos m\varphi+B_m v_m\sin m\varphi)\right\}\right],$$

где u_0, u_1, u_2, ..., v_1, v_2, ... — функции только от θ, а A_0, A_1, ... B_1, B_2, ... суть $2n+1$ произвольных постоянных.

---

[1]) Томсон и Тэт, а также и многие другие авторы, доказывавшие существование в точности $2n+1$ линейно независимых гармонических многочленов, молчаливо допускали, что указанные $\frac{1}{2}n(n-1)$ соотношений действительно независимы.

Полученное выражение можно привести к виду:

$$r^{n-2}\left[\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{d}{d\mu}\right\}+n(n+1)\right]A_0u_0+\sum_{m=1}^{n}r^{n-2}\left[\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{d}{d\mu}\right\}+\right.$$
$$\left.+n(n+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right](A_m u_m\cos m\varphi+B_m v_m\sin m\varphi).$$

Это выражение будет равно нулю, если все постоянные кроме одной, скажем A_m, равны нулю и если

$$\frac{d}{d\mu}\left[\left\{(1-\mu^2)\frac{d}{d\mu}\right\}+n(n+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right]u_m=0.$$

Мы видели, что это уравнение имеет единственное решение, не содержащее логарифмической особенности, а именно $\alpha_m P_n^m(\mu)$. Отсюда следует, что существует $2n+1$ гармонических функций $r^n P_n(\mu)$, $r^n P_n^m(\mu)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi$, где $m=1, 2, \ldots, n$; эти функции линейно независимы, так как если

$$\alpha_0 P_n(\mu)+\sum_{m=1}^{n}(\alpha_m\cos m\varphi+\beta_m\sin m\varphi)P_n^m(\mu)=0,$$

то, умножая это равенство на $\cos m\varphi$ или на $\sin m\varphi$ и интегрируя по φ в пределах от $-\pi$ до π, мы получили бы $\alpha_m=0$, $\beta_m=0$ для любого m.

Покажем, что число линейно независимых гармонических функций рассматриваемого типа не может быть больше чем $2n+1$. Если $P_n(x, y, z)$ — гармонический многочлен, то

$$A_0U_0+\sum_{m=1}^{n}(U_m A_m\cos m\varphi+V_m B_m\sin m\varphi)=0,$$

где

$$U_m=\left[\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{d}{d\mu}+n(n+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right\}\right]u_m,$$

а V_m означает аналогичное выражение с v_m вместо u_m.

Так как это равенство должно выполняться для всех значений φ, то из него, как и выше, получаем $A_m U_m=0$, $B_m V_m=0$. Поэтому, если A_m или B_m не нуль, то соответственно $U_m=0$ или $V_m=0$ и, следовательно, u_m и v_m равны $\alpha'_m P_n^m(\mu)$ и $\beta'_m P_n^m(\mu)$. Таким образом, гармоническая функция $P_n(x, y, z)$ представляет собой линейную комбинацию уже найденных $2n+1$ гармонических функций. Итак, доказано следующее предложение: *Число линейно независимых гармонических многочленов степени n равно $2n+1$.*

77. Другой способ фактического нахождения $2n+1$ линейно независимых гармонических многочленов состоит в следующем. Заметим, что если a, b, c — постоянные, такие, что $a^2+b^2+c^2=0$, то всякая дважды дифференцируемая функция вида

$$f(ax+by+cz)$$

удовлетворяет уравнению Лапласа. В частности, уравнению Лапласа удовлетворяет функция

$$(z+ix\cos\alpha+iy\sin\alpha)^n,$$

где α — произвольное постоянное; если при некотором α раскрыть этот многочлен, то как действительная, так и мнимая его части будут гармоническими многочленами степени n. Мы имеем

$$(z+ix\cos\alpha+iy\sin\alpha)^n=r^n\{\cos\theta+i\sin\theta\cos(\varphi-\alpha)\}^n;$$

разложение выражения $\{\cos\theta+i\sin\theta\cos(\varphi-\alpha)\}^n$ по косинусам дуг, кратных $\varphi-\alpha$, было уже получено в п. 59. Полагая $\cos\theta=\mu$, получаем

$$(z+ix+iy\sin\alpha)^n=$$
$$=r^n\left\{P_n(\mu)+2\sum_{m=1}^{n}e^{-\frac{1}{2}m\pi i}\frac{n!}{(n+m)!}(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^mP_n(\mu)}{d\mu^m}\cos m(\varphi-\alpha)\right\}.$$

Так как правая часть этого равенства при всех α удовлетворяет уравнению Лапласа, то каждый из коэффициентов при $\cos m\alpha$, $\sin m\alpha$ в отдельности является гармонической функцией; таким образом, мы получаем $2n+1$ гармонических функций

$$r^nP_n(\mu),$$
$$r^nP_n^m(\mu)\cos m\varphi,\qquad r^nP_n^m(\mu)\sin m\varphi,$$

где $m=1, 2, \ldots, n$. Эти гармонические функции, очевидно, линейно независимы и, следовательно, образуют искомую систему. Таким образом, общий вид шаровой функции степени n дается формулой

$$r^n\left[a_0P_n(\mu)+\sum_{m=1}^{n}(a_m\cos m\varphi+b_m\sin m\varphi)P_n^m(\mu)\right],$$

где a_0, a_m, b_m суть $2n+1$ произвольных постоянных; если в этой формуле r, μ и φ заменить их выражениями через x, y, z, то мы получим общее выражение гармонического многочлена степени n.

Если $Y_n(x, y, z)$ — шаровая функция степени n, то $\frac{\partial Y_n}{\partial\varphi}$ также является шаровой функцией; это непосредственно следует из последней полученной формулы. Так как $\frac{\partial}{\partial\varphi}=x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}$, то $x\frac{\partial Y_n}{\partial y}-y\frac{\partial Y_n}{\partial x}$ является шаровой функцией. Ясно, что шаровыми функциями будут также $y\frac{\partial Y_n}{\partial z}-z\frac{\partial Y_n}{\partial y}$ и $z\frac{\partial Y_n}{\partial x}-x\frac{\partial Y_n}{\partial z}$. Тем же свойством обладает и Y_{-n-1}.

78. В п. 76 мы показали, что наиболее общим видом гармонического многочлена степени n от (x, y, z) является линейная комбинация зональных, тессеральных и секториальных шаровых функций, соответствующих системе сферических (поверхностных) функций, рассмотренных в гл. II и III. Мы получим этот же результат иным методом, который был развит Томсоном и Тэтом, а также Максвеллом; метод этот ценен не только своей простотой и изяществом, но и тем, что он глубоко вскрывает природу и свойства рассматриваемых функций. Основа этого метода состоит в том, что если дано некоторое решение уравнения Лапласа, то другие его решения могут быть получены из данного с помощью дифференцирования по x, y и z, или, в более общей форме, если V — решение уравнения Лапласа, то решением будет и $f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)V$, где f — любой многочлен. С помощью этого метода можно из простого решения $V=\frac{1}{r}$ получить все зональные, тессеральные и секториальные функции любой целой степени. Чтобы изложить этот метод возможно проще, удобно начать с изложения одной общей теоремы о дифференцировании.

§ 3. ОБЩАЯ ТЕОРЕМА О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ

79. Предположим, что требуется вычислить выражение

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial}{\partial x_p}\right) F\left[\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_p)\right],$$

где F и φ — произвольные функции, а f_n — однородный многочлен степени n от операторов $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_p}$. Ясно, что это выражение может быть записано в виде

$$\chi_0 \frac{d^n F}{d\varphi^n} + \chi_1 \frac{d^{n-1} F}{d\varphi^{n-1}} + \ldots + \chi_k \frac{d^{n-k} F}{d\varphi^{n-k}} + \ldots + \chi_{n-1} \frac{dF}{d\varphi},$$

где $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{n-1}$ — функции p переменных, зависящие только от вида функций φ и f_n, но не от функции F. Поэтому, для того чтобы определить функции χ, мы можем выбрать функцию F так, как это нам будет наиболее удобно. Пусть F представляет собой n-ю степень φ, т. е. $F(\varphi) = \varphi^n$, тогда

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_p}\right)\left[\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_p)\right]^n =$$
$$= n!\left\{\chi_0 + \chi_1\varphi + \ldots + \frac{1}{k!}\chi_k\varphi^k + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\chi_{n-1}\varphi^{n-1}\right\}. \qquad (А)$$

С другой стороны,

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_p}\right)\left[\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_p)\right]^n =$$
$$= f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1}, \frac{\partial}{\partial h_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial h_p}\right)\left[\varphi(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_p + h_p)\right]^n,$$

где в правой части $h_1, h_2, \ldots, h_p$ после выполнения дифференцирования следует положить равными нулю.

Воспользуемся формулой

$$\left[\varphi(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_p + h_p)\right]^n =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\left[\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_p)\right]^k \left[\varphi(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_p + h_p) -\right.$$
$$\left. - \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_p)\right]^{n-k}$$

и применим к обеим ее частям оператор $f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1}, \frac{\partial}{\partial h_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial h_p}\right)$. Мы получим равенство, которое при $h_1 = 0,\ h_2 = 0, \ldots, h_p = 0$ должно совпадать с равенством (А). Сравнивая коэффициенты при φ^k, получаем

$$\chi_k = \frac{1}{(n-k)!} f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1}, \frac{\partial}{\partial h_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial h_p}\right)\left[\varphi(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_p + h_p) -\right.$$
$$\left. - \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_p)\right]^{n-k},$$

где $h_1, h_2, \ldots, h_p$ после выполнения всех дифференцирований следует положить равными нулю.

Таким образом, мы получаем следующую формулу:

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_p}\right) F\left[\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_p)\right] =$$
$$= \frac{1}{n!}\frac{d^n F}{d\varphi^n} f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1}, \frac{\partial}{\partial h_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial h_p}\right) P^n + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{(n-k)!}\frac{d^{n-k} F}{d\varphi^{n-k}} f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1}, \frac{\partial}{\partial h_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial h_p}\right) P^{n-k} + \ldots, \qquad (Б)$$

где

$$P = \varphi(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_p + h_p) - \varphi(x_1\ x_2, \ldots, x_p)$$

и $h_1, h_2, \ldots, h_p$ в окончательном результате следует положить равными нулю.

Частный случай формулы (Б), соответствующий $p=1$, $f_n=\left(\frac{d}{dx}\right)^n$, был дан Шлёмильхом[1]).

В случае $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_p)=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_p^2=r^2$ формула (Б) значительно упрощается; в этом случае коэффициент при $\frac{d^{n-k}F}{d\varphi^{n-k}}$, т. е. при $\frac{d^{n-k}F}{d(r^2)^{n-k}}$, равен

$$\frac{1}{(n-k)!} f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1}, \frac{\partial}{\partial h_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial h_p}\right)[h_1^2+h_2^2+\ldots+h_p^2+ +2(h_1x_1+h_2x_2+\ldots+h_px_p)]^{n-k},$$

где после выполнения дифференцирования следует положить $h_1=h_2=\ldots$ $\ldots=h_p=0$. Единственное слагаемое в этом выражении, которое не обращается в нуль, равно

$$\frac{1}{(n-k)!} f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1}, \frac{\partial}{\partial h_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial h_p}\right)\frac{(n-k)!\,2^{n-2k}}{k!\,(n-2k)!}(h_1x_1+h_2x_2+\ldots)^{n-2k}\times \times(h_1^2+h_2^2+\ldots)^k.$$

Легко видеть, что если f_n, ψ_n — две функции одной и той же степени n, то

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1}, \frac{\partial}{\partial h_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial h_p}\right)\psi_n(h_1, h_2, \ldots, h_p)= =\psi_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1}, \frac{\partial}{\partial h_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial h_p}\right)f_n(h_1, h_2, \ldots, h_p);$$

отсюда следует, что коэффициент при $\frac{d^{n-k}F}{d(r^2)^{n-k}}$ равен

$$\frac{1}{k!\,(n-2k)!}\, 2^{n-2k}\left(x_1\frac{\partial}{\partial h_1}+x_2\frac{\partial}{\partial h_2}+\ldots+x_p\frac{\partial}{\partial h_p}\right)^{n-2k}\times \times\left(\frac{\partial^2}{\partial h_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial h_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial h_p^2}\right)^k f_n(h_1, h_2, \ldots, h_p);$$

положим теперь

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial h_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial h_2^2}+\ldots+\frac{\partial}{\partial h_p^2}\right)^k f_n(h_1, h_2, \ldots, h_p)=\lambda_{n-2k}(h_1, h_2, \ldots, h_p),$$

тогда полученное выражение можно переписать в виде

$$\frac{1}{k!\,(n-2k)!}\, 2^{n-2k}\left(x_1\frac{\partial}{\partial h_1}+x_2\frac{\partial}{\partial h_2}+\ldots+x_p\frac{\partial}{\partial h_p}\right)^{n-2k}\lambda_{n-2k}(h_1, h_2, \ldots, h_p),$$

откуда вытекает, что оно равно

$$\frac{2^{n-2k}}{k!}\lambda_{n-2k}(x_1, x_2, \ldots, x_p).$$

Таким образом мы нашли, что коэффициент при $\frac{d^{n-k}F}{d(r^2)^{n-k}}$ равен

$$\frac{2^{n-k}}{k!}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_p^2}\right)^k f_n(x_1, x_2, \ldots, x_p).$$

---

[1]) Compendium der höheren Analysis, т. II.

Итак, мы получили следующую формулу[1]):

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_p}\right) F(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_p^2)=$$
$$=\left\{2^n \frac{d^nF}{d(r^2)^n}+\frac{2^{n-2}}{1!}\frac{d^{n-1}F}{d(r^2)^{n-1}}\nabla^2+\frac{2^{n-4}}{2!}\frac{d^{n-2}F}{d(r^2)^{n-2}}\nabla^2+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{2^{n-2k}}{k!}\frac{d^{n-k}F}{d(r^2)^{n-k}}\nabla^{2k}+\ldots\right\} f_n(x_1, x_2, \ldots, x_p), \qquad (6)$$

которой будем часто пользоваться. Здесь

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_p^2},$$

и

$$r^2=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_p^2.$$

Нам сейчас понадобится частный случай формулы (6), соответствующий $p=3$; в этом случае она имеет вид

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) F(x^2+y^2+z^2)=$$
$$=\left\{2^n \frac{d^nF}{d(r^2)^n}+\frac{2^{n-2}}{1!}\frac{d^{n-1}F}{d(r^2)^{n-1}}\nabla^2+\ldots+\frac{2^{n-2k}}{k!}\frac{d^{n-k}F}{d(r^2)^{n-k}}\nabla^{2k}+\ldots\right\} f_n(x, y, z), \quad (7)$$

где

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

80. Если в формуле (7) положить $F(r^2)=\frac{1}{r}$, то получим

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r}=(-1)^n\frac{(2n)!}{2^n n!}\frac{1}{r^{2n+1}}\times$$
$$\times\left\{1-\frac{r^2\nabla^2}{2(2n-1)}+\frac{r^4\nabla^4}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}-\ldots\right\} f_n(x, y, z). \qquad (8)$$

В том случае, когда $f_n(x, y, z)$ совпадает с некоторой шаровой функцией $Y_n(x, y, z)$, мы получаем следующую важную формулу:

$$Y_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r}=(-1)^n\frac{(2n)!}{2^n n!}\frac{1}{r^{2n+1}}Y_n(x, y, z). \qquad (9)$$

Формула (8) послужит нам основой для нахождения вида шаровых функций целых степеней. Выражение, стоящее справа в (9), представляет собой шаровую функцию степени $-n-1$. Умножив ее на r^{2n+1}, мы получим соответствующую шаровую функцию положительной степени. Отсюда следует, что если $f_n(x, y, z)$ — однородный многочлен степени n, то выражение

$$\left(1-\frac{r^2\nabla^2}{2(2n-1)}+\frac{r^4\nabla^4}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}-\ldots\right) f_n(x, y, z) \qquad (10)$$

либо представляет собой шаровую функцию степени n, либо равно нулю; в последнем случае $f_n(x, y, z)$ содержит в качестве множителя $x^2+y^2+z^2$.

Этот результат был впервые получен Клебшем[2]); он легко может быть доказан и непосредственно следующим образом.

---

[1]) Эта формула была получена Гобсоном в работе «On a theorem in Differentiation etc.», Proc. Lond. Math. Soc., (1) 24, 55. Приведенное выше доказательство было опубликовано им в Messenger of Math., 23 (1894), 115.

[2]) Journ. f. reine u. angew. Math., 60, 344.

Пусть

$$f_n + r^2 f_{n-2} + r^4 f_{n-4} + \ldots + r^{2s} f_{n-2s} + \ldots$$

гармоническая функция, $f_{n-2}, f_{n-4}, \ldots$ — однородные функции, которые могут быть определены, когда f_n задана; индексы $n-2$, $n-4, \ldots$ указывают их степени. Имеем

$$\nabla^2 f_n = \nabla^2 f_n, \quad \nabla^2 (r^2 f_{n-2}) = r^2 \nabla^2 f_{n-2} + 2(2n-1) f_{n-2},$$
$$\nabla^2 (r^4 f_{n-4}) = r^4 \nabla^2 f_{n-4} + 4(2n-3) r^2 f_{n-4}$$

и вообще

$$\nabla^2 (r^{2s} f_{n-2s}) = r^{2s} \nabla^2 f_{n-2s} + 2s(2n-2s+1) r^{2s-2} f_{n-2s}.$$

Следовательно, для того чтобы рассматриваемое выражение удовлетворяло уравнению Лапласа, должны выполняться равенства

$$\nabla^2 f_n + 2(2n-1) f_{n-2} = 0,$$
$$\nabla^2 f_{n-2} + 4(2n-3) f_{n-4} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\nabla^2 f_{n-2s+2} + 2s(2n-2s+1) f_{n-2s} = 0;$$

таким образом,

$$f_{n-2} = -\frac{1}{2(2n-1)} \nabla^2 f_n, \quad f_{n-4} = \frac{1}{2 \cdot 4 (2n-1)(2n-3)} \nabla^4 f_n, \ \ldots$$

Итак, выражение (10) удовлетворяет уравнению Лапласа.

Только что проведенное доказательство обладает бóльшей общностью по сравнению с доказательством, основанным на формуле (8). В самом деле, в формуле (8) число n—целое положительное. Здесь же оно может быть любым. Конечно, если n не является целым положительным, то соответствующий ряд не будет обрываться, однако если он сходится и если выполнены некоторые дополнительные условия (см. п. 102), то его сумма все-таки является шаровой функцией.

Теперь мы докажем, что *всякий однородный многочлен* $f_n(x, y, z)$ *можно представить в виде* $\nabla^2 f_{n+2}(x, y, z)$, *где* $f_{n+2}(x, y, z)$ — *некоторый многочлен степени* $n+2$, который конечно, определен не однозначно, так как к нему можно добавить любой гармонический многочлен степени $n+2$, не изменив результата. Функция f_{n+2} может быть записана в виде произведения некоторого многочлена на $x^2+y^2+z^2$.

Действительно, можно показать, что

$$f_n(x, y, z) = \nabla^2 \left\{ \frac{r^2 f_n}{2(2n+3)} - \frac{r^4 \nabla^2 f_n}{2 \cdot 4 (2n+3)(2n+1)} + \right.$$
$$\left. + \frac{r^6 \nabla^4 f_n}{2 \cdot 4 \cdot 6 (2n+3)(2n+1)(2n-1)} - \ldots \right\}. \quad (10')$$

Если f_n — шаровая функция, то это равенство немедленно получается из только что проведенных рассуждений. Чтобы доказать эту формулу в общем случае, мы воспользуемся формулой (4), дающей выражения членов ряда, стоящих в правой части данного равенства. Мы имеем

$$\nabla^2 \frac{r^2 f_n}{2(2n+3)} = \frac{1}{2(2n+3)} [2(2n+3) f_n + r^2 \nabla^2 f_n],$$
$$\nabla^2 \frac{r^4 \nabla^2 f_n}{2 \cdot 4 (2n+3)(2n+1)} = \frac{1}{2 \cdot 4 (2n+3)(2n+1)} [4(2n+1) r^2 \nabla^2 f_n + r^4 \nabla^4 f_n],$$
$$\nabla^2 \frac{r^6 \nabla^4 f_n}{2 \cdot 4 \cdot 6 (2n+3)(2n+1)(2n-1)} =$$
$$= \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 (2n+3)(2n+1)(2n-1)} [6(2n-1) r^4 \nabla^2 f_n - r^6 \nabla^4 f_n],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Подставляя эти выражения в правую часть формулы (10′), получаем в результате функцию f_n, стоящую слева. Таким образом $f_n(x, y, z)$ совпадает с $\nabla^2 f_{n+2}$. Это доказательство принадлежит Эллиоту[1]).

§ 4 МАКСВЕЛЛОВА ТЕОРИЯ ПОЛЮСОВ

81. Прежде чем приступить к нахождению с помощью формулы (8) выражений для зональных, тессеральных и секториальных шаровых функций, уместно остановиться на некоторых развитых Максвеллом понятиях, относящихся к полюсам шаровых функций.

Рассмотрим сферу произвольного радиуса с центром в начале координат; всякую прямую с направляющими косинусами l, m, n, проходящую через начало координат, будем называть *осью*, а точку пересечения оси с поверхностью сферы будем называть *полюсом* данной оси. Разные оси будут отличаться с помощью индексов, отнесенных к соответствующим направляющим косинусам; обозначая через λ_i косинус угла, образованного радиусом-вектором r, идущим в точку (x, y, z), с осью (l_i, m_i, n_i), имеем

$$\lambda_i = \frac{l_i x + m_i y + n_i z}{r}.$$

Косинус угла между двумя осями, имеющими индексы i и j, обозначим μ_{ij}: таким образом, $\mu_{ij} = l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j$. Оператор $l_i \frac{\partial}{\partial x} + m_i \frac{\partial}{\partial y} + n_i \frac{\partial}{\partial z}$ мы будем называть дифференцированием по данной оси и обозначать $\frac{\partial}{\partial h_i}$. Можно дифференцировать ту или иную функцию сперва по одной оси, потом по другой и т. д.; если эти оси обозначить $h_1, h_2, \ldots, h_n$, то соответствующий оператор обозначается

$$\frac{\partial}{\partial h_1 \partial h_2 \ldots \partial h_n} f(x, y, z),$$

или подробнее

$$\left(l_1 \frac{\partial}{\partial x} + m_1 \frac{\partial}{\partial y} + n_1 \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(l_2 \frac{\partial}{\partial x} + m_2 \frac{\partial}{\partial z} + n_2 \frac{\partial}{\partial z}\right) \ldots$$
$$\ldots \left(l_n \frac{\partial}{\partial x} + m_n \frac{\partial}{\partial y} + n_n \frac{\partial}{\partial z}\right) f(x, y, z).$$

82. Потенциальная функция $V_0 = \frac{e_0}{r}$ называется потенциалом, созданным *особой точкой порядка нуль* в начале координат; e_0 называется силой этой особой точки.

Пусть особая точка порядка нуль и силы e_0 лежит на оси h_1, на расстоянии α_0 от начала координат; предположим, кроме того, что начало координат также является особой точкой с силой $-e_0$. Пусть теперь e_0 неограниченно возрастает и α_0 неограниченно убывает, причем произведение $e_0\alpha_0$ все время остается равным некоторой постоянной величине e_1; тогда начало координат называется *особой точкой первого порядка, силы* e_1, *с направлением* h_1. Таким образом, особая точка порядка 1 состоит из двух особых точек порядка нуль бесконечной силы, таких, что произведение их силы на расстояние между ними есть величина конечная. Особая точка первого порядка часто называется *диполем* или *дублетом*, а соответствующая ось — осью диполя.

Аналогичным образом, помещая особую точку первого порядка силы $-e_1$ в начале координат, а другую — силы e_1 — на расстоянии α_1 по оси h_2 от начала и затем неограниченно увеличивая e_1 и соответственно

[1]) Quart. Journ. Math., 48 (1917—1918), 373.

уменьшая α_1, так, чтобы $e_1\alpha_1 = e_2$ (e_2 — конечная величина), мы получаем *особую точку порядка* 2 и силы e_2, расположенную в начале координат и имеющую оси h_1 и h_2.

Поступая аналогично, мы придем к понятию *особой точки порядка* n (или *мультиполя*) силы e_n, расположенной в начале координат и имеющей заданные n осей $h_1, h_2, \ldots, h_n$.

Если $e_{n-1}\varphi_{n-1}(x, y, z)$ — потенциал, созданный особой точкой порядка $n-1$ в начале координат, имеющей силу e_{n-1} и оси $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$, то потенциал особой точки порядка n, для которой новой осью является h_n, равен

$$e_{n-1}\varphi_{n-1}(x - l_n\alpha,\ y - m_n\alpha,\ z - n_n\alpha) - e_{n-1}\varphi_{n-1}(x, y, z),$$

где α неограниченно убывает, а e_{n-1} неограниченно возрастает, так что $e_{n-1}\alpha = e_n$. В пределе это выражение равно

$$-e_n\left(l_n\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x} + m_n\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial y} + n_n\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial z}\right),$$

т. е.

$$-e_n\frac{\partial}{\partial h_n}\varphi_{n-1}.$$

Так как $\varphi_0 = \frac{1}{r}$, то отсюда непосредственно следует, что V_n — потенциал, созданный особой точкой, имеющей силу e_n и оси $h_1, h_2, \ldots, h_n$, — выражается формулой

$$V_n = (-1)^n e_n \frac{\partial^n}{\partial h_1\,\partial h_2 \ldots \partial h_n}. \tag{11}$$

В результате выполнения операций дифференцирования, предписываемых формулой (11), получаются для V_n выражения вида $n!e_n\frac{Y_n}{r^{n+1}}$, где Y_n — сферическая (поверхностная) функция степени n, которую можно рассматривать как функцию углов, образуемых вектором r с n осями, и углов между самими осями.

Полюсы этих n осей называются полюсами данной сферической функции. Их часто называют также полюсами соответствующих шаровых функций $Y_n r^n$ и $Y_n r^{-n-1}$.

Выбирая различным образом n осей, мы будем получать различные сферические функции степени n, каждая из этих функций определяется своими полюсами однозначно с точностью до постоянного множителя.

83. Чтобы записать Y_n через ее полюсы, мы воспользуемся формулой (8). Положим

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial^n}{\partial h_1\,\partial h_2 \ldots \partial h_n} = \prod_{r=1}^{n}\left(l_r\frac{\partial}{\partial x} + m_r\frac{\partial}{\partial y} + n_r\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

тогда

$$Y_n = \frac{(2n)!}{2^n n!\,n!}\frac{1}{r^n}\left(1 - \frac{r^2\nabla^2}{2(2n-1)} + \frac{r^4\nabla^4}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)} - \ldots\right)\prod_1^n (l_r x + m_r y + n_r z).$$

Обозначим $\sum(\mu^s\lambda^{n-2s})$ сумму произведений s множителей μ и $n-2s$ множителей λ, причем соответствующие им индексы все различны. Вспоминая, что

$$\mu_{st} = l_s l_t + m_s m_t + n_s n_t,$$
$$\lambda_p r = l_p x + m_p y + n_p z,$$

сразу получаем

$$\prod (lx+my+nz) = \sum (\lambda^n)\, r^n,$$

$$\nabla^2 \prod (lx+my+nz) = 2 \sum (\mu\lambda^{n-2})\, r^{n-2},$$

$$\nabla^4 \prod (lx+my+nz) = 2^2 \cdot 2 \sum (\mu^2\lambda^{n-4})\, r^{n-4}$$

и вообще

$$\nabla^{2m} \prod (lx+my+nz) = 2^m m! \sum (\mu^m\lambda^{n-2m})\, r^{n-2m}.$$

Таким образом, мы получаем следующее выражение для сферической функции Y_n, имеющей заданные оси $h_1, h_2, \ldots, h_n$:

$$Y_n = r^{n+1}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial h_1\,\partial h_2 \ldots \partial h_n}\frac{1}{r} = \mathrm{S}\left\{(-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^{n-m}n!\,(n-m)!}\sum(\lambda^{n-2m}\mu^m)\right\}, \tag{12}$$

где S означает суммирование по m от $m=0$ до $m=\frac{1}{2}n$ или $m=\frac{1}{2}(n-1)$, в зависимости от того, является n четным или нечетным.

Это — общая формула Максвелла для сферической функции с заданными полюсами. Сам Максвелл доказал ее с помощью индукции.

Если $A, B, C, \ldots$ — полюсы, лежащие на сфере радиуса r, то сферические функции нескольких первых степеней имеют вид

$Y_1 = \cos PA$, полюс A;

$Y_2 = \frac{1}{2}(3\cos PA \cos PB - \cos AB)$, полюсы A, B;

$Y_3 = \frac{1}{2}(15\cos PA\cos PB\cos PC - \cos PA\cos BC - \cos PB\cos CA -$

$- \cos PC \cos AB)$, полюсы A, B, C;

$Y_4 = \frac{1}{8}(35\cos PA\cos PB\cos PC\cos PD - 5\sum \cos PA\cos PB\cos CD +$

$+ \cos AB\cos CD + \cos AC\cos BD + \cos AD\cos BC)$, полюсы A, B, C, D.

84. Идея задания сферической функции с помощью ее полюсов имелась еще у Гаусса[1]), однако развита она была впервые Максвеллом[2]).

Эквивалентная аналитическая теория имеется в мемуаре Клебша[3]). Интересно сравнить между собой высказывания Максвелла[4]) и Сильвестера[5]) об этом методе.

Максвелл писал: «При численных исследованиях меня часто смущало ощущение недостаточной определенности понятия коэффициентов Лапласа, т. е. сферических функций. Рассматривая их как результат последовательного дифференцирования функции $\frac{1}{r}$ по i осям и описывая их в терминах расположения их i полюсов на сфере, я пришел к общему понятию сферической функции любой целой степени, вполне отчетливому для меня и, я надеюсь, для всякого, кто чувствовал неясность некоторых других определений».

Сильвестер, высоко ценивший метод полюсов за его изящество, все же, комментируя это место, писал: «Метод полюсов представления сфери-

[1]) Collected Works, т. V, стр. 631.
[2]) Electricity and Magnetism, т. I, гл. IX.
[3]) Journ. f. reine u. angew. Math., 60 (1862), 343.
[4]) Phil. Mag. (5), 2 (1876).
[5]) Там же, стр. 305.

ческих функций, предложенный или разработанный профессором Максвеллом, по существу представляет собой не что иное, как выбор удобного канонического вида для тернарной формы, подчиненной условию, что сумма квадратов ее переменных (здесь — операторов дифференцирования) равна нулю, и для меня совершенно непостижимо, как это может помочь в том, чтобы сделать „вполне отчетливым" общее понятие сферической функции, и, если не прибегать к этому каноническому виду, о какой „недостаточной определенности" может итти речь».

§ 5. СИСТЕМА ЗОНАЛЬНЫХ, ТЕССЕРАЛЬНЫХ И СЕКТОРИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

85. Пусть все n осей совпадают с осью z, тогда мы получаем следующую сферическую функцию:

$$\frac{(-1)^n r^{n+1}}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{1}{r};$$

применив для вычисления этого выражения формулу (8), имеем

$$\frac{(-1)^n r^{n+1}}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{1}{r}=\frac{(2n)!}{2^n n!n!}\frac{1}{r^n}\left\{1-\frac{r^2\nabla^2}{2(2n-1)}+\frac{r^4\nabla^4}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}-\dots\right\}z^n=$$
$$=\frac{(2n)!}{2^n n!n!}\left\{\mu^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}\mu^{n-4}-\dots\right\},$$

где $\mu=\frac{z}{r}$. Выражение, стоящее во второй строке, равно $P_n(\mu)$ — зональной сферической функции, следовательно,

$$P_n(\mu)=\frac{(-1)^n r^{n+1}}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{1}{r}. \tag{13}$$

Эта формула была доказана в п. 10 с помощью разложения выражения

$$[x^2+y^2+(z-z')^2]^{-\frac{1}{2}}$$

в ряд по степеням z'.

Предположим теперь, что $m-n$ осей совпадают с осью z, а остальные m осей распределены симметрично в плоскости xy так, что угол между соседними осями равен $\frac{\pi}{m}$.

Если $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, 0 — направляющие косинусы одной из этих m экваториальных осей, то мы имеем

$$\prod_{s=0}^{m-1}\left\{\cos\left(\alpha+\frac{s\pi}{m}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\sin\left(\alpha+\frac{s\pi}{m}\right)\frac{\partial}{\partial y}\right\}=$$
$$=\frac{1}{2^m}\prod_{s=0}^{m-1}\left\{e^{i\left(\alpha+\frac{s\pi}{m}\right)}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)+e^{-i\left(\alpha+\frac{s\pi}{m}\right)}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\right\}.$$

Пусть теперь $\xi=x+iy$, $\eta=x-iy$; тогда

$$2\frac{\partial}{\partial\xi}=\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}$$

и

$$2\frac{\partial}{\partial\eta}=\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}.$$

Написанное выше произведение равно

$$\prod_{s=0}^{m-1}\left\{e^{i\left(\alpha+\frac{s\pi}{m}\right)}\frac{\partial}{\partial\xi}+e^{-i\left(\alpha+\frac{s\pi}{m}\right)}\frac{\partial}{\partial\eta}\right\},$$

т. е.

$$e^{(m-1)\frac{i\pi}{2}}\left[e^{im\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^m - e^{-im\alpha}\left(-\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^m\right].$$

При $\alpha = 0$ это последнее выражение сводится к

$$e^{(m-1)\frac{i\pi}{2}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^m - (-1)^m\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^m\right],$$

а при $\alpha = \frac{\pi}{2m}$ — к

$$ie^{(m-1)\frac{i\pi}{2}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^m + (-1)^m\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^m\right].$$

Из формулы (8) получаем

$$\frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}}\left(\frac{\partial}{\partial x} \pm i\frac{\partial}{\partial y}\right)^m \frac{1}{r} = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^n n!}\frac{1}{r^{2n+1}} \times$$
$$\times\left[1 - \frac{r^2\nabla^2}{2(2n-1)} + \frac{r^4\nabla^4}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)} - \ldots\right] z^{n-m}(x \pm iy)^m =$$
$$= \frac{(-1)^n (2n)!}{2^n n!}\frac{1}{r^{2n+1}}(x \pm iy)^m\left[1 - \frac{r^2}{2(2n-1)}\frac{d^2}{dz^2} + \frac{r^4}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}\frac{d^4}{dz^4}\ldots\right] z^{n-m} =$$
$$= \frac{(-1)^n (2n)!}{2^n n!}\frac{1}{r^{2n+1}}(x \pm iy)^m\left[z^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)}z^{n-m-2}r^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}z^{n-m-4}r^4 - \ldots\right] =$$
$$= \frac{(-1)^n (2n)!}{2^n n!}\frac{1}{r^{n+1}}(\cos m\varphi \pm i\sin m\varphi)\left[\mu^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-m-2} + \ldots\right].$$

Но

$$P_n^m(\mu) = (-1)^m \sin^m\theta\,\frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu^m} = \frac{(-1)^m}{2^n n!}\sin^m\theta\,\frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}}(\mu^2-1)^n =$$
$$= \frac{(-1)^m (2n)!}{2^n n!\,(n-m)!}\sin^m\theta\left[\mu^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-m-2} + \ldots\right],$$

следовательно,

$$\frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}}\left(\frac{\partial}{\partial x} \pm i\frac{\partial}{\partial y}\right)^m \frac{1}{r} = \frac{(-1)^{n-m}(n-m)!}{r^{n+1}}(\cos m\varphi \pm i\sin m\varphi)\,P_n^m(\mu).$$

Таким образом, мы получили следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^m + \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^m\right]\frac{1}{r} &= \frac{(-1)^{n-m}(n-m)!}{2^{m-1}r^{n+1}}\cos m\varphi\cdot P_n^m(\mu),\\ i\,\frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^m - \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^m\right]\frac{1}{r} &= \frac{(-1)^{n-m}(n-m)!}{2^{m-1}r^{n+1}}\sin m\varphi\cdot P_n^m(\mu).\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

В частности, при $m = n$ получаем

$$\left.\begin{aligned} \left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^n + \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^n\right]\frac{1}{r} &= \frac{1}{2^{n-1}r^{n+1}}\cos n\varphi\cdot P_n^n(\mu),\\ i\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^n - \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^n\right]\frac{1}{r} &= \frac{1}{2^{n-1}r^{n+1}}\sin n\varphi\cdot P_n^n(\mu).\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Итак, мы видим, что тессеральные функции степени n и порядка m — это сферические функции, у которых $n-m$ осей совпадают с осью z, а остальные m осей расположены в экваториальной плоскости так, что угол между двумя соседними осями равен $\frac{\pi}{m}$. Секториальные функции получаются, когда все оси лежат в экваториальной плоскости. Для зональных функций все оси совпадают с осью z.

Далее мы видим, что для функции $P_n^m(\mu)\cos m\varphi$ при нечетном m ось x служит одной из ее осей, а при четном m ось x делит пополам угол между двумя ближайшими к ней осями; для функции $P_n^m(\mu)\sin m\varphi$ картина обратная. Мы можем, конечно, получить выражения для тессеральных функций непосредственно из общей формулы Максвелла (12) для сферической функции с заданными полюсами.

Так как из (13) следует, что

$$\frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}}\frac{1}{r}=(-1)^{n-m}(n-m)!\,\frac{P_{n-m}(\mu)}{r^{n-m+1}},$$

то

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^m+\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^m\right]\frac{P_{n-m}(\mu)}{r^{n-m+1}}&=\frac{1}{2^m r^{n+1}}P_n^m(\mu)\cos m\varphi,\\ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^m-\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^m\right]\frac{P_{n-m}(\mu)}{r^{n-m+1}}&=\frac{1}{2^m r^{n+1}}P_n^m(\mu)\sin m\varphi.\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

§ 6. ОТЫСКАНИЕ ПОЛЮСОВ ШАРОВОЙ ФУНКЦИИ

86. Формула (8) показывает, что $Y_n(x, y, z)$, т. е. каждая обыкновенная шаровая функция, может быть получена применением к $\frac{1}{r}$ оператора $f_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$; для этого f_n следует выбрать так, чтобы

$$Y_n(x, y, z)=(-1)^n\frac{(2n)!}{2^n n!}\left[1-\frac{r^2\nabla^2}{2(2n-1)}+\frac{r^4\nabla^4}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}-\ \ldots\right]f_n(x, y, z).$$

Из этого равенства видно, что если к $f_n(x, y, z)$ прибавить произвольную функцию вида

$$(x^2+y^2+z^2)\,f_{n-2}(x, y, z),$$

то значение $f_n(x, y, z)$ при этом не изменится. Это вытекает из тождества

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)f_{n-2}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)=0.$$

Если мы будем считать, что функция $Y_n(x, y, z)$ задана, то $f_n(x, y, z)$ определяется не однозначно; ее различные формы могут отличаться друг от друга на кратное $x^2+y^2+z^2$. Чтобы определить полюсы заданной шаровой функции $Y_n(x, y, z)$, мы должны выбрать функцию $f_n(x, y, z)$ так, чтобы Y_n можно было разложить на линейные множители. Мы покажем сейчас, что это можно сделать одним, и только одним, способом, если потребовать, чтобы все полюсы были действительными.

Мы видим, что если x, y, z удовлетворяют уравнениям

$$Y_n(x, y, z)=0,$$
$$x^2+y^2+z^2=0,$$

то выполняется также равенство $f_n(x, y, z)=0$. Следовательно, *задача отыскания полюсов функции $Y_n(x, y, z)$ эквивалентна алгебраической задаче разложения $Y_n(x, y, z)$ на линейные множители для значений x, y, z, удовлетворяющих условию $x^2+y^2+z^2=0$.*

Положим

$$Y_n(x, y, z)=A\prod_{s=1}^{n}(l_s x+m_s y+n_s z)+(x^2+y^2+z^2)\,Y_{n-2}(x, y, z);$$

мы видим, что плоскость $l_s x+m_s y+n_s z=0$ проходит через те две из $2n$ образующих мнимого конуса $x^2+y^2+z^2=0$, по которым этот конус пересекается с конусом $Y_n(x, y, z)=0$.

Таким образом, полюс оси (l_s, m_s, n_s) — это полюс плоскости, проходящей через две образующих конуса

$$x^2+y^2+z^2=0,$$

относительно этого конуса. Следовательно, число систем полюсов равно $n(2n-1)$, т. е. числу сочетаний из $2n$ образующих по две; однако из этих систем полюсов действительна только одна, именно та, в которой линии, входящие в каждую пару, отвечают сопряженным комплексным корням уравнений $Y_n=0$, $x^2+y^2+z^2=0$.

Пусть

$$\frac{x}{\alpha_1+i\beta_1}=\frac{y}{\alpha_2+i\beta_2}=\frac{z}{\alpha_3+i\beta_3}$$

— уравнение одной из образующих, а

$$\frac{x}{\alpha_1-i\beta_1}=\frac{y}{\alpha_2-i\beta_2}=\frac{z}{\alpha_3-i\beta_3}$$

— уравнение сопряженной образующей; соответствующий этой паре множитель $lx+my+nz$ равен

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha_1+i\beta_1 & \alpha_2+i\beta_2 & \alpha_3+i\beta_3 \\ \alpha_1-i\beta_1 & \alpha_2-i\beta_2 & \alpha_3-i\beta_3 \end{vmatrix};$$

этот множитель — действительный. Очевидно, что если объединить любую другую пару корней, то соответствующий множитель, а следовательно, и направляющие косинусы (l, m, n) соответствующего полюса, будут комплексны. Таким образом, мы видим, что для данной гармонической функции существует одна, и только одна, система действительных полюсов и что их нахождение требует решения уравнения степени $2n$, к которому приводится система

$$Y_n(x, y, z)=0; \qquad x^2+y^2+z^2=0.$$

Этот метод доказательства существования действительной системы полюсов для гармонической функции был дан Сильвестером[1]). Аналогичные исследования были проведены Клебшем[2]), который, однако, не пользовался геометрическим понятием полюса.

87. Из сказанного вытекает, что задача определения нормальной формы шаровой функции степени n равносильна алгебраической задаче приведения формы V степени n от трех переменных к сумме $2n+1$ нормальных форм, причем переменные x, y и z связаны соотношением $x^2+y^2+z^2=0$. Мы уже определили одну из таких систем нормальных форм, а именно систему $2n+1$ зональных, тессеральных и секториальных гармонических функций. Существование этой системы нормальных форм равносильно алгебраической теореме о том, что тернарная форма степени n, в которой переменные связаны соотношением $x^2+y^2+z^2=0$, может быть приведена к виду

$$A_0z^n+\sum_{s=1}^{n}(A_s\xi^s+B_s\eta^s)\,z^{n-s},$$

где $\xi=x+iy$, $\eta=x-iy$. Чтобы доказать это непосредственно, заметим, что если вместо x и y подставить их выражения через ξ и η, то рассматриваемая форма примет вид $\sum c_{p,q}\xi^p\eta^q z^{n-p-q}$, где p, q принимают целые неотрицательные значения. Предположим, что $p\geqslant q$, тогда, используя соот-

[1]) «A note on Spherical Harmonics», Phil. Mag., 2, серия 5 (1876).

[2]) Journ. f. reine u. angew. Math., 60 (1862), 346.

ношение $\xi\eta = -z^2$, приводим рассматриваемую форму к виду

$$\sum (-1)^q c_{p,q} \xi^{p-q} z^{n-p+q} \quad \text{или} \quad \sum [(-1)^q c_{p,q} \xi^s + (-1)^p c_{q,p} \eta^s] z^{n-s},$$

что и требовалось.

Мы получили, таким образом, непосредственное алгебраическое доказательство того, что всякая шаровая функция степени n может быть представлена как линейная комбинация $2n+1$ шаровых функций указанного специального вида.

Ниже при рассмотрении эллипсоидальных функций мы будем иметь случай получить другую систему $2n+1$ нормальных форм шаровых функций.

Клиффорд[1]) заметил, что всякая гармоническая функция степени n может быть представлена как линейная комбинация $\frac{5n-10}{2}$ секториальных функций, когда n четно, и как линейная комбинация $\frac{5n-9}{2}$ таких функций при нечетном n.

§ 7. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ШАРОВЫХ ФУНКЦИЙ

88. Из формулы (8) гл. III получается следующее выражение для шаровых тессеральных функций $r^n P_n^m(\mu)\cos m\varphi$, где $\mu = \cos\theta$:

$$r^n P_n^m(\mu)\cos m\varphi = (-1)^m \frac{(n+m)!}{2^m (n-m)!\, m!}\left[z^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2m+2)} z^{n-m-2}\xi\eta + \right.$$
$$\left. + \frac{(n-m)\dots(n-m-3)}{2\cdot 4(2m+2)(2m+4)} z^{n-m-4}(\xi\eta)^2 - \dots\right]\frac{1}{2}(\xi^m + \eta^m).$$

Это выражение можно использовать для нахождения шаровых функций, получающихся в результате применения к $r^n P_n^m(\mu)\cos m\varphi$ оператора $\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^k$, где $k \leqslant n-m$.

Применяя оператор $\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^k$ к выражению, стоящему в правой части написанной формулы, получаем при $k \leqslant n-m$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^k [r^n P_n^m(\mu)\cos m\varphi] = (-1)^m \frac{(n+m)!}{2^m (n-m)!\, m!}\,\frac{(n-m)!}{(n-m-k)!} \times$$
$$\times \left[z^{n-m-k} - \frac{(n-m-k)(n-m-k-1)}{2(2m+2)} z^{n-m-k-2}(\xi\eta) + \dots\right]\frac{1}{2}(\xi^m + \eta^m),$$

откуда, снова, воспользовавшись формулой (8) гл. III, находим

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^k [r^n P_n^m(\mu)\cos m\varphi] = \frac{(n+m)!}{(n+m-k)!} r^{n-k} P_{n-k}^m(\mu)\cos m\varphi, \tag{17}$$

где $k \leqslant n-m$. Если $k > n-m$, то это выражение равно нулю.

В частности,

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^k [r^n P_n(\mu)] = \frac{n!}{(n-k)!} r^{n-k} P_{n-k}(\mu). \tag{18}$$

Аналогично

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\lambda + \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^\lambda\right][r^n P_n^m(\mu)\cos m\varphi] =$$
$$= (-1)^m \frac{(n+m)!}{2^m (n-m)!\, m!}\left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\lambda + \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^\lambda\right]\sum (-1)^s z^{n-m-2s} \times$$
$$\times \frac{(n-m)!\, m!}{2^{2s} s!\,(m+s)!\,(n-m-2s)!}(\xi\eta)^s\left(\frac{\xi^m + \eta^m}{2}\right),$$

[1]) См. British Association Report за 1871 г. или Math. Papers, 234.

где наибольшее значение s равно $\frac{1}{2}(n-m)$ или $\frac{1}{2}(n-m-1)$. Выполняя дифференцирование в правой части этого равенства, получаем следующее выражение:

$$\frac{(-1)^m (n+m)!}{2^m} \sum (-1)^s \frac{1}{2^{2s} s!\,(m+s)!\,(n-m-2s)!} z^{n-m-2s} \times$$
$$\times \left[\frac{m+s}{(m+s-\lambda)!}(\xi\eta)^s \left(\frac{\xi^{m-\lambda}+\eta^{m-\lambda}}{2}\right) + \frac{s!}{(s-\lambda)}(\xi\eta)^{s-\lambda}\left(\frac{\xi^{m+\lambda}+\eta^{m+\lambda}}{2}\right)\right].$$

Положим сперва $\lambda \leqslant m$, тогда во втором члене наименьшее значение s равно λ. Таким образом, получаем

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\lambda + \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^\lambda\right][r^n P_n^m(\mu)\cos m\varphi] = \frac{(-1)^\lambda}{2^\lambda}\frac{(n+m)!}{(n+m-2\lambda)!} r^{n-\lambda} P_{n-\lambda}^{m-\lambda}(\mu)\cos(m-\lambda)\varphi +$$
$$+\frac{1}{2^\lambda} r^{n-\lambda} P_{n-\lambda}^{m+\lambda}(\mu)\cos(m+\lambda)\varphi, \quad (19)$$

где второе слагаемое в правой части обращается в нуль при $2\lambda > n-m$. В случае $\lambda > m$ наименьшее значение s в первом слагаемом равно $\lambda - m$, и рассматриваемая формула принимает вид

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\lambda + \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^\lambda\right][r^n P_n^m(\mu)\cos m\varphi] = \frac{(-1)^m}{2^\lambda}\frac{(n+m)!}{(n-m)!} r^{n-\lambda} P_{n-\lambda}^{\lambda-m}(\mu)\cos(\lambda-m)\varphi +$$
$$+\frac{1}{2^\lambda} r^{n-\lambda} P_{n+\lambda}^{m+\lambda}(\mu)\cos(m+\lambda)\varphi, \quad (20)$$

где $\lambda > m$; в случае $2\lambda > n-m$ второй член в правой части обращается в нуль.

Комбинируя эту формулу с (17), с (18) или с (19), получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^k \left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\lambda + \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^\lambda\right][r^n P_n^m(\mu)\cos m\varphi] =$$
$$= \frac{(-1)^\lambda}{2^\lambda}\frac{(n+m)!\,(m-\lambda)!}{(n+m-2\lambda-k)!} r^{n-\lambda-k} P_{n-\lambda-k}^{m-\lambda}(\mu)\cos(m-\lambda)\varphi +$$
$$+\frac{1}{2^\lambda}\frac{(n+m)!}{(n+m-k)!} r^{n-\lambda-k} P_{n-\lambda-k}^{m+\lambda}(\mu)\cos(m+\lambda)\varphi, \quad (21)$$

где $\lambda < m$, $k \leqslant n-m$; в случае $\lambda > m$ получается формула

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^k \left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\lambda + \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^\lambda\right][r^n P_n^m(\mu)\cos m\varphi] =$$
$$= \frac{(-1)^m}{2^\lambda}\frac{(n+m)!}{(n-m-k)!} r^{n-\lambda-k} P_{n-k-\lambda}^{\lambda-m}(\mu)\cos(\lambda-m)\varphi +$$
$$+\frac{1}{2^\lambda}\frac{(n+m)!}{(n+m-k)!} r^{n-\lambda-k} P_{n-\lambda-k}^{m+\lambda}(\mu)\cos(\lambda+m)\varphi. \quad (22)$$

В частности, если $k+\lambda \leqslant n$, то

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\lambda + \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^\lambda\right\}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^k \{r^n P_n(\mu)\} = \frac{1}{2^\lambda}\frac{n!}{(n-k)!} r^{n-\lambda-k} P_{n-\lambda-k}^\lambda(\mu)\cos\lambda\varphi. \quad (23)$$

89. Метод дифференцирования может быть использован для преобразования шаровых функций при изменении системы координат. Пусть точка O' с координатами $(0, 0, c)$ принята за новое начало, и (r', θ', φ') — сферические координаты точки (r, θ, φ) в системе координат, которая получается, когда за начало координат берется точка O, а ось z и направления осей x и y остаются прежними.

Мы имеем

$$r^n P_n^m(\mu)\cos m\varphi =$$

$$=(-1)^m \frac{(n+m)!}{2^m (n-m)!\, m!}\left\{(z'+c)^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2m+2)}(z'+c)^{n-m}\xi\eta + \ldots\right\},$$

где $z=z'+c$.

Выражение, стоящее справа в скобках, можно записать в виде

$$\varphi(z') + c\varphi'(z') + \frac{c^2}{2!}\varphi''(z') + \ldots + \frac{c^{n-m}}{(n-m)!}\varphi^{(n-m)}(z'),$$

где

$$\varphi(z') = z'^{\,n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2m+2)} z'^{\,n-m-2} + \ldots,$$

т. е. в виде

$$(z'^{\,n-m} - \ldots) + c(n-m)(z'^{\,n-m-1} - \ldots) + \frac{c^2}{2!}(n-m)(n-m-1)(z'^{\,n-m-2} - \ldots).$$

Таким образом, используя (7), получаем

$$r^n P_n^m(\mu)\cos m\varphi = r'^n P_n^m(\mu')\cos m\varphi + c(n+m) r'^{n-1} P_{n-1}^m(\mu)\cos m\varphi +$$
$$+ \frac{c^2}{2!}(n+m)(n+m-1) r'^{n-2} P_{n-2}^m(\mu')\cos m\varphi + \ldots, \quad (24)$$

где справа стоит сумма шаровых функций степеней n, $n-1$, $n-2$, …, m от новых координат.

В частности, при $m=0$ получаем

$$r^n P_n(\mu) = r'^n P_n(\mu') + c \cdot n r'^{n-1} P_{n-1}(\mu') +$$
$$+ \frac{c^2}{2!} n(n-1) r'^{n-2} P_{n-2}(\mu') + \ldots + c_n. \quad (25)$$

В случае шаровой функции степени $-n-1$ получаем из формулы (14)

$$\frac{P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi}{r^{n+1}} = (-1)^{n-m}\frac{2^{m-1}}{(n-m)!}\frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^m + \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^m\right\}\frac{1}{r}$$

и

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{[(z'+c)^2+\xi\eta]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{r'} + c\frac{\partial}{\partial z'}\frac{1}{r'} + \frac{c^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial z'^2}\frac{1}{r'} + \ldots,$$

где $\dfrac{\partial}{\partial z'} = \dfrac{\partial}{\partial z}$ и $c < r'$. Таким образом,

$$\frac{P_n^m(\cos\varphi)\cos m\varphi}{r^{n+1}} = (-1)^{n-m}\frac{2^{n-1}}{(n-m)!}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^m + \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^m\right\}\frac{\partial^{n-m}}{\partial z'^{n-m}}\left[\frac{1}{r'} + c\frac{\partial}{\partial z'}\frac{1}{r'} +\right.$$
$$\left. + \frac{c^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial z'^2}\frac{1}{r'} + \ldots\right],$$

и, следовательно,

$$\frac{P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi}{r^{n+1}} = \frac{P_n^m(\cos\theta')\cos m\varphi}{r'^{n+1}} - c(n-m+1)\frac{P_{n+1}^m(\cos\theta')\cos m\varphi}{r'^{n+2}} +$$
$$+ c^2\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2!}\frac{P_{n+2}^m\cos\theta')\cos m\varphi}{r'^{n+3}} - \ldots; \quad (26)$$

в частности, при $m=0$ имеем

$$\frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}=\frac{P_n(\cos\theta')}{r'^{n+1}}-c(n+1)\frac{P_{n+1}(\cos\theta')}{r'^{n+2}}+c^2\frac{(n+1)(n+2)}{2!}\frac{P_{n+2}(\cos\theta')}{r'^{n+3}}-\ldots \tag{27}$$

В случае $c>r'$ получаем

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{1}{r}=\left(\frac{\partial}{\partial z'}\right)^n\frac{1}{[\xi\eta+(z'+c)^2]^{\frac{1}{2}}}=\left(\frac{\partial}{\partial c}\right)^n\frac{1}{[\xi\eta+(z'+c)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{1}{r}=\frac{\partial^n}{\partial c^n}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{r'^s}{c^{s+1}}P_s(\cos\theta')=(-1)^n\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{(n+s)!}{s!}\frac{r'^s}{n+s+1}P_s(\cos\theta').$$

Законность почленного дифференцирования легко проверить.

Таким образом, из формулы (13) получаем

$$\frac{P_n(\mu)}{r^{n+1}}=\frac{(-1)^n}{n!}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{(n+s)!}{s!}\frac{r'^s}{c^{n+s+1}}P_s(\cos\theta').$$

Применив к обеим частям этого равенства оператор

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^m+\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^m\right\}$$

и заменив n на $n-m$, получим с помощью формулы (16) запись функции $\frac{P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi}{r^{n+1}}$ через шаровые функции, отнесенные к системе координат с началом O'. Аналогичные формулы с $\sin m\varphi$ вместо $\cos m\varphi$ получаются тем же путем.

Некоторые формулы для преобразования шаровых функций были даны Ад. Шмидтом[1]).

§ 8. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ

90. Зональной сферической функцией, для которой полюсы имеют направляющие косинусы $\frac{x'}{r'}$, $\frac{y'}{r'}$, $\frac{z'}{r'}$, является

$$P_n\left(\frac{xx'+yy'+zz'}{rr'}\right),$$

т. е.

$$P_n(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\overline{\varphi-\varphi'}).$$

Шаровая функция $r^n r'^n P_n\left(\frac{xx'+yy'+zz'}{rr'}\right)$ как функция от x, y, z симметрична относительно радиуса-вектора (x', y', z'), а как функция от x', y', z' симметрична относительно радиуса-вектора (x, y, z), поэтому она называется биаксиальной гармонической функцией степени n от (x, y, z) и (x', y', z').

Пусть γ — угол между радиусами-векторами (x, y, z) и (x', y', z'), тогда

$$\frac{1}{(r^2-2rr'\cos\gamma+r'^2)^{1/2}}=\frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}};$$

выражение справа можно разложить в сходящийся ряд Тейлора по x, y, z или по x', y', z'; таким образом мы получаем для биаксиальных гармони-

[1]) Schlömilch's Zs., 44 (1889), 327.

ческих функций следующие выражения:

$$(rr')^n P_n(\cos\gamma) = r^{2n+1} \sum\sum\sum (-1)^n \frac{x'^a y'^b z'^c}{a!\, b!\, c!} \frac{\partial^{a+b+c}}{\partial x^a\, \partial y^b\, \partial z^c} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} =$$

$$= r'^{2n+1} \sum\sum\sum (-1)^n \frac{x^a y^b z^c}{a!\, b!\, c!} \frac{\partial^{a+b+c}}{\partial x'^a\, \partial y'^b\, \partial z'^c} \frac{1}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{1/2}}.$$

Суммы берутся по всем целым значениям a, b, c, таким, что $a+b+c=n$. Эти выражения симметричны относительно x, y, z и x', y', z'; это можно проверить и непосредственно, но можно также получить, представив $(rr')^n P^n$ $(\cos\gamma)$ как сумму $2n+1$ зональных и тессеральных функций, полюсы которых лежат на оси z и в плоскости xy.

91. Чтобы получить это выражение для биаксиальной гармонической функции, преобразуем в соответствии со сказанным в п. 87 выражение $(xx'+yy'+zz')^n$, где x, y, z связаны соотношением

$$x^2+y^2+z^2=0.$$

Положим

$$\xi = x+iy, \quad \eta = x-iy, \quad \xi' = x'+iy', \quad \eta' = x'-iy',$$

тогда

$$(xx'+yy'+zz')^n = \left(\frac{1}{2}\eta'\xi + \frac{1}{2}\xi'\eta + zz'\right)^n =$$

$$= (zz')^n + \sum\sum \frac{n!}{a!\, b!\, (n-a-b)!} \left\{\frac{\eta'^a \xi'^b \xi^a \eta^b + \eta'^b \xi'^a \xi^b \eta^a}{2^{a+b}}\right\} (zz')^{n-a-b},$$

причем сумма берется по всем значениям a и b, таким, что $a+b \leqslant n$ и $a \geqslant b$; значениям $a=0$, $b=0$ отвечает член $(zz')^n$. Воспользовавшись равенством $\xi\eta = -z^2$, отсюда получаем

$$(xx'+yy'+zz')^n =$$

$$= (zz')^n + \sum\sum \frac{(-1)^b}{2^{a+b}} \frac{n!}{a!\, b!\, (n-a-b)!} (\xi'\eta')^b z'^{n-a-b} \left[(\eta'\xi)^{a-b} + (\xi'\eta)^{a-b}\right] z^{n-a+b}.$$

Если положить $a-b=m$, то коэффициент при $\xi^m z^{n-m}$ в правой части этой формулы равен

$$\sum \frac{(-1)^b}{2^{m+2b}} \frac{n!}{b!\, (m+b)!\, (n-m-2b)!} (\xi'\eta')^b \eta'^m z'^{n-m-2b},$$

где сумма берется от $b=0$ до $b=\frac{n-m}{2}$ при четном $n-m$ и до $b=\frac{n-m-1}{2}$ при нечетном $n-m$. Этот коэффициент равен

$$\frac{n!}{2^m m!\, (n-m)!} (x'-iy')^m \left\{z'^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2m+2)} z'^{n-m-2} (x'^2+y'^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2\cdot 4\,(2m+2)(2m+4)} z'^{n-m-4} (x'^2+y'^2)^2 - \ldots, \right.$$

т. е. равен (см. п. 56)

$$\frac{n!}{(n+m)!} r'^n (-1)^m (\cos m\varphi' - i \sin m\varphi')\, P_n^m(\cos\theta').$$

Аналогично можно показать, что коэффициент при $\eta^m z^{n-m}$ равен

$$\frac{(-1)^m n!}{(n+m)!} r'^n (\cos m\varphi' + i \sin m\varphi')\, P_n^m(\cos\theta').$$

Следовательно,

$$\frac{1}{r'^n}(xx'+yy'+zz') = P_n(\cos\theta')\,z^n +$$
$$+ n!\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{(n+m)!}P_n^m(\cos\theta')\,[\cos m\varphi'\,(\xi^m+\eta^m) + i\sin m\varphi'\,(\eta^m-\xi^m)]\,z^{n-m}.$$

Заменим в этой формуле x, y, z на $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ и применим обе части получившегося таким образом операторного равенства к $\frac{1}{r}$; в силу формулы (14) и равенства

$$\left(\frac{x'}{r'}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{y'}{r'}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{z'}{r'}\frac{\partial}{\partial z}\right)^n\frac{1}{r} = (-1)^n\,n!\,\frac{1}{r^{n+1}}P_n(\cos\gamma)$$

мы получим

$$P_n(\cos\gamma) = P_n(\cos\theta)\,P_n(\cos\theta') +$$
$$+2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\theta)\,P_n^m(\cos\theta')\cos m(\varphi-\varphi'). \qquad (28)$$

Это важное выражение[1]) для $P_n(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\overline{\varphi-\varphi'})$ через зональные и тессеральные функции известно под названием *теоремы сложения* для зональной функции $P_n(\cos\gamma)$.

Таким образом, функция $(rr')^n P_n\left(\frac{xx'+yy'+zz'}{rr'}\right)$ представлена как сумма выражений, каждое из которых является зональной, тессеральной или секториальной функцией как относительно x, y, z, так и относительно x', y', z'.

92. Другая симметричная форма для биаксиальных гармонических функций может быть получена следующим образом. Так как $(ax+by+cz)^n$ при $a^2+b^2+c^2=0$ является гармонической функцией, то выражение

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x'}+y\frac{\partial}{\partial y'}+z\frac{\partial}{\partial z'}\right)^n\frac{1}{r'}$$

представляет собой гармоническую функцию от x, y, z; из формулы

$$Y_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r} = (-1)^n\frac{(2n)!}{2^n n!}\frac{Y_n(x, y, z)}{r^{2n+1}}$$

непосредственно вытекает, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y'}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z'}\right)^n\frac{1}{rr'} =$$
$$= (-1)^n\frac{(2n)!}{2^n n!}\frac{1}{r^{2n+1}}\left(x\frac{\partial}{\partial x'}+y\frac{\partial}{\partial y'}+z\frac{\partial}{\partial z'}\right)^n\frac{1}{r'}.$$

Далее,

$$P_n\left(\frac{xx'+yy'+zz'}{rr'}\right) = \frac{(-1)^n r'^{n+1}}{r^n n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x'}+y\frac{\partial}{\partial y'}+z\frac{\partial}{\partial z'}\right)^n\frac{1}{r'},$$

таким образом мы получаем следующую формулу:

$$P_n\left(\frac{xx'+yy'+zz'}{rr'}\right) = \frac{2^n(rr')^{n+1}}{(2n)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y'}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z'}\right)^n\frac{1}{rr'},$$

которая иным методом, наряду с другими результатами, была получена Нивеном[2]).

---

[1]) Оно впервые было получено Лежандром в 1782 г.
[2]) Phil. Trans., **170** (1879), 393.

§ 9. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ШАРОВЫХ ФУНКЦИЙ

93. Основное свойство тригонометрических функций, используемое при разложении в ряды по ним, состоит в том, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin}{\cos} n\theta \cdot \frac{\sin}{\cos} n'\theta\, d\theta = 0,$$

где n и n' — любые неравные целые числа. Мы установим сейчас аналогичную формулу для шаровых функций; эта формула играет такую же фундаментальную роль в приложениях шаровых функций, как и указанная выше формула в теории рядов Фурье.

Пусть $Y_n(x, y, z)$ и $Z_{n'}(x, y, z)$ — две шаровые функции, тогда

$$\iint Y_n Z_{n'}\, dS = 0, \tag{29}$$

где $n \neq n'$, а интеграл берется по всей поверхности произвольной сферы с центром в начале координат; так как $\nabla^2 Y_n = 0$, $\nabla^2 Z_{n'} = 0$ внутри сферы радиуса r^n, то

$$\iiint (Y_n \nabla^2 Z_{n'} - Z_{n'} \nabla^2 Y_n)\, dx\, dy\, dz = 0,$$

где интеграл берется по всему объему, ограниченному этой сферой. Этот объемный интеграл можно переписать в следующем виде:

$$\iiint \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(Y_n \frac{\partial Z_{n'}}{\partial x} - Z_{n'} \frac{\partial Y_n}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(Y_n \frac{\partial Z_{n'}}{\partial y} - Z_{n'} \frac{\partial Y_n}{\partial y}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}\left(Y_n \frac{\partial Z_{n'}}{\partial z} - Z_{n'} \frac{\partial Y_n}{\partial z}\right)\right\} dx\, dy\, dz = 0.$$

Согласно формуле Остроградского, этот объемный интеграл можно заменить интегралом, взятым по поверхности сферы; получаем

$$\iint \left\{ \frac{x}{r}\left(Y_n \frac{\partial Z_{n'}}{\partial x} - Z_{n'} \frac{\partial Y_n}{\partial x}\right) + \frac{y}{r}\left(Y_n \frac{\partial Z_{n'}}{\partial y} - Z_{n'} \frac{\partial Y_n}{\partial y}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{z}{r}\left(Y_n \frac{\partial Z_{n'}}{\partial z} - Z_{n'} \frac{\partial Y_n}{\partial z}\right)\right\} dS = 0.$$

С помощью теоремы Эйлера об однородных функциях это равенство можно переписать в виде

$$\frac{n'-n}{r} \iint Y_n Z_{n'}\, dS = 0.$$

Если $n \neq n'$, то интеграл должен быть равен нулю, тем самым формула (29), принадлежащая Лапласу, доказана.

94. Выведем теперь другую формулу, играющую фундаментальную роль в рассматриваемых вопросах. Если $Y_n(x, y, z)$ — шаровая функция степени n, P_n — зональная шаровая функция той же самой степени и (x', y', z') — полюс функции P_n, то

$$\iint Y_n(x, y, z)\, P_n\, dS = \frac{4\pi}{2n+1} a^{2n+2} Y_n(x', y', z'), \tag{30}$$

где интеграл берется по сфере радиуса a.

Этот результат можно сформулировать также следующим образом: *если $V_n(\theta, \varphi)$ — сферическая функция степени n и $P_n(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\overline{\varphi-\varphi'})$ — зональная сферическая функция с полюсом (θ', φ'), то*

$$\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} V_n(\theta, \varphi)\, P_n(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\overline{\varphi-\varphi'})\, d\mu\, d\varphi = \frac{4\pi}{2n+1} V_n(\theta', \varphi'). \tag{30'}$$

В п. 77 мы показали, что

$$V_n(\theta, \varphi) = a_0 P_n(\mu) + \sum_{m=1}^{n} (a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi) P_n^m(\mu),$$

где a_0, a_m, b_m — постоянные; чтобы определить a_0, заметим, что если $\mu = 1$, то $P_n(\mu) = 1$, $P_n^m(\mu) = 0$; таким образом, a_0 равно значению $V_n(0)$ функции $V_n(\theta, \varphi)$ в полюсе $\theta = 0$ зональной функции P_n. Умножая обе части полученного равенства на $P_n(\mu)$ и интегрируя по поверхности сферы радиуса 1, получаем

$$\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} V_n(\theta, \varphi) P_n(\mu)\, d\mu\, d\varphi = a_0 \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} [P_n(\mu)]^2\, d\mu\, d\varphi =$$

$$= a_0 \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{2n+1} = \frac{4\pi}{2n+1} V_n(0),$$

так как

$$\int_0^{2\pi} \cos m\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin m\varphi\, d\varphi = 0.$$

Если вместо полюса $\mu = 1$ функции $P_n(\mu)$ мы возьмем любую другую точку (μ', φ'), то получим формулу (30).

Эта формула может быть получена и независимо от того, что $V_n(\theta, \varphi)$ представима как линейная комбинация $2n+1$ зональных, тессеральных и секториальных функций с заданными осями. Функция $V_n(\theta, \varphi)$ удовлетворяет уравнению

$$(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial V_n}{\partial\mu}\right\} + n(n+1)(1-\mu^2)V_n + \frac{\partial^2 V_n}{\partial\varphi^2} = 0;$$

проинтегрируем его левую часть по φ от 0 до 2π, считая μ постоянным; мы получим

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu}\int_0^{2\pi} V_n d\varphi\right\} + n(n+1)\int_0^{2\pi} V_n\, d\varphi = 0,$$

следовательно, $\int_0^{2\pi} V_n\, d\varphi$ удовлетворяет уравнению Лежандра. Так как этот интеграл представляет собой многочлен от μ, то

$$\int_0^{2\pi} V_n\, d\varphi = C P_n(\mu),$$

где $C = \text{const}$. Чтобы определить C, положим $\mu = 1$; получим $2\pi V_n(0) = C$ и, следовательно,

$$\int_0^{2\pi} V_n\, d\varphi = 2\pi V_n(0) P_n(\mu).$$

Умножая обе части этого равенства на $P_n(\mu)$ и интегрируя от $\mu = -1$ до $\mu = 1$, получаем тот же самый результат, что и выше.

§ 10. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИИ В РЯД ПО СФЕРИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ

95. В гл. VII мы покажем, что при некоторых ограничениях функция $F(\theta, \varphi)$, определенная для всех θ и φ на поверхности сферы радиуса 1, может быть разложена в ряд по сферическим функциям и что для широкого класса функций этот ряд равномерно сходится.

Предполагая сейчас справедливость этих утверждений, мы воспользуемся формулами (29) и (30) для фактического вычисления членов соответствующего ряда. Пусть

$$F(\theta, \varphi) = V_0(\theta, \varphi) + V_1(\theta, \varphi) + \ldots + V_n(\theta, \varphi) + \ldots,$$

где $V_n(\theta, \varphi)$ — сферическая функция степени n. Допустим, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} V_n(\theta, \varphi)$ равномерно сходится; заменив θ, φ на θ', φ', умножив обе части написанного равенства на

$$P_n(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\overline{\varphi - \varphi'})$$

и проинтегрировав почленно, получаем, в силу соотношения

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1} P_n(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\overline{\varphi - \varphi'})\, V_{n'}(\theta', \varphi')\, d\mu'\, d\varphi' = 0$$

$(n \neq n')$ и формулы (30), следующую формулу:

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1} F(\theta', \varphi')\, P_n(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\overline{\varphi - \varphi'})\, d\mu'\, d\varphi' =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1} V_n(\theta', \varphi')\, P_n(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\overline{\varphi - \varphi'})\, d\mu'\, d\varphi' = \frac{4\pi}{2n+1} V_n(\theta, \varphi).$$

Таким образом,

$$V_n = \frac{2n+1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1} F(\theta', \varphi')\, P_n(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\overline{\varphi - \varphi'})\, d\mu'\, d\varphi'.$$

Итак, в предположении, что соответствующий ряд равномерно сходится, мы получаем следующую формулу для разложения функции $F(\theta, \varphi)$ по сферическим функциям:

$$F(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_0^{2\pi} F(\theta', \varphi')\, P_n(\cos\theta\cos\theta' +$$

$$+ \sin\theta\sin\theta'\cos\overline{\varphi - \varphi'})\, d\varphi'\, d\mu'. \qquad (31)$$

Легко видеть, что члены ряда, стоящего в правой части формулы (31), действительно являются сферическими функциями. В самом деле, так как

$$P_n(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\overline{\varphi - \varphi'})$$

как функция переменных θ и φ является гармонической, то она остается таковой и после применения любых операций по переменным θ' и φ'.

Если в (31) вместо P_n подставить его выражение

$$P_n(\mu)\, P_n(\mu') + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\mu)\, P_n^m(\mu')\cos m(\varphi - \varphi')$$

[см. (28)], то мы получим следующую формулу:

$$F(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\mu) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} (A_{n,m} \cos m\varphi + B_{n,m} \sin m\varphi) P_n^m(\mu), \qquad (32)$$

где

$$A_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int_{-1}^{1} \int_{0}^{2\pi} P_n(\mu') F(\theta', \varphi') \, d\varphi' \, d\mu',$$

$$A_{n,m} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{-1}^{1} \int_{0}^{2\pi} P_n^m(\mu') \cos m\varphi' F(\theta', \varphi') \, d\varphi', \, d\mu'$$

$$B_{n,m} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{-1}^{1} \int_{0}^{2\pi} P_n^m(\mu') \sin m\varphi' \, F(\theta', \varphi') \, d\varphi' \, d\mu'.$$

Формула (32) дает разложение функции $F(\theta, \varphi)$ по зональным, тессеральным и секториальным сферическим функциям с заданными осями.

96. Хотя мы отложили общее доказательство того факта, что широкий класс функций допускает разложение в ряды по сферическим функциям, возможность такого разложения может быть просто доказана для функций, представляющих собой многочлены относительно $\sin\theta\cos\varphi$, $\sin\theta\sin\varphi$, $\cos\theta$. Пусть $f_n(x, y, z)$ — многочлен степени n от x, y, z; предположим, что

$$f_n(x, y, z) = Y_n + r^2 Y_{n-2} + r^4 Y_{n-4} + \ldots, \qquad (33)$$

где $Y_n, Y_{n-2}, Y_{n-4}, \ldots$ — шаровые функции, степени которых указываются индексами; последняя из них равна Y_0 при четном n и Y_1 при нечетном n. Покажем, как определить эти шаровые функции.

Так как [см. (2)]

$$\nabla^2 (r^m V_n) = m(2n+m+1) r^{m-2} V_n,$$

то

$$\nabla^2 f_n = 2(2n-1) Y_{n-2} + 4(2n-3) r^2 Y_{n-4} + 6(2n-5) r^4 Y_{n-6} + \ldots,$$

$$\nabla^4 f_n = 2 \cdot 4(2n-3)(2n-5) Y_{n-4} + 4 \cdot 6(2n-5)(2n-7) r^2 Y_{n-6} + \ldots,$$

. . . .

Последнее из этих уравнений имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^n f_n = n(n+1)(n-2)(n-1)\ldots 2 \cdot 3\, Y_0 && (n \text{ четно}), \\ &\text{или} \\ &\nabla^{n-1} f_n = (n-1)(n+2)(n-3)n \ldots 2 \cdot 5\, Y_1 && (n \text{ нечетно}). \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Из последнего уравнения (34) находим Y_0 или Y_1; тогда из предпоследнего определяется Y_2 или Y_3, и так далее, до тех пор, пока из уравнений (34) не будет найдено Y_n. Разделив в уравнениях (34) $f_n(x, y, z)$ на r^n, мы получим разложение многочлена от $\sin\theta\cos\varphi$, $\sin\theta\sin\varphi$, $\cos\theta$ по сферическим функциям.

Этот метод, принадлежащий Гауссу[1]), не только доказывает возможность разложения, но и дает практический способ его выполнения в простейших случаях.

Явное выражение для f_n было дано Дугаллом[2]) в следующей форме:

$$f_n = H(f_n) + C_2 r^2 H(\nabla^2 f_n) + C_4 r^4 H(\nabla^4 f_n) + \ldots,$$

[1]) Collected Works, т. V, стр. 630.

[2]) Proc. Edin. Math. Soc., 32 (1913), 30.

где

$$H(u_n) = u_n - \frac{1}{2(2n-1)} r^2 \nabla^2 u_n + \frac{1}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} r^4 \nabla^4 u_n - \ldots$$

и

$$C_2 \cdot 2(2n-1) = 1, \qquad C_4 \cdot 2 \cdot 4(2n-3)(2n-5) = 1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_{2p}(2 \cdot 4 \ldots 2p)(2n-2p+1)(2n-2p-1)(2n-4p+3) = 1.$$

Несколько иное, но эквивалентное выражение для f_n еще раньше было дано Прасадом [1]). С помощью этой формулы значение f_n на сфере $r = a$ представляется в виде суммы сферических функций.

§ 11. СВЯЗЬ С ТЕОРИЕЙ ПОТЕНЦИАЛА

97. Применение теоремы сложения, полученной в п. 91, может быть показано на одной задаче теории потенциала. Предположим, что некоторая масса распределена по поверхности сферы радиуса r', причем настолько тонким слоем, что это распределение можно задать с помощью поверхностной плотности σ, которую мы в точке (r', θ', φ') положим равной $AY_n(\theta', \varphi')$, где $Y_n(\theta', \varphi')$ — сферическая функция степени n.

Потенциал этого распределения в точке (r, θ, φ), не лежащей на поверхности сферы (r'), определяется формулой

$$V = Ar'^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Y_n(\theta', \varphi') \sin\theta'}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\gamma)^{\frac{1}{2}}} \, d\varphi' \, d\theta',$$

где

$$\cos\gamma = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\varphi - \varphi').$$

Выражение $(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\gamma)^{-\frac{1}{2}}$ при $r > r'$ может быть представлено абсолютно и равномерно сходящимся рядом

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{r'^s}{r^{s+1}} P_s(\cos\gamma),$$

а при $r < r'$ — абсолютно и равномерно сходящимся рядом

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{r^s}{r'^{s+1}} P_s(\cos\gamma).$$

Так как эти ряды можно подставить в интеграл и затем в силу равномерной сходимости производить интегрирование почленно, то мы получим, что в точке (r, θ, φ), лежащей вне сферы, потенциал равен

$$V_e = Ar'^2 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{r'^s}{r^{s+1}} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} P_s(\cos\gamma) Y_n(\theta', \varphi') \sin\theta' \, d\varphi' \, d\theta',$$

а в точке, лежащей внутри сферы, он равен

$$V_i = Ar'^2 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{r^s}{r'^{s+1}} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} P_s(\cos\gamma) Y_n(\theta', \varphi') \sin\theta' \, d\varphi' \, d\theta'.$$

---

[1]) Math. Ann., 72 (1912), 136.

Далее, в силу основной формулы (29)

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_s(\cos\gamma)\,Y_n(\theta',\varphi')\sin\theta'\,d\varphi'\,d\theta' = 0$$

при $s \neq n$, а в силу формулы (30)

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_n(\cos\gamma)\,Y_n(\theta',\varphi')\sin\theta'\,d\varphi'\,d\theta' = \frac{4\pi}{2n+1}\,Y_n(\theta,\varphi).$$

Таким образом, значение потенциала определяется формулами

$$\left.\begin{aligned} V_e &= A\,\frac{r'^{n+2}}{r^{n+1}}\,\frac{4\pi}{2n+1}\,Y_n(\theta,\varphi) \\ &\text{и} \\ V_i &= A\,\frac{r^n}{r'^{n-1}}\,\frac{4\pi}{2n+1}\,Y_n(\theta,\varphi). \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Из этих формул непосредственно вытекает, что

$$\lim_{r\to r'}\left(\frac{\partial V_i}{\partial r}\right) - \lim_{r\to r'}\left(\frac{\partial V_e}{\partial r}\right) = A\cdot 4\pi Y_n(\theta,\varphi) = 4\pi\sigma,$$

где пределы выражений $\frac{\partial V_i}{\partial r}$ и $\frac{\partial V_e}{\partial r}$ понимаются в смысле неограниченного приближения точки, находящейся соответственно внутри или снаружи сферы, к поверхности этой сферы. Это — хорошо известное свойство потенциала, состоящее в том, что значения градиента потенциала по обе стороны от поверхности отличаются на $4\pi\sigma$.

98. Если $f(x, y, z)$ есть сумма ряда

$$Y_0(x, y, z) + Y_1(x, y, z) + \ldots + Y_n(x, y, z) + \ldots,$$

шаровых функций, сходящегося в некоторой определенной области и удовлетворяющего условиям, при которых его можно почленно дважды дифференцировать по каждому из переменных x, y, z, то очевидно,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) f(x, y, z) = 0,$$

т. е. $f(x, y, z)$ — решение уравнения Лапласа.

Если ряд

$$Y_0(\theta,\varphi) + Y_1(\theta,\varphi) + \ldots + Y_n(\theta,\varphi) + \ldots$$

сходится в каждой точке (θ, φ), $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, к некоторой функции $f(\theta, \varphi)$, то из известных теорем сходимости [1]) вытекает, что для любой фиксированной точки (θ, φ) ряд $\sum h^n Y_n(\theta, \varphi)$, где $|h| < 1$, сходится, так как в этом случае сходится ряд $\sum |h^n - h^{n+1}|$. Это остается верным и тогда, когда ряд $\sum Y_n(\theta, \varphi)$ не сходящийся, а колеблющийся. Таким образом, степенной ряд $\sum h^n Y_n(\theta, \varphi)$ сходится в интервале $(-1, 1)$ и, следовательно, по известному свойству степенных рядов, сходится в этом интервале абсолютно.

Итак, ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n Y_n(\theta',\varphi'), \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r'}\right)^n Y_n(\theta',\varphi')$$

[1]) См., например, Hobson, Theory of functions of a real variable, изд. 2, т. II, стр. 35. [В. И. Смирнов. Курс высшей математики. Том I. (*Прим. ред.*)]

абсолютно сходятся при $r' < r$ и при $r' > r$ соответственно при всех значениях θ' и φ'.

Предположим теперь, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta', \varphi')$ равномерно сходится или что для всех n выражение

$$\left|\sin\theta' \sum_{s=0}^{n} Y_s(\theta', \varphi')\right|$$

не превосходит некоторой положительной функции $F(\theta', \varphi')$, суммируемой (по Лебегу) на поверхности сферы; в частности, можно предположить, что

$$\left|\sin\theta' \sum_{s=0}^{n} Y_s(\theta', \varphi')\right|$$

не превосходит некоторой постоянной K, не зависящей от n, θ' и φ'. Тогда на основании известных теорем[1]) получаем, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Y_n(\theta', \varphi')}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\gamma)^{\frac{1}{2}}} \sin\theta' \, d\varphi' \, d\theta'$$

сходится к

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\theta', \varphi')}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\gamma)^{\frac{1}{2}}} \sin\theta' \, d\varphi' \, d\theta'.$$

Далее,

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Y_n(\theta', \varphi')}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\gamma)^{\frac{1}{2}}} \sin\theta' \, d\varphi' \, d\theta' =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{r'^n}{r^{n+1}} \dfrac{4\pi}{2n+1} Y_n(\theta, \varphi) & \text{при} \quad r > r', \\ \dfrac{r^n}{r'^{n+1}} \dfrac{4\pi}{2n+1} Y_n(\theta, \varphi) & \text{при} \quad r < r'. \end{cases}$$

Кроме того, в каждой точке (r, θ, φ) потенциал, соответствующий массе, распределенной по поверхности сферы (r') с плотностью $\sigma = f(\theta', \varphi')$, равен

$$r'^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\theta', \varphi')}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\gamma)^{\frac{1}{2}}} \sin\theta' \, d\varphi' \, d\theta'.$$

Следовательно, мы доказали, что при сделанных выше предположениях потенциал, отвечающий поверхностной плотности $\sigma = f(\theta', \varphi')$, во внешней точке (r, θ, φ) равен

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2n+1} \frac{r'^{n+2}}{r^{n+1}} Y_n(\theta, \varphi),$$

а во внутренней — равен

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2n+1} \frac{r^n}{r'^{n-1}} Y_n(\theta, \varphi).$$

[1]) Hobson, цит. соч., стр. 289—291. [В. И. Смирнов. Курс высшей математики. Том V, 1947. Гл. II, § 3. (*Прим. ред.*)]

Полученный результат можно сформулировать в виде следующей теоремы:

Если $\sigma = f(\theta', \varphi')$ — поверхностная плотность распределения массы по сфере радиуса r' с центром в начале координат и если $f(\theta', \varphi')$ можно представить в виде суммы ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta', \varphi')$, сходящегося в каждой точке (θ', φ'), то потенциал, соответствующий этому распределению, в каждой внешней точке (r, θ, φ) равен

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2n+1} \frac{r'^{n+2}}{r^{n+1}} Y_n(\theta, \varphi),$$

а в каждой внутренней точке равен

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2n+1} \frac{r^n}{r'^{n-1}} Y_n(\theta, \varphi).$$

При этом предполагается, что 1) *ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta', \varphi')$ *сходится равномерно на поверхности сферы, или* 2)

$$\left| \sum_{s=0}^{n} \sin\theta' \, Y_s(\theta', \varphi') \right|$$

не превосходит некоторой положительной функции $F(\theta', \varphi')$, интегрируемой в смысле Лебега по поверхности сферы; в частности, можно предположить 3)

$$\left| \sum_{s=0}^{n} \sin\theta' \, Y_s(\theta', \varphi') \right| < K,$$

где K — число, не зависящее от n, θ' и φ'.

§ 12. ТЕОРИЯ НЬЮТОНОВСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

99. Для изучения общей теории ньютоновского потенциала читателю следует обратиться к специальным руководствам, например к книгам Пуанкаре или Келлога[1]. Однако, имея в виду дальнейшие применения, мы укажем здесь важнейшие свойства ньютоновского потенциала.

Пусть O — начало координат и пусть масса m сосредоточена в точке (x', y', z'). В точке (x, y, z) потенциал, создаваемый массой m, равен

$$\frac{m}{(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{где} \quad \cos\gamma = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'}.$$

Если $r' > r$, т. е.

$$(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}} > (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}},$$

то потенциал в точке (x, y, z) можно записать в виде

$$m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{r'^{n+1}} P_n(\cos\gamma), \quad \text{где} \quad \cos\gamma = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'},$$

[1] Poincaré, Theorie du potential Newtonien, Paris, 1899; Kellog, Foundations of Potential Theory, Berlin, 1929. Следует указать также на трактат Гарнака.

т. е. в виде

$$m\sum \frac{r^n}{r'^{n+1}}\left[c_n\left(\frac{xx'+yy'+zz'}{rr'}\right)^n - c_{n-2}\left(\frac{xx'+yy'+zz'}{rr'}\right)^{n-2}+\ldots\right],$$

где c_n, c_{n-2}, ... — положительные постоянные. Сравним выражение, стоящее в квадратных скобках, с выражением

$$c_n\left\{\frac{|x||x'|+|y||y'|+|z||z'|}{rr'}\right\}^n + c_{n-2}\left\{\frac{|x||x'|+|y||y'|+|z||z'|}{rr'}\right\}^{n-2}+\ldots,$$

которое можно переписать в виде

$$i^nP_n\left(i\,\frac{|x||x'|+|y||y'|+|z||z'|}{rr'}\right)=i^nP_n(i\cos\bar\gamma),$$

где

$$\cos\bar\gamma=\frac{|x||x'|+|y||y'|+|z||z'|}{rr'}.$$

Так как, согласно формуле (24) гл. II,

$$P_n(i\cos\gamma)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi (i\cos\bar\gamma+i\sqrt{1+\cos^2\bar\gamma}\cos\varphi)^n\,d\varphi,$$

то

$$|i^nP_n(i\cos\bar\gamma)|<(1+\sqrt{2})^n$$

и, следовательно, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{r'^{n+1}}\,i^nP_n(i\cos\bar\gamma)$$

сходится при $\frac{r}{r'}<\sqrt{2}-1$.

Таким образом,

$$\frac{m}{r'}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{c_n}{r'^{2n}}(xx'+yy'+zz')^n-\frac{c_{n-2}}{r'^{2n-2}}(xx'+yy'+zz')^{n-2}(x^2+y^2+z^2)+\ldots\right]$$

представляет собой степенной ряд от x, y и z, каждый член которого по модулю не превосходит соответствующего члена абсолютно сходящегося степенного ряда

$$\frac{m}{r'}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{c_n}{r'^{2n}}(|x||x'|+|y||y'|+|z||z'|)^n+\right.$$
$$\left.+\frac{c_{n-2}}{r'^{2n-2}}(|x||x'|+|y||y'|+|z||z'|)^{n-2}(x^2+y^2+z^2)+\ldots\right]$$

с положительными членами. Мы доказали, что во всех точках, находящихся от O на расстоянии $<(\sqrt{2}-1)\,r'$, выражение

$$\frac{m}{(r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}}$$

может быть представлено как сумма ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}H_n(x, y, z)$, где $H_n(x, y, z)$ — шаровая функция степени n. Так как этот ряд представляет собой абсолютно сходящийся степенной ряд, то его члены можно перегруппировать в любом порядке, не изменив его суммы.

Таким образом, в каждой точке (x, y, z) в окрестности начала координат потенциал может быть записан в виде

$$\sum_{p,q,s} A_{p,q,s} x^p y^q z^s;$$

этот ряд абсолютно сходится.

Пусть масса распределена с объемной плотностью ρ' внутри некоторого объема, не содержащего начало координат; рассмотрим потенциал

$$\int \frac{\rho'\, dv'}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\gamma)^{\frac{1}{2}}}$$

в точке (r, θ, φ); интеграл здесь берется по всему объему, в котором распределена масса.

Так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{r'^{n+1}} P_n(\cos\gamma)$ равномерно сходится к

$$\frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\gamma)^{\frac{1}{2}}}$$

во всем рассматриваемом объеме, если только r меньше минимума расстояния от начала координат до точек этого объема, то

$$\int \frac{\rho'\, dv'}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\gamma)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{r^n}{r'^{n+1}} P_n(\cos\gamma)\, \rho'\, dv' =$$

$$= \sum \int \left[c_n \left(\frac{xx' + yy' + zz'}{rr'} \right)^n - c_n \left(\frac{xx' + yy' + zz'}{rr'} \right)^{n-2} + \ldots \right] \frac{r^n}{r'^{n+1}} \rho' dv'.$$

Заменив, как и выше, ряд, стоящий в квадратных скобках, рядом

$$c_n \left(\frac{|x||x'| + |y||y'| + |z||z'|}{rr'} \right)^n + c_n \left(\frac{|x||x'| + |y||y'| + |z||z'|}{rr'} \right)^{n-2} + \ldots,$$

мы видим, что его члены по модулю меньше соответствующих членов нового ряда, состоящего из положительных слагаемых, если только r меньше расстояния от начала координат до рассматриваемого объема, умноженного на $\sqrt{2} - 1$. Таким образом, ряд $\sum H_n(x, y, z)$, составленный из шаровых функций и представляющий значение в точке (x, y, z) потенциала, соответствующего данному распределению массы, абсолютно сходится, и его члены можно переставлять в любом порядке.

Так как всякая точка (x_0, y_0, z_0), лежащая вне рассматриваемого объема, может быть принята за начало координат, то таким образом доказана следующая теорема:

Потенциал, соответствующий некоторому распределению массы по заданному объему, представляет собой функцию, аналитическую вне данного объема, и в достаточно малой окрестности каждой точки (x_0, y_0, z_0) *он может быть представлен как сумма абсолютно сходящегося степенного ряда*

$$\sum_{p,q,s} B_{p,q,s} (x - x_0)^p (y - y_0)^q (z - z_0)^s.$$

В соответствии с леммой, которая будет установлена в п. 102, этот ряд можно почленно дифференцировать любое число раз по x, y и z; получающиеся при этом ряды изображают соответствующие производные потенциала в точке (x, y, z). Например, если V — потенциал, соответствующий данному распределению массы, то $\nabla^2 V = 0$, так как

$$V = V_1 + V_2 + \ldots, \quad \text{где } \nabla^2 V_1 = 0, \ \nabla^2 V_2 = 0, \ \ldots.$$

Следующее свойство потенциала будет использовано ниже, в приложениях; в существенном оно принадлежит Гарнаку.

Пусть R — некоторая замкнутая пространственная область и $\{U_n\}$ — последовательность функций, гармонических в R. Если эта последовательность сходится равномерно на границе S области R, то она равномерно сходится в R и предел U этой последовательности есть функция, гармоническая в R.

Доказательство этой теоремы имеется в указанном выше трактате Келлога (стр. 248)[1]. Другое доказательство, в котором, однако, накладываются большие ограничения на функции U_n, было дано Пуанкаре (*цит. раб.*, стр. 211).

§ 13. ОБЩАЯ ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

100. Мы рассмотрим сейчас одну общую интегральную теорему, которая содержит в себе в качестве частных случаев различные интегральные теоремы, связанные со сферическими функциями. Эта теорема была доказана Гобсоном[2]) при несколько менее полном исследовании необходимых ограничений, чем это сделано здесь.

Вычислим сперва интеграл

$$\iint (\alpha x + \beta y + \gamma z)^k Y_n(x, y, z)\, dS,$$

где k — целое положительное число, а интеграл берется по поверхности сферы радиуса R с центром в начале координат.

Мы имеем

$$\mu^k = A_0 P_k(\mu) + A_1 P_{k-2}(\mu) + \ldots + A_r P_{k-2r}(\mu) + \ldots,$$

где $A_0, A_1, \ldots, A_r, \ldots$ имеют тот же смысл, что и в п. 24. Положим

$$\mu = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{R(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{\frac{1}{2}}},$$

тогда ясно, что рассматриваемый интеграл может быть отличен от нуля только в том случае, если $k - n$ четное число или нуль.

Так как интеграл

$$\iint P_{k-2r}(\mu)\, Y_n(x, y, z)\, dS$$

при $k - 2r = n$ равняется

$$\frac{4\pi}{2n+1} R^{n+2} Y_n(\alpha, \beta, \gamma) \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{\frac{1}{2}n}},$$

а в остальных случаях равен нулю, то

$$\iint (\alpha x + \beta y + \gamma z)^k Y_n(x, y, z)\, dS = \frac{4\pi}{2n+1} R^{n+k+2} A_r (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^r Y_n(\alpha, \beta, \gamma).$$

---

[1]) См. также В. И. Смирнов. Курс высшей математики. Том IV, 1941, гл. III, § 2, или Р. Курант и Д. Гильберт. Методы математической физики. Том II, 1951, гл. IV, § 2 (там эта теорема названа теоремой Вейерштрасса). (*Прим. ред.*)

[2]) Proc. Lond. Math. Soc. (2), 24 (1893), 80.

Непосредственно видно, что

$$Y_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)(\alpha x+\beta y+\gamma z)^n = n!\ Y_n(\alpha, \beta, \gamma),$$

следовательно,

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\,Y_n(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{k!}\nabla^{2r} Y_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)(\alpha x+\beta y+\gamma z)^k.$$

Таким образом, мы получаем, что

$$\iint (\alpha x+\beta y+\gamma z)^k\, Y_n(x, y, z)\, dS =$$
$$= \frac{4\pi}{2n+1}\frac{R^{n+k+2}}{k!} A_r \nabla^{2r} Y_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)(\alpha x+\beta y+\gamma z)^k .$$

Согласно п. 24,

$$A_r = (2n+1)\frac{k(k-1)\ldots(k-n+2)}{(k+n+1)(k+n-1)\ldots(k-n+3)},$$

следовательно,

$$\iint (\alpha x+\beta y+\gamma z)^k\, Y_n(x, y, z)\, dS =$$
$$= 4\pi R^{2n+2}\frac{2^n n!}{(2n+1)!}\frac{R^{2r}\nabla^{2r}}{2\cdot 4\ldots 2r(2n+3)\ldots(2n+2r+1)} Y_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)(\alpha x+\beta y+\gamma z)^k,$$

где $2r = k-n$.

Если мы приравняем коэффициенты при $\alpha^{p_1}\beta^{p_2}\gamma^{p_3}$, где $p_1+p_2+p_3 = k$, в обеих частях равенства, то получим

$$\iint x^{p_1}y^{p_2}z^{p_3}\, Y_n(x, y, z)\, dS =$$
$$= 4\pi R^{2n+2}\frac{2^n n!}{(2n+1)!}\frac{R^{2r}\nabla^{2r}}{2\cdot 4\ \ldots\ 2r(2n+3)(2n+5)\ \ldots\ (2n+2r+1)}$$
$$Y_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) x^{p_1}y^{p_2}z^{p_3},$$

где $2r+n = p_1+p_2+p_3$.

Результат можно сформулировать следующим образом:

Для целых неотрицательных p_1, p_2, p_3

$$\iint x^{p_1}y^{p_2}z^{p_3}\, Y_n(x, y, z)\, dS = 4\pi R^{2n+2}\frac{2^n n!}{(2n+1)!}\left\{1+\frac{R^2\nabla^2}{2(2n+3)}+\right.$$
$$\left.+\frac{R^4\nabla^4}{2\cdot 4(2n+3)(2n+5)}+\ldots\right\} Y_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) x^{p_1}y^{p_2}z^{p_3},$$

где после выполнения всех указанных операций следует положить $x = y = z = 0$. *Интеграл берется по поверхности сферы радиуса* R *с центром в точке* $(0, 0, 0)$.

Рассматриваемый интеграл равен нулю, если $p_1+p_2+p_3 < n$ или если

$$p_1+p_2+p_3+n -$$

нечетно.

Ясно, что в последнем выражении не обращается в нуль только то слагаемое, в котором порядок оператора равен $p_1+p_2+p_3$.

Таким образом, полученный результат равносилен следующему:

$$\iint x^{p_1}y^{p_2}z^{p_3}Y_n(x, y, z)\,dS =$$

$$= 4\pi R^{m+n+2}\frac{2^n\left(\frac{m+n}{2}\right)!}{\left(\frac{m-n}{2}\right)!\,(m+n+1)!}\nabla^{m-n}Y_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)x^{p_1}x^{p_2}x^{p_3},$$

где $m = p_1 + p_2 + p_3$

101. Пусть $f_n(x, y, z)$ — многочлен степени m от x, y, z, содержащий, вообще говоря, члены всех степеней $\leqslant m$. Так как интеграл

$$\iint f_m(x, y, z)\,Y_n(x, y, z)\,dS$$

равен сумме интегралов, соответствующих слагаемым степеней $0, 1, 2, \ldots, m$, входящим в $f_m(x, y, z)$, то

$$\iint f_m(x, y, z)\,Y_n(x, y, z)\,dS = 4\pi\frac{2^n n!}{(2n+1)!}R^{2n+2}\left\{1 + \frac{R^2\nabla^2}{2(2n+3)} + \right.$$

$$\left. + \frac{R^4\nabla^4}{2\cdot 4(2n+3)(2n+5)} + \ldots\right\}Y_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)f_m(x, y, z), \qquad (36)$$

где x, y, z после выполнения всех дифференцирований следует положить равными нулю.

В случае $m = n$ имеем

$$\iint f_n(x, y, z)\,Y_n(x, y, z)\,dS =$$

$$= 4\pi\frac{2^n n!}{(2n+1)!}R^{2n+2}\,Y_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)f_n(x, y, z). \qquad (37)$$

Эта формула содержит в качестве частного случая формулу Максвелла, дающую выражение для поверхностного интеграла от произведения двух шаровых функций одной и той же степени n. Если $h_1, h_2, \ldots, h_n$ — оси функции $Y_n(x, y, z)$, то

$$Y_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{(2n)!}{2^n n!\,n!}\frac{\partial^n}{\partial h_1\,\partial h_2\ldots\partial h_n} + \text{кратное } \nabla^2,$$

и, следовательно, если $f_n(x, y, z) = Z_n(x, y, z)$ — шаровая функция степени n, то

$$\iint Y_n(x, y, z)\,Z_n(x, y, z)\,dS = \frac{4\pi R^{2n+2}}{2n+1}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial h_1\,\partial h_2\ldots\partial h_n}Z_n(x, y, z). \qquad (38)$$

В частности,

$$\iint [Y_n(x, y, z)]^2\,dS = \frac{4\pi R^{2n+2}}{2n+1}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial h_1\,\partial h_2\ldots\partial h_n}Y_n(x, y, z). \qquad (39)$$

102. Желательно распространить формулу (36) на тот случай, когда вместо $f_m(x, y, z)$ — многочлена степени m — берется бесконечный степенной ряд.

Чтобы рассмотреть предельный переход, когда степень m многочлена стремится к бесконечности, полезна следующая

Лемма. *Если функция $f(x, y, z)$ аналитична в ограниченной области $\overline{S}$ и равна сумме ряда*

$$\sum_{p_1=0}^{\infty}\sum_{p_2=0}^{\infty}\sum_{p_3=0}^{\infty}A_{p_1p_2p_3}x^{p_1}y^{p_2}z^{p_3},$$

абсолютно сходящегося в каждой точке области $\overline{S}$, то функция

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{N_1}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{N_2}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{N_3} f(x, y, z)$$

в любой точке замкнутой области S, лежащей внутри $\overline{S}$, может быть представлена как сумма абсолютно сходящегося ряда, полученного почленным дифференцированием исходного ряда.

Рассмотрим сперва тот случай, когда x, y, z принимают в области S только положительные значения.

Так как исходный ряд абсолютно сходится в каждой точке, принадлежащей такой области, то можно, не меняя суммы этого ряда, сгруппировать его члены следующим образом:

$$\sum_{p_1=0}^{\infty} x^{p_1}\left\{\sum_{p_2=0}^{\infty}\sum_{p_3=0}^{\infty} A_{p_1p_2p_3}y^{p_2}z^{p_3}\right\}.$$

Полученное выражение можно рассматривать как степенной ряд от x. В силу известной теоремы[1]) о степенных рядах этот ряд можно почленно дифференцировать N_1 раз по x, причем в результате получится ряд, сумма которого равна $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{N_1} f(x, y, z)$.

Таким образом, ряд

$$\sum_{p=N_1}^{\infty} p_1(p_1-1)\,\ldots\,(p_1-N_1+1)\,x^{p_1-N_1}\left\{\sum_{p_2=0}^{\infty}\sum_{p_3=0}^{\infty} A_{p_1p_2p_3}y^{p_2}z^{p_3}\right\}$$

сходится к $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{p_1} f(x; y, z)$ в каждой точке области S.

Далее, этот ряд абсолютно сходится. Действительно, если положить

$$\bar{f}(x, y, z)=\sum_{p_1=0}^{\infty}\sum_{p_2=0}^{\infty}\sum_{p_3=0}^{\infty}|A_{p_1p_2p_3}|\,x^{p_1}y^{p_2}z^{p_3},$$

то, как и выше, получаем, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{N_1}\bar{f}(x, y, z)=$$
$$=\sum_{p_1=N_1}^{\infty} x^{p_1-N_1}\left\{p_1(p_1-1)\,\ldots\,(p_1-N_1+1)\sum_{p_2=0}^{\infty}\sum_{p_3=0}^{\infty}|A_{p_1p_2p_3}|\,y^{p_2}z^{p_3}\right\};$$

так как ряд

$$\sum_{p_1=N_1}^{\infty} x^{p_1-N_1}\left\{p_1(p_1-1)\,\ldots\,(p_1-N_1+1)\sum_{p_2=0}^{\infty}\sum_{p_3=0}^{\infty} A_{p_1p_2p_3}y^{p_2}z^{p_3}\right\}$$

абсолютно сходится, то, перегруппировав его члены, получаем, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{N_1} f(x, y, z)=\sum_{p_1=0}^{\infty}\sum_{p_2=0}^{\infty}\sum_{p_3=0}^{\infty} B_{p_1p_2p_3}x^{p_1}y^{p_2}z^{p_3},$$

где ряд справа абсолютно сходится и $B_{p_1p_2p_3}=0$, при $p_1<N_1$.

---

[1]) См., например, Hobson. Theory of functions of a real variab'e, т. II, изд. 2, стр. 197. [См. также В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. I, М.—Л., 1952, гл. IV, § 3. (*Прим. ред.*)]

Поступая с этим рядом аналогично предыдущему и группируя его члены так, чтобы получился ряд по степеням y, видим, что выражение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{N_1}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{N_2} f(x, y, z)$$

может быть представлено как сумма ряда, получающегося почленным дифференцированием ряда

$$\sum_{p_1=0}^{\infty}\sum_{p_2=0}^{\infty}\sum_{p_3=0}^{\infty} A_{p_1p_2p_3}x^{p_1}y^{p_2}z^{p_3}$$

N_1 раз по x и N_2 раз по y, причем получающийся в результате дифференцирования ряд абсолютно сходится. Продолжая этот процесс, мы видим, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{N_1}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{N_2}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{N_3} f(x, y, z)$$

есть сумма абсолютно сходящегося ряда, получающегося почленным дифференцированием исходного ряда, сумма которого равна $f(x, y, z)$. Этот результат верен для любой точки принадлежащей области S.

Пусть теперь S не лежит целиком в области $x>0,\ y>0,\ z>0$. Тогда нужно рассмотреть в отдельности части S, лежащие в различных октантах.

Пусть, например, $x<0,\ y>0$ и $z>0$. Тогда мы рассмотрим ряд

$$\sum_{p_1=0}^{\infty}\sum_{p_2=0}^{\infty}\sum_{p_3=0}^{\infty} (-1)^{p_1}|A_{p_1p_2p_3}|\, x^{p_1}y^{p_2}z^{p_3}$$

и проведем то же самое доказательство, что и выше, с очевидными изменениями.

Остается рассмотреть те точки области S, в которых одна, две или все три координаты x, y, z обращаются в нуль. Так например, если $x=0$, а y и z отличны от нуля, то

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{N_1} f(x, y, z) = N_1!\sum_{p_2=0}^{\infty}\sum_{p_3=0}^{\infty} A_{N_1p_2p_3}y^{p_2}z^{p_3}$$

и приведенные выше рассуждения следует применять к этому ряду. Таким образом лемма доказана для всех точек области S.

103. Пусть $f(x, y, z)$ — сумма абсолютно сходящегося степенного ряда по x, y, z, который сходится в каждой точке, лежащей внутри сферы с центром в начале координат и радиусом $R_1>R$. Пусть, далее, на поверхности сферы радиуса R этот ряд сходится к $f(x, y, z)$ равномерно. Вместо этого можно было бы ввести и более слабое предположение, а именно, что

$$\lim_{m\to\infty}\iint f_m(x, y, z)\,dS = \iint f(x, y, z)\,dS,$$

где $f_m(x, y, z)$ — частичная сумма рассматриваемого ряда, составленная из тех членов, степень которых не превосходит m; интеграл здесь берется по поверхности сферы (R).

Согласно лемме, имеем

$$\nabla^{2s}Y_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) f(x, y, z) =$$
$$= \nabla^{2s}Y_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)[u_0(x, y, z)+u_1(x, y, z)+\ldots+u_m(x, y, z)+\ldots],$$

где u_0, u_1, ... — однородные выражения порядков 0, 1, 2, ... и

$$f_m(x, y, z) = u_0(x, y, z) + u_1(x, y, z) + \ldots + u_m(x, y, z).$$

Таким образом, в точке (0, 0, 0)

$$\nabla^{2s} Y_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) f_m(x, y, z) = \nabla^{2s} Y_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) u_{n+2s}(x, y, z),$$

и, следовательно, в этой точке

$$\left\{1 + \frac{R^2\nabla^2}{2(2n+3)} + \frac{R^4\nabla^4}{2\cdot 4(2n+3)(2n+5)} + \ldots\right\} Y_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) f(x, y, z) =$$
$$= \lim_{m\to\infty}\left\{1 + \frac{R^2\nabla^2}{2(2n+3)} + \ldots\right\} Y_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) f_m(x, y, z).$$

В силу (36) отсюда вытекает, что в этой же точке

$$4\pi R^{2n+2}\frac{2^n n!}{(2n+1)!}\left\{1 + \frac{R^2\nabla^2}{2(2n+3)} + \ldots\right\} Y_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) f(x, y, z) =$$
$$= \lim_{m\to\infty} 4\pi R^{2n+2}\frac{2^n n!}{(2n+1)!}\left\{1 + \frac{R^2\nabla^2}{2(2n+3)} + \ldots\right\} Y_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) f_m(x, y, z) =$$
$$= \lim_{m\to\infty}\iint f_m(x, y, z)\, Y_n(x, y, z)\, dS.$$

Так как по условию

$$\lim_{m\to\infty}\iint f_m(x, y, z)\, dS = \iint f(x, y, z)\, dS$$

и $Y_n(x, y, z)$ ограничена на поверхности сферы R, то

$$\lim_{m\to\infty}\iint f_m(x, y, z)\, Y_n(x, y, z)\, dS = \iint f(x, y, z)\, Y_n(x, y, z)\, dS$$

и, следовательно, в точке (0, 0, 0)

$$4\pi R^{2n+2}\frac{2^n n!}{(2n+1)!}\left\{1 + \frac{R^2\nabla^2}{2(2n+3)} + \ldots\right\} Y_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) f(x, y, z) =$$
$$= \iint f(x, y, z)\, Y_n(x, y, z)\, dS.$$

Таким образом, доказано следующее:

Если $f(x, y, z)$ есть сумма степенного ряда, абсолютно сходящегося внутри некоторой сферы радиуса $R_1 (> R)$ с центром в начале координат, и если на сфере радиуса R

$$\lim_{m\to\infty}\iint f_m(x, y, z)\, dS = \iint f(x, y, z)\, dS,$$

где $f_m(x, y, z)$ — сумма тех членов степенного ряда, представляющего $f(x, y, z)$, степени которых не превосходят m, то

$$\iint f(x, y, z)\, Y_n(x, y, z)\, dS = 4\pi R^{2n+2}\frac{2^n n!}{(2n+1)!}\left\{1 + \frac{R^2\nabla^2}{2(2n+3)} + \right.$$
$$\left. + \frac{R^4\nabla^4}{2\cdot 4(2n+3)(2n+5)} + \ldots\right\} Y_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) f(x, y, z), \qquad (40)$$

причем справа после выполнения всех дифференцирований следует положить $x = y = z = 0$.

Важную роль играет тот случай формулы (40), который получается, когда $f(x, y, z)$ имеет вид $F(\xi - x, \eta - y, \zeta - z)$, где (ξ, η, ζ) — некоторая точка, лежащая вне сферы (R). В этом случае

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^s Y_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) F(\xi - x, \eta - y, \zeta - z) =$$
$$= (-1)^n\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\right)^s Y_n\left(\frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \eta}, \frac{\partial}{\partial \zeta}\right) F(\xi - x, \eta - y, \zeta - z),$$

и при $x=0,\ y=0,\ z=0$ последнее выражение принимает вид

$$(-1)^n\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)Y_n\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\ \frac{\partial}{\partial\eta},\ \frac{\partial}{\partial\zeta}\right)F(\xi,\ \eta,\ \zeta).$$

Таким образом, мы получаем следующую формулу:

$$\iint Y_n(x,\ y,\ z)\,F(\xi-x,\ \eta-y,\ \zeta-z)\,dS=$$
$$=4\pi R^{2n+2}(-1)^n\frac{2^n n!}{(2n+1)!}\left\{1+\frac{R^2\nabla^2}{2(2n+3)}+\frac{R^4\nabla^2}{2\cdot4(2n+3)(2n+5)}+\ldots\right\}$$
$$Y_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)F(\xi,\ \eta,\ \zeta);\qquad(41)$$

здесь предполагается, что $F(\xi-x,\ \eta-y,\ \zeta-z)$ удовлетворяет условиям, при которых справедлива формула (40). Эта последняя формула будет использована в дальнейшем в теории эллипсоидальных гармонических функций.

104. Из формулы (38) можно получить, в частности, выражение двойного интеграла от квадрата тессеральной сферической функции. Если

$$Y_n=f_n=r^{2n+1}\frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^m+\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^m\right\}\frac{1}{r},$$

то

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}(Y_n)^2\,dS=\frac{4\pi R^{2n+2}}{2n+1}\frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^m+\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^m\right\}\frac{(n+m)!}{2^{2m-2}m!}(\xi^m+\eta^m)\left\{z^{n-m}+\right.$$
$$\left.+\frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2m+2)}z^{n-m-2}\xi\eta+\ldots\right\}.$$

В нуль не обращается только тот член, в котором под знаком оператора стоит $(\xi^m+\eta^m)\,z^{n-m}$; следовательно,

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}(Y_n)^2\,dS=\frac{4\pi}{2n+1}R^{2n+2}\frac{(n+m)!\,(n-m)!}{2^{2m-1}};$$

но, согласно (14),

$$Y_n=\frac{(-1)^{n-m}(n-m)!}{2^{m-1}}P_n^m(\mu)\cos m\varphi,$$

поэтому

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\{P_n^m(\mu)\cos m\varphi\}^2\,d\varphi\,d\mu=\frac{2\pi}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!},\qquad(42)$$

если только $m\neq0$; при $m=0$ вместо 2π следует написать 4π.

ПРИМЕРЫ

1. Доказать, что $\int_{-1}^{1}\mu P_n^m(\mu)\,P_{n'}^m(\mu)\,d\mu=0$, если $n'-n\neq\pm1$.

2. Доказать, что $\int_{-1}^{1}\mu P_n^m(\mu)\,P_{n-1}^m(\mu)\,d\mu=\frac{2\pi}{4n^2-1}\frac{(n+m)!}{(n-m-1)!}$.

§ 14. СОПРЯЖЕННЫЕ СИСТЕМЫ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

105. Интеграл от произведения двух сферических функций одной и той же степени, взятый по поверхности некоторой сферы с центром в начале координат, вообще говоря, отличен от нуля, однако можно выбрать систему $2n+1$ сферических функций степени n так, чтобы интеграл от произведения любых двух из них был равен нулю. Такая система называется *сопряженной системой*. Одной из сопряженных систем является совокупность зональных, тессеральных и секториальных функций, соответствующих заданному направлению оси z; действительно, если $m \neq m'$, то

$$\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} P_n^m(\mu) \frac{\cos}{\sin} m\varphi \cdot P_n^{m'}(\mu) \frac{\cos}{\sin} m'\varphi \, d\mu \, d\varphi = 0.$$

Ниже при изучении функций Ламе мы встретимся с другими сопряженными системами.

Формула (37) показывает, что две шаровые функции $Y_n(x, y, z)$ и $Z_n(x, y, z)$ одной и той же степени сопряжены друг другу, если

$$Y_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) Z_n(x, y, z) = 0. \tag{43}$$

Кельвин[1]) показал, как сформулировать условие того, чтобы $2n+1$ сферических функций, представляющих собой линейные комбинации $2n+1$ функций, образующих симметричную систему, составляли бы сопряженную систему. Пусть две такие функции имеют вид

$$a_0 P_n(\mu) + \sum_{m=1}^{n} (a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi) P_n^m(\mu),$$

$$A_0 P_n(\mu) + \sum_{m=1}^{n} (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) P_n^m(\mu);$$

они будут сопряженными[2]), если $2(2n+1)$ постоянных, входящих в эти выражения, удовлетворяют условию

$$2A_0 a_0 + \sum_{m=1}^{n} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} (a_m A_m + b_m B_m) = 0. \tag{44}$$

Для $2n+1$ функций мы будем иметь $n(2n+1)$ условий вида (44) и $(2n+1)^2$ постоянных; отсюда видно, что в выборе систем сопряженных сферических функций существует известная свобода[3]).

§ 15. НАИБОЛЕЕ ОБЩИЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЦЕЛОЙ СТЕПЕНИ

106. До сих пор мы рассматривали только такие шаровые функции, которые представляют собой многочлены от x, y и z. Именно для этих функций термин «шаровые функции» обычно и употребляется. Однако Томсон и Тэт включили в понятие «шаровые функции» вообще все решения уравнения Лапласа, однородные относительно x, y и z. Мы

---

[1]) См. Maxwell, Electricity and Magnetism, т. I, изд. 2, стр. 186, где этот результат получен с помощью теории потенциала.

[2]) См. British Association Report 1871.

[3]) Изложенные здесь рассуждения имеют весьма простой геометрический смысл. Он состоит в том, что сферические функции, отвечающие данному n, образуют $(2n+1)$-мерное эвклидово пространство, а система зональных, тессеральных и секториальных функций степени n представляет собой ортогональный базис в нем. Как и во всяком эвклидовом пространстве, здесь существует бесконечно много других ортогональных базисов (сопряженных систем). Равенство (44) представляет собой не что иное, как условие ортогональности двух сферических функций, записанное через их координаты в базисе, состоящем из зональных, тессеральных и секториальных функций. (*Прим. перев.*)

рассмотрим сейчас наиболее общие решения уравнения Лапласа, однородные степени нуль относительно x, y и z, и затем с помощью дифференцирования получим из них решения с положительными или отрицательными степенями однородности.

Если V_0 — функция только от θ и φ, удовлетворяющая уравнению Лапласа, то мы имеем

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V_0}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_0}{\partial\varphi^2}=0.$$

Положим $d\chi=\csc\theta\,d\theta$, т. е. $\chi=\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\ln\sqrt{\frac{r-z}{r+z}}$; тогда рассматриваемое уравнение перейдет в уравнение

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial\chi^2}+\frac{\partial^2 V_0}{\partial\varphi^2}=0,$$

общее решение которого имеет, как известно, вид

$$V_0=f(\chi+i\varphi)+F(\chi-i\varphi), \tag{45}$$

где f и F — произвольные функции. Это решение может быть записано также в следующей форме:

$$V_0=\Phi\left(e^{i\varphi}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)+\Psi\left(e^{-i\varphi}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right). \tag{46}$$

Это решение впервые было получено Донкином[1]). Этот результат можно сформулировать следующим образом: все шаровые функции степени нуль могут быть получены взятием сопряженных функций от двух функций: $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ и $\ln\sqrt{\frac{r-z}{r+z}}$. Из решения (46) Донкин получил наиболее общую сферическую функцию степени n в следующем виде:

$$(\sin\theta)^{-n}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\sin\theta\right)^n\left[\Phi\left(e^{i\varphi}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)+\Psi\left(e^{-i\varphi}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\right],$$

однако этот вид решения мало удобен для исследования различных типов сферических функций; для этой цели лучше воспользоваться методом дифференцирования, который Томсон и Тэт, а также и Максвелл применяют к функции $\frac{1}{r}$. Если мы в формуле для V_0, полученной Донкином, выразим θ и φ через x, y, z, то получим следующую формулу:

$$V_0=\Phi\left(\frac{x+iy}{r+z}\right)+\Psi\left(\frac{x-iy}{r+z}\right); \tag{47}$$

таким образом, выражение для V_0 получается с помощью функций от сопряженных величин $\frac{x+iy}{r+z}$ и $\frac{x-iy}{r+z}$.

Самой общей гармонической функцией степени -1 является $\frac{V_0}{r}$, т. е. линейная комбинация функций

$$\frac{1}{r}f_1\left(\frac{x+iy}{r+z}\right) \quad \text{и} \quad \frac{1}{r}f_2\left(\frac{x-iy}{r+z}\right), \tag{47'}$$

где f_1 и f_2 — произвольные функции. Мы будем кратно обозначать такую линейную комбинацию символом $\frac{1}{r}f\left(\frac{x\pm iy}{r+z}\right)$. Дифференцируя функции (47') по n осям $h_1, h_2, \ldots, h_n$, получим следующее выражение:

$$\frac{\partial}{\partial h_1\,\partial h_2\ldots\partial h_n}\left[\frac{1}{r}f\left(\frac{x\pm iy}{r+z}\right)\right], \tag{48}$$

[1]) Phil. Trans., 147 (1857), 43.

представляющее собой гармоническую функцию степени $-n-1$. Соответствующая гармоническая функция степени n имеет вид

$$r^{2n+1}\frac{\partial^n}{\partial h_1\,\partial h_2\ldots\partial h_n}\left[\frac{1}{r}f\left(\frac{x\pm iy}{r+z}\right)\right]. \tag{49}$$

Вместо того чтобы дифференцировать гармоническую функцию степени -1, мы могли бы дифференцировать гармоническую функцию степени нуль; при этом мы получили бы следующее выражение, эквивалентное[1]) (49):

$$r^{2n+1}\frac{\partial^{n+1}}{\partial h_1\,\partial h_2\ldots\partial h_{n+1}}\left[f\left(\frac{x\pm iy}{r+z}\right)\right]. \tag{50}$$

Покажем теперь, что если в (49) или в (50) все оси взять совпадающими с осью z, то это не уменьшит общности, и что, следовательно, наиболее общей гармонической функцией степени $-n-1$ является $\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left\{\frac{1}{r}f\left(\frac{x\pm iy}{r+z}\right)\right\}$. Если V_n — гармоническая функция положительной или отрицательной степени n, то можно выбрать u_{n+1} как функцию степени $n+1$ от x и y так, чтобы выражение

$$\int_0^z V_n\,dz+u_{n+1}$$

было сферической функцией. Мы имеем

$$\nabla^2\left\{\int_0^z V_n\,dz+u_{n+1}\right\}=\int_0^z\left(\frac{\partial^2V_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V_n}{\partial y^2}\right)dz+\frac{\partial V_n}{\partial z}+\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u_{n+1}=$$
$$=\left(\frac{\partial V_n}{\partial z}\right)_{z=0}+\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u_{n+1}.$$

Полагая $\xi=x+iy$, $\eta=x-iy$, мы видим, что u_{n+1} нужно выбрать так, чтобы

$$4\frac{\partial^2u_{n+1}}{\partial\xi\,\partial\eta}=-\left(\frac{\partial V_n}{\partial z}\right)_{z=0}.$$

Правая часть этого равенства представляет собой функцию степени $n-1$ от ξ, η; таким образом, искомое выражение для u_{n+1} равно

$$-\frac{1}{4}\iint\left(\frac{\partial V_n}{\partial z}\right)_{z=0}d\xi\,d\eta;$$

приняв любое значение этого выражения за u_{n+1}, получаем, что

$$V_{n+1}=\int_0^z V_n\,dz+u_{n+1}$$

представляет собой гармоническую функцию степени $n+1$, такую, что $V_n=\frac{\partial V_{n+1}}{\partial z}$. Отсюда следует, что каждой гармонической функции $V_{-(n+1)}$ степени $-(n+1)$ соответствуют три гармонические функции V^1_{-n}, V^2_{-n}, V^3_{-n} степени $-n$, такие, что

$$V_{-(n+1)}=\frac{\partial}{\partial x}V^1_{-n}=\frac{\partial}{\partial y}V^2_{-n}=\frac{\partial}{\partial z}V^3_{-n},$$

[1]) См. Hobson, System of Spherical Harmonics, Proc. Lond. Math. Soc., 22 (1891), 431. Судя по замечанию Покеля в его трактате об уравнении $\nabla^2V+V=0$, аналогичное выражение было дано Клейном в его лекциях о функциях Ламе.

например

$$\frac{x}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{xy}{(x^2+z^2)\,r} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{xz}{(x^2+y^2)\,r}.$$

Интегрируя n раз по z любую гармоническую функцию степени $-(n+1)$, мы получим гармоническую функцию степени -1, следовательно, *наиболее общей гармонической функцией степени* $-(n+1)$ *является*

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left[\frac{1}{r} f\left(\frac{x \pm iy}{r+z}\right)\right]. \tag{51}$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial z} f\left(\frac{x \pm iy}{r+z}\right) = -\frac{1}{r} f'\left(\frac{x \pm iy}{r+z}\right),$$

то выражение (51) эквивалентно

$$\frac{\partial^{n+1}}{\partial z^{n+1}}\left[f\left(\frac{x \pm iy}{r+z}\right)\right].$$

Мы показали таким образом, что всякая гармоническая функция степени $-(n+1)$ может быть получена путем n-кратного дифференцирования только по z[1]) некоторой гармонической функции степени -1.

107. В нижеследующей таблице указано некоторое количество наиболее интересных гармонических функций степени нуль вместе с теми функциями, из которых они получаются.

Гармонические функции	Функции $f(\chi \pm i\varphi)$
$\ln\sqrt{\frac{r-z}{r+z}}$, $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$	$\chi \pm i\varphi$
$\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)^2 - \left(\ln\sqrt{\frac{r-z}{r+z}}\right)^2$, $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\cdot\ln\sqrt{\frac{r-z}{r+z}}$	$(\chi \pm i\varphi)^2$
$\frac{x(r-z)}{x^2+y^2} = \frac{x}{r+z}$, $\frac{y(r-z)}{x^2+y^2} = \frac{y}{r+z}$	$e^{\chi \pm i\varphi}$
$\frac{x(r+z)}{x^2+y^2} = \frac{x}{r-z}$, $\frac{y(r+z)}{x^2+y^2} = \frac{y}{r-z}$	$e^{-(\chi \pm i\varphi)}$
$\frac{(r+z)^m}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}m}} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi$, $\frac{(r-z)^m}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}m}} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi$	$e^{\pm m(\chi \pm i\varphi)}$
$\frac{2zy}{x^2+y^2}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{xr}{x^2+y^2}\ln\frac{r+z}{r-z}$ $\frac{2zx}{x^2+y^2}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{yr}{x^2+y^2}\ln\frac{r+z}{r-z}$ $\frac{2ry}{x^2+y^2}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{xz}{x^2+y^2}\ln\frac{r+z}{r-z}$ $\frac{2rx}{x^2+y^2}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{yz}{x^2+y^2}\ln\frac{r+z}{r-z}$	$(\chi \pm i\varphi)\, e^{\chi \pm i\varphi}$ $(\chi \pm i\varphi)\, e^{-(\chi \pm i\varphi)}$
$\frac{(r-z)^m}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}m}}\left[2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\cos m\varphi - \sin m\varphi \ln\frac{r+z}{r-z}\right]$ $\frac{(r-z)^m}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}m}}\left[2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\sin m\varphi + \cos m\varphi \ln\frac{r+z}{r-z}\right]$	$(\chi \pm i\varphi)\, e^{m(\chi \pm i\varphi)}$

[1]) Этот результат был опубликован Гобсоном в его работе, указанной в сноске на стр. 160. Гармонические функции, приведенные в таблице, были даны Томсоном и Тэтом без указания соответствующих функций $f(\chi \pm i\varphi)$.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{(r+z)^m}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}m}}\left[2\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\cos m\varphi+\sin m\varphi\,\dfrac{r+z}{r-z}\right]\\[2ex] \dfrac{(r+z)^m}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}m}}\left[2\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\sin m\varphi-\cos m\varphi\ln\dfrac{r+z}{r-z}\right]\end{array}\right\}\qquad(\chi\pm i\varphi)\,e^{-m(\chi\pm i\varphi)}$$

В каждом случае соответствующая гармоническая функция степени -1 получается путем умножения на $\frac{1}{r}$.

§ 16. СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

108. Мы уже рассмотрели систему гармонических функций, получающихся из $\frac{1}{r}$ дифференцированием по некоторому числу осей; эти гармонические функции мы рассматривали как потенциалы, соответствующие особым точкам, находящимся в начале координат, поэтому их можно назвать *точечными гармоническими функциями*. Рассмотрим теперь гармонические функции, получающиеся аналогичным образом из

$$\frac{1}{r}\ln\sqrt{\frac{r+z}{r-z}}.$$

Если масса распределена с линейной плотностью $\frac{1}{2}$ вдоль положительной полуоси z, от $z=0$ до $z=\infty$, а масса с линейной плотностью $-\frac{1}{2}$ распределена вдоль отрицательной полуоси z, то потенциал, соответствующий такому распределению, в каждой точке равен $\int\limits_0^z \frac{1}{r}\,dz$, т. е. $\ln\sqrt{\frac{r+z}{r-z}}$.

Рассмотрим инверсию указанного выше распределения относительно единичной сферы; мы видим, что $\frac{1}{r}\ln\sqrt{\frac{r+z}{r-z}}$ представляет собой потенциал, соответствующий распределению массы вдоль оси z с линейной плотностью $\frac{1}{2z}$; плотность положительна на положительной полуоси и отрицательна на отрицательной полуоси. Назовем такое линейное распределение *особой линией* нулевого порядка и силы единица. Эта линия соответствует максвелловской особой точке нулевого порядка.

Особая линия первого порядка состоит из двух параллельных линий нулевого порядка бесконечной силы, причем прямые, соединяющие соответствующие точки этих двух линий имеют одно и то же направление h_1, силы этих линий равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, а произведение абсолютных величин этих сил на расстояние между линиями есть величина конечная; это — сила данной линии первого порядка. Направление h_1 есть направление оси соответствующей гармонической функции. Аналогичным образом особая линия второго порядка составляется из двух параллельных особых линий первого порядка; поступая таким же образом дальше, мы определим особую линию любого порядка n с произвольно направленными осями.

Потенциал, создаваемый такой особой линией n-го порядка, расположенной вдоль оси z, можно принять равным

$$\frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{\partial^n}{\partial h_1\,\partial h_2\ldots\partial h_n}\left(\frac{1}{r}\ln\sqrt{\frac{r+z}{r-z}}\right).$$

Такая гармоническая функция называется *линейной гармонической функцией* с осями $h_1, h_2, \ldots, h_n$.

Если все эти направления совпадают, то мы получаем гармоническую функцию $\frac{Q_n(\mu)}{r^{n+1}}$; таким образом,

$$\frac{Q_n(\mu)}{r^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left\{\frac{1}{r}\ln\sqrt{\frac{r+z}{r-z}}\right\}.$$

Так как $\frac{1}{r}$ и $\frac{1}{r}\ln\sqrt{\frac{r+z}{r-z}}$ суть единственные гармонические функции степени -1, зависящие только от r и θ, то P_n и Q_n — единственные зональные, т. е. не зависящие от φ, сферические функции степени n. Таким образом, $Q_n(\cos\theta)$ представляет собой функцию Лежандра второго рода и выражается формулой

$$Q_n(\mu) = \frac{(-1)^n r^{n+1}}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left\{\frac{1}{r}\ln\sqrt{\frac{r+z}{r-z}}\right\} = \frac{(-1)^n r^{n+1}}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left\{\frac{1}{r}\ln\frac{r+z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right\}. \qquad (52)$$

Это выражение для $Q_n(\mu)$ соответствует формуле (12) для $P_n(\mu)$.

Выполняя в (36) дифференцирование с помощью формулы Лейбница и учитывая, что $\frac{\partial}{\partial z}\ln\sqrt{\frac{r+z}{r-z}} = \frac{1}{r}$, получаем следующую формулу:

$$Q_n = P_n\ln\sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}} - \left(P_{n-1}P_0 + \frac{1}{2}P_{n-2}P_1 + \frac{1}{3}P_{n-3}P_2 + \ldots + \frac{1}{n}P_0P_{n-1}\right),$$

эквивалентную формуле (52).

Линейная гармоническая функция, у которой $n-m$ осей совпадают с осью z, а остальные m осей расположены симметрично в плоскости xy, равна, с точностью до постоянного множителя,

$$\frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^m \pm \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^m\right\}\left[\frac{1}{r}\ln\sqrt{\frac{r+z}{r-z}}\right],$$

т. е.

$$(\xi^m \pm \eta^m)\frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}}\left(\frac{d}{rdr}\right)^m\left[\frac{1}{r}\ln\sqrt{\frac{r+z}{r-z}}\right]$$

или, что то же самое,

$$r^m \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-m}\left(\frac{d}{rdr}\right)^m\left[\frac{1}{r}\ln\sqrt{\frac{r+z}{r-z}}\right],$$

где $\frac{d}{dr}$ означает дифференцирование по r при постоянном z.

Умножив это выражение на r^{n+1}, мы получим $Q_n^m(\mu)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi$, где

$$Q_n^m(\mu) = C\frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}}\left(\frac{d}{rdr}\right)^m\left[\frac{1}{r}\ln\sqrt{\frac{r+z}{r-z}}\right].$$

§ 17. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ТЕССЕРАЛЬНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДОВ

109. Как было показано в п. 106, тессеральные гармонические функции обоих родов могут быть получены из определенных гармонических функций с помощью одного только дифференцирования по z. Гармонические функции степени -1, содержащие в качестве множителя $\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi$ (и другой множитель, не содержащий φ), имеют вид

$$\frac{1}{r}\frac{(r\pm z)^m}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}m}}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi$$

(см. п. 107).

Отсюда получаем гармонические функции

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi\cdot\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}m}}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{(r\pm z)^m}{r},$$

которые можно записать в следующем виде:

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi\cdot\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}m}}\frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}}(r\pm z)^m. \tag{53}$$

Если $n<m$, то существуют две различные функции вида

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} m\varphi\cdot H_n(z,\ \sqrt{x^2+y^2}).$$

Если же $n>m$, то эти две гармонические функции совпадают, так как те члены в $(r\pm z)^m$, которые содержат четные степени r, обращаются в нуль после $(n+1)$-кратного дифференцирования по z.

Если $n>m$, то каждое из выражений

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi\cdot\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}m}}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{(r\pm z)^m}{r}$$

представляет тессеральную функцию первого рода.

Тессеральными функциями второго рода являются

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi\cdot\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}m}}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left[\frac{1}{r}\{(z+r)^m+(z-r)^m\}\ln\sqrt{\frac{r+z}{r-z}}\right],$$

их можно записать также в следующем виде:

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}m}}\frac{\partial^{n+1}}{\partial z^{n+1}}\left[\{(z+r)^m-(z-r)^m\}\ln\sqrt{\frac{r+z}{r-z}}\right].$$

Они получаются дифференцированием по z двух гармонических функций

$$\ln\sqrt{\frac{r+z}{r-z}}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi\left\{\frac{(z+r)^m+(z-r)^m}{r(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}m}}\right\}+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\begin{pmatrix}-\sin m\varphi\\ +\cos m\varphi\end{pmatrix}\cdot\left\{\frac{(z+r)^m-(z-r)^m}{r(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}m}}\right\};$$

действительно, если $n>m$ (m целое), то коэффициент при $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi$ после n-кратного дифференцирования по z обращается в нуль. Если $n<m$, то получающиеся таким путем гармонические функции содержат множитель φ; в этом случае обе гармонические функции вида

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi\cdot H_n(z,\sqrt{x^2+y^2})$$

даются формулой (53).

Формула (53) может быть записана в виде

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi\cdot(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left\{\frac{1}{r(r\pm z)^m}\right\};$$

таким образом,

$$P_n^m(\cos\theta) = Ar^{n+m+1}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{1}{r(r\pm z)^m}.$$

Воспользовавшись формулой Якоби

$$\frac{d^{m-1}(1-t^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dt^{m-1}} = (-1)^{m-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-1)}{m}\sin m\psi,$$

где $t=\cos\psi$, получаем, что последнее выражение равно (с точностью до постоянного множителя)

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi\cdot\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}m}}\frac{\partial^{n+m}}{\partial z^{n+m}}r^{2m-1}. \tag{54}$$

Таким образом, (54) представляет собой иное выражение для тессеральных функций первого рода. Заметим, что оно получается из выражения

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi\cdot(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}}\frac{1}{r^{2m+1}}$$

(см. п. 64) заменой m на $-m$.

Таким образом,

$$P_n^m(\cos\theta) = Br^{n+1}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}}\frac{1}{r^{2m+1}},$$

где B—постоянный множитель.

110. Томсон и Тэт[1]) утверждают, что

$$\frac{d^{n+m}(r^{2m-1})}{\partial z^{n+m}}\frac{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}m}}$$

и

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n+m+1}\left[r^{2m+1}\left(\frac{d}{rdr}\right)^m\left(\frac{1}{r}\ln\frac{r+z}{r-z}\right)\right](x^2+y^2)^{\frac{1}{2}m}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi$$

представляют собой при $m>0$ две различные гармонических функции вида

$$H(z,\sqrt{x^2+y^2})\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi$$

и степени $-n-1$. Это, однако, неверно, так как в действительности второе выражение всегда совпадает (с точностью до постоянного множителя) с первым. Действительно, легко заметить, что во втором выражении величина $\ln\frac{r+z}{r-z}$ исчезает при дифференцировании.

Легко проверить на простейших случаях ($n=1, 2, 3$), что

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[r^{2m+1}\left(\frac{d}{rdr}\right)^m\left(\frac{1}{r}\ln\frac{r+z}{r-z}\right)\right](x^2+y^2)^{\frac{1}{2}m}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi = C\frac{r^{2m-1}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}m}}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi,$$

так что две гармонические функции степени нуль, указанные Томсоном и Тэтом (стр. 173), на самом деле совпадают.

---

[1]) Natural Philosophy, т. I, стр. 76. См. также Hobson, Proc. Lond Math Soc. (1), 22 (1891), 443, где сделано соответствующее исправление.

В качестве второй гармонической функции следует взять

$$r^m \frac{\cos}{\sin} m\varphi \frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}} \left(\frac{d}{rdr}\right)^m \left[\frac{1}{r} \ln \frac{r+z}{r-z}\right],$$

или, что то же самое,

$$\frac{\cos}{\sin} m\varphi \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}m}} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left\{\frac{1}{r}\left[(z+r)^m+(z-r)^m\right] \ln \frac{r+z}{r-z}\right\}.$$

Это выражение не совпадает с первой гармонической функцией при $m=0$.

§ 18. КРУГОВЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

111. Если некоторое количество магнитной массы с постоянной плотностью распределено в полуплоскости xz, в которой $x<0$, то соответствующий потенциал равен $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. С помощью инверсии относительно единичной сферы получаем, что выражение $\frac{1}{r}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ представляет собой потенциал, соответствующий распределению магнитной массы с плотностью, обратно пропорциональной расстоянию от начала координат. Такое распределение можно назвать особым листом порядка нуль. Тогда особый лист любого порядка n, соответствующий n произвольным направлениям, строится посредством особых листов низших порядков подобно тому, как это делалось в случае особых точек и линий. Потенциал, создаваемый таким особым листом, равен, с точностью до постоянного множителя,

$$\frac{\partial^n}{\partial h_1 \partial h_2 \ldots \partial h_n} \left\{\frac{1}{r} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right\}.$$

Эти гармонические функции можно назвать *круговыми гармоническими функциями*[1]) в силу их связи с функцией $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

Если все оси совпадают с осью z, то мы получаем функцию

$$\frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}\varphi$$

— зональную круговую гармоническую функцию.

Система тессеральных гармонических функций

$$\frac{1}{r^{n+1}} \frac{\cos}{\sin} m\varphi \left[\varphi \cdot P_n^m(\mu) + Q_n^m(\mu)\right]$$

получается, если взять $n-m$ осей совпадающими с осью z, а остальные m осей распределить симметрично в экваториальной плоскости.

Это выражение получается, если выполнить все дифференцирования в выражении

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-m} \left\{\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^m \pm \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^m\right\} \left[\frac{1}{r}(\ln\xi - \ln\eta)\right].$$

Система гармонических функций, которые можно назвать круговыми гармоническими функциями второго рода, дается формулой

$$\frac{\partial^n}{\partial h_1 \partial h_2 \ldots \partial h_n} \left[\frac{1}{r} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \ln\frac{r+z}{r-z}\right].$$

Зональная гармоническая функция, принадлежащая этой системе, имеет вид $\varphi \frac{Q_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}$.

---

[1]) Hobson, цит. соч., стр. 445.

§ 19. СПЕЦИАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

112. Бромвич[1]) обратил внимание на решение уравнения Лапласа, представимое в виде

$$Y_n = \frac{\partial}{\partial n}\{r^n P_n(\cos\theta)\} = r^n\left\{\ln r\cdot P_n(\cos\theta) + \frac{\partial P_n(\cos\theta)}{\partial n}\right\};$$

такое решение встречается в некоторых задачах теории потенциала, которыми он занимался. Ось z служит в этом случае осью симметрии.

Полагая $\mu \equiv \cos\theta$, имеем

$$P_n(\mu) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi (\mu + \sqrt{\mu^2-1}\cos\psi)^n\,d\psi.$$

Эта формула верна как при положительном, так и при отрицательном $\cos\theta$, если только, как здесь и предполагается, n целое и положительное. При иных значениях n эта формула верна для положительных $\cos\theta$ (см. гл. V). Имеем также

$$\frac{\partial P_n(\mu)}{\partial n} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi (\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\psi)^n \ln(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\psi)\,d\psi$$

и

$$\ln(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\psi) =$$

$$= \ln\left[\left(\frac{\mu+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\mu-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}e^{i\psi}\right]\left[\left(\frac{\mu+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\mu-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-i\psi}\right] =$$

$$= \ln\frac{\mu+1}{2} + \ln\left[1 + i\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}e^{i\psi}\right] + \ln\left[1+i\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cdot e^{-i\psi}\right],$$

причем последний член можно в силу неравенства $\left|\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right| < 1$ разложить по степеням $e^{i\psi}$ и $e^{-i\psi}$.

Далее, вспоминая, что выражение

$$\int\limits_0^\pi (\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\psi)^n \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} r\psi\,d\psi$$

пропорционально $P_n^r(\cos\theta)$, когда $r \leqslant n$, и равно нулю, когда $r > n$, мы видим, что

$$\frac{\partial P_n(\mu)}{\partial n} = P_n(\mu)\ln\frac{\mu+1}{2} + \sum_{r=0}^{n}\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^{\frac{1}{2}r}(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}r}\frac{d^r P_n(\mu)}{d\mu^r}.$$

Последняя часть стоящего справа выражения представляет собой, очевидно, многочлен степени n от μ и, следовательно, может быть записана в виде

$$A_n P_n(\mu) + A_{n-1}P_{n-1}(\mu) + \ldots + A_0.$$

Мы видим, таким образом, что решение Y_n можно записать в форме

$$Y_n = r^n\left\{P_n \ln\frac{r+z}{2} + A_n P_n(\mu) + A_{n-1}P_{n-1}(\mu) + \ldots + A_0 P_0(\mu)\right\},$$

где $A_0, A_1, \ldots, A_n$ — постоянные, которые мы определим ниже.

---

[1]) Proc. Lond. Math. Soc. (2), 12 (1913), 100. См. также заметку Ватсона в Rec. Proc. Lond. Math. Soc., стр. 8 того же тома.

Эта форма решения может быть получена также следующим образом. Так как $\frac{1}{2}(r+z)$, как легко проверить, удовлетворяет уравнению Лапласа, то посредством инверсии (см. п. 75) получаем решение $\frac{1}{r}\ln\left(\frac{r+z}{2r^2}\right)$. Отсюда с помощью дифференцирования получаем решение

$$\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left\{\frac{1}{r}\ln\frac{r+z}{2r^2}\right\},$$

которое, применяя формулу Лейбница, можно записать в виде

$$\frac{P_n(\mu)}{r^{n+1}}\ln\frac{r+z}{2r^2}+\left\{-\frac{P_{n-1}(\mu)}{r^n}\left(\frac{1}{r}-\frac{2z}{r^3}\right)+\frac{1}{2!}\frac{P_{n-2}(\mu)}{r^{n-1}}\left(-\frac{z}{r^3}-\frac{2}{r^2}+\frac{4z^2}{r^4}\right)-\ldots\right\},$$

т. е. в виде

$$\frac{P_n(\mu)}{r^{n+1}}\ln\frac{r+z}{2r^2}+\frac{f_n(\mu)}{r^{n+1}},$$

где f_n—многочлен n-й степени.

Применяя еще раз инверсию, получаем решение вида

$$r^nP_n(\mu)\ln\frac{r+z}{2}+r^nf_n(\mu),$$

т. е. имеющее указанную выше форму.

113. Так как $Ar^nP_n(\mu)$ представляет собой решение уравнения Лапласа, то без уменьшения общности можно определить Y_n формулой

$$Y_n=r^n\left[P_n\ln\frac{r+z}{2}+A_{n-1}P_{n-1}(\mu)+\ldots+A_0P_0(\mu)\right].$$

Чтобы найти $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$, рассмотрим выражение

$$\nabla^2\left\{r^nP_n(\mu)\ln\frac{r+z}{2}\right\}=2\left(\frac{\partial Z_n}{\partial x}\frac{x}{r(r+z)}+\frac{\partial Z_n}{\partial y}\frac{y}{r(r+z)}+\frac{\partial Z_n}{\partial z}\frac{1}{r}\right)=$$

$$=\frac{2}{r+z}\left(\frac{nZ_n}{r}+\frac{\partial Z_n}{\partial z}\right),$$

где $Z_n=r^nP_n(\mu)$. Легко проверить, что $\frac{\partial Z_n}{\partial z}=nZ_{n-1}$ и, следовательно,

$$\nabla^2\left\{Z_n\ln\frac{r+z}{2}\right\}=\frac{2n}{1+\mu}r^{n-2}\left[P_n(\mu)+P_{n-1}(\mu)\right].$$

Кроме того,

$$\nabla^2\{r^nf_n(\mu)\}=r^{n-2}\left[n(n+1)f_n(\mu)+\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{df_n(\mu)}{d\mu}\right\}\right];$$

таким образом, условие $\nabla^2Y_n=0$ приводит к уравнению

$$\frac{2n}{1+\mu}\{P_{n-1}(\mu)+P_n(\mu)\}+n(n+1)f_n(\mu)+\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{df_n(\mu)}{d\mu}\right\}=0.$$

Легко видеть, что первое слагаемое в этом уравнении представляет собой многочлен степени $n-1$ и равно удвоенному выражению

$$(2n-1)P_{n-1}(\mu)-(2n-3)P_{n-2}(\mu)+(2n-5)P_{n-3}(\mu)-\ldots+(-1)^{n-1}.$$

Если

$$f_n(\mu)=A_nP_n(\mu)+\ldots+A_0,$$

то имеем

$$2\{(2n-1)P_{n-1}(\mu)-(2n-3)P_{n-2}(\mu)+\ldots+(-1)^{n-1}P_0(\mu)\}+$$

$$+\sum_{s=0}^{n-}\{n(n+1)-s(s+1)\}A_sP_s(\mu)=0;$$

следовательно,

$$A_s = (-1)^{n-s} \frac{2s+1}{(n-s)(n+s+1)}, \quad s = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Полагая $A_n = 0$, находим, что

$$f_n(\mu) = -2 \left\{ \frac{2n-1}{1 \cdot 2n} P_{n-1}(\mu) - \frac{2n-3}{2(2n-1)} P_{n-2}(\mu) + \frac{2n-5}{3(2n-2)} P_{n-3}(\mu) - \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n(n+1)} \right\};$$

таким образом,

$$Y_n = r^n P_n(\mu) \ln \frac{r+z}{2} - 2r^n \left\{ \frac{2n-1}{1 \cdot 2n} P_{n-1}(\mu) - \frac{2n-3}{2(2n-1)} P_{n-2}(\mu) + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} \right\}.$$

Ясно, что если прибавить любое слагаемое вида $Ar^n P_n(\mu)$, функция Y_n попрежнему будет удовлетворять уравнению Лапласа.

Если в выражении для Y_n изменить знак μ на противоположный, то в качестве второго решения получим

$$r^n P_n(\mu) \ln \frac{r-z}{2} + 2r^n \left\{ \frac{2n-1}{1 \cdot 2n} P_{n-1}(\mu) + \frac{2n-3}{2(2n-1)} P_{n-2}(\mu) + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{1}{n(n+1)} \right\}.$$

Полуразность этих двух решений представляет собой хорошо известное решение

$$r^n Q_n(\mu) = \frac{1}{2} r^n P_n(\mu) \ln \frac{1+\mu}{1-\mu} - 2r^n \left\{ \frac{2n-1}{1 \cdot 2n} P_{n-1}(\mu) + \frac{2n-5}{3(n-2)} P_{n-3}(\mu) + \ldots \right\}$$

[см. гл. II, формула (56)].

ПРИМЕРЫ

1. Показать, что потенциал однородной окружности радиуса c и массы M с центром в начале координат, лежащей в плоскости xy, равен

$$\frac{M}{\pi} \int_0^{\pi} \left[c^2 + \{z + i(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \cos\varphi\}^2\right]^{-\frac{1}{2}} d\varphi.$$

2. Если $u = f(x, y, z, t)$ — решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

то

$$u = t^{-\frac{3}{2}} f\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}, -\frac{1}{t} \right) \exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4a^2 t} \right)$$

является его другим решением.

3. Показать, что если $V = f(x, y, z)$ — решение уравнения Лапласа, то

$$V = (x-iy)^{-\frac{1}{2}} f\left(\frac{r^2-a^2}{2(x-iy)}, \frac{r^2+a^2}{2i(x-iy)}, \frac{az}{x-iy} \right)$$

является его другим решением.

Показать также, что если $W = f(x, y, z, t)$ — решение уравнения

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 W,$$

то

$$W=\frac{1}{z-ct}f\left(\frac{x}{z-ct},\ \frac{y}{z-ct},\ \frac{r^2-1}{y(z-ct)},\ \frac{r^2+1}{x(z-ct)}\right)$$

является его другим решением.

[Bateman, Proc. Lond. Math. Soc. (2), **7** (1909), **77**.]

4. Две окружности, имеющие массы M и M' и радиусы a и a', расположены в пространстве так, что их центры находятся от начала координат на расстояниях b и b' соответственно. Прямые, соединяющие начало координат с их центрами, перпендикулярны к плоскостям этих окружностей и образуют друг с другом угол θ. Показать, что потенциал одной окружности по отношению к другой равен

$$MM'\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{c^{n+1}}B_nB'_nQ_n,$$

где

$$B_n=b^n-\frac{n(n-1)}{2\cdot 2}b^{n-2}a^2+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4}b^{n-4}a^4-\ldots,$$

B'_n и Q_n — такие же функции от b', a' и от $\cos\theta$, $\sin\theta$ соответственно, а c равно наибольшему из чисел $\sqrt{a^2+b^2}$ и $\sqrt{a'^2+b'^2}$. (Math. Tripos, 1877.)

5. Показать, что если $\mu=\cos\theta$, $\mu'=\cos\theta'$, то

$$(-1)^m 2^m m!\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\mu)P_n^m(\mu')=$$
$$=(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}m}\left\{\frac{d^mP_n(\mu\mu')}{d(\mu\mu')^m}+\frac{(\mu^2-1)(\mu'^2-1)}{2(2m+2)}\frac{d^{m+2}P_n(\mu\mu')}{d(\mu\mu')^{m+2}}+\right.$$
$$+\frac{(\mu^2-1)^2(\mu'^2-1)^2}{2\cdot 4(2m+2)(2m+4)}\frac{d^{m+4}P_n(\mu\mu')}{d(\mu\mu')^{m+4}}+$$
$$\left.+\frac{(\mu^2-1)^3(\mu'^2-1)^3}{2\cdot 4\cdot 6(2m+2)(2m+4)(2m+6)}\frac{d^{m+6}P_n(\mu\mu')}{d(\mu\mu')^{m+6}}+\ldots\right\}.$$

Это равенство эквивалентно формуле, найденной Ганзеном[1]). Оно может быть получено из теоремы сложения (20) разложением

$$P_n\left(\mu\mu'-\sqrt{\mu^2-1}\sqrt{\mu'^2-1}\cos\varphi\right)$$

в ряд по степеням $\sqrt{\mu^2-1}\sqrt{\mu'^2-1}\cos\varphi$ с последующей заменой каждой степени $\cos\varphi$ линейной комбинацией косинусов кратных дуг и объединением коэффициентов при $\cos m\varphi$.

6. Доказать, что если $Y_n(x,\ y,\ z)$ — шаровая функция целой положительной степени n, то

$$Y_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)f(x^2+y^2+z^2)=2^nY_n(x,\ y,\ z)\,f^{(n)}(x^2+y^2+z^2),$$

где $f^{(n)}(u)=\frac{d^n}{du^n}f(u)$.

7. Показать, что функция

$$u=\frac{Y_n(x,\ y,\ z)}{r^{2n+1}}\int\limits_{\frac{r}{2\sqrt{kt}}}^{\infty}\alpha^{2n}e^{-\alpha^2}f\left(t-\frac{r^2}{4k\alpha^2}\right)d\alpha$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\nabla^2u.$$

(Math Tripos, 1893)

8[2]). Доказать, что

$$P_n^{(m)}(\cos\theta)=\frac{c_n^{(m)}}{r^n}J_m\left(\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)z^n,$$

---

[1]) Abh. Sächs. Ges. d. Wiss., 1 (1852), 123.

[2]) Hobson, Proc. Lond. Math. Soc. (1), 25 (1894), 73.

где $c_n^{(m)}$ — постоянные. Показать также, что

$$P_n^m(\cos\theta)=\frac{r^{n+1}}{(n-m)!}(-1)^m\int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda r\cos\theta} J_m(\lambda r\sin\theta)\,d\lambda.$$

9. В символической записи

$$(ax+by+cz)^n \equiv n!\sum_{p,q,r}\frac{x^p y^q z^r}{p!q!r!}\qquad (p+q+r=n)$$

означает произвольный однородный многочлен степени n от x, y, z. Если $(ax+by+cz)^n$ — шаровая функция, то

$$(a^2+b^2+c^2)(ax+by+cz)^{n-2}\equiv 0$$

и

$$(ax+by+cz)^n=(-1)^n\frac{2^n n!n!}{(2n)!}r^{2n+1}\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\frac{\partial}{\partial z}\right)^n\frac{1}{r}.$$

Показать, что если $(a'x+b'y+c'z)^n$ — другая шаровая функция той же степени, то интеграл от произведения двух этих функций, взятый по поверхности сферы радиуса единицы, равен

$$\frac{4\pi 2^n n!n!}{(2n+1)!}(aa'+bb'+cc')^n.$$

Вывести уравнение степени $2n$, определяющее положение полюсов.

(Там же, 1890.)

10. Показать, что если

$$\frac{1}{(1-2h\cos\theta+h^2)^{s+\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}a_s^{(0)}+\sum_{i=1}^{\infty}a_s^{(i)}\cos i\theta,$$

то $h^{\frac{1}{2}}a_0^{(s)}$ — зональная сферическая функция степени $i-\frac{1}{2}$ от $\frac{1}{2}(h+h^{-1})$. Выразить $a_s^{(i)}$ через соответствующую присоединенную функцию и доказать, что

$$\left(i-s-\frac{1}{2}\right)a_s^{(i)}=(i-1)(h+h^{-1})\,a_s^{(i-1)}-\left(i+s-\frac{3}{2}\right)a_s^{(i-2)},$$

$$ia_s=\left(s+\frac{1}{2}\right)h\,(a_{s+1}^{i-1}-a_{s+1}^{i+1}).$$

11. Доказать, что

$$\{P_n^m(\cos\theta)\}^2=\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\sum_{r=m}^{n}(-1)^{r+m}\frac{(2r)!}{2^{2r}(r-m)!\,(r+m)!\,(r!)^2}\frac{(n+r)!}{(n-r)!}\sin^{2r}\theta.$$

(Там же, 1906.)

12. Доказать, что (при известных условиях, которые следует установить) всякую функцию n-й степени от x, y, z, удовлетворяющую уравнению Лапласа $\nabla^2 V=0$, можно записать в виде

$$\left\{1-\frac{r^2\nabla^2}{2(2n-1)}+\frac{r^4\nabla^4}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}-\ldots\right\}f(x,\ y,\ z)+$$
$$+r^{2n+1}\left\{1+\frac{r^2\nabla^2}{2(2n+1)}+\frac{r^4\nabla^4}{2\cdot 4(2n+1)(2n+3)}+\ldots\right\}\frac{\varphi(x,\ y,\ z)}{r^{2n+1}}.$$

Исследовать решение следующей задачи: найти функцию V от x, y, z, такую, что 1) V удовлетворяет уравнению Лапласа, 2) V однородна первой степени относительно x, y, z, 3) если в V и в $\frac{\partial V}{\partial z}$ положить $z=0$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, то $\frac{\partial V}{\partial z}$ обращается в нуль, а $\frac{V}{r}$ — в заданную однозначную функцию от φ, с периодом 2π.

[Math. Tripos, 1902, см. также Hobson, Proc. Lond. Math. Soc. (1), 26, 492.]

13[1]). Пусть $P(a, b, c)$ означает шаровую функцию

$$\frac{(-1)^n}{a!b!c!} r^{n+1} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^b \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^c \frac{1}{r},$$

где $n = a + b + c$ и $P(a, b, c)$ равно нулю, если одно из чисел a, b или c является целым отрицательным. Доказать, что

$$\frac{\partial}{\partial x} r^n P(a, b, c) = -r^{n-1} [(a+1) P(a+1, b-2, c) + (a+1) P(a+1, b, c-2) P(a-1, b, c)].$$

14. Доказать, что функция

$$V = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) f\left(\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}}\, x + \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}}\, y + \sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}\, z\right)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению $\nabla^2\nabla^2 V = 0$.

15[2]). Показать с помощью теоремы сложения или иным путем, что если $\mu > 1$, $\nu = \sqrt{\mu^2 - 1}$, то

$$P_n^2(\mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi P_n(1 + 2\nu^2 \sin^2 x)\, dx.$$

16. Разложить в ряд по шаровым функциям целых положительных степеней функцию, удовлетворяющую уравнению Лапласа, непрерывную вместе со своими первыми производными на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ и равную $\dfrac{x^2 - y^2}{a\sqrt{x^2 + y^2}}$ на поверхности этой сферы. (Math. Tripos, 1912.)

---

[1]) Gallop, Proc. Lond. Math. Soc. (1), 28 (1896), где приведен ряд формул, относящихся к дифференцированию шаровых функций.

[2]) Nicholson, Quart. Journ. Math., 41 (1910), 257.

Глава V

ОБОБЩЕННЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

114. В гл. III было показано, что обычная система шаровых функций получается из уравнения Лапласа

$$\nabla^2 V \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

при отыскании решений этого уравнения, имеющих вид

$$r^n \frac{\cos}{\sin} m\varphi \cdot u_n^m(\mu), \qquad r^{-n-1} \frac{\cos}{\sin} m\varphi \cdot u_n^m(\mu), \tag{1}$$

где m и n — целые положительные числа, x, y и z связаны с r, φ, μ формулами

$$x = r(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}} \cos\varphi, \qquad y = r(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}} \sin\varphi, \quad z = r\mu,$$

и $\mu = \cos\varphi$.

Функция $u_n^m(\mu)$ представляет собой частное решение обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$(1-\mu^2)\frac{d^2u}{d\mu^2} - 2\mu\frac{du}{d\mu} + \left\{n(n+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2}\right\}u = 0, \tag{2}$$

известного под названием присоединенного уравнения Лежандра степени n и порядка m.

Эти решения уравнения (1), в которых μ действительно и лежит в интервале $(-1, +1)$, а m целое и неотрицательное, не превосходящее n, связаны с тем весьма важным классом задач теории потенциала, в которых граница рассматриваемой пространственной области состоит из одной сферы или из двух концентрических сфер, а также с некоторыми другими сходными задачами.

Мы увидим, однако, что функции $\frac{\cos}{\sin} m\varphi \cdot u_n^m(\mu)$ используются при решении и других задач теории потенциала, в которых граница имеет иную форму, отличную от сферической, причем в некоторых из этих случаев соответствующие значения n, m и μ могут и не быть подчинены тем условиям, которые были указаны для случая сферической поверхности. В некоторых случаях (они будут рассмотрены ниже) приходится использовать функции $u_n^m(\mu)$, в которых хотя n и m являются попрежнему целыми положительными, μ принимает действительные значения, большие единицы.

Решения уравнения (2), соответствующие дробным или комплексным значениям n, используются в некоторых задачах, которые мы уточним ниже. В задачах теории потенциала для тора используются решения уравнения (2), соответствующие полуцелым n и $\mu > 1$. Для пространственной области, ограниченной двумя кусками сферических поверхностей, имеющих общий край, используются решения уравнения (2), соответствующие комплексным n вида $-\frac{1}{2}+ip$ и $\mu>1$. Встречаются также случаи, в которых m принимает нецелые значения.

Выражения (1), в которых $u_n^m(\mu)$ суть частные решения уравнения (2) и в которых степень n и порядок m, равно как и аргумент μ, могут принимать любые действительные или комплексные значения, можно назвать обобщенными шаровыми функциями. Изучение вида этих гармонических функций сводится к изучению вида двух частных решений $P_n^m(\mu)$, $Q_n^m(\mu)$ уравнения (2). В настоящей главе будут даны определения этих функций $P_n^m(\mu)$ и $Q_n^m(\mu)$, применимые при любых значениях n, m и μ. Вид и свойства функций, используемых для решения различных типов задач теории потенциала, были исследованы разными авторами, причем для различных классов задач эти исследования проводились обычно более или менее независимо. Желательно, конечно, включить эти специальные классы функций в общую теорию. Изучение вида и свойств функций $P_n^m(\mu)$, $Q_n^m(\mu)$ при любых значениях степени, порядка и аргумента необходимо для сведе́ния в единое целое частных результатов, полученных различными авторами в связи с отдельными задачами теории потенциала.

В классическом трактате Гейне[1]) исследуются форма и свойства функций $P_n^m(\mu)$, $Q_n^m(\mu)$, при этом хотя степень n и порядок m сперва считаются целыми, там рассматриваются и различные обобщения, относящиеся к случаям, в которых n не подчинено указанным ограничениям. Однако из-за отсутствия общего определения функций $P_n^m(\mu)$, $Q_n^m(\mu)$ для любых n и m эти обобщения отрывочны, неполны, а порой и ошибочны. Много рядов, удовлетворяющих дифференциальному уравнению (2) при произвольных значениях степени и порядка были указаны[2]) Томсоном и Тэтом. Общее изучение рядов, удовлетворяющих дифференциальному уравнению (2), было проведено Ольбрихтом[3]), который получил 72 гипергеометрических ряда, удовлетворяющих рассматриваемому уравнению, из которых по крайней мере половина сходится в любой наперед заданной точке плоскости μ.

В частном случае $m=0$ зональные функции $P_n(\mu)$, $Q_n(\mu)$ могут быть полностью определены для любых значений n с помощью интегралов по простому контуру. Этот результат был получен Шлефли[4]), который основывался на рассмотрении рядов, представляющих соответствующие функции.

Определение более общих функций $P_n^m(\mu)$, $Q_n^m(\mu)$ с помощью интегралов, взятых вдоль соответствующих контуров в плоскости μ, пригодное для любых значений n и m, оказалось возможным благодаря введению в анализ независимо друг от друга Жорданом[5]) и Похгаммером[6]) интегралов по двойному контуру. Использование интегралов такого типа имеет большие преимущества по сравнению с пользованием интегралами, взятыми между двумя пределами, потому что при этом нет необходимости выбирать постоянные так, чтобы соответствующие интегралы сходились. Поэтому интересующие нас функции могут быть определены с помощью выражений, имеющих определенный смысл при всех значениях постоянных. Гобсон[7])

[1]) Kugelfunktionen, т. I и II.
[2]) Natural Philosophy, т. I, ч. 1, приложение B.
[3]) Studien über die Kugel- und Zylinderfunktionen, Halle, 1887.
[4]) Über die beiden Heineschen Kugelfunktionen, Bern, 1881.
[5]) См. Cours d'Analyse, т. II, 1894, стр. 569—573.
[6]) Math. Ann., **35** (1890), 470 и 495; **36** (1890), 84.
[7]) Phil. Trans., **187** (1896), 443.

применил этот метод для получения общих определений функций $P_n^m(\mu)$ и $Q_n^m(\mu)$; он провел также детальное исследование свойств этих функций, основанное на использовании интегралов по двойному контуру.

Общая теория была развита также Барнсом[1]), который использовал для представления гипергеометрических функций контурные интегралы, содержащие под знаком интеграла Г-функцию. Его метод дает значительную экономию труда при проведении различных преобразований, используемых при исследовании разных форм, в которых могут быть записаны рассматриваемые функции. С точки зрения той теории, которая излагается ниже, более удобен метод, развитый Гобсоном, однако мы уделим некоторое внимание и результатам Барнса.

§ 2. СООТНОШЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

115. Если в дифференциальном уравнении (2) сделать подстановку

$$u=(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}v,$$

то получим, что v удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$(1-\mu^2)\frac{d^2v}{d\mu^2}-2(m+1)\mu\frac{dv}{d\mu}+(n-m)(n+m+1)v=0. \tag{3}$$

Если теперь за новую независимую переменную мы возьмем $\mu'\equiv\frac{1}{2}(1-\mu)$, то это уравнение примет вид

$$\mu'(1-\mu')\frac{d^2v}{d\mu'^2}+(m+1)(1-2\mu')\frac{dv}{d\mu'}+(n-m)(n+m+1)v=0. \tag{4}$$

Сравнивая уравнение (4) с дифференциальным уравнением

$$\mu'(1-\mu')\frac{d^2v}{d\mu'^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)\mu']\frac{dv}{d\mu'}-\alpha\beta v=0$$

для гипергеометрической функции Гаусса $F(\alpha, \beta; \gamma; \mu')$, мы видим, что эти два дифференциальных уравнения тождественны, если $\alpha=m-n$, $\beta=m+n+1$, $\gamma=m+1$. Отсюда вытекает, что дифференциальному уравнению (3) удовлетворяет функция $v=F\left(m-n,\ m+n+1;\ m+1;\ \frac{1-\mu}{2}\right)$ и, следовательно, решения уравнения (2) могут быть выражены через гипергеометрические функции. Пары индексов, соответствующие трем особым точкам, $\mu'=0$, $\mu'=\infty$, $\mu'=1$, уравнения (4), будут, как легко видеть, следующие: $0, -m$; $m-n, m+n+1$; $0, -m$.

Вспоминая, что $u=(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}v$, мы видим, что уравнению (2) удовлетворяет P-функция Римана[2]):

$$P\left\{\begin{matrix} 0, & \infty, & 1 & \\ \frac{1}{2}m, & -n, & \frac{1}{2}m & \frac{1}{2}(1-\mu) \\ -\frac{1}{2}m, & n+1, & -\frac{1}{2}m & \end{matrix}\right\}. \tag{5}$$

Эта P-функция представляет собой тот частный случай общей P-функции, который получается, когда две пары разностей индексов равны между

---

[1]) Quart. Journ. Math., 39 (1908), 97.

[2]) Б. Риман, Сочинения, М.—Л., 1948, стр. 159—175. Для ознакомления с теорией P-функций Римана см. Forsyth, Theory of Differential Equations, т. III, стр. 135—150. [См. также Уиттекер и Ватсон. Курс современного анализа, т. II, 1934. (*Прим. ред.*)]

собой. Отсюда вытекает, что теория функций $P_n^m(\mu)$, $Q_n^m(\mu)$ совпадает с теорией P-функций $P\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma, & \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & x \end{pmatrix}$, где $\alpha-\alpha'=\gamma-\gamma'$, и, следовательно, эти функции принадлежат к некоторому специальному классу гипергеометрических функций.

Функция (5) совпадает с функцией

$$P\begin{Bmatrix} -1, & \infty & 0 & \\ \frac{1}{2}m, & -n, & \frac{1}{2}m & \mu \\ -\frac{1}{2}m, & n+1, & -\frac{1}{2}m, & \end{Bmatrix},$$

т. е. с

$$P\begin{Bmatrix} 0, & \infty, & 1 & \\ 0, & -\frac{1}{2}n, & \frac{1}{2}m & \mu^2 \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}(n+1), & -\frac{1}{2}m & \end{Bmatrix}; \qquad (6)$$

это преобразование существенно основывается на том факте, что для $\mu=1$ и для $\mu=-1$ индексы одни и те же.

В свою очередь выражение (6) равносильно

$$P\begin{Bmatrix} 0, & \infty, & 1 & \\ 0, & \frac{1}{2}m, & -\frac{1}{2}n & \frac{\mu^2}{\mu^2-1} \\ \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}m, & \frac{1}{2}(n+1) & \end{Bmatrix};$$

с помощью использованного выше преобразования это последнее выражение приводится к виду

$$P\begin{Bmatrix} -1, & \infty & 1 & \\ -\frac{1}{2}n, & m, & -\frac{1}{2}n & \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2-1}} \\ \frac{1}{2}(n+1), & -m, & \frac{1}{2}(n+1) & \end{Bmatrix},$$

что в свою очередь эквивалентно

$$P\begin{Bmatrix} 0, & \infty, & 1 & \\ -\frac{1}{2}n, & m, & -\frac{1}{2}n & \frac{\mu+\sqrt{\mu^2-1}}{2\sqrt{\mu^2-1}} \\ \frac{1}{2}(n+1) & -m, & \frac{1}{2}(n+1) & \end{Bmatrix}. \qquad (7)$$

Таким образом, мы видим, что функции, удовлетворяющие уравнению (3), можно представить с помощью P-функций Римана трех различных типов, а именно (5), (6) и (7). Каждую из этих P-функций можно подвергнуть гомографическим преобразованиям, в результате которых в преобразованных выражениях вместо x в качестве переменных появляются $1/x$, $1-x$, $1/(1-x)$, $x/(x-1)$ и $(x-1)/x$. Каждой данной P-функции отвечают 4 гипергеометрические функции, так что если мы учтем гомографические преобразования, то получим 24 гипергеометрических функции. Так как дифференциальному уравнению (3) удовлетворяют три различные P-функции, каждая из которых может быть подвергнута гомографическому преобразованию, то всего получается 72 гипергеометрические функции, удовлетворяющие рассматриваемому дифференциальному уравнению. Все эти функции выписаны в виде рядов в цитированном выше мемуаре Ольбрихта.

Решения уравнения (2) могут быть изучены или в форме рядов, или в форме интегралов, которые берутся вдоль некоторых путей в плоскости переменного μ. Оба эти способа будут встречаться в этой главе.

Следующие свойства гипергеометрических функций, соответствующих действительным значениям α, β, γ, будут использованы в излагаемой теории:

$$F(\alpha, \beta; \gamma; 1) = \frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\,\Pi(\gamma-\beta-1)}, \quad \text{где } \alpha+\beta<\gamma, \tag{а}$$

$$F(\alpha, \beta; \gamma; x) \sim \frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\alpha+\beta-\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)} \frac{1}{(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}}, \quad \text{где } \alpha+\beta>\gamma, \tag{б}$$

$$F(\alpha, \beta; \alpha+\beta; x) \sim \frac{\Pi(\alpha+\beta-1)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)} \ln\frac{1}{1-x}. \tag{в}$$

Соотношения (б) и (в) могут быть получены как частные случаи следующей теоремы[1]). Пусть ряд $\sum\limits_{r=0}^{\infty} a_r$ расходится, а ряд $\sum\limits_{r=0}^{\infty} a_r x^r$ сходится при $x<1$ и a_r, начиная с некоторого r, положительны и таковы, что

$$a_1+a_2+\ldots+a_r \sim C(b_1+b_2+\ldots+b_r)$$

или $a_r \sim Cb_r$. Тогда, если

$$f(x)=\sum_{r=0}^{\infty} a_n x^n, \quad g(x)=\sum_{r=0}^{\infty} b_n x^n,$$

то

$$f(x) \sim Cg(x).$$

§ 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ $P_n^m(\mu)$

116. Если в уравнении (3) сделать подстановку

$$v=\int (t^2-1)^n (t-\mu)^{-n-m-1}\,dt,$$

то получим

$$\left\{(1-\mu^2)\frac{d^2}{d\mu^2}-2(m+1)\mu\frac{d}{d\mu}+(n-m)(n+m+1)\right\} \times$$
$$\times \int (t^2-1)^n (t-\mu)^{-n-m-1}dt=$$
$$=-(n+m+1)\int \frac{d}{dt}\{(t^2-1)^{n+1}(t-\mu)^{-n-m-2}\}\,dt.$$

Таким образом, дифференциальному уравнению (3) удовлетворяет функция

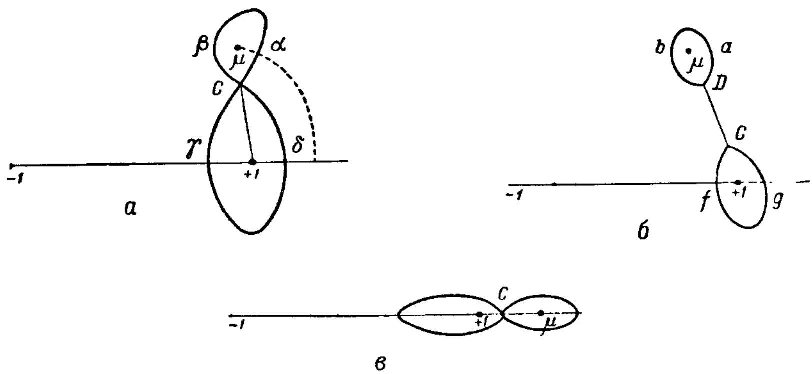
$$v=\int (t^2-1)^n (t-\mu)^{-n-m-1}\,dt,$$

где n и m могут принимать любые значения, а интеграл берется вдоль замкнутого пути, такого, что подинтегральная функция после обхода вдоль всего контура возвращается к исходному значению. В общем случае

[1]) См. Hardy, Orders of Infinity, Cambridge, 1910, стр. 56, где имеются соответствующие ссылки.

подинтегральное выражение имеет четыре особые точки: $t=1$, $t=-1$, $t=\mu$ и $t=\infty$; если замкнутая кривая охватывает одну или больше из этих особых точек то после обхода всей такой кривой подинтегральное выражение принимает, вообще говоря, значение, отличное от исходного. Те замкнутые пути, для которых это не так и которые, следовательно, могут быть использованы для построения решения рассматриваемого дифференциального уравнения, можно охарактеризовать следующим образом: они остаются замкнутыми и на соответствующей римановой поверхности, на которой функция $(t^2-1)^n(t-\mu)^{-n-m-1}$ от t однозначна. Выбирая два различных контура такого типа, мы получим два независимых решения рассматриваемого дифференциального уравнения и можем использовать их для определения присоединенных функций Лежандра.

Если переменная t описывает, начиная с некоторой точки C, которую можно для простоты считать лежащей на линии, соединяющей 1 и μ, некоторый путь, обходящий фиксированную точку μ в положительном



Черт. 3.

направлении (т. е. против часовой стрелки), затем точку 1 в положительном, потом точку μ в отрицательном и наконец точку 1 в отрицательном направлении, возвращаясь в результате в точку C, то подинтегральная функция $(t^2-1)^n(t-\mu)^{-n-m-1}$ в конце всего пути принимает то же самое значение, которое она имела вначале. На черт. 3*а* это будет путь

$$(C\alpha\beta C,\ C\gamma\delta C,\ C\beta\alpha C,\ C\delta\gamma C);$$

на черт. 3*б* это —

$$(CD,\ DabD,\ DC,\ CfgC,\ CD,\ DbaD,\ DC,\ CgfC).$$

Для простоты мы считаем, что путь $C\beta\alpha C$ совпадает с путем $C\alpha\beta C$, проходимом в обратном направлении, однако это не обязательно. Путь, по которому совершается обход вокруг одной из особых точек в отрицательном направлении, можно выбирать совершенно независимо от того пути, по которому совершается обход вокруг этой же точки в положительном направлении. Точку C также не обязательно брать на линии, соединяющей 1 и μ.

В обозначениях Похгаммера

$$u=(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int\limits_{(C)}^{(\mu+,\ 1+,\ \mu-,\ 1-)}(t^2-1)^n(t-\mu)^{-n-m-1}dt,$$

и u удовлетворяет дифференциальному уравнению (2). Однако, для того чтобы это значение u было однозначно определено, необходимо точно указать значения, принимаемые входящими в подинтегральную функцию многозначными множителями в различных точках пути интегрирования. Это можно сделать, указав их значения в одной из точек пути интегрирования; тогда их значения во всех остальных точках определяются по непрерывности.

Чтобы определить значение выражения $(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}$ в некоторой данной точке μ, не лежащей на действительной оси между 1 и $-\infty$, предположим, что $\arg(\mu-1)$ и $\arg(\mu+1)$ равны нулю при всех действительных μ, больших 1. Тогда можно считать, что аргументы величин $\mu-1$ и $\mu+1$ заключены между $-\pi$ и π. Таким образом, если $\mu-1=re^{i\theta}$, где $-\pi<\theta<\pi$, и $\mu+1=r'e^{i\theta'}$, где $-\pi<\theta'<\pi$, то значение $(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}$ в каждой точке плоскости однозначно определяется формулой

$$(rr')^{\frac{1}{2}m}e^{\frac{1}{2}mi(\theta+\theta')},$$

если только эта точка не лежит на действительной оси слева от точки 1; поэтому мы предположим, что μ не принимает действительных значений $\leqslant 1$. Таким образом, в плоскости μ проведем разрез вдоль действительной оси от $-\infty$ до 1. Мы увидим, что если m и n целые действительные, то можно ограничиться разрезом только от -1 до 1.

В выражении $(t^2-1)^n\equiv(t-1)^n(t+1)^n$ угол $\arg(t+1)$ следует положить равным нулю в тех точках действительной оси, в которых $t+1$ действительно и больше нуля. Пусть начальное значение $\arg(t-1)$ в точке C, лежащей на отрезке, соединяющем 1 и μ, равно φ, причем $-\pi<\varphi<\pi$; φ равен, очевидно, углу, который образует прямая, соединяющая точку C и точку $+1$, с положительным направлением действительной оси. Так как $\arg[(t-1)^n]=n\arg(t-1)$ и $\arg[(t+1)^n]=n\arg(t+1)$, то левые части этих равенств однозначно определены в каждой точке контура. После того как мы, обойдя точку $+1$ в положительном направлении, снова вернемся в C, $\arg(t^2-1)^n$ станет равным $n(2\pi+\varphi+\varphi')$, где $\varphi'=\arg(t+1)$ в точке C.

Будем считать $\arg(t-\mu)$ равным нулю в тех точках контура, в которых $t-\mu$ действительно и положительно, тем самым он будет определен во всех точках контура, и тогда $\arg[(t-\mu)^{-n-m-1}]=(-n-m-1)\arg(t-\mu)$. Начальное значение $\arg(t-\mu)$ в точке C тогда равно $-\psi$, где ψ — угол $(0<\psi\leqq 2\pi)$, на который поворачивается в положительном направлении отрезок, соединяющий точки t и μ, когда t движется вдоль первой петли от C к A, т. е. к той точке, в которой $t-\mu$ действительно и положительно.

117. Рассмотрим теперь значения выражения

$$C_n^m(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int\limits_{(C)}^{(\mu+,\,1+,\,\mu-,\,1-)}\frac{1}{2^n}\frac{(t^2-1)^n}{(t-\mu)^{n+m+1}}\,dt, \tag{8}$$

причем аргументы переменных определяются поставленными выше условиями при $|\mu-1|<2$. Здесь C_n^m — некоторая постоянная, значение которой будет установлено позже. Для удобства выберем точку C на отрезке, соединяющем 1 и μ. Сделаем подстановку $t-1=(\mu-1)u$, где u — новая переменная.

Так как $t-\mu=(\mu-1)(u-1)$, то интеграл (8) принимает следующий вид:

$$C_n^m(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int\limits_{(C')}^{(1+,\,0+,\,1-,\,0-)}(\mu-1)^{-m}u^n(u-1)^{-n-m-1}\left(1+\frac{\mu-1}{2}u\right)^n du,$$

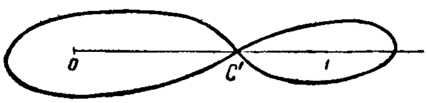
где C' (черт. 4) — точка на плоскости u, соответствующая C. В этом интеграле начальное значение $\arg u$ в точке C' равно нулю, $\arg(u-1)$ в этой точке равен $-\pi$, и так как $\left|\arg\left[1+\frac{\mu-1}{2}u\right]\right|<\pi$, то

$$\left(1+\frac{\mu-1}{2}u\right)^n$$

имеет то значение, которое получается при разложении этого выражения в биномиальный ряд. Выполнив это разложение, что возможно, так как при $|\mu-1|<2$ путь можно выбрать так, что во всех его точках $\left|\frac{\mu-1}{2}u\right|<1$, получаем

$$C_n^m\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Pi(n)}{\Pi(r)\,\Pi(n-r)}\left(\frac{\mu-1}{2}\right)^r\int_{(C')}^{(1+,\,0+,\,1-,\,0-)}u^{n+r}(u-1)^{-n-m-1}du.$$

Почленное интегрирование возможно, так как степенной ряд равномерно сходится для всех u, принадлежащих пути интегрирования.



Черт. 4.

118. Выражение

$$e^{-\pi i(a+b)}\int_{(C')}^{(1+,\,0+,\,1-,\,0-)}u^{a-1}(1-u)^{b-1}du$$

Похгаммер обозначает символом $\epsilon(a,b)$. В этом выражении начальное значение $\arg(1-u)$ в точке C' равно нулю, так что $u-1=(1-u)e^{-\pi i}$, и начальное значение $\arg u$ в точке C' также равно нулю.

Существенными свойствами функции $\epsilon(a,b)$ являются следующие:

$$\epsilon(a,b)=\epsilon(b,a), \tag{а}$$

$$\epsilon(a+r,b)=(-1)^r\frac{a(a+1)\ldots(a+r-1)}{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+r-1)}\epsilon(a,b), \tag{б}$$

$$\epsilon(a-r,b)=(-1)^r\frac{(a+b-1)\ldots(a+b-r)}{(a-1)(a-2)\ldots(a-r)}\epsilon(a,b),$$

$$\epsilon(a,b)=-4\sin a\pi\sin b\pi B(a,b), \tag{в}$$

где $\mathrm{Re}(a)>0$, $\mathrm{Re}(b)>0$, а $B(a,b)$ есть B-функция Эйлера

$$\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}du.$$

С помощью соотношения (б) свойство (в) может быть распространено на любые значения a и b.

$$\epsilon(a,b)=\epsilon(1-a-b,b)=\epsilon(a,1-a-b). \tag{г}$$

Воспользовавшись этими свойствами функции $\epsilon(a,b)$, мы получаем

$$\int_{(C')}^{(1+,\,0+,\,1-,\,0-)}u^{n+r}(u-1)^{-n-m-1}du=$$

$$=e^{(n+m+1)\pi i}\int_{(C')}^{(1+,\,0+,\,1-,\,0-)}u^{n+r}(1-u)^{-n-m-1}du=e^{(n+r)\pi i}\epsilon(n+r+1,-n-m).$$

Так как

$$\epsilon(n+r+1,\,-n-m)=(-1)^r\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+r)}{(1-m)(2-m)\ldots(r-m)}\epsilon(n+1,\,-n-m).$$

то отсюда вытекает, что выражение (8) можно записать в следующем виде:

$$C_n^m e^{n\pi i}\,\epsilon(n+1,\,-n-m)\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m}\sum\frac{\Pi(n-r)}{\Pi(r)\,\Pi(n-r)}\times$$
$$\times\frac{1}{(1-m)(2-m)\ldots(r-m)}\left(\frac{\mu-1}{2}\right)^r$$

или

$$C_n^m e^{n\pi i}\,\epsilon(n+1,\,-n-m)\left(\frac{\mu+1}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{2}m}F\left(-n,\;n+1;\;1-m;\frac{1-\mu}{2}\right),$$

где F означает, как обычно, сумму гипергеометрического ряда.

В силу (в) и (г) имеем

$$\epsilon(n+1,\,-n-m)=\epsilon(n+1,\,m)=4\sin n\pi\sin m\pi\,\frac{\Pi(n)\,\Pi(m-1)}{\Pi(n+m)},$$

и выражение (8) при любых n и m можно записать в виде

$$C_n^m e^{n\pi i}\cdot 4\sin n\pi\sin m\pi\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m}\frac{\Pi(n)\,\Pi(m-1)}{\Pi(n+m)}\times$$
$$\times F\left(-n,\;n+1;\;1-m;\;\frac{1-\mu}{2}\right),$$

где $|\mu-1|<2$.

Так как $\Pi(-m)\,\Pi(m-1)=\pi\csc m\pi$, то

$$\Pi(m-1)\sin m\pi=\frac{\pi}{\Pi(-m)},$$

и, следовательно, при $m=0$ выражение (8) принимает вид

$$C_n^0 e^{n\pi i}\cdot 4\pi\sin n\pi\,F\left(-n,\;n+1;\;1;\;\frac{1-\mu}{2}\right).$$

Будем, как обычно (см. п. 15), считать, что $P_n(\mu)$ представляется рядом $F\left(-n,\;n+1;\;1;\;\frac{1-\mu}{2}\right)$, когда $\left|\frac{1-\mu}{2}\right|<1$; отсюда, полагая

$$C_n^0=\frac{e^{-n\pi i}}{4\pi\sin n\pi},$$

получим

$$P_n(\mu)=\frac{e^{-n\pi i}}{4\pi\sin n\pi}\int\limits_{(C)}^{(\mu+,\,1+,\,\mu-,\,1-)}\frac{1}{2^n}(t^2-1)^n(t-\mu)^{-n-1}\,d\mu. \tag{9}$$

Выражение, стоящее в правой части формулы (9), определяет $P_n(\mu)$ во всей плоскости μ, за исключением той части действительной оси, где $\mu\leqslant 1$; в действительности оно представляет собой аналитическое продолжение, на плоскость с разрезом, функции, определяемой в окрестности точки $\mu=1$ гипергеометрическим рядом. Аргументы множителей $t+1$ и $t-\mu$, входящих в подинтегральную функцию, принимаются равными нулю в тех точках, в которых эти множители действительны и положительны; $\arg(t-1)$ в начальной точке C следует положить равным φ, $-\pi<\varphi<\pi$, где φ — угол, образуемый отрезком, соединяющим точки 1 и C, с осью t.

Чтобы определить $P_n^m(\mu)$, мы должны сперва рассмотреть случай, когда m целое положительное, а затем определить $P_n^m(\mu)$ для произвольного m так, чтобы это определение было согласовано с обычным определением, относящимся к тому частному случаю, когда m целое положительное.

Если m целое положительное, то $P_n^m(\mu)$ обычно определяют (см. п. 54) следующей формулой:

$$P_n^m(\mu) = (\mu^2 - 1)^{\frac{1}{2}m} \frac{d^m}{d\mu^m} P_n(\mu);$$

таким образом, в этом случае

$$P_n^m(\mu) = \frac{e^{-n\pi i}}{4\pi \sin n\pi} \frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n)} (\mu^2 - 1)^{\frac{1}{2}m} \int^{(\mu+,\ 1+,\ \mu-,\ 1-)} \left(\frac{t^2-1}{2}\right)^n (t-\mu)^{-n-m-1}\, dt,$$

так что

$$C_n^m = \frac{e^{-n\pi i}}{4\pi \sin n\pi} \frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n)}.$$

Примем теперь, что C_n^m имеет это значение и при любых n и m. Мы приходим к следующему определению:

Присоединенная функция Лежандра $P_n^m(\mu)$ первого рода определяется при любых значениях степени n и порядка m формулой

$$\frac{e^{-n\pi i}}{4\pi \sin n\pi} \frac{1}{2^n} \frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n)} (\mu^2 - 1)^{\frac{1}{2}m} \int_{(C)}^{(\mu+,\ 1+,\ \mu-,\ 1-)} (t^2 - 1)^n (t-\mu)^{-n-m-1}\, dt; \tag{10}$$

$\arg(t+1)$ *и* $\arg(t-\mu)$ *выбираются так, чтобы они были равны нулю во всех тех точках контура, в которых эти выражения действительны и положительны. Начальное значение* $\arg(t-1)$ *в точке C следует положить равным φ, где φ — угол, образованный отрезком, соединяющим 1 и C, с положительным направлением оси t и $-\pi < \varphi < \pi$. Для того чтобы эта функция $P_n^m(\mu)$ была однозначна, следует предположить, что* $\arg(\mu-1)$ *и* $\arg(\mu+1)$ *по абсолютной величине всегда меньше π и, следовательно, что в плоскости сделан разрез от 1 до $-\infty$. Этот разрез ограничивает значения* $\arg(\mu-1)$ *и* $\arg(\mu+1)$, *но не* $\arg(t-1)$ *и* $\arg(t+1)$; *последние при переходе через разрез меняются непрерывно. Эта функция $P_n^m(\mu)$ остается неопределенной для действительных значений μ, меньших 1.*

Это определение функции $P_n^m(\mu)$ было дано Гобсоном в цитированной выше статье (см. п. 114, сноска). Та же самая функция была определена Барнсом (см. там же) с помощью следующего выражения:

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{\sin n\pi}{\pi} \left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m} \int \frac{\Pi(s-n-1)\,\Pi(n-s)\,\Pi(-s-1)}{\Pi(s-m)} \left(\frac{\mu-1}{2}\right)^s ds,$$

где $\mu - 1$ и $\mu + 1$ имеют аргументы, по модулю не превосходящие π, а интеграл берется вдоль пути, параллельного мнимой оси, обходящего положительные полюсы подинтегрального выражения слева, а отрицательные — справа. Барнс показал, что это определение равносильно формуле (10).

119. Если μ таково, что $|\mu - 1| < 2$, то

$$P_n^m(\mu) = \frac{\sin m\pi}{\pi} \Pi(m-1) \left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1-\mu}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\Pi(-m)} \left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1-\mu}{2}\right). \tag{11}$$

Из этой формулы вытекает, что $P_{-n-1}^m(\mu) = P_n^m(\mu)$. Ясно, что если m целое положительное, то эта формула должна быть видоизменена, так как при этом $\Pi(-m)$ обращается в бесконечность и знаменатели коэффициентов в гипергеометрическом ряде, начиная с $(m+1)$-го, обращаются в нуль. В этом случае гипергеометрическая функция $F\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1-\mu}{2}\right)$ может быть записана в следующем виде:

$$1+\sum_{r=1}^{m-1}\frac{(-n)(-n+1)\ldots(-n+r-1)(n+1)(n+2)\ldots(n+r)}{(1-m)(2-m)\ldots(r-m)\cdot 1.2.3\ldots r}\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^r+$$

$$+\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^m\sum_{r=m}^{\infty}\frac{1}{\Pi(-m)}\frac{\Pi(n)}{\Pi(n-r)}\frac{\Pi(n+r)}{\Pi(n)}\frac{\Pi(-m)}{\Pi(r-m)}\left(\frac{\mu-1}{2}\right)^{r-m},$$

откуда вытекает, что в случае целых положительных

$$P_n^m(\mu)=\frac{1}{2^m}\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)}\frac{1}{\Pi(m)}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}F\left(m-n,n+m+1;\ m+1;\frac{1-\mu}{2}\right). \tag{12}$$

Если n целое положительное число $>m$, то F представляет собой многочлен степени $n-m$.

Можно заметить следующее:

1. Если n целое положительное, а m нет, то ряд в формуле (11) обрывается, и $P_n^m(\mu)$ представляет собой алгебраическую функцию.

2. Если m целое положительное, а n или не целое, или же целое $\geqslant m$, то $P_n^m(\mu)$ определяется формулой (12); в последнем случае эта функция алгебраическая.

3. Если n и m целые положительные и $n<m$, то из формулы (12 видно, что $P_n^m(\mu)=0$. Чтобы получить решение уравнения (2), мы должны в этом случае взять функцию $\Pi(n-m)P_n^m(\mu)$, принимающую конечные значения.

120. Существенно заметить, что $P_n^m(\mu)$ при фиксированных m и μ представляет собой аналитическую функцию от n в окрестности всякой точки, в которой эта функция конечна. Это проще всего получается из общего определения (10), однако небезинтересно вывести этот факт и из указанного выше определения $P_n^m(\mu)$ с помощью ряда, сходящегося при $|\mu-1|<2$.

Мы имеем

$$F\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1-\mu}{2}\right)=u_0(n)+u_1(n)+\ldots+u_r(n)+\ldots,$$

где

$$u_r(n)=\frac{(-n)(-n+1)\ldots(-n+r-1)(n+1)(n+2)\ldots(n+r)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots r(1-m)(2-m)\ldots(r-m)}\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^r.$$

Если $|n|\leqslant N$, где N — фиксированное положительное число, то

$$|u_r(n)|<\frac{N(N+1)\ldots(N+r-1)(N+1)\ldots(N+r)}{r!\,|1-m|\,|2-m|\ldots|r-m|}\left|\frac{1-\mu}{2}\right|^r;$$

поэтому члены ряда

$$|u_0(n)|+|u_1(n)|+\ldots+|u_r(n)|+\ldots$$

не превосходят соответствующих членов некоторого сходящегося ряда с постоянными положительными членами. Следовательно, ряд

$$u_0(n)+u_1(n)+\ldots+u_r(n)+\ldots$$

сходится равномерно для всех n, таких, что $|n| \leqslant N$, и его сумма представляет собой непрерывную функцию от n. При этом предполагается, что m не является целым положительным. Общий член ряда

$$u'_0(n) + u'_1(n) + \ldots + u'_r(n) + \ldots$$

имеет вид

$$(-1)^r u_r(n) \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{n-r+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+r} \right\},$$

его абсолютная величина не превосходит

$$\frac{2N(N+1)\ldots(N+r-1)(N+1)\ldots(N+r)}{(r-1)!\,|1-m|\,|2-m|\ldots|r-m|} \left|\frac{1-\mu}{2}\right|^r,$$

т. е. r-го члена абсолютно сходящегося числового ряда.

Отсюда следует, что ряд $u'_0(n) + u'_1(n) + \ldots + u'_r(n) + \ldots$ равномерно сходится при $|n| \leqslant N$ и, следовательно, функция

$$F\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1-m}{2}\right)$$

имеет при $|n| < N$ непрерывную производную по n.

Таким образом, при всяком фиксированном значении μ, удовлетворяющем условию $|1-\mu| < 2$, функция $P_n^m(\mu)$, рассматриваемая как функция от n, является аналитической. Если m целое положительное, то это же самое утверждение может быть доказано с помощью рассмотрения функции

$$F\left(m-n,\ n+m+1;\ m+1;\ \frac{1-\mu}{2}\right).$$

121. Если мы воспользуемся для преобразования выражения (11) известным соотношением

$$F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta;\ \gamma;\ x),$$

то получим

$$P_n^m(\mu) = \frac{2^m}{\Pi(-m)} (\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m} F\left(1-m+n,\ -m-n;\ 1-m;\ \frac{1-\mu}{2}\right)$$

и, следовательно,

$$P_n^{-m}(\mu) = \frac{1}{2^m \Pi(m)} (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} F\left(1+m+n,\ m-n;\ 1+m;\ \frac{1-\mu}{2}\right). \quad (13)$$

Если $m=0$, а n действительное, но не целое, то в силу известного соотношения

$$\lim_{x\to 1} \frac{F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ x)}{\ln\{1/(1-x)\}} = \frac{\Pi(\alpha+\beta-1)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)},$$

где $\gamma = \alpha+\beta$, функция $P_n(\mu)$ при $\mu \to -1$ асимптотически представляется выражением

$$\frac{\sin n\pi}{\pi} \ln\frac{\mu+1}{2}.$$

Если $m>0$, то, так как при $\alpha+\beta>\gamma$

$$F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ x) \sim \frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\alpha+\beta-\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)} \frac{1}{(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}},$$

[см. п. 115, формула (б)], мы видим, что при $\mu \sim -1$

$$P_n^m(\mu) \sim \frac{1}{\Pi(-m)} \left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m} \left(-\frac{\sin n\pi}{\sin m\pi}\right) \left(\frac{2}{\mu+1}\right)^m,$$

где n и m действительны и $m>0$.

122. Если мы обозначим через P и Q интегралы, взятые по контурам $C\alpha\beta C$ и $C\gamma\delta C$ (см. черт. 3а) соответственно, то полный интеграл в формуле (10) будет равен

$$P+Q-Pe^{2n\pi i}-Qe^{2(n+m+1)\pi i};$$

если m целое положительное, то это выражение принимает вид

$$(P+Q)(1-e^{2n\pi i});$$

$P+Q$ представляет собой интеграл, взятый по некоторому простому контуру, обходящему в положительном направлении и точку μ и точку 1 вместе.

Таким образом, при целом m формула (10) принимает вид

$$P_n^m(\mu)=\frac{1}{2\pi i}\frac{\Pi(n+m)(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}}{\Pi(n)\,2^n}\int\limits^{(\mu+,\,1+)}(t^2-1)^n(t-\mu)^{-n-m-1}\,dt; \tag{14}$$

начальные значения аргументов в точке C определяются так же, как и выше.

При $m=0$ мы имеем

$$P_n(\mu)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits^{(\mu+,\,1+)}\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^n(t-\mu)^{-n-1}\,dt, \tag{15}$$

т. е. получаем для $P_n(\mu)$ выражение, данное Шлефли (цит. соч.). Если n целое положительное, то этот интеграл достаточно брать по контуру, охватывающему только точку μ.

123. Единственным случаем, в котором формула (10) непригодна, является тот, когда $n+m$ целое отрицательное число, $\Pi(n+m)$ обращается в бесконечность, а интеграл обращается в нуль. Тогда произведение может быть вычислено по правилу раскрытия неопределенностей вида $0\times\infty$; мы имеем

$$\Pi(n+m)=-\frac{\operatorname{csc}(m+n)\pi}{\Pi(-m-n-1)},$$

и предел выражения

$$\frac{1}{\sin(m+n)\pi}\int\limits^{(\mu+,\,1+,\,\mu-,\,1-)}(t^2-1)^n(t-\mu)^{-n-m-1}\,dt$$

равен

$$-\frac{1}{\pi\cos(m+n)\pi}\int\limits^{(\mu+,\,1+,\,\mu-,\,1-)}(t^2-1)^n(t-\mu)^{-n-m-1}\log(t-\mu)\,dt.$$

Таким образом, мы получаем, что при целом отрицательном $m+n$

$$P_n^m(\mu)=\frac{e^{-n\pi i}}{4\pi\sin n\pi}\frac{1}{2^n\pi\cos(m+n)\pi}\frac{1}{\Pi(n)\,\Pi(-m-n-1)}\times$$
$$\times\int\limits^{(\mu+,\,1+,\,\mu-,\,1-)}(t^2-1)^n(t-\mu)^{-n-m-1}\ln(t-\mu)\,dt.$$

124. Если мы в формуле (11) заменим n на $-n-1$, то гипергеометрический ряд при этом не изменится, и, следовательно, внутри круга сходимости $P_n^m(\mu)$ совпадает с $P_{-n-1}^m(\mu)$. Отсюда вытекает, что равенство

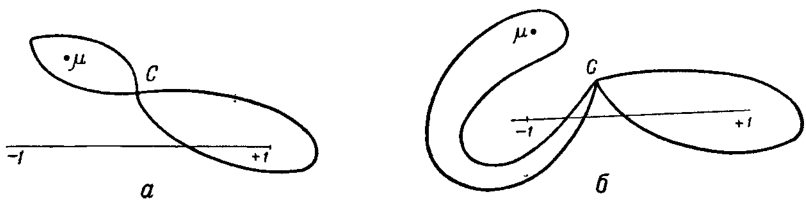
$$P_n^m(\mu)=P_{-n-1}^m(\mu) \tag{16}$$

верно и во всей плоскости с разрезом. Следовательно, заменив в (10) n на $-n-1$, мы получим новое выражение для $P_n^m(\mu)$. Таким образом,

$$P_n^m(\mu)=P_{-n-1}^m(\mu)=-\frac{e^{n\pi i}}{4\pi\sin n\pi}2^{n+1}\frac{\Pi(m-n-1)}{\Pi(-n-1)}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\times$$
$$\times\int\limits^{(\mu+,\,1+,\,\mu-,\,1-)}(t^2-1)^{-n-1}(t-\mu)^{n-m}dt=$$
$$=-\frac{e^{n\pi i}}{4\pi\sin(n-m)\pi}2^{n+1}\frac{\Pi(n)}{\Pi(n-m)}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\times$$
$$\times\int\limits^{(\mu+,\,1+,\,\mu-,\,1-)}(t^2-1)^{-n-1}(t-\mu)^{n-m}dt. \quad (17)$$

Формула (17) может быть принята, наравне с (11), за определение функции $P_n^m(\mu)$.

При определении функции $P_n^m(\mu)$ с помощью интеграла, взятого вдоль некоторого контура, замкнутого на соответствующей римановой поверхности,



Черт. 5.

необходимо указать расположение этого контура относительно точки -1. На фигурах a и $б$ черт. 5 изображены два различных контура, обходящих в положительном направлении одну и ту же точку μ, но значения интегралов, взятых вдоль этих контуров, вообще говоря, различны, так как один из них нельзя непрерывно деформировать в другой, не проходя при этом через точку -1, являющуюся особой точкой подинтегрального выражения.

Мы будем поэтому предполагать, что путь, с помощью которого определяется $P_n^m(\mu)$ в формуле (11), не пересекает действительную ось между точками -1 и $-\infty$ или, во всяком случае, что его можно деформировать, не проходя при этом через точку -1, в путь, не пересекающий отрезок $[-\infty, -1]$ действительной оси.

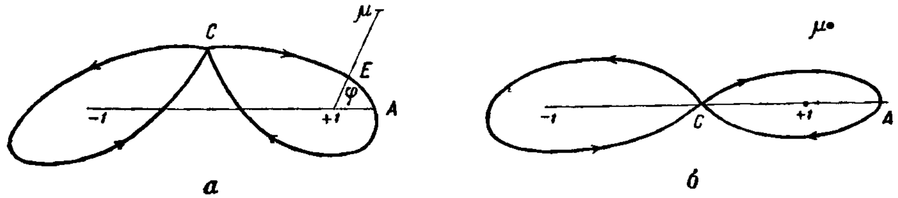
§ 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ $Q_n^m(\mu)$

125. Возьмем теперь интеграл от $(t^2-1)^n(t-\mu)^{-n-m-1}$ вдоль замкнутого пути, в котором за обходом точки -1 в положительном направлении следует отрицательный обход точки $+1$.

Рассмотрим выражение

$$f_n^m(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int\limits_C^{(-1+,\,+1-)}\frac{1}{2\pi}(t^2-1)^n(t-\mu)^{-n-m-1}dt,$$

где интеграл берется по одному из контуров, изображенных на черт. 6. При этом $\arg(t-\mu)$ подчиняется условиям, указанным выше, так что в точке E он равен $-(\pi-\varphi)$, где φ — угол (заключенный между $+\pi$ и $-\pi$), образуемый отрезком $E\mu$ с положительным направлением действительной оси; $\arg(t-1)$ и $\arg(t+1)$ полагаются равными нулю при $t=A$, где A точка пересечения пути интегрирования с действительной осью, в которой $t-1$ и $t+1$ положительны. Следовательно, на черт. 6*a* начальные значения $\arg(t-1)$ и $\arg(t+1)$ в точке C равны π и -2π соответственно, а $\arg(t-\mu)=-(\pi-\varphi)$. Пусть $t-\mu=(\mu-t)e^{-i\pi}$, тогда в точке E,



Черт. 6.

в которой отрезок $(+1, \mu)$ пересекает путь интегрирования, $\arg(\mu-t)=\varphi$, $(-\pi<\varphi<\pi)$. Значения $\arg\left(1-\frac{t}{\mu}\right)$ для всех t, лежащих на пути интегрирования, заключены между $-\pi$ и $+\pi$. Таким образом, рассматриваемое выражение можно записать в виде

$$f_n^m(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int\limits^{(-1+,\,1-)}\frac{1}{2^n}e^{(n+m+1)\pi}(t^2-1)^n(\mu-t)^{-n-m-1}\,dt.$$

Предположим теперь, что $|\mu|>1$, тогда путь интегрирования можно выбрать так, чтобы во всех его точках было $|t|<|\mu|$; разлагая выражение, стоящее под знаком интеграла, в ряд, получим

$$f_n^m(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\cdot\frac{1}{2^n}e^{n+m+1)i\pi}\sum_r\int\limits^{(-1+,\,1-)}\frac{\Pi(n+m+r)}{\Pi(n+m)\,\Pi(r)}\times$$
$$\times\frac{1}{\mu^{n+m+r+1}}(t^2-1)^n t^r\,dt.$$

Почленное интегрирование здесь законно, так как полученный степенной ряд сходится равномерно на всем контуре, по которому берется интеграл.

Для вычисления интеграла $\int\limits^{(-1+,\,1-)}(t^2-1)^n t^r\,dt$ мы можем выбрать путь интегрирования так, чтобы две его петли были симметричны, а точка C лежала посредине между точками -1 и $+1$. Тогда видно, что при нечетном r этот интеграл равен нулю, а при четном $r=2s$ он равен

$$-2\int\limits_0^{(+1+)}(t^2-1)^n t^{2s}\,dt.$$

Делая подстановку $t'=t^2$, мы видим, что $\arg(t'-1)$ вдоль пути интегрирования возрастает от $-\pi$ до π; таким образом, мы получаем интеграл

$$-\int\limits_0^{(+1+)}(t'^s-1)^n t'^{s-\frac{1}{2}}\,dt',$$

который, как легко видеть, равен

$$2i\sin n\pi\cdot\frac{\Pi(n)\,\Pi\left(s-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(n+s+\frac{1}{2}\right)}.$$

Итак, рассматриваемое выражение можно записать в виде

$$f_n^m \cdot \frac{1}{2^n} 2i \sin n\pi\, e^{(n+m+1)\, i\pi} (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Pi(n+m+2s)}{\Pi(n+m)\,\Pi(2s)} \times$$

$$\times \frac{\Pi(n)\,\Pi\left(s-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(n+s+\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{\mu^{n+m+2s+1}},$$

т. е. в виде

$$f_m^m \cdot \frac{1}{2^n} 2i \sin n\pi\, e^{(n+m+1)\, i\pi} (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Pi(n+m+2s)}{\Pi(n+m)\,\Pi(2s)} \times$$

$$\times F\left(\frac{n+m}{2}+1,\ \frac{n+m+1}{2};\ n+\frac{3}{2},\ \frac{1}{\mu^2}\right).$$

Если n целое положительное, то в соответствии с обычным определением имеем

$$Q_n(\mu) = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi(n)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{\mu^{n+1}} F\left(\frac{n}{2}+1,\ \frac{n+1}{2};\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{\mu^2}\right);$$

следовательно, если мы в данном случае положим

$$f_n^0 = \frac{e^{-(n+1)i\pi}}{4i \sin n\pi},$$

то получим

$$Q_n(\mu) = \frac{e^{-(n+1)i\pi}}{4i \sin n\pi} \int^{(-1+,\ 1-)} \frac{1}{2^n} (t^2-1)^n (t-\mu)^{-n-1}\, dt.$$

Определив $Q_n^m(\mu)$ при целом положительном m формулой

$$Q_n^m(\mu) = (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} \frac{d^m}{d\mu^m} Q_n(\mu)$$

(см. п. 54), мы получаем

$$Q_n^m(\mu) = \frac{e^{-(n+1)\, i\pi}}{4i \sin n\pi} (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} \frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n)} \int^{(-1+,\ 1-)} \frac{1}{2^n} (t^2-1)^n (t-\mu)^{-n-1}\, dt;$$

следовательно, при целых положительных m и n мы должны положить

$$f_n^m = \frac{e^{-(n+1)\, i\pi}}{4i \sin n\pi} \frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n)}.$$

Предположим теперь, что эта же формула определяет значения f_n^m и при любых n и m; тогда получим следующую формулу:

$$Q_n^m(\mu) = \frac{e^{-(n+1)\, i\pi}}{4i \sin n\pi} \frac{\Pi(n+m)}{\pi(\Pi)} (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} \int^{(-1+,\ 1-)} \frac{1}{2^n} (t^2-1)^n (t-\mu)^{-n-m-1}\, dt, \quad (18)$$

которую мы примем за определение функции $Q_n^m(\mu)$ при любых n и m.

Если $|\mu|>1$, то

$$Q_n^m(\mu)=\frac{e^{m\pi i}}{2^{n+1}}\frac{\Pi(n+m)\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{1}{\mu^{n+m+1}}\times$$
$$\times F\left(\frac{n+m+2}{2},\ \frac{n+m+1}{2};\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{\mu^2}\right). \quad (19)$$

Функция, однозначная во всей плоскости с разрезом от $+1$ до $-\infty$ и получающаяся аналитическим продолжением функции (19), представляется формулой (18).

Черт. 7.

Если n таково, что $\operatorname{Re}(n+1)>0$, то определение (18) можно упростить, так как интеграл можно свести к интегралу от -1 до 1 вдоль действительной оси. Действительно, сперва можно выбрать путь интегрирования так, как он изображен на черт. 7; далее, так как интегралы вдоль петель, обходящих точки -1 и $+1$, стремятся к нулю, когда эти петли стягиваются к соответствующим точкам, то мы получаем

$$\int_C^{(-1+,\,1-)}(t^2-1)^n(t-\mu)^{-n-m-1}\,dt=2i\sin n\pi\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n(t-\mu)^{-n-m-1}\,dt.$$

Следовательно, если $\operatorname{Re}(n+1)>0$, то за определение $Q_n^m(\mu)$ можно взять вместо формулы (18) следующее выражение:

$$Q_n^m(\mu)=\frac{e^{-(n+1)\pi i}}{2^{n+1}}\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n)}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n(t-\mu)^{-n-m-1}\,dt=$$
$$=\frac{e^{m\pi i}}{2^{n+1}}\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n)}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n(\mu-t)^{-n-m-1}\,dt. \quad (20)$$

Интеграл здесь можно брать вдоль действительной оси, $(1-t^2)^n$ понимается как $e^{n\ln(1-t^2)}$, где значение $\ln(1-t^2)$ берется действительным, а $\arg(\mu-t)$ заключен между $-\pi$ и π и равен углу, образованному отрезком от μ до t с положительным направлением действительной оси.

Заметим, что если n целое положительное, то выражение (18) становится неопределенным; однако в этом случае можно воспользоваться формулой (20).

Если n целое отрицательное, то значение $Q_n^m(\mu)$, даваемое формулой (18), вообще говоря, конечно, так как

$$\Pi(n)\sin n\pi=-\frac{\pi}{\Pi(-n-1)}.$$

Однако если $n+m$ также является целым отрицательным или если $m=0$, то $Q_n^m(\mu)$ обращается в бесконечность, так что, если мы хотим получить конечное решение рассматриваемого дифференциального уравнения, множитель $\Pi(n+m)$ следует отбросить.

Барнс в упомянутой статье (см. п. 114) заменяет в указанном выше общем определении функцию $Q_n^m(\mu)$ функцией $Q_n^m(\mu)\dfrac{e^{m\pi i}\sin n\pi}{\sin(n+m)\pi}$, так что его определение при $|\mu|>1$ вместо формулы (19) дает

$$Q_n^m(\mu)=\frac{\sin(n+m)\pi}{2^{n+1}\sin n\pi}\,\frac{\Pi(n+m)\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\,\frac{(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}}{\mu^{n+m+1}}\times$$

$$\times F\left(\frac{n+m+2}{2},\ \frac{n+m+1}{2};\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{\mu^2}\right).$$

Если m — целое положительное, то эти два определения совпадают.

§ 5. СВЯЗЬ МЕЖДУ $Q_n^m(\mu)$ И $Q_n^{-m}(\mu)$

126. Если мы применим к формуле (19) известное преобразование

$$F(\alpha,\beta;\gamma;x)=(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;\gamma;x),$$

то получим при $|\mu|>1$

$$Q_n^m(\mu)=\frac{e^{m\pi i}}{2^{m+1}}\,\frac{\Pi(n+m)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\,(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m}\,\frac{1}{\mu^{n-m+1}}\times$$

$$\times F\left(\frac{n-m+2}{2},\ \frac{n-m+1}{2};\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{\mu^2}\right).$$

Выражение для $Q_n^{-m}(\mu)$ получается заменой m на $-m$ в формуле (19). Таким образом, получаем следующее соотношение:

$$\frac{e^{-m\pi i}\,Q_n^m(\mu)}{\Pi(n+m)}=\frac{e^{m\pi i}\,Q_n^{-m}(\mu)}{\Pi(n-m)}\,. \qquad (21)$$

Если m целое положительное, то формула (21) принимает вид

$$\frac{Q_n^m(\mu)}{\Pi(n+m)}=\frac{Q_n^{-m}(\mu)}{\Pi(n-m)},$$

что согласуется с формулой (42) гл. IV.

Соотношение (21) можно получить также с помощью подстановки $(t-\mu)(t'-\mu)=\mu^2-1$, которая означает инверсию относительно точки μ. Выполнив эту подстановку, мы получим

$$(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int^{(-1+,\,+1-)}(t^2-1)^n(t-\mu)^{-n-m-1}\,dt=$$

$$=-(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m}\int^{(1+,\,-1-)}(t'^2-1)^n(t'-\mu)^{-n+m-1}\,dt'.$$

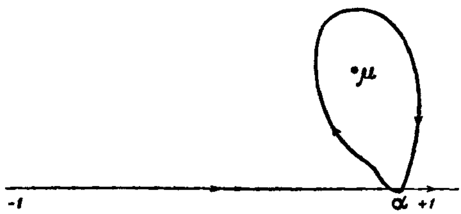
Значению $\arg(t^2-1)=-\pi$ соответствует $\arg(t'^2-1)=\pi$. Аналогично, $\arg(t-\mu)=-\pi$ при действительном $\mu>1$. Следовательно, для того чтобы в интеграле, стоящем в правой части последнего равенства, аргументы менялись в тех же пределах, что и в левой части, следует ввести множитель $e^{2n\pi i-2(n-m+1)\pi i}=e^{2m\pi i}$. Таким образом, мы получаем равенство

$$(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int^{(-1+,\,1-)}(t^2-1)^n(t-\mu)^{-n-m-1}\,dt=$$

$$=(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m}e^{2m\pi i}\int^{(-1+,\,1-)}(t'^2-1)^n(t'-\mu)^{-n+m+1}\,dt'.$$

Это соотношение справедливо во всей разрезанной плоскости, что вытекает из аналитичности функций $Q_n^m(\mu)$ и $Q_n^{-m}(\mu)$. Соотношение (21) не меняется при замене m на $-m$.

127. В формуле (20), справедливой при $\operatorname{Re}(n+1)>0$, за путь интегрирования можно принять любую кривую, соединяющую точки -1 и 1, которую можно деформировать в отрезок $[-1, 1]$, не переходя при этом через точку μ. Таким образом, если $\operatorname{Im}(\mu)>0$ и $-1<\operatorname{Re}(\mu)<1$, то путь интегрирования должен проходить ниже точки μ, а если $\operatorname{Im}(\mu)<0$ и $-1<\operatorname{Re}(\mu)<1$, то этот путь должен проходить выше точки μ. Наконец, если $\operatorname{Im}(\mu)=0$, $\mu>1$, то можно взять любой путь, не пересекающий действительную ось за точкой μ.



Черт. 8.

С точки зрения приложений желательно найти значение интеграла и вдоль такого пути, который нельзя деформировать в прямолинейный отрезок $[-1, 1]$, не проходя через точку μ. Достаточно сделать это для случая, когда m целое и $\operatorname{Im}(\mu)>0$.

Мы можем взять этот путь состоящим из отрезка $(-1, a)$ и криволинейного пути (черт. 8), обходящего в отрицательном направлении точку μ, и считать, что он оканчивается в точке a, причем a можно взять сколь угодно близко к точке $t=1$. Обозначим через I_1 и I_2 значения интеграла

$$\int (1-t^2)^n(\mu-t)^{-n-m-1}\,dt,$$

взятого вдоль прямолинейного отрезка $(-1, a)$ и вдоль петли вокруг μ соответственно. Если a приближается к точке 1, то интеграл, взятый вдоль контура, выходящего из a и охватывающего точку 1, стремится к нулю. Таким образом, мы получаем

$$I_2-I_1=\int_a^{(\mu-)} (1-t^2)^n(\mu-t)^{-n-m-1}\,dt,$$

где начальные значения $\arg(1-t)$ и $\arg(1+t)$ в точке a равны нулю, и $\arg(\mu-t)=\varphi$ (φ — угол между отрезком, соединяющим точки μ и t, и положительным направлением оси t). Из формулы (14) получаем

$$P_n^m(\mu)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n)}\frac{(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}}{2^n}\int_a^{(\mu+,1+)} (t^2+1)^n(t-\mu)^{-n-m-1}\,dt,$$

где начальные значения $\arg(t-1)$ и $\arg(t+1)$ в точке a суть π и 0.

Так как $t-\mu=(\mu-t)e^{-i\pi}$, то эта формула может быть записана в следующем виде:

$$P_n^m(\mu)=\frac{1}{2\pi i}\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n)}\frac{(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}}{2^n}e^{n\pi i}\cdot e^{(n+m+1)\pi i}\int_a^{(\mu+)} (1-t^2)^n(\mu-t)^{-n-m-1}\,dt,$$

где петля вокруг точки 1 опущена и $\arg(1-t^2)$ в точке a полагается равным нулю.

Мы имеем

$$\int_{\alpha}^{(\mu-)} (1-t^2)^n (\mu-t)^{-n-m-1}\, dt = -\int_{\alpha}^{(\mu+)} (1-t^2)^n (\mu-t)^{-n-m-1}\, dt,$$

где начальное значение $\arg(\mu-t)$ в точке α слева превосходит начальное значение $\arg(\mu-t)$ справа на 2π. Отсюда следует, что если это начальное значение в точке α равно $\pi-\varphi$, то

$$\int_{\alpha}^{(\mu-)} (1-t^2)^n (\mu-t)^{-n-m-1}\, dt = -e^{-(n+m+1)2\pi i}\int_{\alpha}^{(\mu+)} (1-t^2)^n (\mu-t)^{-n-m-1}\, dt,$$

где начальное значение $\arg(\mu-t)$ справа равно $\pi-\varphi$, так что аргументы обеих частей в точке α совпадают.

Таким образом,

$$P_n^m(\mu) = \frac{1}{2\pi i}\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n)}\frac{(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}}{2^n}e^{(2n+m+1)\pi i}\int_{\alpha}^{(\mu+)} (1-t^2)^n (\mu-t)^{-n-m-1}\, dt =$$

$$= \frac{e^{-m\pi i}}{2\pi i}\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n)}\frac{(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}}{2^n}\int_{\alpha}^{(\mu-)} (1-t^2)^n (\mu-t)^{-n-m-1}\, dt,$$

где $\arg(1-t) = \arg(1+t) = 0$ в точке α.

Теперь видно, что если путь интегрирования идет по прямой от точки -1 до α, а затем обходит в отрицательном направлении точку μ, возвращаясь снова в α, и если α стремится к 1, то значение рассматриваемого интеграла будет равно

$$Q_n^m(\mu) + i\pi e^{2m\pi i} P_n^m(\mu).$$

Это, следовательно, и есть значение выражения (20), в котором интеграл берется вдоль пути, идущего от -1 до $+1$ выше точки μ, когда $\mathrm{Re}(n+1) > 0$.

Случай, когда $\mathrm{Im}(\mu) < 0$, рассматривается аналогично.

§ 6. ДРУГИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ $Q_n^m(\mu)$

128. Вычислим выражение

$$(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int^{(\mu+,\,-1+,\,\mu-,\,-1-)} \left(\frac{t^2-1}{2}\right)^n (t-\mu)^{-n-m-1}\, dt,$$

представляющее собой функцию, удовлетворяющую уравнению (2). Чтобы определить аргументы членов, входящих в подинтегральное выражение, мы должны отдельно рассмотреть случаи $\mathrm{Im}(\mu) > 0$ и $\mathrm{Im}(\mu) < 0$.

Предположим, что точка μ движется от некоторой точки, лежащей на действительной оси справа от $+1$, до ее действительного положения, пересекая путь интегрирования, как это изображено на черт. 9. Заметим, что если точка μ движется из некоторого положения в верхней полуплоскости до некоторой точки в нижней полуплоскости, не пересекая разреза, то путь интегрирования не может быть соответственно деформирован из первого положения во второе так, чтобы он при этом не прошел через особую точку $+1$; именно поэтому нужно различать оба эти случая.

На черт. 9а в точке A полагаем $\arg(t-1)=\pi$, а на черт. 9б полагаем в этой же точке $\arg(t-1)=-\pi$. Начальное значение $\arg(t+1)$ в точке A в обоих случаях равно нулю, $\arg(t-\mu)$ определяется так же, как и выше.

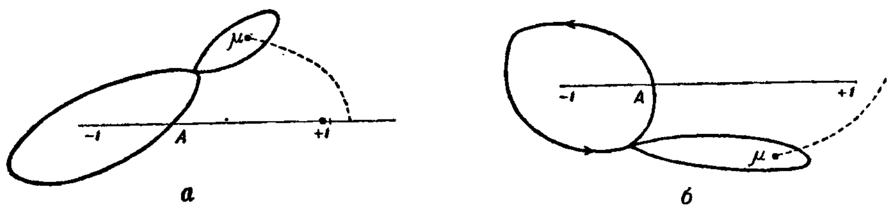
Пусть $t+1=(\mu+1)u$, тогда рассматриваемое выражение принимает вид

$$\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{2}m}\int^{(1+,\,0+,\,1-,\,0-)} u^n\left(\frac{\mu+1}{2}u-1\right)^n(u-1)^{-n-m-1}\,du.$$

Положим теперь

$$\frac{\mu+1}{2}u-1=e^{\pm\pi i}\left(1-\frac{\mu+1}{2}u\right),$$

в показателе берется знак, совпадающий со знаком $\mathrm{Im}(\mu)$. В обоих случаях $\arg\left(1-\frac{\mu+1}{2}u\right)=0$ в точке C и, следовательно, $\left(1-\frac{\mu+1}{2}u\right)^n$ имеет то



Черт. 9.

значение, которое получается из соответствующего разложения в степенной ряд. Рассматриваемое выражение можно переписать в виде

$$\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{2}m} e^{\pm n\pi i}\int^{(1+,0+,1-,0-)} u^n\left(1-\frac{\mu+1}{2}u\right)^n(u-1)^{-n-m-1}\,du,$$

где в $e^{\pm n\pi i}$ берется знак $+$ или $-$, в зависимости от того, лежит μ в верхней или в нижней полуплоскости. Если $|\mu+1|<2$, то это выражение можно вычислить так же, как и в п. 125; результат получается заменой $-\mu$ на μ. Отсюда немедленно получаем, что при $|1+\mu|<2$

$$(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int^{(\mu+,-1+,\mu-,-1-)}\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^n(t-\mu)^{-n-m-1}\,dt=$$

$$=e^{2n\pi i}4\sin n\pi\sin m\pi\,\frac{\Pi(n)\,\Pi(m-1)}{\Pi(n+m)}\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{2}m}\times$$

$$\times F\left(-n,\,n+1;\,1-m;\,\frac{1+\mu}{2}\right),\qquad(22)$$

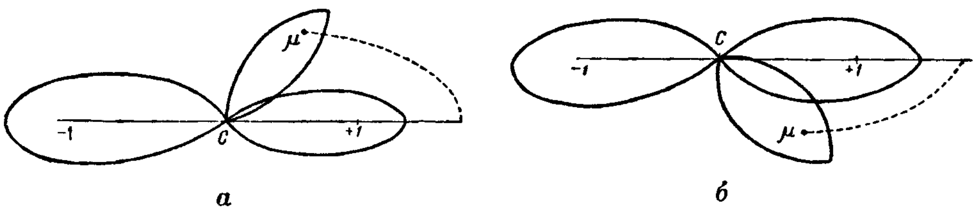
где μ лежит в верхней полуплоскости. Если μ лежит в нижней полуплоскости, то показательный множитель должен быть отброшен.

Пусть L, M, N — значения интеграла $\int(t^2-1)^n(t-\mu)^{-n-m-1}\,dt$, взятого вдоль контуров, выходящих из точки C и охватывающих в положительном направлении точки -1, 1 и μ соответственно. Аргументы в точке C определяются следующим образом: $\arg(t-1)=\pi$ в случае a (черт. 10) и $-\pi$ в случае $б$; $\arg(t+1)=0$, $\arg(t-\mu)=-(\pi-\varphi)$, где φ — угол (положительный или отрицательный) между отрезком, соединяющим точки μ

и C, и положительным направлением действительной оси. Непосредственно получаем

$$\int\limits_C^{(\mu+,\,1+,\,\mu-,\,1-)} (t^2-1)^n (t-\mu)^{-n-m-1} dt = N + Me^{-2\pi(m+n+1)i} - Ne^{2n\pi i} - M,$$

$$\int\limits_C^{(\mu+,\,1+,\,\mu-,\,-1-)} (t^2-1)^n (t-\mu)^{-n-m-1} dt = N + Le^{-2\pi(m+n+1)i} - Ne^{2n\pi i} - L,$$



Черт. 10.

причем аргументы подинтегральных выражений подчиняются указанным выше условиям. Интеграл

$$\int\limits_C^{(-1+,\,1-)} (t^2-1)^n (t-\mu)^{-n-m-1} dt,$$

где, как и в п. 125, начальные значения $\arg(t-1)$ и $\arg(t+1)$ в точке C суть π и -2π, равен $Le^{-2n\pi i} - Me^{-2n\pi i}$ или $L-M$, в зависимости от того, лежит точка μ в верхней или нижней полуплоскости.

Отсюда следует, что

$$\int\limits_C^{(-1+,\,1-)} (t^2-1)^n (t-\mu)^{-n-m-1} dt =$$

$$= \frac{e^{-2n\pi i}}{1-e^{-2\pi(m+n)i}} \left[\int\limits_C^{(\mu+,1+,\mu-,1-)} - \int\limits_C^{(\mu+,-1+,\mu-,-1-)} \right] (t^2-1)^n (t-\mu)^{-n-m-1} dt, \quad (23)$$

если μ лежит в верхней полуплоскости. Если μ лежит в нижней полуплоскости, то в качестве множителя перед интегралом следует взять

$$\frac{1}{1-e^{-2\pi(m+n)i}}.$$

129. Соотношение (22) можно использовать для того, чтобы представить $Q_n^m(\mu)$ при $|1+\mu|<2$ и $|1-\mu|<2$ в виде ряда. Используя формулы (11), (18), (22), мы сразу получаем

$$Q_n^m(\mu) = \frac{\pi e^{m\pi i}}{2\sin(m+n)\pi} \cdot \frac{1}{\Pi(-m)} \times$$

$$\times \left\{ e^{\mp n\pi i} \left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-n, n+1; 1-m; \frac{1-\mu}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-n, n+1; 1-m; \frac{1+\mu}{2}\right) \right\}; \quad (24)$$

в выражении $e^{\mp n\pi i}$ при $\operatorname{Im}(\mu)>0$ берется верхний знак, а при $\operatorname{Im}(\mu)<0$ — нижний. Эта формула верна в той области, где $|1+\mu|<2$ и $|1-\mu|<2$. Множитель $\dfrac{1}{\Pi(-m)}$ можно заменить выражением $\dfrac{\sin m\pi}{\pi}\Pi(m-1)$.

При $m=0$ имеем

$$Q_n(\mu)=\frac{\pi}{2\sin n\pi}\left\{e^{\mp n\pi i}F\left(-n,\,n+1;\,1;\,\frac{1-\mu}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-F\left(-n;\,n+1;\,1,\,\frac{1+\mu}{2}\right)\right\}. \quad (25)$$

Воспользовавшись соотношением (21) между $Q_n^m(\mu)$ и $Q_n^{-m}(\mu)$, мы можем записать формулу (24) в следующем виде:

$$Q_n^m(\mu)=\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)}\,\frac{\pi e^{m\pi i}}{2\sin(n-m)\pi}\cdot\frac{1}{\Pi(m)}\times$$
$$\times\left\{e^{\mp n\pi i}\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{2}m}F\left(-n,\,n+1;\,1+m;\,\frac{1-\mu}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m}F\left(-n,\,n+1;\,1+m;\,\frac{1+\mu}{2}\right)\right\}. \quad (26)$$

Если $n+m$ целое положительное, то, как показывает формула (19), $Q_n^m(\mu)$ принимает, вообще говоря, конечные значения; таким образом, из (24) вытекает, что

$$e^{\mp n\pi i}\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m}F\left(-n,\,n+1;\,1-m;\,\frac{1-\mu}{2}\right)=$$
$$=\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{2}m}F\left(-n,\,n+1;\,1-m;\,\frac{1+\mu}{2}\right);$$

этот результат был установлен Гейне[1]) для того частного случая, когда n и m целые. Мы видим, что при $n+m$ целом формула (24) становится неопределенной, и мы должны в этом случае воспользоваться формулой (26).

Если $n-m$ целое положительное, то следует пользоваться формулой (24), так как формула (30) в этом случае становится неопределенной. Если $n+m$ — целое отрицательное, то $Q_n^m(\mu)$ обращается в бесконечность, однако мы можем в качестве конечного решения уравнения (2) взять $Q_n^m(\mu)\sin(n+m)\pi$; согласно (26), эту функцию можно выразить через $Q_n^{-m}(\mu)$.

Если n и m оба целые, причем m положительно и больше n, то выражение (26) конечно, а если $m\leqslant n$, то обе формулы (24) и (26) становятся неопределенными; их следует преобразовать по обычным правилам раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$.

130. Если в формуле (18) для $Q_n^m(\mu)$ считать $|\mu|$ достаточно большим, то путь интегрирования можно выбрать так, чтобы во всех его точках было $|t-1|<|\mu-1|$. Если $t-\mu=(\mu-t)e^{-i\pi}$, то выражение для $Q_n^m(\mu)$

[1]) Heine, Kugelfunktionen, т. II, стр. 238, 364.

можно записать в виде

$$\frac{e^{m\pi i}}{4i\sin n\pi}\cdot\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n)}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\cdot\frac{1}{2^n}(\mu-1)^{-n-m-1}\times$$
$$\times\int\limits^{(-1+,\,1-)}(t^2-1)^n\left[1-\frac{t-1}{\mu-1}\right]^{-n-m-1}dt.$$

Легко проверить, что $\arg\frac{\mu-t}{\mu-1}$ заключен между $-\pi$ и π; следовательно, последний интеграл можно записать в виде

$$\int\limits^{(-1+,\,1-)}(t^2-1)^n\left[1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(n+m+1)\ldots(n+m+r)}{r!}\left(\frac{t-1}{\mu-1}\right)^r\right]dt.$$

Полагая $t+1=2t'$, получаем

$$\int\limits^{(0+,\,1-)}2^{2n+r+1}\,t'^n(t'-1)^{n+1}\,dt'=$$
$$=2^{2n+2r+1}\left\{e^{(n+r)\pi i}-e^{-(n+r)\pi i}\right\}\int\limits_0^1 t'^n(1-t')^{n+r}\,dt'=$$
$$=2^{2n+2r+2}\,i\sin(n+r)\pi\cdot\frac{\Pi(n)\,\Pi(n+r)}{\Pi(2n+2r+1)}.$$

Таким образом, при $|\mu-1|>2$ имеем

$$Q_n^m(\mu)=\frac{e^{m\pi i}}{4i\sin n\pi}\cdot\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n)}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\cdot\frac{1}{2^n}(\mu-1)^{-n-m-1}\times$$
$$\times 2^{2n+2}\,i\sin n\pi\cdot\frac{\Pi(n)\,\Pi(n)}{\Pi(2n+1)}\cdot F\left(n+1,\,n+m+1;\,2n+2;\,\frac{2}{1-\mu}\right),$$

т. е.

$$Q_n^m(\mu)=\frac{e^{m\pi i}}{2}\cdot\frac{\Pi(n)\,\Pi(n+m)}{\Pi(2n+1)}\left(\frac{2}{\mu-1}\right)^{n+1}\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m}\times$$
$$\times F\left(n+1,\,n+m+1;\,2n+2,\,\frac{2}{1-\mu}\right).\qquad(27)$$

Заменив m на $-m$ и воспользовавшись соотношением (21), получим

$$Q_n^m(\mu)=\frac{e^{m\pi i}}{2}\cdot\frac{\Pi(n)\,\Pi(n+m)}{\Pi(2n+1)}\left(\frac{2}{\mu-1}\right)^{n+1}\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{2}m}\times$$
$$\times F\left(n+1,\,n-m+1;\,2n+2,\,\frac{2}{1-\mu}\right),\qquad(28)$$

Формулы (27) и (28) соответствуют формулам, полученным Барнсом (цит. соч., стр. 107); нужно только учесть разницу в определениях функции $Q_n^m(\mu)$.

Если в (27) и (28) заменить μ на $-\mu$ и воспользоваться соотношением $Q_n^m(\mu)=-e^{\mp\pi n i}Q_n^m(-\mu)$, которое будет установлено ниже [п. 133, формула (36)], то, заметив, что

$$-\mu-1=e^{\mp i\pi}(\mu+1),$$

причем верхний знак условия брать при $\mathrm{Im}(\mu) > 0$, а нижний—при $\mathrm{Im}(\mu) < 0$, формулы (27) и (28) можно записать в следующем виде:

$$Q_n^m(\mu) = \frac{e^{m\pi i}}{2} \cdot \frac{\Pi(n)\,\Pi(n+m)}{\Pi(2n+1)} \left(\frac{2}{\mu+1}\right)^{n+1} \left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{2}m} \times$$
$$\times F\left(n+1,\, n+m+1;\, 2n+2;\, \frac{2}{1+\mu}\right), \quad (29)$$

$$Q_n^m(\mu) = \frac{e^{m\pi i}}{2} \cdot \frac{\Pi(n)\,\Pi(n+m)}{\Pi(2n+1)} \left(\frac{2}{\mu+1}\right)^{n+1} \left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m} \times$$
$$\times F\left(n+1;\, n-m+1;\, 2n+2;\, \frac{2}{1+\mu}\right). \quad (30)$$

§ 7. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ $Q_n^m(\mu)$, $Q_{-n-1}^m(\mu)$ И $P_n^m(\mu)$

131. В выражении (24) для $Q_n^m(\mu)$ напишем $-n-1$ вместо n; получим

$$Q_{-n-1}^m(\mu) = \frac{\pi e^{m\pi i}}{2\sin(m-n-1)\pi} \cdot \frac{1}{\Pi(-m)} \times$$
$$\times \left\{ e^{\pm(n+1)\pi i} \left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-n,\, n+1;\, 1-m;\, \frac{1-\mu}{2}\right) - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-n,\, n+1;\, 1-m;\, \frac{1+\mu}{2}\right) \right\}.$$

Исключая отсюда и из (24) второй гипергеометрический ряд, получаем, согласно (11),

$$Q_n^m(\mu)\sin(n+m)\pi - Q_{-n-1}^m(\mu)\sin(n-m)\pi =$$
$$= \frac{\pi e^{m\pi i}}{2\,\Pi(-m)}\left(e^{n\pi i} + e^{-n\pi i}\right) \left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-n,\, n+1;\, 1-m;\, \frac{1-\mu}{2}\right) =$$
$$= \pi\, e^{m\pi i} \cos n\pi \cdot P_n^m(\mu).$$

В случае n полуцелого

$$Q_n^m(\mu)\,\pi = Q_{-n-1}^m(\mu);$$

для остальных значений n получаем

$$P_n^m(\mu) = \frac{e^{-m\pi i}}{\pi\cos n\pi} \left\{ Q_n^m(\mu)\sin(n+m)\pi - Q_{-n-1}^m(\mu)\sin(n-m)\pi \right\}. \quad (31)$$

Это соотношение верно во всей полуплоскости μ с разрезом. В обозначениях Барнса формула (31) принимает вид

$$P_n^m(\mu) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{tg}\, n\pi \left\{ Q_n^m(\mu) - Q_{-n-1}^m(\mu) \right\}.$$

В случае $m = 0$ имеем

$$P_n(\mu) = \frac{\mathrm{tg}\, n\pi}{\pi} \left\{ Q_n(\mu) - Q_{-n-1}(\mu) \right\}. \quad (32)$$

Если n полуцелое, то $Q_n^m(\mu)$ и $Q_{-n-1}^m(\mu)$ не являются независимыми решениями рассматриваемого дифференциального уравнения. В этом случае $P_n^m(\mu)$ должно определяться с помощью предельного перехода.

Если $n+m$ целое положительное число, то соотношение (31) принимает вид

$$P_n^m(\mu) = \frac{2}{\pi} e^{-m\pi i} \sin m\pi \cdot Q_{-n-1}^m(\mu),$$

а если $n-m$ целое отрицательное, то

$$P_n^m(\mu)=\frac{2}{\pi}e^{-m\pi i}\sin m\pi\cdot Q_n^m(\mu),$$

т. е. в этом случае $P_n^m(\mu)$ и $Q_n^m(\mu)$ отличаются только постоянным множителем.

При целом n формула (32) теряет смысл, так как $Q_{-n-1}(\mu)$ обращается в бесконечность.

Если в (31) заменить m на $-m$, то, используя (21), получаем

$$P_n^{-m}(\mu)=\frac{e^{-m\pi i}}{\pi\cos n\pi}\left\{\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}Q_n^m(\mu)\sin(n-m)\pi-\right.$$
$$\left.-\frac{\Pi(-n-m-1)}{\Pi(-n+m-1)}Q_{-n-1}^m(\mu)\sin(n+m)\pi\right\}=$$
$$=\frac{e^{-m\pi i}}{\pi\cos n\pi}\cdot\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}\sin(n-m)\pi\,\{Q_n^m(\mu)-Q_{-n-1}^m(\mu)\}.$$

Отсюда, подставляя вместо функции $Q_{-n-1}^m(\mu)$ ее выражение из (31), получаем

$$P_n^{-m}(\mu)=\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}\left\{P_n^m(\mu)-\frac{2}{\pi}e^{-m\pi i}\sin m\pi\cdot Q_n^m(\mu)\right\}. \tag{33}$$

Вспоминая, что $P_n^m(\mu)=P_{-n-1}^m(\mu)$, мы видим, что из восьми решений:

$$P_n^m(\mu),\quad P_{-n-1}^m(\mu),\quad P_n^{-m}(\mu),\quad P_{-n-1}^{-m}(\mu),$$
$$Q_n^m(\mu),\quad Q_{-n-1}^m(\mu),\quad Q_n^{-m}(\mu),\quad Q_{-n-1}^{-m}(\mu).$$

уравнения (2) шесть можно выразить через остальные два.

Если m целое положительное число или нуль, то из (33) получаем

$$P_n^{-m}(\mu)=\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}P_n^m(\mu).$$

§ 8. ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ $Q_n^m(\mu)$ ПРИ ЦЕЛОМ ПОЛОЖИТЕЛЬНОМ m

132. Если мы подставим в формулу (33) вместо $P_n^m(\mu)$, $P_n^{-m}(\mu)$ их выражения из (11), то получим формулу

$$Q_n^m(\mu)=\frac{\pi}{2}e^{m\pi i}\frac{1}{\sin m\pi}\left[\frac{1}{\Pi(-m)}\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m}F\left(-n,n+1;\,1-m;\,\frac{1-\mu}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\Pi(m)}\,\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)}\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{-\frac{1}{2}m}F\left(-n,n+1;\,1+m;\,\frac{1-\mu}{2}\right)\right],$$

представляющую $Q_n^m(\mu)$ внутри круга с центром в точке $\mu=1$, проходящего через точку $\mu=-1$; следует учитывать наличие разреза.

Если m целое действительное число, то $P_n^m(\mu)$ и $P_n^{-m}(\mu)$ независимы между собой и рассматриваемая формула превращается в неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которая раскрывается с помощью обычного правила.

Указанная формула может быть записана в виде

$$Q_n^m(\mu)=\frac{\pi}{2}e^{m\pi i}\frac{1}{\sin m\pi}\times$$
$$\times\left[\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m}\sum_{r=0}^{s-1}\frac{\Pi(-n+r-1)\,\Pi(n+r)}{\Pi(-n-1)\,\Pi(n)\,\Pi(r-m)\,\Pi(r)}\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^r+\right.$$

$$+\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m}\sum_{r=s}^{\infty}\frac{\Pi(-n+r-1)\,\Pi(n+r)}{\Pi(-n-1)\,\Pi(n)\,\Pi(r-m)\,\Pi(r)}\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^r-$$

$$-\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)}\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{-\frac{1}{2}m}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Pi(-n+r-1)\,\Pi(n+r)}{\Pi(n)\,\Pi(-n-1)\,\Pi(r+m)\,\Pi(r)}\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^r\Bigg],$$

где s — целая часть m. Это выражение можно переписать следующим образом:

$$Q_n^m(\mu)=-\frac{1}{2\pi}e^{m\pi i}\sin n\pi\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m}\times$$

$$\times\sum_{r=0}^{s-1}\frac{\Pi(-n+r-1)\,\Pi(n+r)\,\Pi(m-r-1)}{\Pi(r)}\cos r\pi\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^r-$$

$$-\frac{1}{2}e^{m\pi i}\frac{\sin n\pi}{\sin m\pi}\left\{\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\Pi(-n+s+t-1)\,\Pi(n+s+t)}{\Pi(s+t-m)\,\Pi(s+t)}\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^{s+t}-\right.$$

$$\left.-\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)}\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{-\frac{1}{2}m}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Pi(-n+r-1)\,\Pi(n+r)}{\Pi(r+m)\,\Pi(r)}\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^r\right\}.$$

В первом случае предполагается, что n не является целым действительным числом.

Если m целое, то $s=m$; таким образом, $Q_n^m(\mu)$ состоит из части 1)

$$-\frac{\sin n\pi}{2\pi}e^{m\pi i}\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m}\sum_{r=0}^{m-1}\frac{\Pi(-n+r-1)\,\Pi(n+r)\,\Pi(m-r-1)}{\Pi(r)}\left(\frac{\mu-1}{2}\right)^r,$$

из части 2), получающейся дифференцированием выражений

$$\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m}\quad\text{и}\quad\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{-\frac{1}{2}m}$$

во втором члене по m и равной $\frac{1}{2}P_n^m(\mu)\ln\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)$, и 3) из выражения

$$-\frac{1}{2\pi}\sin n\pi\left[\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\Pi(-n+s+t-1)\,\Pi(n+s+t)}{\Pi(t)\,\Pi(m+t)}\frac{\Pi'(t)}{\Pi(t)}\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^{m+t}+\right.$$

$$\left.+\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)}\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{-\frac{1}{2}m}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Pi(-n+r-1)\,\Pi(n+r)}{\Pi(r)\,\Pi(r+m)}\frac{\Pi'(r+m)}{\Pi(r+m)}\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^r\right]+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sin n\pi\left[\frac{\Pi'(n+m)}{\Pi(n-m)}+\frac{\Pi(n+m)\,\Pi'(n-m)}{\Pi(n-m)\,\Pi(n-m)}\right]\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{-\frac{1}{2}m}\times$$

$$\times\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Pi(-n+r-1)\,\Pi(n+r)}{\Pi(r)\,\Pi(r+m)}\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^r.$$

Вспоминая, что

$$\frac{\Pi'(t)}{\Pi(t)}=\frac{\Pi'(0)}{\Pi(0)}+\sigma(t),\quad\text{где}\quad\sigma(t)=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{t},$$

мы получаем для $Q_n^m(\mu)$ при целом положительном m следующее выражение:

$$Q_n^m(\mu)=\frac{1}{2}P_n^m(\mu)\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}+\frac{1}{2}\left\{2\Pi'(0)-\frac{\Pi'(n+m)}{\Pi(n-m)}-\frac{\Pi'(n-m)}{\Pi(n-m)}\right\}P_n^m(\mu)-$$

$$-\frac{\sin n\pi}{2\pi}e^{m\pi i}\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m}\sum_{r=0}^{m-1}\frac{\Pi(-n+r-1)\,\Pi(n+r)\,\Pi(m-r-1)}{\Pi(r)}\cos r\pi\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^{r}-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\sin n\pi\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\Pi(-n+t+m-1)\,\Pi(n+m+t)}{\Pi(t)\,\Pi(m+t)}\sigma(t)\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^{m+t}-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\sin n\pi\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)}\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{-\frac{1}{2}m}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Pi(-n+r-1)\,\Pi(n+r)}{\Pi(r)\,\Pi(r+m)}\sigma(m+t)\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^{t},$$

где

$$\sigma(t)=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{t},\quad \sigma(m+1)=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m+t}.$$

При $m=0$ это выражение переходит в

$$Q_n(\mu)=\frac{1}{2}P_n(\mu)\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}+\left\{\Pi'(0)-\frac{\Pi'(n)}{\Pi(n)}\right\}P_n(\mu)-$$

$$-\frac{1}{\pi}\sin n\pi\sum_{t=1}^{\infty}\frac{\Pi(-n+t-1)\,\Pi(n+t)}{\Pi(t)\,\Pi(t)}\sigma(t)\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^{t}.$$

В случае, когда n является целым положительным числом, это последнее выражение может быть преобразовано с помощью соотношения

$$\Pi(-n+t-1)=\frac{\pi\csc(n+1-t)\pi}{\Pi(n-t)},$$

и так как $\dfrac{1}{\Pi(n-t)}=0$ при $n<t$, то

$$Q_n(\mu)=\frac{1}{2}P_n(\mu)\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)P_n(\mu)+$$

$$+\sum_{t=0}^{n}\frac{\Pi(n+t)}{\Pi(t)\,\Pi(t)\,\Pi(n-t)}\cos\pi t\,\sigma(t)\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^{t}.$$

В этой формуле член, содержащий $\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^{n}$, равен нулю и полученное выражение совпадает с формулой, данной в п. 34.

§ 9. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ $P_n^m(-\mu)$ И $Q_n^m(-\mu)$ В ВИДЕ ЛИНЕЙНЫХ КОМБИНАЦИЙ $P_n^m(\mu)$ И $Q_n^m(\mu)$

133. Так как дифференциальное уравнение (2) не меняется при замене μ на $-\mu$, то $P_n^m(-\mu)$ и $Q_n^m(-\mu)$ также представляют собой его частные решения и, следовательно, могут быть, вообще говоря, выражены через $P_n^m(\mu)$ и $Q_n^m(\mu)$.

Предполагая, что $\arg(\mu+1)$ и $\arg(\mu-1)$ в $(\mu+1)^{\frac{1}{2}m}$ и $(\mu-1)^{-\frac{1}{2}m}$ заключены между π и $-\pi$, имеем

$$-\mu-1=e^{\mp\pi i}(\mu+1),\quad -\mu+1=e^{\mp\pi i}(\mu-1),$$

где верхний знак берется при $\operatorname{Im}(\mu)>0$, а нижний — при $\operatorname{Im}(\mu)<0$. Следовательно, при $|1-\mu|<2$ и $|1+\mu|<2$ из (11) получаем

$$P_n^m(-\mu)=\frac{1}{\Pi(-m)}\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{2}m}F\left(-n,n+1;\;1-m;\;\frac{1+\mu}{2}\right).$$

Эта формула верна для всех значений μ, таких, что $|1+\mu|<2$.

Подставляя сюда вместо ряда его значение, даваемое формулой (24), получаем следующее соотношение:

$$P_n^m(-\mu) = e^{\mp n\pi i} P_n^m(\mu) - \frac{2\sin(n+m)\pi}{\pi} e^{-m\pi i} Q_n^m(\mu). \tag{34}$$

В частности, если $\operatorname{Im}(\mu) > 0$, то

$$P_n(-\mu) = e^{-n\pi i} P_n(\mu) - \frac{2\sin n\pi}{\pi} Q_n(\mu). \tag{35}$$

Если $n+m$ целое отрицательное, то второе слагаемое в формуле (34) следует заменить выражением

$$\frac{2}{\Pi(n-m)\,\Pi(-n-m-1)} e^{m\pi i} Q_n^{-m}(\mu).$$

Так как

$$(-\mu)^{n+m+1} = \mu^{n+m+1} e^{\mp(n+m+1)\pi i},$$

где знак выбирается по указанному выше правилу, то из (19) получаем

$$Q_n^m(-\mu) = -e^{\pm n\pi i} Q_n^m(\mu). \tag{36}$$

Для целых положительных значений n имеем

$$P_n^{-m}(-\mu) = (-1)^n P_n^m(\mu) - \frac{2}{\pi}(-1)^n \sin m\pi \cdot e^{-m\pi i} Q_n^m(\mu),$$

$$Q_n^m(-\mu) = (-1)^{n+1} Q_n^m(\mu).$$

§ 10. РАЗЛОЖЕНИЕ $P_n^m(\mu)$ В РЯД ПО СТЕПЕНЯМ $\frac{1}{\mu}$

134. Формула (19) дает для $Q_n^m(\mu)$ выражение в виде ряда по степеням $\frac{1}{\mu}$, справедливое в окрестности $\mu = \infty$. Мы воспользуемся сейчас соотношением (31) для того, чтобы получить аналогичное выражение для $P_n^m(\mu)$. Заменив в (19) n на $-n-1$, получим

$$Q_{-n-1}^m(\mu) = 2^n e^{m\pi i} \frac{\Pi(m-n-1)\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-n-\frac{1}{2}\right)} (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} \mu^{n-m} \times$$
$$\times F\left(\frac{m-n+1}{2}, \frac{m-n}{2}; \frac{1}{2}-n; \frac{1}{\mu^2}\right) =$$
$$= -2^n e^{m\pi i} \frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\Pi(n-m)} \frac{\cos n\pi}{\sin(n-m)\pi} (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} \mu^{n-m} \times$$
$$\times F\left(\frac{m-n+1}{2}, \frac{m-n}{2}; \frac{1}{2}-n; \frac{1}{\mu^2}\right).$$

Отсюда находим

$$P_n^m(\mu) = \frac{\sin(n+m)\pi}{2^{n+1}\cos n\pi} \frac{\Pi(n+m)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)} (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} \frac{1}{\mu^{n+m+1}} \times$$
$$\times F\left(\frac{m+n+2}{2}, \frac{m+n+1}{2}; n+\frac{3}{2}; \frac{1}{\mu^2}\right) +$$
$$+ 2^n \frac{\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\Pi(n-m)\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)} (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} \mu^{n-m} F\left(\frac{m-n+1}{2}, \frac{m-n}{2}; \frac{1}{2}-n; \frac{1}{\mu^2}\right) \tag{37}$$

для всех n, за исключением полуцелых.

В частности, если $m=0$, то при $|\mu|>1$ имеем

$$P_n(\mu)=\frac{\operatorname{tg} n\pi}{2^{n+1}}\frac{\Pi(n)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\mu^{n+1}}\frac{1}{\mu^{n+1}}F\left(\frac{n}{2}+1,\ \frac{n+1}{2};\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{\mu^2}\right)+$$
$$+2^n\frac{\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\Pi(n)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}\mu^n F\left(\frac{1-n}{2},\ -\frac{n}{2};\ \frac{1}{2}-n;\ \frac{1}{\mu^2}\right). \quad (38)$$

Заметим, что если $n+m$ целое положительное число, то равенство (34) сводится к $P_n^m(-\mu)=e^{\mp n\pi i}P_n^m(\mu)$; однако это неверно при целом отрицательном $n+m$, так как в этом случае произведение $\sin(n+m)\pi\times\times\Pi(n+m)$ конечно. Формула (37) перестает быть справедливой при полуцелых n.

Гейне[1]) дает для $P_n(\mu)$ для любых n формулу, эквивалентную второму слагаемому в формуле (37). Из сказанного вытекает, что формула Гейне справедлива только для целых положительных n.

§ 11. ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ $P_n^m(\mu)$ ПРИ $|\mu+1|>2$, $|\mu-1|>2$ И $\left|\frac{\mu-1}{\mu+1}\right|<1$

135. Используя соотношение (31) и подставляя в него выражение (27) для $Q_n^m(\mu)$ и соответствующее выражение для $Q_{-n-1}^m(\mu)$, получаем

$$P_n^m(\mu)=\frac{\sin(n+m)\pi}{2\pi\cos n\pi}\frac{\Pi(n)\Pi(n+m)}{\Pi(2n+1)}\left(\frac{2}{\mu-1}\right)^{n+1}\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m}\times$$
$$\times F\left(n+1,\ n+m+1;\ 2n+2;\ \frac{2}{1-\mu}\right)-$$
$$-\frac{\sin(n-m)\pi}{2\pi\cos n\pi}\frac{\Pi(-n-1)\Pi(m-n-1)}{\Pi(-2n-1)}\left(\frac{2}{\mu-1}\right)^{-n}\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m}\times$$
$$\times F\left(-n,\ m-n;\ -2n;\ \frac{2}{1-\mu}\right), \quad (39)$$

где $|\mu-1|>2$. Это равенство можно записать также в следующем виде:

$$P_n^{-m}(\mu)=\frac{\sin(n-m)\pi}{2\pi\cos n\pi}\frac{\Pi(n)\Pi(n-m)}{\Pi(2n-1)}\left(\frac{2}{\mu-1}\right)^{n+1}\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{-\frac{1}{2}m}\times$$
$$\times F\left(n+1,\ n-m+1;\ 2n+2;\ \frac{2}{1-\mu}\right)-$$
$$-\frac{\sin(n+m)\pi}{2\pi\cos n\pi}\frac{\Pi(-n-1)\Pi(-m-n-1)}{(-2n-1)}\left(\frac{2}{\mu-1}\right)^{-n}\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{-\frac{1}{2}m}\times$$
$$\times F\left(-n,\ -m-n;\ -2n;\ \frac{2}{1-\mu}\right). \quad (39')$$

Формулы (39) и (39′) справедливы для значений μ, лежащих вне окружности с центром в точке 1, проходящей через точку -1. Если мы воспользуемся соотношением (31) и подставим в него вместо $Q_n^m(\mu)$, $Q_{-n-1}^m(\mu)$ их значения, даваемые формулами (29) и (30), то получим формулу

$$P_n^m(\mu)=\frac{\sin(n+m)\pi}{2\pi\cos n\pi}\frac{\Pi(n)\Pi(n+m)}{\Pi(2n+1)}\left(\frac{2}{\mu+1}\right)^{n+1}\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{-\frac{1}{2}m}\times$$
$$\times F\left(n+1,\ n-m+1;\ 2n+2;\ \frac{2}{1+\mu}\right)-$$

[1]) Kugelfunktionen, т. I, стр. 38.

$$-\frac{\sin(n-m)\pi}{2\pi\cos n\pi}\frac{\Pi(-n-1)\Pi(m-n-1)}{\Pi(-2n-1)}\left(\frac{2}{\mu+1}\right)^{-n}\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{-\frac{1}{2}m}\times$$
$$\times F\left(-n,\ -n-m;\ -2n;\ \frac{2}{1+\mu}\right),\qquad(40)$$

справедливую вне окружности с центром -1, проходящей через точку 1.

Известно, что

$$F(\alpha,\beta;\gamma;x)=\frac{\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)}F(\alpha,\beta;\ 1+\alpha+\beta-\gamma;\ 1-x)+$$
$$+\frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma-1)\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\times$$
$$\times F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta;\ \gamma-\alpha-\beta+1;\ 1-x),$$

где $|x|<1$, $|1-x|<1$ и $|\arg(1-x)|<\pi$.

Пусть $x=\frac{\mu-1}{\mu+1}$, $\alpha=n+1$, $\beta=n-m+1$, $\gamma=1-m$, тогда получаем

$$F\left(n+1,\ n-m+1;\ 1-m;\ \frac{\mu-1}{\mu+1}\right)=$$
$$=\frac{\Pi(-2n-2)\Pi(-m)}{\Pi(-m-n-1)\Pi(-n-1)}F\left(n+1,n-m+1;\ 2n+2;\ \frac{2}{\mu+1}\right)+$$
$$+\frac{\Pi(2n)\Pi(-m)}{\Pi(n)\Pi(n-m)}\left(\frac{2}{\mu+1}\right)^{-2n-1}F\left(-n,\ -n-m;\ -2n;\ \frac{2}{\mu+1}\right).$$

Легко видеть, что

$$\frac{\Pi(-2n-2)}{\Pi(-m-n-1)\Pi(-n-1)}=\frac{\Pi(-m)\sin(n+m)\pi}{2\pi\cos n\pi}$$

и

$$\frac{\Pi(2n)}{\Pi(n)\Pi(n-m)}=-\frac{\Pi(-m)\Pi(m-n-1)}{\Pi(-n-1)\cdot 2\pi\cos n\pi}\sin(n-m)\pi.$$

Из формулы (40) вытекает, что

$$P_n^m(\mu)=\frac{1}{\Pi(-m)}\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{-\frac{1}{2}m}\left(\frac{2}{\mu+1}\right)^{n+1}F\left(n+1,\ n-m+1;\ 1-m;\ \frac{\mu-1}{\mu+1}\right)=$$
$$=\frac{1}{\Pi(-m)}\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{-\frac{1}{2}m}\left(\frac{2}{\mu+1}\right)^{-n}F\left(-n,\ -n-m;\ 1-m;\ \frac{\mu-1}{\mu+1}\right).\qquad(41)$$

Формула (41) для $P_n^m(\mu)$ справедлива при $\left|\frac{\mu-1}{\mu+1}\right|<1$. Это условие выполнено во всей полуплоскости $\operatorname{Re}\mu>1$ (следует учитывать наличие разреза). Большая область сходимости делает данную формулу удобной для различных исследований. Эта формула была дана Барнсом (цит. соч., стр. 103). Если n целое положительное, то второе выражение обрывается на $(n+1)$-м члене.

§ 12. ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ $P_n^m(\mu)$ ПРИ ПОЛУЦЕЛОМ n

136. Формула (19) может быть записана в следующем виде:

$$Q_n^m(\mu)=\frac{e^{m\pi i}}{(2\mu)^{n+1}}\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{1}{\mu^m}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Pi(n+m+2r)}{\Pi(r)\Pi\left(n+r+\frac{1}{2}\right)}\frac{1}{(2\mu)^{2r}}.$$

Отсюда

$$Q_{-n-1}^m(\mu)=e^{m\pi i}(2\mu)^n\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{1}{\mu^m}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Pi(m-n-1+2r)}{\Pi(r)\Pi\left(r-n-\frac{1}{2}\right)}\frac{1}{(2\mu)^{2r}}.$$

Пусть n полуцелое $\left(\geqslant -\frac{1}{2}\right)$, тогда для $\varepsilon > 0$ имеем

$$Q_{n+\varepsilon}^{m}(\mu)=\frac{e^{m\pi i}}{(2\mu)^{n+1+\varepsilon}}\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{1}{\mu^m}\times$$

$$\times\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Pi(n+m+2r+\varepsilon)}{\Pi(r)\,\Pi\left(n+r+\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}\frac{1}{(2\mu)^{2r}},$$

$$Q_{-n-1-\varepsilon}^{m}(\mu)=e^{m\pi i}(2\mu)^{n+\varepsilon}\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{1}{\mu^m}\times$$

$$\times\left\{\sum_{r=0}^{n-\frac{1}{2}}\frac{\Pi(m-n-1+2r-\varepsilon)}{\Pi(r)\,\Pi\left(r-n-\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}\frac{1}{(2\mu)^{2r}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(2\mu)^{2n+1}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Pi(m+n+2r-\varepsilon)}{\Pi(r-\varepsilon)\,\Pi\left(n+r+\frac{1}{2}\right)}\frac{1}{(2\mu)^{2r}}\right\}.$$

При $\varepsilon=0$ конечная сумма $\sum\limits_{r=0}^{n-\frac{1}{2}}$ обращается в нуль в силу наличия множителя $\Pi\left(r-n-\frac{1}{2}\right)$ в знаменателе; при этом предполагается, что m не является полуцелым, так что числитель в бесконечность не обращается. Если $\varepsilon=0$, то $Q_n^m(\mu)=Q_{-n-1}^m(\mu)$. Чтобы найти выражение для $P_n^m(\mu)$, воспользуемся вытекающей из (31) формулой

$$P_n^m(\mu)=-\frac{e^{-m\pi i}}{\pi^2\sin n\pi}\left[\frac{d}{d\varepsilon}\{Q_{n+\varepsilon}^m(\mu)\sin(n+m+\varepsilon)\pi-\right.$$

$$\left.-Q_{-n-1-\varepsilon}^m(\mu)\sin(n-m-\varepsilon)\pi\}\right]_{\varepsilon=0}.$$

Для простоты предположим, что m целое положительное. Выполняя дифференцирование, получаем

$$P_n^m(\mu)=\frac{2}{\pi^2}\mathrm{Ln}(2\mu)\cos m\pi\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{1}{\mu^m}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Pi(n+m+2r)}{\Pi(r)\,\Pi\left(n+r+\frac{1}{2}\right)}\frac{1}{(2\mu)^{n+2r+1}}-$$

$$-\frac{\cos m\pi}{\pi^2}\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{1}{\mu^m}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Pi(n+m+2r)}{\Pi(r)\,\Pi\left(n+r+\frac{1}{2}\right)}\times$$

$$\times\left\{\frac{2\Pi'(m+n+2r)}{\Pi(m+n+2r)}-\frac{\Pi'\left(n+r+\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(n+r+\frac{1}{2}\right)}-\frac{\Pi'(r)}{\Pi(r)}\right\}\frac{1}{(2\mu)^{n+2r+1}}+$$

$$+\frac{\cos m\pi}{\pi^2}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{1}{\mu^m}\times$$

$$\times\sum_{r=0}^{n-\frac{1}{2}}\frac{\Pi(m-n-1+2r)\,\Pi\left(n-r-\frac{1}{2}\right)}{\Pi(r)}\frac{(-1)^r}{(2\mu)^{2r-n}},$$

где n — полуцелое, а m — целое положительное и $|\mu|>1$.

В случае $m=0$ имеем

$$P_n(\mu)=\frac{2}{\pi^2}\ln(2\mu)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Pi(n+2r)}{\Pi(r)\Pi\left(n+r+\frac{1}{2}\right)}\frac{1}{(2\mu)^{n+2r+1}}-$$

$$-\frac{1}{\pi^2}\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Pi(n+2r)}{\Pi(r)\Pi\left(n+r+\frac{1}{2}\right)}\times$$

$$\times\left\{\frac{2\Pi'(n+2r)}{\Pi(n+2r)}-\frac{\Pi'\left(n+r+\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(n+r+\frac{1}{2}\right)}-\frac{\Pi'(r)}{\Pi(r)}\right\}\frac{1}{(2\mu)^{n+2r+1}}+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\sum_{r=0}^{n-\frac{1}{2}}\frac{\Pi(2r-n-1)\Pi\left(n-r-\frac{1}{2}\right)}{\Pi(r)}\frac{(-1)^r}{(2\mu)^{2r-n}},\qquad(42)$$

где $|\mu|>1$ и n — полуцелое.

В случае $n=-\frac{1}{2}$ последний член исчезает и для главного члена второго ряда получается следующее выражение:

$$-\frac{2}{\pi^2}\left\{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^2\left\{\frac{\Pi'\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}-\frac{\Pi'(0)}{\Pi(0)}\right\}\frac{1}{(2\mu)^{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{\pi}\frac{\ln 4}{(2\mu)^{\frac{1}{2}}}.$$

Таким образом,

$$P_{-\frac{1}{2}}(\mu)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\ln(8\mu)\left\{1+\eta\left(\frac{1}{\mu}\right)\right\},\qquad(43)$$

где $\eta\left(\frac{1}{\mu}\right)\to 0$ при $\frac{1}{\mu}\to 0$.

§ 13. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ $P_n^m(\mu)$ И $Q_n^m(\mu)$ В ВИДЕ РЯДОВ ПО СТЕПЕНЯМ μ В КРУГЕ $|\mu|<1$

137. Нам удобно будет сперва получить разложение $Q_n^m(\mu)$ и из него затем вывести соответствующий ряд для $P_n^m(\mu)$.

Воспользовавшись формулой

$$Q_n^m(\mu)=\frac{e^{-(n+1)\pi i}}{4i\sin n\pi}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n)}\int^{(-1+,1-)}\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^n(t-\mu)^{-n-m-1}\,dt,$$

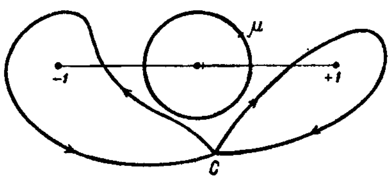
рассмотрим сперва случай $\operatorname{Im}(\mu)>0$; путь интегрирования можно выбрать так (черт. 11), что во всех его точках $|t|>|\mu|$. Выражение $(t-\mu)^{-n-m-1}$ можно разложить по возрастающим степеням μ, и так как в точке пересечения прямой, соединяющей μ и 0 с путем интегрирования, $\arg[(t-\mu)t^{-1}]=0$, то

$$Q_n^m(\mu)=\frac{e^{-(n+1)\pi i}}{4i\sin n\pi}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\cdot\frac{1}{2^n\Pi(n)}\times$$

$$\times\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Pi(n+m+r)}{\Pi(r)}\mu^r\int_C^{(-1+,1-)}(t^2-1)^n t^{-n-m-r-1}\,dt.$$

Рассмотрим теперь интеграл $\int\limits^{(-1+,1-)} (t^2-1)\,t^p\,dt$.

Предположим сперва, что $\operatorname{Re}(n+1)>0$, $\operatorname{Re}(p+1)>0$; тогда путь интегрирования можно выбрать так (черт. 12), чтобы радиусы окружностей вокруг точек -1 и 1 и радиус полуокружности вокруг точки O стремились к нулю. Интегралы по этим окружностям и по полуокружности в пределе обращаются в нуль, и нам остается рассмотреть только интеграл,



Черт. 11.

Черт. 12.

взятый вдоль отрезков действительной оси. Этот интеграл состоит из четырех частей:

1) от 0 до -1, где $\arg t=-\pi$, $\arg(t-1)=\pi$ и $\arg(t+1)=-2\pi$;
2) от -1 до 0, где $\arg t=-\pi$, $\arg(t-1)=\pi$ и $\arg(t+1)=0$;
3) от 0 до 1, где $\arg t=0$, $\arg(t-1)=\pi$, $\arg(t+1)=0$;
4) от 1 до 0, где $\arg t=0$, $\arg(t-1)=-\pi$ и $\arg(t+1)=0$.

Полагая $v=|t|$, мы получаем, что вдоль первых двух участков пути интегрирования $t=ve^{-i\pi}$, а вдоль двух последних $t=v$; следовательно, рассматриваемый интеграл равен

$$(e^{-n\pi i}e^{-(p+1)\pi i}-e^{n\pi i}e^{-(p+1)\pi i}+e^{n\pi i}-e^{-n\pi i})\int\limits_0^1(1-v^2)^n v^p dv=$$

$$=2i\sin n\pi\,(1+e^{-p\pi i})\int\limits_0^1(1-v^2)^n v^p\,dv=$$

$$=2i\sin n\pi\,(1+e^{-p\pi i})\cdot\frac{1}{2}\,\frac{\Pi(n)\,\Pi\left(\frac{p-1}{2}\right)}{\Pi\left(n+\frac{p+1}{2}\right)}.$$

Этот результат верен и в тех случаях, когда условия $\operatorname{Re}(p+1)>0$ и $\operatorname{Re}(n+1)>0$ не выполнены; в этом легко можно убедиться, последовательно используя соотношения

$$\int\limits^{(-1+,1-)}(t^2-1)^n t^p\,dt=\frac{2n+p+3}{p+1}\int\limits^{(-1+,1-)}(t^2-1)^n t^{p+2}\,dt,$$

$$\int\limits^{(-1+,1-)}(t^2-1)^n t^p\,dt=-\frac{2n+p+3}{2n+2}\int\limits^{(-1+,1-)}(t^2-1)^{n+1} t^p\,dt,$$

получающиеся интегрированием по частям.

Полагая $p=-n-m-r-1$, получаем

$$Q_n^m(\mu)=\frac{e^{-(n+1)\pi i}}{4i\sin n\pi}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\,\frac{i\sin n\pi}{2^n\Pi(n)}\times$$

$$\times\sum_{r=0}^{\infty}\left[(1-e^{(n+m+r)\pi i})\,\mu^r\,\frac{\Pi(n+m+r)}{\Pi(r)}\,\frac{\Pi(n)\,\Pi\left(-\frac{n+m+r}{2}-1\right)}{\Pi\left(\frac{n-m-r}{2}\right)}\right]=$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{e^{-(n+1)\pi i}}{2^{n+2}}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\left(1-e^{(n+m)\pi i}\right)\times\\
&\times\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Pi\left(-\frac{n+m+2s}{2}-1\right)\Pi(n+m+2s)}{\Pi(2s)\,\Pi\left(\frac{n-m-2s}{2}\right)}\mu^{2s}+\\
&+\frac{e^{-(n+1)\pi i}}{2^{n+2}}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\left(1+e^{(n+m)\pi i}\right)\times\\
&\times\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Pi\left(-\frac{n+m+2s+1}{2}-1\right)\Pi(n+m+2s+1)}{\Pi(2s+1)\,\Pi\left(\frac{n-m-2s-1}{2}\right)}\mu^{2s+1}.
\end{aligned}
$$

Воспользовавшись известным соотношением $\Pi(x-1)\,\Pi(-x)=\pi\csc x\pi$, получаем для $Q_n^m(\mu)$ следующее выражение:

$$
\begin{aligned}
Q_n^m(\mu) = &-\frac{ie^{\frac{(m-n)\pi i}{2}}}{2^{n+1}}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\sin\frac{m-n}{2}\pi\,\frac{\Pi(n+m)\,\Pi\left(\frac{m-n-2}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{n+m}{2}\right)}\times\\
&\times F\left(\frac{n+m+1}{2},\ \frac{m-n}{2};\ \frac{1}{2};\ \mu^2\right)+\\
&+\frac{e^{\frac{(m-n)\pi i}{2}}}{2^{n+1}}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\cos\frac{m-n}{2}\pi\,\frac{\Pi(n+m+1)\,\Pi\left(\frac{m-n-1}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{n+m+1}{2}\right)}\times\\
&\times\mu F\left(\frac{m-n+1}{2},\ \frac{m+n+2}{2};\ \frac{3}{2};\ \mu^2\right).
\end{aligned}
\tag{44}
$$

С помощью соотношения

$$
\frac{\Pi(2x)}{\Pi(x)} = 2^{2x}\,\frac{\Pi\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}
$$

формулу (44) можно переписать в следующем виде:

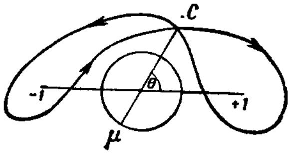
$$
\begin{aligned}
Q_n^m(\mu) = &-\frac{ie^{(m-n)\frac{\pi i}{2}}}{2}\cdot 2^m\,\frac{\Pi\left(\frac{n+m+1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{n-m}{2}\right)}\times\\
&\times(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}F\left(\frac{n+m+1}{2},\ \frac{m-n}{2};\ \frac{1}{2};\ \mu^2\right)+\\
&+e^{(m-n)\frac{\pi i}{2}}\cdot 2^m\,\frac{\Pi\left(\frac{n+m}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{n-m-1}{2}\right)}\times\\
&\times(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\mu F\left(\frac{m-n+1}{2},\ \frac{m+n+2}{2};\ \frac{3}{2};\ \mu^2\right).
\end{aligned}
\tag{45}
$$

138. В случае $\operatorname{Im}(\mu)<0$ путь интегрирования следует выбрать так, как это указано на черт. 13.

В этом случае в точке C $\arg(t-\mu) = -(2\pi - \theta)$ и $\arg t = \theta$, так что $\arg\left(1-\frac{\mu}{t}\right)$ в той же точке C равен -2π; следовательно, $\left(1-\frac{\mu}{t}\right)^{-n-m-1}$ равняется значению, получающемуся для этого выражения из биномиального разложения, умноженному на $e^{2(n+m)\pi i}$. Таким образом, получаем

$$Q_n^m(\mu) = \frac{e^{(n+1)\pi i}}{4i\sin n\pi} e^{2m\pi i} \frac{1}{2^n \Pi(n)} (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} \times$$
$$\times \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Pi(n+m+r)}{\Pi(r)} \int\limits_C^{(-1+,1-)} (t^2-1)^n t^{-n-m-r-1}\,dt.$$

Как и выше, можно показать, что



Черт. 13.

$$\int^{(-1+,1-)} (t^2-1)^n t^p\,dt = (e^{n\pi i} - e^{-n\pi i}) \times$$
$$\times (1+e^{p\pi i}) \frac{1}{2} \frac{\Pi(n)\,\Pi\left(\frac{p-1}{2}\right)}{\Pi\left(n+\frac{p+1}{2}\right)}.$$

Отсюда имеем

$$Q_n^m(\mu) = \frac{e^{(n+1)\pi i}}{4i\sin n\pi} (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} e^{2m\pi i} \frac{i\sin n\pi}{2^n \Pi(n)} \times$$
$$\times \sum_{r=0}^{\infty} \left[(1-e^{-(n+m+r)\pi i})\,\mu^r \frac{\Pi(n+m+r)}{\Pi(r)} \frac{\Pi(n)\,\Pi\left(-\frac{n+m+r}{2}-1\right)}{\Pi\left(\frac{n-m-r}{2}\right)} \right] =$$
$$= \frac{ie^{\left(\frac{3}{2}m+\frac{1}{2}n\right)\pi i}}{2^{n+1}} (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} \sin\frac{n+m}{2}\pi i \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Pi(n+m+2s)\,\Pi\left(-\frac{n+m+2s}{2}-1\right)}{\Pi(2s)\,\Pi\left(\frac{n-m-2s}{2}\right)} \mu^{2s} +$$
$$+ \frac{ie^{\left(\frac{3}{2}m+\frac{1}{2}n\right)\pi i}}{2^{n+1}} (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} \cos\frac{n+m}{2}\pi i \times$$
$$\times \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Pi(n+m+2s+1)\,\Pi\left(-\frac{n+m+2s+1}{2}-1\right)}{\Pi(s)\,\Pi\left(\frac{n-m-2s-1}{2}\right)} \mu^{2s+1}.$$

С помощью той же самой редукции, что и выше, получаем

$$Q_n^m(\mu) = \frac{ie^{\left(\frac{3}{2}m+\frac{1}{2}n\right)\pi i}}{2} \cdot 2^m \frac{\Pi\left(\frac{n+m-1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{n-m}{2}\right)} (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} \times$$
$$\times F\left(\frac{n+m+1}{2}, \frac{m-n}{2}; \frac{1}{2}; \mu^2\right) + \tag{46}$$
$$+ e^{\left(\frac{3}{2}m+\frac{1}{2}n\right)\pi i} \cdot 2^m \frac{\Pi\left(\frac{n+m}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{n-m-1}{2}\right)} (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} \times$$
$$\times \mu F\left(\frac{m-n+1}{2}, \frac{m+n+2}{2}; \frac{3}{2}; \mu^2\right)$$

где $\operatorname{Re}(\mu) < 0$.

139. Заменим в формуле (44) n на $-n-1$; после некоторого преобразования числовых множителей получим

$$Q_{-n-1}^m(\mu) = -\frac{1}{2}e^{\left(\frac{m+n}{2}\right)\pi i}\cdot 2^m\frac{\cos\frac{n+m}{2}\pi}{\sin\frac{n-m}{2}\pi}\;\frac{\Pi\left(\frac{m+n-1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{n-m}{2}\right)}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\times$$
$$\times F\left(\frac{m+n+1}{2},\ \frac{m-n}{2};\ \frac{1}{2};\ \mu^2\right)-$$
$$-ie^{(m+n)\frac{\pi i}{2}}\cdot 2^m\frac{\sin\frac{n+m}{2}\pi}{\cos\frac{n-m}{2}\pi}\;\frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{n-m-1}{2}\right)}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\times$$
$$\times\mu F\left(\frac{m+n+2}{2},\ \frac{m+n+1}{2};\ \frac{3}{2};\ \mu^2\right).$$

Подставляя это выражение и выражение (44) в соотношение (31), получаем следующее выражение для $P_n^m(\mu)$:

$$P_n^m(\mu) = e^{-m\pi i}\cdot 2^m\cos\frac{n+m}{2}\pi\cdot\frac{\Pi\left(\frac{n+m-1}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{n-m}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\times$$
$$\times F\left(\frac{m+n+1}{2},\ \frac{m-n}{2};\ \frac{1}{2};\ \mu^2\right)+\tag{47}$$
$$+e^{-m\pi i}\cdot 2^{m+1}\sin\frac{n+m}{2}\pi\cdot\frac{\Pi\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{n-m-1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\times$$
$$\times\mu F\left(\frac{m+n+2}{2},\ \frac{m-n+1}{2};\ \frac{3}{2};\ \mu^2\right),$$

где $\operatorname{Im}(\mu)>0$.

Если $\operatorname{Im}(\mu)<0$, то аналогичным путем получается выражение, отличающееся от (47) только тем, что множитель $e^{-m\pi i}$ заменяется на $e^{m\pi i}$.

Если мы воспользуемся соотношением

$$F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta;\ \gamma;\ x)$$

и вспомним, что $1-\mu^2 = e^{\mp\pi i}(\mu^2-1)$ при $\operatorname{Im}(\mu)\gtrless 0$, то получим, что оба случая $\operatorname{Im}(\mu)>0$ и $\operatorname{Im}(\mu)<0$ охватываются формулой

$$P_n^m(\mu) = 2^m\cos\frac{n+m}{2}\pi\cdot\frac{\Pi\left(\frac{n+m-1}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{n-m}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m}\times$$
$$\times F\left(-\frac{m+n}{2},\ \frac{n-m+1}{2};\ \frac{1}{2};\mu^2\right)+\tag{48}$$
$$+2^{m+1}\sin\frac{n+m}{2}\pi\,\frac{\Pi\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{n-m-1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m}\times$$
$$\times\mu F\left(\frac{1-m-n}{2},\ \frac{n-m+2}{2};\ \frac{3}{2};\ \mu^2\right).$$

Если n действительное полуцелое, то выражение

$$Q_{-n-1}^{m}(\mu)=e^{m\pi i}\,2^{n}\,\frac{\Pi(m-n-1)\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{2}-n\right)}(\mu^{2}-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{1}{\mu^{m-n}}\times$$
$$\times F\left(\frac{m-n+1}{2},\ \frac{m-n}{2};\ \frac{1}{2}-n;\ \frac{1}{\mu^{2}}\right),$$

получающееся из (19) заменой n на $-n-1$, требует соответствующих видоизменений, так как в нем первые $n+\frac{1}{2}$ членов обращаются в нуль из-за наличия в знаменателе множителя $\Pi\left(-\frac{1}{2}-n\right)$.

Мы можем переписать это выражение в следующем виде:

$$e^{m\pi i}\,2^{n}\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2^{-(2r+2)}\sum_{r=-1}^{\infty}\frac{\Pi(m-n+2r+1)}{\Pi(r+1)\,\Pi\left(\frac{1}{2}-n+r\right)}\frac{1}{\mu^{2r+2}};$$

при полуцелом n члены, соответствующие

$$r=1,\ 0,\ \ldots,\ n-\frac{3}{2},$$

обращаются в нуль, и рассматриваемое выражение приводится к

$$\frac{e^{m\pi i}}{2^{n+1}}\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\mu^{m-n}}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Pi(m+n+2+2s)}{\Pi\left(n+\frac{3}{2}+s\right)\Pi(s+1)}\frac{1}{\mu^{2n+1+s}},$$

что равносильно формуле (19). Таким образом, мы получаем, что при полуцелом n

$$Q_{n}^{m}(\mu)=Q_{-n-1}^{m}(\mu).$$

Из (47) видно, что если $m+n$ целое, то для представления $P_{n}^{m}(\mu)$ требуется не два гипергеометрических ряда, а только один, первый или второй, в зависимости от того, четно $n+m$ или нечетно.

140. Если мы воспользуемся формулой

$$F(\alpha,\beta;\gamma;x)=\frac{\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)\,\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\,\Pi(\gamma-\beta-1)}F(\alpha,\beta;1+\alpha-\beta-\gamma;1-x)+$$
$$+\frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma-1)\,\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\times$$
$$\times F(\gamma-\alpha;\ \gamma-\beta;\ \gamma-\alpha-\beta+1;\ 1-x),$$

которая справедлива при $|x|<1$, $|1-x|<1$, и положим

$$\alpha=\frac{n-m+1}{2},\quad \beta=-\frac{n+m}{2},\quad \gamma=1-m,\quad x=1-\mu^{2},$$

то получим

$$F\left(\frac{n-m+1}{2},\ -\frac{n+m}{2};\ 1-m;\ 1-\mu^{2}\right)=$$
$$=\frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi(-m)}{\Pi\left(-\frac{m+n+1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{m-n}{2}\right)}F\left(\frac{n-m+1}{2},\ -\frac{m+n}{2};\ \frac{1}{2};\ \mu^{2}\right)+$$
$$+\frac{\Pi\left(-\frac{3}{2}\right)\Pi(-m)}{\Pi\left(\frac{n-m+1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{m+n+2}{2}\right)}\mu F\left(\frac{1-n-m}{2},\frac{n-m+2}{2};\ \frac{3}{2};\ \mu^{2}\right),$$

где $|1-\mu^2|<1$, $|\mu^2|<1$ и $\operatorname{Re}(\mu^2)>0$, так что в выражении $(\mu^2)^{\frac{1}{2}}$ действительная часть μ должна быть положительна.

Сравнивая эту формулу с (48), получаем равенство

$$P_n^m(\mu)\frac{2^m}{\Pi(-m)}(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m}F\left(\frac{n-m+1}{2},\ -\frac{n+m}{2};\ 1-m;\ 1-\mu^2\right), \tag{49}$$

справедливое при $|\mu^2-1|<1$ и $\operatorname{Re}(\mu)>0$.

С помощью соотношения (33) можно $Q_n^m(\mu)$ при $\operatorname{Re}(\mu)>0$ выразить через гипергеометрический ряд с $1-\mu^2$ в качестве четвертого аргумента. С помощью гомографического преобразования можно получить и другие выражения для $P_n^m(\mu)$ и $Q_n^m(\mu)$.

Например, можно показать, что при $|1-\mu^2|>1$

$$P_n^m(\mu)=\frac{2^m\,\Pi\left(-n-\frac{3}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{m+n+2}{2}\right)\Pi\left(-\frac{m+n+1}{2}\right)}(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}(n+1)}\times$$
$$\times F\left(\frac{n+1-m}{2},\ \frac{n+1+m}{2};\ \frac{3}{2}+n;\ \frac{1}{1-\mu^2}\right)+$$
$$+\frac{2^m\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{n-m-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{n-m}{2}\right)}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}n}\times$$
$$\times F\left(\frac{1}{2}(m-n),-\frac{1}{2}(m+n);\ \frac{1}{2}-n;\ \frac{1}{1-\mu^2}\right)$$

$$Q_n^m(\mu)=e^{m\pi i}\frac{\Pi(n+m)\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{2^{n+1}\,\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}(n+1)}\times$$
$$\times F\left(\frac{n+m+1}{2},\ \frac{n-m+1}{2};\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{1-\mu^2}\right). \tag{50}$$

Следует помнить, что в этих формулах значения множителей $(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}n}$, $(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}(n+1)}$ зависят от $\arg(\mu^2-1)$ и, следовательно, различны при $\operatorname{Re}(\mu)>0$ и при $\operatorname{Re}(\mu)<0$.

Формула (50) имеет большое значение, поэтому мы приведем ее доказательство. Из (19) имеем

$$Q_n^m(\mu)=\frac{e^{m\pi i}}{2^{n+1}}\,\frac{\Pi(n+m)\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\,\frac{(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}}{\mu^{n+m+1}}\times$$
$$\times F\left(\frac{n+m+2}{2},\ \frac{n+m+1}{2};\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{\mu^2}\right).$$

Гипергеометрическую функцию $F(\alpha,\beta;\gamma;\xi)$ можно представить в следующем виде:

$$\frac{\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\beta-1)\,\Pi(\gamma-\beta-1)}\int\limits_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-\xi u)^{-\alpha}\,du,$$

поэтому, полагая $\beta=\frac{1}{2}(n+m+2)$, $\alpha=\frac{1}{2}(n+m+1)$, $\gamma=n+\frac{3}{2}$, имеем

$$F\left(\frac{n+m+2}{2},\ \frac{n+m+1}{2};\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{\mu^2}\right)=$$

$$=\frac{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(\Pi\frac{n+m}{2}\right)\Pi\left(\frac{n-m-1}{2}\right)}\int\limits_0^1 u^{\frac{1}{2}(n+m)}(1-u)^{\frac{1}{2}(n-m-1)}\left(1-\frac{u}{\mu^2}\right)^{-\frac{1}{2}(n+m+1)}du.$$

Правую часть этой формулы можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{n-m-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{n+m}{2}\right)}\mu^{n+m+1}(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}(n+m+1)}\times$$

$$\times\int\limits_0^1 u^{\frac{1}{2}(n+m)}(1-u)^{\frac{1}{2}(n-m-1)}\left(1-\frac{1-u}{1-\mu^2}\right)^{-\frac{1}{2}(n+m+1)}du.$$

При $\left|\frac{1-u}{1-\mu^2}\right|<1$ входящий сюда интеграл равен

$$\int\limits_0^1 u^{\frac{1}{2}(n+m)}(1-u)^{\frac{1}{2}(n-m-1)}\left\{1+\frac{n+m+1}{2}\,\frac{1-u}{1-\mu^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{(n+m+1)(n+m+3)}{2^2 2!}\left(\frac{1-u}{1-\mu^2}\right)^2+\dots\right\}du.$$

Если путь интегрирования выбран так, чтобы была обеспечена равномерная сходимость, то ряд можно интегрировать почленно. Получим, что рассматриваемый интеграл равен

$$\Pi\left(\frac{n+m}{2}\right)\Pi\left(\frac{n-m-1}{2}\right)\frac{1}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\times$$

$$\times F\left(\frac{n+m+1}{2},\ \frac{n-m+1}{2};\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{1-\mu^2}\right).$$

Подставляя вместо интеграла это выражение, получаем формулу (50), справедливую при $|1-\mu^2|>1$.

§ 14. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ $P_n^m(\mu)$ И $Q_n^m(\mu)$ В ОКРЕСТНОСТЯХ ТОЧЕК -1 И 1

141. Чтобы получить выражение для $P_n^m(\mu)$ в окрестности точки -1, заметим, что внутри круга радиуса 1 с центром в точке -1 дифференциальному уравнению (2) удовлетворяют функции

$$\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{2}m}F\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1+\mu}{2}\right)$$

и

$$\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m}F\left(-n,\ n+1;\ 1+m;\ \frac{1+\mu}{2}\right).$$

Предположим, что n и m действительные, но не целые, так что эти два решения не совпадают между собой.

Пусть сперва $m > 0$. Тогда $P_n^m(\mu)$ в окрестности точки -1 можно представить следующим образом:

$$P_n^m(\mu) = A\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-n,\ n+1;\ 1+m;\ \frac{1+\mu}{2}\right) +$$
$$+ B\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1+\mu}{2}\right),$$

где величины A и B следует еще определить. Рассмотрим точки $\mu = -1 + 2\varepsilon \pm i\cdot 0$, в которых, согласно (11),

$$P_n^m(-1+2\varepsilon \pm i\cdot 0) = \frac{1}{\Pi(-m)}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\right)^{\frac{1}{2}m} F(-n, n+1;\ 1-m;\ 1-\varepsilon),$$

где

$$(\varepsilon-1)^{\frac{1}{2}m} = (1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}m} e^{\pm\frac{1}{2}m\pi i}.$$

Тогда, воспользовавшись асимптотическим выражением гипергеометрического ряда (см. п. 115), получим

$$\frac{1}{\Pi(-m)}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\right)^{\frac{1}{2}m} \frac{\Pi(-m)\,\Pi(m-1)}{\Pi(-n-1)\,\Pi(n)}\ \frac{1}{\varepsilon^m} \sim A\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\right)^{\frac{1}{2}m} + B\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}m}$$

или, что то же самое,

$$\frac{\Pi(m-1)}{\Pi(n)\,\Pi(-n-1)} \sim A\,\varepsilon^m + B\,(\varepsilon-1)^m;$$

отсюда, полагая $\varepsilon \sim 0$, имеем

$$B = \frac{\Pi(m-1)}{\Pi(n)\,\Pi(-n-1)}\, e^{\mp m\pi i},$$

причем $m > 0$.

Далее, рассмотрим точки $\mu = 1 - 2\varepsilon \pm i\cdot 0$; получаем

$$P_n^m(1-2\varepsilon \pm i\cdot 0) = \frac{1}{\Pi(-m)}\left(\frac{1-\varepsilon}{-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}m} F(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \varepsilon),$$

где

$$(-\varepsilon)^{\frac{1}{2}m} = \varepsilon^{\frac{1}{2}m} e^{\pm\frac{1}{2}m\pi i}$$

Подставляя вместо гипергеометрического ряда его асимптотическое значение, получаем

$$\frac{1}{\Pi(-m)}\left(\frac{1-\varepsilon}{-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}m} \sim A\left(\frac{1-\varepsilon}{-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}m} \frac{\Pi(m)\,\Pi(m-1)}{\Pi(m+n)\,\Pi(m-n-1)} +$$
$$+ B\left(\frac{-\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}m} \frac{\Pi(-m)\,\Pi(m-1)}{\Pi(-n-1)\,\Pi(n)}\ \frac{1}{\varepsilon^m},$$

т. е.

$$\frac{1}{\Pi(-m)} = A\,\frac{\Pi(m)\,\Pi(m-1)}{\Pi(m+n)\,\Pi(m-n-1)} + B\,e^{\pm m\pi i}\,\frac{\Pi(-m)\,\Pi(m-1)}{\Pi(-n-1)\,\Pi(n)}.$$

Подставляя сюда найденное выше значение B, получаем

$$A = \frac{\Pi(m+n)\,\Pi(m-n-1)}{\Pi(m)}\ \frac{\sin m\pi}{\pi}\left[1 - \left(\frac{\sin n\pi}{\sin m\pi}\right)^2\right].$$

После незначительных преобразований приходим к следующей формуле:

$$P_n^m(\mu)=\frac{\Pi(-m-1)}{\Pi(n-m)\,\Pi(-m-n-1)}\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m}F\left(-n,\ n+1;\ 1+m;\ \frac{\mu+1}{2}\right)+$$

$$+\frac{\Pi(m-1)\,e^{\mp m\pi i}}{\Pi(n)\,\Pi(-n-1)}\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{2}m}F\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1+\mu}{2}\right); \tag{51}$$

при $\operatorname{Im}(\mu)>0$ в показателе берется верхний знак, а при $\operatorname{Im}(\mu)<0$ — нижний. Предполагается, что n и m действительны и $m>0$.

В случае $m<0$ положим, как и выше,

$$P_n^{-m}(\mu) = A_1\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{2}m}F\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1+\mu}{2}\right)+$$

$$+B_1\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m}F\left(-n,\ n+1;\ 1+m;\ \frac{1+\mu}{2}\right),$$

где m теперь уже положительно.

Рассмотрим точки $\mu=-1+2\varepsilon\pm i\cdot 0$; имеем

$$P_n^{-m}(-1+2\varepsilon\pm i\cdot 0)=\frac{1}{\Pi(m)}\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}m}F(-n,\ n+1;\ 1+m;\ 1-\varepsilon),$$

где

$$(\varepsilon-1)^{\frac{1}{2}m}=e^{\mp\frac{1}{2}m\pi i}(1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}m}.$$

Используя асимптотическое выражение гипергеометрического ряда, получаем

$$\frac{1}{\Pi(m)}\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}m}\frac{\Pi(m)\,\Pi(m-1)}{\Pi(m+n)\,\Pi(m-n-1)}\sim A_1\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}m}+B_1\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\right)^{\frac{1}{2}m},$$

откуда

$$A_1=\frac{\Pi(m-1)}{\Pi(m+n)\,\Pi(m-n-1)}.$$

Если мы теперь рассмотрим аналогичным образом точки $\mu=1-2\varepsilon\pm$ $\pm i\cdot 0$, то получим

$$\frac{1}{\Pi(m)}\left(\frac{-\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}m}\sim A_1\left(\frac{-\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}m}F(-n,\ n+1;\ 1-m;\ 1-\varepsilon)+$$

$$+B_1\left(\frac{1-\varepsilon}{-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}m}F(-n,\ n+1;\ 1+m;\ 1-\varepsilon)=$$

$$=A_1\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\right)^{\frac{1}{2}m}\frac{\Pi(-m)\,\Pi(m-1)}{\Pi(-n-1)\,\Pi(n)}\frac{1}{\varepsilon^m}+B_1\left(\frac{1-\varepsilon}{-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}m}\frac{\Pi(m)\,\Pi(m-1)}{\Pi(m+n)\,\Pi(m-n-1)},$$

откуда

$$0=A_1\frac{\Pi(-m)\,\Pi(m-1)}{\Pi(n)\,\Pi(-n-1)}+B_1e^{\mp m\pi i}\frac{\Pi(m)\,\Pi(m-1)}{\Pi(m+n)\,\Pi(m-n-1)}.$$

Подставляя сюда значение A_1, находим

$$B_1=-e^{\pm m\pi i}\frac{\Pi(-m)\,\Pi(m-1)}{\Pi(n)\,\Pi(-n-1)\,\Pi(m)}$$

и, следовательно,

$$P_n^{-m}(\mu) = \frac{\Pi(m-1)}{\Pi(m+n)\,\Pi(m-n-1)} \left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1+\mu}{2}\right) -$$

$$- e^{\pm m\pi i} \frac{\Pi(-m)\,\Pi(m-1)}{\Pi(n)\,\Pi(-n-1)\,\Pi(m)} \left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-n,\ n+1;\ 1+m;\ \frac{1+\mu}{2}\right).$$

Эта формула приводится к следующей:

$$P_n^{-m}(\mu) = \frac{\Pi(m-1)}{\Pi(m+n)\,\Pi(m-n-1)} \left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-n,\ m+1;\ 1-m;\ \frac{1+\mu}{2}\right) +$$

$$+ e^{\pm m\pi i} \frac{\Pi(-m-1)}{\Pi(n)\,\Pi(-n-1)} \left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-n,\ n+1;\ 1+m;\ \frac{1+\mu}{2}\right); \tag{52}$$

при $\operatorname{Im}(\mu) > 0$ в показателе берется верхний знак, а при $\operatorname{Im}(\mu) < 0$ — нижний. Воспользовавшись соотношениями, приведенными в п. 140, для того, чтобы записать формулу (11) с гипергеометрической функцией, имеющей своим четвертым аргументом $\frac{1}{2}(1+\mu)$, можно получить формулы (51), (52) и для комплексных значений m и n.

Если n целое положительное, а m не целое, то в обеих формулах второе слагаемое отпадает, так как множитель $\frac{1}{\Pi(n)\,\Pi(-n-1)}$ обращается в нуль.

В этом случае

$$P_n^m(\mu) = \frac{\Pi(-m-1)}{\Pi(n-m)\,\Pi(-m-n-1)} \left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-n,\ n+1;\ 1+m;\ \frac{\mu+1}{2}\right).$$

142. Пусть теперь $m=0$, тогда $F\left(-n,\ n+1;\ 1;\ \frac{1+\mu}{2}\right)$ удовлетворяет уравнению Лежандра в окрестности точки $\mu=-1$. Полагая $t=\frac{1+\mu}{2}$, мы можем переписать это дифференциальное уравнение в следующем виде:

$$t(1-t)\frac{d^2u}{dt^2} + (1-2t)\frac{du}{dt} + n(n+1)\,u = 0.$$

Одним из его решений является $F(-n,\ n+1;\ 1;\ t)$; нам нужно найти его второе решение, линейно независимое с данным.

Подставим

$$u = t^\lambda (a_0 + a_1 t + \ldots + a_r t^r + \ldots)$$

в это дифференциальное уравнение, которое кратко запишем в виде $Du=0$; получим

$$Du = t(1-t)\sum_{r=0}^{\infty} (\lambda+r)(\lambda+r-1)\,a_r t^{\lambda+r-2} +$$

$$+ (1-2t)\sum_{r=0}^{\infty} (\lambda+r)\,a_r t^{\lambda+r-1} + n(n+1)\sum_{r=0}^{\infty} a_r t^{\lambda+r};$$

таким образом, $Du = a_0\lambda^2$, если только a_1, a_2, ... выбраны так, что коэффициенты при t^λ, t $^{+2}$, ... обращаются в нуль.

Получаем

$$a_r(\lambda+r)^2 = a_{r+1}(\lambda-n+r-1)(\lambda+n+r) = 0.$$

Если $\lambda=0$, то $Du=0$, и мы приходим к следующему решению:

$$a_0 F(-n,\ n+1;\ 1;\ t);$$

кроме того, мы имеем $D\frac{du}{d\lambda}=2a_0\lambda$; таким образом, $\frac{du}{d\lambda}$ при $\lambda=0$ также удовлетворяет рассматриваемому уравнению; это и дает второе решение уравнения Лежандра. Соответствующий ряд имеет вид

$$a_0 t^\lambda\left[1+\frac{(\lambda-n)(\lambda+n+1)}{(\lambda+1)^2}t+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{(\lambda-n)(\lambda-n+1)\ldots(\lambda-n+r-1)(\lambda+n+1)\ldots(\lambda+n+r)}{(\lambda+1)^2\ldots(\lambda+r)^2}t^r+\ldots\right].$$

Дифференцируя этот ряд по λ и затем полагая $\lambda=0$, получаем второе решение

$$\ln t\, F(-n,\ n+1;\ 1;\ t)+$$
$$+\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-n)(-n+1)\ldots(-n+r-1)(n+1)\ldots(n+r)}{(r!)^2}\varphi(n,\ r)\,t^r,$$

где

$$\varphi(n,\ r)\equiv\frac{1}{-n}+\frac{1}{-n+1}+\ldots+\frac{1}{-n+r-1}+$$
$$+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+r}-2\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{r}\right).$$

Полагая

$$\psi(x)=-C-\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x+r}-\frac{1}{r}\right),$$

где C — постоянная Эйлера, мы видим, что

$$\lim_{r\to\infty}\varphi(n,\ r)=-\psi(n)-\psi(-n-1)-2C.$$

Пусть

$$P_n(\mu)=AF\left(-n,\ n+1;\ 1;\frac{\mu+1}{2}\right)+B\left[\ln t\cdot F\left(-n,\ n+1;\ 1;\ \frac{1+\mu}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-n)\ldots(-n+r-1)(n+1)\ldots(n+r)}{(r!)^2}\varphi(n,\ r)\left(\frac{1+\mu}{2}\right)^r\right]$$

в окрестности точки -1.

Пусть, далее, $\mu=-1+2\varepsilon$, тогда имеем

$$F(-n,\ n+1;\ 1;\ 1-\varepsilon)=AF(-n,\ n+1;\ 1;\ \varepsilon)(A+B\ln\varepsilon)+$$
$$+B\sum\frac{(-n)\ldots(n+r-1)(n+1)\ldots(n+r)}{(r!)^2}\varphi(n,\ r)\,\varepsilon^r.$$

Сравнивая коэффициенты при $\ln\varepsilon$ в обеих частях равенства и полагая $\varepsilon\to 0$, получаем

$$\frac{\sin n\pi}{\pi}=B.$$

Пусть теперь $\mu=1-2\varepsilon$, тогда

$$F(-n,\ n+1;\ 1;\ \varepsilon)=F(-n,\ n+1;\ 1;\ 1-\varepsilon)[A+B\ln(1-\varepsilon)]+$$
$$+B\sum\frac{(-n)\ldots(-n+r-1)(n+1)\ldots(n+r)}{(r!)^2}\varphi(n,\ r)(1-\varepsilon)^r.$$

Из сравнения с рядом $\sum\frac{(1-\varepsilon)^r}{r}$ [см. п. 115, формулу (в)] видно, что второе слагаемое в правой части асимптотически равно

$$-[\psi(n)+\psi(-n-1)+2C]\frac{\sin n\pi}{\pi}\ln\varepsilon.$$

Таким образом,

$$[A+B\ln(1-\varepsilon)]\frac{\sin n\pi}{\pi}\ln\varepsilon-B[\psi(n)+\psi(-n-1)+2C]\frac{\sin n\pi}{\pi}\ln\varepsilon=1,$$

откуда при $\varepsilon\to 0$ находим

$$A=B[\psi(n)+\psi(-n-1)+2C].$$

Итак, мы доказали, что функция $P_n(\mu)$ может быть представлена следующей формулой:

$$P_n(\mu)=\frac{\sin n\pi}{\pi}\ln\frac{\mu+1}{2}F\left(-n,\ n+1;\ 1;\ \frac{1+\mu}{2}\right)+$$
$$+\frac{\sin n\pi}{\pi}[\psi(n)+\psi(-n-1)+2C]F\left(-n,\ n+1;\ 1;\ \frac{\mu+1}{2}\right)+$$
$$+\frac{\sin n\pi}{\pi}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-n)\ldots(-n+r-1)(n+1)\ldots(n+r)}{(r!)^2}\varphi(n,r)\left(\frac{\mu+1}{2}\right)^r, \tag{53}$$

где

$$\varphi(n,r)\equiv\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n+r}+\frac{1}{-n}+\ldots+\frac{1}{-n+r-1}-2\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{r}\right).$$

Выражение (53) однозначно в силу наличия в μ-плоскости разреза, идущего вдоль действительной оси от -1 до $-\infty$. Оно было получено Хиллом[1]). Если n целое положительное, то это выражение сводится к

$$\cos n\pi\, F\left(-n,\ n+1;\ 1;\ \frac{\mu+1}{2}\right).$$

Если m целое положительное, то

$$P_n^m=(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m}{d\mu^m}P_n(\mu).$$

Отсюда следует, что в окрестности точки $\mu=-1$

$$P_n^m(\mu)=(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m}{d\mu^m}\left[\frac{\sin n\pi}{\pi}\ln\frac{\mu+1}{2}F\left(-n,\ n+1;\ 1;\ \frac{1+\mu}{2}\right)\right]+$$
$$+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{\sin n\pi}{\pi}[\psi(n)+\psi(-n-1)+2C]\frac{d^m}{d\mu^m}F\left(-n,\ n+1;\ 1;\ \frac{\mu+1}{2}\right)+$$
$$+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m}{d\mu^m}\sum\frac{(-n)\ldots(-n+r-1)(n+1)\ldots(n+r)}{(r!)^2}\varphi(n,r)\left(\frac{\mu+1}{2}\right)^r.$$

В это выражение входит слагаемое, содержащее множитель $\ln\frac{\mu+1}{2}$.

143. Чтобы получить выражение функции $Q_n^m(\mu)$ в окрестности точки -1, воспользуемся формулой (26):

$$Q_n^m(\mu)=\frac{\pi e^{m\pi i}}{2\sin(n-m)\pi}\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)}\frac{1}{\Pi(m)}\left\{e^{\mp n\pi i}\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{2}m}\times\right.$$
$$\left.\times F\left(-n,\ n+1;\ 1+m;\ \frac{1-\mu}{2}\right)-\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m}F\left(-n,\ n+1;\ 1+m;\frac{1+\mu}{2}\right)\right\}.$$

Нам остается только найти выражение в окрестности точки -1 для

$$\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{2}m}F\left(-n,\ n+1;\ 1+m;\ \frac{1-\mu}{2}\right);$$

[1]) Arkiv för Math., 13, № 17 (1918), 7.

оно имеет вид

$$A_1\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-n,\ n+1;\ 1+m;\ \frac{1+\mu}{2}\right)+$$
$$+B_1\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1+\mu}{2}\right).$$

Постоянные A_1, B_1 можно определить так же, как и в п. 141; таким образом, мы получаем для $Q_n^m(\mu)$ выражение в виде линейной комбинации функций

$$\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-n,\ n+1;\ 1+m;\ \frac{1+\mu}{2}\right)$$

и

$$\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1-\mu}{2}\right).$$

Мы не будем, для краткости, проводить вычисление постоянных A_1 и B_1; не будем также рассматривать случаев целого положительного m и целого положительного $n+m$.

В окрестности точки $\mu=1$ функция $P_n^m(\mu)$ определяется формулой (11). Значение $Q_n^m(\mu)$ в этой же окрестности можно получить, найдя использованным в п. 141 способом выражение для

$$\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-n,\ n+1;\ 1+m;\ \frac{1+\mu}{2}\right)$$

в этой окрестности.

§ 15. ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ $P_n^m(\mu)$ И $Q_n^m(\mu)$ ПРИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ μ, ПО МОДУЛЮ МЕНЬШИХ 1

144. Мы определили $P_n^m(\mu)$ и $Q_n^m(\mu)$ как функции от μ, однозначные во всей плоскости с разрезом, идущим вдоль действительной оси от 1 до $-\infty$; в бесконечно близких друг к другу точках, лежащих по разные стороны разреза, каждая из функций $P_n^m(\mu)$, $Q_n^m(\mu)$ имеет, вообще говоря, различные значения.

Мы рассмотрим сперва значения $P_n^m(\mu+i\cdot 0)$ и $P_n^m(\mu-i\cdot 0)$ на противоположных сторонах разреза при действительных значениях μ, лежащих между -1 и 1.

Воспользовавшись формулой (11) и применяя теорему Абеля, согласно которой, если гипергеометрический ряд сходится в точке μ, то его сумма непрерывно переходит в суммы рядов, соответствующих значениям аргумента по обе стороны разреза, получаем:

$$P_n^m(\mu+i\cdot 0)=\frac{1}{\Pi(-m)}e^{-\frac{1}{2}m\pi i}\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1-\mu}{2}\right),$$
$$P_n^m(\mu-i\cdot 0)=\frac{1}{\Pi(-m)}e^{\frac{1}{2}m\pi i}\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1-\mu}{2}\right).$$

Отсюда получаем соотн шение

$$e^{\frac{1}{2}m\pi i}P_n^m(\mu+i\cdot 0)=e^{-\frac{1}{2}m\pi i}P_n^m(\mu-i\cdot 0)=$$
$$=\frac{1}{\Pi(-m)}\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1-\mu}{2}\right). \quad (54)$$

Для действительных значений μ, лежащих между -1 и 1, функцию $P_n^m(\mu)$ удобно определить так, чтобы ее значения были действительны при действительных m и n. Для этого мы при указанных значениях μ положим

$$P_n^m(\mu) = e^{\frac{1}{2}m\pi i} P_n^m(\mu + i\cdot 0) = e^{-\frac{1}{2}m\pi i} P_n^m(\mu - i\cdot 0) =$$
$$= \frac{1}{\Pi(-m)}\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1-\mu}{2}\right). \quad (55)$$

Так определенная функция $P_n^m(\mu)$ при действительных значениях μ удовлетворяет уравнению (2).

Из (47) получаем в этом случае

$$P_n^m(\mu) = 2^m \cos\frac{n+m}{2}\pi \frac{\Pi\left(\frac{n+m-1}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{n-m}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m} \times$$
$$\times F\left(\frac{m+n+1}{2},\ \frac{m-n}{2};\ \frac{1}{2};\ \mu^2\right) +$$
$$+ 2^{m+1}\sin\frac{n+m}{2}\pi \frac{\Pi\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{n-m-1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}\mu(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m} \times$$
$$\times F\left(\frac{m+n+2}{2},\ \frac{m-n+1}{2};\ \frac{3}{2};\ \mu^2\right),$$

где $(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m}$ означает $e^{\frac{1}{2}m\ln(1-\mu^2)}$ и для $\ln(1-\mu^2)$ берется действительное значение.

Из (55) видно, что если m четное число, в частности нуль, то рассматриваемая функция принимает на противоположных сторонах разреза одинаковые значения, так что в данном случае, поскольку это относится к функции $P_n^m(\mu)$, необходим разрез лишь от -1 до $-\infty$.

145. Рассмотрим теперь при μ, лежащих между -1 и 1, значения функций $Q_n^m(\mu)$ на противоположных сторонах разреза. Из (24) получаем

$$Q_n^m(\mu + i\cdot 0) =$$
$$= \frac{\pi e^{m\pi i}}{2\sin(n+m)\pi}\,\frac{1}{\Pi(-m)}\left\{e^{-\left(n+\frac{1}{2}m\right)\pi i}\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1-\mu}{2}\right) -\right.$$
$$\left. - e^{\frac{1}{2}m\pi i}\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1+\mu}{2}\right)\right\}$$

и

$$Q_n^m(\mu - i\cdot 0) =$$
$$= \frac{\pi e^{m\pi i}}{2\sin(n+m)\pi}\,\frac{1}{\Pi(-m)}\left\{e^{\left(n+\frac{1}{2}m\right)\pi i}\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1-\mu}{2}\right) -\right.$$
$$\left. - e^{-\frac{1}{2}m\pi i}\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1+\mu}{2}\right)\right\}.$$

Из этих равенств находим, что

$$e^{-\frac{1}{2}m\pi i} Q_n^m(\mu + i\cdot 0) - e^{\frac{1}{2}m\pi i} Q_n^m(\mu - i\cdot 0) =$$
$$= \frac{\pi e^{m\pi i}}{2\sin(n+m)\pi}\,\frac{1}{\Pi(-m)}\left\{e^{-(n+m)\pi i} - e^{(n+m)\pi i}\right\} \times$$
$$\times \left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1-\mu}{2}\right)$$

и, следовательно,

$$e^{-\frac{1}{2}m\pi i} Q_n^m(\mu + i\cdot 0) - e^{\frac{1}{2}m\pi i} Q_n^m(\mu - i\cdot 0) = -i\pi e^{m\pi i} P_n^m(\mu), \tag{56}$$

где $P_n^m(\mu)$ определяется формулой (54).

Для действительных значений μ, лежащих между -1 и 1, функцию $Q_n^m(\mu)$ удобно определить с помощью следующего соотношения:

$$e^{m\pi i} Q_n^m(\mu) = \frac{1}{2}\{e^{-\frac{1}{2}m\pi i} Q_n^m(\mu + i\cdot 0) + e^{\frac{1}{2}m\pi i} Q_n^m(\mu - i\cdot 0)\}. \tag{57}$$

Ясно, что при действительных μ так определенная функция $Q_n^m(\mu)$ удовлетворяет уравнению (2).

Отсюда вытекает, что

$$e^{\mp\frac{1}{2}m\pi i} Q_n^m(\mu \pm i\cdot 0) = e^{m\pi i}\left\{Q_n^m(\cos\theta) \mp \frac{1}{2} i\pi P_n^m(\cos\theta)\right\}$$

и, следовательно,

$$Q_n^m(\mu) = \frac{\pi}{2\sin(n+m)} \frac{1}{\Pi(-m)} \left\{\cos(n+m)\pi \left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{1}{2}m} \times \right.$$

$$\left. \times F\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1+\mu}{2}\right) - \left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-n, n+1; 1-m; \frac{1+\mu}{2}\right)\right\}. \tag{58}$$

Таким образом, из (45) и (46) получаем

$$Q_n^m(\mu) = -2^{m-1}\sin\frac{m+n}{2}\pi \frac{\Pi\left(\frac{n+m-1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{n-m}{2}\right)} (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m} \times$$

$$\times F\left(\frac{n+m+1}{2},\ \frac{m-n}{2};\ \frac{1}{2};\ \mu^2\right) +$$

$$+ 2^m \cos\frac{m+n}{2}\pi \frac{\Pi\left(\frac{n+m}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{n-m-1}{2}\right)} (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m} \times$$

$$\times \mu F\left(\frac{m-n+1}{2},\ \frac{m+n+2}{2};\ \frac{3}{2};\ \mu^2\right). \tag{59}$$

В случае $m=0$ формула (57) совпадает с тем определением функции $Q_n(\mu)$, которое для действительных μ, заключенных между -1 и 1, дал Гейне. Возражения Шлефли против такого определения функции $Q_n(\mu)$ основывались на том, что эта функция не удовлетворяет уравнению Лежандра. Однако это возражение нам кажется несущественным. Это лишь вопрос удобства — определить функцию $Q_n(\mu)$ так, чтобы она принимала действительные значения вдоль действительной оси при действительных n и чтобы удовлетворяла уравнению Лежандра при действительных μ. Далее, следует иметь в виду, что хотя мы проводим разрез вдоль действительной оси, мы могли бы провести его вдоль любой линии, соединяющей точки -1 и 1, так что функцию $Q_n(\mu)$ можно рассматривать как удовлетворяющую уравнению Лежандра для всех μ, лежащих на (или вблизи) действительной оси. Риманова поверхность такой функции отлична от той, которую мы постулировали заранее, и сама эта функция представляет собой линейную комбинацию двух независимых решений уравнений Лежандра, определенных и использованных нами выше.

146. Для μ, близких к той части действительной оси, которая лежит между -1 и $-\infty$, из формулы (19) получаем

$$Q_n^m(\mu+i\cdot 0)=\frac{e^{m\pi i}}{2^{n+1}}\,\frac{\Pi(n+m)\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\,(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\,e^{-(n+1)\pi i}\,\frac{1}{(-\mu)^{n+m+1}}\times$$
$$\times F\left(\frac{n+m+2}{2},\ \frac{n+m+1}{2};\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{\mu^2}\right);$$

для $Q_n^m(\mu-i\cdot 0)$ получается аналогичное выражение с множителем $e^{(n+1)\pi i}$ вместо $e^{-(n+1)\pi i}$. Здесь $(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}$ означает $e^{\frac{1}{2}m\log(\mu^2-1)}$, причем логарифм считается действительным. Отсюда получаем

$$e^{n\pi i}\,Q_n^m(\mu+i\cdot 0)=e^{-n\pi i}\,Q_n^m(\mu-i\cdot 0), \tag{60}$$

и для μ, лежащих между -1 и 1, мы можем принять за $Q_n^m(\mu)$ любое из двух выражений, входящих в (60) и отличающихся друг от друга знаками; таким образом,

$$Q_n^m(\mu)=\frac{e^{m\pi i}}{2^{n+1}}\,\frac{\Pi(n+m)\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\,(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\,\frac{1}{(-\mu)^{n+m+1}}\times$$
$$\times F\left(\frac{n+m+2}{2},\ \frac{n+m+1}{2};\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{\mu^2}\right),$$

где $(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}$ имеет указанное выше значение.

Если в формуле (33) вместо μ написать $\mu+i\cdot 0$ и затем воспользоваться формулами (55) и (57), то получим, что при действительных μ, лежащих между -1 и 1,

$$P_n^{-m}(\mu)\,e^{\frac{1}{2}m\pi i}=\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}\left\{P_n^m(\mu)\cdot e^{-\frac{1}{2}m\pi i}-\right.$$
$$\left.-\frac{2}{\pi}\,e^{-m\pi i}\sin m\pi\left[Q_n^m(\mu)-\frac{i\pi}{2}\,P_n(\mu)\right]e^{\frac{3}{2}m\pi i}\right\};$$

эта формула может быть приведена к следующему виду:

$$P_n^{-m}(\mu)=\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}\left\{P_n^m(\mu)\cos m\pi-\frac{2}{\pi}\sin m\pi\,Q_n^m(\mu)\right\},$$

откуда

$$Q_n^m(\mu)=\frac{\pi}{2\sin m\pi}\left\{P_n^m(\mu)\cos m\pi-\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)}\,P_n^{-m}(\mu)\right\}, \tag{61}$$

где μ действительно и заключено между -1 и 1.

§ 16. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ $P_n^m(-\cos\theta)$, $Q_n^m(-\cos\theta)$, $P_n^m(\cos\theta)$, $Q_n^m(\cos\theta)$

147. Если $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, то из формулы (34) имеем

$$P_n^m(-\cos\theta-i\cdot 0)=$$
$$=e^{-n\pi i}\,P_n^m(\cos\theta+i\cdot 0)-\frac{2\sin(n+m)\pi}{\pi}\,e^{-m\pi i}\,Q_n^m(\cos\theta+i\cdot 0);$$

откуда

$$e^{\frac{1}{2}m\pi i}P_n^m(-\cos\theta)=e^{-n\pi i}\cdot e^{-\frac{1}{2}m\pi i}P_n^m(\cos\theta)-$$
$$-e^{-m\pi i}\frac{2\sin(n+m)\pi}{\pi}e^{\frac{3}{2}m\pi i}\left\{Q_n^m(\cos\theta)-\frac{1}{2}i\pi P_n^m(\cos\theta)\right\},$$

т. е.

$$P_n^m(-\cos\theta)=P_n^m(\cos\theta)\{e^{-(n+m)\pi i}+i\sin(n+m)\pi\}-$$
$$-\frac{2\sin(n+m)\pi}{\pi}Q_n^m(\cos\theta);$$

таким образом,

$$P_n^m(-\cos\theta)=P_n^m(\cos\theta)\cos(n+m)\pi-\frac{2}{\pi}Q_n^m(\cos\theta)\sin(n+m)\pi. \tag{62}$$

При $0<\theta<\frac{1}{2}\pi$ из формулы (36) имеем также

$$Q_n^m(-\cos\theta-i\cdot 0)=-e^{n\pi i}Q_n^m(\cos\theta+i\cdot 0),$$

откуда

$$e^{\frac{1}{2}m\pi i}\left\{Q_n^m(-\cos\theta)+\frac{1}{2}i\pi P_n^m(-\cos\theta)\right\}=$$
$$=-e^{n\pi i}\cdot e^{\frac{3}{2}m\pi i}\left\{Q_n^m(\cos\theta)-\frac{1}{2}i\pi P_n^m(\cos\theta)\right\};$$

отсюда с помощью формулы (62) получаем

$$Q_n^m(-\cos\theta)=-Q_n^m(\cos\theta)\cos(n+m)\pi+\frac{\pi}{2}\sin(n+m)\pi\cdot P_n^m(\cos\theta). \tag{63}$$

Если $n+m$ целое, то имеем

$$P_n^m(-\cos\theta)=(-1)^{n+m}P_n^m(\cos\theta),\quad Q_n^m(-\cos\theta)=(-1)^{n+m+1}Q_n^m(\cos\theta).$$

Из формулы (31) следует, что

$$Q_{-n-1}(\mu)=Q_n^m(\mu)\frac{\sin(n+m)\pi}{\sin(n-m)\pi}-\frac{\pi\cos n\pi}{\sin(n-m)\pi}e^{m\pi i}P_n^m(\mu).$$

Подставим в это равенство вместо μ сперва $\cos\theta+i\cdot 0$, а потом $\cos\theta-i\cdot 0$, затем умножим полученные равенства на $e^{-\frac{1}{2}m\pi i}$ и $e^{\frac{1}{2}m\pi i}$ соответственно, сложим их и разделим пополам; получим

$$Q_{-n-1}(\cos\theta)=\frac{\sin(n+m)\pi}{\sin(n-m)\pi}Q_n^m(\cos\theta)-\frac{\pi\cos n\pi\cos m\pi}{\sin(n-m)\pi}P_n^m(\cos\theta). \tag{64}$$

§ 17. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ $P_n^m(\mu)$ И $Q_n^m(\mu)$

148. Из полученного в п. 144 выражения для $P_n^m(\mu)$, где $\mu=\cos\theta$, находим

$$P_n^m(0)=2^m\cos\frac{n+m}{2}\pi\,\frac{\Pi\left(\frac{n+m-1}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{n-m}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

и

$$\frac{d}{d\mu}P_n^m(0)=2^{m+1}\sin\frac{n+m}{2}\pi\,\frac{\Pi\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{n-m-1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)},$$

где $\frac{d}{d\mu}P_n^m(0)$ — значение $\frac{d}{d\mu}P_n^m(\mu)$ при $\mu=0$. Из (59) находим

$$Q_n^m(0)=-2^{m-1}\sin\frac{n+m}{2}\pi\,\frac{\Pi\left(\frac{n+m-1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{n-m}{2}\right)}$$

и

$$\frac{d}{d\mu}Q_n^m(0)=2^m\cos\frac{n+m}{2}\pi\,\frac{\Pi\left(\frac{n+m}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{n-m-1}{2}\right)}.$$

Из этих равенств следует, что значение

$$P_n^m(\mu)\frac{d}{d\mu}Q_n^m(\mu)-Q_n^m(\mu)\frac{d}{d\mu}P_n^m(\mu)$$

при $\mu=0$ равно

$$2^{2m}\frac{\Pi\left(\frac{n+m-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{n-m-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{n-m}{2}\right)};$$

при $m=0$ это выражение обращается в 1.

Так как функции $P_n^m(\mu)$ и $Q_n^m(\mu)$ обе удовлетворяют уравнению (1), то мы имеем

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\left\{P_n^m(\mu)\frac{dQ_n^m(\mu)}{d\mu}-Q_n^m(\mu)\frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu}\right\}\right]=0.$$

Следовательно,

$$(1-\mu^2)\left\{P_n^m(\mu)\frac{dQ_n^m(\mu)}{d\mu}-Q_n^m(\mu)\frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu}\right\}=2^{2m}\frac{\Pi\left(\frac{n+m-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{n-m-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{n-m}{2}\right)},\qquad(65)$$

где $\mu=\cos\theta$, а n и m произвольны.

В случае $m=0$ формула (65) принимает вид

$$(1-\mu^2)\{P_n(\mu)Q_n'(\mu)-P_n'(\mu)Q_n(\mu)\}=1,\qquad(66)$$

где n — любое.

§ 18. РАЗЛОЖЕНИЯ $P_n^m(\mu)$ И $Q_n^m(\mu)$ ПО СТЕПЕНЯМ $\mu-\sqrt{\mu^2-1}$

149. Возвращаясь к P-функции (7), удовлетворяющей дифференциальному уравнению (2), мы видим, что с помощью гомографического преобразования ее аргумент приводится к виду $\mu-\sqrt{\mu^2-1}$. Положим $\xi=(\mu-\sqrt{\mu^2-1})^2$. Получаем, что уравнению (2) удовлетворяет гипергеометрическая функция, в которой четвертым аргументом является ξ. Если в уравнении (2) принять ξ за независимую переменную, то оно примет вид

$$\xi^2(1-\xi)\frac{d^2u}{d\xi^2}+\xi\left[\frac{1}{2}-m-\left(m+\frac{3}{2}\right)\xi\right]\frac{du}{d\xi}-$$
$$-\frac{1}{4}(n-m)(n+m+1)(1-\xi)u=0.$$

Пусть $u=\xi^{\frac{1}{2}(m+n+1)}v$, тогда для v получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2v}{d\xi^2}+\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)-\left(n+2m+\frac{5}{2}\right)\xi\right]\frac{dv}{d\xi}-(n+m+1)\left(m+\frac{1}{2}\right)v=0,$$

которому удовлетворяет функция $F(\alpha, \beta; \gamma; \xi)$ при $\alpha = n+m+1$, $\beta = m+\frac{1}{2}$, $\gamma = n+\frac{3}{2}$. Таким образом, уравнению (2) удовлетворяют функции

$$u_1 = z^{-(n+m+1)} (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} F\left(\frac{1}{2}+m,\ n+m+1;\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{z^2}\right)$$

и

$$u_2 = z^{n-m} (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} F\left(\frac{1}{2}+m,\ m-n;\ \frac{1}{2}-n;\ \frac{1}{z^2}\right),$$

где $z = \mu+\sqrt{\mu^2-1}$.

Предположим, что значения $\sqrt{\mu^2-1}$ выбираются так же, как это делалось выше, так что ξ и z имеют определенные значения в каждой точке комплексной μ-плоскости, не принадлежащей разрезу.

Заметим, что $|z|>1$ во всей плоскости вне разреза, и $\operatorname{Re}\sqrt{\mu^2-1}$ имеет тот же знак, что и μ; на мнимой оси z принимает чисто мнимые значения.

Чтобы выразить u_1, u_2 через $P_n^m(\mu)$, $Q_n^m(\mu)$, достаточно сравнить эти решения при больших значениях $|\mu|$ с выражениями (19) и (37). Эти последние формулы показывают, что для таких значений μ главные члены функций $Q_n^m(\mu)$ и $P_n^m(\mu)$ имеют вид

$$\frac{e^{m\pi i}}{2^{n+1}} \frac{\Pi(n+m)\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)} (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} \mu^{-n-m-1}$$

и

$$\frac{\sin(n+m)\pi}{2^{n+1}\cos n\pi} \frac{\Pi(n+m)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)} (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} \mu^{-n-m-1} +$$
$$+ 2^n \frac{\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\Pi(n-m)\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)} (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} \mu^{n-m}.$$

Так как u_1 и u_2 должны выражаться через $P_n^m(\mu)$ и $Q_n^m(\mu)$ линейно, то отсюда следует, что при $|z|>1$

$$Q_n^m(\mu) = 2^m e^{m\pi i} \frac{\Pi(n+m)\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)} (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} z^{-n-m-1} \times$$
$$\times F\left(\frac{1}{2}+m, n+m+1; n+\frac{3}{2}; \frac{1}{z^2}\right), \qquad (67)$$

$$P_n^m(\mu) = 2^m \frac{\sin(n+m)\pi}{\cos n\pi} \frac{\Pi(n+m)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)} (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} z^{-n-m-1} \times$$
$$\times F\left(\frac{1}{2}+m,\ n+m+1;\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{z^2}\right) +$$
$$+ 2^m \frac{\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\Pi(n-m)\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)} (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} z^{n-m} F\left(\frac{1}{2}+m,\ m-n;\ \frac{1}{2}-n;\ \frac{1}{z^2}\right). \qquad (68)$$

Ряды по степеням $(\mu+\sqrt{\mu^2-1})^2$ в формулах (67) и (68) сходятся во всей плоскости, за исключением точек разреза. В частности, при $m=0$ получаем

$$Q_n(\mu)=\frac{\Pi(n)\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}z^{-n-1}F\left(\frac{1}{2},\ n+1;\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{z^2}\right), \tag{69}$$

$$P_n(\mu)=\operatorname{tg} n\pi\frac{\Pi(n)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}z^{-n-1}F\left(\frac{1}{2},\ n+1;\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{z^2}\right)+$$
$$+\frac{\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\Pi(n)\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}z^nF\left(\frac{1}{2},\ -n;\ \frac{1}{2}-n;\ \frac{1}{z^2}\right). \tag{70}$$

Частные случаи формул (67) и (68), соответствующие целым положительным значениям n, были получены Гейне[1]); в этом случае из-за наличия множителя $\operatorname{tg} n\pi$ первый из рядов, входящих в правую часть формулы (70), обращается в нуль. При полуцелом n формулы (68) и (70) должны быть несколько видоизменены.

150. Рассмотрим $Q_n^m(\mu)$ при значениях $\mu=\cos\theta$, принадлежащих разрезу; числа m и n предполагаются действительными, так что ряд

$$F\left(\frac{1}{2},\ n+1;\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{z^2}\right)$$

сходится при $z=e^{\pm i\theta}$, если только θ не принимает значений 0 и π.

Мы видим, что $\mu+\sqrt{\mu^2-1}=e^{i\theta}$ при $\mu=\cos\theta+i\cdot 0$ и $\mu+\sqrt{\mu^2-1}=e^{-i\theta}$ при $\mu=\cos\theta-i\cdot 0$.

Таким образом, используя теорему Абеля, мы получаем, что

$$Q_n^m(\cos\theta\pm i\cdot 0)=2^m\cdot e^{m\pi i}\frac{\Pi(n+m)\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}e^{\pm\frac{1}{2}m\pi i}\sin^m\theta\times$$
$$\times e^{\mp(m+n+1)i\theta}F\left(\frac{1}{2},\ m;\ n+m+1;\ e^{\mp 2i\theta}\right).$$

Воспользовавшись определением (57) функции $Q_n^m(\cos\theta)$, находим, что

$$Q_n^m(\cos\theta)=2^m\frac{\Pi(n+m)\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\sin^m\theta\left[\cos(m+n+1)\theta+\right.$$
$$+\frac{\left(\frac{1}{2}+m\right)(n+m+1)}{1\left(n+\frac{3}{2}\right)}\cos(m+n+3)\theta+$$
$$\left.+\frac{\left(\frac{1}{2}+m\right)\left(\frac{3}{2}+m\right)(n+m+1)(n+m+2)}{1\cdot 2\left(n+\frac{3}{2}\right)\left(n+\frac{5}{2}\right)}\cos(m+n+5)\theta+\ldots\right], \tag{71}$$

где $0<\theta<\pi$, а m и n действительны.

---

[1]) Kugelfunktionen, т. I, стр. 129.

В случае $m=0$ получаем для $Q_n(\cos\theta)$ следующее выражение, которое для целых n было найдено Гейне[1]):

$$Q_n(\cos\theta)=\frac{\Pi(n)\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left[\cos(n+1)\theta+\frac{1\,(n+1)}{1\,(2n+3)}\cos(n+3)\theta+\right.$$

$$\left.+\frac{1\cdot3\,(n+1)(n+2)}{1\cdot2\,(2n+3)(2n+5)}\cos(n+5)\theta+\ldots\right]. \quad (72)$$

151. В указанной в п. 140 формуле, дающей выражение $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$ с помощью гипергеометрического ряда, в котором четвертым аргументом служит $1-x$, положим $x=1-\frac{1}{z^2}$, $\alpha=\frac{1}{2}-m$, $\beta=-n-m$, $\gamma=1-2m$; после незначительных преобразований получим

$$F\left(\frac{1}{2}-m,\ -n-m;\ 1-2m;\ 1-\frac{1}{z^2}\right)=$$

$$+2^{-2m}\frac{\Pi(-m)}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}\left[\frac{\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\Pi(n-m)}F\left(\frac{1}{2}-m,\ -n-m;\ \frac{1}{2}-n;\ \frac{1}{z^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\Pi(n+m)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\,\frac{\sin(m+n)\pi}{\cos n\pi}\,z^{-1-2n}F\left(\frac{1}{2}-m,\ n-m+1;\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{z^2}\right)\right],$$

причем $\left|1-\frac{1}{z^2}\right|<1$, $\left|\frac{1}{z^2}\right|<1$, а $\left|\arg\frac{1}{z^2}\right|<\pi$, т. е. $\left|\arg\frac{1}{z}\right|<\frac{\pi}{2}$, или, что то же самое, $\operatorname{Re}(\mu)>0$. Если умножить обе части полученного равенства на $\frac{2^m}{\Pi(-m)}(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m}z^{n+m}$, то в правой части получится выражение, совпадающее с правой частью формулы (68). Отсюда получаем, что

$$P_n^m(\mu)=\frac{2^m}{\Pi(-m)}(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m}z^{n+m}F\left(\frac{1}{2}-m,\ -n-m;\ 1-2m;\ 1-\frac{1}{z^2}\right), \quad (73)$$

если только $\operatorname{Re}(\mu)>0$. Так как $P_n^m(\mu)=P_{-n-1}^m(\mu)$, то одновременно получаем, что

$$P_n^m(\mu)=\frac{2^m}{\Pi(-m)}(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m}z^{m-n-1}F\left(\frac{1}{2}-m,\ n-m+1;\ 1-2m;\ 1-\frac{1}{z^2}\right), \quad (74)$$

где $\operatorname{Re}(\mu)>0$ и $\left|1-\frac{1}{z^2}\right|<1$.

Воспользовавшись формулой (33), выражающей $Q_n^m(\mu)$ через $P_n^m(\mu)$ и $P_n^{-m}(\mu)$, мы можем записать $Q_n^m(\mu)$ с помощью двух гипергеометрических рядов, в каждом из которых четвертым аргументом служит $1-\frac{1}{z^2}$.

§ 19. ДРУГОЙ КЛАСС ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ДЛЯ $P_n^m(\mu)$ И $Q_n^m(\mu)$

152. Используя интегральные выражения, удовлетворяющие гипергеометрическому уравнению, в котором независимым переменным является $\xi=\frac{1}{z^2}$, мы видим, что выражения

$$(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}z^{-n-m-1}\int u^{n+m}(1-u)^{-\frac{1}{2}-m}\left(1-\frac{u}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}-m}du, \quad (А)$$

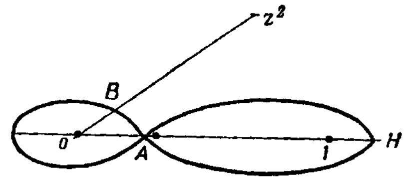
$$(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}z^{-n-m-1}\int u^{m-\frac{1}{2}}(1-u)^{n-m}\left(1-\frac{u}{z^2}\right)^{-n-m-1}du, \quad (Б)$$

[1]) Kugelfunktionen, т. I, стр. 130.

где интегралы берутся по замкнутым контурам, таким, что после обхода вокруг всего контура подинтегральное выражение возвращается к своему начальному значению, удовлетворяют дифференциальному уравнению (2).

В выражениях (А) и (Б) можно заменить n на $-n-1$ и m на $-m$; мы получим таким образом восемь различных выражений, удовлетворяющих дифференциальному уравнению (2). Так как в каждом случае можно взять два независимых пути интегрирования, то окончательно мы получаем шестнадцать интегральных выражений, каждое из которых удовлетворяет дифференциальному уравнению (2). Выразим эти интегралы через функции $P_n^m(\mu)$ и $Q_n^m(\mu)$. Если $\operatorname{Re}(\mu)>0$, то и $\operatorname{Re}(z)>0$, и, следовательно, $-\pi<\arg(z^2)<\pi$.

Предполагая, что $|z|<1$, рассмотрим выражение (А), считая, что за путь интегрирования взят контур, обходящий сперва в положительном направлении точку 1, затем в положительном направлении точку O, потом точку 1 в отрицательном направлении и, наконец, точку O в отрицательном направлении. Если каждая из петель этого контура расположена так, как это указано на черт. 14, то мы предположим, что начальные значения $\arg u$ и $\arg(1-u)$ в точке A суть нули. Если мы предположим, что в точке H $\arg(u-1)=0$, то получим, что $u-1=e^{-\pi i}(1-u)$, и начальное значение $\arg(u-1)$ в точке A равно $-\pi$. Предположим также, что в точке B $\arg\left(1-\frac{u}{z^2}\right)=0$, тогда вдоль всего контура $\arg\left(1-\frac{u}{z^2}\right)$ заключен между $-\pi$ и π. Если $\arg(u-z^2)$ возрастает, то возрастает и $\arg\left(1-\frac{u}{z^2}\right)$.



Черт. 14.

Путь интегрирования выбирается так, что всюду $\left|\frac{u}{z^2}\right|<1$, и, следовательно, разложение $\left(1-\frac{u}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}-m}$ по степеням $\frac{u}{z^2}$ равномерно сходится к соответствующей функции для всех значений u, принадлежащих пути интегрирования. Получаем

$$\frac{(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}}{z^{n+m+1}}\int^{(1+,\,0+,\,1-,\,0-)} u^{n+m}(1-u)^{-\frac{1}{2}-m}\left(1-\frac{u}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}-m}du=$$

$$=\frac{(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}}{z^{n+m+1}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Pi\left(m+r-\frac{1}{2}\right)}{\Pi(r)\,\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\frac{1}{z^{2r}}\int^{(1+,\,0+,\,1-,\,0-)} u^{n+m+r}(1-u)^{-m-\frac{1}{2}}du.$$

Далее,

$$\int^{(1+,0+,\,1-,\,0-)} u^{n+m+r}(1-u)^{-m-\frac{1}{2}}du=e^{\left(n+r+\frac{3}{2}\right)\pi i}\cdot\epsilon\left(n+m+r+1,\,-m+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=e^{\left(n+\frac{3}{2}\right)\pi i}\frac{(n+m+1)\ldots(n+m+r)}{\left(n+\frac{3}{2}\right)\ldots\left(n+r+\frac{1}{2}\right)}4\pi\sin(n+m)\pi\,\frac{\Pi(n+m)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)};$$

таким образом, имеем

$$\frac{(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}}{z^{n+m+1}}\int\limits^{(1+,\,0+,\,1-,\,0-)} u^{n+m}(1-u)^{-\frac{1}{2}-m}\left(1-\frac{u}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}-m}du =$$

$$= -ie^{n\pi i}\cdot 4\pi\sin(n+m)\pi\frac{\Pi(n+m)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\frac{(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}}{z^{n+m+1}}\times$$

$$\times F\left(n+m+1,\, m+\frac{1}{2};\; n+\frac{3}{2};\; \frac{1}{z^2}\right).$$

Сравнивая этот результат с формулой (67), получаем

$$Q_n^m(\mu) = ie^{(m-n)\pi i}\,2^m\frac{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}}{4\pi\sin(n+m)\pi\, z^{n+m+1}}\times$$

$$\times\int\limits^{(1+,\,0+,\,1-,\,0-)} u^{n+m}(1-u)^{-\frac{1}{2}-m}\left(1-\frac{u}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}-m}du. \qquad (75)$$

Соотношение (36), связывающее $Q_n^m(\mu)$ и $Q_n^m(-\mu)$, можно проверить с помощью формулы (75). Действительно, если μ заменить на $-\mu$, т. е. на $\mu e^{\mp\pi i}$, где знак зависит от знака $\operatorname{Im}(\mu)$, то z заменяется на $ze^{\mp\pi i}$ и $(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}$ на $(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}e^{\mp m\pi i}$. Соответственно получаем

$$Q_n^m(-\mu) = e^{\pm(n+1)\pi i}Q_n^m(\mu),$$

т. е. формулу (36).

153. Если в (75) положить $u = hz$, где h — новая независимая переменная, то получим

$$Q_n^m(\mu) = ie^{(m-n)\pi i}\,2^m\frac{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{4\pi\sin(n+m)\pi}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\times$$

$$\times\int\limits^{\left(\frac{1}{z}+,\,0+,\,\frac{1}{z}-,\,0-\right)}\frac{h^{n+m}}{(1-2\mu h+h^2)^{m+\frac{1}{2}}}dh, \qquad (76)$$

где точка z лежит вне контура интегрирования.

В частности, при $m=0$ получаем

$$Q_n(\mu) = \frac{ie^{-n\pi i}}{4\sin n\pi}\int\limits^{\left(\frac{1}{z}+,\,0+,\,\frac{1}{z}-,\,0-\right)}\frac{h^n}{(1-2\mu h+h^2)^{\frac{1}{2}}}dh. \qquad (77)$$

С помощью (21) мы получаем из (76) следующую формулу:

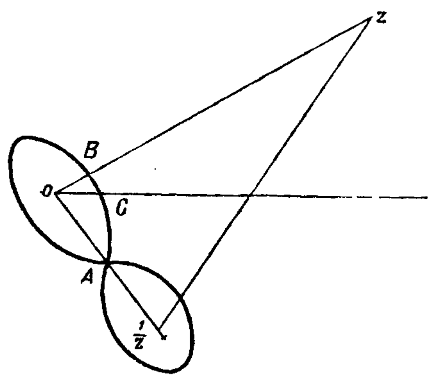
$$Q_n^m(\mu) = ie^{(m-n)\pi i}\,2^{-m}\frac{\Pi\left(-m-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi(n+m)}{4\pi\sin(n-m)\pi\,\Pi(n-m)}(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m}\times$$

$$\times\int\limits^{\left(\frac{1}{z}+,\,0+,\,\frac{1}{z}-,\,0-\right)}\frac{h^{n-m}}{(1-2\mu h+h^2)^{\frac{1}{2}-m}}dh. \qquad (78)$$

Заметим, что в формулах (76), (77), (78), в которых

$$1-2\mu h+h^2=(1-hz)\left(1-\frac{h}{z}\right),$$

аргументы подинтегральных выражений выбираются следующим образом. Построим в плоскости h фигуру (черт. 15), соответствующую изображенной на черт. 14 фигуре в плоскости u. Точки z, $\frac{1}{z}$ отвечают точкам z^2, 1 соответственно. Начальное значение $\arg h$ в точке A, т. е. в точке, лежащей на отрезке, соединяющем $\frac{1}{z}$ и O, равно начальному значению $\arg\frac{1}{z}$ в этой же точке, т. е. $-\theta$, следовательно, в точке C $\arg h=0$. В произведении $1-2\mu h+h^2$ начальное значение $\arg(1-hz)$ в точке A равно нулю, а начальное значение $\arg\left(1-\frac{h}{z}\right)$ равно нулю в точке B и, следовательно, начальное значение $\arg\left(1-\frac{h}{z}\right)$ в точке A равно углу zOA. Таким образом, в точке A начальное значение $\arg(1-2\mu h+h^2)$ равно углу zOA. Полезно отметить, что когда точка A удаляется в бесконечность, двигаясь параллельно действительной оси, то $\arg(1-2\mu h+h^2)$ меняется от zOA до нуля. Поэтому $\arg(1-2\mu h+h^2)$ удобно определить следующим образом: он стремится к нулю, когда $h-z$ и $h-\frac{1}{z}$ стремятся к действительным положительным значениям. Таким образом, следует считать, что в тех точках, где $h-z$ и $h-\frac{1}{z}$ принимают действительные положительные значения, их аргументы равны нулю.



Черт. 15.

154. Если $\operatorname{Re}(n+m+1)>0$ и $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}-m\right)>0$, то интеграл, входящий в формулу (76), можно привести к следующему виду:

$$\left(1-e^{(n+m)2\pi i}\right)\left(1-e^{-\left(m+\frac{1}{2}\right)2\pi i}\right)(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int_0^{\frac{1}{z}}\frac{h^{n+m}}{(1-2\mu h+h^2)^{m+\frac{1}{2}}}\,dh.$$

Таким образом,

$$Q_n^m(\mu)=2^m e^{m\pi i}\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\cos m\pi}{\pi}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int_0^{\frac{1}{z}}\frac{h^{n+m}}{(1-2\mu h+h^2)^{m+\frac{1}{2}}}\,dh, \tag{79}$$

$$Q_n(\mu)=\int_0^{\frac{1}{z}}\frac{h^n}{(1-2\mu h+h^2)^{\frac{1}{2}}}\,dh, \tag{80}$$

где $\operatorname{Re}(n+m+1)>0$ и $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}-m\right)>0$.

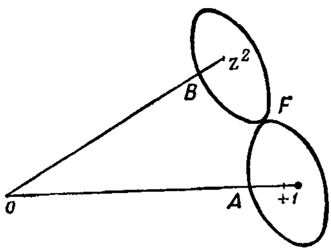
Заменив в формулах (79), (80) h на $\frac{1}{h}$, получим

$$Q_n^m(\mu) = 2^m e^{m\pi i} \Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\cos m\pi}{\pi}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int\limits_z^\infty \frac{h^{m-n-1}}{(1-2\mu h+h^2)^{m+\frac{1}{2}}}\,dh, \tag{81}$$

где $\operatorname{Re}(n+m+1)>0$, $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}-m\right)>0$, и

$$Q_n(\mu) = \int\limits_z^\infty \frac{h^{-n-1}}{(1-2\mu h+h^2)^{\frac{1}{2}}}\,dh, \tag{82}$$

где $\operatorname{Re}(n+1)>0$; $\arg(1-2\mu h+h^2)$ стремится к нулю, когда h движется от точки на отрезке, соединяющем O и $\frac{1}{z}$, к ∞ параллельно положительному направлению действительной оси h.



Черт. 16.

155. Рассмотрим теперь выражение

$$(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} z^{-m-n-1}\int\limits^{(1+,\,z^2-)} u^{n+m} \times$$
$$\times (1-u)^{-\frac{1}{2}-m}\left(1-\frac{u}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}-m} du.$$

Предположим, что $\arg u$ и $\arg(1-u)$ обращаются в нуль в точке A, в которой путь интегрирования пересекает отрезок $[0, +1]$ действительной оси, и что $\arg\left(1-\frac{u}{z^2}\right)=0$ в точке B, в которой $\frac{u}{z^2}$ действительно и меньше 1 (черт. 16).

Полагая в рассматриваемом интеграле $u=z^2-(z^2-1)v$ и принимая v за новое независимое переменное, получаем

$$-(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} z^{n+3m}(z^2-1)^{-2m}\times$$
$$\times\int\limits^{(1+,\,0-)}\left\{1-\left(1-\frac{1}{z^2}\right)v\right\}^{n+m}(v-1)^{-\frac{1}{2}-m}v^{-\frac{1}{2}-m}\,dv.$$

Так как $v-1=\frac{1-u}{z^2-1}$ и в точке F $\arg(1-u)=\arg(z^2-1)$, то $\arg(v-1)$ обращается в нуль в той точке на плоскости v, которая соответствует точке F, и в этой точке $v-1$ — действительное положительное число. Если в плоскости v путь интегрирования таков, что $\left|v\left(1-\frac{1}{z^2}\right)\right|<1$, то в плоскости u в соответствующих точках выполняется условие $\left|1-\frac{u}{z^2}\right|<1$. Это возможно только в том случае, если для каждой точки P плоскости u, лежащей на том контуре, по которому берется интеграл, расстояние от P до z^2 меньше, чем расстояние от z^2 до начала координат, т. е. путь интегрирования должен целиком лежать внутри круга с центром z^2, проходящего через начало координат. Такой путь может существовать только в том случае, если расстояние от z^2 до 1 меньше, чем расстояние от z^2 до начала координат, т. е. в случае $\operatorname{Re}(z^2)>\frac{1}{2}$. Предположим сейчас, что это условие выполнено, тогда в плоскости v путь интегрирования можно выбрать так, что условие $\left|\left(1-\frac{1}{z^2}\right)v\right|<1$ выполнено. При этом $\arg\left[1-\left(1-\frac{1}{z^2}\right)v\right]=\arg\left(\frac{u}{z^2}\right)$ заключен между $-\pi$ и π. Отсюда следует в силу допустимости почленного интегрирования степенных рядов, что указанное выше выражение можно записать в виде

$$-\frac{1}{2^{2m}}(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m} z^{n+m}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^r\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(r)\,\Pi(n+m-r)}\times$$

$$\times\int^{(1+,\,0-)} v^{-\frac{1}{2}-m+r}(v-1)^{-\frac{1}{2}-m}\,dv.$$

Имеем

$$\int^{(1+,\,0-)} v^{-\frac{1}{2}-m+r}(v-1)^{-\frac{1}{2}-m}\,dv=2i\cos m\pi\,\frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}-m\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}-m+r\right)}{\Pi(-2m+r)},$$

поэтому рассматриваемое выражение равно

$$-\frac{1}{2^{2m}}(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m} z^{n+m}\frac{\left[\Pi\left(-\frac{1}{2}-m\right)\right]^2}{\Pi(-2m)}\times$$

$$\times\,2i\cos m\pi\,F\left(-n-m,\ \frac{1}{2}-m;\ 1-2m;\ 1-\frac{1}{z^2}\right).$$

После некоторых преобразований это последнее приводится к виду

$$-(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m} z^{n+m}\,2i\sin m\pi\,\frac{\Pi(m-1)\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\times$$

$$\times\,F\left(-n-m,\ \frac{1}{2}-m;\ 1-2m;\ 1-\frac{1}{z^2}\right).$$

В п. 153 было показано, что если $\left|1-\frac{1}{z^2}\right|<1$, $\operatorname{Re}(\mu)>0$, то полученное выражение равно

$$-2i\sin m\pi\frac{\Pi(m-1)\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\,\frac{\Pi(-m)}{2^m}\,P_n^m(\mu),$$

т. е.

$$-\frac{\pi i}{2^{m-1}}\,\frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\,P_n^m(\mu).$$

Таким образом, мы получили следующую формулу:

$$P_n^m(\mu)=\frac{i}{2\pi}2^m\frac{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}z^{-n-m-1}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\times$$

$$\times\int^{(1+,\,z^2-)} u^{n+m}(1-u)^{-\frac{1}{2}-m}\left(1-\frac{u}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}-m}du.$$

Мы доказали справедливость этой фомулы при $\operatorname{Re}(\mu) > 0$, $\left|1-\frac{1}{z^2}\right| < 1$, $\operatorname{Re}(z^2) > \frac{1}{2}$. С помощью аналитического продолжения можно установить ее справедливость для всех μ и z, таких что $\operatorname{Re}(\mu) > 0$ и $|\arg z^2| < \pi$.

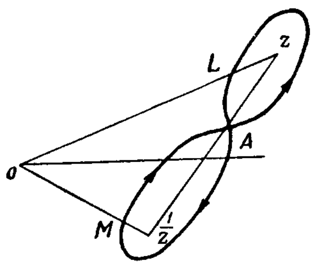
С помощью подстановки $u = hz$ получаем

$$P_n^m(\mu) = \frac{i}{2\pi} 2^m \frac{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)} (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} \int\limits^{\left(\frac{1}{z}+,\, z-\right)} \frac{h^{n+m}}{(1-2\mu h+h^2)^{\frac{1}{2}+m}}\, dh,$$

т. е.

$$P_n^m(\mu) = \frac{2^m}{2\pi i} \frac{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)} (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} \int\limits^{\left(z+,\, \frac{1}{z}-\right)} \frac{h^{n+m}}{(1-2\mu h+h^2)^{\frac{1}{2}+m}}\, dh. \tag{83}$$

До сих пор мы предполагали, что $\operatorname{Re}(\mu) > 0$; пользуясь аналитическим продолжением, можно освободиться от этого ограничения. Таким образом, формула (83) представляет $P_n^m(\mu)$ во всей плоскости μ с разрезом, идущим вдоль действительной оси от 1 до $-\infty$.



Черт. 17.

Чтобы определить значения аргументов выражений $1-zh$, $1-\frac{h}{z}$, входящих в качестве сомножителей в $1-2\mu h+h^2$, заметим, что в точке L $\arg\left(1-\frac{h}{z}\right) = \arg\left(1-\frac{u}{z^2}\right) = 0$ и в точке M $\arg(1-hz) = 0$ (черт. 17). Мы можем предполагать, что $h-z$ в выражении $(h-z)\left(h-\frac{1}{z}\right)$ имеет аргумент нуль, когда $h-z$ принимает действительные положительные значения, и, аналогично, что $h-\frac{1}{z}$ имеет аргумент нуль, когда $h-\frac{1}{z}$ принимает действительные положительные значения. Это согласуется с принятыми выше условиями, если положить

$$\frac{h}{z} - 1 = e^{\pi i}\left(1-\frac{h}{z}\right), \qquad hz-1 = e^{\pi i}(1-hz).$$

В частности, если $m = 0$, то получаем

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits^{\left(z+,\, \frac{1}{z}-\right)} \frac{h^n}{(1-2\mu h+h^2)^{\frac{1}{2}}}\, dh, \tag{84}$$

где $\arg(h-z) = 0$ в той точке, в которой $h-z$ действительно и положительно, и то же самое для $h-\frac{1}{z}$. Начальное значение $\arg(1-2\mu h+h^2)$ стремится к нулю, когда точка A удаляется в бесконечность параллельно положительному направлению действительной оси.

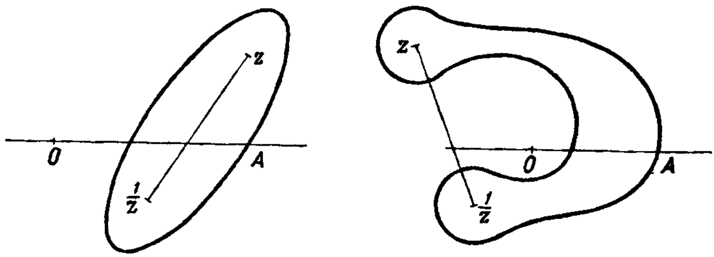
156. Если m целое, то, как легко видеть, та часть интеграла, которая берется вокруг точки $\frac{1}{z}$, не изменится, если направление обхода контура изменить на обратное и начальное значение $\arg(1-2\mu h+h^2)$ в точке A оставить неизменным, а именно тем, которое получается после обхода в положительном направлении вокруг точки z. Таким образом, рассматриваемый интеграл можно заменить интегралом

$$\int^{\left(z+,\frac{1}{z}+\right)} \frac{h^{n+m}}{(1-2\mu h+h^2)^{\frac{1}{2}+m}}\,dh.$$

Теперь мы можем два отдельных контура заменить одной замкнутой кривой, охватывающей обе точки z и $\frac{1}{z}$; в результате получается следующая формула:

$$P_n^m(\mu)=\frac{2^m}{2\pi i}\frac{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int_{(A)}\frac{h^{n+m}}{(1-2\mu h+h^2)^{\frac{1}{2}+m}}\,dh, \tag{85}$$

где интеграл берется вдоль замкнутой кривой, проходящей через точку A и охватывающей точки z и $\frac{1}{z}$, причем точка O лежит слева от этой кри-



Черт. 18.

вой (черт. 18). В точке A, лежащей на действительной оси, начальное значение $\arg(1-2\mu h+h^2)$ таково, что оно стремится к нулю, когда точка A удаляется вдоль действительной оси в бесконечность.

В случае $m=0$ получается следующая важная формула:

$$P_n(\mu)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(A)}\frac{h^n}{(1-2\mu h+h^2)^{\frac{1}{2}}}\,dh; \tag{86}$$

здесь интеграл берется вдоль замкнутого контура, охватывающего точки z, $\frac{1}{z}$, а начальное значение $\arg(1-2\mu h+h^2)$ в точке A стремится к нулю, когда A уходит вдоль действительной оси в бесконечность. Как и выше, предполагается, что точка O лежит слева от данного контура. Это последнее условие можно отбросить при целом положительном n, так как в этом случае $h=0$ перестает быть точкой ветвления для подинтегрального выражения.

157. Если m целое отрицательное или нуль, то выражение (85) можно видоизменить, взяв за путь интегрирования вместо замкнутого контура некоторую дугу, соединяющую точки $\frac{1}{z}$ и z.

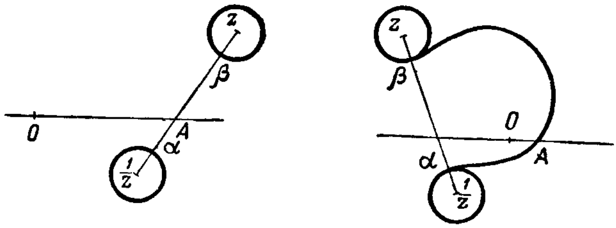
Замкнутый контур можно заменить дугой $\alpha\beta$ (черт. 19); в случае $\operatorname{Re}(\mu)>0$ это может быть прямолинейный отрезок $\alpha\beta$, а если $\operatorname{Re}(\mu)<0$, то эта дуга должна проходить справа от точки $h=0$. Это последнее условие не обязательно, если n целое число.

Если m целое отрицательное число или нуль, то интеграл по малому кругу с центром $\frac{1}{z}$ стремится к нулю, когда $\alpha \to \frac{1}{z}$. То же верно и для точки z. Так как в результате обхода вокруг точки z подинтегральное выражение меняет знак, то интеграл от β до α равен интегралу от α до β.

Таким образом, получаем

$$P_n^{-m}(\mu) = \frac{2^{-m}}{\pi i} \frac{\Pi\left(-m-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)} (\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m} \int_{\frac{1}{z}}^{z} \frac{h^{n-m}}{(1-2\mu h+h^2)^{\frac{1}{2}-m}} dh, \tag{87}$$

где m — целое положительное; путь интегрирования берется так, чтобы



Черт. 19.

точка h оставалась от него слева. В этом условии нет необходимости, если n целое положительное.

Если $m=0$, то получаем

$$P_n(\mu) = \frac{1}{\pi i} \int_{\frac{1}{z}}^{z} \frac{h^n}{(1-2\mu h+h^2)^{\frac{1}{2}}} dh. \tag{88}$$

Значение $\arg(1-2\mu h+h^2)$ в точке A стремится к нулю, когда $A \to \infty$.

В случае $\operatorname{Re}(n+1) > 0$ мы, воспользовавшись формулой (80), получаем

$$\int_0^z \frac{h^n}{(1-2\mu h+h^2)^{\frac{1}{2}}} dh = \left(\int_0^{\frac{1}{z}} + \int_{\frac{1}{z}}^{z}\right) \frac{h^n}{(1-2\mu h+h^2)^{\frac{1}{2}}} dh.$$

Отсюда вытекает следующий результат:

$$\int_0^z \frac{h^n}{(1-2\mu h+h^2)^{\frac{1}{2}}} dh = Q_n(\mu) + \pi i P_n(\mu). \tag{89}$$

§ 20. ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ $P_n^m(\cos\theta)$ И $Q_n^m(\cos\theta)$

158. Воспользовавшись формулой (79), в которой m заменим на $-m$, и соотношением (21), получим

$$Q_n^m(\mu) = \frac{e^{m\pi i}\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi(n+m)}{2^m\,\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)\Pi(n-m)} (\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m} \int_0^{\frac{1}{z}} h^{n-m}(1-2\mu h+h^2)^{m-\frac{1}{2}} dh,$$

где $\operatorname{Re}(n-m+1) > 0$ и $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}+m\right) > 0$.

Сделаем в найденной формуле замену переменных, положив $h=\frac{e^{-\tau}}{z}$; получим

$$Q_n^m(\mu)=\frac{e^{m\pi i}\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi(n+m)}{2^m\,\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)\Pi(n-m)}(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m}z^{m-n-1}\times$$
$$\times\int_0^\infty e^{m\tau-(n+1)\tau}(1-e^{-\tau})^{m-\frac{1}{2}}(1-z^{-2}e^{-\tau})^{m-\frac{1}{2}}d\tau,$$

где $\operatorname{Re}(n-m+1)>0$ и $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}+m\right)>0$.

При $m=0$ имеем

$$Q_n(\mu)=z^{-n-1}\int_0^\infty e^{-(n+1)\tau+m\tau}(1-e^{-\tau})^{-\frac{1}{2}}(1-z^{-2}e^{-\tau})^{-\frac{1}{2}}d\tau$$

или, полагая $\mu=\operatorname{ch}\zeta$, $z=e^\zeta$,

$$Q_n(\operatorname{ch}\zeta)=e^{-(n+1)\zeta}\int_0^\infty e^{-(n+1)\tau}[(1-e^{-\tau})(1-e^{-\tau-2\zeta})]^{-\frac{1}{2}}d\tau.$$

Эта формула была иным путем получена Ватсоном [1]).

Так как

$$1-e^{-\tau-2\zeta}=e^{-\zeta}(e^\zeta-e^{-\zeta-\tau})=e^{-\zeta}\{\operatorname{ch}\zeta(1-e^{-\tau})+\operatorname{sh}\zeta(1+e^{-\tau})\},$$

то

$$Q_n^m(\operatorname{ch}\zeta)=\frac{e^{m\pi i}\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi(n+m)}{2^m\,\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)\Pi(n-m)}\operatorname{csch}^m\zeta\cdot e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\zeta}\times$$
$$\times\int_0^\infty e^{-(n+1)\tau+m\tau}(1-e^{-\tau})^{m-\frac{1}{2}}\left\{(1-e^{-\tau})\operatorname{ch}\zeta-(1+e^{-\tau})\operatorname{sh}\zeta\right\}^{m-\frac{1}{2}}d\tau. \quad (90)$$

Эта формула верна при $\operatorname{Re}(n-m+1)$ и $\operatorname{Re}\left(m+\frac{1}{2}\right)>0$; в частности, она верна, когда n и m действительны, $n>0$ и $-\frac{1}{2}<m<n+1$.

Положим $\mu=\operatorname{ch}\zeta=\cos\theta\pm i\cdot 0$; в этом случае в формуле для $Q_n^m(\mu)$ будет $z=e^{i\theta}$; тогда

$$Q_n^m(\cos\theta\pm i\cdot 0)=\frac{e^{m\pi i}\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi(n+m)}{2^m\,\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)\Pi(n-m)}e^{\mp\frac{1}{2}m\pi i}\csc^m\theta\cdot e^{\mp\left(n+\frac{1}{2}\right)i\theta}\times$$
$$\times e^{\pm\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\pi i}\int_0^\infty e^{-(n+1)\tau+m\tau}(1-e^{-\tau})^{m-\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\{(1+e^{-\tau})\sin\theta\mp i(1-e^{-\tau})\cos\theta\}^{m-\frac{1}{2}}d\tau$$

Воспользовавшись соотношением

$$e^{m\pi i}Q_n^m(\cos\theta)=\frac{1}{2}[e^{-\frac{1}{2}m\pi i}Q_n^m(\cos\theta+i\cdot 0)+e^{\frac{1}{2}m\pi i}Q_n^m(\cos\theta-i\cdot 0)],$$

[1]) Camb. Phil. Trans., 22 (1918), 294

получим

$$Q_n^m(\cos\theta) = \frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi(n+m)}{2^{m+1}\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)\Pi(n-m)} \csc^m\theta \times$$

$$\times \left[e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)i\theta-\frac{\pi}{4}i-\frac{m\pi}{2}i} I_1 + e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)i\theta+\frac{1}{4}\pi i+\frac{1}{2}m\pi i} I_2\right],$$

где I_1 и I_2 означают интегралы

$$\int_0^\infty e^{-(n+1)\tau+m\tau}(1-e^{-})^{m-\frac{1}{2}}[(1+e^{-\tau})\sin\theta \mp i(1-e^{-\tau})\cos\theta]^{m-\frac{1}{2}}d\tau.$$

Аналогично, воспользовавшись соотношением

$$-i\pi e^{m\pi i}P_n^m(\cos\theta) = e^{-\frac{1}{2}m\pi i}Q_n^m(\cos\theta+i\cdot 0) - e^{\frac{1}{2}m\pi i}Q_n^m(\cos\theta - i\cdot 0),$$

получаем

$$\frac{1}{2}\pi\cdot P_n^m(\cos\theta) = \frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi(n+m)}{2^{m+1}\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)\Pi(n-m)} \csc^m\theta i \times$$

$$\times \left[e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)i\theta-\frac{\pi}{4}i-\frac{m\pi}{2}i} I_1 - e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)i\theta+\frac{1}{4}\pi i+\frac{1}{2}m\pi i} I_2\right].$$

Будем теперь предполагать m и n действительными. Пусть $\arg I_1 = -\omega$ и $\arg I_2 = \omega$; тогда $I_1 = \rho e^{-i\omega}$ и $I_2 = \rho e^{i\omega}$, где ρ — положительное число.

Таким образом, получаем

$$\frac{1}{2}\pi P_n^m(\cos\theta) = W\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + \frac{m\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \omega\right],$$

$$Q_n(\cos\theta) = W\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + \frac{m\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \omega\right], \tag{91}$$

где $W > 0$; здесь предполагается, что m и n действительны и

$$-\frac{1}{2} < m < n+1.$$

Эти результаты представляют собой обобщение результатов, полученных Ватсоном (см. сноску на стр. 235) для случая $m=0$. Они были получены Гобсоном [1]) и использованы Ватсоном для изучения распределения нулей функции $P_n(\cos\theta)$.

§ 21. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ P_n^m И Q_n^m

159. Соотношение

$$e^{-m\pi i}Q_n^m(\operatorname{ch}\alpha) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Pi(m+n)}{\sqrt{\operatorname{sh}\alpha}} P_{-m-\frac{1}{2}}^{-n-\frac{1}{2}}(\operatorname{cth}\alpha), \tag{92}$$

где $\operatorname{Re}(\operatorname{ch}\alpha) > 0$, связывающее функции P и Q, было дано Уипплем [2]), который использовал его для представления в виде интеграла или ряда одной из функций Q_n^m или P_n^m, когда известно соответствующее представление другой.

[1]) Proc. Lond. Math. Soc. (2), 30 (1929), 373.
[2]) Там же, 16 (1917), 301.

Легко проверить, что если в дифференциальном уравнении (2), которому удовлетворяют $P_n^m(\mu)$ и $Q_n^m(\mu)$, ввести вместо μ новую переменную μ' с помощью соотношения $(\mu'^2-1)(\mu^2-1)=1$, то это дифференциальное уравнение примет вид

$$(1-\mu'^2)\frac{d^2u}{d\mu'^2}-2\mu'\frac{du}{d\mu'}+\left\{\left(m-\frac{1}{2}\right)\left(m+\frac{1}{2}\right)-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{1-\mu'^2}\right\}u=0,$$

т. е.

$$(1-\mu'^2)\frac{d^2u}{d\mu'^2}-2\mu'\frac{du}{d\mu'}+\left\{n'(n'+1)-\frac{m'^2}{1-\mu'^2}\right\}u=0,$$

где $n'=-\left(m+\frac{1}{2}\right)$, $m'=-\left(n+\frac{1}{2}\right)$. Отсюда следует, что решение $v_{n'}^{m'}(\mu')$ этого уравнения должно быть в то же время решением $u_n^m(\mu)$ уравнения (2), где n, m и μ связаны с n', m', μ' указанным выше образом.

Чтобы получить соотношение (92), воспользуемся выражением (83) для $P_n^m(\mu)$ и, положив $h=\mu-t(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}$, примем t за переменную интегрирования. Получим

$$P_n^m(\mu)=-\frac{1}{2\pi i}2^m\frac{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}(m+1)}\times$$

$$\times\int^{(-1+,\,1-)}\frac{[\mu-t\sqrt{\mu^2-1}]^{n+m}}{\{(t^2-1)(\mu^2-1)\}^{m+\frac{1}{2}}}\,dt.$$

Записав $\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2-1}}=\mu'$, получим

$$P_n^m(\mu)=\frac{i}{2\pi}2^m\frac{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}(\mu'^2-1)^{-\frac{1}{2}n}\int^{(-1+,\,1-)}\frac{(\mu'-t)^{n+m}}{(t^2-1)^{m+\frac{1}{2}}}\,dt.$$

Аналогично из формулы (18) получаем

$$Q_{n'}^{m'}(\mu')=\frac{e^{-(n'+1)\pi i}}{4i\sin n'\pi}\frac{\Pi(n'+m')}{\Pi(n')}(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}m'}\times$$

$$\times\int^{(-1+,\,1-)}\frac{1}{2^{n'}}(t^2-1)^{n'}(t-\mu')^{-n'-m'-1}\,dt.$$

Заметим, что аргументы подинтегральных выражений в этих формулах таковы, что если в выражении для $Q_{n'}^{m'}(\mu')$ положить $t-\mu'=(\mu'-t)e^{-\pi i}$, то получим

$$Q_{n'}^{m'}(\mu')=\frac{e^{m'\pi i}}{4i\sin n'\pi}\frac{\Pi(n'+m')}{\Pi(n')}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m'}\int^{(-1+,\,1-)}\frac{1}{2^{n'}}\frac{(t^2-1)^{n'}}{(\mu'-t)^{n'+m'+1}}\,dt,$$

где аргумент в подинтегральном выражении выбирается так же, как в соответствующем выражении для $P_n^m(\mu)$.

Так как $\mu'=\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2-1}}$, то мы видим, что, когда μ меняется от некоторого действительного значения >1 до чисто мнимого, μ' меняется от некоторого действительного значения до некоторого значения, принадлежащего разрезу, соединяющему точки $\mu'=0$ и $\mu'=1$. Поэтому, так как $Q_{n'}^{m'}(\mu')$

при переходе через разрез претерпевает разрыв, то мы должны наложить условие $\operatorname{Re}(\mu) > 0$.

Полагая $n' = -\left(m+\frac{1}{2}\right)$, $m' = -\left(n+\frac{1}{2}\right)$, мы видим, что интегралы в двух рассматриваемых выражениях становятся тождественны. Таким образом, получаем

$$Q_{-m-\frac{1}{2}}^{-n-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2-1}}\right) = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}\, e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i} \frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi(n+m)\sin(n+m)\pi} (\mu^2-1)^{\frac{1}{4}} P_n^m(\mu),$$

или

$$Q_{-m-\frac{1}{2}}^{-n-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2-1}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i}\, \Pi(-n-m-1)\,(\mu^2-1)^{\frac{1}{4}} P_n^m(\mu), \qquad (93)$$

где $\operatorname{Re}(\mu) > 0$. Полагая $\mu = \operatorname{cth}\alpha$, получаем отсюда формулу (92).

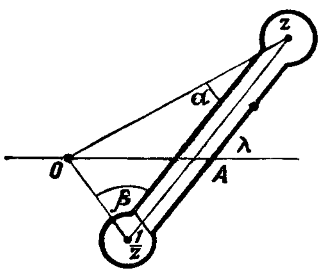
§ 22. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ $P_n^m(\mu)$ В ВИДЕ ИНТЕГРАЛОВ ПО ПРЯМОЛИНЕЙНЫМ ОТРЕЗКАМ

160. Заменив в формуле (83) m на $-m$, получим

$$P_n^{-m}(\mu) = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{2^m}\,\frac{\pi\sec m\pi}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m} \times$$

$$\times \int^{\left(z+,\frac{1}{z}-\right)} h^{n-m}(1-2\mu h+h^2)^{m-\frac{1}{2}}\,dh.$$

Предположим теперь, что $\operatorname{Re}\left(m+\frac{1}{2}\right)>0$; тогда, считая, что $\operatorname{Re}(\mu)>0$, выберем путь интегрирования так же, как и в п. 155. Мы можем за путь интегрирования принять два прямолинейных отрезка, соединяющих точки z и $\frac{1}{z}$, и две бесконечно малые окружности вокруг этих точек (черт. 20); в силу условия $\operatorname{Re}\left(m+\frac{1}{2}\right) > 0$, интегралы вдоль окружностей в пределе обращаются в нуль. Пусть $\operatorname{Re}(\mu) < 0$, так что отрезок, соединяющий точки z и $\frac{1}{z}$, лежит слева от O; путь интегрирования в формуле (83) следует выбирать так, чтобы точка O лежала от него слева; в этом случае интеграл нельзя заменить интегралом вдоль прямолинейного отрезка, соединяющего точки z и $\frac{1}{z}$. Следовательно, для того чтобы за путь интегрирования можно было выбрать прямолинейный отрезок, существенно, чтобы действительная часть μ была положительна. Получаем



Черт. 20.

$$\int^{\left(z+,\frac{1}{z}-\right)} h^{n-m}(1-2\mu h+h^2)^{m-\frac{1}{2}}\,dh =$$

$$= \left(1-e^{i\pi(2m-1)}\right)\int_{\frac{1}{z}}^{z} h^{n-m}(1-2\mu h+h^2)^{m-\frac{1}{2}}\,dh;$$

здесь в стоящем справа интеграле начальные значения $\arg(h-z)$ и $\arg(h-z^{-1})$ в точке A равны $\lambda-\pi$ и λ соответственно, так что начальное значение $\arg(1-2\mu h+h^2)$ равно $2\lambda-\pi$.

Таким образом, получаем

$$P_n^{-m}(\mu)=\frac{1}{2^m}\frac{e^{i\pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m}\times$$
$$\times\int_{\frac{1}{z}}^{z}h^{n-m}(1-2\mu h+h^2)^{m-\frac{1}{2}}dh$$

Эта формула верна в предположении, что точка $h=0$ лежит слева от пути интегрирования.

Пусть $h=\mu+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\psi$, где ψ меняется от 0 до π; тогда

$$h^2-2\mu h+1=-(\mu^2-1)\sin^2\psi=e^{-\pi i}(\mu^2-1)\sin^2\psi,$$

так как $\arg(\mu^2-1)=2\lambda$ и $dh=-(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\sin\psi\,d\psi$. Мы приходим к следующей формуле:

$$P_n^{-m}(\mu)=\frac{(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}}{2^m\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\pi}(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\psi)^{n-m}\sin^{2m}\psi\,d\psi, \tag{94}$$

где $\mathrm{Re}\left(m+\frac{1}{2}\right)>0$, интеграл берется от $\psi=0$ до π вдоль действительной оси и $\mathrm{Re}(\mu)>0$.

Используя соотношение (33), получаем

$$P_n^m(\mu)-\frac{2}{\pi}e^{-m\pi i}\sin m\pi\cdot Q_n^m(\mu)=$$
$$=\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)}\frac{(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}}{2^m\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\pi}(\mu-\sqrt{\mu^2-1}\cos\psi)^{n-m}\sin^{2m}\psi\,d\psi. \tag{95}$$

Это соотношение, в котором интеграл берется вдоль прямолинейного отрезка, верно для всех значений n и m, если только $\mathrm{Re}\left(m+\frac{1}{2}\right)>0$, $\mathrm{Re}(\mu)>0$. Если $\psi=\frac{1}{2}\pi$, то $\arg(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\psi)=\arg\mu$.

Заменив в формуле (95) n на $-n-1$ и воспользовавшись соотношением (31), мы после некоторых преобразований получим

$$P_n^m(\mu)-\frac{2}{\pi}e^{-m\pi i}\sin m\pi\ Q_n^m(\mu)=$$
$$=\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)}\frac{(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}}{2^m\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2m}\psi}{(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\psi)^{n+m+1}}d\psi, \tag{96}$$

где $\mathrm{Re}\left(m+\frac{1}{2}\right)>0$, $\mathrm{Re}(\mu)>0$; ψ принимает действительные значения от $\psi=0$ до $\psi=\pi$.

161. Из (95) и (96) легко получаются соответствующие формулы для случая $\mathrm{Re}(\mu) < 0$. В этом случае имеем

$$P_n^m(-\mu) - \frac{2}{\pi} e^{-m\pi i} \sin m\pi \; Q_n^m(-\mu) =$$

$$= \frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)} \frac{e^{\mp m\pi i}}{2^m \Pi\left(-\frac{1}{2}\right) \Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)} (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} \times$$

$$\times \int_0^\pi e^{\mp(n-m)\pi i} (\mu + \sqrt{\mu^2-1} \cos\psi)^{n-m} \sin^{2m}\psi \, d\psi.$$

Выражение, стоящее в левой части, равно

$$e^{\mp n\pi i} P_n^m(\mu) - \frac{2\sin(n+m)\pi}{\pi} e^{-m\pi i} Q_n^m(\mu) + \frac{2}{\pi} e^{-m\pi i} \sin m\pi \cdot e^{\pm n\pi i} Q_n^m(\mu),$$

откуда

$$P_n^m(\mu) - \frac{2}{\pi} e^{-m\pi i} \sin n\pi \cdot e^{\pm(n-m)\pi i} Q_n^m(\mu) =$$

$$= \frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)} \frac{(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}}{2^m \Pi\left(-\frac{1}{2}\right) \Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi (\mu + \sqrt{\mu^2-1} \cos\psi)^{n-m} \sin^{2m}\psi \, d\psi, \tag{97}$$

где при $\mathrm{Im}(\mu) > 0$ в $e^{\pm(n-m)\pi i}$ берется верхний знак, а при $\mathrm{Im}(\mu) < 0$ — нижний.

Формула, аналогичная (96), может быть получена таким же способом и при $\mathrm{Re}(\mu) < 0$:

$$-e^{\mp 2n\pi i} P_n^m(\mu) + \frac{2}{\pi} e^{-m\pi i} \sin n\pi \cdot e^{\mp(n+m)\pi i} Q_n^m(\mu) =$$

$$= \frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)} \frac{(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}}{2^m \Pi\left(-\frac{1}{2}\right) \Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \frac{\sin^{2m}\psi}{(\mu + \sqrt{\mu^2-1}\cos\psi)^{n+m+1}} \, d\psi.$$

162. Если $\mu = \cos\theta$ и θ лежит между 0 и $\frac{\pi}{2}$, то, положив $\mu = \cos\theta + i \cdot 0$, получаем, что левая часть формулы (95) приводится к

$$e^{-\frac{1}{2}m\pi i} P_n^m(\cos\theta) - \frac{2}{\pi} e^{-m\pi i} \sin m\pi \, e^{\frac{3}{2}m\pi i} \left[Q_n^m(\mu) - \frac{1}{2}\pi i P_n^m(\cos\theta) \right],$$

а в ее правой части вместо $(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}$ получается $e^{\frac{1}{2}m\pi i} \sin^m\theta$; следовательно, формула (95) принимает вид

$$\cos m\pi \, P_n^m(\cos\theta) - \frac{2}{\pi} \sin m\pi \, Q_n^m(\cos\theta) =$$

$$= \frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)} \frac{\sin^m\theta}{2^m \Pi\left(-\frac{1}{2}\right) \Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi (\cos\theta + i\sin\theta\cos\psi)^{n-m} \sin^{2m}\psi \, d\psi.$$

С другой стороны, полагая $\mu = \cos\theta - i \cdot 0$, получаем аналогичным образом, что

$$\cos m\pi \, P_n^m(\cos\theta) - \frac{2}{\pi} \sin m\pi \, Q_n^m(\cos\theta) =$$

$$= \frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)} \frac{\sin^m\theta}{2^m \Pi\left(-\frac{1}{2}\right) \Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi (\cos\theta - i\sin\theta\cos\psi)^{n-m} \sin^{2m}\psi \, d\psi.$$

Таким образом, имеем

$$\cos m\pi\, P_n^m(\cos\theta) - \frac{2}{\pi}\sin m\pi\, Q_n^m(\cos\theta) =$$

$$= \frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)}\,\frac{\sin^m\theta}{2^m\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\int^{\pi}(\cos\theta \pm i\sin\theta\cos\psi)^{n-m}\sin^{2m}\psi\,d\psi, \quad (98)$$

где $\mathrm{Re}\left(m+\frac{1}{2}\right) > 0$ и θ заключено между 0 и $\frac{\pi}{2}$.

Если в формуле (98) заменить n на $-n-1$ и воспользоваться формулами п. 147, то после некоторых преобразований получим

$$\cos m\pi\, P_n^m(\cos\theta) - \frac{2}{\pi}\sin m\pi\, Q_n^m(\cos\theta) =$$

$$= \frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)}\,\frac{\sin^m\theta}{2^m\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2m}\psi}{(\cos\theta + i\sin\theta\cos\psi)^{n+m+1}}\,d\psi, \quad (99)$$

где $\mathrm{Re}\left(m+\frac{1}{2}\right) > 0$ и θ заключено между 0 и $\frac{\pi}{2}$.

163. Рассмотрим теперь случай, когда θ лежит между $\frac{\pi}{2}$ и π. Из формулы (97), полагая $\mu = \cos\theta + i\cdot 0$, получаем

$$e^{(n-m)\pi i}\left[\cos n\pi\, P_n^m(\cos\theta) - \frac{2}{\pi}\sin n\pi\, Q_n^m(\cos\theta)\right] =$$

$$= \frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)}\,\frac{\sin^m\theta}{2^m\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\pi}(\cos\theta + i\sin\theta\cos\psi)^{n-m}\sin^{2m}\psi\,d\psi \quad (100)$$

где, как и раньше, $\mathrm{Re}\left(m+\frac{1}{2}\right) > 0$.

Аналогичная формула, отличающаяся знаком перед i в подинтегральном выражении, получается, если положить $\mu = \cos\theta - i\cdot 0$.

Заменив в формуле (100) n на $-n-1$, получим

$$-e^{-(n+m)\pi i}\left[P_n^m(\cos\theta)\cos n\pi - \frac{2}{\pi}\sin n\pi\, Q_n^m(\cos\theta)\right] =$$

$$= \frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)}\,\frac{\sin^m\theta}{2^m\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2m}\psi}{(\cos\theta + i\sin\theta\cos\psi)^{n+m+1}}\,d\psi. \quad (101)$$

Легко получить аналогичную формулу с $-i$ вместо i.

164. В том важном случае, когда m целое положительное, из (95) и (97) следует, что выражение

$$\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)}\,\frac{(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}}{2^m\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\left(\mu + \sqrt{\mu^2-1}\cos\psi\right)^{n-m}\sin^{2m}\psi\,d\psi =$$

$$= P_n^m(\mu) \text{ или } P_n^m(\mu) - \frac{2}{\pi}\sin n\pi e^{\pm n\pi i}\,Q_n^m(\mu), \quad (102)$$

в зависимости от того, будет $\mathrm{Re}(\mu)$ положительно или отрицательно; при $\mathrm{Im}(\mu) > 0$ в $e^{\pm n\pi i}$ берется верхний знак, а при $\mathrm{Im}(\mu) < 0$ — нижний.

Из (96) получаем

$$P_n^m(\mu) = \frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)} \frac{(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}}{2^m \Pi\left(-\frac{1}{2}\right) \Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \frac{\sin^{2m}\psi}{(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\psi)^{n+m+1}} d\psi \tag{103}$$

при $\operatorname{Re}(\mu) > 0$.

Из (98) получаем также, что если m целое положительное, то

$$(-1)^m P_n^m(\cos\theta) = \frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)} \frac{\sin^m\theta}{2^m \Pi\left(-\frac{1}{2}\right) \Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)} \times$$

$$\times \int_0^\pi (\cos\theta \pm i\sin\theta\cos\psi)^{n-m} \sin^{2m}\psi\, d\psi, \tag{104}$$

где $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$; из формулы (100) видно, что если $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, то правая часть формулы (104) равна

$$(-1)^m e^{n\pi i}\left[\cos n\pi\, P_n^m(\cos\theta) - \frac{2}{\pi}\sin n\pi\, Q_n^m(\cos\theta)\right].$$

Аналогично, из (99) получаем, что если m целое положительное, то выражение

$$\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)} \frac{\sin^m\theta}{2^m \Pi\left(-\frac{1}{2}\right) \Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \frac{\sin^{2m}\psi}{(\cos\theta + i\sin\theta\cos\psi)^{n+m+1}} d\psi$$

при $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ равно $(-1)^m P_n^m(\cos\theta)$. Из (101) вытекает, что при $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ это же выражение равно

$$-e^{-n\pi i}(-1)^m\left[P_n^m(\cos\theta)\cos n\pi - \frac{2}{\pi}\sin n\pi\, Q_n^m(\cos\theta)\right]. \tag{105}$$

§ 23. ОПРЕДЕЛЕНИЕ $P_n(\mu)$, ДАННОЕ ГЕЙНЕ

165. Гейне[1]) определил функцию $P_n(\mu)$ для комплексных n и μ формулой

$$P_n(\mu) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\mu + \sqrt{\mu^2-1}\cos\psi)^n d\psi.$$

Из результатов, полученных в п. 161, видно, что это определение непригодно, так как функция, даваемая этим интегралом при $\operatorname{Re}(\mu) < 0$, не является аналитическим продолжением функции, определяемой тем же самым интегралом при $\operatorname{Re}(\mu) > 0$. Тот факт, что рассматриваемый интеграл не имеет определенного значения при чисто мнимых μ, становится ясным, если мы рассмотрим аргумент подинтегрального выражения

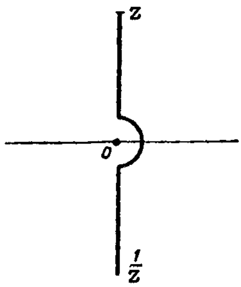
$$(\mu + \sqrt{\mu^2-1}\cos\psi)^n,$$

т. е. h^n. Если μ чисто мнимое, то между 0 и π найдется такое значение ψ, при котором h обращается в нуль и при переходе через это значение ψ аргумент подинтегрального выражения меняется на некоторую конечную величину. Интеграл по h в п. 157 берется вдоль пути, соединяющего точки z и $\frac{1}{z}$ и проходящего справа от точки $h=0$. Таким образом, для чисто

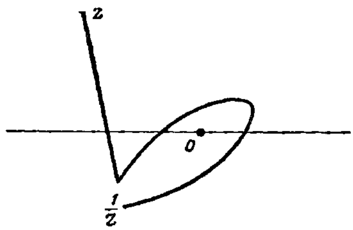
[1]) Kugelfunktionen, т. I, 1878, стр. 37.

мнимых значений μ путь интегрирования должен быть выбран так, как это указано на черт. 21, и включать в себя полуокружность, обходящую точку $h=0$; мы видим, что в указанном выше определенном интеграле аргумент подинтегрального выражения уменьшается скачком на $n\pi$, когда $\cos\psi$ проходит через значение $\frac{-\mu}{\sqrt{\mu^2-1}}$. Если принять это во внимание, то рассматриваемый определенный интеграл будет изображать $P_n(\mu)$ при чисто мнимых значениях μ, если только интеграл вдоль полуокружности стремится к нулю.

Однако в самом интеграле нет ничего, что бы определяло, независимо от нашего соглашения, как именно должен меняться аргумент подинтегрального выражения, когда подинтегральное выражение проходит через особую точку.



Черт. 21.



Черт. 22.

Предположим теперь, что μ переходит через мнимую ось; тогда интеграл по h от $\frac{1}{z}$ до z можно взять вдоль петли, охватывающей точку $h=0$ (черт. 22), и затем вдоль прямолинейного отрезка, однако его нельзя взять сразу вдоль отрезка от $\frac{1}{z}$ до z. Таким образом, оказывается, что значение рассматриваемого определенного интеграла теперь уже не равно $P_n(\mu)$; оно выражается через $P_n(\mu)$ и $Q_n(\mu)$. Действительно, формула (102) показывает, что в случае $\mathrm{Re}(\mu)<0$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\psi)^n d\psi = P_n(\mu)-\frac{2}{\pi}e^{\pm n\pi i}\sin n\pi\, Q_n(\mu),$$

где при $\mathrm{Im}(\mu)>0$ берется верхний знак, а при $\mathrm{Im}(\mu)<0$ — нижний.

Оказывается, что единственный случай, когда определение, данное Гейне, пригодно, — это случай действительного целочисленного n.

§ 24. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ $P_n^m(\mu)$ В ВИДЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА ПРИ ЦЕЛОМ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОМ m

166. В п. 122 было показано, что если n целое действительное, то

$$P_n^m(\mu)=\frac{1}{2\pi i}\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n)}\frac{(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}}{2^n}\int^{(\mu+,\,1+)}(t^2-1)^n(t-\mu)^{-n-m-1}\,dt. \tag{14}$$

Предположим теперь, что $\mathrm{Re}(\mu)>0$, тогда за путь интегрирования в (14) можно взять окружность с центром в точке μ (черт. 23), и радиусом, заключенным между $|\mu-1|$ и $|\mu+1|$. На этой окружности возьмем точку C так, чтобы угловое расстояние от z до C было равно ψ, и примем C за начальную точку пути. Пусть φ, $0\leqslant\varphi<2\pi$, — угловое расстояние от точки C до произвольной точки на окружности. Если мы положим

$$t=\mu+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i(\varphi-\psi)\mp u},$$

где u действительно, то точка t при различных значениях φ будет описывать окружность с центром μ и радиусом $e^{\mp u}|\sqrt{\mu^2-1}|$; поэтому в формуле (14) мы должны значение u выбирать так, чтобы $|\mu-1|<e^{\mp u}\times\times|\sqrt{\mu^2-1}|<|\mu+1|$, т. е. $0\leqslant u\leqslant\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\mu+1}{\mu-1}\right|$.

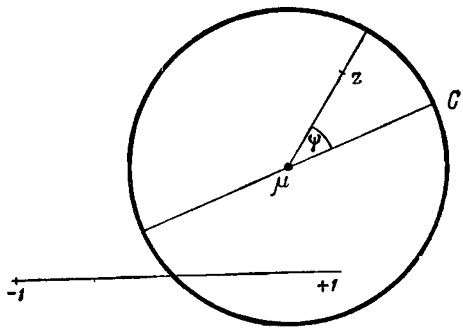
Мы имеем

$$t^2-1=2\sqrt{\mu^2-1}\cdot e^{i(\varphi-\psi)\mp u}[\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos(\varphi-\psi)\pm iu],$$

откуда

$$P_n^m(\mu)=\frac{1}{2\pi}\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n)}\int_0^{2\pi}\{\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos(\varphi-\psi\pm iu)\}^n e^{-m(\varphi-\psi)i\pm mu}\,d\varphi,$$

где $\operatorname{Re}(\mu)>0$, т. е.



Черт. 23.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos(\varphi-\psi\pm iu)\}^n(\cos m\varphi-i\sin m\varphi)\,d\varphi=$$
$$=P_n^m(\mu)\frac{\Pi(n)}{\Pi(n+m)}e^{-im(\psi\mp iu)}.$$

Заменяя m на $-m$ и вспоминая, что, согласно (33),

$$P_n^{-m}(\mu)=\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}P_n^m(\mu),$$

получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos(\varphi-\psi\pm iu)\}^n(\cos m\varphi+i\sin m\varphi)\,d\varphi=$$
$$=P_n^m(\mu)\frac{\Pi(n)}{\Pi(n+m)}e^{im(\psi\mp iu)};$$

таким образом, мы приходим к следующей формуле:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos(\varphi-\psi\pm iu)\}^n\,{\cos\atop\sin}\,m\varphi\,d\varphi=$$
$$=P_n^m(\mu)\frac{\Pi(n)}{\Pi(n+m)}\,{\cos\atop\sin}\,m(\psi\mp iu),\quad(106)$$

где m — целое, n — произвольно, $\operatorname{Re}(\mu)>0$ и $u<\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\mu+1}{\mu-1}\right|$. Если мы заменим n на $-n-1$, то получим формулу

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{{\cos\atop\sin}\,m\varphi}{\{\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos(\varphi-\psi\pm iu)\}^{n+1}}\,d\varphi=$$
$$=(-1)^m P_n^m(\mu)\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n)}\,{\cos\atop\sin}\,m(\psi\mp iu),\qquad(107)$$

справедливую при тех же самых ограничениях, что и (106).

Формулы (106) и (107) были даны Гейне[1]) для целых положительных значений n.

При $u=0$, $\psi=0$ имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^n\cos m\varphi\,d\varphi=\frac{\Pi(n)}{\Pi(n+m)}P_n^m(\mu), \tag{108}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos m\varphi}{(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^{n+1}}\,d\varphi=(-1)^m\,\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n)}P_n^m(\mu), \tag{109}$$

где n — любое, m — целое действительное и $\operatorname{Re}(\mu)>0$.

Формулы (108) и (109) можно преобразовать так, чтобы пределами интегрирования были 0 и π.

Заменив независимое переменное φ на $\pi-\varphi$, получим

$$\int_0^{\pi}(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^n\cos m\varphi\,d\varphi=(-1)^m\int_0^{\pi}(\mu-\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^n\cos m\varphi\,d\varphi.$$

Заменив теперь в стоящем справа интеграле φ на $\varphi-\pi$, получим

$$\int_{\pi}^{2\pi}(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^n\cos m\varphi\,d\varphi.$$

Таким образом, из (108) получаем, что

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi)^n\cos m\varphi\,d\varphi=\frac{\Pi(n)}{\Pi(n+m)}P_n^m(\mu), \tag{110}$$

где m — целое действительное и $\operatorname{Re}(\mu)>0$.

167. Если $\operatorname{Re}(\mu)<0$, то, заменив μ на $-\mu$ в формуле (106), получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\mu+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\varphi-\psi\pm iu)\}^n e^{\mp n\pi i}\,{\cos\atop\sin}\,m\varphi\,d\varphi=$$

$$=P_n^m(-\mu)\frac{\Pi(n)}{\Pi(n+m)}\,{\cos\atop\sin}\,m(\psi\mp iu),$$

где $0\leqslant u\leqslant\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\mu-1}{\mu+1}\right|$ и при $\operatorname{Im}(\mu)>0$ в $e^{\mp n\pi i}$ берется верхний знак, а при $\operatorname{Im}(\mu)<0$ — нижний.

Воспользовавшись формулой (34), выражающей $P_n^m(-\mu)$ через $P_n^m(\mu)$ и $Q_n^m(\mu)$, мы получим следующую формулу:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\mu+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\varphi-\psi\pm iu)\}^n\,{\cos\atop\sin}\,m\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{\Pi(n)}{\Pi(n+m)}\left\{P_n^m(\mu)-\frac{2}{\pi}e^{\pm n\pi i}\sin n\pi\,Q_n^m(\mu)\right\}{\cos\atop\sin}\,m(\psi\mp iu),$$

где при $\operatorname{Im}(\mu)>0$ берется верхний знак, а при $\operatorname{Im}(\mu)<0$ — нижний.

[1]) Kugelfunktionen, т. I, стр. 211.

Заменив n на $-n-1$ и воспользовавшись формулой (31), мы после некоторых преобразований получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi}{\{\mu+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\varphi-\psi\pm iu)\}^{n+1}}\,d\varphi=$$

$$=\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n)}(-1)^m\left[P_n^m(\mu)\,(1-2e^{\mp n\pi i}\cos n\pi)+\frac{2}{\pi}\,e^{\mp n\pi i}\,Q_n^m(\mu)\right]\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m(\psi\mp iu),$$

где $\mathrm{Re}(\mu)<0$.

§ 25. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ $Q_n^m(\mu)$ В ВИДЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

168. Если $\mathrm{Re}(n-m+1)>0$ и $\mathrm{Re}\left(m+\frac{1}{2}\right)>0$, то, заменив в формуле (81) m на $-m$, получим

$$Q_n^{-m}(\mu)=e^{-m\pi i}\,2^{-m}\,\frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\,(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m}\int_z^\infty\frac{h^{-m-n-1}}{(1-2\mu h+h^2)^{\frac{1}{2}-m}}\,dh.$$

Положим $h=\mu+\sqrt{\mu^2-1}\,\mathrm{ch}\,w$, т. е. $1-2\mu h+h^2=(\mu^2-1)\,\mathrm{sh}^2 w$, и примем w за переменную интегрирования; вспоминая, что

$$Q_n^{-m}(\mu)=\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}\,e^{-2m\pi i}\,Q_n^m(\mu),$$

получаем

$$Q_n^m(\mu)=e^{m\pi i}\,\frac{1}{2^m}\,\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)}\,\frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\,(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\times$$

$$\times\int_0^\infty\frac{\mathrm{sh}^{2m} w}{(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\,\mathrm{ch}\,w)^{n+m+1}}\,dw, \tag{111}$$

где $\mathrm{Re}\left(m+\frac{1}{2}\right)>0$, $\mathrm{Re}(n-m+1)>0$.

При $m=0$, $\mathrm{Re}(n+1)>0$ получаем

$$Q_n(\mu)=\int_0^\infty\frac{dw}{(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\,\mathrm{ch}\,w)^{n+1}}. \tag{112}$$

Частный случай формулы (111), соответствующий целым значениям n и m, был получен Гейне[1]).

Если $\mu=\cos\theta$ действительно и заключено между -1 и 1, то, воспользовавшись (57), получаем

$$Q_n^m(\cos\theta)=\frac{1}{2^{m+1}}\,\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)}\,\frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\,\sin^m\theta\times$$

$$\times\left\{\int_0^\infty\frac{\mathrm{sh}^{2m} w}{(\cos\theta+i\sin\theta\,\mathrm{ch}\,w)^{n+m+1}}\,dw+\int_0^\infty\frac{\mathrm{sh}^{2m} w}{(\cos\theta-i\sin\theta\,\mathrm{ch}\,w)^{n+m+1}}\,dw.\right.$$

---

[1]) Kugelfunktionen, т. I, стр. 222.

Аналогично, из (56) находим

$$P_n^m(\mu)=\frac{1}{2^m\pi i}\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)}\frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\sin^m\theta\times$$
$$\times\left\{\int_0^\infty\frac{\operatorname{sh}^{2m}w}{(\cos\theta-i\sin\theta\operatorname{ch}w)^{n+m+1}}dw-\int_0^\infty\frac{\operatorname{sh}^{2m}w}{(\cos\theta+i\sin\theta\operatorname{ch}w)^{n+m+1}}dw\right\}.$$

169. В формуле (79), справедливой при

$$\operatorname{Re}(n+m+1)>0,\quad \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}-m\right)>0,$$

положим $h=\mu-\sqrt{\mu^2-1}\operatorname{ch}w$; тогда, принимая за путь интегрирования прямолинейный отрезок, соединяющий O и $\frac{1}{z}$, получим при $h=0$, что $w=w_0=\frac{1}{2}\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}$. Если $w=0$, то $h=\frac{1}{z}$, и

$$1-2h\mu+h^2=(\mu^2-1)\operatorname{sh}^2 w.$$

Отсюда

$$Q_n^m(\mu)=e^{m\pi i}2^m\frac{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}\cos m\pi\,(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m}\times$$
$$\times\int_0^{w_0}(\mu-\sqrt{\mu^2-1}\operatorname{ch}w)^{n+m}\operatorname{sh}^{-2m}w\,dw,\qquad(113)$$

где $w_0=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\mu+1}{\mu-1}\right|$, $\operatorname{Re}(n+m+1)>0$ и $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}-m\right)>0$.

При $m=0$ получаем

$$Q_n(\mu)=\int_0^{w_0}(\mu-\sqrt{\mu^2-1}\operatorname{ch}w)^n\,dw,\qquad(114)$$

где $\operatorname{Re}(n+1)>0$. Если μ действительно и >1, то w_0 действительно.

Интересно сравнить (113) с формулой

$$Q_n^m(\mu)=e^{m\pi i}2^m\frac{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}\cos m\pi\,(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}m}\times$$
$$\times\int_0^\infty(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\operatorname{ch}w)^{m-n-1}\operatorname{sh}^{-2m}w\,dw,\qquad(115)$$

которая получается из (111) заменой m на $-m$ и которая верна при тех же условиях, что и (113).

Заменим в (113) m на $-m$; получим

$$Q_n^m(\mu)=e^{m\pi i}2^{-m}\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)}\frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\times$$
$$\times\int_0^{w_0}(\mu-\sqrt{\mu^2-1}\operatorname{ch}w)^{n-m}\operatorname{sh}^{2m}w\,dw,\qquad(116)$$

где предполагается, что $\operatorname{Re}(n-m+1)>0$, $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}+m\right)>0$.

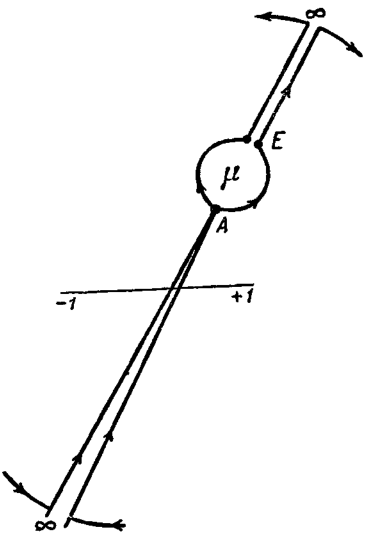
170. Заменим в (18) n на $-n-1$. Получим

$$Q_{-n-1}^{m}(\mu)=\frac{e^{n\pi i}}{4i\sin(n-m)\pi}\,\frac{\Pi(n)}{\Pi(n-m)}\,2^{n+1}\int\limits^{(-1+,\,1-)} X\,dt,$$

где

$$X=(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}(t^2-1)^{-n-1}(t-\mu)^{n-m}.$$

Выберем путь интегрирования так, как указано на черт. 24. Выходя из точки A, мы сперва описываем полуокружность с центром μ, затем проводим прямую от E до ∞, потом полуокружность бесконечного радиуса и, наконец, прямую от ∞ до A. Затем берем симметричный контур, обходящий в отрицательном направлении точку $+1$.



Черт. 24.

Если $\operatorname{Re}(n-m+1)>0$, то интегралы вдоль полуокружностей с центром μ в пределе обращаются в нуль, когда их радиусы стремятся к нулю. Если $\operatorname{Re}(n+m+1)>0$, то обращаются в нуль интегралы вдоль полуокружностей бесконечно большого радиуса.

Таким образом, мы получаем при $\operatorname{Re}(n-m+1)>0$ и $\operatorname{Re}(n+m+1)>0$ следующую формулу:

$$Q_{-n-1}^{m}(\mu)=\frac{e^{n\pi i}}{4i\sin(n-m)\pi}\,\frac{\Pi(n)}{\Pi(n-m)}\,2^{n+1}\times$$
$$\times\left\{e^{-n\pi i}\,2\cos m\pi\int\limits_{\mu}^{\infty}X\,dt-\right.$$
$$\left.-e^{-n\pi i}\,2\cos n\pi\int\limits_{\mu}^{\infty}X\,dt\right\},$$

где под знаками интегралов начальное значение $\arg X$ равно его начальному значению в точке A; $\arg(t+1)$ в точке A равен $-(2\pi-\gamma)$, где γ — угол, образованный прямой, соединяющей -1 и A, с положительным направлением оси μ.

Из равенства (17) получаем

$$P_n^m(\mu)=\frac{-e^{n\pi i}}{4\pi\sin(n-m)\pi}\,\frac{\Pi(n)}{\Pi(n-m)}\,2^{n+1}\int\limits^{(\mu+,\,1+,\,\mu-,\,1-)}(t^2-1)^{-n-1}(t-\mu)^{n-m}\,dt,$$

где в точке A $\arg(t-1)=\gamma$; следовательно,

$$(t^2-1)^{-n-1}(t-\mu)^{n-m}=e^{-2n\pi i}X,$$

откуда

$$P_n^m(\mu)=-\frac{e^{-n\pi i}}{4\pi\sin(n-m)\pi}\,\frac{\Pi(n)}{\Pi(n-m)}\,2^{n+1}\int\limits^{(\mu+,\,1+,\,\mu-,\,1-)}X\,dt.$$

Выбирая путь интегрирования так, как показано на черт. 25, и предполагая, что $\operatorname{Re}(n+m+1)>0$, $\operatorname{Re}(n-m+1)>0$, получаем

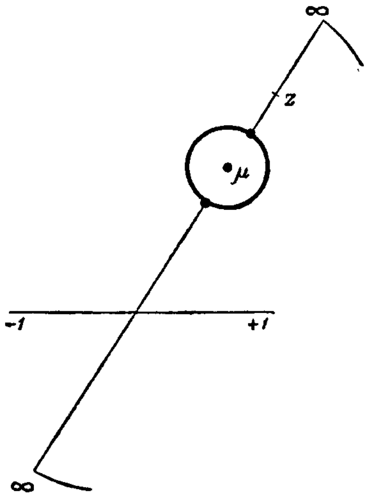
$$\int\limits^{(\mu+,\,1+,\,\mu-,\,1-)}X\,dt=e^{2(n-m)\pi i}\int\limits_{\mu}^{\infty}X\,dt-e^{(n-3m)\pi i}\int\limits_{\mu}^{\infty}X\,dt+$$
$$+e^{-(n+m)\pi i}\int\limits_{\mu}^{\infty}X\,dt-\int\limits_{\mu}^{\infty}X\,dt.$$

После несложных преобразований находим:

$$P_n^m(\mu)=\frac{-e^{-n\pi i}}{4\pi}\frac{\Pi(n)}{\Pi(n-m)}2^{n+1}\left\{-2ie^{-2m\pi i}\int_\mu^\infty X\,dt+2ie^{(n-m)\pi i}\int_\mu^{-\infty}X\,dt\right\}.$$

Подставляя вместо функции $Q_{-n-1}^m(\mu)$ ее выражение через $Q_n^m(\mu)$, $P_n^m(\mu)$, даваемое формулой (31), имеем

$$Q_n(\mu)\sin(n+m)\pi-\pi\cos n\pi\, e^{m\pi i}P_n^m(\mu)=$$
$$=\frac{1}{2i}\frac{\Pi(n)}{\Pi(n-m)}2^{n+1}\left\{2\cos m\pi\int_\mu^\infty X\,dt-\right.$$
$$\left.-2\cos n\pi\int_\mu^\infty X\,dt\right\}.$$



Черт. 25.

Подставляя в это равенство значение $P_n^m(\mu)$, получим формулу

$$Q_n^m(\mu)=2^n e^{-n\pi i}\frac{\Pi(n)}{\Pi(n-m)}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\times$$
$$\times\int_\mu^\infty (t^2-1)^{-n-1}(t-\mu)^{n-m}\,dt,$$

справедливую при $\mathrm{Re}(n+m+1)>0$, $\mathrm{Re}(n-m+1)>0$. В силу первого из этих условий верхний предел интегрирования в полученной формуле можно считать стремящимся к бесконечности в направлении действительной оси или в направлении прямой, соединяющей точки μ и z.

Если t принимает значение, изображаемое точкой E (см. черт. 24), то в полученной формуле $\arg(t-1)=\arg(\mu-1)$, а $\arg(t+1)$ на 2π меньше, чем $\arg(\mu+1)$. Поэтому, если мы хотим, чтобы $\arg(t^2-1)$ равнялся $\arg(\mu^2-1)$, результат следует умножить на $e^{2n\pi i}$. С другой стороны, $t-\mu$ удовлетворяет тем же условиям в точке A, и если мы хотим брать интеграл вдоль прямой, соединяющей точки μ и $\mu+\sqrt{\mu^2-1}$, то $\arg(t-\mu)$ будет на π меньше, чем $\arg\sqrt{\mu^2-1}$; следовательно, для того чтобы в интеграле можно было считать, что $\arg(t-\mu)=\arg\sqrt{\mu^2-1}$, мы должны умножить все выражение на $e^{-(n-m)\pi i}$. Учтя все сказанное и положив $t=\mu+\sqrt{\mu^2-1}\,e^u$, где u — действительное число, получим следующую формулу:

$$Q_n^m(\mu)=e^{m\pi i}\frac{\Pi(n)}{\Pi(n-m)}\int_0^\infty\frac{\mathrm{ch}\,mu}{(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\,\mathrm{ch}\,u)^{n+1}}du; \tag{117}$$

здесь $\mathrm{Re}(n+m+1)>0$ и $\mathrm{Re}(n-m+1)>0$.

Если $u=0$, то в формуле (117) $\arg(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\,\mathrm{ch}\,u)=\arg(\mu+\sqrt{\mu^2-1})$. Эта формула представляет собой обобщение формулы, полученной Гейне[1] для целых m и n и $n-m+1>0$.

171. В формуле (20)

$$Q_n^m(\mu)=\frac{e^{m\pi i}}{2^{n+1}}\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n)}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n(\mu-t)^{-n-m-1}\,dt,$$

[1]) Kugelfunktionen, т. I, стр. 223.

справедливой при $\operatorname{Re}(n+1)>0$, положим

$$t=\mu-\sqrt{\mu^2-1}\,e^u;$$

тогда

$$1-t^2=2\sqrt{\mu^2-1}\,e^u\{\mu-\sqrt{\mu^2-1}\operatorname{ch}u\},$$

и мы получим формулу

$$Q_n^m(\mu)=e^{m\pi i}\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n)}\int\limits_0^{\ln\sqrt{\frac{\mu+1}{\mu-1}}}\{\mu-\sqrt{\mu^2-1}\operatorname{ch}u\}^n\operatorname{ch}mu\,du, \tag{118}$$

где $\operatorname{Re}(n+1)>0$.

В случае $m=0$ формула (117) принимает вид

$$Q_n(\mu)=\int\limits_0^\infty\frac{du}{(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\operatorname{ch}u)^{n+1}}=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty\frac{du}{(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\operatorname{ch}u)^{n+1}}, \tag{119}$$

где $\operatorname{Re}(n+1)>0$ и $-\pi<\arg\mu<\pi$.

Если $\mu=\cos\theta+i\cdot0$ или $\mu=\cos\theta-i\cdot0$, то

$$Q_n(\cos\theta\pm i\cdot0)=\int\limits_0^\infty\frac{du}{(\cos\theta\pm i\sin\theta\operatorname{ch}u)^{n+1}},$$

и, следовательно, в силу (57)

$$Q_n(\cos\theta)=\frac{1}{2}\left[\int\limits_0^\infty\frac{du}{(\cos\theta+i\sin\theta\operatorname{ch}u)^{n+1}}+\int\limits_0^\infty\frac{du}{(\cos\theta-i\sin\theta\operatorname{ch}u)^{n+1}}\right].$$

Аналогично, пользуясь (56), получаем

$$\int\limits_0^\infty\frac{du}{(\cos\theta+i\sin\theta\operatorname{ch}u)^{n+1}}-\int\limits_0^\infty\frac{du}{(\cos\theta-i\sin\theta\operatorname{ch}u)^{n+1}}=-i\pi P_n(\cos\theta).$$

172. Рассмотрим прямоугольник с вершинами в точках $u=-k$, $u=+k$, $u=-k+i\lambda$, $u=k+i\lambda$, где λ—положительное действительное число, не превосходящее π, а k неограниченно возрастает. Предполагая, что этот прямоугольник не содержит нулей функции $\mu+\sqrt{\mu^2-1}\operatorname{ch}u$, мы можем, очевидно, заменить интеграл вдоль $(-k, k)$ интегралом вдоль $(-k+i\lambda,\ k+i\lambda)$. Так как интегралы вдоль двух других сторон прямоугольника стремятся к нулю при $k\to\infty$, то из (119) получаем

$$Q_n(\mu)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty\frac{du}{\{\mu+\sqrt{\mu^2-1}\operatorname{ch}(u+i\lambda)\}^{n+1}}, \tag{120}$$

где $\operatorname{Re}(n+1)>0$.

Чтобы найти те точки (u_0, λ_0), для которых

$$\mu+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}(u_0+i\lambda_0)=0,$$

положим

$$-\frac{\mu}{(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}}=\rho(\cos\chi+i\sin\chi),$$

где χ лежит в интервале $(-\pi,\ \pi)$; имеем: $\rho\cos\chi=\operatorname{ch}u_0\cos\lambda_0$, $\rho\sin\chi=$ $=\operatorname{sh}u_0\sin\lambda_0$. Легко видеть, что если ρ и χ заданы, то эти равенства определяют положительное и отрицательное значения u_0; тогда

$$\operatorname{tg}\lambda_0 = \frac{\operatorname{tg}\chi}{\operatorname{th} u_0}.$$

Если χ принадлежит интервалу $(0, \pi)$, то и λ_0 принадлежит тому же интервалу, а если χ принадлежит интервалу $(-\pi, 0)$, то и λ_0 принадлежит этому же интервалу. Мы можем рассматривать точки (u_0, λ_0), и $(-u_0, \lambda_0)$, где u_0 положительно, а λ_0 лежит в интервале $(0, \pi)$.

В случае $0 \leqslant \lambda < \lambda_0$ формула (120) справедлива. Если $\lambda > \lambda_0$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\{\mu + (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch}(u+i\lambda)\}^{n+1}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\{\mu + (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch}(u+i\pi)\}^{n+1}},$$

так как внутри полосы, ограниченной горизонтальными прямыми, соответствующими $\lambda = \pi$ и λ, равному некоторому значению $> \lambda_0$, нет ни одного нуля функции $\mu + (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch}(u+i\lambda)$.

Чтобы вычислить интеграл, стоящий справа, заметим, что если $u_0 > 0$, то

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{du}{\{\mu + (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} u\}^{n+1}} - \int_{-\infty}^{0} \frac{du}{\{\mu + (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch}(u+i\pi)\}^{n+1}} =$$

$$= -i \int_{0}^{\pi} \frac{d\lambda}{\{\mu + (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos\lambda\}^{n+1}};$$

действительно, сумма интегралов, взятых вдоль трех прямолинейных отрезков $-\infty < u \leqslant 0$, $\lambda = 0$; $u = 0$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \pi$; $0 \geqslant u > -\infty$, $\lambda = \pi$, равна нулю, так как в полуполосе с этими сторонами подинтегральное выражение не обращается в нуль.

Если $\operatorname{Re}(\mu) > 0$, то стоящий справа интеграл равен $-i\pi P_n(\mu)$, а при $\operatorname{Re}(\mu) < 0$ он равен

$$-i\pi \left\{ P_n(\mu) - \frac{2}{\pi} e^{\pm n\pi i} \sin n\pi\, Q_n(\mu) \right\},$$

где верхний знак берется при $\operatorname{Im}(\mu) > 0$ и нижний — при $\operatorname{Im}(\mu) < 0$.

Аналогично, если $u_0 < 0$, то

$$\int_{0}^{\infty} \frac{du}{\{\mu + (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} u\}^{n+1}} - \int_{0}^{\infty} \frac{du}{\{\mu + (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch}(u+i\pi)\}^{n+\frac{1}{2}}} =$$

$$= i \int_{0}^{\pi} \frac{d\lambda}{\{\mu + (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos\lambda\}^{n+1}};$$

правая часть этого выражения равна $i\pi P_n(\mu)$ при $\operatorname{Re}(\mu) > 0$, а при $\operatorname{Re}(\mu) < 0$ она равна

$$i\pi \left\{ P_n(\mu) - \frac{2}{\pi} e^{\pm n\pi i} \sin n\pi\, Q_n(\mu) \right\},$$

где верхний знак берется при $\operatorname{Im}(\mu) > 0$, а нижний — при $\operatorname{Im}(\mu) < 0$.

Так как оба интеграла, от 0 до ∞ и от $-\infty$ до 0, равны между собой, мы получаем, что если $\lambda > \lambda_0$, то при $\operatorname{Re}(\mu) > 0$ выражение

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\{\mu + (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} u\}^{n+1}} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\{\mu - (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} u\}^{n+1}}$$

равно $-i\pi P_n(\mu)$, когда $u_0>0$, и равно $i\pi P_n(\mu)$, когда $u_0<0$; при $\operatorname{Re}(\mu)<0$ оно равно

$$-i\pi\left\{P_n(\mu)-\frac{2}{\pi}e^{\pm n\pi i}\sin n\pi\, Q_n(\mu)\right\},$$

когда $u_0>0$ и равно

$$i\pi\left\{P_n(\mu)-\frac{2}{\pi}e^{\mp n\pi i}\sin n\pi\, Q_n(\mu)\right\},$$

когда $u_0<0$.

Таким образом, если $\lambda>\lambda_0$, то при $\operatorname{Re}(\mu)>0$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{\{\mu+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}(u+i\lambda)\}^{n+1}}=Q_n(\mu)\pm i\pi P_n(\mu),$$

где верхний знак берется при $u_0>0$, а нижний — при $u_0<0$. Если $\operatorname{Re}(\mu)<0$, то рассматриваемый интеграл равен

$$Q_n(\mu)\pm i\pi\left\{P_n(\mu)-\frac{2}{\pi}e^{\pm n\pi i}\sin n\pi\, Q_n(\mu)\right\},$$

где перед скобкой верхний знак берется при $u_0>0$ и нижний — при $u_0<0$, а в показателе верхний знак соответствует $\operatorname{Im}(\mu)>0$, а нижний — $\operatorname{Im}(\mu)<0$.

Если μ действительно и заключено между 0 и 1, то $\chi=\frac{\pi}{2}$, $\lambda_0=\frac{\pi}{2}$ и $u_0>0$.

Таким образом, при $\lambda<\frac{\pi}{2}$ имеем

$$Q_n(\cos\theta+i\cdot 0)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{\{\cos\theta+i\sin\theta\operatorname{ch}(u+i\lambda)^{n+1}},$$

где $\operatorname{Re}(n+1)>0$; при $\lambda>\frac{\pi}{2}$ получаем

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{\{\cos\theta+i\sin\theta\operatorname{ch}(u+i\lambda)\}^{n+1}}=Q_n(\cos\theta+i\cdot 0)+i\pi P_n(\cos\theta+i\cdot 0).$$

173. Воспользовавшись для преобразования формулы (117) найденным Уипплом соотношением (92) между функциями P и Q, получим

$$\left(\frac{1}{2}\pi\right)^{\frac{1}{2}}\Pi(m+n)(\operatorname{sh}\alpha)^{-\frac{1}{2}}P_{-m-\frac{1}{2}}^{-n-\frac{1}{2}}(\operatorname{cth}\alpha)=\frac{\Pi(n)}{\Pi(n-m)}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{ch} m\varphi}{(\operatorname{ch}\alpha+\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\varphi)^{n+1}}\,d\varphi,$$

где $\operatorname{Re}(n+m+1)>0$, $\operatorname{Re}(n-m+1)>0$.

Заменив $-m-\frac{1}{2}$ на n, $-n-\frac{1}{2}$ на m и $\operatorname{sh}\alpha$ на $\operatorname{csch}\psi$, получим

$$P_n^m(\operatorname{ch}\psi)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\Pi\left(-m-\frac{1}{2}\right)}{\Pi(n-m)\,\Pi(-m-n-1)}\operatorname{sh}^{-m}\psi\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{ch}\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{(\operatorname{ch}\varphi+\operatorname{ch}\psi)^{\frac{1}{2}-m}}\,d\varphi,$$

или, заменив m на $-m$,

$$P_n^{-m}(\operatorname{ch}\psi) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}{\Pi(n+m)\,\Pi(m-n-1)} \operatorname{sh}^m\psi \int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{(\operatorname{ch}\varphi+\operatorname{ch}\psi)^{m+\frac{1}{2}}}\, d\varphi, \qquad (121)$$

где $\operatorname{Re}(m-n)>0$, $\operatorname{Re}(m+n+1)>0$.

В случае $m=0$ получаем

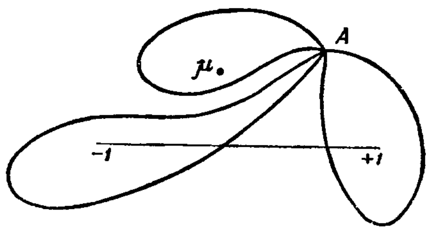
$$P_n(\operatorname{ch}\psi) = -\frac{2}{\pi}\sin n\pi \int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{(2\operatorname{ch}\varphi+2\operatorname{ch}\psi)^{\frac{1}{2}}}\, d\varphi, \qquad (122)$$

где $\operatorname{Re}(n)$ заключено между 0 и -1.

§ 26. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОДНОГО ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

174. Пусть n и m таковы, что $n-m$ целое действительное число, положительное или отрицательное, а в остальном произвольны. В этом случае входящий в выражение

$$\frac{1}{2\pi i}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} \int \frac{1}{2^n}(t^2-1)^n (t-\mu)^{-n-m-1}\, dt \qquad (*)$$



Черт. 26.

интеграл, взятый по замкнутому контуру, охватывающему три особых точки 1, -1 и μ, удовлетворяет уравнению (2), так как после обхода по замкнутому пути подинтегральное выражение возвращается к своему начальному значению. Примем за путь интегрирования окружность с центром в точке μ; если мы положим, как в п. 166, $t=\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cdot e^{i(\varphi-\psi)\mp u}$, то получим, что для того, чтобы точки 1 и -1 лежали внутри данного круга, должно быть $u>\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\mu+1}{\mu-1}\right|$, а рассматриваемый интеграл примет вид

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \{\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos(\varphi-\psi\pm iu)\}^n e^{-m(\varphi-\psi)i\pm mu}\, d\varphi.$$

Этот интеграл был вычислен в п. 166 при $u<\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\mu+1}{\mu-1}\right|$ для целых действительных m и произвольных n; мы вычислим сейчас этот интеграл для рассматриваемого здесь случая.

Выражение $(*)$ обозначим $\frac{1}{2\pi i}I(n, m)$. Обозначим, далее, L, M, N интегралы от $\frac{1}{2^n}(t^2-1)^n(t-\mu)^{-n-m-1}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}$, взятые вдоль замкнутых контуров, выходящих из точки A и охватывающих точки -1, 1 и μ соответственно (черт. 26). При этом полагаем, что в точке A $\arg(t-1)=\varphi$ и $\arg(t+1)=\varphi'$, где φ и φ' — углы (между $-\pi$ и π), образованные с положительным направлением оси t отрезками A, 1 и A, -1 соответственно. Тогда, вспоминая, что $n-m$ целое, получаем

$$(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} \int^{(\mu+,\,1+,\,\mu-,\,1-)} \frac{1}{2^n}(t^2-1)^n (t-\mu)^{-n-m-1}\, dt =$$

$$= N + Me^{-4n\pi i} - Ne^{2n\pi i} - M = (1-e^{2n\pi i})\{N+Me^{-4n\pi i}(1+e^{2n\pi i})\}$$

и, вспоминая, что в выражении, определяющем $Q_n^m(\mu)$, начальное значение $\arg(t+1)$ в точке A на 2π меньше, чем в данном случае, находим

$$(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int^{(-1+,\,1-)}\frac{1}{2^n}(t^2-1)^n(t-\mu)^{-n-m-1}\,dt=(L-M)\,e^{-2n\pi i}.$$

Мы имеем

$$I(n,m)=N+Le^{-4\pi ni}+Me^{-2\pi ni},$$

откуда

$$(1-e^{2n\pi i})\,I(n,m)=(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int^{(\mu+,\,1+,\,\mu-,\,1-)}\frac{1}{2^n}(t^2-1)^n(t-\mu)^{-n-m-1}\,dt-$$
$$-(1-e^{-2n\pi i})(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int^{(-1+,\,1-)}\frac{1}{2^n}(t^2-1)^n(t-\mu)^{-n-m-1}\,dt$$

или

$$e^{-n\pi i}\cdot 2i\sin n\pi\, I(n,m)=$$
$$=\frac{\Pi(n)}{\Pi(n+m)}\cdot 4\pi\sin n\pi\cdot e^{n\pi i}P_n^m(\mu)-\frac{\Pi(n)}{\Pi(n+m)}\cdot 8\sin^2 n\pi\, Q_n^m(\mu).$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos(\varphi-\psi\pm iu)\}^n e^{-m(\varphi-\psi)i\pm mu}\,d\varphi=$$
$$=\frac{\Pi(n)}{\Pi(n+m)}\left\{P_n^m(\mu)-\frac{2}{\pi}e^{-n\pi i}\sin n\pi\, Q_n^m(\mu)\right\},\qquad(123)$$

где $n-m$ — целое действительное число и $u>\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\mu+1}{\mu-1}\right|$.

Если числа m и n оба целые, то

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos(\varphi-\psi\pm iu)\}^n e^{-m(\varphi-\psi)i\pm mu}\,d\varphi=\frac{\Pi(n)}{\Pi(n+m)}P_n^m(\mu).\qquad(124)$$

Выражение, стоящее справа, обращается в нуль, когда n и m оба целые положительные и $n<m$, так как в этом случае $P_n^m(\mu)=0$.

Заменим теперь в формуле (123) m на $-m$, тогда справа получим

$$\frac{\Pi(n)}{\Pi(n-m)}\left\{P_n^{-m}(\mu)-\frac{2}{\pi}e^{-n\pi i}\sin n\pi\, Q_n^{-m}(\mu)\right\};$$

если сюда вместо $P_n^{-m}(\mu)$ и $Q_n^{-m}(\mu)$ подставить их выражения через $P_n^m(\mu)$ и $Q_n^m(\mu)$, даваемые формулами (33) и (21), и учесть что $n+m$ целое положительное, то получим

$$\frac{\Pi(n)}{\Pi(n+m)}P_n^m(\mu).$$

Таким образом, мы получаем следующую формулу:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos(\varphi-\psi\pm iu)\}^n e^{m(\varphi-\psi)i\mp mu}\,d\varphi=\frac{\Pi(n)}{\Pi(n+m)}P_n^m(\mu),\qquad(125)$$

справедливую при всех n и m, таких, что $n+m$ — целое. Если m и n целые положительные и $m>n$, то $P_n^m(\mu)=0$ и интеграл (125) обращается в нуль. При этом предполагается, что $u>\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\mu+1}{\mu-1}\right|$.

175. Заменив в формуле (123) n на $-n-1$, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-mi(\varphi-\psi)\pm mu}}{\{\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos(\varphi-\psi\pm iu)\}^{n+1}}d\varphi=$$
$$=\frac{\Pi(-n-1)}{\Pi(m-n-1)}\left\{P_n^m(\mu)+\frac{2}{\pi}e^{n\pi i}\sin n\pi\, Q_{-n-1}^m(\mu)\right\},$$

где $m+n$ — целое действительное число.

Подставив вместо функции $Q_{-n-1}^m(\mu)$ ее выражение через $P_n^m(\mu)$ и $Q_n^m(\mu)$, получим после подстановки, что коэффициент при $P_n^m(\mu)$ равен

$$\frac{\Pi(-n-1)}{\Pi(m-n-1)}\left\{1-\frac{2}{\pi}e^{n\pi i}\sin n\pi\,\frac{\pi\sin n\pi}{\sin(n-m)\pi}e^{m\pi i}\right\};$$

легко видеть, что он равен нулю, если $m+n$ целое число. Коэффициент при $Q_n^m(\mu)$ равен

$$\frac{\Pi(-n-1)}{\Pi(m-n-1)}\,\frac{2}{\pi}\,e^{n\pi i}\sin n\pi\,\frac{\sin(n+m)\pi}{\sin(n-m)\pi}.$$

Таким образом, мы получаем следующую формулу:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-m(\varphi-\psi)i\pm mu}}{\{\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos(\varphi-\psi\pm iu)\}^{n+1}}d\varphi=\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n)}\,\frac{2}{\pi}\,e^{n\pi i}\sin(n+m)\pi\, Q_n^m(\mu);$$

ее правая часть обращается в нуль при всех целых значениях $n+m$, за исключением того случая, когда $n-m$ целое отрицательное число, так как в этом последнем случае $\Pi(n-m)$ обращается в бесконечность.

Если m и n целые и $n<m$, то заменим $\Pi(n-m)$ равным ему выражением $\frac{\pi\csc(m-n)\pi}{\Pi(m-n-1)}$; произведение

$$\csc(m-n)\pi\sin(n+m)\pi$$

стремится к единице, когда m стремится к целому значению. Мы получаем следующую формулу:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-m(\varphi-\psi)i\pm mu}}{\{\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos(\varphi-\psi\pm iu)\}^{n+1}}d\varphi=\frac{2(-1)^{n+1}}{\Pi(m-n-1)\Pi(n)}Q_n^m(\mu),\qquad(126)$$

где $u>\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\mu+1}{\mu-1}\right|$, а m и n целые и $m>n$; при $m\leqslant n$ полученное выражение обращается в нуль.

Формулы (124), (126) и (136) совпадают с результатами, полученными Гейне[1]); более общие формулы (123) и (125) у Гейне отсутствуют.

§ 27. ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛ ДИРИХЛЕ И МЕЛЕРА ДЛЯ $P_n^m(\cos\theta)$

176. В формуле (83) п. 155

$$P_n^m(\mu)=\frac{1}{2\pi i}2^m\frac{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int^{\left(z+,\,\frac{1}{z}-\right)}\frac{h^{n+m}}{(1-2\mu h+h^2)^{m+\frac{1}{2}}}dh$$

положим $\mu=\cos\theta+i\cdot 0$; тогда отрезок, соединяющий точки z и $\frac{1}{z}$ на плоскости h, перпендикулярен действительной оси, и путь интегрирования

[1]) Kugelfunktionen, т. I, стр. 211.

можно считать состоящим из следующих частей: дуги AA' единичного круга, окружности с центром P' и радиусом $P'A'$, дуги $A'A$ и, наконец, окружности с центром P, т. е. $\frac{1}{z}$, проходящей через A и обходящей P в отрицательном направлении. Независимо от того, будет ли θ заключено между 0 и $\frac{\pi}{2}$ (черт. 27,*а*) или между $\frac{\pi}{2}$ и π (черт. 27,*б*), точка O лежит слева от пути интегрирования.

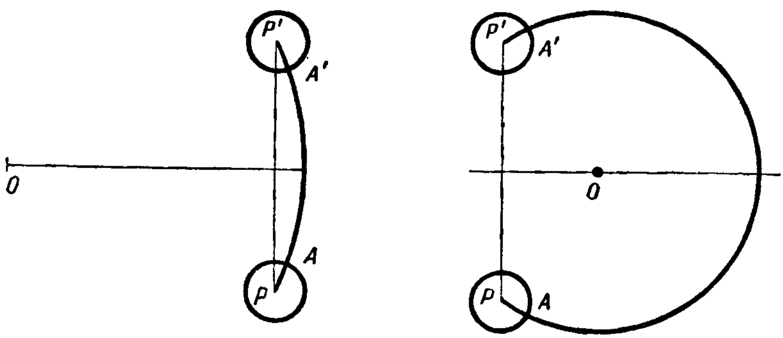
Если мы предположим, что $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}-m\right)>0$, то интегралы по окружностям будут стремиться к нулю при $A\to P$ и $A'\to P'$. Так как

$$P_n^m(\cos\theta)\equiv e^{\frac{1}{2}m\pi i}P_n^m(\cos\theta+i\cdot 0),$$

то оставшаяся часть интеграла равна

$$e^{\frac{1}{2}m\pi i}\frac{2^m}{2\pi i}\frac{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}\sin^m\theta\cdot e^{\frac{1}{2}m\pi i}\left(1-e^{-(2m+1)\pi i}\right)\int\limits_A^{A'}\frac{h^{n-\frac{1}{2}}}{(h+h^{-1}-2\cos\theta)^{m+\frac{1}{2}}}\,dh.$$

В случае 27, *а* начальное значение $\arg\left[(1-hz)\left(1-\frac{h}{z}\right)\right]$ в точке A равно $\angle AP'O-\angle APO$, т. е. $-\theta$; следовательно, значение



а *б*

Черт. 27.

$\arg(h+h^{-1}-2\cos\theta)$ в точке A стремится к нулю при $A\to P$. То же самое верно и в случае 27,*б*.

Так как

$$1-e^{-(2m+1)\pi i}=2e^{-m\pi i}\cos m\pi \quad\text{и}\quad \Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{\Pi\left(-m-\frac{1}{2}\right)}\cos m\pi,$$

то в пределе получаем

$$P_n^m(\cos\theta)=\frac{2^{m+1}}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-m-\frac{1}{2}\right)}\sin^m\theta\int\limits_0^\theta\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{(2\cos\varphi-2\cos\theta)^{m+\frac{1}{2}}}\,d\varphi, \qquad (127)$$

где $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}-m\right)>0$ и $h=e^{i\varphi}$.

Заменив m на $-m$, получим

$$P_n^{-m}(\cos\theta)=\frac{2^{-m+1}}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\sin^{-m}\theta\int_0^\theta\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{(2\cos\varphi-2\cos\theta)^{\frac{1}{2}-m}}\,d\varphi,\qquad(128)$$

где $\operatorname{Re}\left(m+\frac{1}{2}\right)>0$, а n произвольно.

Так как

$$P_n^{-m}(\cos\theta)=\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}\left\{\cos m\pi\,P_n^m(\cos\theta)-\frac{2}{\pi}\sin m\pi\,Q_n^m(\cos\theta)\right\},$$

то мы имеем

$$\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}\left[\cos m\pi\,P_n^m(\cos\theta)-\frac{2}{\pi}\sin m\pi\,Q_n^m(\cos\theta)\right]=$$

$$=\frac{2^{-m+1}}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\sin^{-m}\theta\int_0^\theta\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{(2\cos\varphi-2\cos\theta)^{\frac{1}{2}-m}}\,d\varphi,\qquad(129)$$

где $\operatorname{Re}\left(m+\frac{1}{2}\right)>0$, а n произвольно.

В том частном случае, когда $m=0$, получается мелеровская форма интегрального представления Дирихле для $P_n(\cos\theta)$:

$$P_n(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}\int_0^\theta\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{(2\cos\varphi-2\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}\,d\varphi;\qquad(130)$$

n здесь может быть любым.

Если m целое действительное число, то для любых значений n

$$(-1)^m\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}P_n^m(\cos\theta)=$$

$$=\frac{2^{-m+1}}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\sin^{-m}\theta\int_0^\theta\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{(2\cos\varphi-2\cos\theta)^{\frac{1}{2}-m}}\,d\varphi.\qquad(131)$$

177. Заменив в формулах (127) и (129) θ на $\pi-\theta$, φ на $\pi-\varphi$ и воспользовавшись формулами (62) и (63), получим

$$P_n^m(\cos\theta)\cos(n+m)\pi-\frac{2}{\pi}Q_n^m(\cos\theta)\sin(n+m)\pi=$$

$$=\frac{2^{m+1}\sin^m\theta}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-m-\frac{1}{2}\right)}\int_\theta^\pi\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)(\varphi-\pi)}{(2\cos\theta-2\cos\varphi)^{m+\frac{1}{2}}}\,d\varphi,\qquad(132)$$

где $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}-m\right)>0$ и n — любое;

$$\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}\left\{P_n^m(\cos\theta)\cos n\pi-\frac{2}{\pi}Q_n^m(\cos\theta)\sin n\pi\right\}=$$

$$=\frac{2^{-m+1}\sin^{-m}\theta}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\int_\theta^\pi\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)(\varphi-\pi)}{(2\cos\theta-2\cos\varphi)^{\frac{1}{2}-m}}\,d\varphi,\qquad(133)$$

где $\operatorname{Re}\left(m+\frac{1}{2}\right)>0$ и n — любое.

При $m=0$ получаем

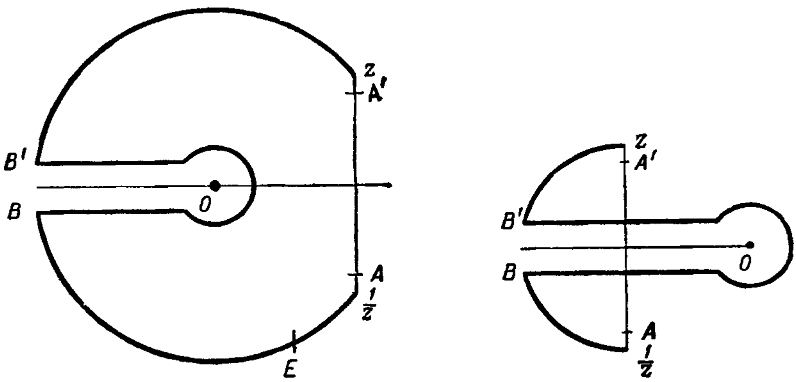
$$P_n(\cos\theta)\cos n\pi-\frac{2}{\pi}Q_n(\cos\theta)\sin n\pi=\frac{2}{\pi}\int_{\theta}^{\pi}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)(\varphi-\pi)}{(2\cos\theta-2\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}}\,d\varphi. \quad (134)$$

При целых n эта формула сводится к

$$P_n(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}\int_{\theta}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{(2\cos\theta-2\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}}\,d\varphi, \quad (135)$$

т. е. ко второй формуле Мелера для $P_n(\cos\theta)$.

178. Пусть теперь $\operatorname{Re}(n+m+1)>0$ и $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}-m\right)>0$. Путь интегрирования, соединяющий точки z и $\frac{1}{z}$, можно считать состоящим из дуги



Черт. 28.

единичной окружности, соединяющей точки $\frac{1}{z}$ и -1, прямолинейного отрезка, идущего от -1 и оканчивающегося в окрестности начала координат, малой окружности вокруг начала, отрезка, идущего в точку -1, и, наконец, дуги окружности, идущей в точку z (черт. 28). Интеграл по малой окружности с центром в O в пределе обращается в нуль.

В точке A, близкой к $\frac{1}{z}$ и лежащей на отрезке, соединяющем $\frac{1}{z}$ и z, $\arg(1-2\mu h+h^2)$ равен нулю; в точке E, близкой к $\frac{1}{z}$ и лежащей на дуге единичной окружности, он равен $\pi-0$; в точке B он равен нулю. Если на дуге EB положить $h=e^{-i\varphi}$, то $\arg(1-2\mu h+h^2)=\pi-\varphi$, где φ меняется от 0 в точке A до π в точке B. Вдоль второго участка пути интегрирования положим $h=e^{-i\pi}e^{-u}$, где u возрастает от 0 до ∞, а $\arg(1-2h\mu+h^2)=0$. Для третьей части пути полагаем $h=e^{i\pi}e^{-u}$, где u меняется от ∞ до 0; при этом $\arg(1-2h\mu+h^2)=0$. Вдоль последней части пути интегрирования полагаем $h=e^{i\varphi}$, где φ меняется от π до θ.

Таким образом, получаем

$$P_n^m(\cos\theta)=e^{\frac{1}{2}m\pi i}\,P_n^m(\cos\theta+i\cdot 0)=$$

$$= \frac{2^{m+1}}{2\pi i}\,\frac{\sin^m\theta}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-m-\frac{1}{2}\right)}\int_{A}^{A'}\frac{h^{n+m}}{(1-2\mu h+h^2)^{m+\frac{1}{2}}}\,dh =$$

$$= \frac{2^m}{i}\,\frac{\sin^m\theta}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-m-\frac{1}{2}\right)}\left[\int_{\theta}^{\pi}\frac{(-i)\,e^{-(n+m+1)\varphi i}\,d\varphi}{e^{i\left(m+\frac{1}{2}\right)(\pi-\varphi)}\,(2\cos\theta-2\cos\varphi)^{m+\frac{1}{2}}}+\right.$$

$$+\left(1-e^{2\pi(n+m)i}\right)\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-(n+m)i\pi}(-1)\,e^{-(n+m+1)u}}{e^{-\left(m+\frac{1}{2}\right)u}\,(2\cos\theta+2\operatorname{ch}u)^{m+\frac{1}{2}}}\,du+$$

$$\left.+\int_{\pi}^{\theta}\frac{i\,e^{(n+m+1)\varphi i}}{e^{-i\left(m+\frac{1}{2}\right)(\pi-\varphi)}\,(2\cos\theta+2\operatorname{ch}u)^{m+\frac{1}{2}}}\,d\varphi\right].$$

Эта формула приводится к следующему виду:

$$P_n^m(\cos\theta) =$$

$$= \frac{2^{\frac{1}{2}}\sin^m\theta}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-m-\frac{1}{2}\right)}\left[-\int_{\theta}^{\pi}\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi-\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi\right]}{(\cos\theta-\cos\varphi)^{m+\frac{1}{2}}}\,d\varphi+\right.$$

$$\left.+\sin(n+m)\pi\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)u}}{(\cos\theta+\operatorname{ch}u)^{m+\frac{1}{2}}}\,du\right], \qquad (136)$$

где

$$\operatorname{Re}(n+m+1)>0,\quad \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}-m\right)>0.$$

При $m=0$ получаем

$$P_n(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}\int_{\theta}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{(2\cos\theta-2\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}}\,d\varphi, \qquad (137)$$

где $\operatorname{Re}(n+1)>0$; это — вторая формула Мелера для $P_n(\cos\theta)$.

Если $n-m$ целое положительное и $\operatorname{Re}\left(m+\frac{1}{2}\right)>0$, то

$$P_n^{-m}(\cos\theta)=$$

$$=\frac{2^{1-m}}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\sin^{-m}\theta\int_{\theta}^{\pi}\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi-m\pi\right]}{(2\cos\theta-2\cos\varphi)^{m+\frac{1}{2}}}\,d\varphi. \qquad (138)$$

Все эти формулы можно рассматривать как обобщения формул Мелера и Дирихле.

Если условие $\operatorname{Re}(n+m+1)>0$ не предполагается, но

$$\operatorname{Re}(m-n)>0,$$

то соответствующие формулы можно получить, выбрав путь интегрирования так, чтобы он не приближался к точке $h=0$, а включал бы в себя как часть окружность бесконечно большого радиуса.

§ 28. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ $P_n^m(\operatorname{ch}\psi)$ В ВИДЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

179. Если $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}-m\right)>0$, а μ действительно и >1, то в выражении

$$P_n^m(\mu)=\frac{1}{2\pi i}2^m\frac{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int\limits_A^{(z+,\,\frac{1}{z}-)}\frac{h^{n+m}}{(1-2\mu h+h^2)^{m+\frac{1}{2}}}\,dh$$

путь интегрирования можно считать состоящим из отрезка AA', окружности с центром z, прямолинейного отрезка $A'A$ и, наконец, окружности с центром $\frac{1}{z}$, проходящей через A (черт. 29). Если радиусы указанных окружностей стремятся к нулю, то интегралы по этим окружностям также стремятся к нулю. Интегралы по прямолинейным отрезкам равны

$$\left(1-e^{-(2m+1)\pi i}\right)\int\limits_A^{A'}\frac{h^{n+m}}{(1-2\mu h+h^2)^{m+\frac{1}{2}}}\,dh.$$

Пусть теперь μ действительно и больше 1, скажем, $\mu=\operatorname{ch}\psi$, тогда $z=e^{\psi}$, $\frac{1}{z}=e^{-\psi}$; соединяющий эти точки отрезок лежит на действительной оси.

Черт. 29.

Начальное значение $\arg(1-2\mu h+h^2)$ в точке A в этом случае равно $-\pi$; таким образом, полагая $h=e^u$, получаем, что при $A\to e^{-\psi}$ рассматриваемый интеграл в пределе равен

$$e^{\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi i}\left(1-e^{-(2m+1)\pi i}\right)\int\limits_{-\psi}^{\psi}\frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)u}}{(2\operatorname{ch}\psi-2\operatorname{ch}u)^{m+\frac{1}{2}}}\,d\varphi.$$

Итак,

$$P_n^m(\operatorname{ch}\psi)=\frac{2^{m+1}\operatorname{sh}^m\psi}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-m-\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^{\psi}\frac{\operatorname{ch}\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{(2\operatorname{ch}\psi-2\operatorname{ch}u)^{m+\frac{1}{2}}}\,du, \tag{139}$$

где $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}-m\right)>0$ и $\arg(2\operatorname{ch}\psi-2\operatorname{ch}u)=0$. Аналогично,

$$P_n^{-m}(\operatorname{ch}\psi)=$$
$$=\frac{2^{1-m}\operatorname{sh}^{-m}\psi}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^{\psi}\operatorname{ch}\left(n+\frac{1}{2}\right)u\,(2\operatorname{ch}\psi-2\operatorname{ch}u)^{m-\frac{1}{2}}\,du, \tag{140}$$

где $\operatorname{Re}\left(m+\frac{1}{2}\right)>0$ и n произвольно.

В частности,

$$P_n(\operatorname{ch}\psi)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\psi}\frac{\operatorname{ch}\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{(2\operatorname{ch}\psi-2\operatorname{ch}u)^{\frac{1}{2}}}\,du, \tag{141}$$

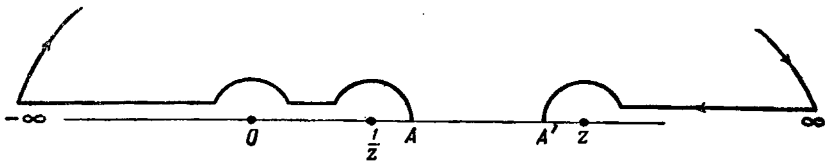
где n произвольно. В этих формулах аргумент действительной величины $2\operatorname{ch}\psi-2\operatorname{ch}u$ принимается равным нулю.

180. В предыдущем интеграле, взятом в пределах от A до A', можно путь интегрирования изменить так, чтобы он шел вдоль действительной оси от A до $-\infty$, обходя точку O по маленькой полуокружности, потом вдоль полуокружности, радиус которой стремится к бесконечности, и, наконец, снова вдоль действительной оси от $+\infty$ до A', с обходом точки z по маленькой полуокружности (черт. 30).

Если мы, наряду с условием $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}-m\right)>0$, допустим, что

$$\operatorname{Re}(n+m+1)>0, \qquad \operatorname{Re}(m-n)>0,$$

то при вычислении $P_n^m(\operatorname{ch}\psi)$ лишь интегрирование вдоль прямолинейного участка пути дает отличный от нуля результат. Считая, что эти условия выполнены, напишем e^u вместо $|h|$ и предположим, что $\mu>1$.



Черт. 30.

Замечая, что $\arg(1-2\mu h+h^2)$ в точке A — начале пути интегрирования — равен $-\pi$, обращается в нуль на полупрямой от 0 до $-\infty$ и равен -2π на полупрямой от ∞ до z, получаем

$$P_n^m(\operatorname{ch}\psi)=\frac{2^m}{2\pi i}\,\frac{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(1-e^{-(2m+1)\pi i}\right)\operatorname{sh}^m\psi\times$$

$$\times\left[\int_{-\psi}^{-\infty}\frac{e^{(n+m+1)u}\,du}{e^{\left(m+\frac{1}{2}\right)u}(2\operatorname{ch}u-2\operatorname{ch}\psi)^{m+\frac{1}{2}}}+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{(n+m+1)\pi i}\,e^{(n+m+1)u}\,du}{e^{\left(m+\frac{1}{2}\right)u}(2\operatorname{ch}u+2\operatorname{ch}\psi)^{m+\frac{1}{2}}}+\right.$$

$$\left.+\int_{\infty}^{\psi}\frac{e^{(n+m+1)u}\,du}{e^{-(2m+1)\pi i}\,e^{\left(m+\frac{1}{2}\right)u}(2\operatorname{ch}u-2\operatorname{ch}\psi)^{m+\frac{1}{2}}}\right].$$

Эта формула может быть приведена к следующему виду:

$$P_n^m(\operatorname{ch}\psi)=$$

$$=\frac{2^m\operatorname{sh}^m\psi}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-m-\frac{1}{2}\right)}\left[\int_{\psi}^{\infty}\frac{-e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)u}\cdot e^{\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi i}-e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)u}\cdot e^{-\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi i}}{(2\operatorname{ch}u-2\operatorname{ch}\psi)^{m+\frac{1}{2}}}\,du+\right.$$

$$\left.+\int_0^{\infty}\frac{2e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i}\operatorname{ch}\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{(2\operatorname{ch}u+2\operatorname{ch}\psi)^{m+\frac{1}{2}}}\,du\right].$$

Заменив n на $-n-1$, отчего значение $P_n^m(\operatorname{ch}\psi)$ не изменится, мы получим для $P_n^m(\operatorname{ch}\psi)$ похожее выражение, которое можно иначе получить, беря полуокружности, входящие в состав пути интегрирования, не в верхней, а в нижней полуплоскости. Сложив эти два выражения для $P_n^m(\operatorname{ch}\psi)$, мы получим формулу

$$P_n^m(\operatorname{ch}\psi)=\frac{2^m\operatorname{sh}^m\psi}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-m-\frac{1}{2}\right)}\left[\int_{\psi}^{\infty}\frac{2\sin m\pi\operatorname{ch}\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{(2\operatorname{ch}u-2\operatorname{ch}\psi)^{m+\frac{1}{2}}}\,du-\right.$$
$$\left.-\int_0^{\infty}\frac{2\sin n\pi\operatorname{ch}\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{(2\operatorname{ch}u+2\operatorname{ch}\psi)^{m+\frac{1}{2}}}\,du\right],\tag{142}$$

где $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}-m\right)>0$, $\operatorname{Re}(m-n)>0$, $\operatorname{Re}(m+n+1)>0$.

При $m=0$ и $-1<\operatorname{Re}(n)<0$ получаем формулу (122)

$$P_n(\operatorname{ch}\psi)=-\frac{2}{\pi}\sin n\pi\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{ch}\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{(2\operatorname{ch}u+2\operatorname{ch}\psi)^{\frac{1}{2}}}\,du,$$

которая уже была выведена в п. 173.

Если мы умножим полученные два выражения для $P_n^m(\operatorname{ch}\psi)$ на $e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i}$ и $e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i}$ соответственно и вычтем одно из другого, то получим

$$P_n^m(\operatorname{ch}\psi)=\frac{2^m\operatorname{sh}^m\psi}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-m-\frac{1}{2}\right)}\operatorname{csc}\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\times$$
$$\times\int_{\psi}^{\infty}\frac{2\sin n\pi\cos m\pi\operatorname{sh}\left(n+\frac{1}{2}\right)u+2\cos n\pi\sin m\pi\operatorname{ch}\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{(2\operatorname{ch}u-2\operatorname{ch}\psi)^{m+\frac{1}{2}}}\,du.$$

В случае $m=0$ эта формула принимает вид

$$P_n(\operatorname{ch}\psi)=\frac{2}{\pi}\operatorname{ctg}\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\int_{\psi}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{(2\operatorname{ch}u-2\operatorname{ch}\psi)^{\frac{1}{2}}}\,du.\tag{143}$$

В том важном частном случае, когда $n=-\frac{1}{2}+pi$, где p — действительное число, имеем

$$P^m_{-\frac{1}{2}+pi}(\operatorname{ch}\psi)=\frac{2^{m+1}\operatorname{sh}^m\psi}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-m-\frac{1}{2}\right)}\left\{\int_{\psi}^{\infty}\frac{\cos pu\sin m\pi}{(2\operatorname{ch}u-2\operatorname{ch}\psi)^{m+\frac{1}{2}}}\,du+\right.$$
$$\left.+\int_0^{\infty}\frac{\cos pu\operatorname{ch}p\pi}{(2\operatorname{ch}u+2\operatorname{ch}\psi)^{m+\frac{1}{2}}}\,du\right\},$$

где $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}-m\right)>0$.

При $m=0$ получаем

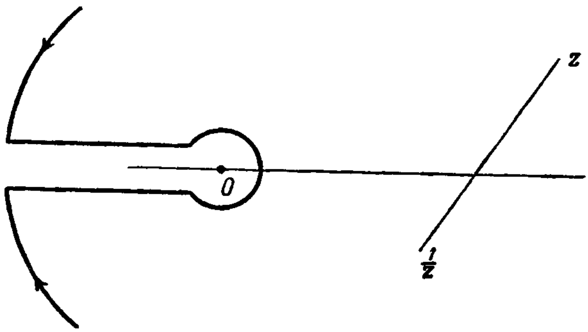
$$P_{-\frac{1}{2}+pi}(\operatorname{ch}\psi)=\frac{2}{\pi}\operatorname{ch}p\pi\int_0^{\infty}\frac{\cos pu}{(2\operatorname{ch}u+2\operatorname{ch}\psi)^{\frac{1}{2}}}\,du.\tag{144}$$

§ 29. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ $P_n^m(\mu)$ В ВИДЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА ПРИ НЕКОТОРЫХ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ

181. В п. 156 было доказано, что если m целое действительное число, то

$$P_n^m(\mu)=\frac{2^m}{2\pi i}\frac{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int^{\left(z+,\frac{1}{z}+\right)}\frac{h^{n+m}}{(1-2\mu h+h^2)^{m+\frac{1}{2}}}\,dh.$$

За путь интегрирования можно принять замкнутую кривую, охватывающую точки z и $\frac{1}{z}$ и оставляющую точку $h=0$ слева (черт. 31); при этом предполагается, что $\operatorname{Re}(\mu)>0$.



Черт. 31.

Если мы предположим, что $\operatorname{Re}(m-n)>0$, $\operatorname{Re}(n+m+1)>0$, то путь интегрирования можно считать состоящим из полуокружности бесконечно большого радиуса, выходящей из точки $h=+\infty$, лежащей на действительной оси, полупрямой, идущей из $h=-\infty$ к точке O, малой окружности с центром O, полупрямой, идущей от O до $-\infty$, и, наконец, полуокружности бесконечно большого радиуса, выходящей из точки $h=-\infty$. Если выполнены указанные выше условия, то отличный от нуля результат получается только при интегрировании вдоль полупрямых. В начальной точке $\arg(1-2\mu h+h^2)=0$. Таким образом, получаем

$$P_n^m(\mu)=\frac{2^m}{2\pi i}\frac{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\left(1-e^{-2\pi(m+n)i}\right)\times$$

$$\times\int_{\infty}^{-\infty}\frac{e^{u(n+m+1)}\,e^{(n+m+1)\pi i}}{e^{\left(m+\frac{1}{2}\right)u}\,e^{2\pi i\left(m+\frac{1}{2}\right)}\,(2\mu+2\operatorname{ch}u)^{m+\frac{1}{2}}}\,du,$$

т. е.

$$P_n^m(\mu)=-\frac{2^{m+1}}{\pi}\frac{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}e^{-2m\pi i}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\sin(n+m)\pi\times$$

$$\times\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{ch}\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{(2\mu+2\operatorname{ch}u)^{m+\frac{1}{2}}}\,du,$$

где $\operatorname{Re}(m-n)>0$, $\operatorname{Re}(n+m+1)>0$, $\operatorname{Re}(\mu)>0$ и $\arg(\mu+\operatorname{ch}u)=0$, когда μ действительно и >1.

В случае $m=0$ и $-1 < \operatorname{Re}(n) < 0$ имеем

$$P_n(\mu) = -\frac{2}{\pi}\sin n\pi \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{(2\mu+2\operatorname{ch}u)^{\frac{1}{2}}}\,du. \tag{145}$$

§ 30. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ $Q_n^m(\cos\theta)$

182. При $\operatorname{Re}(n+m+1)>0$, $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}-m\right)>0$ из формулы (79) получаем

$$Q_n^m(\cos\theta+i\cdot 0) = $$
$$= e^{\frac{3}{2}m\pi i}\,2^m\,\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\cos m\pi}{\pi}\sin^m\theta\int_0^{-i\theta}\frac{h^{n+m}}{(1-2\mu h+h^2)^{m+\frac{1}{2}}}\,dh,$$

где $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

Путь интегрирования можно считать идущим вдоль действительной оси от 0 до 1, а затем от 1 до $e^{-i\theta}$ по дуге единичной окружности. Вдоль прямолинейного участка $\arg(1-2\mu h+h^2)=0$, а вдоль дуги окружности $\arg(1-2\mu h+h^2)=\arg h$. Разбив интеграл на две части, в первой из них положим $h=e^{-u}$, а во второй $h=e^{-i\varphi}$; таким образом, получим

$$Q_n^m(\cos\theta+i\cdot 0) = e^{\frac{3}{2}m\pi i}\cdot 2^m\frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-m-\frac{1}{2}\right)}\sin^m\theta\times$$
$$\times\left[\int_0^\infty\frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)u}}{(2\operatorname{ch}u-2\cos\theta)^{m+\frac{1}{2}}}\,du-\int_0^\theta\frac{ie^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi i}}{(2\cos\varphi-2\cos\theta)^{m+\frac{1}{2}}}\,d\varphi\right].$$

Далее, мы можем взять путь интегрирования от 0 до $-\infty$ вдоль действительной оси, затем вдоль окружности бесконечно большого радиуса, идущей в точку $+\infty$, потом от $+\infty$ до 1 опять вдоль действительной оси, и, наконец, от 1 до $e^{-i\theta}$ по дуге единичной окружности. Если мы предположим, что

$$\operatorname{Re}(m-n)>0,$$

то интеграл по полуокружности бесконечного радиуса обратится в нуль. Положим в интегралах по первому, второму и третьему участкам $h=$ $=e^{-i\pi}e^u$, $h=e^u$ и $h=e^{-i\varphi}$ соответственно. Получим

$$Q_n^m(\cos\theta+i\cdot 0) = e^{\frac{3}{2}m\pi i}\,2^m\frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-m-\frac{1}{2}\right)}\sin^m\theta\times$$
$$\times\left[\int_{-\infty}^\infty\frac{e^{-(n+m+1)\pi i}e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)u}}{(2\operatorname{ch}u+2\cos\theta)^{m+\frac{1}{2}}}\,du-\int_0^\infty\frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)u}}{e^{\left(m+\frac{1}{2}\right)2\pi i}(2\operatorname{ch}u-2\cos\theta)^{m+\frac{1}{2}}}\,du-\right.$$
$$\left.-\int_0^\theta\frac{ie^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)i\varphi}}{e^{\left(m+\frac{1}{2}\right)2\pi i}(2\cos\varphi-2\cos\theta)^{m+\frac{1}{2}}}\,d\varphi\right].$$

Обе полученные формулы верны, когда $-\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(m) < \frac{1}{2}$ и

$$\mathrm{Re}(n+m+1) > 0, \quad \mathrm{Re}(m-n) > 0.$$

Умножив первое из найденных выражений на $e^{-m\pi i}$, второе на $e^{m\pi i}$ и сложив их, получим

$$\cos m\pi\, Q_n^m(\cos\theta + i\cdot 0) = e^{\frac{1}{2}m\pi i}\cdot 2^m \frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-m-\frac{1}{2}\right)}\sin^m\theta\times$$

$$\times\left\{\int_0^\infty \frac{\mathrm{ch}\left(n+\frac{1}{2}\right)u\,du}{(2\,\mathrm{ch}\,u-2\cos\theta)^{m+\frac{1}{2}}} - e^{(m-n)\pi i}\int_0^\infty \frac{\mathrm{ch}\left(n+\frac{1}{2}\right)u\,du}{(2\,\mathrm{ch}\,u+2\cos\theta)^{m+\frac{1}{2}}}\right\}, \quad (146)$$

где $\mathrm{Re}(m-n) > 0$, $\mathrm{Re}(m+n+1) > 0$ и $-\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(m) < \frac{1}{2}$.

При $m=0$ получаем

$$Q_n(\cos\theta + i\cdot 0) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{ch}\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{(2\,\mathrm{ch}\,u-2\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}\,du - e^{-n\pi i}\int_0^\infty \frac{\mathrm{ch}\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{(2\,\mathrm{ch}\,u+2\cos\theta)^{n+\frac{1}{2}}}\,du, \quad (147)$$

где $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$; при этом предполагается, что $\mathrm{Re}(n)$ заключено между 0 и -1. Следует напомнить, что

$$Q_n(\cos\theta + i\cdot 0) = Q_n(\cos\theta) - \frac{\pi i}{2}P_n(\cos\theta).$$

В случае $n = -\frac{1}{2}+pi$, где p действительно, имеем

$$Q_{-\frac{1}{2}+pi}(\cos\theta) - \frac{\pi i}{2}P_{-\frac{1}{2}+pi}(\cos\theta) = \int_0^\infty \frac{\cos pu}{(2\,\mathrm{ch}\,u-2\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}\,du -$$

$$- ie^{p\pi}\int_0^\infty \frac{\cos pu}{(2\,\mathrm{ch}\,u+2\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}\,du.$$

Заменив n на $-n-1$, т. е. $-\frac{1}{2}+pi$ на $-\frac{1}{2}-pi$, получим

$$Q_{-\frac{1}{2}-pi}(\cos\theta) - \frac{\pi i}{2}P_{-\frac{1}{2}-pi}(\cos\theta) = \int_0^\infty \frac{\cos pu}{(2\,\mathrm{ch}\,u-2\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}\,du -$$

$$- ie^{-p\pi}\int_0^\infty \frac{\cos pu}{(2\,\mathrm{ch}\,u+2\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}\,du. \quad (148)$$

Так как

$$P_n(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\int_0^\infty \frac{\mathrm{ch}\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{(2\,\mathrm{ch}\,u+2\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}\,du,$$

то

$$P_{-\frac{1}{2}+pi}(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{ch}\,p\pi\int_0^\infty \frac{\cos pu}{(2\,\mathrm{ch}\,u+2\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}\,du = P_{-\frac{1}{2}-ip}(\cos\theta),$$

откуда

$$Q_{-\frac{1}{2}\pm pi}(\cos\theta)=\int_0^\infty \frac{\cos pu\,du}{(2\operatorname{ch}u-2\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}\mp i\operatorname{sh}p\pi\int_0^\infty \frac{\cos pu}{(2\operatorname{ch}u+2\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}\,du.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2}\left\{Q_{-\frac{1}{2}+pi}(\cos\theta)+Q_{-\frac{1}{2}-pi}(\cos\theta)\right\}=\int_0^\infty \frac{\cos pu}{(2\operatorname{ch}u-2\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}\,du. \tag{149}$$

§ 31. ФОРМУЛА ДЛЯ $Q_n^m(\operatorname{ch}\psi)$ ПРИ НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ

183. Считая, что μ действительно и >1, положим $\mu=\operatorname{ch}\psi$. Тогда, в предположении, что

$$\operatorname{Re}(n+m+1)>0,\quad \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}-m\right)>0,$$

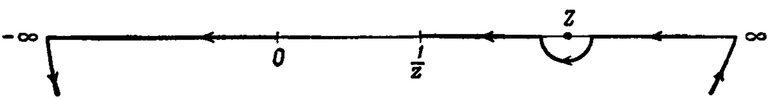
получаем из формулы (79)

$$Q_n^m(\operatorname{ch}\psi)=e^{m\pi i}\,2^m\frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-m-\frac{1}{2}\right)}\operatorname{sh}^m\psi\int_0^{\frac{1}{z}}\frac{h^{n+m}}{(1-2\mu h+h^2)^{m+\frac{1}{2}}}\,dh.$$

Пусть $h=e^{-u}$; тогда, считая, что интеграл берется вдоль действительной оси, имеем

$$Q_n^m(\operatorname{ch}\psi)=e^{m\pi i}\cdot 2^m\frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-m-\frac{1}{2}\right)}\operatorname{sh}^m\psi\int_\psi^\infty\frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)u}\,du}{(2\operatorname{ch}u-2\operatorname{ch}\psi)^{m+\frac{1}{2}}}. \tag{150}$$

Если мы будем считать, что путь интегрирования идет от 0 до $-\infty$ вдоль действительной оси (черт. 32), затем по полуокружности бесконеч-



Черт. 32.

ного радиуса от $-\infty$ до $+\infty$ и, наконец, по прямой от ∞ до $\frac{1}{z}$, обходя точку z по бесконечно малой полуокружности, то, в предположении $\operatorname{Re}(m-n)>0$, получим

$$Q_n^m(\operatorname{ch}\psi)=e^{m\pi i}\cdot 2^m\frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-m-\frac{1}{2}\right)}\operatorname{sh}^m\psi\left[\int_{-\infty}^\infty\frac{e^{-(n+m+1)\pi i}e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)u}}{(2\operatorname{ch}u+2\operatorname{ch}\psi)^{m+\frac{1}{2}}}\,du-\right.$$

$$\left.-\int_\psi^\infty\frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)u}\,du}{e^{(2m+1)\pi i}(2\operatorname{ch}u-2\operatorname{ch}\psi)^{m+\frac{1}{2}}}-\int_{-\psi}^{\psi}\frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)u}\,du}{e^{\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi i}(2\operatorname{ch}\psi-2\operatorname{ch}u)^{m+\frac{1}{2}}}\right].$$

Аналогично, беря соответствующие полуокружности не в нижней, а в верхней полуплоскости, получим

$$Q_n^m(\operatorname{ch}\psi) = e^{m\pi i}\cdot 2^m \frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-m-\frac{1}{2}\right)}\operatorname{sh}^m\psi\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{(n+m+1)\pi i}e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)u}}{(2\operatorname{ch}u+2\operatorname{ch}\psi)^{m+\frac{1}{2}}}du - \right.$$

$$\left. -\int_{\psi}^{\infty}\frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)u}du}{e^{-(2m+1)\pi i}(2\operatorname{ch}u-2\operatorname{ch}\psi)^{m+\frac{1}{2}}} - \int_{-\psi}^{\psi}\frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)u}du}{e^{-\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi i}(2\operatorname{ch}\psi-2\operatorname{ch}u)^{m+\frac{1}{2}}}\right].$$

Умножая первое выражение на $e^{(n+m+1)\pi i}$, а второе на $e^{-(n+m+1)\pi i}$ и складывая их, получаем

$$Q_n^m(\operatorname{ch}\psi)\sin(n+m)\pi = e^{m\pi i}\cdot 2^m\frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-m-\frac{1}{2}\right)}\operatorname{sh}^m\psi\times$$

$$\times\left[\sin(n-m)\pi\int_{\psi}^{\infty}\frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}du}{(2\operatorname{ch}u-2\operatorname{ch}\psi)^{m+\frac{1}{2}}} + 2\cos n\pi\int_0^{\psi}\frac{\operatorname{ch}\left(n+\frac{1}{2}\right)u\,du}{(2\operatorname{ch}\psi-2\operatorname{ch}u)^{m+\frac{1}{2}}}\right], \quad (151)$$

где $\operatorname{Re}(m) < \frac{1}{2}$, $\operatorname{Re}(m+n+1) > 0$, $\operatorname{Re}(m-n) > 0$.

При $m = 0$ имеем

$$Q_n(\operatorname{ch}\psi) = \int_{\psi}^{\infty}\frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)u}du}{(2\operatorname{ch}u-2\operatorname{ch}\psi)^{\frac{1}{2}}} + 2\operatorname{ctg}n\pi\int_0^{\psi}\frac{\operatorname{ch}\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{(2\operatorname{ch}\psi-2\operatorname{ch}u)^{\frac{1}{2}}}du, \quad (152)$$

где $0 < \operatorname{Re}(n) < 1$.

§ 32. ФОРМУЛА ДЛЯ $Q_n^m(\operatorname{ch}\psi)$ ПРИ ПОЛУЦЕЛЫХ n

184. Рассмотрим формулу (76) для $Q_n^m(\mu)$; если мы обозначим через P и Q интегралы, взятые по замкнутым контурам, охватывающим точки $\frac{1}{z}$ и 0 соответственно, а начальные значения аргументов в обоих случаях выберем так же, как и в формуле (76) для $Q_n^m(\mu)$, то получим

$$\int^{\left(\frac{1}{z}+,\,0+,\,\frac{1}{z}-,\,0-\right)}\frac{h^{n+m}}{(1-2\mu h+h^2)^{m+\frac{1}{2}}}dh = P + e^{-\left(m+\frac{1}{2}\right)2\pi i}Q - e^{(n+m)2\pi i}P - Q$$

и

$$\int^{\left(\frac{1}{z}+,\,0+\right)}\frac{h^{n+m}}{(1-2\mu h+h^2)^{m+\frac{1}{2}}}dh = P + e^{-(2m+1)\pi i}Q.$$

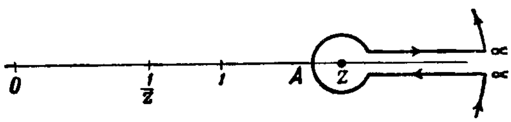
При действительном полуцелом n получаем

$$\int^{\left(\frac{1}{z}+,\,0+,\,\frac{1}{z}-,\,0-\right)} \frac{h^{n+m}}{(1-2\mu h+h^2)^{m+\frac{1}{2}}}\,dh = \left(1-e^{2(n+m)\pi i}\right)\int^{\left(\frac{1}{z}+,\,0+\right)} \frac{h^{n+m}}{(1-2\mu h+h^2)^{m+\frac{1}{2}}}\,dh.$$

Таким образом, в этом случае выражение (76) можно заменить выражением

$$Q_n^m(\mu) = e^{2m\pi i}\cdot 2^m\,\frac{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{2\pi}\,(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\times \times\int^{\left(\frac{1}{z}+,\,0+\right)} \frac{h^{n+m}}{(1-2\mu h+h^2)^{m+\frac{1}{2}}}\,dh.$$

Считая, что μ действительно и больше 1, положим $\mu=\operatorname{ch}\psi$; предполагая, что $\operatorname{Re}(m-n)>0$, $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}-m\right)>0$, примем за путь интегрирования контур, состоящий из окружности бесконечно большого радиуса, луча, идущего от ∞ до z, малой окружности вокруг точки z и луча, идущего от z до ∞ (черт. 33). При указанных выше условиях интегралы по окружностям равны нулю. В ∞ начальные значения $\arg(1-2\mu h+h^2)$ и $\arg h$ равны нулю; после обхода по окружности бесконечного радиуса $\arg(1-2\mu h+h^2)$ становится равным 4π, а $\arg h$ становится равным 2π. Таким образом получаем формулу



Черт. 33.

$$Q_n^m(\operatorname{ch}\psi) = e^{2m\pi i}\cdot 2^m\,\frac{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{2\pi}\,\operatorname{sh}^m\psi\times$$

$$\times\left\{-\int_{\psi}^{\infty}\frac{e^{(n+m+1)u}\,e^{2\pi i(n+m+1)}}{e^{4\pi i\left(m+\frac{1}{2}\right)}\,e^{\left(m+\frac{1}{2}\right)u}\,(2\operatorname{ch}u-2\operatorname{ch}\psi)^{m+\frac{1}{2}}}\,du+\right.$$

$$\left.+\int_{\psi}^{\infty}\frac{e^{(n+m+1)u}\,e^{2\pi i(n+m+1)}}{e^{2\pi i\left(m+\frac{1}{2}\right)}\,e^{\left(m+\frac{1}{2}\right)u}\,(2\operatorname{ch}u-2\operatorname{ch}\psi)^{m+\frac{1}{2}}}\,du\right\},$$

которую можно привести к следующему виду:

$$Q_n^m(\operatorname{ch}\psi) = 2^m\,\frac{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{2\pi}\,\operatorname{sh}^m\psi\,\left\{\int_{\psi}^{\infty}\frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)u}\,du}{(2\operatorname{ch}u-2\operatorname{ch}\psi)^{m+\frac{1}{2}}}+\right.$$

$$\left.+e^{2\pi i\left(n+\frac{1}{2}\right)}\,e^{2m\pi i}\int_{\psi}^{\infty}\frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)u}\,du}{(2\operatorname{ch}u-2\operatorname{ch}\psi)^{m+\frac{1}{2}}}\right\} \qquad (153)$$

или

$$Q_n^m(\operatorname{ch}\psi)=\frac{2^m}{\Pi\left(-m-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}e^{m\pi i}\int\limits_{\psi}^{\infty}\frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)u}\,du}{(2\operatorname{ch}u-2\operatorname{ch}\psi)^{m+\frac{1}{2}}},$$

где n — действительное полуцелое, $\operatorname{Re}(m-n)>0$, $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}-m\right)>0$.

Положив $m=0$, получим

$$Q_n(\operatorname{ch}\psi)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\psi}^{\infty}\frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)u}}{(2\operatorname{ch}u-2\operatorname{ch}\psi)^{\frac{1}{2}}}\,du,$$

где $n<0$. Так как

$$Q_n^m(\operatorname{ch}\psi)=Q_{-n-1}^m(\operatorname{ch}\psi)$$

(см. п. 131), то, заменив n на $-n-1$, получим

$$Q_n^m(\operatorname{ch}\psi)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\psi}^{\infty}\frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)u}}{(2\operatorname{ch}u-2\operatorname{ch}\psi)^{n+\frac{1}{2}}}\,du, \qquad (154)$$

где n — полуцелое положительное число.

§ 33. РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В РЯДЫ

185. Результаты, полученные в п. 166, можно было бы предвидеть заранее, заметив, что выражение $(z+\alpha x+\beta y)^n$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2 V=0$ при любых постоянных α и β, таких, что $\alpha^2+\beta^2+1=0$. Это верно и для комплексных значений n, причем x, y, z также могут быть комплексными. Пусть $\alpha=-i\cos(\psi\mp iu)$, $\beta=-i\sin(\psi\mp iu)$; так как

$$z=r\mu,\quad x=ir\,(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi;\quad y=ir\,(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\sin\varphi,$$

то

$$(z+\alpha x+\beta y)^n=r^n\{\mu+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\varphi-\psi\pm iu)\}^n,$$

где φ, ψ и u действительны. Поэтому естественно ожидать, что, если $\{\mu+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\varphi-\psi\pm iu)\}^n$ можно разложить по косинусам и синусам дуг, кратных φ, т. е. представить в виде $\sum(u_m\cos m\varphi+v_m\sin m\varphi)$, то коэффициенты u_m и v_m будут линейными комбинациями функций $P_n^m(\mu)$ и $Q_n^m(\mu)$. Поскольку мнимую часть u всегда можно включить в ψ, условие, что u действительно, не играет существенной роли.

Предположим, что $\operatorname{Re}(\mu)>0$ и пусть $w=(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{\pm(\varphi-\psi\pm iu)}$, тогда

$$\{\mu+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\varphi-\psi\pm iu)\}^n=(2w)^{-n}(\mu+w-1)^n(\mu+w+1)^n.$$

Если $u<\ln\left|\frac{\mu+1}{\mu-1}\right|^{\frac{1}{2}}$, то из выражений $(\mu+w-1)^n$, $(\mu+w+1)^n$ одно можно разложить по положительным, а другое по отрицательным степеням w.

Если же $u>\ln\left|\frac{\mu+1}{\mu-1}\right|^{\frac{1}{2}}$, то указанные выражения можно разложить или оба по положительным степеням w, или оба по отрицательным степеням, в зависимости от знака члена $\pm iu$. Все эти ряды абсолютно сходятся.

Случай 1. Пусть $u < \ln\left|\frac{\mu+1}{\mu-1}\right|^{\frac{1}{2}}$, $\operatorname{Re}(\mu) > 0$. Имеем

$$(2w)^{-n}(\mu+w-1)^n(\mu+w+1)^n = 2^{-n}(\mu+1)^n\left(1+\frac{\mu-1}{w}\right)^n\left(1+\frac{w}{\mu+1}\right)^n.$$

взяв в $\pm iu$ верхний знак, т. е. положив $w=(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i(\varphi-\psi+iu)}$, получим

$$\left|\frac{w}{\mu+1}\right| < \left|\frac{\mu-1}{\mu+1}\right| < 1$$

для всех u, лежащих в интервале $(0, u_0)$, где u_0 фиксировано и меньше чем $\ln\left|\frac{\mu+1}{\mu-1}\right|^{\frac{1}{2}}$. Аналогично, $\left|\frac{\mu-1}{w}\right| < \left|\frac{\mu-1}{\mu+1}\right|e^{u_0} < 1$. Если в $\pm iu$ берется нижний знак, то это приводит к таким же самым рассмотрениям; поэтому мы ограничимся тем случаем, когда в $\pm iu$ выбирается верхний знак.

Пусть $a_0+a_1+a_2+\ldots$ биномиальное разложение для $\left(1+\frac{\mu-1}{w}\right)^n$, а $b_0+b_1+b_2+\ldots$ такое же разложение для $\left(1+\frac{w}{\mu+1}\right)^n$; эти ряды абсолютно сходятся при каждом значении $\varphi-\psi$ и при каждом u, принадлежащем интервалу $(0, u_0)$.

Пусть, далее, $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\ldots$ разложение для $\left(1-\left|\frac{\mu-1}{\mu+1}\right|^{\frac{1}{2}}e^{u_0}\right)^{-|n|}$ и $\beta_0+\beta_1+\beta_2+\ldots$ соответствующее разложение для $\left(1-\left|\frac{\mu-1}{\mu+1}\right|^{\frac{1}{2}}\right)^{-|n|}$; все числа α_r, β_r действительны и положительны. Мы имеем $|a_r| < \alpha_r$, $|b_r| < \beta_r$ для всех r. Произведение

$$a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)+\ldots+(a_0b_r+a_1b_{r-1}+\ldots+a_rb_0)+\ldots$$

двух абсолютно сходящихся рядов $a_0+a_1+a_2+\ldots$ и $b_0+b_1+b_2+\ldots$ представляет собой сходящийся ряд; так как

$$|a_0b_r+a_1b_{r-1}+\ldots+a_rb_0| < \alpha_0\beta_r+\alpha_1\beta_{r-1}+\ldots+\alpha_r\beta_0,$$

где справа стоит r-й член произведения двух сходящихся рядов с положительными членами, то он сходится абсолютно и его сумма равна

$$\left(1+\frac{\mu-1}{w}\right)^n\left(1+\frac{w}{\mu+1}\right)^n.$$

Ряд $a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)+\ldots$ можно записать в виде двойного ряда

$$a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2+\ldots+(a_0b_1+a_1b_2+\ldots)+(a_1b_0+a_2b_1+\ldots)+\ldots$$
$$\ldots+(a_0b_r+a_1b_{r+1}+\ldots)+(a_rb_0+a_{r+1}b_1+\ldots)+\ldots,$$

где члены сгруппированы по положительным (или отрицательным) степеням w или по косинусам и синусам дуг, кратных $\varphi-\psi+iu$.

Мы имеем

$$|a_0b_r+a_1b_{r+1}+\ldots| < \alpha_0\beta_r+\alpha_1\beta_{r+1}+\ldots,$$
$$|a_rb_0+a_{r+1}b_1+\ldots| < \alpha_r\beta_0+\alpha_{r+1}\beta_1+\ldots$$

Известно, что члены ряда $\alpha_0\beta_0+(\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0)+\ldots$ можно переставить любым образом, не нарушая его сходимости и не меняя его суммы. Поэтому ряд с общим членом

$$(\alpha_0\beta_r+\alpha_1\beta_{r+1}+\ldots)+(\alpha_r\beta_0+\alpha_{r+1}\beta_1+\ldots)$$

сходится.

Воспользовавшись написанными выше неравенствами и критерием Вейерштрасса, получаем, что ряд с общим членом

$$(a_0b_r+a_1b_{r+1}+\ldots)+(a_rb_0+a_{r+1}b_1+\ldots)$$

сходится равномерно для всех значений $\varphi-\psi$ и для всех u, принадлежащих интервалу $(0,\ u_0)$, где $u_0<\ln\left|\frac{\mu+1}{\mu-1}\right|^{\frac{1}{2}}$, и его сумма равна

$$\left(1+\frac{\mu-1}{w}\right)^n\left(1+\frac{w}{\mu+1}\right)^n.$$

Таким образом мы доказали, что $\{\mu+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\varphi-\psi\pm iu)\}^n$ можно представить как сумму ряда $\sum\limits_{m=0}^{\infty}(U_m\cos m\varphi+V_m\sin m\varphi)$, равномерно сходящегося для всех действительных значений φ и ψ и для всех u, принадлежащих интервалу $(0,\ u_0)$, где $u_0<\ln\left|\frac{\mu+1}{\mu-1}\right|^{\frac{1}{2}}$.

В силу (106) имеем

$$U_m=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\{\mu+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\varphi-\psi\pm iu)\}^n\cos m\varphi d\varphi=$$
$$=\frac{2\Pi(n)}{\Pi(n+m)}P_n^m(\mu)\cos m(\psi\mp iu)$$

при $m\neq 0$ и $U_0=P_n(\mu)$. Аналогично,

$$V_m=\frac{2\Pi(n)}{\Pi(n+m)}P_n^m(\mu)\sin(\psi\mp iu)$$

и

$$V_0=P_n(\mu).$$

Таким образом, получаем следующий результат:

$$\{\mu+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\varphi-\psi\pm iu)\}^n=$$
$$=P_n(\mu)+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Pi(n)}{\Pi(n+m)}P_n^m(\mu)\cos m(\varphi-\psi\pm iu), \quad (155)$$

причем $\operatorname{Re}(\mu)>0$, *n произвольно, а ряд справа сходится равномерно для всех* φ *и* ψ *и для всех u в промежутке* $0\leqslant u\leqslant u_0<\ln\left|\frac{\mu+1}{\mu-1}\right|^{\frac{1}{2}}$.

Если n целое положительное, то ряд сводится к конечной сумме $n+1$ членов, и условие на u отпадает.

Заменяя n на $-n-1$ и вспоминая, что $P_n^m(\mu)=P_{-n-1}^m(\mu)$ и

$$\frac{\Pi(-n-1)}{\Pi(m-n-1)}=(-1)^m\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n)},$$

мы видим, что ряд

$$P_n(\mu)+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n)}P_n^m(\mu)\cos m(\varphi\pm iu),$$

как и выше, равномерно сходится к

$$\{\mu+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\varphi\pm iu)\}^{-n-1}.$$

Легко получить аналогичный результат и при $\operatorname{Re}(\mu)<0$. При этом

$$\{\mu+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\varphi\pm iu)\}^n=e^{\pm n\pi i}\{-\mu+[(-\mu)^2-1]^{\frac{1}{2}}\cos(\varphi\pm iu)\}^n,$$

где в $e^{\pm n\pi i}$ верхний знак берется при $\operatorname{Im}(\mu)>0$, а нижний — при $\operatorname{Im}(\mu)<0$.

Так как $\{-\mu+[(-\mu)^2-1]^{\frac{1}{2}}\cos(\varphi\pm iu)\}^n$ представляется рядом

$$P_n(-\mu)+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Pi(n)}{\Pi(n+m)}P_n^m(-\mu)\cos m(\varphi\pm iu)$$

и так как

$$P_n^m(-\mu)=e^{\mp n\pi i}P_n^m(\mu)-\frac{2\sin n\pi}{\pi}Q_n^m(\mu),$$

где в показателе степени верхний знак берется при $\operatorname{Im}(\mu)<0$, а нижний при $\operatorname{Im}(\mu)>0$, то ряд, представляющий

$$\{\mu+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\varphi\pm iu)\}^n,$$

где $\operatorname{Re}(\mu)<0$, имеет вид

$$\left[P_n(\mu)-\frac{2\sin n\pi}{\pi}e^{\pm n\pi i}Q_n^m(\mu)\right]+$$
$$+2\sum_{m=1}^{\infty}\left[P_n^m(\mu)-\frac{2\sin n\pi}{\pi}e^{\pm n\pi i}Q_n^m(\mu)\right]\cos m(\varphi\pm iu),$$

где знак в показателе степени определяется по указанному выше правилу. Как и в предыдущем случае, ряд сходится равномерно.

Случай 2. $u>\ln\left|\frac{\mu+1}{\mu-1}\right|^{\frac{1}{2}}$, $\operatorname{Re}(\mu)>0$.

В этом случае в разложении функции $\{\mu+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\varphi-\psi\pm iu)\}^n$ все члены содержат или только положительные, или только отрицательные степени w. Если мы положим

$$w=(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i(\varphi-\psi+iu)},$$

то получим выражение вида

$$(2w)^{-n}(\mu^2-1)^n\left[1+n\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}}e^{i(\varphi-\psi+iu)}+\ \dots\right]\times$$
$$\times\left[1+n\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{2}}e^{i(\varphi-\psi+iu)}+\dots\right];$$

каждый из двух входящих сюда рядов сходится абсолютно и равномерно для всех φ, ψ и для всех $u > u_0$, где u_0 — фиксированное число, большее, чем $\ln\left|\frac{\mu+1}{\mu-1}\right|^{\frac{1}{2}}$

Положив $w=(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}} e^{i(\varphi-\psi-iu)}$, мы получим выражение вида

$$(2w)^{-n} w^{2n}\left[1+n\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i(\varphi-\psi-iu)}+\ldots\right]\times$$
$$\times\left[1+n\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i(\varphi-\psi-iu)}+\ldots\right].$$

Таким образом,

$$\{\mu+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\varphi-\psi+iu)\}^n$$

разлагается в ряд вида $\sum u_m e^{mi(\varphi-\psi+iu)}$, где $m=-n,\ -n+1,\ -n+2,\ \ldots,$ и

$$\{\mu+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\varphi-\psi-iu)\}^n$$

разлагается в ряд вида $\sum u_m e^{-mi(\varphi-\psi-iu)}$, где $m=n,\ n-1,\ n-2,\ \ldots$.

Как и в предыдущем случае, можно показать, что соответствующие ряды равномерно сходятся для всех φ и ψ и для всех u, таких, что

$$u \geqslant u_0 > \ln\left|\frac{\mu+1}{\mu-1}\right|^{\frac{1}{2}}.$$

Так как

$$\int_0^{2\pi} e^{\pm i(m'-m)(\varphi-\psi\pm iu)}\,d\varphi=0,$$

где $m'-m$ — целое число, то из (123) следует, что

$$u_m=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\mu+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\varphi-\psi\pm iu)\}^n e^{\mp mi(\varphi-\psi\pm iu)}\,d\varphi=$$
$$=\frac{\Pi(n)}{\Pi(n+m)}\left\{P_n^m(\mu)-\frac{2}{\pi}e^{-n\pi i}\sin n\pi\, Q_n^m(\mu)\right\}.$$

Таким образом, мы получаем следующую формулу:

$$\{\mu+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\varphi-\psi\pm iu)\}^n=$$
$$=\sum\frac{\Pi(n)}{\Pi(n+m)}\left\{P_n^m(\mu)-\frac{2}{\pi}e^{-n\pi i}\sin n\pi\, Q_n^m(\mu)\right\}e^{\pm mi(\varphi-\psi\pm iu)}, \quad (156)$$

где $m=-n,\ -n+1,\ -n+2,\ \ldots$ или $m=n,\ n-1,\ n-2,\ \ldots$ в соответствии с тем, берется ли в показателе степени верхний или нижний знак. Этот ряд сходится равномерно при всех значениях φ и ψ и при всех u, удовлетворяющих условию

$$u \geqslant u_0 > \ln\left|\frac{\mu+1}{\mu-1}\right|^{\frac{1}{2}}.$$

При этом предполагается, что $\operatorname{Re}(\mu)>0$.

Если n—целое положительное число, то ряд сводится к конечной сумме, и мы получаем тот же результат, что и в случае 1; это видно из сравнения членов, содержащих множители

$$e^{\pm(n-r)i(\varphi-\psi\pm iu)}, \qquad e^{\pm(n-2n+r)i(\varphi-\psi\pm iu)}.$$

Заменив n на $-n-1$, получим при $\operatorname{Re}(\mu)>0$

$$\{\mu+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\varphi-\psi\pm iu)\}^{-n-1}=$$
$$=\sum\frac{\Pi(-n-1)}{\Pi(m-n-1)}\{P_n^m(\mu)-\frac{2}{\pi}e^{n\pi i}\sin n\pi\,Q_{-n-1}^m(\mu)\}\,e^{\pm mi(\varphi-\psi\pm iu)},$$

где $m=n+1,\ n+2,\ \ldots$

В том частном случае, когда n целое положительное, полученная формула сводится к формуле

$$\{\mu+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\varphi-\psi-iu)\}^{-n-1}=\sum\frac{(-1)^{n+1}}{\Pi(n)\,\Pi(m-n-1)}Q_n^m(\mu)\,e^{-im(\varphi-\psi-iu)},$$

где $m=n+1,\ n+2,\ \ldots$; этот результат получается с помощью формулы (126).

Случай целых значений n, положительных и отрицательных, был исследован Гейне.

Случай 3. Если $\mu=i\nu$—чисто мнимая величина, то $\left|\frac{\mu+1}{\mu-1}\right|=1$, и в этом случае $u>0$; при этом ряды

$$1+n\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}}e^{i(\varphi-\psi+iu)}+\ldots$$

и

$$1+n\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{2}}e^{i(\varphi-\psi+iu)}+\ldots$$

сходятся для всех положительных значений u. Таким образом, получаем, что при $w=(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i(\varphi-\psi-iu)}$

$$\{\mu+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\varphi-\psi+iu)\}^n=\sum u_m\,e^{mi(\varphi-\psi+iu)};$$

ряд справа равномерно сходится при всех φ и ψ и при всех u, таких, что $u\geqslant u_0$, где $u_0>0$.

Отсюда видно, что формула (155) верна при $u>0$; ряд сходится равномерно при всех $u\geqslant u_0>0$ и всех φ и ψ.

При целом положительном n получаем

$$\{\mu^2+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\varphi-\psi-iu)\}^{-n-1}=$$
$$=\sum\frac{(-1)^{n+1}}{\Pi(n)\,\Pi(m-n-1)}Q_n^m(\mu)\,e^{-im(\varphi-\psi-iu)}, \qquad (157)$$

где $m=n+1,\ n+2,\ \ldots$; при этом предполагается, что $\nu=\operatorname{Im}(\mu)>0$.

Изменив знак $\varphi-\psi$ на противоположный, получим

$$\{\mu+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\varphi-\psi+iu)\}^{-n-1}=\sum\frac{(-1)^{n+1}}{\Pi(n)\,\Pi(m-n-1)}Q_n^m(\mu)\,e^{im(\varphi-\psi+iu)}.$$

§ 34. ДРУГИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ $P_n^m(\mu)$ И $Q_n^m(\mu)$

186. Подстановка $\mu^2=\mu'$ приводит уравнение (2) к виду

$$\mu'(1-\mu')\frac{d^2u}{d\mu'^2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{2m+3}{2}\mu'\right)\frac{du}{d\mu'}+\frac{(n-m)(n+m+1)}{4}u=0.$$

Этому дифференциальному уравнению удовлетворяет гипергеометрическая функция $F(\alpha, \beta; \gamma; \mu')$, где $\alpha=\frac{1}{2}(m-n)$, $\beta=\frac{1}{2}(m+n+1)$, $\gamma=\frac{1}{2}$. Отсюда следует, что дифференциальному уравнению (2) удовлетворяет каждое из выражений

$$(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int u^{\frac{1}{2}(n+m-1)}(1-u)^{\frac{1}{2}(-m-n+1)}(1-\mu^2u)^{\frac{1}{2}(n-m)}\,du,$$

$$(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int u^{\frac{1}{2}(m-n-2)}(1-u)^{\frac{1}{2}(n-m)+1}(1-\mu^2u)^{\frac{1}{2}(-n-m-1)}\,du,$$

где, как и в других случаях, интегралы берутся по некоторым замкнутым контурам. Нам нет необходимости получать точные выражения для $P_n^m(\mu)$ и $Q_n^m(\mu)$ через интегралы указанных типов, так как все подобные результаты можно получить, исходя из двух случаев, уже рассмотренных нами выше.

Существование трех типов интегралов, удовлетворяющих основному уравнению (2), равносильно доказанному Ольбрихтом утверждению, что этому уравнению удовлетворяют три разных P-функции Римана:

$$P\left\{\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ \frac{1}{2}m & -n & \frac{1}{2}m & \frac{1-\mu}{2} \\ -\frac{1}{2}m & n+1 & -\frac{1}{2}m & \end{matrix}\right\},$$

$$P\left\{\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ -\frac{1}{2}n & m & -\frac{1}{2}n & \dfrac{\mu+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}}{2(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{1}{2}(n+1) & -m & \frac{1}{2}(n+1) & \end{matrix}\right\},$$

$$P\left\{\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ -\frac{1}{2}n & \frac{1}{2}m & 0 & \dfrac{1}{1-\mu^2} \\ \frac{1}{2}(n+1) & -\frac{1}{2}m & \frac{1}{2} & \end{matrix}\right\}.$$

Мы постараемся сейчас представить $P_n^m(\mu)$ и $Q_n^m(\mu)$ в виде рядов по степеням

$$\frac{\mu\pm(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}}{2(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}}.$$

187. По формуле (76)

$$Q_n^m(\mu)=ie^{(m-n)\pi i}\cdot 2^m\frac{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{4\pi\sin(n+m)\pi}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\times$$

$$\times\int^{\left(\frac{1}{z}+,\,0+,\,\frac{1}{z}-,\,0-\right)}\frac{h^{n+m}}{(1-2\mu h+h^2)^{m+\frac{1}{2}}}\,dh,$$

где точка z не лежит внутри того контура, по которому берется интеграл; введя вместо h новую переменную интегрирования u по формуле $h=\frac{1}{z}(1-u)$, получим

$$Q_n^m(\mu) = -ie^{(m-n)\pi i}\cdot 2^m \frac{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{4\pi\sin(n+m)\pi}\frac{z^{m-n}}{(z^2-1)^{m+\frac{1}{2}}}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\times$$

$$\times\int^{(0+,\,1+,\,0-,\,1-)} u^{-m-\frac{1}{2}}(1-u)^{n+m}\left(1+\frac{u}{z^2-1}\right)^{-m-\frac{1}{2}}du.$$

Предположим, что $|z^2-1|>1$, тогда путь интегрирования можно выбрать так, что $\left|\frac{u}{z^2-1}\right|<1$ для всех u. Множитель

$$\left(1+\frac{u}{z^2-1}\right)^{-m-\frac{1}{2}}$$

в подинтегральном выражении можно разложить в равномерно сходящийся ряд по степеням $\frac{u}{z^2-1}$ и затем выполнить интегрирование почленно. Таким образом, получим для $Q_n^m(\mu)$ следующее выражение:

$$-ie^{(m-n)\pi i}\cdot 2^m \frac{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{4\pi\sin(n+m)\pi}\frac{z^{m-n}}{(z^2-1)^{m+\frac{1}{2}}}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\times$$

$$\times\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{\Pi\left(m-\frac{1}{2}+r\right)}{\Pi(r)\,\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\frac{1}{(z^2-1)^r}\int^{(0+,\,1+,\,0-,\,1-)} u^{-m-\frac{1}{2}+r}(1-u)^{n+m}du.$$

Вычислив входящие сюда интегралы, получим формулу

$$Q_n^m(\mu) = e^{m\pi i}\cdot 2^m\frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi(n+m)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\frac{z^{m-n}}{(z^2-1)^{m+\frac{1}{2}}}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\times$$

$$\times F\left(m+\frac{1}{2},\ -m+\frac{1}{2};\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{1-z^2}\right), \qquad (158)$$

представляющую собой разложение $Q_n^m(\mu)$ по степеням $\frac{\mu-(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}}{2(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}}$; этот ряд сходится для тех значений μ, для которых

$$\left|\frac{\mu-(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}}{2(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right|<1.$$

В случае $|z^2-1|=1$ полученная формула остается справедливой, если путь интегрирования можно выбрать так, чтобы вдоль всего этого пути было выполнено условие $\left|\frac{u}{z^2-1}\right|<1$. Если μ действительно и заключено между -1 и 1, то мы имеем

$$1-z^2=1-\cos 2\theta-i\sin 2\theta$$

и θ не может принимать значения 0, π. Формула (158) в этом случае верна при единственном условии $\varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon$, где ε — произвольное положительное число.

Полученная формула теряет смысл при целом отрицательном $n+m$. Воспользовавшись формулой (31), выражающей $P_n^m(\mu)$ через $Q_n^m(\mu)$ и $Q_{-n-1}^m(\mu)$, получим из (158), что

$$P_n^m(\mu) = \frac{2^m \Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\pi} \left\{ \frac{\Pi(n+m)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)} \frac{\sin(n+m)\pi}{\cos n\pi} \frac{z^{m-n}}{(z^2-1)^{m+\frac{1}{2}}} (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} \times \right.$$

$$\times F\left(m+\frac{1}{2},\ -m+\frac{1}{2};\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{1-z^2}\right) +$$

$$\left. + \frac{\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\Pi(n-m)} \frac{z^{m+n+\frac{1}{2}}}{(z^2-1)^{m+\frac{1}{2}}} (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} F\left(m+\frac{1}{2},\ -m+\frac{1}{2};\ -n+\frac{1}{2};\ \frac{1}{1-z^2}\right)\right\}.$$

По известной формуле, линейно выражающей гипергеометрическую функцию с четвертым аргументом $1-x$ через гипергеометрическую функцию с четвертым аргументом x, получаем

$$F\left(m+\frac{1}{2},\ -m+\frac{1}{2};\ n+\frac{3}{2};\ \frac{-z^2}{1-z^2}\right) =$$

$$= \frac{\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Pi(n-m)\,\Pi(n+m)} F\left(m+\frac{1}{2},\ -m+\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}-n;\ \frac{1}{1-z^2}\right) +$$

$$+ \frac{\Pi\left(-n-\frac{3}{2}\right)\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-m-\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{(1-z^2)^{n+\frac{1}{2}}} \left(\frac{-z^2}{1-z^2}\right)^{-n-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times F\left(m+\frac{1}{2},\ -m+\frac{1}{2}; n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{1-z^2}\right),$$

откуда после некоторых преобразований имеем

$$P_n^m(\mu) = \frac{2^m \Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\pi} \frac{\Pi(n+m)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)} \times$$

$$\times \left\{ e^{-\left(m-\frac{1}{2}\right)\pi i} \frac{z^{m-n}}{(z^2-1)^{m+\frac{1}{2}}} (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} F\left(m+\frac{1}{2},\ -m+\frac{1}{2};\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{1-z^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{z^{m+n+1}}{(z^2-1)^{m+\frac{1}{2}}} (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m} F\left(m+\frac{1}{2};\ -m+\frac{1}{2};\ n+\frac{3}{2};\ \frac{-z^2}{1-z^2}\right)\right\}. \quad (159)$$

Эта формула дает для $P_n^m(\mu)$ представление в виде ряда по степеням $\left[\mu \pm (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\right] \left[2(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}$.

При этом предполагается, что оба входящие в эту формулу ряда сходятся, а $m+n$ не является целым отрицательным числом.

188. Пусть $\mu = \cos\theta$, тогда, вспоминая, что

$$P_n^m(\cos\theta) = e^{\frac{1}{2}m\pi i} P_n^m(\cos\theta + i\cdot 0),$$

получаем

$$P_n^m(\cos\theta)=\frac{2^m\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi(n+m)}{\pi\,\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}e^{m\pi i}\sin^m\theta\times$$

$$\times\left\{e^{-\left(m-\frac{1}{2}\right)\pi i}\frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)i\theta}}{\left(2e^{\frac{1}{2}i\pi}\sin\theta\right)^{m+\frac{1}{2}}}F\left(m+\frac{1}{2},\ -m+\frac{1}{2};\ n+\frac{3}{2};\ \frac{-e^{-i\theta}}{2e^{\frac{1}{2}\pi i}\sin\theta}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)i\theta}}{\left(2e^{-\frac{1}{2}\pi i}\sin\theta\right)^{m+\frac{1}{2}}}F\left(m+\frac{1}{2},\ -m+\frac{1}{2};\ n+\frac{3}{2};\ \frac{e^{i\theta}}{2e^{-\frac{1}{2}\pi i}\sin\theta}\right)\right\},$$

откуда

$$P_n^m(\cos\theta)=\frac{2}{\pi^{\frac{1}{2}}}\frac{\Pi(n+m)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left[\frac{\cos\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}+\frac{m\pi}{2}\right\}}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}+\right.$$

$$+\frac{1^2-4m^2}{2(2n+3)}\frac{\cos\left\{\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta-\frac{3\pi}{4}+\frac{m\pi}{2}\right\}}{(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}}+$$

$$\left.+\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)}{2\cdot4(2n+3)(2n+5)}\frac{\cos\left\{\left(n+\frac{5}{2}\right)\theta-\frac{5\pi}{4}+\frac{m\pi}{2}\right\}}{(2\sin\theta)^{\frac{5}{2}}}+\ldots\right].\quad(160)$$

Этот ряд представляет $P_n^m(\cos\theta)$ при любых значениях n и m, если только он сходится; для этого достаточно положить $\frac{1}{6}\pi<\theta<\frac{5}{6}\pi$. Если $n+\frac{1}{2}$ целое отрицательное число, то полученный ряд должен быть несколько преобразован.

Найдем соответствующее выражение для $Q_n^m(\cos\theta)$. Из (158) имеем

$$Q_n^m(\cos\theta+i\cdot0)=e^{m\pi i}\cdot2^m\frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi(n+m)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\frac{e^{(m-n)i\theta}}{e^{\left(m+\frac{1}{2}\right)i\theta}}\frac{\left(e^{\frac{1}{2}i\pi}\sin\theta\right)^m}{\left(2e^{\frac{1}{2}\pi i}\sin\theta\right)^{m+\frac{1}{2}}}\times$$

$$\times F\left(m+\frac{1}{2},\ -m+\frac{1}{2};\ n+\frac{3}{2};\ \frac{-e^{-i\theta}}{2e^{\frac{1}{2}\pi i}\sin\theta}\right)=$$

$$=e^{m\pi i}\frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi(n+m)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)i\theta-\frac{1}{4}\pi i}}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}\times$$

$$\times\left\{1-\frac{1^2-4m^2}{2(2n+3)}\frac{e^{-i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}}{2\sin\theta}+\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)}{2\cdot4(2n+3)(2n+5)}\frac{e^{-2i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}}{(2\sin\theta)^2}-\ldots\right\}.$$

Ряд для $Q_n^m(\cos\theta-i\cdot0)$ получается отсюда заменой $e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)i\theta-\frac{1}{4}\pi i}$ на $e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)i\theta+\frac{1}{4}\pi i}$; далее, воспользовавшись формулой (57), выражающей $Q_n^m(\cos\theta)$ через

$$Q_n^m(\cos\theta+i\cdot0),\qquad Q_n^m(\cos\theta-i\cdot0),$$

получаем

$$Q_n^m(\cos\theta)=\pi^{\frac{1}{2}}\frac{\Pi(n+m)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left\{\frac{\cos\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}+\frac{m\pi}{2}\right\}}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}-\right.$$

$$-\frac{1^2-4m^2}{2(2n+3)}\frac{\cos\left\{\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta+\frac{3\pi}{4}+\frac{m\pi}{2}\right\}}{(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}}+$$

$$\left.+\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)}{2\cdot 4(2n+3)(2n+5)}\frac{\cos\left\{\left(n+\frac{5}{2}\right)\theta+\frac{5\pi}{4}+\frac{m\pi}{2}\right\}}{(2\sin\theta)^{\frac{5}{2}}}-\ldots\right\}. \quad (161)$$

Этот ряд сходится при тех же самых условиях, что и (160).

Отметим, что ряд (158) сходится, когда $\mu=\operatorname{ch}\xi$ — положительное число, большее 1, такое, что $\xi>\frac{1}{2}\ln 2$, т. е. $\operatorname{ch}\xi>\frac{3}{2\sqrt{2}}$. Соответствующий ряд (159) для $P_n^m(\operatorname{ch}\xi)$ при этом расходится.

§ 35. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ФУНКЦИЯМИ, ОТВЕЧАЮЩИМИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМ ЗНАЧЕНИЯМ n И m

189. Обозначим интеграл $\int\frac{h^{n+m}\,dh}{(1-2\mu h+h^2)^{m+\frac{1}{2}}}$ символом $U(n,\ m)$; здесь интеграл берется вдоль произвольного замкнутого контура, такого, что подинтегральное выражение после обхода по этому контуру возвращается к своему первоначальному значению.

Мы имеем

$$\frac{dU(n,\ m)}{d\mu}=(2m+1)\int\frac{h^{n+m+1}}{(1-2\mu h+h^2)^{m+\frac{3}{2}}}dh=(2m+1)\,U(n,\ m+1)$$

и

$$\frac{d}{dh}\frac{\mu-h}{(1-2\mu h+h^2)^{m+\frac{1}{2}}}=\frac{2m}{(1-2\mu h+h^2)^{m+\frac{1}{2}}}+(2m+1)\frac{\mu^2-1}{(1-2\mu h+h^2)^{m+\frac{3}{2}}}.$$

Отсюда получаем

$$(\mu^2-1)\frac{dU(n,\ m)}{d\mu}=\int h^{n+m+1}\left\{\frac{-2m}{(1-2\mu h+h^2)^{m+\frac{1}{2}}}+\frac{d}{dh}\frac{\mu-h}{(1-2\mu h+h^2)^{m+\frac{1}{2}}}\right\}dh=$$

$$=-2mU(n+1,\ m)-\int\frac{\mu-h}{(1-2\mu h+h^2)^{m+\frac{1}{2}}}(n+m+1)\,h^{n+m}\,dh=$$

$$=-2mU(n+1,\ m)-(n+m+1)\{\mu U(n,\ m)-U(n+1,\ m)\};$$

или

$$(\mu^2-1)\frac{dU(n,\ m)}{d\mu}=(n-m+1)\,U(n+1,\ m)-(n+m+1)\,\mu U(n,\ m).$$

Возвращаясь к формулам (76), (83) для $Q_n^m(\mu)$, $P_n^m(\mu)$, мы видим, что $P_n^m(\mu)$ имеет вид $c_m(\mu^2-1)^{\frac{m}{2}}U(n,\ m)$, а $Q_n^m(\mu)$ имеет вид

$$\frac{e^{-n\pi i}}{\sin(n+m)\pi}c'_m(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}U(n,\ m).$$

где c_m, c'_m зависят только от m. Так как выражение $\frac{e^{-n\pi i}}{\sin(n+m)\pi}$ не изменится, если n заменить на $n+1$, то мы получаем следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned}(\mu^2-1)\frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu}&=(n-m+1)P_{n+1}^m(\mu)-(n+m+1)\mu P_n^m(\mu),\\(\mu^2-1)\frac{dQ_n^m(\mu)}{d\mu}&=(n-m+1)Q_{n+1}^m(\mu)-(n+m+1)\mu Q_n^m(\mu).\end{aligned}\right\}\tag{162}$$

Далее, пусть $V(n, m)=U(-n-1, m)$; тогда, заменяя в полученном выше для U соотношении n на $-n-1$, имеем

$$(\mu^2-1)\frac{dV(n,m)}{d\mu}=-(n+m)V(n-1,m)+(n-m)\mu V(n,m).$$

Частные случаи этой формулы:

$$\left.\begin{aligned}(\mu^2-1)\frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu}&=(n-m)\mu P_n^m(\mu)-(n+m)P_{n-1}^m(\mu),\\(\mu^2-1)\frac{dQ_n^m(\mu)}{d\mu}&=(n-m)\mu Q_n^m(\mu)-(n+m)Q_{n-1}^m(\mu).\end{aligned}\right\}\tag{163}$$

Из (162) и (163) непосредственно получаем

$$\left.\begin{aligned}(2n+1)\mu P_n^m(\mu)-(n-m+1)P_{n+1}^m(\mu)-(n+m)P_{n-1}^m(\mu)=0,\\(2n+1)\mu Q_n^m(\mu)-(n-m+1)Q_{n+1}^m(\mu)-(n+m)Q_{n-1}^m(\mu)=0.\end{aligned}\right\}\tag{164}$$

Эти рекуррентные соотношения между функциями, отвечающими различным значениям n, справедливы при любых комплексных n и m. В частности, справедливы следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned}(2n+1)\mu P_n(\mu)-(n+1)P_{n+1}(\mu)-nP_{n-1}(\mu)=0,\\(2n+1)\mu Q_n(\mu)-(n+1)Q_{n+1}(\mu)-nQ_{n-1}(\mu)=0.\end{aligned}\right\}\tag{165}$$

Для целых действительных значений n соотношения (165) были найдены по существу еще Гауссом и затем Бонне[1]). Общая форма (164) получена Гобсоном[2]).

190. Как было показано в п. 115, функция $U(n, m)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-\mu^2)\frac{d^2U}{d\mu^2}-2(m+1)\mu\frac{dU}{d\mu}+(n-m)(n+m+1)U=0.$$

Так как

$$\frac{d}{d\mu}U(n,m)=(2m+1)U(n,m+1),$$

$$\frac{d^2}{d\mu^2}U(n,m)=(2m+1)(2m+3)U(n,m+2),$$

то отсюда следует, что

$$(1-\mu^2)(2m+1)(2m+3)U(n,m+2)-2(m+1)(2m+1)\mu U(n,m+1)+\\+(n-m)(n+m+1)U(n,m)=0.$$

[1]) Journ. de Liouville, 17 (1852), 252.
[2]) Phil. Trans., 187 (1896), 522.

Воспользовавшись формулами (162) и (163), мы имеем в качестве частного случая полученного результата

$$\left.\begin{aligned} &P_n^{m+2}(\mu)+2(m+1)\frac{\mu}{(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}}P_n^{m+1}(\mu)-(n-m)(n+m+1)P_n^m(\mu)=0,\\ &Q_n^{m+2}(\mu)+2(m+1)\frac{\mu}{(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}}Q_n^{m+1}(\mu)-(n-m)(n+m+1)Q_n^m(\mu)=0.\end{aligned}\right\}\quad(166)$$

Для случая, когда m и n целые, эти формулы были получены в п. 66.

Если $\mu=\cos\theta$, то, принимая во внимание равенство

$$P_n^m(\cos\theta)=e^{\frac{1}{2}m\pi i}P_n^m(\cos\theta+0\cdot i)$$

и соответствующее равенство для $Q_n^m(\cos\theta)$, полученные формулы можно переписать в следующем виде:

$$P_n^{m+2}(\cos\theta)+2(m+1)\operatorname{ctg}\theta\, P_n^{m+1}(\cos\theta)+(n-m)(n+m+1)P_n^m(\cos\theta)=0,$$
$$Q_n^{m+2}(\cos\theta)+2(m+1)\operatorname{ctg}\theta\, Q_n^{m+1}(\cos\theta)+(n-m)(n+m+1)Q_n^m(\cos\theta)=0.$$

Для случая, когда m и n целые, эти формулы были получены в п. 66.

ПРИМЕРЫ

1. Показать, что

$$\int_0^1[P_n^m(\mu)]^2\,d\mu=$$
$$=\frac{\Pi(n+m)}{(2n+1)\Pi(n-m)}-\frac{1}{2\Pi(-n-m-1)\Pi(n-m)}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\Pi(n-m+t)\Pi(n+m+t)}{t!\,\Pi(2n+1+t)\left(t+n+\frac{1}{2}\right)},$$

где $\mathrm{Re}\, m<1$, а n не является полуцелым отрицательным числом.

Показать также, что если n не является полуцелым отрицательным числом, $\mathrm{Re}\, m<1$ и $m+n$ — целое положительное число или нуль, то

$$\int_0^1[P_n^m(\mu)]^2\,d\mu=\frac{\Pi(n+m)}{(2n+1)\Pi(n-m)};$$

установить, что этот результат остается верен, когда n и m целые положительные числа, такие, что $n\geqslant m\geqslant 0$.

2. Показать, что при любом комплексном n и любом m, таком, что $\mathrm{Re}\, m<1$, сумма выражения

$$(2n+1)\Pi(n-m)\Pi(-n-m-1)\int_0^1[P_n^m(\mu)]^2\,d\mu$$

и аналогичного выражения, получающегося отсюда заменой n на $n-1$, равна $\frac{2n}{m^2-n^2}$; в частности, при $m=0$,

$$(2n+1)\int_0^1[P_n(\mu)]^2\,d\mu-(2n-1)\int_0^1[P_{n-1}(\mu)]^2\,d\mu=\frac{2\sin n\pi}{\pi n}.$$

3. Показать, что при $\operatorname{Re} m < 0$

$$\int_0^1 \frac{[P_n^m(\mu)]^2}{1-\mu^2}\,d\mu =$$

$$= -\frac{1}{2m}\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)} - \frac{1}{2\Pi(n-m)\,\Pi(-n-m-1)}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\Pi(n-m+t)\,\Pi(n+m+t)}{t!\,\Pi(2n+t+1)\,(t+n+1)},$$

а если $\operatorname{Re} m < 0$ и $n+m$ целое положительное число или нуль, то

$$\int_0^1 \frac{[P_n^m(\mu)]^2}{1-\mu^2}\,d\mu = -\frac{1}{2m}\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)}.$$

Если n и m оба положительны и $n > m > 0$, то

$$\int_0^1 \frac{[P_n^m(\mu)]^2}{1-\mu^2}\,d\mu = \frac{1}{2m}\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)}.$$

4. Показать, что если $\operatorname{Re} m < 1$, $\operatorname{Re} n > -\frac{1}{2}$, то

$$(2n+1)\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}\int_1^{\infty}[Q_n^m(\mu)]^2\,d\mu - (2n-1)\frac{\Pi(n-m-1)}{\Pi(n+m-1)}\int_1^{\infty}[Q_{n-1}^m(\mu)]^2\,d\mu =$$

$$= -\frac{\sin^2(n+m)\pi}{\sin^2 n\pi}\,\frac{\Pi(-m)\,\Pi(m)}{n^2-m^2},$$

где обозначение $Q_n^m(\mu)$ имеет тот же смысл, что и у Барнса.

5. Показать, что если n целое положительное число, то

$$\int_0^1 P_n(\mu)\,Q_n(\mu)\,d\mu = \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{2(2n+1)}\left[\psi\left(\frac{1}{2}n+1\right) - \psi\left(\frac{1}{2}(n+1)\right)\right],$$

где $\psi(z) = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)$.

6. Пусть

$$u_n^m = \Pi(n-m)\,\Pi(-n-m-1)\,(2n+1)\sin n\pi\int_0^1 P_n^m(\mu)\,Q_n^m(\mu)\,d\mu;$$

доказать, что при $\operatorname{Re} m < 1$

$$u_n^m - u_{n-1}^m = \frac{m\pi\cos\frac{1}{2}m\pi}{m^2-n^2} + \frac{n\pi\cos\left(n+\frac{1}{2}m\right)\pi}{m^2-n^2}.$$

7. Доказать, что при любом комплексном n и целом положительном m справедливо следующее обобщение формулы Родрига:

$$P_n^{m-n}(\mu) = \frac{(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}(m-n)}}{2^n\,\Pi(n)}\,\frac{d^m}{d\mu^m}(\mu^2-1)^n,$$

где μ не принадлежит разрезу $(-\infty, 1)$. Доказать также, что при указанных значениях n и m и при $-1 < \mu < 1$

$$(-1)^m P_n^{m-n}(\mu) = \frac{(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}(m-n)}}{2^n\,\Pi(n)}\,\frac{d^m}{d\mu^m}(1-\mu^2)^n.$$

Примеры 1—7 были даны Барнсом в его цитированной выше работе; пример 5 был указан также Харгревсом.

Глава VI

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЛЕЖАНДРА

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Чтобы иметь возможность вычислять значения обобщенных функций Лежандра, а также присоединенных функций, в частности, при больших значениях степени или порядка, мы выведем асимптотические выражения этих функций. Кроме того, мы установим ряд теорем, в известном смысле применимых более широко, нежели асимптотические выражения. Они оказываются полезными при рассмотрении вопросов сходимости или суммируемости рядов по функциям Лежандра.

§ 2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ $P_n(\cos\theta)$ И $Q_n(\cos\theta)$ ПРИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОМ n

191. Мы покажем, что ряды, полученные в п. 188, могут иногда применяться для приближенного вычисления значений $P_n(\cos\theta)$ и $Q_n(\cos\theta)$ и в тех случаях, когда эти ряды расходятся.

Положив $m=0$ в формуле (76) гл. V, получим

$$Q_n(\mu)=ie^{-n\pi i}\frac{1}{4\sin n\pi}\int\limits^{\left(\frac{1}{z}+,\ 0+,\ \frac{1}{z}-,\ 0-\right)}\frac{h^n}{(1-2\mu h+h^2)^{\frac{1}{2}}}\,dh,$$

где $z=\mu+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}$ лежит вне контура интегрирования. Введем новое переменное u, положив $h=\frac{1}{z}(1-u)$:

$$Q_n(\mu)=-ie^{-n\pi i}\frac{1}{4\sin n\pi}\frac{z^{-n}}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}\int\limits^{(0+,\ 1+,\ 0-,\ 1-)}u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^n\left(1+\frac{u}{z^2-1}\right)^{-\frac{1}{2}}du.$$

В этом выражении начальные значения аргументов переменных u и $1-u$ предполагаются равными нулю в некоторой точке действительной оси, лежащей между 0 и 1.

Если предположить, что $\operatorname{Re}(n+1)>0$, то интегрирование можно производить по окружностям с центрами в точках 0 и 1 и по отрезкам действительной оси в плоскости u. Заставив радиусы этих окружностей стремиться к нулю, получим

$$Q_n(\mu)=\frac{z^{-n-\frac{1}{2}}}{(z-z^{-1})^{\frac{1}{2}}}\int\limits_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^n\left(1+\frac{u}{z^2-1}\right)^{-\frac{1}{2}}du.$$

Пусть $\mu = \cos\theta + 0\cdot i$; тогда

$$Q_n(\cos\theta + 0\cdot i) = \frac{e^{-\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{1}{4}\pi\right]i}}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^n \left(1+\frac{u}{z^2-1}\right)^{-\frac{1}{2}} du.$$

Теперь предположим, что n — действительное число, большее -1, не обязательно целое. Пользуясь приемом, предложенным Стильтьесом [1]), запишем

$$\left(1+\frac{u}{z^2-1}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{dv}{1+\frac{u}{z^2-1}\sin^2 v} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left[1+\frac{u}{1-z^2}\sin^2 v + \frac{u^2}{(1-z^2)^2}\sin^4 v + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{u^r(1-z^2)^{-r}}{1+\frac{u}{z^2-1}\sin^2 v}\sin^{2r} v\right] dv.$$

Таким образом,

$$Q_n(\cos\theta + 0\cdot i) =$$

$$= \frac{e^{-\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{1}{4}\pi\right]i}}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \left[u^{-\frac{1}{2}} + \frac{u^{\frac{1}{2}}}{1-z^2}\sin^2 v + \frac{u^{\frac{3}{2}}}{(1-z^2)^2}\sin^4 v + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{u^{r-\frac{1}{2}}}{(1-z^2)^r}\frac{\sin^{2r} v}{1+\frac{u}{z^2-1}\sin^2 v}\right](1-u)^n\, du\, dv.$$

Выражение в правой части можно представить в виде

$$e^{-\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{1}{4}\pi\right]i} \frac{\Pi(n)\,\pi^{\frac{1}{2}}}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)} \left\{ \frac{1}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1^2}{2(2n+3)} \frac{e^{-i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}}{(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}} + \right.$$

$$+ \frac{1^2\cdot 3^2}{2\cdot 4(2n+3)(2n+5)} \frac{e^{-2i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}}{(2\sin\theta)^{\frac{5}{2}}} - \ldots$$

$$\left. \ldots + (-1)^{r-1} \frac{1^2\cdot 3^2 \ldots (2r-3)^2}{2\cdot 4 \ldots (2r-2)\,(2n+3)\ldots(2n+2r-1)} \frac{e^{-(r-1)i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}}{(2\sin\theta)^{r-\frac{1}{2}}} \right\} +$$

$$+ \frac{e^{-\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{1}{4}\pi\right]i}}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \frac{(-1)^r u^{r-\frac{1}{2}}(1-u)^n \sin^{2r} v}{(2i\sin\theta)^r} e^{-ri\theta}\left(1+\frac{u}{z^2-1}\sin^2 v\right)^{-1} du\, dv.$$

---

[1]) Ann. de Toulouse, 4 (1890) G5.

Чтобы оценить модуль последнего слагаемого, заметим, что

$$\left|1+\frac{u}{z^2-1}\sin^2 v\right| = \left|1-i\,\frac{u\sin^2 v}{2\sin\theta}(\cos\theta-i\sin\theta)\right| =$$
$$= \left|1-\frac{u}{2}\sin^2 v-\frac{i}{2}u\operatorname{ctg}\theta\sin^2 v\right|;$$

это выражение при всех θ не больше $1-\frac{u}{2}\sin^2 v$, следовательно, не больше $\frac{1}{2}$, каковы бы ни были u и v. Поэтому модуль интеграла в последней строке меньше, чем

$$\frac{2}{(2\sin\theta)^{r+\frac{1}{2}}}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} u^{r-\frac{1}{2}}(1-u)^n\sin^{2r} v\,du\,dv,$$

т. е. меньше, чем

$$\frac{2}{(2\sin\theta)^{r+\frac{1}{2}}}\,\frac{\Pi(n)\,\pi^{\frac{1}{2}}}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\,\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2r-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2r}\,\frac{\left(r-\frac{1}{2}\right)\left(r-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(r-\frac{2r-1}{2}\right)}{\left(n+r+\frac{1}{2}\right)\left(n+r-\frac{1}{2}\right)\ldots\left(n+\frac{3}{2}\right)}.$$

Записав это выражение в виде

$$\frac{2\pi^{\frac{1}{2}}}{(2\sin\theta)^{r+\frac{1}{2}}}\,\frac{\Pi(n)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\,\frac{1^2\cdot3^2\ldots(2r-1)^2}{2\cdot4\cdot6\ldots2r\,(2n+3)(2n+5)\ldots(2n+2r+1)},$$

мы замечаем, что оно равно удвоенному модулю того члена в разложении $Q_n(\cos\theta+0\cdot i)$, который соответствует значению $r+1$. А так как

$$Q_n(\cos\theta+0\cdot i)=Q_n(\cos\theta)-\frac{1}{2}\pi i P_n(\cos\theta),$$

то, отделяя действительную и мнимую части, придем к следующим формулам:

$$P_n(\cos\theta)=\frac{2}{\pi^{\frac{1}{2}}}\frac{\Pi(n)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left\{\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}+\right.$$
$$+\frac{1^2}{2(2n+3)}\,\frac{\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta-\frac{3}{4}\pi\right]}{(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}}+\ldots$$
$$\left.\ldots+\frac{1^2\cdot3^2\ldots(2r-3)^2}{2\cdot4\cdot6\ldots(2r-2)(2n+3)\ldots(2n+2r-1)}\,\frac{\cos\left[\left(n+\frac{2r-1}{2}\right)\theta-\frac{2r-1}{4}\pi\right]}{(2\sin\theta)^{r-\frac{1}{2}}}\right\}+$$
$$+\,p_{n,r}(\cos\theta)\quad(1)$$

и

$$Q_n(\cos\theta)=\pi^{\frac{1}{2}}\frac{\Pi(n)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left\{\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}\right]}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}-\right.$$

$$-\frac{1^2}{2(2n+3)}\frac{\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta+\frac{3}{4}\pi\right]}{(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}}+\ldots$$

$$\left.\ldots+(-1)^{r-1}\frac{1^2\cdot 3^2\ldots(2r-3)^2}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2r-2)(2n+3)\ldots(2n+2r-1)}\frac{\cos\left[\left(n+\frac{2r-1}{2}\right)\theta+\frac{2r-1}{4}\right]}{(2\sin\theta)^{r-\frac{1}{2}}}\right\}+$$

$$+q_{n,r}(\cos\theta),\qquad(2)$$

где

$$|p_{n,r}(\cos\theta)|\leqslant\frac{4}{\pi^{\frac{1}{2}}}\frac{\Pi(n)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\frac{1^2\cdot 3^2\ldots(2r-1)^2}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2r(2n+3)\ldots(2n+2r+1)}\frac{1}{(2\sin\theta)^{r+\frac{1}{2}}},$$

$$|q_{n,r}(\cos\theta)|\leqslant 2\pi^{\frac{1}{2}}\frac{\Pi(n)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\frac{1^2\cdot 3^2\ldots(2r-1)^2}{2\cdot 4\ldots 2r(2n+3)\ldots(2n+2r+1)}\frac{1}{(2\sin\theta)^{r+\frac{1}{2}}}.$$

Ниже мы покажем, что $\frac{\Pi(n)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}<\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, когда $n\geqslant 1$. Таким образом, при $n\geqslant 1$

$$|p_{n,r}(\cos\theta)|<\frac{\alpha_r}{(n\sin\theta)^{r+\frac{1}{2}}},\qquad(3)$$

$$|q_{n,r}(\cos\theta)|<\frac{\beta_r}{(n\sin\theta)^{r+\frac{1}{2}}},\qquad(4)$$

где α_r и β_r — фиксированные числа, не зависящие от n и θ.

Если θ — фиксированное число в промежутке $(0,\pi)$, то

$$|p_{n,r}(\cos\theta)|=O\left(\frac{1}{n^{r+\frac{1}{2}}}\right),\qquad |q_{n,r}(\cos\theta)|=O\left(\frac{1}{n^{r+\frac{1}{2}}}\right).\qquad(5)$$

Если же θ подчинено неравенствам $\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon$, где ε — сколь угодно малое положительное число, то, так как $\csc\theta<\csc\varepsilon$,

$$n^{r+\frac{1}{2}}p_{n,r}(\cos\theta),\qquad n^{r+\frac{1}{2}}q_{n,r}(\cos\theta)$$

остаются меньше некоторых чисел, зависящих лишь от ε, но не зависящих от n и θ.

Мы вывели, таким образом, асимптотические формулы для функций $P_n(\cos\theta)$ и $Q_n(\cos\theta)$. Формула для $P_n(\cos\theta)$ при целом положительном n была получена Стильтьесом.

Формулы (1) и (2) справедливы для $n>-1$.

Для исследования рядов по многочленам Лежандра важно иметь оценки для $\frac{dp_{n,r}(\cos\theta)}{d\cos\theta}$ или $\frac{dp_{n,r}(\cos\theta)}{d\theta}$.

Для этого дифференцируем по θ выражение

$$\frac{e^{-\left[\left(n+r+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{1}{4}\pi\right]i}}{\pi(2\sin\theta)^{r+\frac{1}{2}}}\int_0^\pi\int_0^1\frac{u^{r-\frac{1}{2}}(1-u)^n\sin^{2r}v}{1+\frac{u}{z^2-1}\sin^2 v}\,du\,dv;$$

получаем сумму

$$\left[\frac{-\left(n+r+\frac{1}{2}\right)i}{\pi(2\sin\theta)^{r+\frac{1}{2}}}-\frac{\left(r+\frac{1}{2}\right)\operatorname{ctg}\theta}{\pi(2\sin\theta)^{r+\frac{1}{2}}}\right]\int_0^\pi\int_0^1\frac{u^{r-\frac{1}{2}}(1-u)^n\sin^{2r}v}{1+\frac{u}{z^2-1}\sin^2 v}\,du\,dv-$$

$$-\frac{1}{\pi(2\sin\theta)^{r+\frac{1}{2}}}\int_0^\pi\int_0^1\frac{u^{r+\frac{1}{2}}(1-u)^n\sin^{2r+2}v}{\left(1+\frac{u}{z^2-1}\sin^2 v\right)^2}\,\frac{-2iz^2}{(z^2-1)^2}\,du\,dv,$$

умноженную на $e^{-\left[\left(n+r+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{1}{4}\pi\right]i}$.

Когда θ заключено в промежутке $(\varepsilon, \pi-\varepsilon)$, модуль первого слагаемого есть $O\left(\frac{1}{n^{r-\frac{1}{2}}}\right)$, модуль второго — $O\left(\frac{1}{n^{r+\frac{3}{2}}}\right)$; это легко вывести, снова воспользовавшись неравенством $\left|1+\frac{u}{z^2-1}\sin^2 v\right|^{-1}<2$. Таким образом, *когда* $n\geqslant 1$, *а* θ *заключено в промежутке* $(\varepsilon, \pi-\varepsilon)$, $\frac{d}{d\cos\theta}p_{n,r}(\cos\theta)$ *и* $\frac{d}{d\cos\theta}q_{n,r}(\cos\theta)$ *представляют собой величины* $O\left(\frac{1}{n^{r-\frac{1}{2}}}\right)$.

В частности, при действительном $n\geqslant 1$ и θ, заключенном в промежутке $(\varepsilon, \pi-\varepsilon)$,

$$P_n(\cos\theta)=\left(\frac{\pi}{2\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\Pi(n)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}\right]+O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right), \tag{6}$$

$$Q_n(\cos\theta)=\left(\frac{\pi}{2\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\Pi(n)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}\right]+O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right). \tag{7}$$

Производная остаточного члена в обоих случаях есть $O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$.

При тех же ограничениях

$$P_n(\cos\theta)=\left(\frac{\pi}{2\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\Pi(n)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left\{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2(2n+3)}\,\frac{\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta-\frac{3}{4}\pi\right]}{2\sin\theta}\right\}+O\left(n^{-\frac{5}{2}}\right), \tag{8}$$

$$Q_n(\cos\theta)=\left(\frac{\pi}{2\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\Pi(n)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left\{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2(2n+3)}\,\frac{\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta+\frac{3}{4}\pi\right]}{2\sin\theta}\right\}+O(n^{-\frac{5}{2}}). \qquad (9)$$

В этих формулах производная остаточного члена есть $O(n^{-\frac{3}{2}})$.

192. Чтобы оценить $\frac{\Pi(n)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}$, воспользуемся формулой Стирлинга в такой форме:

$$\ln\Pi(n)=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n+1)-(n+1)+\frac{1}{2}\ln 2\pi+\frac{B_1}{2(n+1)}-\frac{\lambda B_2}{3\cdot 4(n+1)^3},$$

где λ заключено между 0 и 1, $B_1=\frac{1}{6}$, $B_2=\frac{1}{30}$ (бернуллиевы числа).

Из этой формулы

$$\ln\frac{\Pi(n)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\left\{\ln n+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{\theta}{3n^3}\right\}+\frac{1}{2}-$$
$$-(n+1)\left\{\ln n+\frac{3}{2n}-\frac{9}{8n^2}+\frac{9\theta'}{8n^3}\right\}+$$
$$+\frac{B_1}{4(n+1)\left(n+\frac{3}{2}\right)}-\frac{\lambda B_2}{12(n+1)^3}+\frac{\lambda' B_2}{12\left(n+\frac{3}{2}\right)^3},$$

где θ, θ', λ, λ' — все лежат между 0 и 1.

Упрощая, получим

$$\ln\frac{\Pi(n)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{2}\ln n-\frac{3}{8n}+\frac{\theta}{3}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{4n^3}\right)-\frac{9\theta'}{8}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)+$$
$$+\frac{B_1}{4(n+1)\left(n+\frac{3}{2}\right)}-\frac{\lambda B_2}{12(n+1)^3}+\frac{\lambda' B_2}{12\left(n+\frac{3}{2}\right)^3}=$$
$$=-\frac{1}{2}\ln n-\frac{3}{8n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Таким образом,

$$\frac{\Pi(n)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\left(1-\frac{3}{8n}\right)+O(n^{-\frac{5}{2}}). \qquad (10)$$

Отсюда ясно, что $\frac{\Pi(n)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}<\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ при достаточно большом n. Мы покажем, однако, что это верно при любом $n>0$. В самом деле, если для некоторого $n>0$ это неравенство выполняется, то оно выполняется и для $n-1$, т. е.

$$\frac{\Pi(n-1)}{\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}<\frac{1}{(n-1)^{\frac{1}{2}}},$$

если только $n-1>0$. Это следует из того, что

$$\frac{\Pi(n)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\,\frac{\Pi(n-1)}{\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)},$$

откуда

$$\frac{\Pi(n-1)}{\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}<\left(1+\frac{1}{2n}\right)\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}},$$

а

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}<\frac{1}{(n-1)^{\frac{1}{2}}}$$

в силу неравенства

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}>1+\frac{1}{2n}.$$

Итак, если $\dfrac{\Pi(n)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}<\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ для какого-нибудь $n>0$, то это же верно и для $n-k$, где k—любое целое число $<n$.

Мы установили, что

$$\frac{\Pi(n)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\left(1-\frac{3}{8n}\right)+O\left(n^{-\frac{5}{2}}\right)$$

и

$$\frac{\Pi(n)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}<\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\quad(n>0).$$

Точно таким же способом можно доказать, что при $m<n$, где $m>0$ фиксировано,

$$\frac{\Pi(n)}{\Pi(n+m)}=\frac{1}{n^m}\left\{1-\frac{m(m+1)}{2n}\right\}+O\left(n^{-m-2}\right)$$

и

$$\frac{\Pi(n)}{\Pi(n+m)}<\frac{1}{n^m}.$$

193. Из (6) и (7), воспользовавшись оценкой для $\dfrac{\Pi(n)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}$, мы получим

$$P_n(\cos\theta)=\left(\frac{2}{n\pi\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}\right]+O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right), \tag{11}$$

$$Q_n(\cos\theta)=\left(\frac{\pi}{2n\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}\right]+O\left(n^{-\frac{5}{2}}\right), \tag{12}$$

где n—действительное число $\geqslant 1$, θ заключено в промежутке $(\varepsilon,\ \pi-\varepsilon)$ и выражения $O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)$ зависят от ε. Производная остаточного члена в обеих формулах есть $O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$.

Первый член формулы (11)

$$\left(\frac{2}{n\pi \sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}\right]$$

в качестве приближенного выражения $P_n(\cos\theta)$ при целых положительных n был получен еще Лапласом, но оба предложенных им доказательства не удовлетворяют современным требованиям строгости. Приближенное выражение

$$\left(\frac{\pi}{2n \sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}\right]$$

для $Q_n(\cos\theta)$ впервые дал Гейне[1]).

Введя (10) в (8) и (9), мы придем к формулам

$$P_n(\cos\theta)=\left(\frac{2}{n\pi \sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{\left(1-\frac{1}{4n}\right)\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{8n}\operatorname{ctg}\theta\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]\right\}+O\left(n^{-\frac{5}{2}}\right), \tag{13}$$
$$Q_n(\cos\theta)=\left(\frac{\pi}{2n \sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{\left(1-\frac{1}{4n}\right)\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{8n}\operatorname{ctg}\theta\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}\right]\right\}+O\left(n^{-\frac{5}{2}}\right). \tag{14}$$

Остаточные члены здесь зависят только от ε и θ. Их производные, когда θ заключено в промежутке $(\varepsilon,\ \pi-\varepsilon)$, представляют собой $O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)$.

§ 3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ $P_n^m(\cos\theta)$ И $Q_n^m(\cos\theta)$ ПРИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ n И m

194. Возьмем формулу (76) гл. V

$$Q_n^m(\mu)=ie^{(m-n)\pi i}\cdot 2^m\frac{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{4\pi\sin(n+m)\pi}(\mu^2-1)^{\frac{m}{2}}\times$$
$$\times\int\limits^{\left(\frac{1}{z}+,0+,\frac{1}{z}-,0-\right)}\frac{h^{n+m}}{(1-2\mu h+h^2)^{m+\frac{1}{2}}}\,dh.$$

Точка z лежит здесь вне контура интегрирования. Положив $h=\frac{1}{z}(1-u)$, получим

$$Q_n^m(\mu)=-ie^{(m-n)\pi i}\cdot 2^m\frac{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{4\pi\sin(m+n)\pi}\frac{z^{m-n}}{(z^2-1)^{m+\frac{1}{2}}}(\mu^2-1)^{\frac{m}{2}}\times$$
$$\times\int\limits^{(0+,1+,0-,1-)}u^{-\left(m+\frac{1}{2}\right)}(1-u)^{n+m}\left(1+\frac{u}{z^2-1}\right)^{-m-\frac{1}{2}}du.$$

---

[1]) Kugelfunktionen, т. I, 1878, 175.

Как показал Дарбу, формула Маклорена при комплексном ζ может быть записана в виде

$$f(\zeta)=f(0)+\zeta f'(0)+\frac{\zeta^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{\zeta^r}{r!}\lambda f^{(r)}(\theta'\zeta),$$

где θ' лежит в промежутке $(0, 1)$ и $|\lambda|\leqslant 1$. Взяв $\zeta=\left(1+\frac{u}{z^2-1}\right)^{-m-\frac{1}{2}}$, мы увидим, что остаточный член разложения функции $Q_n^m(\cos\theta+0\cdot i)$, данного в п. 188, может быть записан в виде

$$-ie^{(m-n)\pi i}\cdot 2^m\frac{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{4\pi\sin(n+m)\pi}\,\frac{z^{m-n}}{(z^2-1)^{m+\frac{1}{2}}}\,\frac{(\mu^2-1)^{\frac{m}{2}}}{(z^2-1)^r}\,\frac{\Pi\left(m+r-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\,\frac{(-1)^r}{\Pi(r)}\times$$

$$\times\int\limits^{(0+,\,1+,\,0-,\,1-)}u^{-m-\frac{1}{2}+r}(1-u)^{n+m}\lambda\left(1+\frac{\theta' u}{z^2-1}\right)^{-m-r-\frac{1}{2}}du.$$

Предположим теперь, что m и n действительны и $n+m+1>0$, а r выбрано так, что $r-m+\frac{1}{2}>0$. Возьмем в качестве контура интегрирования окружности с центрами в 0, 1 и соединяющие их отрезки действительной оси и затем заставим стремиться к нулю радиусы этих окружностей. При этом интеграл в рассматриваемом выражении примет вид

$$-4\sin\left(m+r-\frac{1}{2}\right)\pi\sin(m+n)\pi\int\limits_0^1 u^{-m+r-\frac{1}{2}}(1-u)^{n+m}\lambda\left(1+\frac{\theta' u}{z^2-1}\right)^{-m-\frac{1}{2}-r}du,$$

где интегрирование производится по отрезку действительной оси.

Если $\mu=\cos\theta+0\cdot i$, где θ заключено в промежутке $(0, \pi)$, то, как в п. 191, будем иметь

$$\left|1+\frac{\theta' u}{z^2-1}\right|\geqslant\frac{1}{2},$$

откуда

$$\left|1+\frac{\theta' u}{z^2-1}\right|^{-m-r-\frac{1}{2}}\leqslant 2^{m+r+\frac{1}{2}},$$

если только $m+r+\frac{1}{2}>0$.

Отсюда следует, что модули действительной и мнимой частей интеграла

$$\int\limits_0^1 u^{-m-\frac{1}{2}+r}(1-u)^{n+m}\lambda\left(1+\frac{\theta' u}{z^2-1}\right)^{-m-\frac{1}{2}-r}du$$

не превосходят

$$2^{m+r+\frac{1}{2}}\int\limits_0^1 u^{-m-\frac{1}{2}+r}(1-u)^{n+m}\,du.$$

Полагая $\theta'=0$ и $\lambda=1$ в выражении остаточного члена, мы получим $(r+1)$-й член. Следовательно, модуль остаточного члена ряда, полученного для $Q_n^m(\cos\theta)$ или $P_n^m(\cos\theta)$, не превосходит умноженного на $2^{m+r+\frac{1}{2}}$ модуля $(r+1)$-го члена этого ряда. И это справедливо независимо от того, сходится такой ряд или нет.

Мы получаем, таким образом, формулы

$$P_n^m(\cos\theta)=\frac{2}{\pi^{\frac{1}{2}}}\frac{\Pi(n+m)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left\{\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}+\frac{m}{2}\pi\right]}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}+\right.$$

$$+\frac{1^2-4m^2}{2(2n+3)}\frac{\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta-\frac{3}{4}\pi+\frac{m}{2}\pi\right]}{(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}}+\ldots$$

$$\left.\ldots+\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\ldots[(2r-1)^2-4m^2]}{2\cdot 4\ldots(2r-2)(2n+3)\ldots(2n+2r-1)}\frac{\cos\left[\left(n+\frac{2r-1}{2}\right)\theta-\frac{2r-1}{4}\pi+\frac{m}{2}\pi\right]}{(2\sin\theta)^{r-\frac{1}{2}}}\right\}+$$

$$+k2^{m+r+\frac{1}{2}}\frac{2}{\pi^{\frac{1}{2}}}\frac{\Pi(n+m)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\frac{(1^2-4m^2)\ldots[(2r+1)^2-4m^2]}{2\cdot 4\ldots 2r(2n+3)\ldots(2n+2r+1)}\frac{1}{(2\sin\theta)^{r+\frac{1}{2}}},\qquad(15)$$

$$Q_n^m(\cos\theta)=\pi^{\frac{1}{2}}\frac{\Pi(n+m)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left\{\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}+\frac{m}{2}\pi\right]}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}-\right.$$

$$-\frac{1^2-4m^2}{2(2n+3)}\frac{\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta+\frac{3}{4}\pi+\frac{m}{2}\pi\right]}{(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}}+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{r-1}\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\ldots[(2r-1)^2-4m^2]}{2\cdot 4\ldots(2r-2)(2n+3)\ldots(2n+2r-1)}\times$$

$$\left.\times\frac{\cos\left[\left(n+\frac{2r-1}{2}\right)\theta+\frac{2r-1}{4}\pi+\frac{m}{2}\pi\right]}{(2\sin\theta)^{r-\frac{1}{2}}}\right\}+$$

$$+k'2^{m+r+\frac{1}{2}}\frac{\Pi(n+m)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\frac{(1^2-4m^2)\ldots[(2r+1)^2-4m^2]}{2\cdot 4\ldots 2r(2n+3)\ldots(2n+2r+1)}\frac{1}{(2\sin\theta)^{r+\frac{1}{2}}},\qquad(16)$$

где $|k|\leqslant 1$, $|k'|\leqslant 1$. При этом предположено, что m и n действительны и $m+n+1>0$, $r-m+\frac{1}{2}>0$, $r+m+\frac{1}{2}>0$. Когда $m=0$, эти условия выполняются при $r=0, 1, 2, \ldots$, но для этого случая в п. 191 даны более точные оценки остаточного члена. В тех случаях, когда полученные ряды сходятся, наши результаты согласуются с формулами (160) и (161) гл. V, но сами по себе они справедливы независимо от того, сходятся эти ряды или нет.

195. Если θ заключено в промежутке $(\eta, \pi-\eta)$, то, так как

$$\csc\theta\leqslant\csc\eta,$$

мы заметим, что при значениях n, больших по сравнению с m,

$$\frac{\Pi(n)}{\Pi(n+m)} P_n^m(\cos\theta)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\Pi(n)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left\{\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}+\frac{m}{2}\pi\right]}{\sin^{\frac{1}{2}}\theta}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\},$$

$$\frac{\Pi(n)}{\Pi(n+m)} Q_n^m(\cos\theta)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\Pi(n)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left\{\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}+\frac{m}{2}\pi\right]}{\sin^{\frac{1}{2}}\theta}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}.$$

Отсюда, так как

$$\frac{\Pi(n)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\left(1-\frac{3}{8n}\right)+O\left(n^{-\frac{5}{2}}\right),$$

получаем

$$\frac{\Pi(n)}{\Pi(n+m)} P_n^m(\cos\theta)=\left(\frac{2}{n\pi\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}+\frac{m}{2}\pi\right]+O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right), \quad (17)$$

$$\frac{\Pi(n)}{\Pi(n+m)} Q_n^m(\cos\theta)=\left(\frac{\pi}{2n\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}+\frac{m}{2}\pi\right]+O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right). \quad (18)$$

Эти формулы дают приближенные выражения для

$$\frac{\Pi(n)}{\Pi(n+m)} P_n^m(\cos\theta) \quad \text{и} \quad \frac{\Pi(n)}{\Pi(n+m)} Q_n^m(\cos\theta)$$

при больших сравнительно с m значениях n и при θ, заключенном в промежутке $(\varepsilon, \pi-\varepsilon)$.

Когда θ фиксировано, остаточные члены в (17) и (18) следует считать зависящими от θ. Их производные имеют порядок $O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$.

Формулы (17) и (18) представляют собой обобщения теорем Лапласа и Гейне, относящихся к случаю $m=0$.

Если воспользоваться оценкой

$$\frac{\Pi(n)}{\Pi(n+m)}=\frac{1}{n^m}\left\{1-\frac{m(m+1)}{2n}\right\}+O\left(n^{-m-2}\right),$$

то мы получим

$$\frac{1}{n^m} P_n^m(\cos\theta)=\left(\frac{2}{n\pi\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}+\frac{m}{2}\pi\right]+O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right),$$

$$\frac{1}{n^m} Q_n^m(\cos\theta)=\left(\frac{\pi}{2n\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}+\frac{m}{2}\pi\right]+O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right).$$

Взяв два члена ряда и соответствующий остаточный член, мы придем к более точным формулам:

$$\frac{1}{n^m} P_n^m(\cos\theta)=$$
$$=\left(\frac{2}{n\pi\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\left(1+\frac{(2m-1)(2m-3)}{8n}\right)\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}+\frac{m}{2}\pi\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{m^2-\frac{1}{4}}{2n\sin\theta}\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta-\frac{3}{4}\pi+\frac{m}{2}\pi\right]\right\}+O\left(n^{-\frac{5}{2}}\right), \tag{19}$$

$$\frac{1}{n^m} Q_n^m(\cos\theta)=$$
$$=\left(\frac{\pi}{2n\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\left(1+\frac{(2m-1)(2m-3)}{8n}\right)\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}+\frac{m}{2}\pi\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{m^2-\frac{1}{4}}{2n\sin\theta}\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta+\frac{3}{4}\pi+\frac{m}{2}\pi\right]\right\}+O\left(n^{-\frac{5}{2}}\right). \tag{20}$$

Они, как и прежние оценки, справедливы при фиксированном m; при этом $O\left(n^{-\frac{5}{2}}\right)$ в обеих формулах зависит от m и θ.

Когда θ заключено в промежутке $(\varepsilon, \pi-\varepsilon)$, величина $O\left(n^{-\frac{5}{2}}\right)$ зависит от ε. При этом получаются приближенные выражения $P_n^m(\cos\theta)$ и $Q_n^m(\cos\theta)$ для фиксированного m и для n, больших сравнительно с m.

Общая формула для $P_n^m(\cos\theta)$ при n, вообще говоря, комплексном, но подчиненном условию $|\arg n|\leqslant\pi-\varepsilon$, такова:

$$P_n^m(\cos\theta)=$$
$$=\frac{\Pi(n)}{\Pi(n-m)}\left(\frac{2}{n\pi\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{m}{2}\pi+\frac{\pi}{4}\right]\left(1+\frac{m^2}{2n}-\frac{1}{4n}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2n}\left(m^2-\frac{1}{4}\right)\operatorname{ctg}\theta\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{m}{2}\pi-\frac{\pi}{4}\right]\right\}+O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right). \tag{21}$$

Асимптотические формулы такого рода для $P_n^m(\cos)\,\theta$ и $Q_n^m(\cos\theta)$ дали Ватсон и Барнс; последний, впрочем, установил (21) лишь для более узких секторов $|\arg n|\leqslant\frac{\pi}{2}-\varepsilon$.

Для $P_n^m(\mu)$, где $\mu=\operatorname{ch}\zeta=\operatorname{ch}(\xi+i\eta)$, асимптотическая формула может быть выведена из

$$P_n^m(\mu)=\frac{1}{\Pi(-m)}\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{m}{2}}F\left(n+1,\ -n;\ 1-m;\frac{1-\mu}{2}\right)$$

с помощью формулы (Б) п. 198. Так полученное для $P_n^m(\mu)$ выражение

$$P_n^m(\mu)=\frac{\Pi(n)}{\Pi(n-m)}\frac{e^{-\frac{1}{2}\xi}}{(n\pi)^{\frac{1}{2}}(1-e^{-2\xi})^{\frac{1}{2}}}\left\{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{c_s\Pi\left(s-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)n^s}+\right.$$
$$\left.+e^{\mp\left(m-\frac{1}{2}\right)\pi i}e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{c_s'\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)n^s}\right\}$$

справедливо при $\frac{\pi}{2}-\omega_2+\varepsilon<\arg n<\frac{\pi}{2}+\omega_1+\delta$. Отсюда, заметив, что

$$P_{n,}^m(\cos\eta)=e^{\frac{1}{2}m\pi i}P_n^m[\operatorname{ch}(0+i\eta)],$$

придем к формуле (21).

196. Пусть μ действительное число, большее 1. Положим $\mu=\operatorname{ch}\xi$; тогда $z=e^{\xi}$, и ряд (158) гл. V принимает вид

$$Q_n^m(\operatorname{ch}\xi)=e^{m\pi i}\cdot 2^m\frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi(n+m)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\frac{e^{-(n+m+1)\xi}}{(1-e^{-2\xi})^{m+\frac{1}{2}}}\operatorname{sh}^m\xi\times$$
$$\times F\left(m+\frac{1}{2},\quad -m+\frac{1}{2};\quad n+\frac{3}{2};\quad \frac{1}{1-e^{-2\xi}}\right).$$

Сходится он при $e^{2\xi}>2$, т. е. при $\operatorname{ch}\xi>\frac{3}{2\sqrt{2}}$.

При $\operatorname{ch}\xi\leqslant\frac{3}{2\sqrt{2}}$ остаточный член ряда зависит от

$$\int_0^1 u^{-m-\frac{1}{2}+r}(1-u)^{n+m}\lambda\left(1+\frac{\theta' u}{e^{2\xi}-1}\right)^{-m-r-\frac{1}{2}}du,$$

где θ' лежит в промежутке (0, 1).

Так как $1+\frac{\theta' u}{e^{2\xi}-1}>1$, то при $r+m+\frac{1}{2}>0$ этот интеграл меньше, чем

$$\int_0^1 u^{-m-\frac{1}{2}+r}(1-u)^{m+n}\,du.$$

Отсюда сразу видно, что остаточный член по модулю меньше $(r+1)$-го члена; следовательно, наш ряд — асимптотический. Поэтому ряд (159) гл. V для $P_n^m(\operatorname{ch}\xi)$ также оказывается асимптотическим.

Из формулы (158) гл. V вытекает, что при больших n и фиксированном m приближенным выражением для

$$\frac{\Pi(n)}{\Pi(n+m)}Q_n^m(\operatorname{ch}\xi)$$

служит

$$e^{m\pi i}\pi^{\frac{1}{2}}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\left(1-\frac{3}{8n}\right)\frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi}}{(2\operatorname{sh}\xi)^{\frac{1}{2}}}\left\{1-\frac{1^2-4m^2}{4n}\frac{e^{-2\xi}}{1-e^{-2\xi}}\right\}.$$

Иначе можно записать

$$\frac{\Pi(n)}{\Pi(n+m)} Q_n^m(\operatorname{ch}\xi) =$$
$$= e^{m\pi i}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi}}{(2\operatorname{sh}\xi)^{\frac{1}{2}}}\left\{1-\frac{1}{8n}-\frac{m^2}{n}+\frac{4m^2-1}{4n}\frac{1}{1-e^{-2\xi}}\right\}+O\left(n^{-\frac{5}{2}}\right). \qquad (22)$$

Асимптотическое выражение правой части есть

$$e^{m\pi i}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi}}{(2\operatorname{sh}\xi)^{\frac{1}{2}}}.$$

Пользуясь выражением для $P_n^m(\mu)$ на стр. 277, мы получим для $P_n^m(\operatorname{ch}\xi)$ приближенное выражение при больших n:

$$P_n^m(\operatorname{ch}\xi) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}}\frac{\Pi(n+m)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\frac{\sin(n+m)\pi}{\cos n\pi}\frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi}}{(2\operatorname{sh}\xi)^{\frac{1}{2}}}\left(1-\frac{1-4m^2}{4n}\frac{e^{-\xi}}{2\operatorname{sh}\xi}\right)+$$
$$+\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}}\frac{\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\Pi(n-m)}\frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi}}{(2\operatorname{sh}\xi)^{\frac{1}{2}}}\left(1+\frac{1-4m^2}{4n}\frac{e^{-\xi}}{2\operatorname{sh}\xi}\right).$$

Если только значение n не слишком близко к какому-нибудь нечетному целому числу, первое слагаемое в правой части благодаря множителю $e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi}$ оказывается весьма малым по сравнению со вторым. Таким образом,

$$\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n)} P_n^m(\operatorname{ch}\xi)$$

приближенно равно

$$\frac{1}{(n\pi)^{\frac{1}{2}}}\left(1-\frac{1}{8n}\right)\frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi}}{(2\operatorname{sh}\xi)^{\frac{1}{2}}}\left\{1+\frac{1-4m^2}{4n}\frac{e^{-2\xi}}{1-e^{-2\xi}}\right\}$$

или

$$\frac{1}{(n\pi)^{\frac{1}{2}}}\frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi}}{(2\operatorname{sh}\xi)^{\frac{1}{2}}}\left\{1+\frac{m^2}{n}-\frac{3}{8n}+\frac{1-4m^2}{4n}\frac{1}{1-e^{-2\xi}}\right\}. \qquad (23)$$

Асимптотическим выражением $\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n)} P_n^m(\operatorname{ch}\xi)$ служит

$$\frac{1}{(n\pi)^{\frac{1}{2}}}\frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi}}{(2\operatorname{sh}\xi)^{\frac{1}{2}}}+O\left(n^{-\frac{5}{2}}\right). \qquad (24)$$

197. Формула (11) для $P_n(\cos\theta)$ с целым положительным n без остаточного члена дважды рассматривалась Лапласом [1]). Впрочем, его исследования, так же как исследования Бонне [2]), с современной точки зрения не строги. Формулы для $P_n(\mu)$, и $Q_n(\mu)$ при целом n и комплексном μ рассматривал Гейне [3]), но он не дал оценки остаточного члена; тем самым асимптотический характер его результатов не был точно установлен. Дарбу [4]) исследовал асимптотические выражения $P_n(\mu)$ и $Q_n(\mu)$ при больших целых положительных n и оценил остаточный член; μ он считал либо действительным, заключенным между -1 и $+1$, либо комплексным. Асимптотическое выражение $P_n(\mu)$ при больших целых положительных n и действительном μ, заключенном между -1 и 1, получил Стильтьес [5]) с помощью контурных интегралов. Более общий случай, когда m и n действительны, n принимает большие положительные, не обязательно целые значения, а μ заключено между -1 и 1, рассмотрел Гобсон [6]); он же получил асимптотические выражения $P_n^m(\mu)$ и $Q_n^m(\mu)$ при действительном $\mu > 1$ и действительных m и n. Еще более общие исследования провел Барнс [7]); он исследовал асимптотические выражения $Q_n^m(\mu)$ при комплексных m и n, когда $|n|$ велико и $|\arg n| < \pi - \varepsilon$, а также $P_n^m(\mu)$, когда $|n|$ велико и $|\arg(\pm n)| < \pi - \varepsilon$ (ε сколь угодно мало и не зависит от n).

Ватсон [8]) получил асимптотические разложения этих функций методом перевала. Для $P_n^m(\mu)$ его разложение оказалось справедливым в более широкой области, нежели у Барнса: условие $|\arg(\pm n)| < \pi - \varepsilon$ он заменил условием $|\arg n| < \pi - \varepsilon$.

Другие исследования асимптотических разложений, основывающиеся прямо на соответствующих дифференциальных уравнениях, принадлежат Никольсону [9]) и, для случая многочленов Лежандра, Блюменталю [10]). Здесь мы приводим лишь наиболее важные асимптотические разложения. Более общие результаты читатель найдет в статьях Барнса и Ватсона.

198. Ватсон получил следующие асимптотические разложения:

$$\left(\frac{\mu-1}{2}\right)^{-\alpha-\lambda} F\left(\alpha+\lambda,\ \alpha+\lambda-\gamma+1;\ \alpha-\beta+2\lambda+1; \frac{2}{1-\mu}\right) \sim$$

$$\sim \frac{2^{\alpha+\beta}\Pi(\alpha-\beta+2\lambda)}{\Pi(\alpha+\lambda-\gamma)\,\Pi(\gamma-\beta+\lambda-1)} e^{-(\alpha+\lambda)\xi}\left(1-e^{-\xi}\right)^{\frac{1}{2}-\gamma} \times$$

$$\times \left(1+e^{-\xi}\right)^{\gamma-\alpha-\beta-\frac{1}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} c_s' \Pi\left(s-\frac{1}{2}\right)\lambda^{-s-\frac{1}{2}}, \quad \text{(А)}$$

$$F\left(\alpha+\lambda,\ \beta-\lambda;\ \gamma;\ \frac{1-\mu}{2}\right) \sim$$

$$\sim \frac{\Pi(\lambda-\beta)\,\Pi(\gamma-1)}{\pi\Pi(\gamma-\beta+\lambda-1)} 2^{\alpha+\beta-1}\left(1-e^{-\zeta}\right)^{\frac{1}{2}-\gamma}\left(1+e^{-\zeta}\right)^{\gamma-\alpha-\beta-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left\{ e^{(\lambda-\beta)\zeta} \sum_{s=0}^{\infty} c_s \Pi\left(s-\frac{1}{2}\right)\lambda^{-s-\frac{1}{2}} + e^{\mp\pi i\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)} e^{-(\lambda+\alpha)\zeta} \sum_{s=0}^{\infty} c_s' \Pi\left(s-\frac{1}{2}\right)\lambda^{-s-\frac{1}{2}} \right\}. \quad \text{(Б)}$$

---

1) Mécanique Celeste, т. V, кн. XI, и приложение к т. V.
2) Journ. de Liouville, 17 (1852), p 265.
3) Kugelfunktionen, т. I, стр. 175—182.
4) Journ. de Liouville (3) 4 (1878), 5 и 377.
5) Ann. de Toulouse, 4 (1890), 61.
6) Phil. Frans., 187 (1896), 486.
7) Quart. Journ Math., 39 (1908), 143.
8) Camb. Phil. Trans, 22 (1918), 290.
9) Quart. Journ. Math., 41 (1910), 291; 43 (1912), 53.
10) Archiv d. Math. u. Phys. (3), 19 (1912), 136.

Первое справедливо при больших $|\lambda|$ и $|\arg\lambda| \leqslant \pi - \varepsilon$, где ε — сколь угодно малое положительное число; второе — при больших $|\lambda|$ и $\frac{\pi}{2} - \omega_2 + \varepsilon < \arg\lambda < \frac{\pi}{2} + \omega_1 - \delta$; в $e^{\mp\pi i\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)}$ верхний или нижний знак берется соответственно в случаях $\operatorname{Im}(\mu) > 0$ и $\operatorname{Im}(\mu) < 0$ и при этом $1 - e^{\zeta} = e^{\zeta}(1 - e^{-\zeta})e^{\mp\pi i}$. В этих формулах

$$\mu = \operatorname{ch}\zeta = \operatorname{ch}(\xi + i\eta),$$

$$\omega_2 = \operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi}, \quad -\omega_1 = \operatorname{arctg}\frac{\eta - \pi}{\xi}$$

при $\eta \geqslant 0$ и

$$\omega_2 = \operatorname{arctg}\frac{\eta + \pi}{\xi}, \quad -\omega_1 = \operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi}$$

при $\eta \leqslant 0$.

Числа c_s таковы, что

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \frac{L + Me^{\zeta} + Ne^{2\zeta}}{2(1 - e^{2\zeta})},$$

где

$$L = (\alpha + \beta - 2\gamma + 1)^2 - \alpha + \beta - \frac{1}{2},$$
$$M = -2(\alpha + \beta - 1)(\alpha + \beta - 2\gamma + 1),$$
$$N = (\alpha + \beta - 1)^2 + \alpha - \beta + \frac{1}{2}.$$

Число c_0' также равно 1, а c_1' получается из c_1 изменением знака ζ.

§ 4. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ПРИ m, БОЛЬШИХ ПО СРАВНЕНИЮ С n

199. Чтобы получить приближенное выражение для $P_n^{-m}(\mu)$ тогда, когда m велико сравнительно с n, возьмем равенство

$$P_n^{-m}(\mu) = \frac{1}{\Pi(m)}\left(\frac{\mu - 1}{\mu + 1}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-n, n + 1; 1 + m; \frac{1 - \mu}{2}\right),$$

где $|\mu - 1| < 2$. Воспользовавшись формулой

$$\Pi(m) = (2\pi m)^{\frac{1}{2}} e^{-m} m^m \left(1 + \frac{1}{12m} + \ldots\right),$$

получим

$$P_n^{-m}(\mu) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^m m^{-m-\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu - 1}{\mu + 1}\right)^{\frac{1}{2}m} \left(1 + \frac{1}{12m}\right) \times$$
$$\times \left\{1 + \frac{n(n+1)}{m}\frac{\mu - 1}{2} + \frac{(\ldots)}{m^2} + \ldots\right\}. \tag{25}$$

Приближенное выражение для $P_n^m(\mu)$ при условии

$$|\mu - 1| < 2$$

мы получим с помощью соотношения

$$P_n^m(\mu) = \frac{\Pi(n + m)}{\Pi(n - m)} P_n^{-m}(\mu).$$

Так как

$$P_n^{-m}(\cos\theta) = e^{-\frac{1}{2}m\pi i} P_n^{-m}(\cos\theta + 0\cdot i) =$$
$$= \frac{1}{\Pi(m)}\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-n, n+1;\ m+1;\ \sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$

то

$$P_n^{-m}(\cos\theta) =$$
$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^m m^{-m-\frac{1}{2}} \operatorname{tg}^m\frac{\theta}{2}\left(1+\frac{1}{12m}\right)\left\{1 - \frac{n(n+1)}{m}\sin^2\frac{\theta}{2} + \ldots\right\}. \qquad (26)$$

Вообще, положив в формуле (Б), п. 198,

$$\lambda = m,\quad \alpha = -n-m,\quad \beta = n+m+1,\quad \gamma = m+1,$$

получим

$$F\left(-n,\ n+1;\ 1+m;\ \frac{1-\mu}{2}\right) \sim$$
$$\sim \frac{\Pi(-n-1)\,\Pi(m)}{\pi\Pi(-n+m-1)}(1-e^{-\zeta})^{-m-\frac{1}{2}}(1+e^{-\zeta})^{m-\frac{1}{2}} \times$$
$$\times\left\{e^{-(n+1)\zeta}\sum_{s=0}^{\infty} c_s\Pi\left(s-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{m^{s+\frac{1}{2}}} + e^{\left[\mp\pi i\left(\frac{1}{2}-m\right)+n\right]\zeta}\sum_{s=0}^{\infty} c_s'\Pi\left(s-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{m^{s+\frac{1}{2}}}\right\}.$$

Отсюда получаем для $P_n^{-m}(\mu)$ асимптотическую формулу:

$$P_n^{-m}(\mu) \sim \frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n)\,\Pi(m)}\frac{\sin(n-m)\pi}{\sin n\pi}(1-e^{-2\zeta})^{-\frac{1}{2}}\left\{e^{-(n+1)\zeta}\sum_{s=0}^{\infty} c_s\Pi\left(s-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{m^{s+\frac{1}{2}}} + \right.$$
$$\left. + e^{\left[\mp\pi i\left(\frac{1}{2}-m\right)+n\right]\zeta}\sum_{s=0}^{\infty} c_s'\Pi\left(s-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{m^{s+\frac{1}{2}}}\right\}. \qquad (27)$$

Верхний знак в показателе берется при $\operatorname{Im}(\mu) > 0$, нижний—при $\operatorname{Im}(\mu) < 0$. Формула (27) справедлива при

$$-\frac{\pi}{2} - \omega_2 + \varepsilon < \arg m < \frac{\pi}{2} + \omega_1 - \varepsilon.$$

Другие формулы для $P_n^m(\mu)$ и $Q_n^m(\mu)$ дали Ватсон и Барнс.

Следует заметить, что приближенные выражения функций $P_n^m(\operatorname{ch}\xi)$ и $Q_n^m(\operatorname{ch}\xi)$ в виде рядов по степеням $\frac{1}{m}$ могут быть получены из соответствующих разложений по степеням $\frac{1}{n}$ посредством преобразования Уиппла (см. п. 192) с соответствующими изменениями в обозначениях.

§ 5. ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРЕМ СТИЛЬТЬЕСА

200. Применение асимптотических формул для $P_n(\cos\theta)$ и $Q_n(\cos\theta)$, приведенных в п. 191, ограничено условием $\varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon$, где ε — положительное число, которое можно выбрать сколь угодно малым. В следующей теореме этого ограничения нет.

Для произвольного действительного, не обязательно целого, $n \geqslant 1$.

$$|Q_n(\cos\theta)| < \left(\frac{\pi}{n\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad |P_n(\cos\theta)| < \frac{2}{(n\pi\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}, \tag{28}$$

когда $0 < \theta < \pi$.

Если в общей формуле (78) гл. V положить $h = \frac{1}{z}(1-u)$ и принять u за переменное интегрирования, то получим

$$Q_n^m(\mu) = -ie^{(m-n)\pi i}\, 2^m \frac{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{4\pi\sin(n+m)\pi} \frac{z^{m-n}}{(z^2-1)^{m+\frac{1}{2}}}(\mu^2-1)^{\frac{m}{2}} \times$$
$$\times \int^{(0+,\,1+,\,0-,\,1-)} u^{-m-\frac{1}{2}}(1-u)^{n+m}\left(1+\frac{u}{z^2-1}\right)^{-m-\frac{1}{2}} du,$$

где начальные значения аргументов величин u и $1-u$ оба считаются равными нулю в некоторой точке действительной оси, лежащей между 0 и 1.

Если предположить, что $\mathrm{Re}\,(n+m+1) > 0$ и $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}-m\right) > 0$, то в качестве контура интегрирования можно взять окружности с центрами в точках 0 и 1 и соединяющий их отрезок действительной оси. Заставив радиусы этих окружностей стремиться к нулю, мы приведем нашу формулу к виду

$$Q_n^m(\mu) = e^{m\pi i}\frac{2^m\cos m\pi}{\pi}\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{z^{m-n}}{(z^2-1)^{m+\frac{1}{2}}}(\mu^2-1)^{\frac{m}{2}} \times$$
$$\times \int_0^1 \frac{(1-u)^{n+m}}{u^{m+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{u}{z^2-1}\right)^{m+\frac{1}{2}}}\,du.$$

Напоминаем, что здесь $\mathrm{Re}\,(n+m+1) > 0$, $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}-m\right) > 0$.

Положив $m=0$, для $\mathrm{Re}\,(n+1) > 0$ будем иметь

$$Q_n(\mu) = \frac{z^{-n}}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{u^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{u}{z^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}}\,du.$$

Пусть теперь $\mu = \cos\theta + 0\cdot i$. Тогда $z = e^{i\theta}$ и

$$Q_n(\cos\theta + 0\cdot i) = \frac{e^{-\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}\right]i}}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{u^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{u}{z^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}}\,du.$$

Так как

$$Q_n(\cos\theta + 0\cdot i) = Q_n(\cos\theta) - \frac{1}{2}\pi i P_n(\cos\theta),$$

то при действительном $n > -1$

$$\left.\begin{array}{r} |Q_n(\cos\theta)| \\ \frac{1}{2}\pi\,|P_n(\cos\theta)| \end{array}\right\} < \frac{1}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{u^{\frac{1}{2}}}\left|\frac{1}{1+\frac{u}{z^2-1}}\right|^{\frac{1}{2}} du,$$

где $0 < \theta < \pi$.

Мы имеем

$$1+\frac{u}{z^2-1}=1+\frac{ue^{-i\theta}}{2i\sin\theta}=1-\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}iu\operatorname{ctg}\theta$$

и

$$\left|1-\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}iu\operatorname{ctg}\theta\right|=\left\{\left(1-\frac{1}{2}u\right)^2+\frac{1}{4}u^2\operatorname{ctg}^2\theta\right\}^{\frac{1}{2}}>1-\frac{1}{2}u$$

для всех θ, а наименьшее значение $1-\frac{1}{2}u$ при u, заключенном в промежутке $(0, 1)$, есть $\frac{1}{2}$. Поэтому для всех θ в промежутке $(0, \pi)$

$$\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{u^{\frac{1}{2}}}\left|\frac{1}{1+\frac{u}{z^2-1}}\right|^{\frac{1}{2}}du<2^{\frac{1}{2}}\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^n\,du<(2\pi)^{\frac{1}{2}}\frac{\Pi(n)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}.$$

Итак, мы показали, что при n действительном положительном (не обязательно целом)

$$|Q_n(\cos\theta)|<\left(\frac{\pi}{\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\Pi(n)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)},\quad |P_n\cos\theta)|<\frac{2}{(\pi\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}\frac{\Pi(n)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)},$$

а в п. 192 было показано, что при $n\geqslant 1$

$$\frac{\Pi(n)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}<\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}.$$

Наша теорема, таким образом, доказана.

То́, что $|P_n(\cos\theta)\sin^{\frac{1}{2}}\theta|$ меньше некоторого фиксированного числа, не зависящего от n и θ, для целого положительного n доказал Стильтьес[1]. Этот результат был сформулирован им в виде неравенства

$$|P_n(\cos\theta)|<\frac{MC_n}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}},$$

где

$$C_n=\frac{2}{(n\pi)^{\frac{1}{2}}}(1+\varepsilon),$$

причем ε стремится к нулю вместе с $\frac{1}{n}$, а M заключено между 1 и 2. Ограниченность $|P_n(\cos\theta)\sin^{\frac{1}{2}}\theta|$ была установлена независимо Гобсоном[2]; позднее появилось доказательство Джолифа[3], применимое также к $Q_n(\cos\theta)$.

В 1913 г. Гроноулл показал[4], что $P_n(\cos\theta)<\frac{4}{(2\pi n\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}$ для целых положительных n; это неравенство он вывел из асимптотического ряда,

[1]) Ann. de Toulouse, 4 (1840), 6.
[2]) Proc. Lond. Math. Soc. (2), 7 (1908), 25.
[3]) Mess. of Math., 43 (1913), 85.
[4]) Math. Ann., 74 (1913), 221.

полученного для $P_n(\cos\theta)$ Стильтьесом. Позднее Фейéр доказал[1]) элементарно, не прибегая ни к асимптотическим рядам, ни к интегралам, что для положительных целых n

$$|P_n(\cos\theta)| \leqslant \frac{8}{(2\pi n\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}.$$

Приведенное выше обобщение на случай нецелого n, а также для функции $Q_n(\cos\theta)$ принадлежит Гобсону[2]); данное им доказательство здесь воспроизведено.

201. Результаты, изложенные в п. 200, Гобсон обобщил (см. цит. соч.) на функции $P_n^{\pm m}(\cos\theta)$ и $Q_n^{\pm m}(\cos\theta)$ с действительными n и m, подчиненными лишь условиям $n-m+1>0$, $m\geqslant 0$.

Если в выражении $Q_n^m(\mu)$, данном в п. 187, взять $-m$ вместо m, то при $\operatorname{Re}(n-m+1)>0$ и $\operatorname{Re}\left(m+\frac{1}{2}\right)>0$ получим

$$Q_n^{-m}(\mu)=\frac{e^{-m\pi i}}{\pi}2^{-m}\cos m\pi\,\Pi\left(-m-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{z^{-m-n}}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}-m}}(\mu^2-1)^{-\frac{m}{2}}\times$$
$$\times\int_0^1\frac{(1-u)^{n-m}}{u^{\frac{1}{2}-m}\left(1+\frac{u}{z^2-1}\right)^{\frac{1}{2}-m}}\,du.$$

Положив $\mu=\cos\theta+0\cdot i$, будем иметь

$$Q_n^{-m}(\cos\theta+0\cdot i)=2^{-m}e^{-m\pi i}\frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\frac{e^{-\frac{1}{2}(n+m)i\theta-\frac{1}{4}m\pi i}}{(e^{2i\theta}-1)^{\frac{1}{2}-m}\sin^m\theta}\times$$
$$\times\int_0^1\frac{(1-u)^{n-m}}{u^{\frac{1}{2}-m}\left(1+\frac{u}{z^2-1}\right)^{\frac{1}{2}-m}}\,du$$

или

$$Q_n^{-m}(\cos\theta+0\cdot i)=\frac{1}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}\frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}e^{-\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{2}\right]i-m\pi i}\frac{1}{\sin^m\theta}\times$$
$$\times\int_0^1\frac{(1-u)^{n-m}}{u^{\frac{1}{2}-m}}\frac{\left(\sin\theta-\frac{1}{2}iue^{-i\theta}\right)^m}{\left(1-\frac{1}{2}iu\frac{e^{-i\theta}}{\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}}\,du.$$

Модули действительной и мнимой частей выражения

$$\sin^m\theta\,Q_n^{-m}(\cos\theta+0\cdot i)$$

---

[1]) Math. Zs., 24 (1925), 290.

[2]) Proc. Lond. Math. Soc. (2), 30 (1929), 239.

оба меньше, чем

$$\frac{1}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}\frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\int_0^1 \frac{(1-u)^{n-m}}{u^{\frac{1}{2}-m}}\frac{\left|\sin\theta-\frac{1}{2}iue^{-i\theta}\right|^m}{\left\{\left(1-\frac{1}{2}u\right)^2+\frac{1}{4}u^2\operatorname{ctg}^2\theta\right\}^{\frac{1}{4}}}\,du.$$

Далее,

$$\left|\sin\theta-\frac{1}{2}iue^{-i\theta}\right|=\left\{\left(\frac{1}{2}u-\sin^2\theta\right)^2+\sin^2\theta\cos^2\theta\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

При заданном θ, если $2\sin^2\theta<1$, последнее выражение достигает своего наибольшего значения, равного $\frac{1}{2}$, при $u=1$. Если же $2\sin^2\theta\geqslant 1$, его наибольшее значение есть $\sin\theta$, и достигается оно при $u=0$. Следовательно, при всех u и θ

$$\left|\sin\theta-\frac{1}{2}iue^{-i\theta}\right|\leqslant 1.$$

А так как

$$\left|1-\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}iu\operatorname{ctg}\theta\right|\geqslant\frac{1}{2},$$

то тем самым доказано, что модули действительной и мнимой частей выражения $\sin^m\theta\, Q_n^{-m}(\cos\theta+0\cdot i)$ оба меньше, чем

$$\frac{1}{(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}\frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\int_0^1\frac{(1-u)^{n-m}}{u^{\frac{1}{2}-m}}\,du,$$

т. е. меньше, чем

$$\frac{\Pi(n-m)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{\pi}{\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Известно, что

$$Q_n^{-m}(\cos\theta+0\cdot i)=e^{-\frac{3}{2}m\pi i}\left\{Q_n^{-m}(\cos\theta)-\frac{1}{2}\pi iP_n^{-m}(\cos\theta)\right\}.$$

Поэтому действительная и мнимая части $Q_n^{-m}(\cos\theta+0\cdot i)$ суть соответственно

$$\cos\frac{3}{2}m\pi\, Q_n^{-m}(\cos\theta)-\frac{1}{2}\pi\sin\frac{3}{2}m\pi\, P_n^{-m}(\cos\theta)$$

и

$$-i\left\{\sin\frac{3}{2}m\pi\, Q_n^{-m}(\cos\theta)+\frac{1}{2}\pi\cos\frac{3}{2}m\pi\, P_n^{-m}(\cos\theta)\right\}.$$

Мы нашли, что

$$\left|\cos\frac{3}{2}m\pi\, Q_n^{-m}(\cos\theta)-\frac{1}{2}\pi\sin\frac{3}{2}m\pi\, P_n^{-m}(\cos\theta)\right|\sin^m\theta<\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n)}\left(\frac{\pi}{n\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}$$

и

$$\left|\sin\frac{3}{2}m\pi\, Q_n^{-m}(\cos\theta)+\frac{1}{2}\pi\cos\frac{3}{2}m\pi\, P_n^{-m}(\cos\theta)\right|\sin^m\theta<\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n)}\left(\frac{\pi}{n\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Так как $\left|\cos\frac{3}{2}m\pi\right|+\left|\sin\frac{3}{2}m\pi\right|\leqslant 2^{\frac{1}{2}}$, а при m целом даже $\leqslant 1$, то

$$|Q_n^{-m}(\cos\theta)|\sin^m\theta<\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n)}\left(\frac{2\pi}{n\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\quad\text{или}\quad\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n)}\left(\frac{\pi}{n\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}$$

и

$$|P_n^{-m}(\cos\theta)|\sin^m\theta<\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n)}\left(\frac{8}{n\pi\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\quad\text{или}\quad\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n)}\left(\frac{4}{n\pi\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}},$$

в зависимости от того, произвольно m или оно должно принимать лишь целые значения. При этом предполагается, что $n\geqslant 1$, $n-m+1>0$, $m\geqslant 0$.

В силу формулы (21) гл. V

$$\frac{e^{-m\pi i}Q_n^m(\cos\theta+0\cdot i)}{\Pi(n+m)}=\frac{e^{m\pi i}Q_n^{-m}(\cos\theta+0\cdot i)}{\Pi(n-m)}.$$

Отсюда, рассуждая так же, как и выше, придем к выводу, что

$$|Q_n^m(\cos\theta)|\sin^m\theta<\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n)}\left(\frac{2\pi}{n\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\quad\text{или}\quad\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n)}\left(\frac{\pi}{n\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}$$

и

$$|P_n^m(\cos\theta)|\sin^m\theta<\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n)}\left(\frac{8}{n\pi\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\quad\text{или}\quad\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n)}\left(\frac{4\pi}{n\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}},$$

в зависимости от того, произвольно m или принимает лишь целые значения. Итак, мы доказали теорему:

Если $0<\theta<\pi$, $n\geqslant 1$, $n-m+1>0$ *и* $m\geqslant 0$, *то*

$$\left.\begin{aligned}&|Q_n^{\pm m}(\cos\theta)|\sin^m\theta<\frac{\Pi(n\pm m)}{\Pi(n)}\left(\frac{2\pi}{n\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\quad\textit{или}\quad\frac{\Pi(n\pm m)}{\Pi(n)}\left(\frac{\pi}{n\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}},\\&|P_n^{\pm m}(\cos\theta)|\sin^m\theta<\frac{\Pi(n\pm m)}{\Pi(n)}\left(\frac{8}{n\pi\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\quad\textit{или}\quad\frac{\Pi(n\pm m)}{\Pi(n)}\left(\frac{4\pi}{n\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}\right\}\qquad(29)$$

в зависимости от того, принимает m произвольные неотрицательные или только целые значения; n может не быть целым.

202. Из формулы для $Q_n(\cos\theta+0\cdot i)$, выведенной в п. 200, имеем

$$Q_n(\cos\theta+0\cdot i)-Q_{n+2}(\cos\theta+0\cdot i)=$$

$$=\frac{e^{-\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}\right]i}}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}\int_0^1\frac{(1-u)^n\left[1-e^{-2i\theta}(1-u)^2\right]}{u^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{u}{z^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}}\,du.$$

Отсюда следует, что для действительных положительных n

$$\left.\begin{aligned}&|Q_n(\cos\theta)-Q_{n+2}(\cos\theta)|\\&\frac{1}{2}\pi\,|P_n(\cos\theta)-P_{n+2}(\cos\theta)|\end{aligned}\right\}<$$

$$<\frac{1}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}\int_0^1\frac{(1-u)^n}{u^{\frac{1}{2}}}\left|\frac{1-e^{-2i\theta}(1-u)^2}{\left(1+\frac{u}{z^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}}\right|du=$$

$$=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\int_0^1\frac{(1-u)^n}{u^{\frac{1}{2}}}\,\frac{\{1-2(1-u)^2\cos2\theta+(1-u)^4\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{\sin^2\theta\left(1-\frac{1}{2}u\right)^2+\frac{1}{4}u^2\cos^2\theta\right\}^{\frac{1}{4}}}\,du.\qquad(\alpha)$$

Так как

$$\sin^2\theta\left(1-\frac{1}{2}u\right)^2+\frac{1}{4}u^2\cos^2\theta=\left(\frac{1}{2}u-\sin^2\theta\right)^2+\sin^2\theta\cos^2\theta,$$

то при $\theta=0$ и $\theta=\pi$ второй множитель под интегралом обращается в

$$\frac{1-(1-u)^2}{\left(\frac{1}{2}u\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Но

$$\frac{1-(1-u)^2}{\left(\frac{1}{2}u\right)^{\frac{1}{2}}}=2^{\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}}(2-u)\leqslant\frac{8}{3\cdot 3^{\frac{1}{2}}},$$

поэтому интеграл (α)

$$\leqslant\frac{4\cdot 2^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}}\int_0^1\frac{(1-u)^n}{u^{\frac{1}{2}}}du<\frac{4}{3}\left(\frac{2\pi}{3n}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Если θ фиксировано, притом так, что $2\sin^2\theta>1$, то

$$\left(\frac{1}{2}u-\sin^2\theta\right)^2+\sin^2\theta\cos^2\theta$$

достигает своего наименьшего значения, равного $\frac{1}{2}$, при $u=1$; следовательно, для всех u в промежутке $(0, 1)$

$$\frac{\{1-2(1-u)^2\cos 2\theta+(1-u)^4\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{\left(\frac{1}{2}u-\sin^2\theta\right)^2+\sin^2\theta\cos^2\theta\right\}^{\frac{1}{4}}}\leqslant$$

$$\leqslant 2^{\frac{1}{2}}\{1-2(1-u)^2\cos 2\theta+(1-u)^4\}^{\frac{1}{2}}\leqslant 2^{\frac{1}{2}}\{1+(1-u)^2\}\leqslant 2^{\frac{3}{2}}.$$

Следовательно, интеграл (α)

$$<2\int_0^1\frac{(1-u)^2}{u^{\frac{1}{2}}}du<2\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Если θ фиксировано, но так, что $2\sin^2\theta\leqslant 1$, иначе говоря, так, что $\cos 2\theta\geqslant 0$, то полагаем $u=2\sin^2\theta+v$. Тогда $1-u=\cos 2\theta-v$, и

$$\frac{\{1-2(1-u)^2\cos 2\theta+(1-u)^4\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{\left(\frac{1}{2}u-\sin^2\theta\right)^2+\sin^2\theta\cos^2\theta\right\}^{\frac{1}{4}}}<2^{\frac{1}{4}}\left\{\frac{1-2\cos 2\theta(\cos 2\theta-v)^2+(\cos 2\theta-v)^4}{\frac{1}{4}v^2+\sin^2\theta\cos^2\theta}\right\}^{\frac{1}{4}},$$

так как $1-2(1-u)^2\cos 2\theta+(1-u)^4\leqslant 2$, когда $\cos 2\theta\geqslant 0$.

В силу равенства

$$1-2\cos 2\theta(\cos 2\theta-v)^2+(\cos 2\theta-v)^4=$$
$$=(1-2\cos^3 2\theta+\cos^4 2\theta)+8v\cos^2 2\theta\sin^2\theta+$$
$$+v^2(6\cos^2 2\theta-2\cos 2\theta)-4v^3\cos 2\theta+v^4$$

имеем

$$\frac{1-2\cos 2\theta(\cos 2\theta-v)^2+(\cos 2\theta-v)^4}{\frac{1}{4}v^2+\sin^2\theta\cos^2\theta}<\frac{1-2\cos^3 2\theta+\cos^4 2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}+\frac{8|v|\cos^2 2\theta}{\cos^2\theta}+$$
$$+4\cos 2\theta(6\cos 2\theta-2)+16|v|\cos 2\theta+4v^2<$$
$$<4\sin^2 2\theta+\frac{12\cos^2 2\theta}{\cos^2\theta}+8\cos 2\theta(3\cos 2\theta-2)+16+4,$$

так как $|v| \leqslant 1$ и $\cos 2\theta \geqslant 0$. Таким образом, все выражение меньше 44 и (α) меньше, чем $(22)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Итак, мы пришли к следующему результату:

Для всех значений θ в промежутке $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ и для всех действительных $n \geqslant 1$, не обязательно целых,

$$\left.\begin{aligned} |Q_n(\cos\theta) - Q_{n+2}(\cos\theta)| &< C\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ |P_n(\cos\theta) - P_{n+2}(\cos\theta)| &< 2C\left(\frac{1}{\pi n}\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

где C — фиксированное число, не зависящее от n и θ.

Для функций P_n при целых положительных n эту теорему доказал Стильтьес[1]). Ею часто пользуются при рассмотрении вопросов сходимости рядов.

203. Последняя теорема может быть распространена на функции $Q_n^m(\cos\theta)$ и $P_n^m(\cos\theta)$. В силу формулы для $Q_n^{-m}(\cos\theta + 0\cdot i)$ в п. 201

$$\{Q_n^{-m}(\cos\theta + 0\cdot i) - Q_{n+2}^{-m}(\cos\theta + 0\cdot i)\}\sin^m\theta =$$

$$= \frac{1}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}\frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)} e^{-\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + \frac{\pi}{4}\right]i - m\pi i} \times$$

$$\times \int_0^1 \frac{(1-u)^{n+m}}{u^{\frac{1}{2}-m}}\left(\sin\theta - \frac{1}{2}iue^{-i\theta}\right)^m \frac{1-(1-u)^2e^{-2i\theta}}{\left(1-\frac{1}{2}iu\frac{e^{-i\theta}}{\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}}\,du.$$

Обращаясь к п. 202, мы видим, что модули действительной и мнимой частей выражения

$$\sin^m\theta\,\{Q_n^{-m}(\cos\theta + 0\cdot i) - Q_{n+2}^{-m}(\cos\theta + 0\cdot i)\}$$

меньше, чем

$$\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\int_0^1 \frac{(1-u)^{n+m}}{u^{\frac{1}{2}}} \frac{\{1-2(1-u)^2\cos 2\theta + (1-u)^4\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{\sin^2\theta\left(1-\frac{1}{2}u\right)^2 + \frac{1}{4}u^2\cos^2\theta\right\}^{\frac{1}{4}}}\,du < \left(\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\Pi(n-m)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}C,$$

где C — некоторая постоянная. Отсюда, так же как в п. 202, вытекает, что

$$\sin^m\theta\,|Q_n^{-m}(\cos\theta) - Q_{n+2}^{-m}(\cos\theta)| < C\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n)}\left(\frac{2\pi}{n}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\sin^m\theta\,|P_n^{-m}(\cos\theta) - P_{n+2}^{-m}(\cos\theta)| < C\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n)}\left(\frac{8}{\pi n}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Рассуждая так же, как в п. 202, мы придем к следующей теореме:

---

[1]) Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, Paris, 1905; письма 309, 310, стр. 174, 177.

При $n \geqslant 1$, $n-m+1 \geqslant 0$, $m \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

$$\left.\begin{aligned} &|Q_n^{\pm m}(\cos\theta) - Q_{n+2}^{\pm m}(\cos\theta)|\sin^m\theta < C\frac{\Pi(n\pm m)}{\Pi(n)}\left(\frac{2\pi}{n}\right)^{\frac{1}{2}},\\ &|P_n^{\pm m}(\cos\theta) - P_{n+2}^{\pm m}(\cos\theta)|\sin^m\theta < C\frac{\Pi(n\pm m)}{\Pi(n)}\left(\frac{8}{\pi n}\right)^{\frac{1}{2}}; \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

при этом n и m не предполагаются целыми.

§ 6. ТЕОРЕМЫ БРУНСА И МЕЛЕРА

204. Для любого положительного n в силу (28) имеем

$$(n\sin\theta)^{\frac{1}{2}}|P_n(\cos\theta)| < k;$$

при этом $0<\theta<\pi$ и k — фиксированное число, не зависящее от n и θ.

Отсюда, если $\theta < \pi - \eta$, где η — фиксированное положительное число, то

$$|P_n(\cos\theta)| < \frac{k}{(n\sin\theta)^{\frac{1}{2}}} < \frac{k'}{(n\theta)^{\frac{1}{2}}},$$

где k' — некоторая постоянная. Мы видим, что если заставить n расти, а θ уменьшаться таким образом, чтобы $n\theta \to \infty$ при $n\to\infty$, то $P_n(\cos\theta)$ будет стремиться к нулю. Результат этот получил Брунс[1]; в нашем доказательстве n не предполагается целым.

Пусть, в частности, $\theta = \frac{\rho}{n^\lambda}$, где $0<\lambda<1$; тогда при положительном ρ $P_n\left(\cos\frac{\rho}{n^\lambda}\right)$ стремится к нулю, когда $n\to\infty$.

Для случая $\lambda=1$ Мелер[2] и позднее, независимо от него, Релей[3] показали, что $\lim\limits_{n\to\infty} P_n\left(\cos\frac{\rho}{n}\right) = J_0(\rho)$, где $J_0(\rho)$ — бесселева функция нулевого порядка. Докажем это, воспользовавшись выражением $P_n\left(\cos\frac{\rho}{n}\right)$ в виде $F\left(n+1,\ -n;\ 1;\ \sin^2\frac{\rho}{2h}\right)$.

Общий член ряда, представляющего $F\left(n+1,\ -n;\ 1;\ \sin^2\frac{\rho}{2h}\right)$, есть

$$(-1)^{r-1}\frac{(n+r)(n+r-1)\ldots(n-r+1)}{1^2\cdot 2^2\ldots r^2}\sin^{2r}\frac{\rho}{2n},$$

и отношение последующего члена к написанному по абсолютной величине равно

$$\frac{(n+r+1)(n-r)}{(r+1)^2}\sin^2\frac{\rho}{2n},$$

что при $n > \frac{\rho}{\pi}$ меньше, чем

$$\frac{\rho^2}{4(r+1)^2}\left(1+\frac{r+1}{n}\right)\left(1-\frac{r}{n}\right).$$

---

[1]) Journ. f. reine u. angew. Math., 90 (1881), 322. В этой связи см. Heine, Kugelfunktionen, т. II, стр. 361.

[2]) Journ. f. reine u. angew. Math., 68 (1868), 140.

[3]) Proc. Lond Math. Soc., 9 (1878), 61.

Для простоты предположим, что число n целое, так что наш ряд обрывается, и $r+1<n$. Тогда рассматриваемое отношение меньше, чем

$$\frac{\rho^2}{4(r+1)^2}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Для всех значений r, бо́льших некоторого фиксированного s, зависящего от ρ, это отношение меньше единицы, если только $n\geqslant 1$. А так как наш ряд — знакочередующийся, то при достаточно большом n его можно представить в виде

$$1-\frac{(n+1)\,n}{1^2}\sin^2\frac{\rho}{2n}+\ldots+\theta(-1)^{s-1}\frac{(n+s)\ldots(n-s+1)}{1^2\cdot 2^2\ldots s^2}\sin^2\frac{\rho}{2n},$$

где θ заключено в промежутке $(0, 1)$, а s фиксировано и не зависит от n. При неограниченном возрастании n предел этого выражения есть

$$1-\frac{\rho^2}{2^2\cdot 4^2}+\frac{\rho^4}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}-\ldots+(-1)^{s-1}\bar{\theta}\,\frac{\rho^{2s}}{2^2\cdot 4^2\ldots(2s)^2},$$

где $\bar{\theta}$ лежит в промежутке $(0, 1)$. Отсюда вытекает, что

$$\lim P_n\left(\cos\frac{\rho}{n}\right)=J_0(\rho).$$

Обобщение этих теорем на функции $P_n^m(\cos\theta)$ и $Q_n^m(\cos\theta)$ может быть осуществлено с помощью результатов п. 119 и 132.

Глава VII

РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В РЯДЫ ЛЕЖАНДРА И ЛАПЛАСА

§ 1. РЯД ЛЕЖАНДРА

205. Теперь мы исследуем условия, при которых ряд Лежандра (см. п. 27)

$$\sum \left(n+\frac{1}{2}\right) P_n(x) \int_{-1}^{1} f(x') P_n(x')\, dx' \tag{1}$$

сходится при всех или при некоторых x в промежутке $(-1, 1)$.

Сумма первых $n+1$ членов ряда (1) выражается так:

$$s_n(x) = \int_{-1}^{1} \sum_{k=0}^{n} \left\{\frac{2k+1}{2} P_k(x)\, P_k(x')\right\} f(x')\, dx'.$$

Сумму

$$\sum_{0}^{n} (2k+1) P_k(x)\, P_k(x')$$

Кристоффель выразил в виде

$$(n+1) \frac{P_n(x) P_{n+1}(x') - P_{n+1}(x) P_n(x')}{x'-x}.$$

Этот результат может быть получен из рекуррентных соотношений

$$(2n+1)\, x\, P_n(x) = (n+1) P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x),$$
$$(2n+1)\, x' P_n(x') = (n+1) P_{n+1}(x') + nP_{n-1}(x').$$

Умножая обе части этих тождеств соответственно на $P_n(x')$ и $P_n(x)$ и вычитая одно из другого, получим

$$(2n+1)(x'-x) P_n(x) P_n(x') = \\ = (n+1)\{P_n(x) P_{n+1}(x') - P_{n+1}(x) P_n(x')\} - \\ - n\{P_{n-1}(x') P_n(x) - P_n(x) P_{n-1}(x')\}.$$

Беря в этом соотношении вместо n последовательно $n-1, n-2, \ldots, 1, 0$ и складывая, придем к

$$(x'-x) \sum_{0}^{n} (2k+1) P_k(x) P_k(x') = (n+1)\{P_n(x) P_{n+1}(x') - P_{n+1}(x) P_n(x')\}.$$

Таким образом,

$$s_n(x) = \frac{1}{2}(n+1) \int_{-1}^{1} \frac{P_n(x) P_{n+1}(x') - P_{n+1}(x) P_n(x')}{x'-x} f(x')\, dx',$$

и вопрос сводится к исследованию поведения этого выражения при $n \to \infty$.

Будем предполагать, что функция $\frac{f(x)}{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}$ суммируема по x в промежутке $(-1, 1)$. Это равносильно требованию, чтобы $f(x)$ была суммируема в промежутке $(-1, 1)$, а $\frac{f(x)}{(1-x)^{\frac{1}{4}}}$ и $\frac{f(x)}{(1+x)^{\frac{1}{4}}}$ суммируемы соответственно в окрестностях точек 1 и -1.

При $x=\cos\theta$ наше предположение означает, что $f(\cos\theta)\sin^{\frac{1}{2}}\theta$ суммируема по θ в промежутке $(0, \pi)$. Прежде всего мы покажем, что, каково бы ни было положительное число ζ, можно выбрать число ε, такое, что для всех n

$$\left|\int_{-1}^{-1+\varepsilon}\frac{1}{2}(n+1)\frac{P_n(x)P_{n+1}(x')-P_{n+1}(x)P_n(x')}{x'-x}f(x')\,dx'\right|<\zeta;$$

при этом x подчинено условию $-1+\varepsilon+\mu\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon-\mu$, где μ — заранее выбранное положительное число.

Так как $(n+1)^{\frac{1}{2}}(1-x'^2)^{\frac{1}{4}}P_{n+1}(x')$ для всех n и x' меньше по абсолютной величине некоторого положительного числа k (см. п. 200), то для всех n

$$\left|(n+1)^{\frac{1}{2}}\int_{-1}^{-1+\varepsilon}\frac{P_{n+1}(x')}{x'-x}f(x')\,dx'\right|<\frac{k}{\mu}\int_{-1}^{-1+\varepsilon}\left|\frac{f(x')}{(1-x'^2)^{\frac{1}{4}}}\right|dx'.$$

Число ε можно взять таким, чтобы

$$\int_{-1}^{-1+\varepsilon}\left|\frac{f(x')}{(1-x'^2)^{\frac{1}{4}}}\right|dx'$$

было сколь угодно мало.

Далее, так как $(n+1)^{\frac{1}{2}}P_n(x)(1-x^2)^{\frac{1}{4}}$ меньше некоторого фиксированного числа, не зависящего от n и x, то для всех x в промежутке $(-1+\varepsilon+\mu,\ 1-\varepsilon-\mu)$ выражение

$$\frac{1}{2}(n+1)\int_{-1}^{-1+\varepsilon}\frac{P_n(x)P_{n+1}(x')}{x'-x}f(x')\,dx'$$

по абсолютной величине меньше произвольно выбранного положительного числа, если только ε, которое выбирается после того, как фиксируется μ, взять достаточно малым.

То же справедливо и для

$$\frac{1}{2}(n+1)\int_{-1}^{-1+\varepsilon}\frac{P_{n+1}(x)P_n(x')}{x'-x}f(x')\,dx'.$$

Отсюда следует, что для произвольно выбранного ζ

$$\left|\frac{1}{2}(n+1)\int_{-1}^{-1+\varepsilon}\frac{P_n(x)P_{n+1}(x')-P_{n+1}(x)P_n(x')}{x'-x}f(x')\,dx'\right|<\zeta,$$

каково бы ни было x в промежутке $(-1+\varepsilon+\mu,\ 1-\varepsilon-\mu)$. Число ε выбирается после того, как выбраны ζ и μ. Если же фиксировать ζ и какое-нибудь значение x внутри промежутка $(-1, 1)$, то после этого можно выбрать μ (в зависимости от x) и, наконец, ε так, чтобы выполнялось последнее неравенство.

Точно так же можно показать, что при аналогичных условиях

$$\left|\frac{1}{2}(n+1)\int\limits_{1-\varepsilon}^{1}\frac{P_n(x)\,P_{n+1}(x')-P_{n+1}(x)\,P_n(x')}{x'-x}\,f(x')\,dx'\right|<\zeta.$$

Когда ζ и μ фиксированы, ε можно выбрать так, что для

$$-1+\varepsilon+\mu\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon-\mu$$

оба неравенства будут выполняться одновременно.

Теперь мы покажем, что при $n\to\infty$

$$\frac{1}{2}(n+1)\left\{\int\limits_{-1+\varepsilon}^{x-\mu}+\int\limits_{x+\mu}^{1-\varepsilon}\right\}\frac{P_n(x)\,P_{n+1}(x')-P_{n+1}(x)\,P_n(x')}{x'-x}\,f(x')\,dx'$$

стремится к нулю равномерно относительно x в промежутке $(-1+\varepsilon+\mu,\ 1-\varepsilon-\mu)$. Для этого нам нужно показать, что если $F(x', x, n)$ обозначает функцию от x', равную

$$\frac{1}{2}(n+1)\frac{P_n(x)\,P_{n+1}(x')-P_{n+1}(x)\,P_n(x')}{x'-x}$$

в промежутках $(-1-\varepsilon,\ x-\mu)$, $(x+\mu,\ 1-\varepsilon)$ и равную нулю всюду вне этих промежутков, то

$$\int\limits_{-1}^{1}f(x')\,F(x', x, n)\,dx'$$

стремится к нулю равномерно относительно x, когда x заключен в промежутке $(-1+\varepsilon+\mu,\ 1-\varepsilon-\mu)$. Применим для этой цели общую теорему о сходимости [1]).

Прежде всего установим, что $|F(x', x, n)|$ ограничено некоторым числом, не зависящим от n, x и x'.

Так как $|P_n(x')|<\dfrac{\lambda}{n^{\frac{1}{2}}}$ для всех x' в промежутке $(-1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon)$, где λ не зависит от n и x, то

$$|F(x', x, n)|<\frac{n+1}{2\mu}\,\frac{2\lambda^2}{n^{\frac{1}{2}}(n+1)^{\frac{1}{2}}}$$

при x', заключенном в этом промежутке; вне его $F(x', x, n)=0$. Ограниченность $|F(x', x, n)|$ доказана.

Второе условие, выполнение которого надлежит проверить, состоит в том, что для любого промежутка (α_1, β_1), заключенного в $(-1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon)$,

$$\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1}F(x', x, n)\,dx'$$

при $n\to\infty$ стремится к нулю равномерно относительно x. Ясно, что участками, где $F(x', x, n)$ равна нулю, можно пренебрегать и ограничиться рассмотрением того случая, когда (α_1, β_1) не перекрывается с промежутком, в котором $F(x', x, n)$ исчезает тождественно.

---

[1]) Hobson, Theory of functions of a real variable, т. II, изд. 2, 1926, стр. 422 и 443.

В этом случае, так как функция $\frac{1}{x'-x}$ монотонна, можно применить вторую теорему о среднем значении и получить

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} F(x', x, n)\,dx' = \frac{n+1}{2}\left\{P_n(x)\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\frac{P_{n+1}(x')}{x'-x}\,dx' - P_{n+1}(x)\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\frac{P_n(x')}{x'-x}\,dx'\right\} =$$

$$= \frac{n+1}{2}\left\{\frac{P_n(x)}{\alpha_1 - x}\int_{\alpha_1}^{\xi_1} P_{n+1}(x')\,dx' + \frac{P_n(x)}{\beta_1 - x}\int_{\xi_1}^{\beta_1} P_{n+1}(x')\,dx' - \right.$$

$$\left. - \frac{P_{n+1}(x)}{\alpha_1 - x}\int_{\alpha_1}^{\xi_2} P_n(x')\,dx' - \frac{P_{n+1}(x)}{\beta_1 - x}\int_{\xi_2}^{\beta_1} P_n(x')\,dx'\right\}.$$

Если воспользоваться формулой

$$(2n+1)\,P_n(x') = \frac{dP_{n+1}(x')}{dx'} - \frac{dP_{n-1}(x')}{dx'},$$

то будем иметь

$$\frac{1}{2}(n+1)\frac{P_n(x)}{\alpha_1 - x}\int_{\alpha_1}^{\xi_1} P_{n+1}(x')\,dx' =$$

$$= \frac{n+1}{2(2n+3)}\,\frac{P_n(x)}{\alpha_1 - x}\{P_{n+2}(\xi_1) - P_{n+2}(\alpha_1) - P_n(\xi_1) + P_n(\alpha_1)\}.$$

Так как $|P_n(x)| < \frac{\lambda}{n^{\frac{1}{2}}}$ для всех x в промежутке $(-1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon)$, то мы видим, что правая часть по абсолютной величине меньше, чем $\frac{\lambda}{n^{\frac{1}{2}}}\,\frac{1}{|\alpha_1 - x|}$ и, следовательно, меньше $\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}\mu}$, потому что x не попадает внутрь промежутка $(\alpha_1 - \mu,\ \beta_1 + \mu)$. Число $\frac{\lambda}{n^{\frac{1}{2}}\mu}$ не зависит ни от n, ни от x.

Подобное же рассуждение применимо и к двум другим слагаемым выражения

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} F(x', x, n)\,dx'.$$

Следовательно, этот интеграл при $n \to \infty$ стремится к нулю равномерно относительно x. Таким образом, выполняется и второе условие.

Итак, мы доказали, что при $n \to \infty$

$$\frac{1}{2}(n+1)\left\{\int_{-1+\varepsilon}^{x-\mu} + \int_{x+\mu}^{1-\varepsilon}\right\}\frac{P_n(x)\,P_{n+1}(x') - P_{n+1}(x)\,P_n(x')}{x'-x}\,f(x')\,dx'$$

стремится к нулю, притом равномерно относительно x в промежутке $(-1+\varepsilon+\mu,\ 1-\varepsilon-\mu)$.

Выражение

$$\frac{1}{2}(n+1)\left\{\int_{-1}^{x-\mu} + \int_{x+\mu}^{1}\right\}\frac{P_n(x)\,P_{n+1}(x') - P_{n+1}(x)\,P_n(x')}{x'-x}\,f(x')\,dx'$$

по абсолютной величине меньше 3ζ для всех x в промежутке $(-1+\varepsilon+\mu,$ $1-\varepsilon-\mu)$, если только n не меньше некоторого числа, не зависящего от x. Поэтому это выражение при $n \to \infty$ стремится к нулю равномерно относительно x в указанном промежутке.

Мы видим, таким образом, что пределы $s_n(x)$ при x, заключенном в промежутке $(-1+\varepsilon+\mu,\ 1-\varepsilon-\mu)$, зависят только от пределов выражения

$$\frac{1}{2}(n+1)\int\limits_{x-\mu}^{x+\mu}\frac{P_n(x)\,P_{n+1}(x')-P_{n+1}(x)\,P_n(x')}{x'-x}\,f(x')\,dx'$$

и, следовательно, только от поведения функции $f(x')$ в окрестности $(x-\mu,\ x+\mu)$ точки x при дополнительном предположении, что $f(x')\,(1-x'^2)^{-\frac{1}{4}}$ суммируема в некоторых окрестностях точек -1 и 1.

Займемся же исследованием поведения этого выражения при $n\to\infty$. В п. 191 мы показали, что

$$P_n(x)=\frac{2}{\pi^{\frac{1}{2}}}\,\frac{\Pi(n)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\,\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}+p_{n,1}(\theta),$$

где

$$p_{n,1}(\theta)=\frac{2}{\pi^{\frac{1}{2}}}\,\frac{\Pi(n)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left\{\frac{1}{2(2n+3)}\,\frac{\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta-\frac{3}{4}\pi\right]}{(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}}\right\}+p_{n,2}(\theta),$$

причем $x=\cos\theta$, $p_{n,2}(\theta)=\dfrac{\alpha(n,\theta)}{n^{\frac{5}{2}}}$, $\dfrac{d}{d\theta}p_{n,2}(\theta)=\dfrac{\beta(n,\theta)}{n^{\frac{3}{2}}}$, где $\alpha\ n,\theta)$ и $\beta(n,\theta)$ ограничены по n и θ, когда θ заключено в каком-нибудь промежутке, лежащем внутри $(-1,\ 1)$.

Выразим таким образом

$$P_n(x),\quad P_n(x'),\qquad P_{n+1}(x),\quad P_{n+1}(x'),$$

подставим их в числитель подинтегральной функции и рассмотрим отдельно каждый из интегралов, содержащих соответствующие слагаемые.

Возьмем сначала

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\Pi(n)\,\Pi(n+1)\,(n+1)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\Pi\left(n+\frac{3}{2}\right)}\times$$
$$\times\int\limits_{x-\mu}^{x+\mu}\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta'-\frac{\pi}{4}\right]-\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta'-\frac{\pi}{4}\right]}{(\cos\theta'-\cos\theta)\,(\sin\theta\sin\theta')^{\frac{1}{2}}}\times$$
$$\times f(\cos\theta')\,dx'.$$

Числитель стоящей под интегралом дроби может быть приведен к виду

$$\sin[(n+1)(\theta-\theta')]\sin\frac{\theta+\theta'}{2}-\cos[(n+1)(\theta+\theta')]\sin\frac{\theta-\theta'}{2},$$

и само выражение представлено так:

$$\frac{1}{2\pi(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}\,\frac{\Pi(n)\,\Pi(n+1)\,(n+1)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\Pi\left(n+\frac{3}{2}\right)}\times$$
$$\times\int\limits_{\theta-\eta'_\theta}^{\theta+\eta_\theta}\left\{\frac{\sin[(n+1)(\theta-\theta')]}{\sin\frac{1}{2}(\theta-\theta')}-\frac{\cos[(n+1)(\theta+\theta')]}{\sin\frac{1}{2}(\theta+\theta')}\right\}\sin^{\frac{1}{2}}\theta'\,f(\cos\theta')\,d\theta',$$

где $\cos(\theta+\eta_\theta)=x-\mu$, $\cos(\theta-\eta'_\theta)=x+\mu$; η_θ и η'_θ представляют собой функции от μ и θ.

Для θ, заключенного в промежутке, соответствующем промежутку $(-1+\varepsilon+\mu,\ 1-\varepsilon-\mu)$ изменения x, величина η_θ достигает конечного наименьшего значения η; подобным же образом η_θ' имеет конечное наименьшее значение η'. Покажем, что вместо $\theta-\eta_\theta'$ и $\theta+\eta_\theta$ можно в качестве пределов интегрирования взять соответственно $\theta-\eta'$ и $\theta+\eta$. Для этого достаточно обнаружить, что при $n\to\infty$

$$\int\limits_{\theta+\eta}^{\theta+\eta_\theta}\left\{\frac{\sin[(n+1)(\theta-\theta')]}{\sin\frac{1}{2}(\theta-\theta')}-\frac{\cos[(n+1)(\theta+\theta')]}{\sin\frac{1}{2}(\theta+\theta')}\right\}\sin^{\frac{1}{2}}\theta' f(\cos\theta')\,d\theta'$$

стремится к нулю равномерно относительно θ в промежутке, соответствующем промежутку $(\varepsilon+\mu,\ \pi-\varepsilon-\mu)$ изменения x, и что то же верно для интеграла, взятого в пределах от $\theta-\eta_\theta'$ до $\theta-\eta'$.

Раскрыв скобки в подинтегральном выражении, разбив соответственно интеграл на сумму двух интегралов и заметив, что функции

$$\csc\frac{1}{2}(\theta-\theta'),\qquad \csc\frac{1}{2}(\theta+\theta')$$

монотонны, мы сможем первый из получившихся интегралов записать в виде

$$-\csc\frac{1}{2}\eta\int\limits_{\theta+\eta}^{\theta+\xi}\sin[(n+1)(\theta-\theta')]\sin^{\frac{1}{2}}\theta' f(\cos\theta')\,d\theta'-$$
$$-\csc\frac{1}{2}\eta_\theta\int\limits_{\theta+\xi}^{\theta+\eta_\theta}\sin[(n+1)(\theta-\theta')]\sin^{\frac{1}{2}}\theta' f(\cos\theta')\,d\theta',$$

где ξ заключено между η и η_θ.

Так как функция $\sin^{\frac{1}{2}}\theta' f(\cos\theta')$ суммируема, то, согласно известной теореме, оба эти интеграла стремятся к нулю равномерно относительно $\theta+\eta$, $\theta+\xi$, $\theta+\eta_\theta$.

Аналогичное заключение применимо и ко второму из полученных выше интегралов. Итак, в рассматриваемом нами выражении верхний предел интеграла $\theta+\eta_\theta$ может быть заменен величиной $\theta+\eta$, где η от θ не зависит. Точно так же вместо $\theta-\eta_\theta'$ можно взять $\theta-\eta'$.

Итак, рассмотрим

$$\frac{1}{2\pi\sin^{\frac{1}{2}}\theta}\,\frac{\Pi(n)\,\Pi(n+1)\,(n+1)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\Pi\left(n+\frac{3}{2}\right)}\times$$
$$\times\int\limits_{\theta-\eta'}^{\theta+\eta}\left\{\frac{\sin[(n+1)(\theta-\theta')]}{\sin\frac{1}{2}(\theta-\theta')}-\frac{\cos[(n+1)(\theta+\theta')]}{\sin\frac{1}{2}(\theta+\theta')}\right\}\sin^{\frac{1}{2}}\theta' f(\cos\theta')\,d\theta'.$$

Применим к интегралу

$$\int\limits_{\theta-\eta'}^{\theta+\eta}\frac{\cos[(n+1)(\theta+\theta')]}{\sin\frac{1}{2}(\theta+\theta')}\sin^{\frac{1}{2}}\theta' f(\cos\theta')\,d\theta'$$

общую теорему сходимости.

Положим $F(\theta',\ \theta,\ n)$ равной

$$\frac{\cos[(n+1)(\theta+\theta')]}{\sin\frac{1}{2}(\theta+\theta')}$$

для θ', заключенного в промежутке $(\theta-\eta', \theta+\eta)$, и равной нулю вне этого промежутка. Заметим, что вообще θ' изменяется в промежутке $(\bar{\varepsilon}, \pi-\bar{\varepsilon}')$, соответствующем промежутку $(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon')$ изменения x'.

Переменное θ заключено в промежутке, лежащем внутри $(\bar{\varepsilon}, \pi-\bar{\varepsilon}')$; поэтому $\frac{1}{2}(\theta+\theta')$ всегда лежит в промежутке $(\bar{\varepsilon}, \pi-\bar{\varepsilon}')$, и $\csc\frac{1}{2}(\theta+\theta')$ превосходит некоторое число, зависящее от $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{\varepsilon}'$. Отсюда следует, что первое условие теоремы о сходимости, состоящее в том, что $|F(\theta', \theta, n)|$ должно быть ограничено, выполнено. Чтобы доказать выполнение второго условия, рассмотрим какой-нибудь промежуток (α, β), заключенный в $(\bar{\varepsilon}, \pi-\bar{\varepsilon}')$. Очевидно, что $\int\limits_{\alpha}^{\beta} F(\theta', \theta, n)\,d\theta' = \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} F(\theta', \theta, n)\,d\theta'$, где (α_1, β_1) — часть промежутка (α, β), общая с $(\theta-\eta', \theta+\eta)$, если таковая вообще существует. Далее,

$$\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} F(\theta', \theta, n)\,d\theta' = \csc\frac{1}{2}(\theta+\alpha_1)\int\limits_{\alpha_1}^{\theta''}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(\theta+\theta')\right]d\theta' + \csc\frac{1}{2}(\theta+\beta_1)\int\limits_{\theta''}^{\beta_1}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(\theta+\theta')\right]d\theta',$$

где θ'' — некоторая точка промежутка (α_1, β_1). Таким образом,

$$\left|\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} F(\theta', \theta, n)\,d\theta'\right| \leqslant \frac{K}{n+\frac{1}{2}},$$

где K от θ и n не зависит; следовательно, этот интеграл стремится к нулю, когда $n\to\infty$.

Итак, согласно общей теореме сходимости

$$\int\limits_{\theta-\eta'}^{\theta+\eta}\frac{\cos[(n+1)(\theta+\theta')]}{\sin\frac{1}{2}(\theta+\theta')}\sin^{\frac{1}{2}}\theta' f(\cos\theta')\,d\theta'$$

при $n\to\infty$ стремится к нулю равномерно относительно θ в промежутке $(\bar{\varepsilon}, \pi-\bar{\varepsilon}')$. Что же касается множителя

$$\frac{\Pi(n)\,\Pi(n+1)\,(n+1)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\Pi\left(n+\frac{3}{2}\right)},$$

то он стремится к единице, так как $\frac{\Pi(n)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}$ асимптотически равно $n^{-\frac{1}{2}}$.

Рассмотрим теперь выражение

$$\frac{1}{2\pi\sin^{\frac{1}{2}}\theta}\int\limits_{\theta-\eta'}^{\theta+\eta}\frac{\sin[(n+1)(\theta-\theta')]}{\sin\frac{1}{2}(\theta-\theta')}\sin^{\frac{1}{2}}\theta' f(\cos\theta')\,d\theta'.$$

Мы покажем, что при $n \to \infty$

$$\int_{\theta-\eta'}^{\theta+\eta} \frac{\sin[(n+1)(\theta-\theta')] - \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(\theta-\theta')\right]}{\sin\frac{1}{2}(\theta-\theta')} \sin^{\frac{1}{2}}\theta' f(\cos\theta')\, d\theta'$$

равномерно стремится к нулю. Преобразуем этот интеграл:

$$\int_{\theta-\eta'}^{\theta+\eta} \frac{\sin[(n+1)(\theta-\theta') - \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(\theta-\theta')\right]}{\sin\frac{1}{2}(\theta-\theta')} \sin^{\frac{1}{2}}\theta' f(\cos\theta')\, d\theta' =$$

$$= \int_{\theta-\eta'}^{\theta+\eta'} \frac{\cos\left[\left(n+\frac{3}{4}\right)(\theta-\theta')\right]}{\cos\frac{1}{4}(\theta-\theta')} \sin^{\frac{1}{2}}\theta' f(\cos\theta')\, d\theta' =$$

$$= \sec\frac{1}{4}\eta' \int_{\theta-\eta'}^{\theta+\xi} \cos\left[\left(n+\frac{3}{4}\right)(\theta-\theta')\right] \sin^{\frac{1}{2}}\theta' f(\cos\theta')\, d\theta' +$$

$$+ \sec\frac{1}{4}\eta \int_{\theta+\xi}^{\theta+\eta} \cos\left[\left(n+\frac{3}{4}\right)(\theta-\theta')\right] \sin^{\frac{1}{2}}\theta' f(\cos\theta')\, d\theta',$$

где ξ — некоторое число, заключенное в промежутке $(-\eta', \eta)$. Применяя ту же теорему, что и раньше, найдем, что этот интеграл равномерно стремится к нулю.

Таким образом, доказано, что при выполнении известных условий, которые в каждом отдельном случае должны быть проверены, поведение ряда Лежандра в точке θ зависит только от поведения выражения

$$\frac{1}{2\pi \sin^{\frac{1}{2}}\theta} \int_{\theta-\eta'}^{\theta+\eta} \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(\theta-\theta')\right]}{\sin\frac{1}{2}(\theta-\theta')} \sin^{\frac{1}{2}}\theta' f(\cos\theta')\, d\theta'.$$

С таким интегралом мы встречаемся при рассмотрении ряда Фурье функции $f(\cos\theta)\sin^{\frac{1}{2}}\theta$. Следовательно, достаточные условия сходимости ряда Фурье во внутренней точке промежутка $(-1, 1)$ или равномерной сходимости в промежутке, лежащем внутри $(-1, 1)$, будут непосредственно перенесены на ряды Лежандра, если мы докажем, что не рассмотренные еще нами части интеграла, выражающего $s_n(x)$, равномерно стремятся к нулю при $n \to \infty$. В точке θ, в которой выполнены любые достаточные условия сходимости приведенного выше интеграла к $\frac{\pi}{2}\{f(\cos(\theta+0)) + f(\cos(\theta-0))\}\sin^{\frac{1}{2}}\theta$, ряд Лежандра сходится к

$$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}.$$

Далее, при соблюдении некоторых дополнительных условий наш интеграл равномерно сходится к $f(x)$ во всяком промежутке, лежащем внутри $(-1, 1)$, в котором $f(x)$ непрерывна.

Перейдем теперь к рассмотрению остальных слагаемых выражения, представляющего частичную сумму $s_n(x)$ ряда Лежандра.

Рассмотрим сначала

$$\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}}\frac{\Pi(n)\Pi(n+1)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\int\limits_{x-\mu}^{x+\mu}\left\{\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}p_{n+1,1}(\theta')-\right.$$
$$\left.-\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta'-\frac{\pi}{4}\right]}{(2\sin\theta')^{\frac{1}{2}}}p_{n+1,1}(\theta)\right\}\frac{f(\cos\theta')}{\cos\theta'-\cos\theta}dx',$$

введя в этот интеграл выражение

$$p_{n+1,1}(\theta)=\frac{2}{\pi^{\frac{1}{2}}}\frac{\Pi(n+1)}{\Pi\left(n+\frac{3}{2}\right)}\frac{1}{2(2n+5)}\frac{\cos\left[\left(n+\frac{5}{2}\right)\theta-\frac{3}{4}\pi\right]}{(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}}+p_{n+1,2}(\theta)$$

и соответствующее выражение $p_{n+1,1}(\theta')$.

Интеграл от слагаемых, содержащих $p_{n+1,2}(\theta)$ и $p_{n+1,2}(\theta')$, может быть взят, как показано выше, в пределах от $\theta-\eta'$ до $\theta+\eta$ и поэтому записан так:

$$\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}}\frac{\Pi(n)\Pi(n+1)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\int\limits_{\theta-\eta'}^{\theta+\eta}\left\{\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}p_{n+1,2}(\theta')-\right.$$
$$\left.-\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta'-\frac{\pi}{4}\right]}{(2\sin\theta')^{\frac{1}{2}}}p_{n+1,2}(\theta)\right\}\frac{f(\cos\theta')}{\cos\theta'-\cos\theta}\sin\theta'\,d\theta'.$$

Применяя теорему о среднем значении в дифференциальном исчислении, представим его в виде

$$\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}}\frac{\Pi(n)\Pi(n+1)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\int\limits_{\theta-\eta'}^{\theta+\eta}\left\{\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}p'_{n+1,2}(\xi)-\right.$$
$$\left.-\frac{d}{d\xi}\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi-\frac{\pi}{4}\right]}{(2\sin\xi)^{\frac{1}{2}}}p_{n+1,2}(\theta)\right\}\frac{1}{\sin\xi}f(\cos\theta')\sin\theta'\,d\theta',$$

где ξ заключено в промежутке $(\theta-\eta',\ \theta+\eta)$.

Так как

$$p'_{n+1,2}(\xi)=O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right),\qquad p_{n+1,2}(\theta)=O\left(n^{-\frac{5}{2}}\right),$$

то содержимое витых скобок под интегралом представляет собой сумму произведений ограниченных функций соответственно на $n^{-\frac{3}{2}}$ и $n^{-\frac{5}{2}}$. Все же выражение целиком оказывается суммой двух слагаемых, в которых $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n^2}$ помножены на интегралы от произведений $f(\cos\theta')\sin\theta'\,d\theta'$ на функции, ограниченные по θ и θ'; эти интегралы меньше некоторых постоянных, не зависящих от n, θ и θ'. Следовательно, все выражение при $n\to\infty$ стремится к нулю равномерно относительно θ в указанном промежутке.

Интеграл от остальной группы слагаемых есть

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\Pi(n)\,\Pi(n+1)(n+1)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\Pi\left(n+\frac{3}{2}\right)\left(2n+5\right)}\times$$

$$\times\int\limits_{\theta-\eta'}^{\theta+\eta}\left\{\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}\,\frac{\cos\left[\left(n+\frac{5}{2}\right)\theta'-\frac{\pi}{4}\right]}{(2\sin\theta')^{\frac{3}{2}}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\cos\left[\left(n+\frac{5}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta'-\frac{\pi}{4}\right]}{(2\sin\theta')^{\frac{1}{2}}}\right\}\frac{f(\cos\theta')}{\cos\theta'-\cos\theta}\sin^{\frac{1}{2}}\theta'\,d\theta'.$$

Записав выражение, стоящее под интегралом в витых скобках, в виде

$$\frac{1}{(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}(2\sin\theta')^{\frac{3}{2}}}\times$$

$$\times\left\{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(\theta+\theta')\right]\left[\sin\frac{3}{2}(\theta-\theta')\sin\frac{1}{2}(\theta+\theta')-\right.\right.$$

$$-\sin\frac{3}{2}(\theta+\theta')\sin\frac{1}{2}(\theta-\theta')-\sin\frac{1}{2}(\theta-\theta')\cos\frac{3}{2}(\theta+\theta')+$$

$$\left.+\sin\frac{3}{2}(\theta-\theta')\cos\frac{1}{2}(\theta+\theta')\right]+\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(\theta+\theta')\right]\times$$

$$\times\left[-\sin\frac{1}{2}(\theta-\theta')\cos\frac{3}{2}(\theta+\theta')+\sin\frac{3}{2}(\theta-\theta')\cos\frac{1}{2}(\theta+\theta')+\right.$$

$$\left.\left.+\sin\frac{3}{2}(\theta-\theta')\sin\frac{1}{2}(\theta+\theta')-\sin\frac{1}{2}(\theta-\theta')\sin\frac{3}{2}(\theta+\theta')\right]\right\},$$

мы замечаем, что оно содержит множитель $\sin\frac{1}{2}(\theta-\theta')$, общий с разностью

$$\cos\theta-\cos\theta'=2\sin\frac{1}{2}(\theta-\theta')\sin\frac{1}{2}(\theta+\theta'),$$

стоящей в знаменателе. Сокращая на него, получим под интегралом произведение $f(\cos\theta')\sin^{\frac{1}{2}}\theta'$ на функцию, ограниченную по θ и θ'; поэтому сам интеграл по абсолютной величине будет меньше некоторой постоянной, не зависящей от θ и θ'. А так как

$$\frac{\Pi(n)\,\Pi(n+1)(n+1)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\Pi\left(n+\frac{3}{2}\right)\left(2n+5\right)}$$

асимптотически равно $\frac{1}{2n}$, то все выражение целиком при $n\to\infty$ стремится к нулю равномерно относительно θ в любом промежутке, лежащем внутри $(-1,\ 1)$.

Точно таким же способом доказывается аналогичное утверждение относительно

$$\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}}\frac{\Pi(n)\,\Pi(n+1)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\int\limits_{x-\mu}^{x+\mu}\left\{\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta'-\frac{\pi}{4}\right]}{(2\sin\theta')^{\frac{1}{2}}}\,p_{n+1,1}(\theta)-\right.$$

$$\left.-\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}\,p_{n+1,1}(\theta')\right\}\frac{f(\cos\theta')}{\cos\theta'-\cos\theta}\,dx'.$$

Остается еще рассмотреть

$$(n+1)\int\limits_{\theta-\eta'}^{\theta+\eta} \frac{p_{n,1}(\theta)\,p_{n+1,1}(\theta')-p_{n+1,1}(\theta)\,p_{n,1}(\theta')}{\cos\theta'-\cos\theta}\sin^{\frac{1}{2}}\theta' f(\cos\theta')\,d\theta'.$$

Пользуясь теоремой о среднем из дифференциального исчисления, мы запишем это выражение в виде

$$-(n+1)\int\limits_{\theta-\eta'}^{\theta+\eta}[p_{n,1}(\theta)\,p'_{n+1,1}(\bar\theta)-p_{n+1,1}(\theta)\,p'_{n,1}(\bar\theta)]\,\frac{\sin^{\frac{1}{2}}\theta'}{\sin\bar\theta}f(\cos\theta')\,d\theta',$$

где $\bar\theta$ заключено между θ и θ'. Выражение в витых скобках под интегралом меньше, чем $\frac{1}{n^3}$ с некоторым постоянным множителем; поэтому все выражение равномерно стремится к нулю, когда $n\to\infty$.

Мы доказали, что частичная сумма $s_n(x)$ ряда Лежандра сходится во внутренней точке x промежутка $(-1, 1)$, если ряд Фурье функции $f(\cos\theta)\sin^{\frac{1}{2}}\theta$ сходится в точке θ, где $\cos\theta=x$. Кроме того, мы доказали, что если указанный ряд Фурье сходится равномерно во всяком лежащем внутри $(-1, 1)$ промежутке, в которой $f(\cos\theta)\sin^{\frac{1}{2}}\theta$ непрерывна, то так же ведет себя соответствующий ряд Лежандра.

Далее, так как

$$\begin{aligned} f(\cos\theta_1)\sin^{\frac{1}{2}}\theta_1-f(\cos\theta_2)\sin^{\frac{1}{2}}\theta_2 &= \\ =\sin^{\frac{1}{2}}\theta_1\,[f(\cos\theta_1)-f(\cos\theta_2)+f(\cos\theta_2)\,(\sin^{\frac{1}{2}}\theta_1-\sin^{\frac{1}{2}}\theta_2)] &= \\ =(1-x_1^2)^{\frac{1}{4}}\,[f(x_1)-f(x_2)]+f(x_2)\,[(1-x_1^2)^{\frac{1}{4}}-(1-x_2^2)^{\frac{1}{4}}]&, \end{aligned}$$

то, как легко видеть, если $f(x)$ имеет ограниченное изменение в каком-нибудь промежутке, лежащем внутри $(-1, 1)$, то $f(\cos\theta)\sin^{\frac{1}{2}}\theta$ имеет ограниченное изменение в соответствующем промежутке, попадающем внутрь $(0, \pi)$. Так же если при каком-нибудь θ_1 функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|x_1-x_2|^\alpha$ с некоторым положительным α для всех x_2, достаточно близких к x_1, то $f(\cos\theta)\sin^{\frac{1}{2}}\theta$ удовлетворяет условию Липшица в точке θ_1.

Итак, установлена следующая теорема:

Если $\frac{f(x)}{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}$ суммируема по x в промежутке $(-1, 1)$, то ряд Лежандра $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)P_n(x)\int\limits_{-1}^{1}f(x')\,P_n(x')\,dx'$ сходится к $\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$ в любой точке внутри $(-1, 1)$ при условии, что $f(x)$ имеет ограниченное изменение в некоторой окрестности этой точки, или $f(x)$ имеет в точке x ограниченные производные, или $f(x)$ удовлетворяет в точке x условию Липшица, или, наконец, выполняется любое другое достаточное условие сходимости ряда Фурье функции $f(\cos\theta)\sin^{\frac{1}{2}}\theta$.

Далее, ряд Лежандра сходится равномерно во всяком промежутке, в котором $f(x)$ непрерывна, причем в его концах $f(x)$ непрерывна как слева, *так и справа, если только этот промежуток лежит внутри какого-нибудь промежутка, где $f(x)$ имеет ограниченное изменение. Любое другое достаточное условие равномерной сходимости ряда Фурье функции $f(\cos\theta)\sin^{\frac{1}{2}}\theta$ порождает соответствующее достаточное условие равномерной сходимости ряда Лежандра в промежутке, лежащем внутри $(-1, 1)$.*

206. Чтобы функция $\dfrac{f(x)}{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}$ была суммируема в промежутке $(-1, 1)$, достаточно, чтобы $f(x)$ была суммируема в этом промежутке и в окрестностях точек -1 и 1 удовлетворяла неравенствам

$$|f(x)| < \frac{A}{(1+x)^k}, \qquad |f(x)| < \frac{A'}{(1-x)^{k'}},$$

где A и A' — положительные числа, $k < \frac{3}{4}$, $k' < \frac{3}{4}$.

Достаточны также известные логарифмические условия сходимости интегралов в таких окрестностях. Частный случай этого результата получил Дарбу: он показал, что если $f(x)$ равна $\frac{A}{(1+x)^k}$ и $\frac{A'}{(1-x)^{k'}}$ соответственно в окрестностях точек -1 и 1, причем $k < \frac{3}{4}$ и $k' < \frac{3}{4}$, то ряд Лежандра сходится по крайней мере во всех внутренних точках промежутка $(-1, 1)$.

Покажем теперь, что если в некоторой окрестности точки -1

$$f(x) = \frac{A}{(1+x)^k} + f_1(x),$$

где $k \geqslant \frac{3}{4}$, а $f_1(x)$ ограничена, то ряд Лежандра не сходится нигде внутри $(-1, 1)$. То же верно при соответствующем предположении относительно характера функции $f(x)$ вблизи 1. Пусть x — какая-нибудь фиксированная точка внутри промежутка $(-1, 1)$; тогда, очевидно, вблизи точки $x' = -1$

$$\frac{f(x')}{x'-x} = \frac{B}{(1+x')^k} + f_2(x'),$$

где $f_2(x')$ ограничена. Нам достаточно будет доказать, что при $k \geqslant \frac{3}{4}$ интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{n^{\frac{1}{2}} P_n(x')}{(1+x')^k}\,dx'$ не имеет определенного предела, когда $n \to \infty$; заметим, что для самого существования интеграла необходимо условие $k < 1$. В самом деле, отсюда будет следовать, что $\int\limits_{-1}^{-1+\varepsilon} \frac{n^{\frac{1}{2}} P_n(x')}{(1+x')^k}\,dx'$ не имеет при $n \to \infty$ определенного предела и то же будет справедливо для

$$\frac{n+1}{2} \int\limits_{-1}^{1} \frac{P_{n+1}(x)\,P_n(x')}{(x'-x)^k}\,dx'.$$

Мы имеем

$$P_n(x') = A_0 + A_1\left(\frac{1+x'}{2}\right) + A_2\left(\frac{1+x'}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1+x'}{2}\right)^n,$$

где $A_0+A_1+\ldots+A_n=1$. Отсюда

$$n^{\frac{1}{2}}\int_{-1}^{1}\frac{P_n(x')}{(1+x')^k}dx'=n^{\frac{1}{2}}2^{1-k}\left(\frac{A_0}{1-k}+\frac{A_1}{2-k}+\ldots+\frac{A_n}{n+1-k}\right)=$$

$$=n^{\frac{1}{2}}2^{1-k}(-1)^n\frac{k(k+1)\ldots(k+n-1)}{(1-k)(2-k)\ldots(n+1-k)},$$

так как интеграл слева обращается в нуль при $k=0,\ -1,\ -2,\ \ldots \ldots,\ -(n-1)$.

Выражение в правой части можно записать в виде

$$(-1)^n n^{\frac{1}{2}}2^{1-k}\frac{\Pi(k+n-1)}{\Pi(k-1)}\frac{\Pi(-k)}{\Pi(n+1-k)},$$

что асимптотически равно

$$(-1)^n e^{-2k+2}2^{1-k}\frac{\Pi(-k)}{\Pi(k-1)}n^{2(k-1)+\frac{1}{2}}.$$

При $k>\frac{3}{4}$ это выражение неограниченно возрастает, когда $n\to\infty$; при $k=\frac{3}{4}$ оно не имеет определенного значения; при $k<\frac{3}{4}$ оно стремится к нулю.

Итак, доказана следующая теорема:

Если вблизи точки -1 *функция* $f(x)$ *имеет вид* $\frac{A}{(1+x)^k}+f_1(x)$, *где* $k\geqslant\frac{3}{4}$, *а* $f_1(x)$ *ограничена, то ряд Лежандра не сходится ни в одной внутренней точке промежутка* $(-1,1)$. *Аналогично, если вблизи* 1 *функция* $f(x)$ *имеет вид* $\frac{B}{(1-x)^{k'}}+f_2(x)$, *где* $k'\geqslant\frac{3}{4}$, *а* $f_2(x)$ *ограничена, то ряд не сходится ни в одной внутренней точке промежутка* $(-1,1)$.

Возможность нарушения сходимости ряда Лежандра всюду внутри промежутка $(-1,1)$ из-за неудачного строения функции вблизи его концов объясняется тем, что -1 и 1 представляют собой особые точки дифференциального уравнения, которому удовлетворяют функции $P_n(x)$. В теории рядов Фурье подобное явление не имеет места, так как $-\pi$ и π не являются особыми точками дифференциального уравнения, решениями которого служат $\cos nx$ и $\sin nx$.

207. Нам остается рассмотреть вопрос сходимости ряда в концах промежутка $(-1,1)$. Оказывается, что тогда, когда $f(x)$ интегрируема по Лебегу в промежутке $(-1,1)$, условие, что $f(x)$ имеет ограниченное изменение в некоторых окрестностях точек -1 и 1, недостаточно для сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}P_n(x)\int_{-1}^{1}f(x')P_n(x')\,dx'$$

в этих точках. Для этого достаточно, хотя и не необходимо, чтобы $f(x)$ имела ограниченное изменение на всем промежутке $(-1,1)$.

Будем рассматривать наш ряд в точке $x=1$; его частичная сумма равна

$$\frac{n+1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_n(x')-P_{n+1}(x')}{1-x'}f(x')\,dx'.$$

Сначала мы оценим предел при $n \to \infty$ выражения

$$\frac{n+1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{P_n(x')-P_{n+1}(x')}{1-x'}\,dx',$$

где $-1<\alpha<\beta<1$.

Подставив сюда выражения $P_n(x')$ и $P_{n+1}(x')$ из п. 193, заметим, что интересующий нас предел зависит от предела выражения

$$\frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta'-\frac{\pi}{4}\right]-\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta'-\frac{\pi}{4}\right]\right\}\sin^{-\frac{1}{2}}\theta'\,\frac{f(x')}{1-x'}\,dx'.$$

Что же касается вообще выражения вида

$$n^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{p}^{q}\sin\left[(n+1)\theta'-\frac{\pi}{4}\right]F(\theta')\,d\theta',$$

где $0<p<q<\pi$, то, так как $f(x')$ суммируема в промежутке (α,β), $F(\theta')$ суммируема в промежутке (p, q), поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\int_{p}^{q}\sin\left[(n+1)\theta'-\frac{\pi}{4}\right]F(\theta')\,d\theta'=0,$$

но отсюда еще не следует, что

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}\int_{p}^{q}\sin\left[(n+1)\theta'-\frac{\pi}{4}\right]F(\theta')\,d\theta'=0.$$

Если же $f(x')$ имеет в промежутке (α,β) ограниченное изменение, то $F(\theta')$ имеет ограниченное изменение в промежутке (p, q), и последнее соотношение выполняется. Чтобы это показать, представим $F(\theta')$ в виде разности функций $F_1(\theta')$ и $F_2(\theta')$, ограниченных и монотонных в промежутке (p, q). Тогда

$$\int_{p}^{q}\sin\left[(n+1)\theta'-\frac{\pi}{4}\right]F_1(\theta')\,d\theta'=$$

$$=F_1(p)\int_{p}^{\bar p}\sin\left[(n+1)\theta'-\frac{\pi}{4}\right]d\theta'+F_1(q)\int_{\bar p}^{q}\sin\left[(n+1)\theta'-\frac{\pi}{4}\right]d\theta',$$

где $\bar p$ — некоторое число, заключенное между p и q, откуда

$$\left|\int_{p}^{q}\sin\left[(n+1)\theta'-\frac{\pi}{4}\right]F_1(\theta')\,d\theta'\right|\leqslant\frac{2}{n+1}\{|F_1(p)|+|F_1(q)|\}.$$

Применив ту же оценку к интегралу, содержащему $F_2(\theta')$, придем к выводу, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{P_{n+1}(x')-P_n(x')}{1-x'}f(x')\,dx'=0.$$

Теперь предположим, что в окрестности $(\xi-\eta,\ \xi+\eta)$ внутренней точки ξ промежутка (α, β)

$$f(x)=\frac{A}{(x-\xi)^k}+\varphi(x),$$

где $0<k<1$, а $\varphi(x)$ — функция с ограниченным изменением. Мы вправе допустить, что $f(x)$ имеет ограниченное изменение в промежутках $(\alpha, \xi-\eta)$ и $(\xi+\eta, \beta)$, так что в точке ξ — единственный бесконечный разрыв функции $f(x)$ между α и β. В промежутке $(\xi-\eta, \xi+\eta)$

$$F(\theta')=\frac{B}{(\theta'-\gamma)^k}+F_1(\theta'),$$

где $\gamma=\arccos\xi$, а $F_1(\theta')$ — функция с ограниченным изменением.

Чтобы выяснить, какое влияние на поведение ряда в точке 1 оказывает наличие бесконечного разрыва, вычислим

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}\int_{\gamma-\eta_1}^{\gamma+\eta_2}\frac{B}{(\theta'-\gamma)^k}\sin\left[(n+1)\theta'-\frac{\pi}{4}\right]d\theta'=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}\int_{-\eta_1}^{\eta_2}\frac{1}{u^k}\sin\left[(n+1)u+(n+1)\gamma-\frac{\pi}{4}\right]du.$$

Положив $(n+1)u=v$, мы увидим, что существование этого предела зависит от существования

$$\lim_{n\to\infty} n^{k-\frac{1}{2}}\int_{-(n+1)\eta_1}^{(n+1)\eta_2}\frac{\sin v}{v^k}\,dv,\qquad \lim_{n\to\infty} n^{k-\frac{1}{2}}\int_{-(n+1)\eta_1}^{(n+1)\eta_2}\frac{\cos v}{v^k}\,dv.$$

При $k<\frac{1}{2}$ оба последних предела существуют и равны нулю. При $k=\frac{1}{2}$ определенного предела нет. При $k>\frac{1}{2}$ исследуемое выражение с увеличением n неограниченно возрастает.

Итак, доказано, что если $f(x')$ — функция с ограниченным изменением в промежутках вида $(-1, \xi-\varepsilon)$ и $(\xi+\varepsilon, 1)$, а в точке ξ она имеет бесконечный разрыв порядка $\geqslant\frac{1}{2}$, то соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{P_n(x')-P_{n+1}(x')}{1-x'}f(x')\,dx'=0$$

не может иметь места. В этом случае, хотя $f(x)$ может быть суммируема на $(-1, 1)$ и иметь ограниченное изменение вблизи точек -1 и 1, ее ряд Лежандра в этих точках сходиться не может. Может случиться также, что такой предел не существует и, следовательно, ряд расходится в точке 1 для функции $f(x)$, ограниченной в (α, β), но с неограниченным изменением. Таким образом, ряд Лежандра для функции, ограниченной в $(-1, 1)$ и интегрируемой по Лебегу в этом промежутке, может расходиться в точке 1.

208. Чтобы исследовать те части интеграла, изображающего частичную сумму ряда в точке $x=1$, которые приходятся на окрестности точек 1 и -1, можно заменить

$$\frac{n+1}{2}\,\frac{P_n(x')-P_{n+1}(x')}{1-x'}$$

выражением

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{dP_n(x')}{dx'}+\frac{dP_{n+1}(x')}{dx'}\right\}.$$

Мы должны рассмотреть интегралы

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{-1+\varepsilon}\left\{\frac{dP_n(x')}{dx'}+\frac{dP_{n+1}(x')}{dx'}\right\}f(x')\,dx',\quad \frac{1}{2}\int_{1-\varepsilon}^{1}\left\{\frac{dP_n(x')}{dx'}+\frac{dP_{n+1}(x')}{dx'}\right\}f(x')\,dx'.$$

Допустим, что $f(x')$ монотонна в промежутках $(-1, -1+\varepsilon)$ и $(1-\varepsilon, 1)$. Тогда

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{-1+\varepsilon}\left\{\frac{dP_n(x')}{dx'}+\frac{dP_{n+1}(x')}{dx'}\right\}f(x')\,dx'=$$
$$=\frac{1}{2}[P_n(-1+\mu)+P_{n+1}(-1+\mu)][f(-1+0)-f(-1+\varepsilon)]+$$
$$+\frac{1}{2}[P_n(-1+\varepsilon)+P_{n+1}(-1+\varepsilon)]f(-1+\varepsilon),$$

где μ — некоторая точка промежутка $(0, \varepsilon)$. Правая часть по абсолютной величине меньше, чем

$$\zeta+\frac{1}{2}|f(-1+\varepsilon)[P_n(-1+\varepsilon)+P_{n+1}(-1+\varepsilon)]|,$$

если ε выбрано так, что $|f(-1+0)-f(-1+\varepsilon)|<\zeta$. Фиксируем произвольное положительное ζ и выберем ε так, чтобы выполнялось это неравенство и одновременно с ним неравенство $|f(1-0)-f(1-\varepsilon)|<\zeta$; тогда можно будет подобрать такое целое n_1, что при $n\geqslant n_1$

$$\left|\frac{1}{2}\int_{-1}^{-1+\varepsilon}\left\{\frac{dP_n(x')}{dx'}+\frac{dP_{n+1}(x')}{dx'}\right\}f(x')\,dx'\right|<2\zeta.$$

Подобным же образом

$$\frac{1}{2}\int_{1-\varepsilon}^{1}\left\{\frac{dP_n(x')}{dx'}+\frac{dP_{n+1}(x')}{dx'}\right\}f(x')\,dx'=$$
$$=f(1-0)+\frac{1}{2}[P_n(1-\mu')+P_{n+1}(1-\mu')][f(1-\varepsilon)-f(1-0)]-$$
$$-\frac{1}{2}f(1-\varepsilon)[P_n(1-\varepsilon)+P_{n+1}(1-\varepsilon)],$$

где μ' — некоторая точка промежутка $(0, \varepsilon)$. Можно выбрать целое n_2, такое, что при $n\geqslant n_2$

$$\left|\frac{1}{2}\int_{1-\varepsilon}^{1}\left\{\frac{dP_n(x')}{dx'}+\frac{dP_{n+1}(x')}{dx'}\right\}f(x')\,dx'-f(1-0)\right|<2\zeta.$$

Наконец, если $f(x)$ удовлетворяет какому-нибудь условию, достаточному для того чтобы

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{n+1}{2}\,\frac{P_n(x')-P_{n+1}(x')}{1-x'}f(x')\,dx'=0,$$

то можно указать такое n_3, что при $n \geqslant n_3$ интеграл в левой части последнего соотношения будет по абсолютной величине меньше ζ. Если n' — наибольшее из целых чисел n_1, n_2, n_3, то для $n \geqslant n'$

$$\left| \int_{-1}^{1} \frac{n+1}{2} \frac{P_n(x')-P_{n+1}(x')}{1-x'} f(x')\,dx' - f(1-0) \right| < 5\zeta.$$

Так как ζ сколь угодно мало, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \frac{n+1}{2} \frac{P_n(x')-P_{n+1}(x')}{1-x'} f(x')\,dx' = f(1-0).$$

Точно так же может быть исследован вопрос о сходимости в точке -1. В нашем выводе мы предполагали $f(x)$ монотонной в промежутках $(-1, -1+\varepsilon)$ и $(1-\varepsilon, 1)$. Ясно, что наш вывод охватывает и тот случай, когда $f(x)$ — функция с ограниченным изменением в этих промежутках, так как при этом ее можно представить в виде разности двух монотонных функций.

Итак, мы доказали следующую теорему:

Пусть $f(x)$ — функция, имеющая ограниченное изменение в некоторых окрестностях точек -1 и 1. Для того чтобы ее ряд Лежандра сходился в точках -1 и 1 соответственно к $f(-1+0)$ и $f(1-0)$ недостаточно, чтобы $f(x)$ была интегрируема по Лебегу в промежутке $(-1, 1)$. Для этого достаточно, однако, чтобы $f(x)$ имела в этом промежутке ограниченное изменение. Достаточно также, чтобы $f(x)$ имела ограниченное изменение в области, получаемой изъятием из промежутка $(-1, 1)$ конечного числа внутренних точек ξ вместе с некоторыми их окрестностями, причем в этих последних $f(x)$ представляется в виде $\frac{A}{|x-\xi|^k}+\varphi(x)$, где $0<k<\frac{1}{2}$, а $\varphi(x)$ имеет ограниченное изменение. Если же хотя бы для одной из этих точек ξ функция $f(x)$ имеет указанный вид, но с $k \geqslant \frac{1}{2}$, то ряд Лежандра не сходится к $f(-1+0)$ и $f(1-0)$ в точках -1 и 1.

§ 2. ПУАССОНОВА СУММА РЯДА ЛЕЖАНДРА

209. Пуассон применил к ряду (1) метод исследования, который, хотя в своем первоначальном виде и не приводит к определенным результатам, но с привлечением более поздних результатов может быть использован для получения точных выводов относительно сходимости ряда.

Возьмем две точки $(\theta, 0)$ и (θ', φ') на поверхности сферы единичного радиуса и положим $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\varphi'$, так что γ оказывается длиной дуги, соединяющей эти точки. Координаты θ, θ' и φ можно подчинить неравенствам $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \theta' \leqslant \pi$ и $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

Мы имеем

$$\frac{1}{(1-2h\cos\gamma+h^2)^{\frac{1}{2}}} = P_0(\cos\gamma) + hP_1(\cos\gamma) + \ldots + h^nP_n(\cos\gamma) + \ldots,$$

где $0 < h < 1$; этот ряд сходится равномерно для всех γ, так как $|P_n(\cos\gamma)| \leqslant 1$, а ряд $\sum h^n$ сходится при любом h в промежутке $0 < h < 1$. Этот ряд можно дифференцировать по h почленно, при этом ряд из производных будет сходиться равномерно относительно γ; поэтому

$$\frac{\cos\gamma - h}{(1-2h\cos\gamma+h^2)^{\frac{3}{2}}} = P_1(\cos\gamma) + 2hP_2(\cos\gamma) + \ldots + nh^{n-1}P_n(\cos\gamma) + \ldots$$

Умножая обе части последнего равенства на $2h$ и складывая с предыдущим, придем к соотношению

$$\frac{1-h^2}{(1-2h\cos\gamma+h^2)^{\frac{3}{2}}}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,h^nP_n(\cos\gamma).$$

Полученный ряд сходится при фиксированном h равномерно относительно γ и, следовательно, относительно φ'. Интегрируя по φ' почленно и имея в виду, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}P_n(\cos\gamma)\,d\varphi'=2\pi\,P_n(\cos\theta)\,P_n(\cos\theta'),$$

получим ряд

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-h^2}{(1-2\,h\cos\gamma+h^2)^{\frac{3}{2}}}\,d\varphi'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}\,h^nP_n(\cos\theta)\,P_n(\cos\theta'),$$

сходящийся при фиксированном $h\,(<1)$ равномерно относительно θ и θ'.

Пусть $f(x')\equiv f(\cos\theta')$ суммируема по x' в промежутке $(-1,1)$ и, следовательно, по θ' в промежутке $(0,\pi)$. Тогда

$$\frac{1}{4\pi}\int_{0}^{\pi}f(\cos\theta')\sin\theta'\,d\theta'\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-h^2}{(1-2h\cos\gamma+h^2)^{\frac{3}{2}}}\,d\varphi=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}\,h^nP_n(\cos\theta)\int_{0}^{\pi}f(\cos\theta')\,P_n(\cos\theta')\sin\theta'\,d\theta'.$$

При $h=1$ ряд в правой части представляет собой ряд Лежандра. Его сумма в смысле Пуассона[1]) определяется как предел, в тех случаях, когда он существует, левой части при $h\to1$. Согласно теореме Абеля, если ряд Лежандра сходится, то он сходится к своей пуассоновой сумме, но из существования последней сходимость ряда, вообще говоря, не вытекает. Сумма Пуассона, тогда, когда она существует, выражается в виде

$$\lim_{h\to1}\frac{1}{4\pi}\int\frac{1-h^2}{(1-2h\cos\gamma+h^2)^{\frac{3}{2}}}\,f(\cos\theta')\,dS,$$

где dS—элемент поверхности сферы единичного радиуса, и интегрирование распространено на всю поверхность сферы. Применим к этому интегралу общую теорему сходимости. Для этого положим $F(\theta',\varphi',\theta,h)$ равной нулю или $\dfrac{1-h^2}{(1-2h\cos\gamma+h^2)^{\frac{3}{2}}}$, в зависимости от того, попадает или нет точка (θ',φ') в область $\theta-\varepsilon\leqslant\theta'\leqslant\theta+\varepsilon$, $-\varepsilon\leqslant\varphi'\leqslant\varepsilon$; пусть, кроме того, $1-h=\dfrac{1}{n}$, где n—параметр, фигурирующий в теореме сходимости. При $|\theta'-\theta|>\varepsilon$ имеем

$$|F(\theta',\varphi',\theta,h)|<\frac{1-h^2}{\left[(1-h)^2+4h\sin^2\frac{1}{2}\gamma\right]^{\frac{3}{2}}}<\frac{1}{8h^{\frac{3}{2}}\sin^3\frac{1}{2}\gamma},$$

[1]) Этот метод суммирования связывают также с именем Абеля. (*Прим. перев.*)

а последнее выражение в свою очередь при $h > h_0$ меньше некоторой постоянной, так как $\sin\frac{1}{2}\gamma$ имеет положительное наименьшее значение, когда (θ', φ') лежит вне области $|\theta'-\theta| \leqslant \varepsilon$, $|\varphi'| \leqslant \varepsilon$. Таким образом, первое условие общей теоремы сходимости выполнено. Далее, если S — сфера с вырезанным участком

$$|\theta'-\theta| \leqslant \varepsilon, \quad |\varphi'| \leqslant \varepsilon,$$

то

$$\int\limits_S F(\theta', \varphi', \theta, h)\, dS < 4\pi \frac{1-h^2}{\left(4h\sin^2\frac{1}{2}\gamma\right)^{\frac{3}{2}}} < \frac{4\pi(1-h^2)}{\left(4h_1\sin^2\frac{1}{2}\gamma_0\right)^{\frac{3}{2}}},$$

где $h_1 < h < 1$, а γ_0 — наименьшее значение γ для всех тех точек (θ', φ'), для которых $F \neq 0$. Таким образом, $\int\limits_S F(\theta', \varphi', \theta, h)\, dS \to 0$ при $h \to 1$ стремится к нулю равномерно относительно θ.

Мы показали, что интеграл

$$\iint \frac{1-h^2}{(1-2h\cos\gamma+h^2)^{\frac{3}{2}}} f(\cos\theta')\sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi',$$

распространенный по поверхности сферы, из которой удален участок $|\theta'-\theta| \leqslant \varepsilon$, $|\varphi'| \leqslant \varepsilon$, стремится к нулю равномерно по θ в промежутке $\varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi-\varepsilon$.

Поэтому нам остается рассмотреть только

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} \frac{1-h^2}{(1-2h\cos\gamma+h^2)^{\frac{3}{2}}} f(\cos\theta')\sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi'.$$

Предположим, что $f(x')$ имеет определенные пределы $f(x-0)$ и $f(x+0)$ в точке x. Так как множитель $f(\cos\theta')$ под интегралом положителен, то

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} \frac{1-h^2}{(1-2h\cos\gamma+h^2)^{\frac{3}{2}}} f(\cos\theta')\sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi' =$$

$$= [f(x-0)+\eta_1] I_1 + [f(x+0)+\eta_2] I_2,$$

где

$$I_1 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \frac{1-h^2}{(1-2h\cos\gamma+h^2)^{\frac{3}{2}}}\sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi',$$

$$I_2 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{\theta-\varepsilon}^{\theta} \frac{1-h^2}{(1-2h\cos\gamma+h^2)^{\frac{3}{2}}}\sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi'$$

и η_1, η_2 стремятся к нулю вместе с ε.

Рассмотрим интеграл I_1. Возьмем сферические координаты γ и $\overline{\varphi}$, взяв точку $P(\theta, \varphi)$ в качестве начала и положив $\overline{\varphi}$ равным нулю в направлении касательной в точке P к малому кругу, вдоль которого θ постоянно. Координата $\overline{\varphi}$ будет изменяться в пределах от 0 до π. В новых координатах последнее выражение примет вид

$$I_1 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\gamma} \frac{1-h^2}{(1-2h\cos\gamma+h^2)^{\frac{3}{2}}}\sin\gamma\, d\gamma\, d\overline{\varphi}.$$

Проинтегрировав по γ, получим

$$I_1=\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \frac{1-h^2}{h}\left[\frac{1}{1-h}-\frac{1}{(1-2h\cos\gamma+h^2)^{\frac{1}{2}}}\right]d\bar{\varphi},$$

где значения γ соответствуют граничным точкам области, по которой берется интеграл.

Предел последнего выражения при $h\to 1$ равен

$$\frac{1}{2}-\lim_{h\to 1}\frac{1-h^2}{4\pi}\left\{\int_0^\zeta+\int_\zeta^{\pi-\zeta}+\int_{\pi-\zeta}^\zeta\right\}\frac{1}{(1-2h\cos\gamma+h^2)^{\frac{1}{2}}}\,d\bar{\varphi},$$

где ζ — сколь угодно малое положительное число.

Но при $h_0\leqslant h<1$

$$\int_\zeta^{\pi-\zeta}\frac{1}{(1-2h\cos\gamma+h^2)^{\frac{1}{2}}}\,d\bar{\varphi}<A(\pi-2\zeta),$$

где A — положительное число. Отсюда

$$\lim_{h\to 1}(1-h^2)\int_\zeta^{\pi-\zeta}\frac{1}{(1-2h\cos\gamma+h^2)^{\frac{1}{2}}}\,d\bar{\varphi}=0.$$

Кроме того,

$$(1-h^2)\int_0^\zeta\frac{1}{(1-2h\cos\gamma+h^2)^{\frac{1}{2}}}\,d\bar{\varphi}<\zeta(1+h),$$

следовательно,

$$\overline{\lim_{h\to 1}}(1-h^2)\frac{1}{(1-2h\cos\gamma+h^2)^{\frac{1}{2}}}\,d\bar{\varphi}<2\zeta$$

и подобным же образом

$$\overline{\lim_{h\to 1}}(1-h^2)\int_{\pi-\zeta}^{\pi}\frac{1}{(1-2h\cos\gamma+h^2)^{\frac{1}{2}}}\,d\bar{\varphi}<2\zeta.$$

Так как ζ сколь угодно мало, то

$$\lim_{h\to 1}I_1=0.$$

Так же можно показать, что интеграл I_2 имеет такой же предел.

Мы видим, что при $h\to 1$

$$\left|\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi f(\cos\theta')\,d\theta'\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-h^2}{(1-2h\cos\gamma+h^2)^{\frac{3}{2}}}\,d\varphi-\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]\right|<$$
$$<\frac{1}{8\pi}(|\eta_1|+|\eta_2|).$$

Так как η_1 и η_2 сколь угодно малы, то отсюда следует, что сумма Пуассона в точке $(\theta, 0)$ равна $\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$. В том случае, когда θ заключено в промежутке $(\varepsilon, \pi-\varepsilon)$ и $f(x)$ непрерывна в точке $x=\cos\theta$, сумма Пуассона равна $f(x)$.

При $\theta=0$ нам придется рассмотреть интеграл

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\varepsilon}\frac{1-h^2}{(1-2h\cos\gamma+h^2)^{\frac{3}{2}}}f(\cos\theta')\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'.$$

Произведя такую же замену переменных, как и выше, и интегрируя по γ от 0 до ε и по $\varphi'(\equiv\overline{\varphi})$ от $-\pi$ до π, мы убедимся в том, что этот интеграл при $h\to1$ стремится к 1. Случай $\theta=\pi$ рассматривается аналогично. Таким образом, пуассонова сумма в точках $\theta=0$ и $\theta=\pi$ равна соответственно $f(1-0)$ и $f(-1+0)$ в предположении, что эти пределы существуют.

Итак, мы доказали следующую теорему:

Пуассонова сумма ряда Лежандра в любой внутренней точке x промежутка $(-1, 1)$ равна $f(x)$, если x — точка непрерывности функции $f(x)$, и равна $\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$, если x — точка разрыва первого рода. В любом промежутке, лежащем внутри $(-1, 1)$, в котором $f(x)$ непрерывна, причем в концах промежутка — непрерывна слева и справа, сходимость в смысле Пуассона равномерна. В точках -1 и 1 сумма Пуассона равна соответственно $f(-1+0)$ и $f(1-0)$ тогда, когда эти пределы существуют.

Если

$$a_0+a_1P_1(\cos\theta)+\ldots+a_nP_n(\cos\theta)+\ldots$$

заданный ряд Лежандра, то соответствующий ряд Пуассона имеет вид

$$a_0+a_1hP_1(\cos\theta)+\ldots+a_nh^nP_n(\cos\theta)+\ldots$$

Если при $|a_nP_n(\cos\theta)|=O\left(\frac{1}{n}\right)$ в какой-нибудь точке θ существует сумма Пуассона, то, согласно теореме Литтльвуда, в этой точке ряд Лежандра сходится и его сумма совпадает с пуассоновой.

Так как для θ, заключенного в промежутке $(\varepsilon, \pi-\varepsilon)$, $|P_n(\cos\theta)|<\frac{k}{n^{\frac{1}{2}}}$, где k постоянно, когда ε фиксировано, то условие $|a_nP_n(\cos\theta)|=O\left(\frac{1}{n}\right)$ будет выполнено, если $\frac{a_n}{n^{\frac{1}{2}}}=O\left(\frac{1}{n}\right)$, т. е. если $a_n=O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)$.

Коэффициент a_n выражается в виде

$$a_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x')P_n(x')\,dx',$$

поэтому, когда $f(x')$ имеет в промежутке $(-1, 1)$ ограниченное изменение,

$$a_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f_1(x')P_n(x')\,dx'-\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f_2(x')P_n(x')\,dx',$$

где $f_1(x')$ и $f_2(x')$ монотонны.

Так как

$$\int_{-1}^{1}f_1(x')P_n(x')\,dx'=f_1(-1)\int_{-1}^{\xi}P_n(x')\,dx'+f_1(1)\int_{\xi}^{1}P_n(x')\,dx'=$$
$$=\frac{f_1(-1)}{2n+1}\{P_{n+1}(\xi)-P_{n-1}(\xi)\}+\frac{f_1(1)}{2n+1}\{P_{n-1}(\xi)-P_{n+1}(\xi)\},$$

и подобное же равенство имеет место с $f_2(x')$, то $a_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)$. Таким образом, если $f(x')$ — функция с ограниченным изменением, то ее ряд Лежандра сходится во всем промежутке. По-иному это было установлено в п. 208.

Итак, доказана теорема:

Если $a_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)$, *то ряд* $a_0 + a_1P_1(\cos\theta) + a_2P_2(\cos\theta) + \ldots + a_nP_n(\cos\theta) + \ldots$ *сходится всюду, где существует его пуассонова сумма; последнее имеет место во всех точках непрерывности и во всех точках разрыва первого рода функции* $f(x)$. *Условие* $a_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)$ *выполняется, в частности, тогда, когда* $f(x)$ *имеет ограниченное изменение в промежутке* $(-1, 1)$; *в этом случае ряд сходится в* $(-1, 1)$ *всюду.*

210. Вопросы сходимости ряда Лежандра впервые рассмотрел Пуассон[1]). Ошибки в его исследовании отметил Дирихле[2]); сам Дирихле ограничился рассмотрением случая, когда $f(x)$ конечное число раз достигает максимума и минимума в промежутке $(-1, 1)$. Другая работа принадлежит Бонне[3]). Дини[4]) подошел к вопросу более строго, чем все его предшественники. В исследованиях Гобсона[5]) было предположено, что функция $\frac{f(x)}{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}$ суммируема в промежутке $(-1, 1)$, и показано, что ряд сходится во всякой внутренней точке, вблизи которой $f(x)$ имеет ограниченное изменение; были также установлены изложенные выше условия сходимости в концах промежутка. Вопрос сходимости ряда во внутренних точках в случае функции с ограниченным изменением во всем промежутке рассматривал Буркхардт[6]). Упомянем еще статью Уилсона[7]), где показано, что ряды

$$\sum n^{-k} a_n P_n(x) \qquad \left(0 < k < \frac{1}{2}\right), \qquad \sum (\ln n)^{-1} a_n P_n(x) \qquad (k = 0),$$

где a_n — коэффициенты Фурье некоторой функции по многочленам Лежандра, сходятся почти всюду внутри промежутка $(-1, 1)$.

С другой точки зрения рассмотрел вопрос Юнг[8]). В своей статье он предположил относительно ряда

$$a_0 + a_1P_1(x) + \ldots + a_nP_n(x) + \ldots,$$

что $a_n = o(n^{\frac{1}{2}})$, и в этом предположении его результаты применимы к произвольным рядам по многочленам $P_n(x)$, а не только к таким, в которых коэффициенты определяются формулой $a_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,P_n(x)\,dx$. Рассматривая ряды, получаемые из данного формальным интегрированием, подобно тому как это делал Риман с тригонометрическими рядами, и применяя свою теорию рядов Фурье[9]) в слабом смысле, он показал, что произведе-

---

[1]) Journ. de l' École Polytechnique, тетр. 19; см. также Additions à la connaissance des temps (1829, 1831) и Théorie de la chaleur, стр. 212.

[2]) Journ. f. reine angew. Math., 17 (1837).

[3]) Journ. de Liouville, 17 (1852), 265.

[4]) Ann. di Math., II, 6 (1874).

[5]) Proc. Lond. Math. Soc. (2), 6 (1908), 388; 7 (1909), 24.

[6]) Sitzungsber. Akad. München (1909).

[7]) Proc. Lond. Math. Soc. (2), 21 (1923), 389.

[8]) Proc. Lond. Math. Soc. (2), 18 (1919), 141.

[9]) См. А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, М. —Л., 1939, 284. Оттуда же нами заимствован неудачный перевод термина restricted Fourier's series. (*Прим. перев*).

ние ряда в точке в отношении сходимости или колебания таково же, как поведение в соответствующей точке ряда Фурье функции $f(\cos\theta)$.

Что касается условия $a_n = o(n^{\frac{1}{2}})$, то, если взять асимптотическую формулу

$$P_n(\cos\theta) = \left(\frac{2}{n\pi\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right] + \frac{\alpha(n, \theta)}{n^{\frac{3}{2}}},$$

в которой $|\alpha(n, \theta)|$ ограничена при всех n и θ, когда θ заключено в промежутке $(\varepsilon, \pi-\varepsilon)$, мы увидим, что для сходимости ряда в точке θ необходимо условие

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^{\frac{1}{2}}} \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right] = 0,$$

так как при ограниченном $|a_n|$ ряд $\sum a_n \frac{\alpha(n, \theta)}{n^{\frac{3}{2}}}$ непременно сходится. Таким образом, условие $a_n = o(n^{\frac{1}{2}})$ оказывается, вообще говоря, необходимым для сходимости ряда. Однако общий член ряда может стремиться к нулю при отдельных значениях θ и тогда, когда условие $a_n = o(n^{\frac{1}{2}})$ не выполняется. Так, например, ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} (2m+1) P_{2m+1}(\cos\theta)$ сходится при $\theta = \frac{\pi}{2}$, хотя a_n не есть $o(n^{\frac{1}{2}})$.

Следует заметить, что из суммируемости $\frac{f(x)}{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}$ следует $a_n = O(n^{\frac{1}{2}})$. В самом деле, согласно п. 200,

$$|a_n| = \left(n+\frac{1}{2}\right)\left|\int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\,dx\right| < \left(n+\frac{1}{2}\right) k \int_{-1}^{1} \frac{|f(x)|}{(1-x^2)^{\frac{1}{4}} n^{\frac{1}{2}}}\,dx,$$

где k постоянно; отсюда уже вытекает, что $a_n = O(n^{\frac{1}{2}})$.

Ферперс ошибочно утверждал [1]), что ряд

$$1 + 3P_1(x) P_1(x') + \ldots + (2n+1) P_n(x) P_n(x') + \ldots$$

сходится к нулю всюду, кроме точки $x = x'$, в которой он расходится. Общий член этого ряда имеет вид

$$(2n+1)\frac{2}{n\pi}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta' - \frac{\pi}{4}\right] + O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right),$$

где θ и θ' не равны ни 0, ни π. Это выражение не стремится к нулю, поэтому ряд не может сходиться. Подобное же ошибочное утверждение для частного случая высказал Тодхентер)[2]; он считал, что ряд

$$1 + 3P_1(x) + 5P_2(x) + \ldots + (2n+1) P_n(x) + \ldots$$

всюду, кроме точки $x = 1$, сходится к нулю.

---

[1]) Spherical Harmonics, Cambridge, 1877, стр. 66.
[1]) Functions of Laplace, Lamé and Bessel, Cambridge, 1875, стр. 174.

§ 3. СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ЛАПЛАСА

211. В п. 95 мы показали, что функция $f(\theta, \varphi)$, определенная на поверхности сферы, при некоторых весьма жестких ограничениях может быть представлена рядом Лапласа

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\int_{0}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta', \varphi')\, P_n(\cos\gamma)\sin\theta',\, d\varphi' d\theta',$$

где

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi').$$

Теперь мы займемся установлением достаточных условий сходимости этого ряда к $f(\theta, \varphi)$.

Если принять точку (θ, φ) за начальную и ввести новые сферические координаты $(\gamma, \bar{\varphi})$, то ряд запишется в виде

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\int_{0}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\gamma, \bar{\varphi})\, P_n(\cos\gamma)\sin\gamma\, d\bar{\varphi}\, d\gamma,$$

где $F(\gamma, \bar{\varphi}) = f(\theta', \varphi')$. Пусть $\varphi(\gamma)$ означает среднее функции $F(\gamma, \bar{\varphi})$ или $f(\theta', \varphi')$ вдоль окружности радиуса γ с центром в точке (θ, φ), т. е.

$$\varphi(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\gamma, \bar{\varphi})\, d\bar{\varphi}.$$

Если теперь переписать ряд в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(2n+1)\int_{0}^{\pi}\varphi(\gamma)\, P_n(\cos\gamma)\sin\gamma\, d\gamma,$$

то мы заметим, что получили ряд Лежандра

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(2n+1)\, P_n(\cos\bar{\theta})\int_{0}^{\pi}\varphi(\gamma)\, P_n(\cos\gamma)\sin\gamma\, d\gamma$$

при $\bar{\theta} = 0$.

В п. 208 мы показали, что если функция $\varphi(\gamma)$ имеет ограниченное изменение в окрестности $\gamma = 0$, то при некоторых дополнительных ограничениях, касающихся поведения функции $\varphi(\gamma)$ во всем промежутке $(0, \pi)$, полученный ряд сходится к $\varphi(+0)$.

В том случае, когда функция $f(\theta, \varphi)$ непрерывна по совокупности своих переменных в точке (θ, φ), мы имеем

$$|F(\gamma, \bar{\varphi}) - f(\theta, \varphi)| < \varepsilon$$

для всех $\bar{\varphi}$, если только γ не превосходит некоторого числа η_ε, зависящего от ε. Таким образом, при $\gamma \leqslant \eta_\varepsilon$

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\gamma, \bar{\varphi})\, d\bar{\varphi} - f(\theta, \varphi)\right| < \varepsilon,$$

отсюда, так как ε произвольно мало,

$$\varphi(\gamma + 0) = f(\theta, \varphi).$$

Рассмотрим более общий случай, когда точка (θ, φ) лежит на линии разрыва функции $f(\theta, \varphi)$. Предположим, что эта линия обладает непрерывно вращающейся касательной, направлению которой в рассматриваемой точке отвечает значение $\overline{\varphi}$, равное $\overline{\varphi}_0$. Кроме того, мы предположим, что для всякого положительного ε существуют функции $f_1(\theta, \varphi)$ и $f_2(\theta, \varphi)$, такие, что

$$|F(\gamma, \overline{\varphi}) - f_1(\theta, \varphi)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad \gamma \leqslant \eta_\varepsilon^{(1)}$$

и

$$|F(\gamma, \overline{\varphi}) - f_2(\theta, \varphi)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad \gamma \leqslant \eta_\varepsilon^{(2)}$$

для (θ, φ), лежащих соответственно по одну и по другую сторону от линии разрыва. Функции $f_1(\theta, \varphi)$ и $f_2(\theta, \varphi)$ служат, таким образом, пределами функции $F(\gamma, \overline{\varphi})$ при $\gamma \to 1$ с одной и с другой стороны рассматриваемой линии.

Тогда интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(\gamma, \overline{\varphi})\, d\overline{\varphi}$ можно будет разбить на пять слагаемых, соответствующих участкам $(-\pi, -\pi+\overline{\varphi}_0-\zeta)$, $(-\pi+\overline{\varphi}_0-\zeta, -\pi+\overline{\varphi}_0+\zeta)$, $(-\pi+\overline{\varphi}_0+\zeta, \overline{\varphi}_0-\zeta)$, $(\overline{\varphi}_0-\zeta, \overline{\varphi}_0+\zeta)$, $(\overline{\varphi}_0+\zeta, \pi)$ промежутка интегрирования; ζ предполагается стремящимся к нулю вместе с ε, $\eta_\varepsilon^{(1)}$ и $\eta_\varepsilon^{(2)}$. Второе и четвертое слагаемые по абсолютной величине не превосходят $2k\zeta$, где k — некоторое постоянное. Сумма первого и пятого слагаемых при $\gamma \leqslant \eta_\varepsilon^{(1)}$ разнится от $(\pi - 2\zeta) f_1(\theta, \varphi)$ меньше, чем на $\varepsilon(\pi - 2\zeta)$; точно так же при $\gamma \leqslant \eta_\varepsilon^{(2)}$ третье слагаемое разнится от $(\pi - 2\zeta) f_2(\theta, \varphi)$ меньше, чем на $\varepsilon(\pi - 2\zeta)$.

Следовательно, при $\gamma \leqslant \min(\eta_\varepsilon^{(1)}, \eta_\varepsilon^{(2)})$

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} F(\gamma, \overline{\varphi})\, d\overline{\varphi} - \frac{1}{2}\{f_1(\theta, \varphi) + f_2(\theta, \varphi)\} \right| < 2\varepsilon(n - 2\zeta) + 2k\zeta.$$

Отсюда

$$\lim_{\gamma \to 0} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} F(\gamma, \overline{\varphi})\, d\overline{\varphi} = \frac{1}{2}\{f_1(\theta, \varphi) + f_2(\theta, \varphi)\}.$$

Соответственно ряд Лапласа при условии, что $\varphi(\gamma)$ имеет конечное изменение в промежутке $(-\pi, \pi)$ будет сходиться в точке (θ, φ) к $\frac{1}{2}\{f_1(\varphi, \theta) + f_2(\varphi, \theta)\}$, т. е. к среднему арифметическому пределов функции $f(\theta, \varphi)$ с той и с другой стороны линии разрыва.

Итак, доказана следующая теорема:

Ряд Лапласа

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\theta', \varphi') P_n(\cos\gamma) \sin\theta'\, d\varphi'\, d\theta'$$

функции $f(\theta', \varphi')$, абсолютно интегрируемой (в смысле Лебега) на поверхности сферы, сходится к $f(\theta, \varphi)$ в точках непрерывности функции и к $\frac{1}{2}\{f_1(\theta, \varphi) + f_2(\theta, \varphi)\}$ в точках, принадлежащих линии разрыва функции $f(\theta, \varphi)$, вдоль которой $f(\theta, \varphi)$ имеет пределы $f_1\theta(, \varphi)$ и $f_2(\theta, \varphi)$ с той и с другой стороны. Последнее утверждение верно при дополнительном условии, что $\varphi(\gamma)$ — среднее функции $f(\theta, \varphi)$ вдоль малого круга, соответствующего заданному значению γ,—имеет ограниченное изменение в промежутке $(0, \pi)$.

Требование, чтобы $\varphi(\gamma)$ была с ограниченным изменением во всем промежутке $(0, \pi)$, не необходимо для сходимости ряда. В соответствии с п. 207 и 208 его можно заменить некоторыми ограничениями, налагаемыми на поведение функции у противоположного конца диаметра, проходящего через точку (θ, φ), и во внутренних точках промежутка $(0, \pi)$.

Эта теорема остается в силе и тогда, когда вместо непрерывности в точке (θ, φ) функция $f(\theta, \varphi)$ удовлетворяет следующему условию: существует такая постоянная A, что

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} \{F(\gamma, \overline{\varphi}) - A\}\, d\overline{\varphi}\right| < \varepsilon,$$

когда γ не превышает некоторого η_ε, зависящего от ε. Условия, относящиеся к функции $\varphi(\gamma)$, остаются при этом прежними.

Докажем теперь следующее предложение:

Условие, фигурирующее в предыдущей теореме и состоящее в том, что $\varphi(\gamma)$ есть функция с ограниченным изменением в промежутке $(0, \pi)$, будет выполнено, если функция $f(\theta, \varphi)$ такова, что $F(\gamma, \overline{\varphi})$ при любом $\overline{\varphi}$ имеет ограниченное изменение по γ в промежутке $(0, \pi)$ и ее полное изменение в этом промежутке равномерно ограничено при всех значениях $\overline{\varphi}$.

В самом деле, если при любом $\overline{\varphi}$ функция $F(\gamma, \overline{\varphi})$ имеет в $0 \leqslant \gamma \leqslant \pi$ ограниченное изменение, то

$$F(\gamma, \overline{\varphi}) = p(\gamma, \overline{\varphi}) - n(\gamma, \overline{\varphi}) + f(\theta, \varphi),$$

где $p(\gamma, \overline{\varphi})$ и $-n(\gamma, \overline{\varphi})$ — соответственно полное положительное и полное отрицательное изменения функции $F(\gamma, \overline{\varphi})$ в промежутке $(0, \gamma)$. Если ее полное изменение в промежутке $(0, \pi)$, т. е. выражение

$$p(\pi, \overline{\varphi}) + n(\pi, \overline{\varphi}),$$

ограничено по $\overline{\varphi}$, то ограничены и $p(\pi, \overline{\varphi})$, $n(\pi, \overline{\varphi})$, а также, следовательно, $p(\gamma, \overline{\varphi})$ и $n(\gamma, \overline{\varphi})$.

Так как $p(\gamma, \overline{\varphi})$ и $n(\gamma, \overline{\varphi})$ при любом $\overline{\varphi}$ монотонно возрастающие функции от γ, то $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(\gamma, \overline{\varphi})\, d\overline{\varphi}$ и $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} n(\gamma, \overline{\varphi})\, d\overline{\varphi}$ также монотонно возрастают и ограничены. Следовательно, функция $\varphi(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\gamma, \overline{\varphi})\, d\overline{\varphi}$ представляется в виде разности двух ограниченных монотонных функций от γ, т. е. оказывается функцией с ограниченным изменением.

Теперь мы докажем теорему о равномерной сходимости ряда Лапласа.

Если функция $f(\theta, \varphi)$ непрерывна в каждой точке некоторого множества G (в частности, некоторой замкнутой области) на поверхности сферы, то ряд Лапласа будет сходиться к $f(\theta, \varphi)$ равномерно на G, когда выполняется следующее условие: какова бы ни была точка P множества G, функция f имеет ограниченное изменение вдоль любой полуокружности, соединяющей точку P с противоположной ей точкой P' сферической поверхности, и ее полное изменение на такой полуокружности ограничено сверху некоторой постоянной, не зависящей ни от полуокружности, ни от точки P, принадлежащей множеству G.

Так как $f(\theta, \varphi)$ равномерно непрерывна на множестве G, то, каково бы ни было ε, число η_ε, при котором $|F(\gamma, \overline{\varphi}) - F(0, \overline{\varphi})| < \varepsilon$ для всех $\overline{\varphi}$, коль скоро $\gamma \leqslant \eta_\varepsilon$, может быть выбрано одинаковым для всех точек (θ, φ) множества G.

Из результатов п. 207 и 208 вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} \int\limits_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{P_n(\cos\gamma)-P_{n+1}(\cos\gamma)}{1-\cos\gamma}\,\varphi(\gamma)\sin\gamma\,d\gamma$$

не превзойдет умноженной $\frac{2}{n+1}$ суммы полных изменений функции $\varphi(\gamma)$ в промежутках $(0, \varepsilon)$ и $(0, \pi-\varepsilon)$ плюс $|\varphi(0)|$. В силу условия теоремы такое выражение при $n\to\infty$ стремится к нулю равномерно относительно (θ, φ) на множестве G. Поэтому остается только рассмотреть те части интеграла, выражающего частичную сумму ряда, которые распространяются на промежутки $(0, \varepsilon)$ и $(\pi-\varepsilon, \pi)$. Обращаясь же к п. 208, мы увидим, что они равномерно стремятся соответственно к $f(\theta, \varphi)$ и к нулю.

212. Совершенно так же, как в п. 209, можно показать, что пуассонова сумма ряда Лапласа равна пределу при $h\to 1$ выражения

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin\theta'\,d\theta' \int\limits_0^{\pi} \frac{1-h^2}{(1-2h\cos\gamma+h^2)^{\frac{3}{2}}}\,f(\theta', \varphi')\,d\varphi'$$

всегда, когда такой предел существует; в этом выражении $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\sin(\varphi'-\varphi)$.

Как и в п. 209, доказывается, что интеграл

$$\iint \frac{1-h^2}{(1-2h\cos\gamma+h^2)^{\frac{3}{2}}}\,f(\theta', \varphi')\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi',$$

распространенный на всю поверхность сферы, за вычетом участка $|\theta'-\theta|\leqslant\varepsilon$, $|\varphi'-\varphi|\leqslant\varepsilon$, при $h\to 1$ стремится к нулю равномерно относительно (θ, φ).

Остается рассмотреть

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon}\int\limits_{\varphi-\varepsilon}^{\varphi+\varepsilon} \frac{1-h^2}{(1-2h\cos\gamma+h^2)^{\frac{3}{2}}}\,f(\theta', \varphi')\sin\theta'\,d\varphi'\,d\theta'.$$

Перейдя к переменным γ, $\overline{\varphi}$, получим

$$\frac{1}{4\pi}\iint \frac{1-h^2}{(1-2h\cos\gamma+h^2)^{\frac{3}{2}}}\,F(\gamma, \overline{\varphi})\sin\gamma\,d\gamma\,d\overline{\varphi},$$

где интеграл берется по той же области.

Когда функция $f(\theta, \varphi)$ непрерывна в точке (θ, φ), для всех точек $(\gamma, \overline{\varphi})$ области интегрирования выполняется неравенство

$$|F(\gamma, \overline{\varphi}) - f(\theta, \varphi)| < \eta_\varepsilon,$$

где η_ε стремится к нулю вместе с ε. Поэтому, записав рассматриваемый интеграл в виде

$$\frac{f(\theta, \varphi)}{4\pi}\iint \frac{1-h^2}{(1-2h\cos\gamma+h^2)^{\frac{3}{2}}}\sin\gamma\,d\gamma\,d\overline{\varphi} +$$
$$+\frac{1}{4\pi}\iint \frac{1-h^2}{(1-2h\cos\gamma+h^2)^{\frac{3}{2}}}\{F(\gamma, \overline{\varphi}) - f(\theta, \varphi)\}\sin\gamma\,d\gamma\,d\overline{\varphi},$$

мы сможем в силу того, что $\sin\gamma > 0$, представить его так:

$$\frac{f(\theta, \varphi)+\delta_\varepsilon}{4\pi} \iint \frac{1-h^2}{(1-2h\cos\gamma+h^2)^{\frac{3}{2}}} \sin\gamma \, d\gamma \, d\bar{\varphi},$$

где $|\delta_\varepsilon| < \eta_\varepsilon$. Произведя интегрирование по γ, получим

$$\frac{f(\theta, \varphi)+\delta_\varepsilon}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-h^2)}{h} \left\{\frac{1}{1-h} - \frac{1}{(1-2h\cos\gamma+h^2)^{\frac{1}{2}}}\right\} d\bar{\varphi} =$$

$$= \left\{\frac{f(\theta, \varphi)+\delta_\varepsilon}{2}\right\}(1+h) - \frac{f(\theta, \varphi)+\delta_\varepsilon}{4\pi h} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-h^2}{(1-2h\cos\gamma+h^2)^{\frac{1}{2}}} d\bar{\varphi}.$$

При этом

$$\left|\frac{f(\theta, \varphi)+\delta_\varepsilon}{4\pi h} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-h^2}{(1-2h\cos\gamma+h^2)^{\frac{3}{2}}} d\bar{\varphi}\right| \leqslant \left|\frac{f(\theta, \varphi)+\delta_\varepsilon}{4\pi}\right| \frac{(1-h^2)}{h} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\bar{\varphi}}{\left(4h\sin^2\frac{1}{2}\gamma\right)^{\frac{1}{2}}};$$

при всех $\bar{\varphi}$ значения γ под интегралом превосходят некоторое фиксированное число.

Следовательно, при $h \to 1$ все выражение сколь угодно мало отличается от $f(\theta, \varphi)+\delta_\varepsilon$, а так как δ_ε произвольно мало, то

$$\lim_{h\to 1} \frac{1}{4\pi} \int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} \int_{\varphi-\varepsilon}^{\varphi+\varepsilon} \frac{1-h^2}{(1-2h\cos\gamma+h^2)^{\frac{3}{2}}} f(\theta', \varphi') \sin\theta' d\varphi' d\theta' = f(\theta, \varphi).$$

В том случае, когда (θ, φ) лежит на линии разрыва, по обеим сторонам которой $f(\theta, \varphi)$ непрерывна и имеет пределы $f_1(\theta, \varphi)$ и $f_2(\theta, \varphi)$, мы обнаружим, повторив с некоторыми изменениями рассуждения п. 211, что пуассонова сумма равна $\frac{1}{2}\{f_1(\theta, \varphi)+f_2(\theta, \varphi)\}$.

Итак, мы приходим к следующей теореме:

Пуассонова сумма ряда Лапласа в точке непрерывности функции $f(\theta, \varphi)$ равна значению $f(\theta, \varphi)$ в этой точке; на любом замкнутом множестве точек непрерывности сходимость к пуассоновой сумме равномерна. В любой точке (θ, φ), принадлежащей линий разрыва, на которой функция $f(\theta, \varphi)$ имеет с той и с другой стороны пределы $f_1(\theta, \varphi)$ и $f_2(\theta, \varphi)$, пуассонова сумма ряда Лапласа равна $\frac{1}{2}\{f_1(\theta, \varphi)+f_2(\theta, \varphi)\}$.

§ 4. СУММИРУЕМОСТЬ РЯДОВ ЛАПЛАСА ПО ЧЕЗАРО

213. Так же как в случае тригонометрических и некоторых других рядов, жесткость условий, обеспечивающих сходимость ряда Лапласа, вызвала необходимость рассмотреть его чезаровские суммы с целью получить представление функции также в тех точках, где ряд Лапласа расходится.

Так как ряд Лежандра представляет собой частный случай ряда Лапласа, когда функция $f(\theta, \varphi)$ не зависит от φ, то вопросы суммируемости в смысле Чезаро того и другого ряда оказываются тесно связанными между собой.

Первые результаты в этом направлении принадлежат Фейеру[1]). Он доказал, что ряд Лапласа суммируем $(C, 2)$ в каждой точке непрерывности функции $f(\theta, \varphi)$. Позднее Гронуолл[2]) показал, что в точках непрерывности имеет место даже суммируемость $(C, 1)$. Общей теорией суммируемости (C, k) занимался Чэпмен[3]) а также Хаар[4]). Позднее суммируемость (C, k) рассматривали Лукач[5]), Хилл[6]), Фольк[7]), Когбетлянц[8]). Другими методами суммирования занимался Планшерель[9]). Фейер[10]) упростил доказательства ряда теорем, принадлежащих Гронуоллу и другим.

Вопросы суммируемости рядов по ультрасферическим функциям рассматривал Когбетлянц[11]).

214. Имея в виду рассмотрение средних арифметических порядка k для ряда Лапласа, начнем со средних для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(\cos\gamma)$.

Так как

$$\frac{1-h^2}{(1-2h\cos\gamma+h^2)^{\frac{3}{2}}} = 1+3P_1(\cos\gamma)\,h+\ldots+(2n+1)P_n(\cos\gamma)\,h^n+\ldots,$$

то среднее арифметическое $\Sigma_n^{(k)}$ первых $n+1$ членов ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(\cos\gamma)$$

равно

$$\frac{S_n^{(k)}}{C_n^{(k)}},$$

где

$$C_n^{(k)} = \frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+n)}{n!}$$

совпадает с коэффициентом при h^n в разложении $\frac{1}{(1-h)^{k+1}}$, а $S_n^{(k)}$ есть коэффициент при h^n в произведении $\frac{1}{(1-h)^{k+1}}\cdot\frac{1-h^2}{(1-2h\cos\gamma+h^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Если $\frac{\mathfrak{S}_n^{(k)}}{C_n^{(k)}}$ обозначает среднее арифметическое порядка k ряда

$$1+2\cos\gamma+2\cos2\gamma+\ldots+2\cos n\gamma+\ldots,$$

то, так как

$$\frac{1}{(1-h)^{k+1}}\frac{1-h^2}{(1-2h\cos\gamma+h^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1-2h\cos\gamma+h^2)^{\frac{1}{2}}}\left\{\frac{1}{(1-h)^{k+1}}\,\frac{1-h^2}{1-2h\cos\gamma+h^2}\right\},$$

---

1) Compt. Rend., **146** (1908), 224; см. также Math. Ann., **67** (1909), **76**; Rend. Circ. Mat. Palermo, 38 (1914), 79.
2) Math. Ann., **74** (1913); 213; 75 (1914), 321.
3) Quart. Journ., 43 (1911), 1; Math. Ann., 75 (1912).
4) Rend. Circ. Mat. Palermo, 32 (1911), 132; см. **также** Math. Ann., **69** (1919).
5) Math. Zs., 14 (1922), 250.
6) Math. Zs., 5 (1919). 17; 8 (1920), 79.
7) Sitzungsber Akad. München (1921), 267.
8) Math. Zs., 14 (1922), 99.
9) Rend. Circ. Mat. Palermo, 33 (1912), 41.
10) Math. Zs., 24 (1925), 267.
11) Journ. de Liouville (IX), 3 (1924), 107.

получим соотношение

$$S_n^{(k)} = P_0(\cos\gamma)\,\mathfrak{S}_n^{(k)} + P_1(\cos\gamma)\,\mathfrak{S}_{n-1}^{(k)} + \ldots + P_n(\cos\gamma)\,\mathfrak{S}_0^{(k)}.$$

Для $k=1$ будем иметь

$$S_n^{(1)} = P_0(\cos\gamma)\,\mathfrak{S}_n^{(1)} + P_1(\cos\gamma)\,\mathfrak{S}_{n-1}^{(1)} + \ldots + P_n(\cos\gamma)\,\mathfrak{S}_0^{(1)}.$$

Но известно, что для ряда $1+2\cos\theta+2\cos 2\theta+\ldots+2\cos n\theta+\ldots$

$$\mathfrak{S}_n^{(1)} = \left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)\gamma}{\sin\frac{1}{2}\gamma}\right\}^2,$$

поэтому

$$S_n^{(1)} = P_0(\cos\gamma)\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)\gamma}{\sin\frac{1}{2}\gamma}\right\}^2 + P_1(\cos\gamma)\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}n\gamma}{\sin\frac{1}{2}\gamma}\right\}^2 + \ldots + P_n(\cos\gamma)\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\gamma}\right\}^2.$$

Так как $|P_n(\cos\gamma)| < \dfrac{k_1}{(n\sin\gamma)^{\frac{1}{2}}}$ для $0<\theta<\pi$, где k_1 — постоянная, не зависящая от θ и n $(n>0)$, то

$$|S_n^{(1)}| < \frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}\gamma}\,\frac{k_1}{\sin^{\frac{1}{2}}\gamma}\left\{\frac{1}{k_1}+\frac{1}{1^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}+\ldots+\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right\} <$$

$$< \frac{k_1}{\sin^2\frac{1}{2}\gamma\sin^{\frac{1}{2}}\gamma}\left\{\frac{1}{k_1}+\int_0^n\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}\right\} < \frac{k_2 n^{\frac{1}{2}}}{\sin^2\frac{1}{2}\gamma\sin^{\frac{1}{2}}\gamma},$$

где k_2 — постоянная, не зависящая от n и γ.

Далее, при $\frac{\pi}{2}\leqslant\gamma\leqslant\pi$ и $n>0$, так как $|P_n(\cos\gamma)|\leqslant 1$, имеем

$$\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}\gamma}\leqslant 2, \qquad |S_n^{(1)}| < 2(n+1).$$

Кроме того, $\left\{\dfrac{\sin\frac{1}{2}(n+1)\gamma}{\sin\frac{1}{2}\gamma}\right\}^2 \leqslant (n+1)^2$, поэтому при $0\leqslant\theta\leqslant\pi$

$$|S_n^{(1)}| \leqslant (n+1)^2+n^2+\ldots+2^2+1^2 < k_3 n^3.$$

Так как $C_n^{(1)} = n+1$, то мы видим, что $\sum_n^{(1)}(\gamma)$, частичная сумма $(C, 1)$ ряда $1+\sum(2n+1)P_n(\cos\gamma)$, для $n=1, 2, 3, \ldots$ удовлетворяет неравенствам

$$|\textstyle\sum_n^{(1)}(y)| < \begin{cases} k_3 n^2 & \text{при } 0\leqslant\gamma\leqslant\pi, \\ \dfrac{k_2}{n^{\frac{1}{2}}\sin^2\frac{1}{2}\gamma\sin^{\frac{1}{2}}\gamma} & \text{при } 0<\theta<\pi, \\ 2 & \text{при } \frac{1}{2}\pi\leqslant\gamma\leqslant\pi. \end{cases}$$

Чезаровская частичная сумма первого порядка ряда Лапласа равна

$$\frac{1}{4\pi}\int\int \Sigma_n^{(1)}(\gamma) f(\theta', \varphi') \sin\theta' d\theta' d\varphi',$$

где $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$ и интеграл берется по поверхности сферы. Введем, как и раньше, координаты $\gamma, \bar{\varphi}$, взяв в качестве начала точку (θ', φ'). Интегрирование по γ распространим отдельно на промежутки $(0, \varepsilon)$, $(\varepsilon, \pi-\varepsilon)$, и $(\pi-\varepsilon, \pi)$; по $\bar{\varphi}$ интеграл всюду берется в пределах от $-\pi$ до π. Записав

$$f(\theta', \varphi') \equiv F(\gamma, \bar{\varphi}),$$

мы сможем сказать, что второй интеграл по абсолютной величине будет меньше, чем

$$\frac{k_2}{4\pi n^{\frac{1}{2}}}\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}\int_{-\pi}^{\pi} |F(\gamma, \bar{\varphi})| \frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}\gamma \sin^{\frac{1}{2}}\gamma}\sin\gamma\, d\bar{\varphi}\, d\gamma,$$

что в свою очередь меньше, чем

$$\frac{k_2}{4\pi n^{\frac{1}{2}}}\int_{0}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F(\gamma, \bar{\varphi})| \sin\gamma\, d\bar{\varphi}\, d\gamma \times \frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}\varepsilon \sin^{\frac{1}{2}}\varepsilon}.$$

Таким образом, когда ε фиксировано, второй интеграл при $n\to\infty$ стремится к нулю, притом равномерно относительно (θ, φ) на всей сфере. Третий интеграл по абсолютной величине меньше, чем

$$2\frac{1}{4\pi}\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F(\gamma, \bar{\varphi})| \sin\gamma\, d\bar{\varphi}\, d\gamma,$$

а это выражение при достаточно малом ε будет меньше сколь угодно малого ζ_ε. При этом, когда $\varepsilon\to 0$, ζ_ε стремится к нулю равномерно относительно (θ, φ) в силу известного свойства интеграла Лебега, взятого по множеству e, стремиться к нулю равномерно относительно этих множеств, когда $m(e)\to 0$.

Нам остается рассмотреть интеграл

$$\frac{1}{4\pi}\int_{0}^{\varepsilon}\int_{-\pi}^{\pi} F(\gamma, \bar{\varphi}) \Sigma_n^{(1)}(\gamma)\sin\gamma d\bar{\varphi}\, d\gamma =$$

$$= \frac{A}{4\pi}\int_{0}^{\varepsilon}\int_{-\pi}^{\pi} \Sigma_n^{(1)}(\gamma)\sin\gamma d\bar{\varphi} d\gamma + \frac{1}{4\pi}\int_{0}^{\varepsilon}\int_{-\pi}^{\pi} \{F(\gamma, \bar{\varphi}) - A\}\, \Sigma_n^{(1)}(\gamma)\sin\gamma\, d\bar{\varphi}\, d\gamma,$$

где A — постоянная, которую мы можем приравнять значению $f(\theta, \varphi)$ в том случае, когда $f(\theta', \varphi')$ непрерывна в точке (θ, φ).

Подставив значение $S_n^{(1)}$ в выражение $\frac{S_n^{(1)}}{n+1}$ и воспользовавшись равенством $\int_0^\pi\int_{-\pi}^{\pi} P_n(\cos\gamma)\, d\bar{\varphi}\, d\gamma = 0$, справедливым для $n > 0$, получим

$$\int_0^\pi\int_{-\pi}^{\pi} \Sigma_n^{(1)}(\gamma)\sin\gamma d\bar{\varphi} d\gamma = \int_0^\pi\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)\gamma}{\sin\frac{1}{2}\gamma}\right)^2 \frac{d\bar{\varphi}\, d\gamma}{n+1}.$$

Выше мы показали, что для всех n

$$\left| \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \int_{-\pi}^{\pi} \Sigma_n^{(1)}(\gamma) \sin \gamma \, d\bar{\varphi} \, d\gamma \right| < \zeta'_{\varepsilon},$$

где $\zeta'_{\varepsilon} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, и

$$\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Sigma_n^{(1)}(\gamma) \sin \gamma \, d\bar{\varphi} \, d\gamma$$

стремится к нулю (последнее утверждение получим, положив $F(\gamma, \bar{\varphi}) = 1$). Поэтому

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \int_{0}^{\varepsilon} \int_{-\pi}^{\pi} \Sigma_n^{(1)}(\gamma) \sin \gamma \, d\bar{\varphi} \, d\gamma - 4\pi \right| < \zeta''_{\varepsilon},$$

где ζ''_{ε} стремится к нулю вместе с ε. Итак,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left\{ \frac{A}{4\pi} \int_{0}^{\varepsilon} \int_{-\pi}^{\pi} \Sigma_n^{(1)}(\gamma) \sin \gamma \, d\bar{\varphi} \, d\gamma \right\}$$

отличается от A на величину, стремящуюся к нулю вместе с ε.

Если $f(\theta', \varphi')$ непрерывна в точке (θ, φ), то $|F(\gamma, \bar{\varphi}) - A| < \delta_{\varepsilon}$ при $0 \leqslant \gamma \leqslant \varepsilon$, где δ_{ε} при $\varepsilon \to 0$ стремится к нулю.

При этом

$$\left| \frac{1}{4\pi} \int_{0}^{\varepsilon} \int_{-\pi}^{\pi} \{F(\gamma, \bar{\varphi}) - A\} \, \Sigma_n^{(1)}(\gamma) \sin \gamma \, d\bar{\varphi} \, d\gamma \right| < \frac{\delta_{\varepsilon}}{4\pi} \int_{0}^{\varepsilon} \int_{-\pi}^{\pi} \Sigma_n^{(1)}(\gamma) \sin \gamma \, d\bar{\varphi} \, d\gamma,$$

следовательно,

$$\frac{1}{4\pi} \int_{0}^{\varepsilon} \int_{-\pi}^{\pi} \{F(\gamma, \bar{\varphi}) - A\} \, \Sigma_n^{(1)}(\gamma) \sin \gamma \, d\bar{\varphi} \, d\gamma.$$

сколь угодно мало при достаточно малом ε.

Итак, доказано, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{1}{4\pi} \int_{0}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta', \varphi') \Sigma_n^{(1)}(\gamma) \sin \theta' \, d\varphi' \, d\theta' - f(\theta, \varphi) \right|$$

при достаточно малом ε сколь угодно мало, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4\pi} \int_{0}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta', \varphi') \, \Sigma_n^{(1)}(\gamma) \sin \theta' \, d\varphi' \, d\theta' = f(\theta, \varphi).$$

Кроме того, на всяком замкнутом множестве точек непрерывности функция f равномерно непрерывна, следовательно, это предельное соотношение выполняется на таком множестве равномерно.

Таким образом, доказана следующая принадлежащая Гронуоллу теорема:

Если функция $f(\theta, \varphi)$ на сфере абсолютно интегрируема (в смысле Лебега), то ее ряд Лапласа суммируем $(C, 1)$ к $f(\theta, \varphi)$ в любой точке непрерывности функции $f(\theta, \varphi)$.

Далее получен следующий результат:

Если функция $f(\theta, \varphi)$ на сфере абсолютно интегрируема (в смысле Лебега), то ее ряд Лапласа равномерно суммируем $(C, 1)$ к $f(\theta, \varphi)$ на любом замкнутом множестве точек непрерывности функции $f(\theta, \varphi)$.

215. Рассмотрим теперь случай, когда функция $f(\theta', \varphi')$ разрывна в точке (θ, φ). Выше мы показали, что ряд Лапласа в точке (θ, φ) суммируем $(C, 1)$ к числу A, если, когда $n \to \infty$,

$$\int_0^{\varepsilon} \int_{-\pi}^{\pi} \{f(\gamma, \bar{\varphi}) - A\} \sum\nolimits_n^{(1)}(\gamma) \sin\gamma \, d\bar{\varphi} \, d\gamma$$

становится сколь угодно малым при достаточно малом ε. Возьмем $\frac{1}{n} < \varepsilon$ и разобьем этот интеграл на два слагаемых, интегрируя по γ отдельно от 0 до $\frac{1}{n}$ и от $\frac{1}{n}$ до ε.

При этом рассматриваемый интеграл можно записать в виде

$$2\pi \left\{ \int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon} \right\} \{F_1(\gamma) - A\} \sum\nolimits_n^{(1)}(\gamma) \sin\gamma \, d\gamma,$$

где

$$F_1(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\gamma, \bar{\varphi}) \, d\bar{\varphi}.$$

Для интеграла, распространенного по первому промежутку, имеем

$$\left| \int_0^{\frac{1}{n}} \{F_1(\gamma) - A\} \sum\nolimits_n^{(1)}(\gamma) \sin\gamma \, d\gamma \right| <$$

$$< \int_0^{\frac{1}{n}} |F_1(\gamma) - A| \frac{1}{n} k_3 n^2 \, d\gamma <$$

$$< \frac{k_3}{t} \int_0^{t} |F_1(\gamma) - A| \, d\gamma,$$

где $t = \frac{1}{n}$. Таким образом, если $\int_0^t |F_1(\gamma) - A| \, d\gamma$ имеет в точке $t = 0$ производную, равную нулю, то

$$\int_0^{\frac{1}{n}} \{F_1(\gamma) - A\} \sum\nolimits_n^{(1)}(\gamma) \sin\gamma \, d\gamma$$

стремится к нулю при $n \to \infty$.

Далее имеем

$$\left| \int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon} \{F_1(\gamma) - A\} \sum\nolimits_n^{(1)}(\gamma) \sin\gamma \, d\gamma \right| \leqslant \frac{k_2}{n^{\frac{1}{2}}} \int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon} |F_1(\gamma) - A| \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2}\gamma} \sin^{\frac{1}{2}} \gamma \, d\gamma \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k_2'}{n^{\frac{1}{2}}} \int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon} |F_1(\gamma) - A| \frac{d\gamma}{\gamma^{\frac{3}{2}}}$$

и

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon} |F_1(\gamma) - A| \frac{d\gamma}{\gamma^{\frac{3}{2}}} = \left[\frac{1}{\gamma^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\gamma} |F_1(\gamma) - A| \, d\gamma\right]_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon} + \frac{3}{2} \int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon} \frac{1}{\gamma^{\frac{5}{2}}} \left\{ \int_0^{\gamma} |F_1(\gamma) - A| \, d\gamma \right\} d\gamma.$$

Если $\varphi(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \int_0^{\gamma} |F_1(\gamma) - A| \, d\gamma$ и $\int_0^{\gamma} |F_1(\gamma) - A| d\gamma$ имеет в точке $\gamma = 0$ производную, равную нулю, то функция $\varphi(\gamma)$ оказывается непрерывной в промежутке $(0, \varepsilon)$ и $\varphi(0) = 0$. При этом

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon} |F_1(\gamma) - A| \frac{d\gamma}{\gamma^{\frac{3}{2}}} = \left[\frac{\varphi(\gamma)}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\right]_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon} + \frac{3}{2} \int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon} \frac{\varphi(\gamma)}{\gamma^{\frac{3}{2}}} d\psi \leqslant \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + 3\delta\left(n^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\right),$$

если $\varphi(\gamma) < \delta$, когда $0 < \gamma \leqslant \varepsilon$. Отсюда, так как $n\varepsilon > 1$,

$$\left| \int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon} \{F_1(\gamma) - A\} \sum_n^{(1)}(\gamma) \sin\gamma \, d\gamma \right| < \varepsilon^{\frac{1}{2}} < k_2''\delta$$

при достаточно большом n.

Таким образом, когда n достаточно велико,

$$\left| \int_0^{\varepsilon} \{F_1(\gamma) - A\} \sum_n^{(1)}(\gamma) \sin\gamma \, d\gamma \right| < (k_3 + k_2'')\delta.$$

Так как ε и δ были выбраны произвольно, то

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \int_0^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{F_1(\gamma) - A\} \sum_n^{(1)}(\gamma) \sin\gamma \, d\bar{\varphi} \, d\gamma$$

сколь угодно мало, т. е.

$$\int_0^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{F_1(\gamma) - A\} \sum_n^{(1)}(\gamma) \sin\gamma \, d\bar{\varphi} \, d\gamma$$

стремится к нулю.

Таким образом, мы доказали теорему:

Если функция $f(\theta, \varphi)$ абсолютно интегрируема на сфере, то ее ряд Лапласа суммируем $(C, 1)$ к числу A, если

$$\int_0^{\varepsilon} |F_1(\gamma) - A| \, d\gamma = o(\varepsilon),$$

где

$$F_1(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\gamma, \bar{\varphi}) \, d\bar{\varphi}.$$

216. Для рассмотрения методов суммирования (C, k) с $0 < k < 1$ нам понадобится следующая лемма, впервые явно сформулированная Фейером:

Если $0 \leqslant p \leqslant 1$ и $\frac{1}{(1-z)^p} = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots$, то

$$|c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n| < \frac{H}{|1-z|^p},$$

где $n \geqslant 0$, $|z| < 1$, $z \neq 1$, а постоянная H не зависит от n и z, но зависит от p.

Так как $c_n = \frac{1}{n!} p(p+1)\ldots(p+n-1)$, то $c_0 \geqslant c_1 \geqslant c_2, \geqslant \ldots$; кроме того, $c_n < \frac{A}{n^{1-p}}$, где A не зависит от n.

Имеем

$$|(1-z)(c_{n+1}z^{n+1} + c_{n+2}z^{n+2} + \ldots + c_{m+1}z^{m+1})| =$$
$$= |c_{n+1}z^{n+1} + (c_{n+2} - c_{n+1})z^{n+2} + (c_{n+3} - c_{n+2})z^{n+3} + \ldots| <$$
$$< c_{n+1} + (c_{n+2} - c_{n+2}) + (c_{n+3} - c_{n+3}) + \ldots + c_{m+1} < 2c_{n+1},$$

откуда

$$|c_{n+1}z^{n+1} + c_{n+2}z^{n+2} + \ldots + c_{m+1}z^{m+1}| < \frac{2c_{n+1}}{|1-z|}.$$

Сначала положим $|1-z| \leqslant \frac{1}{n}$, тогда

$$|c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n| \leqslant c_0 + c_1 + \ldots + c_n < A\left(\frac{1}{1^{1-p}} + \frac{1}{2^{1-p}} + \ldots + \frac{1}{n^{1-p}}\right) <$$
$$< B_n^p < \frac{B}{|1-z|^p},$$

где A и B не зависят от n.

Если же $|1-z| > \frac{1}{n}$, то

$$|c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n| \leqslant \frac{1}{|1-z|^p} + |c_{n+1}z^{n+1} + \ldots| <$$
$$< \frac{1}{|1-z|^p} + \frac{2}{|1-z|}\,\frac{A}{n^{1-p}} < \frac{1}{|1-z|^p} + \frac{2A}{|1-z|^p}.$$

Таким образом, для $|z| \leqslant 1$

$$|c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n| < \frac{H}{|1-z|^p}.$$

Воспользуемся этой леммой для определения верхнего предела частичной чезаровской суммы ряда

$$1 + 2\cos\theta + 2\cos 2\theta + \ldots + 2\cos n\theta + \ldots$$

Докажем следующую теорему:

Для $0 \leqslant k \leqslant 1$ частичная чезаровская сумма $\mathfrak{S}_n^{(k)}$ порядка k ряда $1 + 2\cos\theta + 2\cos 2\theta + \ldots + 2\cos n\theta + \ldots$ при $0 < \theta \leqslant \pi$ удовлетворяет неравенству

$$|\mathfrak{S}_n^{(k)}(\theta)| < \frac{C}{n^k \theta^{1+k}},$$

где C не зависит от θ и n.

Результат этот, впервые полученный Чэпменом [1]), М. Рисс применил к вопросам суммирования рядов Фурье; ему же принадлежит приведенное здесь доказательство [2]).

Значение $\mathfrak{S}_n^{(k)}(\theta)$ равно деленному на $C_n^{(k)}$ коэффициенту при h^n в произведении $\frac{1}{(1-h)^{k+1}}$ на

$$1 + 2h\cos\theta + \ldots + 2h^n \cos n\theta$$

---

[1]) Quart. Journ. Math., 43 (1912), 27; см. также Math. Ann., 72 (1912), 211.

[2]) Acta Litt. ac Sci. Univ. Hungaricae Francisco-Josephinae, 1 (1923), 104.

(см. п. 214), иначе говоря, деленному на C_n^k коэффициенту при h^r в

$$\frac{1}{(1-h)^k}\{1+s_1h+\ldots+s_nh^n+\ldots\},$$

где $s_n=\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$ — обычная n-я частичная сумма.

Коэффициент при h^n может быть представлен как

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}\sum_{r=1}^{n}C_r^{(k-1)}e^{-ri\theta}\right\}.$$

Следовательно, согласно предыдущей лемме, его модуль $\leqslant\dfrac{1}{2\sin\frac{1}{2}\theta}\dfrac{H}{|1-e^{-i\theta}|^k}$.

Но $|1-e^{-i\theta}|^k=\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^k$, поэтому рассматриваемый модуль $\leqslant\dfrac{H}{\left(2\sin\frac{1}{2}\theta\right)^{k+1}}$,

т. е. $\leqslant\dfrac{H'}{\theta^{k+1}}$, где H' — постоянная, не зависящая от θ и n при $0<\theta\leqslant\pi$.

Так как

$$C_n^{(k)}=\frac{\Pi(k+n)}{\Pi(k)\,\Pi(n)}=\frac{n^k}{\Pi(k)}(1+\varepsilon_n),$$

где ε_n стремится к нулю вместе с $\frac{1}{n}$, то $|\mathfrak{S}_n^{(k)}(\theta)|<\dfrac{C}{n^k\theta^{k+1}}$, где C — постоянная, не зависящая от n и θ при $0<\theta\leqslant\pi$.

Обращаясь к п. 214, мы видим, что

$$S_n^{(k)}=P_0(\cos\theta)\,\mathfrak{S}_n^{(k)}+P_1(\cos\theta)\,\mathfrak{S}_{n-1}^{(k)}+\ldots+P_n(\cos\theta)\,\mathfrak{S}_0^{(k)}.$$

где $|\mathfrak{S}_{n-r}^{(k)}|<\dfrac{H_1}{\theta^{1+k}}$; H_1 не зависит от θ и r.

Поэтому

$$|S_n^{(k)}|\leqslant\frac{A}{(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{H_1}{\theta^{1+k}}\left\{\frac{1}{A}+\frac{1}{1^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}+\ldots+\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right\}\leqslant Bn^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\theta^{1+k}}\sin^{-\frac{1}{2}}\theta.$$

Следовательно, для $\sum_n^{(k)}$ — n-й частичной суммы k-го порядка ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(\cos\theta)$ имеем

$$\left|\sum\nolimits_n^{(k)}\right|\leqslant\frac{B_1}{n^{k-\frac{1}{2}}}\frac{1}{\theta^{1+k}\sin^{\frac{1}{2}}\theta},$$

где B_1 не зависит от n и θ при $0<\theta\leqslant\pi$. При $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ имеем также

$$|s_n^{(k)}|\leqslant 1+3+\ldots+(2n+1)\leqslant B_2n^2.$$

217. Рассмотрим n-ю частичную сумму k-го порядка ряда Лапласа для $\frac{1}{2}<k\leqslant 1$. Как в п. 214, вместо

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum\nolimits_n^{(k)}(\gamma)f(\theta',\varphi')\sin\gamma\,d\overline{\varphi}\,d\gamma$$

можно рассмотреть отдельно три интеграла I_1, I_2 и I_3 в которых интегрирование по γ производится соответственно в промежутках $(0, \varepsilon)$, $(\varepsilon, \pi-\varepsilon)$ и $(\pi-\varepsilon, \pi)$. Так же, как в п. 214, показывается, что I_2 при $n \to \infty$ стремится к нулю равномерно для всех (θ, φ).

Далее мы имеем

$$|I_3| \leqslant \frac{1}{4\pi} \frac{B_1}{n^{k-\frac{1}{2}}} \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(\theta', \varphi')|}{\gamma^{1+k} \sin^{\frac{1}{2}} \gamma} \sin\gamma \, d\bar{\varphi} \, d\gamma$$

в предположении, что интеграл в правой части существует. А это предположение равносильно требованию, чтобы был конечен интеграл

$$\iint \frac{|f(\theta', \varphi')|}{(\pi-\gamma)^{\frac{1}{2}}} \sin\gamma \, d\bar{\varphi} \, d\gamma,$$

распространенный на область

$$\pi-\varepsilon \leqslant \gamma \leqslant \pi, \qquad -\pi < \varphi \leqslant \pi,$$

которая окружает точку $\gamma = \pi$, противоположную точке $(0, \varphi)$. Когда это требование выполнено, интеграл I_3 при $n \to \infty$ стремится к нулю, и предел n-й частичной суммы порядка k зависит только от I_1.

Далее

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\varepsilon} F_1(\gamma) \textstyle\sum_n^{(k)} (\gamma) \sin\gamma \, d\gamma,$$

где, как и раньше, $F_1(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta', \varphi') \, d\bar{\varphi}$. Таким образом, предел $s_n^{(k)}$ зависит лишь от свойств $F_1(\gamma)$ в окрестности точки (θ, φ), в которой $\gamma = 0$.

Запишем I_1 в виде

$$\frac{A}{4\pi} \int_0^{\varepsilon} \int_{-\pi}^{\pi} \textstyle\sum_n^{(k)} \gamma \sin\gamma \, d\bar{\varphi} \, d\gamma + \frac{1}{4\pi} \int_0^{\varepsilon} \int_{-\pi}^{\pi} \{F(\gamma, \bar{\varphi}) - A\} \sum_n^{(k)} (\gamma) \sin\gamma \, d\bar{\varphi} \, d\gamma,$$

где, так же как и в п. 215, A — постоянная, равная $f(0, \varphi)$ в том случае, когда f непрерывна в точке (θ, φ). Так как $\sum_n^{(k)}(\gamma)$ выражается линейно через функции Лежандра $P_r(\cos\gamma)$, то

$$\frac{A}{4\pi} \int_0^{\varepsilon} \int_{-\pi}^{\pi} \textstyle\sum_n^{(k)} (\gamma) \sin\gamma \, d\bar{\varphi} \, d\gamma = A.$$

Кроме того,

$$\left| \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \int_{-\pi}^{\pi} \textstyle\sum_n^{(k)} (\gamma) \sin\gamma \, d\bar{\varphi} \, d\gamma \right| < \zeta'_\varepsilon,$$

где $\zeta'_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, и

$$\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi} \textstyle\sum_n^{(k)} (\gamma) \sin\gamma \, d\gamma$$

при $n \to \infty$ стремится к нулю. Последнее можно обнаружить, положив $F(\gamma, \bar{\varphi}) = 1$; при этом сформулированное выше условие в точке $\gamma = \pi$, очевидно, выполняется. Таким образом,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{A}{4\pi} \int_0^{\varepsilon} \int_{-\pi}^{\pi} \textstyle\sum_n^{(k)} (\gamma) \sin\gamma \, d\bar{\varphi} \, d\gamma - A \right| < \frac{A}{4\pi} \zeta'_\varepsilon.$$

Если $f(\theta', \varphi')$ непрерывна в точке (θ, φ), то $|F(\gamma, \bar{\varphi}) - A| < \delta_\varepsilon$ при $0 \leqslant \gamma \leqslant \varepsilon$, где $\delta_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. При этом

$$\left|\frac{1}{4\pi}\int_0^\varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} \{F(\gamma, \bar{\varphi}) - A\} \textstyle\sum_n^{(k)}(\gamma) \sin\gamma \, d\bar{\varphi}\, d\gamma\right| <$$

$$< \frac{\delta_\varepsilon}{4\pi}\int_0^\varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} \textstyle\sum_n^{(k)}(\gamma) \sin\gamma \, d\bar{\varphi}\, d\gamma < \frac{\delta_\varepsilon}{4\pi}(1 + \zeta_\varepsilon).$$

Отсюда следует, что

$$\left|\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_0^\pi \int_{-\pi}^{\pi} \{F(\gamma, \bar{\varphi}) - A\} \textstyle\sum_n^{(k)}(\gamma) \sin\gamma \, d\bar{\varphi}\, d\gamma\right|$$

меньше некоторого числа, сколь угодно малого при достаточно малом ε. Итак,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \int_{-\pi}^{\pi} \{F(\gamma, \bar{\varphi}) - A\} \textstyle\sum_n^{(k)}(\gamma) \sin\gamma \, d\bar{\varphi}\, d\gamma = 0.$$

Если же $f(\theta', \varphi')$ в точке (θ, φ) разрывна, то, представив

$$\frac{1}{2}\int_0^\varepsilon \{F_1(\gamma) - A\} \textstyle\sum_n^{(k)}(\gamma) \sin\gamma \, d\gamma$$

в виде суммы двух слагаемых, соответствующих промежуткам интегрирования от 0 до $\frac{1}{n}$ и от $\frac{1}{n}$ до ε, где $\frac{1}{n} < \varepsilon$, получим, что абсолютная величина первого слагаемого меньше

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{n}} |F_1(\gamma) - A| \frac{B_2 n^2}{n} d\gamma;$$

последнее выражение при $n \to \infty$ стремится к нулю, если

$$\int_0^t |F_1(\gamma) - A|\, d\gamma = o(t).$$

Второе слагаемое по абсолютной величине

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon} |F_1(\gamma) - A| \frac{1}{n^{k-\frac{1}{2}}} \frac{1}{\gamma^{1+k}} \frac{\sin\gamma}{\sin^{\frac{1}{2}}\gamma} d\gamma$$

или

$$\leqslant \frac{L}{n^{k-\frac{1}{2}}}\int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon} |F_1(\gamma) - A| \frac{1}{\gamma^{k+\frac{1}{2}}} d\gamma;$$

где L — некоторое фиксированное число, не зависящее от n и ε.

Далее имеем

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon} |F_1(\gamma)-A| \frac{d\gamma}{\gamma^{k+\frac{1}{2}}} = \left[\frac{1}{\gamma^{k+\frac{1}{2}}} \int_0^{\gamma} |F_1(\gamma)-A|\, d\gamma\right]_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon} +$$

$$+\left(k+\frac{1}{2}\right)\int_{\frac{1}{n}}^{\gamma} \frac{1}{\gamma^{k+\frac{3}{2}}}\left\{\int_0^{\gamma} |F_1(\gamma)-A|\, d\gamma\right\} d\gamma.$$

Функция $\varphi(\gamma) = \frac{1}{\gamma}\int_0^{\gamma} |F_1(\gamma)-A|\, d\gamma$ непрерывна в промежутке $(0, \varepsilon)$, причем $\varphi(0)=0$, если $\int_0^{\gamma} |F_1(\gamma) - A|\, d\gamma$ имеет в точке $\gamma=0$ производную, равную нулю. Тогда при $k>\frac{1}{2}$

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon} |F_1(\gamma)-A| \frac{d\gamma}{\gamma^{k+\frac{1}{2}}} = \left[\frac{\varphi(\gamma)}{\gamma^{k+\frac{1}{2}}}\right]_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon} + \left(k+\frac{1}{2}\right)\int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon} \frac{\varphi(\gamma)}{\gamma^{k+\frac{1}{2}}}\, d\gamma <$$

$$< \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon^{k-\frac{1}{2}}} + \frac{2k+1}{2k-1}\left(\varepsilon^{k-\frac{1}{2}} - \frac{1}{n^{k-\frac{1}{2}}}\right)\delta,$$

если $\varphi(\gamma)<\delta$ при $0<\gamma\leqslant\varepsilon$.

Отсюда, когда n достаточно велико,

$$\left|\int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon} \{F_1(\gamma)-A\} \sum\nolimits_n^{(k)}(\gamma) \sin\gamma\, d\gamma\right| < k''\delta$$

и

$$\left|\int_0^{\varepsilon} \{F_1(\gamma)-A\} \sum\nolimits_n^{(k)}(\gamma) \sin\gamma\, d\gamma\right| < (k_3+k_3'')\,\delta.$$

Таким образом,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_0^{\pi} \{F_1(\gamma)-A\} \sum\nolimits_n^{(k)}(\gamma) \sin\gamma\, d\gamma$$

сколь угодно мало и

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \{F_1(\gamma,\bar{\varphi})-A\} \sum\nolimits_n^{(k)}(\gamma) \sin\gamma\, d\bar{\varphi}\, d\gamma = 0.$$

Мы доказали теорему:

Если $f(\theta,\varphi)$ абсолютно интегрируема (в смысле Лебега) на поверхности сферы, то для значений k в промежутке $\frac{1}{2}<k<1$ ее ряд Лапласа в точке (θ,φ) суммируем (C, k) к числу A, в предположении, что

$$\int_0^{\gamma} |F_1(\gamma)-A|\, d\gamma = o(\gamma)$$

и существует интеграл $\iint \frac{|f(\theta', \varphi')|}{(\pi-\gamma)^{\frac{1}{2}}} \sin\gamma\, d\gamma\, d\bar{\varphi}$, *взятый по малой окрестности точки* $\gamma=\pi$, *противоположной точке* (θ, φ).

Условие $\int_0^\gamma |F_1(\gamma) - A|\, d\gamma = o(\gamma)$ выполняется, в частности тогда, когда $A = f(\theta, \varphi)$, а (θ, φ) — точка непрерывности функции $f(\theta', \varphi')$. Одно это условие, впрочем, для суммируемости (C, k) $\left(\frac{1}{2} < k < 1\right)$ недостаточно, нужно еще сформулированное выше условие вблизи точки, противоположной (θ, φ) на поверхности сферы. Последнее заведомо выполняется в том случае, когда функция $f(\theta', \varphi')$ ограничена в окрестности точки $\gamma=\pi$ или хотя бы удовлетворяет неравенству $|f(\theta', \varphi'| \leqslant \frac{K}{(\pi-\gamma)^s}$ с $s < \frac{1}{2}$. Другие достаточные условия указал Когбетлянц.

Примеры

1. Если функция $(\pi-\gamma)^s f(\theta', \varphi')$ при некотором $s > \frac{3}{2}$ регулярна в окрестности точки $\gamma=\pi$, противоположной (θ, φ), а $f(\theta', \varphi')$ непрерывна в точке (θ, φ), то ряд Лапласа суммируем (C, k) лишь при $k > s-1$ (предполагается, что $k < 1$).

2. Если функция $(1+x)^{\frac{1}{2}(k-1)} f(x)$, где $\frac{1}{2} < k < 1$, абсолютно интегрируема в промежутке $(-1, 1)$, то ряд Лежандра функции $f(x)$ в точке 1 суммируем (C, k) к $f(1-0)$, если только такой предел существует.

3. Если $f(x)$ абсолютно интегрируема в промежутке $(-1, 1)$ и вблизи точки $x=-1$ $f(x) = \frac{A}{(1+x)^s}$, где $s \leqslant \frac{3}{4}$, то ее ряд Лежандра в точке $x=1$ суммируем (C, k) при любом $k > \frac{1}{2}$. Если же $s > \frac{3}{4}$, то суммируемость (C, k) имеет место лишь при $2s-1 < k < 1$.

4. Каково бы ни было $k < \frac{1}{2}$, существует функция, непрерывная на всей сфере, ряд Лапласа которой не суммируем (C, k) в заданной наперед точке.

Пусть

$$f(\theta) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{2}}}{n^2} \{P_{n!}(\cos\theta) - P_{n!+2}(\cos\theta)\};$$

этот ряд сходится при $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ абсолютно и равномерно, поэтому $f(\theta)$ непрерывна; кроме того, $f(0) = f(\pi) = 0$. Ряд Лежандра функции $f(\theta)$ есть

$$0 + 0 + \frac{(2!)^{\frac{1}{2}}}{2^2} P_2(\cos\theta) - \frac{(2!)^{\frac{1}{2}}}{2^2} P_4(\cos\theta) + 0 + \frac{(3!)^{\frac{1}{2}}}{3^2} P_6(\cos\theta +) \ldots$$

При $\theta=0$ и $\theta=\pi$ он не сходится и не суммируем (C, k) ни при каком $k < \frac{1}{2}$. Банерджи установил, что он суммируем (C, 1).

5. Если $a_0 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 0$, то для $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + \ldots + a_n P_n(x) > 0;$$

в частности,

$$P_0(x) + P_1(x) + \ldots + P_n(x) > 0.$$

[Fejér. Acta Litt. Univ. Hungariae Francisco-Josephinae, 2 (1924—1926), 82].

Глава VIII

ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЛЕЖАНДРА

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

218. В п. 89 мы установили следующее свойство функций $P_n(\mu)$ для целых положительных n:

$$P_n(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\varphi) =$$
$$= P_n(\cos\theta)\, P_n(\cos\theta') + 2\sum_{m=1}^{n} \frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)} P_n^m(\cos\theta)\, P_n^m(\cos\theta')\cos m\varphi.$$

и назвали его теоремой сложения для функции $P_n(\mu)$. В настоящей главе эта теорема будет обобщена на функции $P_n(\mu)$ с любым действительным или комплексным n от аргумента μ, могущего также принимать комплексные значения. Мы рассмотрим также теоремы сложения для функций Лежандра второго рода при любых значениях степени и аргумента. Предварительно мы изложим результаты Якоби [1]), касающиеся интеграла

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{A + B\cos\psi + C\sin\psi}$$

с комплексными A, B, C. Положив $u = e^{i\psi}$, запишем уравнение $A + B\cos\psi + B\sin\psi = 0$ в виде

$$(B - iC)\, u^2 + 2Au + (B + iC) = 0.$$

Корни этого последнего уравнения

$$u_1 = \frac{-A - (A^2 - B^2 - C^2)^{\frac{1}{2}}}{B - iC}, \quad u_2 = \frac{-A + (A^2 - B^2 - C^2)^{\frac{1}{2}}}{B - iC}$$

удовлетворяют соотношениям

$$u_1 u_2 = \frac{B + iC}{B - iC}, \qquad (B - iC)(u_2 - u_1) = 2(A^2 - B^2 - C^2)^{\frac{1}{2}}.$$

В том случае, когда $|u_1|$ или $|u_2|$ равно 1, выражение $A + B\cos\psi + C\sin\psi$ обращается в нуль при некотором действительном значении ψ и рассматриваемый интеграл не существует.

Запишем подинтегральное выражение в виде

$$\frac{1}{(A^2 - B^2 - C^2)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{u_1}{u_1 - u} - \frac{u_2}{u_2 - u} \right).$$

Если $|u_2| > 1$, то разложим $\frac{u_2}{u_2 - u}$ в равномерно сходящийся ряд

$$1 + \frac{u}{u_2} + \frac{u^2}{u_2^2} + \ldots,$$

[1]) Journ. Math., 32 (1846), 8—13. Результаты эти изложены у Гейне (Kugelfunktionen, т. I, 1878, стр. 27—31).

если же $|u_2| < 1$, то в ряд

$$-\frac{u_2}{u}\left(1+\frac{u_2}{u}+\frac{u_2^2}{u^2}+\ldots\right),$$

также равномерно сходящийся; случай $|u_2|=1$ был уже отмечен. С дробью $\frac{u_1}{u_1-u}$ поступаем точно так же.

Если одновременно $|u_1|>1$ и $|u_2|>1$ или $|u_1|<1$ и $|u_2|<1$, то подинтегральное выражение представляется в виде ряда по косинусам и синусам целых кратных ψ. Постоянного члена в этом ряду нет, и ряд сходится равномерно, поэтому сам интеграл равен нулю. При $|u_1|>1$, $|u_2|<1$ интеграл равен $\frac{2\pi}{(A^2-B^2-C^2)^{\frac{1}{2}}}$, где знак корня выбирается так, чтобы выполнялось неравенство $|A-(A^2-B^2-C^2)^{\frac{1}{2}}|<|B-iC|$.

Когда $|u_1|$ или $|u_2|$ равно 1, интеграл не существует.

Мы пришли к следующему результату:

Интеграл

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{A+B\cos\psi+C\sin\psi}$$

не имеет смысла в том случае, когда

$$|A+(A^2-B^2-C^2)^{\frac{1}{2}}|=|B-iC|,$$

или

$$|A-(A^2-B^2-C^2)^{\frac{1}{2}}|=|B-iC|.$$

Он равен нулю, если $|A+(A^2-B^2-C^2)^{\frac{1}{2}}|$ *и* $|A-(A^2-B^2-C^2)^{\frac{1}{2}}|$ *оба больше или оба меньше* $|B-iC|$. *Если же один из этих модулей больше, а другой меньше* $|B-iC|$, *то интеграл равен* $\frac{2\pi}{(A^2-B^2-C^2)^{\frac{1}{2}}}$, *где знак корня выбирается так, чтобы выполнялось неравенство*

$$|A-(A^2-B^2-C^2)^{\frac{1}{2}}|<|B-iC|.$$

219. Якоби выразил условия этой теоремы в более симметричной форме, пользоваться которой в отдельных случаях бывает проще.

Если положить $A=x+ix'$, $B=y+iy'$, и $C=z+iz'$, то уравнение $A+B\cos\psi+C\sin\psi=0$ при действительных ψ оказывается равносильным двум следующим

$$x+y\cos\psi+z\sin\psi=0, \qquad x'+y'\cos\psi+z'\sin\psi=0.$$

Последние в свою очередь равносильны уравнениям

$$\frac{\cos\psi}{zx'-z'x}=\frac{\sin\psi}{xy'-x'y}=\frac{1}{yz'-y'z},$$

если только $yz'-y'z$, $zx'-z'x$ и $xy'-x'y$ не обращаются одновременно в нуль, что происходит тогда, когда A, B и C пропорциональны действительным числам x, y и z. Таким образом, в том случае, когда подинтегральное выражение становится бесконечным при некотором действительном значении ψ, выполняется условие

$$(yz'-y'z)^2=(zx'-z'x)^2+(xy'-x'y)^2.$$

Если же оно выполняется и, кроме того, $\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}$, то рассматриваемый интеграл существует и значение его пропорционально интегралу

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{x+y\cos\psi+z\sin\psi}.$$

Последний, согласно п. 16, при $x^2>y^2+z^2$ равен

$$\frac{2\pi}{(A^2-B^2-C^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Для простоты положим $x=1$, $x'=0$, $y=\beta$, $y'=\beta'$, $z=\gamma$, $z'=\gamma'$; тогда наш интеграл запишется так:

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{1+(\beta+i\beta')\cos\psi+(\gamma+i\gamma')\sin\psi}.$$

Обозначим $\{1-(\beta+i\beta')^2-(\gamma+i\gamma')^2\}^{\frac{1}{2}}=n-in'$, при этом выберем то значение квадратного корня, при котором $n>0$. Тогда

$$|B+iC|^2=|\beta+i\beta'+i(\gamma+i\gamma')|^2=(\beta-\gamma')^2+(\beta'+\gamma)^2=$$
$$=\beta^2+\beta'^2+\gamma^2+\gamma'^2-2(\beta\gamma'-\beta'\gamma),$$
$$|B-iC|^2=\beta^2+\beta'^2+\gamma^2+\gamma'^2+2(\beta\gamma'-\beta'\gamma)$$

и

$$|B^2+C^2|^2=(\beta^2+\beta'^2+\gamma^2+\gamma'^2)^2-4(\beta\gamma'-\beta'\gamma)^2.$$

Далее, так как $(n-in')^2=1-B^2-C^2$, мы имеем

$$|B^2+C^2|^2=|1-n+in'|^2|1+n-in'|^2=(1+n^2+n'^2)^2-4n^2.$$

Следовательно,

$$(\beta^2+\beta'^2+\gamma^2+\gamma'^2)^2-4(\beta\gamma'-\beta'\gamma)^2=(1+n^2+n'^2)^2-4n^2,$$

откуда видно, что $\beta^2+\beta'^2+\gamma^2+\gamma'^2\gtrless 1+n^2+n'^2$ соответственно при $|\beta\gamma'-\beta'\gamma|\gtrless n$.

Далее

$$n^2-n'^2=1-\beta^2-\gamma^2+\beta'^2+\gamma'^2,\qquad nn'=\beta\beta'+\gamma\gamma',$$

отсюда вытекает, что

$$\{(\beta\gamma'-\beta'\gamma)^2+n'^2\}\{(\beta\gamma'-\beta'\gamma)^2-n^2\}=$$
$$=\{(\beta\gamma'-\beta'\gamma)^2+\beta^2+\gamma^2\}\{(\beta\gamma'-\beta'\gamma)^2-\beta'^2-\gamma'^2\},$$

следовательно, $|\beta\gamma'-\beta'\gamma|\gtrless n$ соответственно при

$$|\beta\gamma'-\beta'\gamma|^2\gtrless\beta'^2+\gamma'^2.$$

Таким образом, при $(\beta\gamma'-\beta'\gamma)^2-\beta'^2-\gamma'^2\gtrless 0$ имеем соответственно

$$\beta^2+\beta'^2+\gamma^2+\gamma'^2\gtrless 1+n^2+n'^2.$$

Не ограничивая общности, можно предположить, что $\beta\gamma'-\beta'\gamma>0$. В самом деле, если это выражение окажется отрицательным, мы вместо ψ возьмем $2\pi-\psi$. Пределы интегрирования при этом останутся такими же, β и β' не изменятся, а γ и γ' изменят знаки.

В принятых обозначениях

$$|u_1|^2=\left|\frac{(n+1)^2+n'^2}{\beta^2+\beta'^2+\gamma^2+\gamma'^2+2(\beta\gamma'-\beta'\gamma)}\right|,$$
$$|u_2|^2=\left|\frac{(n-1)^2+n'^2}{\beta^2+\beta'^2+\gamma^2+\gamma'^2+2(\beta\gamma'-\beta'\gamma)}\right|,$$

причем $|u_1|^2>|u_2|^2$ в силу того, что $n>0$.

При $(\beta\gamma'-\beta'\gamma)^2\gtrless\beta'^2+\gamma'^2$ имеем соответственно

$$\beta\gamma'-\beta'\gamma\gtrless n,$$
$$\beta^2+\beta'^2+\gamma^2+\gamma'^2\lessgtr 1+n^2+n'^2$$

и, следовательно,

$$|u_1|^2\lessgtr 1.$$

Если $|u_1|^2<1$, то $|u_2|^2<1$ и интеграл равен нулю. Так как

$$|u_1u_2|=\left|\frac{\beta+i\beta'+i(\gamma+i\gamma')}{\beta+i\beta-i(\gamma+i\gamma')}\right|,$$

то

$$|u_1u_2|^2=\frac{(\beta-\gamma')^2+(\beta'+\gamma)^2}{(\beta+\gamma')^2+(\beta'-\gamma)^2}=\frac{\beta^2+\beta'^2+\gamma^2+\gamma'^2-2(\beta\gamma'-\beta'\gamma)}{\beta^2+\beta'^2+\gamma^2+\gamma'^2+2(\beta\gamma'-\beta'\gamma)},$$

и, следовательно, $|u_1u_2|^2<1$. Отсюда при $|u_1|^2>1$ имеем $|u_2|^2<1$, поэтому интеграл равен $2\pi(1-B^2-C^2)^{-\frac{1}{2}}$, причем действительная часть этого квадратного корня положительна.

Мы показали, что при $(\beta\gamma'-\beta'\gamma)^2>$ или $<\beta'^2+\gamma'^2$ рассматриваемый интеграл равен соответственно нулю или $2\pi(1-B^2-C^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Если вместо B и C взять соответственно $\frac{B}{A}$ и $\frac{C}{A}$, то условия $(\beta\gamma'-\beta'\gamma)^2\gtrless\beta'^2+\gamma'^2$ преобразуются в

$$(yz'-y'z)^2\gtrless(zx'-z'x)^2+(xy'-x'y)^2,$$

но теперь $A=x+ix'$, $B=y+iy'$, $C=z+iz'$.

Итак, мы приходим к следующему выводу:

При $A=x+ix'$, $B=y+iy'$, $C=z+iz'$ *интеграл*

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{A+B\cos\psi+C\sin\psi}$$

не существует, если $(yz'-y'z)^2=(zx'-z'x)^2+(xy'-x'y)^2$, *за исключением случая, когда* $\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}$. *Если последние равенства выполняются, то при* $x^2-y^2-z^2>0$ *рассматриваемый интеграл равен* $2\pi(A^2-B^2-C^2)^{-\frac{1}{2}}$.

При $(yz'-y'z)^2>(zx'-z'x)^2+(xy'-x'y)^2$ *этот интеграл равен нулю.*

При $(yz'-y'z)^2<(zx'-z'x)^2+(xy'-x'y)^2$ *этот интеграл равен* $\frac{2\pi}{(A^2-B^2-C^2)^{\frac{1}{2}}}$, *причем берется то значение квадратного корня, при котором*

$$\left|A-(A^2-B^2-C^2)^{\frac{1}{2}}\right|<|B-iC|.$$

Полученный результат может быть использован для вычисления интегралов

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos m\psi\,d\psi}{A+B\cos\psi+C\sin\psi},\qquad\int_0^{2\pi}\frac{\sin m\psi\,d\psi}{A+B\cos\psi+C\sin\psi}$$

с целым положительным m.

В этом направлении мы имеем следующий результат, принадлежащий Якоби:

Если $(yz'-y'z)^2 > (zx'-z'x)^2+(xy'-x'y)^2$, *то*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos m\psi}{A+B\cos\psi+C\sin\psi}\,d\psi = i\int_0^{2\pi} \frac{\sin m\psi}{A+B\cos\psi+C\sin\psi}\,d\psi = \pi\frac{u_1^m-u_2^m}{(A^2-B^2-C^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Если $(yz'-y'z)^2 < (zx'-z'x)^2+(xy'-x'y)^2$, *то*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos m\psi}{A+B\cos\psi+C\sin\psi} = \pi\frac{u_2^{-m}+u_1^m}{(A^2-B^2-C^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin m\psi}{A+B\cos\psi+C\sin\psi}\,d\psi = i\pi\frac{u_2^{-m}-u_1^m}{(A^2-B^2-C^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

В этих равенствах m целое положительное; знак квадратного корня определяется так же, как в предыдущей теореме.

§ 2. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИИ $P_n(\mu)$

220. Пусть μ и μ' две точки комплексной плоскости μ, не попадающие на разрез, произведенный вдоль действительной оси от 1 до $-\infty$, и такие, что $\operatorname{Re}(\mu)>0$, $\operatorname{Re}(\mu')>0$. Мы докажем следующую теорему: *При* $\operatorname{Re}(\mu)>0$ *и* $\operatorname{Re}(\mu')>0$ *ряд*

$$P_n(\mu)\,P_n(\mu')+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m\,\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}\,P_n^m(\mu)\,P_n^m(\mu')\cos m\varphi$$

сходится к $P_n(\mu\mu'-\sqrt{\mu^2-1}\sqrt{\mu'^2-1}\cos\varphi)$ *равномерно относительно* φ, *принимающего всевозможные действительные значения; индекс n при этом произволен.*

Если n целое, то ряд сводится к конечной сумме, в которой m пробегает значения от 1 до n.

Этот ряд, как вытекает из формулы (33) гл. V, может быть записан в виде

$$P_n(\mu)\,P_n(\mu')+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m P_n^m(\mu)P_n^{-m}(\mu')\cos m\varphi.$$

Разлагая в ряды Фурье выражения

$$\{\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos(\psi-\varphi\}^n,\quad (\mu'+\sqrt{\mu'^2-1}\cos\psi)^{-n-1},$$

мы, согласно п. 185, получим, так как $\operatorname{Re}(\mu)>0$ и $\operatorname{Re}(\mu')>0$,

$$P_n(\mu)+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Pi(n)}{\Pi(n+m)}P_n^m(\mu)\cos m(\psi-\varphi),$$

$$P_n(\mu')+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Pi(-n-1)}{\Pi(m-n-1)}P_n^m(\mu')\cos m\psi.$$

При целом положительном n первый ряд обрывается на конечном числе членов.

В п. 185 было показано также, что этот ряд сходится равномерно относительно φ и ψ; при этом значение n произвольно.

Согласно теореме Парсеваля, ряд

$$2P_n(\mu)\,P_n(\mu')+4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m\,\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}P_n^m(\mu)\,P_n^m(\mu')\cos m\varphi$$

сходится к

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\{\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos(\psi-\varphi)\}^n}{(\mu'+\sqrt{\mu'^2-1}\cos\psi)^{n+1}}\,d\varphi.$$

Сходимость этого ряда равномерна относительно φ. В самом деле,

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left\{2\sum_{m_1}^{m_1+r}\frac{\Pi(n)}{\Pi(n+m)}P_n^m(\mu)\cos m(\psi-\varphi)\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\left\{2\sum_{m_1}^{m_1+r}\frac{\Pi(-n-1)}{\Pi(m-n-1)}P_n^m(\mu')\cos m\psi\right\}d\psi\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}\left|2\sum_{m_1}^{m_1+r}\frac{\Pi(n)}{\Pi(n+m)}P_n^m(\mu)\cos m(\psi-\varphi)\right|\times$$

$$\times\left|2\sum_{m_1}^{m_1+r}\frac{\Pi(-n-1)}{\Pi(m-n-1)}P_n^m(\mu')\cos m\psi\right|d\psi.$$

Так как оба ряда в правой части сходятся равномерно, то при достаточно большом m_1 вся правая часть $<2\pi\varepsilon^2$ для всех φ, где ε — произвольным образом фиксированное положительное число. Выражение в левой части равно

$$\left|4\pi\sum_{m_1}^{m_1+r}\frac{(-1)^m\,\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}P_n^m(\mu)\,P_n^m(\mu')\cos m\varphi\right|,$$

следовательно, рассматриваемый ряд сходится равномерно относительно φ.

Если точки $\mu+\sqrt{\mu^2-1}$ и $\mu-\sqrt{\mu^2-1}$ обозначить P и Q, а точки $\mu'+\sqrt{\mu'^2-1}$ и $\mu'-\sqrt{\mu'^2-1}$ — P' и Q', то точки $\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos(\psi-\varphi)$ и $\mu'+\sqrt{\mu'^2-1}\cos\psi$, которые мы обозначим R и R', попадут соответственно на отрезки PQ и $P'Q'$. Следовательно, если O — нулевая точка, то

$$\left|\frac{\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos(\psi-\varphi)}{\mu'-\sqrt{\mu'^2-1}\cos\psi}\right|=\left|\frac{OR}{OR'}\right|.$$

Выражение в левой части последнего равенства при всех φ и ψ окажется заключенным в промежутке, ограниченном наименьшим и наибольшим из четырех чисел

$$\left|\frac{OP}{OP'}\right|,\quad\left|\frac{OP}{OQ'}\right|,\quad\left|\frac{OQ}{OP'}\right|,\quad\left|\frac{OQ}{OQ'}\right|.$$

Таким образом, множество значений

$$\frac{\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos(\psi-\varphi)}{\mu'+\sqrt{\mu'^2-1}\cos\psi}$$

при всевозможных φ и ψ лежит на положительном расстоянии от нуля. При фиксированном φ все точки $\frac{OR}{OR'}$ попадают внутрь некоторого контура S, такого, что точки пересечения его с действительной осью лежат правее нуля, а нуль оказывается вне S.

Займемся теперь преобразованием интеграла

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\{\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos(\psi-\varphi)\}^n}{(\mu'+\sqrt{\mu'^2-1}\cos\psi)^{n+1}}\,d\psi,$$

в котором φ фиксировано произвольным образом. По теореме Коши имеем

$$\left(\frac{\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos(\psi-\varphi)}{\mu'+\sqrt{\mu'^2-1}\cos\psi}\right)^n = \frac{1}{2\pi i}\int_{(S)} \frac{h^n}{h-\dfrac{\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos(\psi-\varphi)}{\mu'+\sqrt{\mu'^2-1}\cos\psi}}\,dh,$$

следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\{\mu+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\psi-\varphi)\}^n}{\{\mu'+(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\psi\}^{n+1}}\,d\psi = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} d\psi \int_{S} \frac{h^n}{A+B\cos\psi+C\sin\psi}\,d\psi,$$

где

$$A = h\mu'-\mu,\quad B = h(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}}-(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi,\quad C = -(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\sin\varphi.$$

Так как модуль подинтегральной функции в правой части ограничен, то можно изменить порядок интегрирования, при этом получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\{\mu+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\psi-\varphi)\}^n}{\{\mu'+(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\psi\}^{n+1}}\,d\psi = \frac{1}{2\pi i}\int_{(S)} h^n dh \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\psi}{A+B\cos\psi+C\sin\psi}.$$

Мы видим, что

$$A^2-B^2-C^2 = 1-2h\zeta+h^2,$$

где

$$\zeta = \mu\mu'-(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi.$$

Интеграл в правой части вычисляем с помощью теоремы Якоби, изложенной в п. 219.

Пусть $\mu = \operatorname{ch}(\xi+i\eta)$, $\mu' = \operatorname{ch}(\xi'+i\eta')$, где $\xi \geqslant 0$, $-\frac{\pi}{2} < \eta < \frac{\pi}{2}$, $\xi' \geqslant 0$, $-\frac{\pi}{2} < \eta' < \frac{\pi}{2}$, в силу того, что $\operatorname{Re}(\mu) > 0$, $\operatorname{Re}(\mu') > 0$.

Обозначив $A = x+ix'$, $B = y+iy'$, $C = z+iz'$, где x, x', y, y', z, z' действительны, мы увидим, что при $h = h_1+ik_1$ с действительными h_1, k_1

$$\begin{aligned}
x &= h_1\operatorname{ch}\xi'\cos\eta' - k_1\operatorname{sh}\xi'\sin\eta' - \operatorname{ch}\xi\cos\eta,\\
x' &= h_1\operatorname{sh}\xi'\sin\eta' + k_1\operatorname{ch}\xi'\cos\eta' - \operatorname{sh}\xi\sin\eta,\\
y &= h_1\operatorname{sh}\xi'\cos\eta' - k_1\operatorname{ch}\xi'\sin\eta' - \operatorname{sh}\xi\cos\eta\cos\varphi,\\
y' &= h_1\operatorname{ch}\xi'\sin\eta' + k_1\operatorname{sh}\xi'\cos\eta' - \operatorname{ch}\xi\sin\eta\cos\varphi,\\
z &= -\operatorname{sh}\xi\cos\eta\sin\varphi,\\
z' &= -\operatorname{ch}\xi\sin\eta\sin\varphi.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
yz'-y'z = \sin\varphi\,[h_1(\operatorname{sh}\xi\operatorname{ch}\xi'\cos\eta\sin\eta' - \operatorname{ch}\xi\operatorname{sh}\xi'\sin\eta\cos\eta') +{}\\
+ k_1(\operatorname{sh}\xi\operatorname{sh}\xi'\cos\eta\cos\eta' + \operatorname{ch}\xi\operatorname{ch}\xi'\sin\eta\sin\eta')],\\
xz'-x'z = \sin\varphi\,[h_1(-\operatorname{ch}\xi\operatorname{ch}\xi'\sin\eta\cos\eta' + \operatorname{sh}\xi\operatorname{sh}\xi'\cos\eta\sin\eta') +{}\\
+ k_1(\operatorname{ch}\xi\operatorname{sh}\xi'\sin\eta\sin\eta' + \operatorname{sh}\xi\operatorname{ch}\xi'\cos\eta\cos\eta') + \sin\eta\cos\eta],
\end{aligned}$$

$$xy' - x'y = (h_1^2 + k_1^2)\sin\eta'\cos\eta' +$$
$$+ h_1[-\operatorname{ch}\xi\operatorname{ch}\xi'\sin\eta\cos\eta'\cos\varphi - \operatorname{ch}\xi\operatorname{ch}\xi'\cos\eta\sin\eta' +$$
$$+ \operatorname{sh}\xi\operatorname{sh}\xi'\cos\eta\sin\eta'\cos\varphi + \operatorname{sh}\xi\operatorname{sh}\xi'\sin\eta\cos\eta'] +$$
$$+ k_1[\operatorname{ch}\xi\operatorname{sh}\xi'\sin\eta\sin\eta'\cos\varphi - \operatorname{ch}\xi\operatorname{sh}\xi'\cos\eta\cos\eta' +$$
$$+ \operatorname{ch}\xi'\operatorname{sh}\xi\cos\eta\cos\eta' - \operatorname{sh}\xi\operatorname{sh}\xi'\sin\eta\sin\eta'] + \sin\eta\cos\eta\cos\varphi.$$

Если предположить, что $\sin\varphi \neq 0$, то из первых двух равенств будет следовать, что существует не более одной точки (h_1, k_1), в которой обращаются в нуль все три последних выражения. Это возможно только при такой комбинации значений h_1 и k_1, которые, будучи найдены из первых двух равенств, удовлетворяют одновременно и третьему. Если же φ равно $0, \pi$ или $-\pi$, то первые два выражения обращаются в нуль, а третье будет равно нулю лишь на некоторой окружности. Этот случай мы можем опустить, так как интеграл должен быть непрерывной функцией от φ в каждой из этих точек. При $\eta = 0$, $\eta' = 0$ первые два выражения приводятся соответственно к $k_1\operatorname{sh}\xi\operatorname{sh}\xi'$ и $k_1\operatorname{sh}\xi\operatorname{ch}\xi'$, а третье — к $k_1\operatorname{sh}(\xi - \xi')$; последнее равно нулю тогда, когда $k_1 = 0$ или когда $\xi = \xi'$. При $k_1 = 0$ все три выражения равны нулю всюду на действительной оси; при $\xi = \xi'$ числа μ и μ' оба действительны и больше единицы.

Известно (см. п. 219), что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\psi}{A + B\cos\psi + C\sin\psi} = \frac{2\pi}{\sqrt{A^2 - B^2 - C^2}}$$

при

$$(yz' - y'z)^2 - (zx' - z'x)^2 - (xy' - x'y)^2 < 0.$$

Последнее неравенство имеет место во всех точках контура S, за исключением, может быть, одной точки, в которой $yz' - y'z$, $zx' - z'x$, $xy' - x'y$ одновременно обращаются в нуль.

В случае $\eta = 0$, $\eta' = 0$ k_1 обращается в нуль, поэтому равенства

$$yz' - y'z = zx' - z'x = xy' - x'y = 0$$

выполняются всюду и $A + B\cos\psi + C\sin\psi = \lambda(x + y\cos\psi + z\sin\psi)$, где λ — некоторая постоянная. Отсюда

$$x^2 - y^2 - z^2 = h_1^2 - 2h_1(\operatorname{ch}\xi\operatorname{ch}\xi' - \operatorname{sh}\xi\operatorname{sh}\xi'\cos\varphi) + 1,$$

и это выражение положительно в начале координат. При $x^2 - y^2 - z^2 > 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\psi}{A + B\cos\psi + C\sin\psi} = \frac{1}{\lambda}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\psi}{x + y\cos\psi + z\sin\psi} =$$
$$= \frac{1}{\lambda}\frac{2\pi}{\sqrt{x^2 - y^2 - z^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{A^2 - B^2 - C^2}}.$$

Те точки, где $x^2 - y^2 - z^2 \leqslant 0$, т. е. те, в которых $x^2 + y\cos\psi + z\sin\psi$ обращается в нуль при некотором значении ψ, лежат внутри S. Если, выйдя из начала координат, приближаться к контуру S, то в любой точке q на контуре S, к которой мы придем, будет выполняться неравенство $x^2 - y^2 - z^2 > 0$. Таким образом, во всех точках этого контура

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\psi}{A + B\cos\psi + C\sin\psi} = \frac{2\pi}{\sqrt{A^2 - B^2 - C^2}}.$$

В точках $\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-1}$ будем иметь $A^2-B^2-C^2=0$, т. е.

$$1-2h\zeta+h^2=0,$$

следовательно,

$$x^2-y^2-z^2=x'^2-y'^2-z'^2$$

и

$$xx'-yy'-zz'=0.$$

Отсюда вытекает, что выражение

$$(yz'-y'z)^2-(xy'-x'y)^2-(xz'-x'z)^2,$$

равное $(x^2-y^2-z^2)(x'^2-y'^2-z'^2)-(xx'-yy'-zz')^2$, приводится в этом случае к $(x^2-y^2-z^2)^2$; последнее же положительно всюду, за исключением тех точек, где $x^2-y^2-z^2=0$.

Когда $\eta'\neq 0$, при достаточно больших R благодаря присутствию члена $(h_1^2+k_1^2)\sin\eta'\cos\eta'$ в выражении $xy'-x'y$ выполняется неравенство

$$(yz'-y'z)^2-(xy'-x'y)^2-(xz'-x'z)^2<0.$$

При $\eta'=0$

$$yz'-y'z=0,\quad xz'-x'z=\sin\eta\cos\eta,\quad xy'-x'y=\sin\eta\cos\eta\cos\varphi,$$

поэтому в начале координат

$$(yz'-y'z)^2-(xy'-x'y)^2-(xz'-x'z)^2=-\sin^2\eta\cos^2\eta<0,$$

если только $\eta\neq 0$.

Итак, мы показали, что, когда η и η' не обращаются в нуль одновременно, то вне контура S найдется точка, в которой

$$(yz'-y'z)^2-(xy'-x'y)^2-(xz'-x'z)^2<0.$$

Когда $\eta=\eta'=0$, то μ и μ' оказываются на действительной оси, причем $\mu>1$ и $\mu'>1$, $yz'-y'z$, $zx'-z'x$ и $xy'-x'y$ обращаются в нуль в начале координат и $x=-\operatorname{ch}\xi$, $y=-\operatorname{sh}\xi\cos\varphi$, $z=-\operatorname{sh}\xi\sin\varphi$. При этом $x^2-y^2-z^2=1$, и условие, обеспечивающее равенство рассматриваемого интеграла выражению $2\pi(A^2-B^2-C^2)^{-1/2}$, выполняется в начале координат.

В точке, в которой $A+B\cos\psi+C\sin\psi=0$ и

$$yz'-y'z,\qquad zx'-z'x,\qquad xy'-x'y$$

вместе не обращаются в нуль, выражение

$$(yz'-y'z)^2-(xy'-x'y)^2-(xz'-x'z)^2$$

обращается в нуль при некотором значении ψ, так как

$$x+y\cos\psi+z\sin\psi=0\quad\text{и}\quad x'+y'\cos\psi+z'\sin\psi=0,$$

откуда

$$\frac{1}{yz'-y'z}=\frac{\cos\psi}{zx'-z'x}=\frac{\sin\psi}{xy'-x'y}.$$

Еслу $yz'-y'z=xy'-x'y=xz'-x'z=0$, т. е. $\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}$, то в такой точке $x+y\cos\psi+z\sin\psi=0$ и, следовательно, $x^2\leqslant y^2+z^2$. По предположению, все такие точки заключены внутри S.

В общем случае, если, выйдя из какой-нибудь точки X, лежащей вне S, в которой

$$(yz'-y'z)^2-(xy'-x'y)^2-(xz'-x'z)^2<0,$$

двигаться к S по любой кривой, минуя точки, в которых $yz'-y'z$, $zx'-z'x$ и $xy'-x'y$ обращаются в нуль одновременно, то в любой точке q на S, к которой мы придем, будет выполняться условие

$$(yz'-y'z)^2-(xy'-x'y)^2-(xz'-x'z)^2<0.$$

В самом деле, в противном случае на дуге pq оказалась бы точка, в которой $(yz'-y'z)^2-(xz'-x'z)^2-(xy'-x'y)^2=0$, а все такие точки лежат внутри S.

Таким образом, во всех точках, лежащих на самом контуре S или вне его, выполняется условие

$$(yz'-y'z)^2-(xy'-x'y)^2-(xz'-x'z)^2<0,$$

если только $x^2-y^2-z^2\neq 0$. Таким образом, если

$$x^2-y^2-z^2\neq 0,$$

то обе точки $\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-1}$ попадают внутрь S. При $x^2-y^2-z^2=0$ мы имеем $x'^2-y'^2-z'^2=0$, $xx'=yy'+zz'$, откуда

$$(y^2+z^2)(y'^2+z'^2)=(yy'+zz')^2,$$

следовательно, $yz'-y'z=0$ и

$$\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}=\frac{y^2+z^2}{yy'+zz'}=\frac{x}{x'}.$$

Точка, в которой выполняются эти условия одновременно с условием $x^2-y^2-z^2=0$, лежит внутри S.

Итак, мы показали, что в любом случае точки $\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-1}$ лежат внутри S.

Так как

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\psi}{A+B\cos\psi+C\sin\psi}=\frac{2\pi}{\sqrt{A^2-B^2-C^2}}$$

всюду на S за исключением, может быть, единственной точки или конечного числа точек, попавших на действительную ось, то

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\{\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos(\psi-\varphi)\}^n}{(\mu'+\sqrt{\mu'^2-1}\cos\psi)^{n+1}}\,d\psi=\frac{1}{2\pi i}\int_{(S)}\frac{h^n\,dh}{\sqrt{1-2h\zeta+h^2}}.$$

В соответствии с п. 218 $\arg\sqrt{1-2h\zeta+h^2}$ следует выбирать так, чтобы $|h\mu'-\mu-(1-2h\zeta+h^2)^{\frac{1}{2}}|$ было меньше, чем наибольшее из чисел $|h(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}}-(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\pm i(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\sin\varphi|$. При больших действительных h эти выражения асимптотически равны соответственно $h|\mu'\mp 1|$ и $h|\mu'^2-1|^{\frac{1}{2}}$. Ясно что в $\arg(1-2h\zeta+h^2)^{\frac{1}{2}}$ надо взять верхний знак. Поэтому $\arg(1-2h\zeta+h^2)^{\frac{1}{2}}$ надо выбирать так, чтобы его предел был равен нулю, когда h неограниченно возрастает, оставаясь положительным; так же выбирается аргумент $P_n(\zeta)$, согласно формуле (86) гл. V.

Поэтому выражение в правой части последнего равенства равно $P_n(\zeta)$, так как контур S охватывает точки $\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-1}$ и пересекает действительную ось в точках, лежащих вправо от начала координат.

Выше мы исключили случай, когда $\varphi=0$. Теперь это ограничение может быть снято, так как обе части последнего равенства непрерывны по φ. Тем самым общая форма теоремы сложения доказана.

Не представит затруднений и тот случай, когда $\xi=0$, $\xi'=0$ и μ, μ' попадают на действительную ось между 0 и 1, хотя ζ может быть действительно и заключено между -1 и 0. В этом случае $\mu = \cos\theta + 0\cdot i$, $\mu' = \cos\theta' + 0\cdot i$, где $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \theta' < \frac{\pi}{2}$. Так как

$$P_n(\cos\theta + 0\cdot i) = P_n(\cos\theta)$$

и

$$P_n^m(\cos\theta + 0\cdot i)\, P_n^m(\cos\theta' + 0\cdot i) = (-1)^m P_n^m(\cos\theta)\, P_n^m(\cos\theta'),$$

то, имея в виду, что в рассматриваемом случае формула

$$P_n(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(S)} \frac{h^n}{\sqrt{1-2h\zeta+h^2}}\, dh$$

остается в силе, мы получим

$$P_n(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\varphi) =$$

$$= P_n(\cos\theta)\, P_n(\cos\theta') + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)} P_n^m(\cos\theta)\, P_n^m(\cos\theta').$$

При целом положительном n этот ряд обрывается на члене с $m = n$, так как

$$\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)} P_n^m(\cos\theta) = (-1)^m P_n^{-m}(\cos\theta).$$

Справедливость теоремы сложения при условиях $\operatorname{Re}(\mu) > 0$ и $\operatorname{Re}(\mu') > 0$ была установлена Гобсоном[1]). Ранее ее доказали Уиттекер и Ватсон[2]) при более жестких условиях

$$R(\mu) > 0,\ R(\mu') > 0, \quad R\{\mu\mu' - (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}}\} > 0.$$

Значительно менее точные результаты принадлежат Гейне[3]).

221. Сумма ряда, полученного в п. 220, непрерывна, поэтому, если кривая, соединяющая точки

$$\mu\mu' - (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}}, \qquad \mu\mu' + (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}},$$

пересекает действительную ось, то она должна пересекать ее между -1 и $+\infty$. Действительно, функция P_n, когда ее аргумент пересекает действительную ось, остается непрерывной только в том случае, если точка пересечения лежит в этом промежутке. Соответствующая функция второго рода Q_n, когда ее аргумент пересекает действительную ось между $-\infty$ и $+1$, претерпевает разрыв.

Имея в виду получить теорему сложения для Q_n, мы проверим справедливость утверждения, высказанного относительно P_n, и исследуем условия, при которых кривая, соединяющая точки $\mu\mu' \pm (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}}$, должна пересекать действительную ось.

Пусть $\mu = \operatorname{ch}(\xi + i\eta)$, $\mu' = \operatorname{ch}(\xi' + i\eta')$, где, в предположении, что $\operatorname{Re}(\mu) > 0$ и $\operatorname{Re}(\mu') > 0$, мы полагаем

$$-\frac{\pi}{2} < \eta < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \eta' < \frac{\pi}{2}, \quad \xi \geqslant 0,\ \xi' \geqslant 0.$$

---

[1]) Proc. Lond. Math. Soc. (2), 29 (1928), 355.
[2]) Курс современного анализа, т. II, М.—Л., 1934, стр. 125.
[3]) Kugelfunktionen, т. I, стр. 319.

Тогда

$$\mu\mu' + \sqrt{\mu^2-1}\,\sqrt{\mu'^2-1} = \operatorname{ch}(\xi+\xi')\cos(\eta+\eta') + i\operatorname{sh}(\xi+\xi')\sin(\eta+\eta'),$$
$$\mu\mu' - \sqrt{\mu^2-1}\,\sqrt{\mu'^2-1} = \operatorname{ch}(\xi-\xi')\cos(\eta-\eta') + i\operatorname{sh}(\xi-\xi')\sin(\eta-\eta').$$

Если точки

$$\mu\mu' + \sqrt{\mu^2-1}\,\sqrt{\mu'^2-1} \quad \text{и} \quad \mu\mu' - \sqrt{\mu^2-1}\,\sqrt{\mu'^2-1}$$

комплексной плоскости обозначить соответственно P и Q, то точка

$$\zeta = \mu\mu' - (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi$$

при любом φ лежит на прямолинейном отрезке PQ. Точка R, в которой отрезок PQ или его продолжение пересекает действительную ось, имеет абсциссу

$$OR = \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sh}2\xi\sin 2\eta' + \operatorname{sh}2\xi'\sin 2\eta}{\operatorname{sh}(\xi+\xi')\sin(\eta+\eta') - \operatorname{sh}(\xi-\xi')\sin(\eta-\eta')}.$$

Пусть $\xi \neq \xi'$, и будем считать, что $\xi > \xi'$. Если $\eta+\eta'$ и $\eta-\eta'$ имеют одинаковые знаки, то P и Q лежат по одну сторону от действительной оси; если $\eta+\eta'$ и $\eta-\eta'$ имеют противоположные знаки, то P и Q лежат по разные стороны действительной оси. В первом случае никакая точка ζ не попадает на действительную ось, поэтому мы рассмотрим только второй случай. При этом могут осуществляться следующие возможности:

1) $\eta > 0$, $\eta' > 0$ и $\eta < \eta'$; тогда и числитель и знаменатель дроби, выражающей OR, положительны, так что $OR > 0$;

2) $\eta < 0$, $\eta' < 0$ и $\eta > \eta'$; тогда также $OR > 0$;

3) $\eta > 0$, $\eta' < 0$ и $\eta+\eta' < 0$; тогда знаменатель дроби, выражающей OR, отрицателен, а числитель меньше, чем

$$\frac{1}{2}\operatorname{sh}2\xi(\sin 2\eta + \sin 2\eta') = \operatorname{sh}2\xi\sin(\eta+\eta')\cos(\eta-\eta') < 0,$$

откуда $OR > 0$;

4) $\eta < 0$, $\eta' > 0$ и $\eta+\eta' > 0$; тогда знаменатель положителен, а числитель больше, чем

$$\operatorname{sh}2\xi'\sin(\eta+\eta')\cos(\eta-\eta')$$

и поэтому положителен; таким образом $OR > 0$;

5) $\eta = \eta'$; при этом Q лежит на действительной оси на расстоянии $\operatorname{ch}(\xi-\xi')$ от O, следовательно, $OR > 1$;

6) $\eta = -\eta'$; при этом P оказывается на действительной оси на расстоянии $\operatorname{ch}(\xi+\xi') > 0$ от O.

Точка ζ может совпадать с P или Q только тогда, когда φ равно нулю или кратно π. Итак, мы показали, что при $\xi \neq \xi'$ точка ζ либо вовсе не попадает на действительную ось, либо ее действительное значение положительно. При этом предполагалось, что φ не равно нулю и не кратно π.

При $\xi = \xi' \neq 0$ точка Q лежит на действительной оси на расстоянии $\cos(\eta-\eta') > -1$ от нуля, а P на действительной оси не лежит, если только $\eta+\eta' \neq 0$. При этом ζ на действительную ось не попадает, так как в силу условия, положенного на φ, ζ не совпадает с Q. При $\xi = \xi' = 0$ все значения ζ действительны и > -1; этот случай мы пока исключаем из рассмотрения; другими словами, мы предполагаем, что μ и μ' не принимают одновременно действительных значений, заключенных между **0** и **1**.

§ 3. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ДЛЯ $Q_n(\mu)$

222. Переходим к выводу теоремы сложения для функции Лежандра второго рода.

Мы показали в п. 185 (см. формулу (155)), что при $\mathrm{Re}(\mu')>0$, $\mathrm{Re}(n+1)>0$

$$\frac{1}{\{\mu'-(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\varphi\pm iu)\}^{n+1}}=$$
$$=P_n(\mu')+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Pi(-n-1)}{\Pi(m-n-1)}(-1)^m P_n^m(\mu')\cos m(\varphi\pm iu)=$$
$$=P_n(\mu')+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n)}P_n^m(\mu')\cos m(\varphi\pm iu)=$$
$$=P_n(\mu')+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n)}P_n^{-m}(\mu')\cos m(\varphi\pm iu),$$

в предположении, что $\mathrm{Re}(u)<\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\mu'+1}{\mu'-1}\right|$. Этот ряд, как было показано, сходится равномерно относительно φ, а также относительно $\mathrm{Re}(u)$ в любом промежутке $(0,\ u_0)$, когда $u_0<\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\mu'+1}{\mu'-1}\right|$. Множитель u в iu может не быть действительным.

Предположив, что $\left|\frac{\mu+1}{\mu-1}\right|<\left|\frac{\mu'+1}{\mu'-1}\right|$, умножим крайние части последних равенств на $\{\mu-(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}u\}^n$ и проинтегрируем по u от 0 до $\frac{1}{2}\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}$. Получим

$$\int_0^{\frac{1}{2}\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}}\frac{\{\mu-(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}u\}^n}{\{\mu'-(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\varphi\pm iu)\}^{n+1}}\,du=$$
$$=P_n(\mu)\int_0^{\frac{1}{2}\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}}\{\mu-(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}u\}^n+2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n)}P_n^{-m}(\mu')\times$$
$$\times\int_0^{\frac{1}{2}\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}}\{\mu-(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}u\}^n\cos m(\varphi\pm iu)\,du.$$

Почленное интегрирование ряда здесь законно, так как $\mathrm{Re}(n+1)>0$. В самом деле, если выбрать m_1 так, чтобы неравенство

$$\left|\sum_{m=m_1}^{m_1+s}2\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n)}P_n^{-m}(\mu')\cos m(\varphi\pm iu)\right|<\varepsilon$$

выполнялось для всех $s=1,\ 2,\ \ldots$ и для всех u и φ с $0<\mathrm{Re}(u)<u_0$, то

$$\left|\int_0^{\frac{1}{2}\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}}\{\mu-(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}u\}^n\left[\sum_{m=m_1}^{m_1+s}2\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n)}P_n^{-m}(\mu')\cos m(\varphi\pm iu)\right]du\right|$$

можно представить в виде

$$\left|\int_{-1}^{1}\frac{1}{2^{n+1}}\frac{(1-t^2)^n}{(\mu-t)^{n+1}}\left[\sum_{m=m_1}^{m_1+s}2\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n)}P_n^{-m}(\mu')\cos m(\varphi\pm iu)\right]dt\right|,$$

где $t=\mu-(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}e^u$, а это выражение при $\operatorname{Re}(n+1)>0$ меньше произведения ε на некоторое постоянное, так как μ не может попасть в промежуток $(-1, 1)$ действительной оси. Итак, мы показали, что ряд сходится равномерно относительно φ и его можно интегрировать почленно.

Применяя к $Q_n^m(\mu)$ формулу (118) гл. V и складывая ряды, соответствующие тому и другому знаку при iu, найдем, что при $\operatorname{Re}(n+1)>0$, $\operatorname{Re}(\mu')>0$ и

$$\left|\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}\right|<\left|\ln\frac{\mu'+1}{\mu'-1}\right|$$

ряд

$$P_n(\mu')Q_n(\mu)+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m P_n^{-m}(\mu')Q_n^m(\mu)\cos m\varphi \tag{a}$$

сходится к

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}}\{\mu-(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}u\}^n\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{\{\mu'-(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\varphi+iu)\}^{n+1}}+\frac{1}{\{\mu'-(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\varphi-iu)\}^{n+1}}\right\}du$$

равномерно относительно φ.

Условие, касающееся $\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}$ и $\ln\frac{\mu'+1}{\mu'-1}$, удовлетворяется тогда, когда: 1) либо $\operatorname{Re}(\mu)>0$ и

$$\ln\left|\frac{\mu+1}{\mu-1}\right|<\ln\left|\frac{\mu'+1}{\mu'-1}\right|,$$

т. е. тогда, когда μ' лежит вне окружности, на которой отношение расстояний до точек -1 и $+1$ равно $\left|\frac{\mu'+1}{\mu'-1}\right|$, 2) либо $\operatorname{Re}(\mu)<0$ и μ лежит вне окружности, являющейся отражением предыдущей относительно мнимой оси. Последнее условие можно перефразировать, сказав, что точка $-\mu$ с $\operatorname{Re}(-\mu)>0$ лежит вне окружности, на которой отношение расстояний до -1 и $+1$ равно $\left|\frac{\mu'+1}{\mu'-1}\right|$.

Преобразуем сумму полученного ряда, сделав в интеграле

$$\int_0^{\frac{1}{2}\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}}\frac{\{\mu-(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}u\}^n}{\{\mu'-(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\varphi\pm iu)\}^{n+1}}du$$

замену переменного

$$\{\mu-(\mu^2-1\}^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}u\}\{\mu+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}v\}=1.$$

Интеграл примет вид

$$\int_0^{\infty}\frac{dv}{(A+B\operatorname{ch}v\pm C\operatorname{sh}v)^{n+1}},$$

где

$$A=\zeta=\zeta_\varphi=\mu\mu'-(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi,$$
$$B=\mu'(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}-\mu(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi,$$
$$C=i(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}}\sin\varphi$$

и, следовательно, $A^2-B^2+C^2=1$.

Пусть

$$A=\zeta;\quad B=(\zeta^2-1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch} ip,\qquad C=(\zeta^2-1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{sh} ip.$$

Тогда сумму ряда можно выразить в виде интеграла

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dv}{\{\zeta+(\zeta^2-1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}(v+ip)\}^{n+1}},$$

где p, определенное предыдущими равенствами, может не быть действительным. Если $p=p_0+iq$, то взяв в качестве переменной интегрирования $v-q$, получим

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dv}{\{\zeta+(\zeta^2-1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}(v+ip_0)\}^{n+1}}.$$

В соответствии с выводами п. 172 при $\operatorname{Re}(\zeta)>0$ этот интеграл равен $Q_n(\zeta)$ или $Q_n(\zeta)\pm i\pi P_n(\zeta)$, в зависимости от положения точки ip_0 относительно нулей функции

$$\zeta+(\zeta^2-1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch} v.$$

При $\operatorname{Re}(\zeta)<0$ интеграл принимает соответственно значения

$$Q_n(\mu),\quad Q_n(\mu)\pm i\pi\left\{P_n(\mu)-\frac{2}{\pi}e^{\pm n\pi i}\sin n\pi\, Q_n(\mu)\right\},$$

где в $e^{\pm n\pi i}$ берется $+$ или $-$, в зависимости от того, положительно или отрицательно $\operatorname{Im}(\zeta)$.

223. Когда прямолинейный отрезок, соединяющий точки

$$\zeta_\pi=\mu\mu'+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}},\qquad \zeta_0=\mu\mu'-(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}},$$

не пересекает разрез от $-\infty$ до 1 по действительной оси, сумма полученного выше ряда имеет одинаковый вид для всех значений φ. Это вытекает из того, что ряд сходится равномерно относительно φ, следовательно, его сумма непрерывна по φ.

Если же отрезок, соединяющий точки ζ_φ и ζ_0, пересекает указанный разрез, то при переходе φ через соответствующее значение аналитическое выражение суммы должно меняться, так как функции, представляющие сумму ряда для значений φ, которым отвечает ζ_φ, лежащие по разные стороны от разреза, служат непрерывными продолжениями друг друга.

Следовательно, при заданных μ и μ' достаточно рассмотреть только значения ζ_π и ζ_0. Предположим пока, что $\operatorname{Re}(\mu)>0$. При этом можно показать, что $\arg\left[\frac{-\zeta_\varphi}{(\zeta_\varphi^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right]$ непременно заключен либо в промежутке $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, либо в промежутке $\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$. Пусть α, β, γ — углы, которые образуют с положительным направлением действительной оси отрезки, соединяющие ζ_φ с точками 1, -1 и 0; значения α, β и γ выбираем в пределах от $-\pi$ до π. Тогда γ будет служить аргументом числа ζ_φ, а $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ — аргументом $(\zeta_\varphi^2-1)^{\frac{1}{2}}$. Если $\operatorname{Re}(\zeta_\varphi)>0$ и $\operatorname{Im}(\zeta_\varphi)>0$, то $\alpha-\gamma>\gamma-\beta$ и, следовательно, $\gamma-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\arg\left[\frac{\zeta_\varphi}{(\zeta_\varphi^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right]$ заключен между $-\frac{\pi}{2}$ и 0; при этом $\arg\left[\frac{-\zeta_\varphi}{(\zeta_\varphi^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right]$ заключен между $\frac{\pi}{2}$ и π. Если $\operatorname{Re}(\zeta_\varphi)<0$ и $\operatorname{Im}(\zeta_\varphi)>0$, то $\arg\left[\frac{\zeta_\varphi}{(\zeta_\varphi^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right]$ заключен между 0 и $\frac{\pi}{2}$, а $\arg\left[\frac{-\zeta_\varphi}{(\zeta_\varphi^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right]$ — между $-\pi$ и $-\frac{\pi}{2}$. Если $\operatorname{Re}(\zeta_\varphi)>0$ и $\operatorname{Im}(\zeta_\varphi)<0$, то $\arg\left[\frac{\zeta_\varphi}{(\zeta_\varphi^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right]$ заключен между 0 и $\frac{\pi}{2}$, а $\arg\left[\frac{-\zeta_\varphi}{(\zeta_\varphi^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right]$ — между $-\pi$ и $-\frac{\pi}{2}$. Если $\operatorname{Re}(\zeta_\varphi)<0$ и $\operatorname{Im}(\zeta_\varphi)<0$, то $\arg\left[\frac{\zeta_\varphi}{(\zeta_\varphi^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right]$ заключен между $-\frac{\pi}{2}$ и 0, а $\arg\left[\frac{-\zeta_\varphi}{(\zeta_\varphi^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right]$ — между $\frac{\pi}{2}$ и π.

Итак, мы видим, что $\left|\arg\left[\frac{-\zeta_\varphi}{(\zeta_\varphi^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right]\right|>\frac{\pi}{2}$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\varphi=\pi$. При этом

$$\zeta_\pi=A=\mu\mu'+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}}=$$
$$=\operatorname{ch}(\xi+\xi')\cos(\eta+\eta')+i\operatorname{sh}(\xi+\xi')\sin(\eta+\eta'),$$
$$B=\mu'(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}+\mu(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}}=$$
$$=\operatorname{sh}(\xi+\xi')\cos(\eta+\eta')+i\operatorname{ch}(\xi+\xi')\sin(\eta+\eta'),$$
$$C=0.$$

Отсюда вытекает, что $\operatorname{sh} ip=0$, т. е. $p=0$ или $\pm\pi$. Так как $\operatorname{Im}(\zeta_\pi)$ и $\operatorname{Im}[(\zeta_\pi^2-1)^{\frac{1}{2}}]$ имеют одинаковые знаки, а $B=(\zeta_\varphi^2-1)\operatorname{ch} ip$, то $p=0$ или $\pm\pi$, в зависимости от того, имеют $\operatorname{Im} B$ и $\operatorname{Im}\zeta_\pi$ одинаковые или разные знаки. Но так как ξ и ξ' оба положительны, то $\operatorname{Im}(\zeta_\pi)$ и $\operatorname{Im}(B)$ имеют тот же знак, что и $\sin(\eta+\eta')$. Следовательно, $p=0$ и, согласно п. 172, сумма рассматриваемого ряда равна $Q_n(\zeta_\pi)$.

В том случае, когда $\eta+\eta'=0$, в частности, когда $\eta=\eta'=0$ и, следовательно, μ и μ' оба действительны и >1, A и B имеют действительные значения, при этом $(\zeta_\pi^2-1)^{\frac{1}{2}}$ также действительно и положительно, поэтому $\operatorname{ch} ip=1$ и $p=0$. Если $\eta+\eta'=\pm\pi$, то ζ_π — действительное отрицательное <-1; при этом $Q_n(\zeta_\pi)$ не определено.

Пусть теперь $\varphi=0$. Тогда

$$\zeta_0=A=\mu\mu'-(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}}=$$
$$=\operatorname{ch}(\xi-\xi')\cos(\eta-\eta')+i\operatorname{sh}(\xi-\xi')\sin(\eta-\eta'),$$

$$B = \mu' (\mu^2 - 1)^{\frac{1}{2}} - \mu (\mu'^2 - 1)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \operatorname{sh}(\xi - \xi') \cos(\eta - \eta') + i \operatorname{ch}(\xi - \xi') \sin(\eta - \eta'),$$
$$C = 0,$$

откуда $\operatorname{sh} ip = 0$, следовательно, $p = 0$ или $\pm\pi$.

Если $\operatorname{Im}(B)$ и $\operatorname{Im}(\zeta_0)$ одинакового знака, что имеет место при $\xi > \xi'$, то $p = 0$. Если же $\xi < \xi'$, то $\operatorname{Im}(B)$ и $\operatorname{Im}(\zeta_0)$ имеют противоположные знаки и $p = \pm\pi$.

Отсюда следует, что при $\xi > \xi'$ сумма ряда есть $Q_n(\zeta_0)$. Если же $\xi < \xi'$, то при $\operatorname{Re}(\zeta_0) > 0$ сумма ряда (а) равна

$$Q_n(\zeta_0) + i\pi P_n(\zeta_0) \text{ или } Q_n(\zeta_0) - i\pi P_n(\zeta_0)$$

в зависимости от того, положителен или отрицателен $\arg\chi$ (см. п. 172). В случае $\operatorname{Re}(\zeta_0) < 0$ сумма ряда (а) есть

$$Q_n(\zeta_0) \pm i\pi \left[P_n(\zeta_0) e^{\mp 2n\pi i} - \frac{2}{\pi} e^{\pm n\pi i} \sin n\pi \, Q_n(\zeta_0) \right],$$

где в показателях берется знак $+$ или $-$ соответственно при $\operatorname{Im}(\zeta_0) > 0$ и $\operatorname{Im}(\zeta_0) < 0$. Можно, впрочем, показать, что последний случай невозможен.

Предположим, что $\operatorname{Re}(\mu) > 0$; при этом, как нетрудно видеть, условие

$$\left|\frac{\mu+1}{\mu-1}\right| < \left|\frac{\mu'+1}{\mu'-1}\right|$$

равносильно условию

$$\operatorname{ch}\xi \cos\eta' > \operatorname{ch}\xi' \cos\eta.$$

Если $\xi \leqslant \xi'$, то $|\eta| > |\eta'|$. При $\xi < \xi'$, если знаки $\eta + \eta'$ и $\eta - \eta'$ одинаковы, точки ζ_0 и ζ_π лежат по разные стороны от действительной оси, и отрезок, их соединяющий, пересекает действительную ось в точке R с абсциссой $OR < 0$ (см. п. 221).

Мы имеем

$$1 - OR = 1 - \frac{\operatorname{sh}\xi \operatorname{ch}\xi \sin\eta' \cos\eta' + \operatorname{sh}\xi' \operatorname{ch}\xi' \sin\eta \cos\eta}{\operatorname{sh}\xi \operatorname{ch}\xi' \cos\eta \sin\eta' + \operatorname{ch}\xi \operatorname{sh}\xi' \sin\eta \cos\eta'} =$$
$$= \frac{(\operatorname{ch}\xi \cos\eta' - \operatorname{ch}\xi' \cos\eta)(\operatorname{sh}\xi' \sin\eta - \operatorname{sh}\xi \sin\eta')}{\operatorname{sh}\xi \operatorname{ch}\xi' \cos\eta \sin\eta' + \operatorname{ch}\xi \operatorname{sh}\xi' \sin\eta \cos\eta'},$$

причем первый множитель в числителе, как мы видели, положителен.

Если $\eta > 0$, $\eta' > 0$, то числитель положителен; кроме того,

$$\operatorname{sh}\xi' \sin\eta - \operatorname{sh}\xi \sin\eta' > \operatorname{sh}\xi (\sin\eta - \sin\eta') > 0,$$

поэтому $0 < OR < 1$, т. е. отрезок, соединяющий точки ζ_0 и ζ_π, пересекает действительную ось в промежутке между 0 и 1. То же верно тогда, когда $\eta < 0$ и $\eta' < 0$. При $\eta > 0$ и $\eta' < 0$ числитель положителен, так как $\eta > -\eta'$; что же касается знаменателя, то записав его в виде

$$\operatorname{ch}\xi \cos|\eta'| \operatorname{sh}\xi' \sin\eta - \operatorname{ch}\xi' \cos\eta \operatorname{sh}\xi \sin|\eta'|,$$

мы заметим, что он положителен, так как

$$\operatorname{ch}\xi \cos|\eta'| \operatorname{sh}\xi' \sin\eta - \operatorname{ch}\xi' \cos\eta \operatorname{sh}\xi \sin|\eta'| >$$
$$> \cos\xi' \cos\eta (\operatorname{sh}\xi' \sin\eta - \operatorname{sh}\xi \sin|\eta'|) >$$
$$> \operatorname{ch}\xi' \cos\eta |\sin\eta'| (\operatorname{sh}\xi' - \operatorname{sh}\xi) > 0.$$

Следовательно, и в этом случае $0 < OR < 1$. Если $\eta < 0$, $\eta' > 0$, то $\eta - \eta'$ и $\eta + \eta'$ имеют одинаковые знаки, и отрезок, соединяющий точки ζ_0 и ζ_π, не пересекает действительной оси.

При $\xi > \xi'$ точки ζ_0 и ζ_π лежат по разные стороны от действительной оси в том случае, когда $\sin(\eta+\eta')$ и $\sin(\eta-\eta')$ имеют противоположные знаки. Если $\eta > 0$, $\eta' > 0$ и $\eta < \eta'$, то $\operatorname{sh}\xi' \sin\eta - \operatorname{sh}\xi \sin\eta' < 0$ и, следовательно, $OR > 1$. То же справедливо тогда, когда $\eta < 0$, $\eta' < 0$ и $\eta > \eta'$.

Мы показали таким образом, что в высказанных относительно μ и μ' предположениях отрезок, соединяющий точки ζ_0 и ζ_π, никогда не пересекает разрез левее нуля.

Итак, мы получили следующий результат:

Если $\operatorname{Re}(n+1) > 0$, $\operatorname{Re}(\mu) > 0$, $\operatorname{Re}(\mu') > 0$, $\left|\frac{\mu+1}{\mu-1}\right| < \left|\frac{\mu'+1}{\mu'-1}\right|$ *и точки* μ, μ' *лежат вне разреза, произведенного по действительной оси от* -1 *до* $+1$, *то ряд*

$$Q_n(\mu) P_n(\mu') + 2\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m Q_n^m(\mu) P_n^{-m}(\mu') \cos m\varphi$$

сходится равномерно относительно φ. *При этом*

а) *Когда* μ *и* μ' — *действительные* > 1 *и, следовательно, условие*

$$\left|\frac{\mu+1}{\mu-1}\right| < \left|\frac{\mu'+1}{\mu'-1}\right|$$

сводится к $\mu' < \mu$, *сумма этого ряда есть* $Q_n(\zeta_\varphi)$, *где*

$$\zeta_\varphi = \mu\mu' - (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}} (\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos\varphi.$$

б) *Вообще, если прямолинейный отрезок, соединяющий точки* ζ_π *и* ζ_0, *не содержит точек действительной оси, лежащих между* -1 *и* $+1$, *то сумма ряда равна* $Q_n(\zeta_\varphi)$. *Это имеет место тогда, когда* $\xi > \xi'$, *а* $\eta+\eta'$ *и* $\eta-\eta'$ *имеют одинаковые знаки, или когда* $\xi < \xi'$, *а* $\eta+\eta'$ *и* $\eta-\eta'$ *имеют разные знаки, а также в других перечисленных выше случаях.*

в) *Если прямолинейный отрезок, соединяющий точки* ζ_π *и* ζ_0, *содержит точку, принадлежащую разрезу* $(-1, 1)$, *то сумма ряда равна* $Q_n(\zeta_\varphi)$ *или* $Q(\zeta_\varphi) \mp i\pi P_n(\zeta_\varphi)$, *в зависимости от того, лежат точки* ζ_φ *и* ζ_π *по одну сторону или по разные стороны от действительной оси. Во втором случае берется знак* — *при* $\operatorname{Im}(\zeta_\pi) > 0$ *и* + *при* $\operatorname{Im}(\zeta_\pi) < 0$.

224. Теперь мы покажем, что для выполнения этой теоремы условие $\operatorname{Re}(n+1) > 0$ не нужно.

Мы имеем

$$P_n^m(\mu) = P_{-n-1}^m(\mu), \qquad P_n^m(\mu) = \frac{1}{\pi} \operatorname{tg} n\pi \, [Q_n^m(\mu) - Q_{-n-1}^m(\mu)],$$

если только n не равно полуцелому числу, когда $Q_n^m(\mu) = Q_{-n-1}(\mu)$.

Поэтому нашу теорему сложения можно записать в виде

$$Q_{-n-1}^m(\zeta_\varphi) + \pi \operatorname{ctg} n\pi \, P_{-n-1}^m(\zeta_\varphi) =$$
$$= P_{-n-1}(\mu'') \, [Q_{-n-1}(\mu) + \pi \operatorname{ctg} n\pi \, P_{-n-1}(\mu)] +$$
$$+ 2\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)} P_{-n-1}^m(\mu') \, [Q_{-n-1}^m(\mu) + \pi \operatorname{ctg} n\pi \, P_{-n-1}^m(\mu)] \cos m\varphi.$$

Замечая, что $\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}$ не изменяется, если вместо n взять $-n-1$, и применяя теорему сложения для $P_n(\zeta)$ (см. п. 220), мы придем к выводу, что

$$P_{-n-1}(\mu') \, Q_{-n-1}(\mu) +$$
$$+ 2\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\Pi(-n-1-m)}{\Pi(-n+m-1)} P_{-n-1}^m(\mu') \, Q_{-n-1}^m(\mu) \cos m\varphi = Q_{n-1}^m(\zeta_\varphi).$$

Итак, мы доказали следующее:

Теорема сложения для $Q_n(\mu)$ (см. п. 223) *справедлива для всех значений* n, *за исключением* $n=-1$, *в предположении, что все остальные условия этой теоремы выполняются.*

225. При $\operatorname{Re}(\mu)<0$, $\operatorname{Re}(\mu')>0$ и $\left|\frac{1-\mu}{1+\mu}\right|<\left|\frac{\mu'+1}{\mu'-1}\right|$ условия, при которых выполняется теорема сложения, могут быть получены так же, как выше, но проще вывести их из уже полученных результатов. При $\operatorname{Re}(-\mu)>0$

$$Q_n(-\mu)P_n(\mu')+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m Q_n^m(-\mu)P_n^{-m}(\mu')\cos m\varphi=$$
$$=Q_n\left(-\mu\mu'+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right),$$

причем сходимость ряда равномерна.

Помня, что

$$Q_n\left(-\mu\mu'+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right)=e^{\pm n\pi i}Q_n\left(\mu\mu'-(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right),$$

мы приходим к выводу, что в рассматриваемом случае теорема сложения справедлива. Мы доказали, таким образом, следующее:

Если $\operatorname{Re}(\mu)<0$, $\operatorname{Re}(\mu')>0$, $\left|\frac{\mu-1}{\mu+1}\right|<\left|\frac{\mu'+1}{\mu'-1}\right|$ *и ни одна из точек* μ, μ' *не попадает на разрез, то в том случае, когда прямолинейный отрезок, соединяющий точки* ζ_0 *и* ζ_π, *не содержит точек разреза,*

$$Q_n(\mu)P_n(\mu')+2\sum(-1)^m Q_n^m(\mu)P_n^{-m}(\mu')\cos m\varphi=$$
$$=Q_n\left\{\mu\mu'-(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right\},$$

причем ряд сходится равномерно относительно φ.

§ 4. ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ ДЛЯ P_n

226. Теперь мы можем обобщить теорему п. 220.

Пусть $\operatorname{Re}(\mu)<0$, $\operatorname{Re}(\mu')>0$. Тогда

$$P_n(\mu)P_n(\mu')+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}P_n(\mu)P_n(\mu')\cos m\varphi=$$
$$=P_n(\mu')\left[e^{\mp n\pi i}P_n(-\mu)-\frac{2\sin n\pi}{\pi}Q_n(-\mu)\right]+$$
$$+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}P_n^m(\mu')\left[e^{\mp n\pi i}P_n^m(-\mu)-\frac{2\sin(n+m)\pi}{\pi}e^{-m\pi i}Q_n^m(-\mu)\right],$$

где в показателе берется знак $-$ или $+$ соответственно при $\operatorname{Im}(-\mu)>0$ и $\operatorname{Im}(-\mu)<0$; это вытекает из формулы (35) гл. V.

Когда $\left|\frac{-\mu+1}{-\mu-1}\right|<\left|\frac{\mu'+1}{\mu'-1}\right|$ и отрезок, соединяющий точки

$$(-\mu)\mu'+((-\mu)^2-1)^{\frac{1}{2}}(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}},\quad(-\mu)\mu'-((-\mu)^2-1)^{\frac{1}{2}}(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}},$$

не содержит точек разреза, этот ряд сходится, равномерно относительно φ, к

$$e^{\mp n\pi i} P_n\{(-\mu)\mu' - (-\mu)^2 - 1)^{\frac{1}{2}}(\mu'^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\} -$$
$$- \frac{2\sin n\pi}{\pi} Q_n\{(-\mu)\mu' - ((-\mu^2) - 1)^{\frac{1}{2}}(\mu'^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\}.$$

Следовательно, при выполнении перечисленных здесь условий сумма этого ряда есть $P_n\{(-\mu)\mu' - ((-\mu^2) - 1)^{\frac{1}{2}}(\mu'^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\}$.

Таким образом, доказано следующее обобщение теоремы сложения п. 220:

Если $\operatorname{Re}(\mu) < 0$, $\operatorname{Re}(\mu') > 0$, $\left|\frac{\mu-1}{\mu+1}\right| < \left|\frac{\mu'+1}{\mu'-1}\right|$ *и прямолинейный отрезок, соединяющий точки* $\mu\mu' + (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}}$, $\mu\mu' - (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}}$, *не содержит точек разреза* $(-1, 1)$, *то*

$$P_n(\mu)\,P_n(\mu') + 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m P_n^m(\mu)\,P_n^{-m}(\mu')\cos m\varphi =$$
$$= P_n(\mu\mu' - (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi),$$

причем ряд сходится равномерно относительно φ.

Если последнее из перечисленных условий нарушается, то ряд сходится и имеет указанную сумму лишь для тех значений φ, *при которых* ζ_φ *лежит по ту же сторону от разреза, что и* ζ_π.

227. Остается рассмотреть случай, когда μ и μ' оба лежат на действительной оси между точками -1 и 1. Сместим временно разрез таким образом, чтобы он проходил по кривой, соединяющей точки -1 и 1, под действительной осью. Тогда функции $P_n(\mu)$ и $Q_n(\mu)$ могут быть продолжены непрерывно через отрезок действительной оси от -1 до 1 и на самом этом отрезке их значения будут $P_n^m(\mu + 0\cdot i)$ и $Q_n^m(\mu + 0\cdot i)$.

Применим результаты п. 220 и 221 к случаю $\mu = \cos\eta$, $\mu' = \cos\eta'$. При этом

$$P_n(\zeta_\varphi) = P_n(\cos\gamma + 0\cdot i), \qquad Q_n(\zeta_\varphi) = Q_n(\cos\gamma + 0\cdot i),$$

где $\cos\gamma = \cos\eta\cos\eta' + \sin\eta\sin\eta'\cos\varphi$. Учитывая равенства

$$P_n^m(\cos\theta + 0\cdot i) = e^{-\frac{1}{2}m\pi i}P_n^m(\cos\theta),$$
$$Q_n^m(\cos\theta + 0\cdot i) = e^{\frac{3}{2}m\pi i}\left\{Q_n^m(\cos\theta) - \frac{1}{2}\pi i P_n^m(\cos\theta)\right\}$$

(см гл. V, п. 133), мы видим, что, согласно теореме п. 220, при $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \eta' < \frac{\pi}{2}$

$$P_n(\cos\eta)\,P_n(\cos\eta') + 2\sum\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}P_n^m(\cos\eta)\,P_n^m(\cos\eta')\cos m\varphi = P_n(\cos\gamma),$$

причем сходимость этого ряда равномерна относительно φ.

Условие $\left|\frac{\mu+1}{\mu-1}\right| < \left|\frac{\mu'+1}{\mu'-1}\right|$ (см. п. 223) при $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \eta' < \frac{\pi}{2}$ принимает вид $\cos\eta < \cos\eta'$, т. е. $\eta > \eta'$. Отсюда, если это условие выполняется, ряд

$$P_n(\cos\eta')\left[Q_n(\cos\eta) - \frac{1}{2}\pi i P_n(\cos\eta)\right] +$$
$$+ 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}P_n(\cos\eta')\left[Q_n^m(\cos\eta) - \frac{1}{2}\pi i P_n^m(\cos\eta)\right]\cos m\varphi$$

равномерно сходится к $Q_n(\cos\gamma)-\frac{1}{2}\pi i P_n(\cos\gamma)$ В самом деле, в этом случае $\zeta_\pi=A=\cos(\eta+\eta')$, $B=i\sin(\eta+\eta')$, $C=0$ и $\arg\left[\frac{-\zeta_\pi}{(\zeta_\pi^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right]=\frac{\pi}{2}$; отсюда $\operatorname{ch} ip=\frac{i\sin(\eta+\eta')}{i\sin(\eta+\eta')}=1$ и, следовательно, $p=0$. Далее, $\zeta_0=\cos(\eta-\eta')$ $B=i\sin(\eta-\eta')$, $C=0$ и также $p=0$.

Применив предыдущий результат к $P_n(\cos\gamma)$, получим теорему:

Если $0<\eta<\frac{\pi}{2}$, $0<\eta'<\frac{\pi}{2}$ *и* $\eta>\eta'$, *то*

$$P_n(\cos\eta')\,Q_n(\cos\eta)+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}P_n^m(\cos\eta')\,Q_n^m(\cos\eta)\cos m\varphi=Q_n(\cos\gamma),$$

и ряд сходится равномерно относительно φ.

Чтобы распространить доказанные теоремы на случай, когда η заключено в промежутке $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, положим $\bar\eta=\pi-\eta$; тогда $0<\bar\eta<\frac{\pi}{2}$. Согласно формуле (62) гл. V, будем иметь

$$P_n^m(\cos\eta)=(-1)^m P_n^m(\cos\bar\eta)\cos n\pi-(-1)^m\frac{2}{\pi}\sin n\pi\,Q_n^m(\cos\bar\eta).$$

Так как при $\bar\eta>\eta'$, т. е. при $\eta+\eta'<\pi$, ряды

$$P_n(\cos\bar\eta)\,P_n(\cos\eta')+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}P_n^m(\cos\bar\eta)\,P_n^m(\cos\eta')\cos m\varphi,$$

$$Q_n(\cos\bar\eta)\,P_n(\cos\eta')+2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}Q_n^m(\cos\bar\eta)\,P_n^m(\cos\eta')\cos m\varphi$$

равномерно сходятся соответственно к

$$P_n(\cos\eta'\cos\bar\eta+\sin\eta'\sin\bar\eta\cos\varphi),\qquad Q_n(\cos\eta'\cos\bar\eta+\sin\eta'\sin\bar\eta\cos\varphi),$$

то, умножая эти ряды на $\cos n\pi$ и $\frac{2}{\pi}\sin n\pi$ и вычитая один из другого, получим

$$P_n(\cos\eta)\,P_n(\cos\eta')+2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}(-1)^m P_n^m(\cos\eta)\,P_n^m(\cos\eta')\cos m\varphi=$$
$$=P_n(-\cos\eta\cos\eta'+\sin\eta\sin\eta'\cos\varphi)\cos n\pi-$$
$$-\frac{1}{2}\pi\sin n\pi\,Q_n(-\cos\eta\cos\eta'+\sin\eta\sin\eta'\cos\varphi)=$$
$$=P_n(\cos\eta\cos\eta'-\sin\eta\sin\eta'\cos\varphi).$$

При этом ряд сходится равномерно. Взяв $\pi-\varphi$ вместо φ, мы получим теорему:

Если $0<\eta'<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\eta<\pi$ *и* $\eta+\eta'<\pi$, *то*

$$P_n(\cos\eta)\,P_n(\cos\eta')+2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}P_n^m(\cos\eta)\,P_n^m(\cos\eta')\cos m\varphi=$$
$$=P_n(\cos\eta\cos\eta'+\sin\eta\sin\eta'\cos\varphi),$$

причем ряд сходится равномерно относительно φ.

Воспользовавшись соотношением

$$Q_n^m(\cos\eta)=(-1)^{m+1}\cos n\pi\,Q_n^m(\cos\bar\eta)-\frac{1}{2}\pi(-1)^m\sin n\pi\,P_n^m(\cos\bar\eta)$$

(см. формулу (63) гл. V), мы подобным же образом придем к такой теореме:

Если $0<\eta'<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\eta<\pi$ *и* $\eta+\eta'<\pi$, *то*

$$Q_n(\cos\eta)\,P_n(\cos\eta')+2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}Q_n^m(\cos\eta)\,P_n^m(\cos\eta'),$$

причем ряд сходится равномерно относительно φ.

§ 5. ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ДЛЯ Q_n

228. Имея в виду приложения, мы найдем еще формулу для $Q_n\{\nu\nu'+(\nu^2+1)^{\frac{1}{2}}(\nu'^2+1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}v\}$ с действительными положительными ν, ν' и целым положительным n. Обозначим $\zeta=\nu\nu'+(\nu^2+1)^{\frac{1}{2}}(\nu'^2+1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}v$ и рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{(\zeta+b\operatorname{ch}u+c\operatorname{sh}u)^{n+1}},$$

где

$$b=\nu'(\nu^2+1)^{\frac{1}{2}}+\nu(\nu'^2+1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}v,\qquad c=\operatorname{sh}v\,(1+\nu'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, ζ, b, c действительны и $\zeta^2-b^2-c^2=1$. Поэтому такой интеграл можно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{\{\zeta+(\zeta^2-1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}(u-i\delta)\}^{n+1}},$$

где положено $b=(\zeta^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\delta$, $c=(\zeta^2-1)^{\frac{1}{2}}\sin\delta$); при этом δ действительно и заключено между 0 и $\frac{\pi}{2}$. Согласно п. 172, значение этого интеграла есть $Q_n(\operatorname{ch}\zeta)$, так как $\zeta+(\zeta^2-1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}(u-i\delta)$ не имеет нулей при $0\leqslant\delta<\pi$, так что в интеграле можно положить $\delta=0$.

Возьмем теперь среднее арифметическое интегралов

$$\int_0^{\operatorname{arcctg}\nu}\frac{\{\mu-(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\chi\}^n}{\{\mu'+\cos(\chi\pm iv)(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}}\}^{n+1}}\,d\chi,$$

где $\mu=i\nu$, $\mu'=i\nu'$.

Если разложить $\{\mu'+\cos(\chi\pm iv)(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}}\}^{-n-1}$ так, как это было сделано в п. 185, то среднее арифметическое этих двух выражений можно будет представить в виде ряда

$$\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\Pi(n)\,\Pi(m-n-1)}Q_n^m(\mu')\,e^{-mv}\cos m\chi,$$

сходящегося равномерно относительно χ.

Среднее арифметическое указанных выше интегралов можно тогда представить посредством ряда

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\Pi(n)\,\Pi(m-n-1)} Q_n^m(\mu')\, e^{-mv} \int_0^{\operatorname{arc\,ctg}\nu} \{\mu-(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\chi\}^n \cos m\chi\, d\chi,$$

который, положив $u=-i\chi$ и воспользовавшись формулой (118) гл. V, запишем в виде

$$-i \sum_{m=n+1} \frac{(-1)^{n+m+1}}{\Pi(m-n-1)\,\Pi(m+n)} Q_n^m(\mu)\, Q_n^m(\mu')\, e^{-mv}.$$

С другой стороны, произведем в интегралах

$$\int_0^{\operatorname{arc\,ctg}\nu} \frac{\{\mu-(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\chi\}^n}{\{\mu'+\cos(\chi\pm iv)\,(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\}^{n+1}}\, d\chi$$

замену переменного, положив

$$\{\nu-\cos\chi\,(\nu^2+1)^{\frac{1}{2}}\}\,\{\nu+\operatorname{ch} u\,(\nu^2+1)^{\frac{1}{2}}\}=-1;$$

мы получим для их среднего арифметического выражение

$$(-1)^{n+1}\, i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(\zeta+b\operatorname{ch} u+c\operatorname{sh} u)^{n+1}} = i\,(-1)^{n+1}\, Q_n^m(\zeta).$$

Мы приходим таким образом к теореме:

$$Q_n(\zeta) = \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{\Pi(m-n-1)\,\Pi(m+n)} Q_n^m(\mu)\, Q_n^m(\mu')\, e^{-mv},$$

где v — действительное положительное, $\zeta=\nu\nu'+(\nu^2+1)^{\frac{1}{2}}(\nu'^2+1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch} v$, $\mu=i\nu$, $\mu'=i\nu'$.

Эта теорема принадлежит Гейне[1]). Слегка изменив доказательство, ее можно обобщить на произвольные n.

[1]) Kugelfunktionen, т. I, стр. 339.

Глава IX

НУЛИ ФУНКЦИЙ ЛЕЖАНДРА И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

229. В п. 14 было показано, что все нули многочленов Лежандра $P_n(\mu)$ лежат в промежутке $-1<\mu<1$.

В этой главе мы займемся рассмотрением количества и расположения нулей общих функций Лежандра и присоединенных функций. Макдональд доказал[1]), что при действительных и положительных m и $n+\frac{1}{2}$ функция $P_n^{-m}(\mu)$ в промежутке $(-1, 1)$ имеет $E(n-m+1)$ действительных нулей; $E(z)$ обозначает наибольшее из целых чисел, меньших z, при $z>1$, и $E(z)=0$ для всех остальных значений z. Стильтьес доказал, что при n целом положительном или равном нулю функция $Q_n(\mu)$ не имеет нулей в комплексной плоскости μ с разрезом вдоль $(-1, 1)$. Общее исследование нулей функций $P_n(\mu)$ и $Q_n(\mu)$ произвел Хилл в двух своих мемуарах[2]), содержащих пространное изложение этого предмета. Хилл нашел также число нулей функций $P_n^m(\mu)\left(=(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m}{d\mu^m}P_n(\mu)\right)$ при целом положительном m. Кроме того, он рассмотрел случай $P_n(\mu)$ с комплексным n. Изложенное ниже исследование числа нулей функций $P_n^m(\mu)$ с действительными n и m основано на известной теореме Клейна[3]), о том, что гипергеометрическая функция $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ с действительными α, β, γ имеет в промежутке $(0, 1)$ действительной оси

$$E\left(\frac{|\alpha-\beta|-|\gamma-\alpha-\beta|-|1-\gamma|+1}{2}\right)+k$$

нулей, где k равно 0 или 1, а при $\gamma>1$ всегда $k=0$.

Нам понадобится также теорема Штурма, состоящая в том, что если функции $p(x)$ и $q(x)$ однозначны и непрерывны в замкнутом промежутке $a\leqslant x\leqslant b$, а $y_1(x)$ и $y_2(x)$ суть линейно независимые решения дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0,$$

то между любыми двумя соседними нулями функции $y_1(x)$ в промежутке (a, b) находится один, и только один, нуль функции $y_2(x)$.

§ 2. НУЛИ ФУНКЦИЙ $P_n^m(\mu)$, $\mu=\cos\theta$ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ n И m

230. Так как $P_{-n-1}^m(\mu)=P_n^m(\mu)$, то, не нарушая общности, можно предполагать, что $n+\frac{1}{2}\geqslant 0$. При подсчете числа нулей мы не будем принимать в расчет нули в особых точках $\mu=1$ и $\mu=-1$. При $\mu=\cos\theta$ для

---

[1]) Proc. Lond. Math. Soc. (1), 34 (1902), 52.

[2]) Arkiv för Mat., 13, № 17 (1918—1919); 17, № 22 (1922—1923).

[3]) Math. Ann., 37 (1890), 573; см. также Hurwitz, Math. Ann., 38 (1891), 452, и Van Vleck, Trans. Amer. Math. Soc., 3 (1902).

значений m, отличных от целых положительных, имеет место формула

$$P_n^m(\mu)=\frac{1}{\Pi(-m)}\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1-\mu}{2}\right),$$

а для целых положительных m — формула

$$P_n^m(\mu)=\frac{1}{2^m\Pi(m)}\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)}(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m} F\left(m-n,\ n+m+1;\ 1+m;\ \frac{1-\mu}{2}\right).$$

Из первой формулы мы заключаем, что для m, не равного никакому целому положительному числу, число нулей $P_n^m(\mu)$ как функции от θ равно

$$E\left(\frac{|2n+1|-2|m|+1}{2}\right)+k,$$

где $k=0$, когда $m<0$. Таким образом, при $m<0$ число нулей есть $E(n+m+1)$ — результат, который другим способом получил Макдональд. При $|m|\geqslant n$ это число равно нулю.

Из второй формулы вытекает, что при целом положительном m число нулей равно

$$E\left(\frac{|2n+1|-2|m|+1}{2}\right)+k,$$

причем $k=0$, когда $m>0$. Таким образом, мы имеем $E(n-m+1)$ нулей при $m\geqslant n$ это число равно нулю.

Если $m=0$, то, так как при не целом n и $\mu=-1+2\varepsilon$, $\varepsilon\to 0$, функция $F\left(-n,\ n+1;\ 1;\ \frac{1-\mu}{2}\right)$ асимптотически равна $\frac{\sin n\pi}{\pi}\ln\varepsilon$, эта гипергеометрическая функция в окрестности $\mu=-1$ положительна или отрицательна, в зависимости от того, четно или нечетно $E(n+1)$. Так как при $\mu=1$ эта гипергеометрическая функция положительна, то четность числа ее нулей в рассматриваемом интервале совпадает с четностью $E(n+1)$; отсюда следует, что $k=0$. Когда n — целое положительное, то, как известно, число нулей равно $E(n+1)$. Таким образом, когда $m=0$, $E(n+1)$ выражает число нулей при любом $n\geqslant-\frac{1}{2}$.

Теперь нужно найти значение k в тех случаях, когда 1) m — число положительное, но не целое, 2) m — целое отрицательное.

1. Если $m>0$ и $n\geqslant-\frac{1}{2}$, причем оба эти числа не цѐлые, то при $\mu\sim-1$

$$F\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1-\mu}{2}\right)\sim\frac{\Pi(m-1)\,\Pi(-m)}{\Pi(-n-1)\,\Pi(n)}\left(\frac{2}{1+\mu}\right)^m.$$

А так как

$$\frac{\Pi(m-1)\,\Pi(-m)}{\Pi(-n-1)\,\Pi(n)}=-\frac{\sin n\pi}{\sin m\pi},$$

то такая гипергеометрическая функция при $\mu\sim-1$ положительна, если $\sin n\pi$ и $\sin m\pi$ имеют разные знаки, и отрицательна, если $\sin n\pi$ и $\sin m\pi$ одного знака. Но $F(-n,\ n+1;\ 1-m;\ 0)=1$, поэтому число нулей четно, если знаки $\sin n\pi$ и $\sin m\pi$ противоположны, и нечетно, если их знаки одинаковы.

Пусть $n=\alpha+f$, $m=\beta+f'$, где α и β — числа целые, а f и f' — положительные <1. Тогда

если $\alpha>\beta$, то $E(n-m+1)=E(\alpha-\beta+f-f'+1)=\begin{cases}\alpha-\beta+1 & \text{при } f>f',\\ \alpha-\beta & \text{при } f\leqslant f';\end{cases}$

если $\alpha=\beta$, то $E(n-m+1)=\begin{cases}1 & \text{при } f>f',\\ 0 & \text{при } f\leqslant f';\end{cases}$

если $\alpha<\beta$, то $E(n-m+1)=0$.

Так как знаки $\sin(\alpha+f)\pi$ и $\sin(f'+\beta)\pi$ одинаковы или противоположны, в зависимости от того, четно или нечетно $|\alpha-\beta|$, то в соответствии с этим оказывается четным или нечетным число нулей. Таким образом, если $\alpha>\beta$, $f>f'$, то $k=0$; если $\alpha>\beta$, $f\leqslant f'$, то $k=1$; если $\alpha=\beta$, $f>f'$, то $k=0$; но если $f\leqslant f'$, то $k=1$. Если же $\alpha<\beta$, то $k=0$ при четном $\beta-\alpha$ и $k=1$ при нечетном $\beta-\alpha$; число нулей при этом равно соответственно нулю или единице.

В том случае, когда n—целое положительное, а m—положительное, но не целое, то первый член

$$F\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1-\mu}{2}\right)$$

равен 1, а последний —

$$\frac{(-n)(-n+1)\ldots(-n+n-1)(n+1)\ldots(n+1+n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n(1-m)(2-m)\ldots(n-m)}\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^n;$$

знак последнего члена совпадает со знаком выражения

$$\frac{(-1)^n}{(1-m)(2-m)\ldots(n-m)}.$$

Когда это последнее положительно, мы имеем четное число нулей, когда оно отрицательно, — нечетное. При $m>n$ оно положительно, и действительных нулей нет вовсе. Когда m заключено между 0 и 1, это выражение положительно или отрицательно, в зависимости от того, четно или нечетно n, и число нулей в этом случае равно n. Когда m заключено между $r-1$ и r, где $r\leqslant n$, то знак рассматриваемого выражения совпадает со знаком $(-1)^{n-r+1}$, следовательно, число нулей четно или нечетно, в зависимости от того, четно или нечетно $n-r+1$; при этом

$$E(n-m+1)=E(n-r+2)=n-r+1$$

и $k=0$.

2. При целом отрицательном m мы имеем

$$P_n^m(\mu)=\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)}P_n^{-m}(\mu);$$

функции $P_n^m(\mu)$ и $P_n^{-m}(\mu)$ имеют одинаковое число нулей, равное $E(n+m+1)$.

При целом положительном n функция $F\left(-n,\ n+1;\ 1-m,\ \frac{1-\mu}{2}\right)$ алгебраическая. Так как

$$P_n^{-m}(\mu)=\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}P_n^m(\mu),$$

то нули функций $P_n^m(\mu)$ и $P_n^{-m}(\mu)$ совпадают [см. формулу (33) гл. V]. Поэтому число нулей функции $P_n^m(\mu)$ при целых положительных n, m и $m\leqslant n$ равно $E(n-m+1)$. Если $m>n$, то $P_n^m(\mu)\equiv 0$.

Итак, доказана следующая теорема:

При $m<0$, $n+\frac{1}{2}\geqslant 0$ число действительных нулей функции $P_n^m(\mu)$ в промежутке $(-1, 1)$ равно $E(n-m+1)$. Если $m>0$, $n\geqslant -\frac{1}{2}$, то это число равно $E(n-m+1)$ при $\alpha\geqslant\beta$, $f>f'$, а также при $\alpha<\beta$ и $\beta-\alpha$ нечетном; оно равно $E(n-m+1)+1$ при $\alpha>\beta$, $f\leqslant f'$, а также при $\alpha<\beta$ и $\beta-\alpha$ четном. Если n целое положительное, то число нулей равно $E(n-|m|+1)$. В этой теореме $n=\alpha+f$, $m=\beta+f'$, где α и β — целые, и $0<f<1$, $0<f'<1$.

§ 3. ЧИСЛО НУЛЕЙ ФУНКЦИЙ $P_n^m(\mu)$ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ n И m ПРИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОМ $\mu > 1$

231. Займемся теперь отысканием числа нулей функций $P_n^m(\mu)$ при действительных значениях μ, больших 1; n и m предполагаются действительными. Кроме того, мы предположим, что $2n+1 \geqslant 0$.

Согласно гл. V [см. формулу (41)],

$$P_n^m(\mu) = \frac{1}{\Pi(-m)}\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m}\left(\frac{\mu+1}{2}\right)^{-n-1} F\left(n+1,\ n-m+1;\ 1-m;\ \frac{\mu-1}{\mu+1}\right). \tag{а}$$

В случае целого положительного m эта формула принимает вид

$$P_n^m(\mu) = \\ = \left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{2}m}\left(\frac{\mu+1}{2}\right)^{-n-1}\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)\,\Pi(m)} F\left(n+1,\ n+m+1;\ 1+m;\ \frac{\mu-1}{\mu+1}\right) \tag{б}$$

(см. п. 131). Из (б) прямо следует, что при целом неотрицательном m функция $P_n^m(\mu)$ не имеет нулей, когда μ заключено в промежутке $(1, \infty)$, иначе говоря, когда $\frac{\mu-1}{\mu+1}$ заключено в промежутке $(0, 1)$.

Применяя к (а) теорему Клейна, мы получим, что число нулей $P_n^m(\mu)$ как функции от $\frac{\mu-1}{\mu+1}$ равно $E\left(\frac{|m|-|2n+1|-|m|+1}{2}\right)+k$, где k есть 0 или 1, а при $m<0$ непременно $k=0$. Таким образом, при $m<0$ функция $P_n^m(\mu)$ не имеет нулей, а при $m>0$ число нулей равно 1 или 0.

Когда n и m оба целые (при этом мы рассматриваем лишь случай $n>m$), в рассматриваемой области нулей нет.

Когда m положительное, но не целое, гипергеометрический ряд (а) при $\mu \sim \infty$ сходится к

$$\frac{\Pi(2n)\,\Pi(-m)}{\Pi(n)\,\Pi(n-m)}\left(\frac{\mu+1}{2}\right)^{2n+1}$$

или к

$$\frac{\Pi(-m)}{\Pi(n)\,\Pi(n-m)}\ \ln\frac{\mu+1}{2},$$

в зависимости от того, положительно или равно нулю $2n+1$. Так как эта гипергеометрическая функция в точке $\mu=1$ положительна, то при $n<m$ число нулей $P_n^m(\mu)$ оказывается равным нулю или единице, в зависимости от того, положительно или отрицательно $\frac{\Pi(-m)}{\Pi(n-m)}$, что в свою очередь определяется тем, одинаковы или противоположны знаки $\sin(m-n)\pi$ и $\sin m\pi$.

Итак, доказана следующая теорема:

Функция $P_n^m(\mu)$ не имеет нулей в промежутке $(1, \infty)$ тогда, когда $m \leqslant 0$, а также при целых n и m. Если m число положительное, но не целое, и $m>n$, то функция $P_n^m(\mu)$ в этом промежутке либо не имеет нулей, либо имеет один нуль, в зависимости от того, одинаковы или противоположны знаки $\sin(m-n)\pi$ и $\sin m\pi$. Если m целое положительное или нуль, то нулей нет, каково бы ни было n. При $m \leqslant n$ нулей нет или есть единственный нуль, в зависимости от того, четно или нечетно ближайшее к m целое число, меньшее m.

§ 4. ЧИСЛО НУЛЕЙ ФУНКЦИЙ $P_n^m(\mu)$ НА ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ В ПРОМЕЖУТКЕ ОТ $-\infty$ ДО -1

232. Займемся теперь определением числа нулей функции $P_n^m(\mu)$, когда μ находится на верхнем краю разреза от $-\infty$ до -1.

Согласно формуле (34) гл. V, мы имеем

$$P_n^m(-\mu+0\cdot i)=\left[\cos n\pi\, P_n^m(\mu)-\frac{2\sin(n+m)\pi}{\pi}e^{-m\pi i}Q_n^m(\mu)\right]+i\sin n\pi\, P_n^m(\mu),$$

где выражение в прямых скобках действительно при действительных μ. Сначала предположим, что ни n, ни m не являются целыми числами; тогда легко видеть, что действительная и мнимая части функции $P_n^m(-\mu+0\cdot i)$ не могут одновременно обращаться в нуль ни при каком значении μ в промежутке $(1, \infty)$, так как они обе представляют собой решения того дифференциального уравнения, которому удовлетворяет $P_n^m(\mu)$. Следовательно, в промежутке $(-\infty, -1)$ функция $P_n^m(\mu+0\cdot i)$ не имеет нулей.

При целом n и нецелом m имеем

$$P_n^m(-\mu+0\cdot i)=(-1)^n\left[P_n^m(\mu)-\frac{2\sin m\pi}{\pi}e^{-m\pi i}Q_n^m(\mu)\right]$$

или, согласно соотношению (33) гл. V,

$$P_n^m(-\mu+0\cdot i)=(-1)^n\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)}P_n^{-m}(\mu).$$

Следовательно, $P_n^m(-\mu+0\cdot i)$ имеет нуль, если $P_n^{-m}(\mu)$ имеет нуль в промежутке $(1, \infty)$. Таким образом, при $m\geqslant 0$ нулей нет, а когда $m<0$ и n нечетно, так что $\sin(m-n)\pi$ и $\sin m\pi$ имеют противоположные знаки, существует единственный нуль.

Если число $n+m$ целое положительное или нуль, а n не целое, то

$$P_n^m(-\mu+0\cdot i)=e^{n\pi i}P_n^m(\mu),$$

и левая часть имеет нуль в том случае, когда $P_n^m(\mu)$ обладает нулем в промежутке $(1, \infty)$, что имеет место лишь тогда, когда $m>0$, а знаки $\sin(m-n)\pi$ и $\sin m\pi$ противоположны.

Если число $n+m$ целое отрицательное, то (см. п. 133)

$$P_n^m(-\mu+0\cdot i)=$$
$$=\left[\cos n\pi P_n^m(\mu)+\frac{2}{\Pi(n-m)\,\Pi(-n-m-1)}e^{m\pi i}Q_n^{-m}(\mu)\right]+i\sin n\pi\, P_n^m(\mu).$$

При этом функция $P_n^m(-\mu+0\cdot i)$, если только значение n не целое, не имеет нулей в промежутке $(-\infty, -1)$, так как ее действительная и мнимая части суть решения соответствующего дифференциального уравнения.

Если n и m оба целые, $n+m\geqslant 0$ и $n\geqslant m$, то нулей в промежутке $(-\infty, -1)$ нет, так как в этом случае дело сводится к рассмотрению функции $P_n^{-m}(\mu)$, не имеющей нулей.

Если n и m оба целые, $n+m<0$, то непременно $n-m\geqslant 0$. В этом случае мы имеем один нуль или не имеем ни одного, в зависимости от того, противоположны или одинаковы знаки значений

$$(-1)^n P_n^m(\mu)+\frac{2}{\Pi(n-m)\,\Pi(-n-m-1)}e^{m\pi i}Q_n^{-m}(\mu)$$

в точках $1+\eta$ и ∞.

Из формулы (a) п. 231 и формулы (19) гл. V вытекает, что при $\mu=1+\eta$ главная часть первого слагаемого, $(-1)^n P_n^m(\mu)$, пропорциональна

$(-1)^n \eta^{-\frac{1}{2}m}$ с положительным коэффициентом, а главная часть второго слагаемого пропорциональна $\eta^{\frac{1}{2}m}$, также с положительным коэффициентом. Поэтому главная часть всего выражения пропорциональна $\eta^{\frac{1}{2}m}$ с положительным коэффициентом, следовательно, сама положительна.

Вблизи $\mu = \infty$ главная часть $Q_n^{-m}(\mu)\,e^{m\pi i}$ пропорциональна μ^{-n-1} с положительным коэффициентом, а главная часть $\cos n\pi\, P_n^m(\mu)$ пропорциональна $(-1)^n \mu^n$, также с положительным коэффициентом; поэтому главная часть всего выражения пропорциональна $(-1)^n \mu^n$. Отсюда мы заключаем, что рассматриваемое выражение меняет знак и имеет нуль, притом единственный, в промежутке $(1, \infty)$ при нечетном n. Следовательно, когда n нечетно, $P_n^m(\mu + 0\cdot i)$ имеет один нуль в промежутке $(-\infty, -1)$, хотя у $P_n^m(\mu)$ в промежутке $(1, \infty)$ нулей нет.

Мы доказали следующую теорему:

Функция $P_n^m(\mu)$, *вообще говоря, не имеет нулей в промежутке* $(-\infty, -1)$, *вдоль верхнего (нижнего) края разреза. В этом промежутке есть один нуль в следующих случаях:* 1) *когда* n *и* m *оба целые,* $n+m$ *отрицательно и* n *нечетно,* 2) *когда* n *целое,* m — *отрицательное, но не целое, а* $\sin(m-n)\pi$ *и* $\sin m\pi$ *имеют противоположные знаки*

§ 5. КОМПЛЕКСНЫЕ НУЛИ ФУНКЦИЙ $P_n^m(\mu)$

233. Чтобы найти число комплексных нулей функции $P_n^m(\mu)$, мы определим, какое изменение претерпевает $\arg P_n^m(\mu)$, когда μ описывает некоторый замкнутый контур в верхней полуплоскости. Благодаря отсутствию особых точек внутри такого контура это изменение, деленное на 2π, дает число нулей этой функции, попавших внутрь контура.

Число нулей в нижней полуплоскости мы учтем, заметив, что число, сопряженное какому-либо нулю функции $P_n^m(\mu)$, само является ее нулем. Контур в верхней полуплоскости мы задаем следующим образом: соединяем прямолинейным отрезком точки $1+\eta+0\cdot i$ и $R+0\cdot i$, обойдя действительный нуль, если таковой содержится в промежутке $(1+\eta, R)$, по малой полуокружности; далее проводим большую полуокружность радиуса R от точки $R+0\cdot i$, до точки $-R+0\cdot i$; от $-R+0\cdot i$ до $-1-\eta+0\cdot i$ движемся по прямолинейному отрезку; соединяем точки $-1-\eta+0\cdot i$ и $-1+\eta+0\cdot i$ полуокружностью радиуса η; от точки $-1+\eta+0\cdot i$ к точке $1-\eta+0\cdot i$ движемся по прямолинейному отрезку, обходя заключенные в промежутке $(-1, 1)$ нули по малым полуокружностям; наконец, точки $1-\eta+0\cdot i$ и $1+\eta+0\cdot i$ соединяем полуокружностью радиуса η. Далее мы устремляем R к бесконечности, а η — к нулю.

Изменение $\arg P_n^m(\mu)$ на пути от $1+0$ до ∞ равно 0, если $P_n^m(\mu)$ не имеет нулей в этом промежутке, и равно $-\pi$, если имеется один нуль.

На пути от ∞ до $-\infty+0\cdot i$ рассматриваемый угол возрастает на $n\pi$, так как, согласно формуле (33) гл. V, при больших по модулю μ

$$P_n^m(\mu) = \mu^n \left\{A_0 + \varepsilon\left(\frac{1}{\mu}\right)\right\}.$$

Сначала мы допустим, что значения n и m не целые. Из формулы (a) п. 231 мы видим, что начальное значение $\arg P_n^m(\mu)$ в точке $1+\eta$ при $\eta \to 0$ равно нулю, за исключением того случая, когда $m > 0$ и $\sin m\pi < 0$. При $\mu \to \infty$ знак $P_n^m(\mu)$ совпадает со знаком $\Pi(n-m)$, т. е. $P_n^m(\mu)$ положительно, если оставить в стороне тот случай, когда $n < m$ и

$\sin(m-n)\pi<0$. Таким образом, $\arg P_n^m(\mu)$ в промежутке $(1, \infty)$ равен 0 или π соответственно при $\Pi(-m)>0$ и $\Pi(-m)<0$; если в этом промежутке находится нуль функции $P_n^m(\mu)$, то, когда μ изменяется от 1 до ∞, $\arg P_n^m(\mu)$ претерпевает изменение от 0 до $-\pi$ или от π до 0; последнее имеет место лишь при $m>0$ и $\sin m\pi<0$.

В промежутке от $-\infty+0\cdot i$ до $-1-\eta+0\cdot i$, согласно формуле (34) гл. V, имеем

$$P_n^m(-\mu+0\cdot i)=\left[\cos n\pi\, P_n^m(\mu)-\frac{2\sin(n+m)\pi}{\pi}e^{-m\pi i}\,Q_n^m(\mu)\right]+i\sin n\pi\, P_n^m(\mu),$$

где выражение в прямых скобках действительно. Обозначив

$$\omega=\arg P_n^m(-\mu+0\cdot i),$$

будем иметь

$$\operatorname{tg}\omega=\frac{\sin n\pi}{\cos n\pi-L(\mu)},\quad \text{где}\quad L(\mu)=\frac{2\sin(n+m)\pi}{\pi}e^{-m\pi i}\frac{Q_n^m(\mu)}{P_n^m(\mu)}.$$

Из формулы (19) гл. V мы видим, что $e^{-m\pi i}Q_n^m(\mu)$ сохраняет знак в промежутке $(1, \infty)$. Покажем, что в любом промежутке, лежащем внутри $(1, \infty)$ и не содержащем нулей $P_n^m(\mu)$, функция $\dfrac{e^{-m\pi i}Q_n^m(\mu)}{P_n^m(\mu)}$ монотонна.

В самом деле, согласно дифференциальным уравнениям, которым удовлетворяют $P_n^m(\mu)$ и $Q_n^m(\mu)$, имеем

$$P_n^m(\mu)\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dQ_n^m(\mu)}{d\mu}\right]-Q_n^m(\mu)\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu}\right]=0,$$

откуда следует, что выражение

$$(1-\mu^2)\left[P_n^m(\mu)\frac{d}{d\mu}Q_n^m(\mu)-Q_n^m(\mu)\frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu}\right]$$

остается постоянным в указанном промежутке; поэтому выражение

$$e^{-m\pi i}P_n^m(\mu)\frac{dQ_n^m(\mu)}{d\mu}-e^{-m\pi i}Q_n^m(\mu)\frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu}$$

не меняет знака. Следовательно, в таком интервале

$$\frac{d}{d\mu}\frac{e^{-m\pi i}Q_n^m(\mu)}{P_n^m(\mu)}$$

сохраняет свой знак, т. е. функция

$$\frac{e^{-m\pi i}Q_n^m(\mu)}{P_n^m(\mu)}$$

монотонна.

Если в промежутке $(1, \infty)$ есть точка $\bar\mu$, в которой $P_n^m(\mu)$ обращается в нуль, то в промежутке $(1, \bar\mu)$ функция $\dfrac{e^{-m\pi i}Q_n^m(\mu)}{P_n^m(\mu)}$ монотонно возрастает от 0 до $+\infty$ или монотонно убывает от 0 до $-\infty$. В точке $\bar\mu$ эта функция претерпевает скачок от $+\infty$ к $-\infty$ или от $-\infty$ к $+\infty$ и далее, в промежутке $(\bar\mu, \infty)$, она снова монотонна.

Так как $\cos n\pi-L(\mu)$ в промежутке $(1, \infty)$ либо только возрастает, либо только убывает, то так же ведет себя и $\operatorname{tg}\omega$. Это справедливо даже тогда, когда $\cos n\pi - L(\mu)$ обращается в нуль в какой-нибудь точке этого промежутка, так как в такой точке $\operatorname{tg}\omega$, если он возрастает, претерпевает скачок от $+\infty$ к $-\infty$ или, если он убывает, — от $-\infty$ к $+\infty$.

Отсюда следует, что при изменении μ от 1 до ∞ угол ω либо только возрастает, либо только убывает.

Какая из этих двух возможностей осуществляется в каждом конкретном случае, можно установить по поведению ω вблизи $\mu = +\infty$.

Воспользовавшись для $e^{-m\pi i}Q_n^m(\mu)$ и $P_n^m(\mu)$ формулой (19) гл. V и формулой (а) п. 231, получим при больших μ асимптотическое равенство $L(\mu) \sim A\sin(n+m)\pi\frac{\Pi(n+m)\Pi(n-m)}{\mu^{2n+1}}$, где A — положительная постоянная. Тогда вблизи $\mu = +\infty$ будем иметь приближенное равенство $\operatorname{tg}(\omega - n\pi) = L(\mu)\sin n\pi$; следовательно, ω будет возрастать, начиная с $n\pi$, или с $(n-1)\pi$, или с $(n+1)\pi$, если

$$\sin(n+m)\pi\sin n\pi\,\Pi(n+m)\Pi(n-m) > 0,$$

и убывать, если это произведение отрицательно.

Когда $P_n^m(\mu)$ не имеет нуля в промежутке $(1, \infty)$, изменение $\arg P_n^m(-\mu+0\cdot i)$ при изменении μ от ∞ до 1 по абсолютной величине меньше π, так как в этом случае $\operatorname{Im}[P_n^m(-\mu+0\cdot i)]$ нигде не обращается в нуль. Когда у функции $P_n^m(\mu)$ в промежутке $(1, \infty)$ есть один нуль, абсолютная величина изменения $\arg[P_n^m(-\mu+0\cdot i)]$ — обозначим ее $\lambda\pi$ — меньше 2π.

Случай, когда $n+m$ целое положительное, тривиален; при этом $P_n^m(-\mu+0\cdot i) = e^{n\pi i}P_n^m(\mu)$ и, если у $P_n^m(\mu)$ в рассматриваемом промежутке нуля нет, $\arg P_n^m(-\mu+0\cdot i)$ остается постоянным, т. е. $\lambda = 0$; если же $P_n^m(\mu)$ обладает нулем, то $\arg P_n^m(-\mu+0\cdot i)$ изменяется на π, т. е. $\lambda = 1$.

Если $n+m$ целое отрицательное, то произведение $\sin(n+m)\pi e^{-m\pi i}Q_n^m(\mu)$ теряет смысл и вместо него в выражении $P_n^m(-\mu+0\cdot i)$ нужно брать

$$\frac{-\pi}{\Pi(n-m)\Pi(-n-m-1)}e^{m\pi i}Q_n^{-m}(\mu);$$

выражение $\cos n\pi - L(\mu)$ может при этом обращаться в нуль в промежутке $(0,1)$.

Случай, когда $n+m$ целое, требует особого рассмотрения.

Когда μ огибает полуокружность радиуса ε от точки $-1-\varepsilon$ до точки $-1+\varepsilon$, $\arg P_n^m(-\mu+0\cdot i)$ получает приращение, предел которого при $\varepsilon \to 0$ равен $\frac{1}{2}|m|\pi$. Это видно из формулы (51) гл. V, в которой при $m > 0$ главным оказывается второй член, а при $m < 0$ — первый. Приращение $\arg P_n^m(-\mu+0\cdot i)$ на полуокружности, соединяющей точки $1-\varepsilon$ и $1+\varepsilon$, стремится к $\frac{1}{2}m\pi$. Таким образом, сумма обоих приращений в случае $m > 0$ стремится к $m\pi$, в случае $m < 0$ — к нулю.

В предположении, что $n > 0$ и ни одно из чисел n, m и $n+m$ не является целым, мы рассмотрим все возможные случаи.

1. При $m < 0$ в промежутке $(1, \infty)$ функция $P_n^m(\mu)$ не обращается в нуль, поэтому $\arg P_n^m(-\mu+0\cdot i)$ тождественно равен нулю. Изменения $\arg P_n^m(-\mu+0\cdot i)$ при переходе через точки -1 и 1 взаимно уничтожаются. Как видно из формулы (51) гл. V, значение $\arg P_n^m(-\lambda+0\cdot i)$ в точке $-1-\eta+0\cdot i$ при $\eta \to 0$ стремится к $2I\pi$ или к $(2I+1)\pi$ соответственно в случаях $\Pi(-m-n-1) > 0$ и $\Pi(-m-n-1) < 0$, где I — некоторое целое число.

Итак, $n\pi + \lambda\pi = 2I\pi$ или $(2I+1)\pi$ соответственно при $\Pi(-n-m-1) > 0$ и $\Pi(-n-m-1) < 0$. Так как $n = E(n) + f$, где $0 < f < 1$, то, в предположении, что $n > 0$, при $E(n)$ четном или равном нулю $E(n)+f+\lambda=2I$ или $2I+1$, в зависимости от того, положительно или отрицательно $\Pi(-m-n-1)$. Оно положительно при $|m| \geqslant n$, а также при $|m| < n$ и $\sin(n-|m|) < 0$. Следовательно, если $\Pi(|m|-n-1) > 0$, то при $E(n)$ четном $f+\lambda=0$, так как $|\lambda| < 1$, $f < 1$; при $E(n)$ нечетном $f+\lambda=1$. Если $\Pi(|m|-n-1) < 0$, то $f+\lambda=0$ при нечетном $E(n)$ и $f+\lambda=1$ при четном $E(n)$. Таким образом, изменение $\arg P_n^m(\mu)$ на пути до точки $-1-\eta$ в любом случае при $n > 0$ равно $E(n)\pi$ или $E(n)\pi+\pi$.

Приращение $\arg P_n^m(\mu)$ в промежутке $(-1, 1)$ равно $E(n-|m|+1)\pi$; при $n \leqslant |m|$ оно равно нулю. Полное приращение $\arg P_n^m(\mu)$ вдоль всего контура равно $[E(n)-E(n-|m|+1)]\pi$ или $[E(n)+1-E(n-|m|+1)]\pi$.

Число комплексных корней во всей плоскости должно быть четным, поэтому оно равно тому из чисел

$$E(n)-E(n-|m|+1), \qquad E(n)+1-E(n-|m|+1),$$

которое четно. При $|m| \geqslant n$ это число равно $E(n)$ или $E(n+1)$.

Когда $-\frac{1}{2} \leqslant n < 0$, $\Pi(-m-n-1)$ положительно, $n+f=0$ и комплексных корней нет.

2. При $m > 0$ функция $P_n^m(\mu)$ либо не имеет нулей, либо имеет один нуль в промежутке $(1, \infty)$. В первом случае $\sin m\pi$ и $\Pi(n-m)$ имеют одинаковые знаки, и, как вытекает из формулы (a) п. 231, $\arg P_n^m(\mu)$ в рассматриваемом промежутке сохраняет значение 0 или π, в зависимости от того, положительно или отрицательно $\Pi(n-m)$. Последнее положительно при $n \geqslant m$; при $n < m$ знак его совпадает со знаком $\sin(m-n)\pi$. В точке $-\infty+0\cdot i$ $\arg P_n^m(\mu)$ равен $n\pi$ или $(n+1)\pi$. Если $P_n^m(\mu)$ обладает нулем, то, когда μ проходит через этот нуль, $\arg P_n^m(\mu)$ изменяется от π до 0 при $\Pi(n-m) > 0$ или от 0 до $-\pi$ при $\Pi(n-m) < 0$. В первом случае $\arg P_n^m(\mu)$ в точке $-\infty+0\cdot i$ равен $n\pi$, во втором $(n-1)\pi$.

Сначала допустим, что в промежутке $(1, \infty)$ нулей нет. В точках $\mu=-1$ и $\mu=1$, как видно из формул (51) и (11) гл. V, $\arg P_n^m(\mu)$ претерпевает изменение, равное $m\pi$. Первая из этих формул показывает, что $\arg P_n^m(-1-\eta+0\cdot i)$ при $\eta \to 0$ стремится к $2I\pi-m\pi$ или к $(2I+1)\pi-m\pi$, в зависимости от того, отрицателен или положителен $\sin n\pi$. Так же, как и выше, приращение $\arg P_n^m(\mu)$ в промежутке $(-\infty+0\cdot i, -1-\eta+0\cdot i)$ при $\eta \to 0$ стремится к $\lambda\pi$, где $|\lambda| < 1$.

Когда $P_n^m(\mu)$ не имеет нулей в промежутке $(1, \infty)$, знак $\sin m\pi$ совпадает со знаком $\Pi(n-m)$, а λ имеет тот же знак, что произведение $\sin(n+m)\pi \sin n\pi \Pi(n-m)$. Нам придется рассмотреть следующие восемь случаев:

	$\Pi(n-m)$	$\sin n\pi$	$\sin(n+m)\pi$	λ	$\arg P_n^m(\mu)$ $1<\mu<\infty$	$\arg P_n^m(\mu)$ $\mu=-\infty$
1)	+	+	+	+	0	$n\pi$
2)	+	+	—	—	0	$n\pi$
3)	+	—	—	+	0	$n\pi$
4)	+	—	+	—	0	$n\pi$
5)	—	+	+	—	π	$(n+1)\pi$
6)	—	+	—	+	π	$(n+1)\pi$
7)	—	—	—	—	π	$(n+1)\pi$
8)	—	—	+	+	π	$(n+1)\pi$

Значение $\arg P_n^m(\mu)$ в точке $-1-\eta+0\cdot i$ есть $2I\pi-m\pi$ или $(2I+1)\pi-m\pi$, где I — целое, соответственно при $\sin n\pi<0$ и $\sin n\pi>0$. Так же как и выше, $|\lambda|<1$. Когда $\sin(n+m)\pi>0$, в предположении, что $n>0$, $E(n+m)$ число четное; если $\sin(n+m)\pi<0$, то $E(n+m)$ нечетно.

В случае 1) имеем $n\pi+\lambda\pi=(2I+1)\pi-m\pi$, $n+m=E(n+m)+f'$, где $0<f'<1$ (случай целого $n+m$ оставляем пока в стороне), следовательно, $f'+\lambda=1$. Приращение $\arg P_n^m(\mu)$ вдоль всего контура равно

$$n\pi+\lambda\pi+m\pi-\{E(n-m+1)+[1]\}\pi,$$

где $[1]$ — число нулей в промежутке $(-1, 1)$; согласно теореме п. 230, оно равно 1 или 0. Следовательно, число комплексных нулей равно

$$E(n+m)+1-E(n-m+1)-[1].$$

Мы приходим к выводу, что количество комплексных нулей равно тому из двух чисел $E(n+m)-E(n-m+1)$, $E(n+m)+1-E(n-m+1)$, которое четно (в частности, может равняться нулю).

В случае 2) имеем $n\pi+\lambda\pi=(2I+1)\pi-m\pi$; при этом $f'+\lambda=0$ и количество комплексных нулей равно тому из чисел

$$E(n+m)-E(n-m+1),\quad E(n+m)-E(n-m+1)-1,$$

которое четно.

В случае 3) имеем $n\pi+\lambda\pi=2I\pi-m\pi$; при этом $f'+\lambda=1$ и количество комплексных нулей равно тому из чисел $E(n+m)+1-E(n-m+1)-[1]$, которое четно.

В случае 4) $n\pi+\lambda\pi=2I\pi-m\pi$, $\lambda+f'=0$, число нулей равно $E(n+m)-E(n-m+1)-[1]$.

В случае 5) $\pi+n\pi+\lambda\pi=(2I+1)\pi-m\pi$, $\lambda+f'=0$, число нулей равно $E(n+m)-E(n-m+1)-[1]$.

В случае 6) $\pi+n\pi+\lambda\pi=(2I+1)\pi-m\pi$, $\lambda+f'=1$, число нулей равно $E(n+m)+2-E(n-m+1)-[1]$.

В случае 7) $\pi+n\pi+\lambda\pi=2I\pi-m\pi$, $\lambda+f'=0$, число нулей равно $E(n+m)-E(n-m+1)-[1]$.

В случае 8) $\pi+n\pi+\lambda\pi=2I\pi-m\pi$, $\lambda+f'=1$, число нулей равно $E(n+m)+1-E(n-m+1)-[1]$.

Когда $P_n^m(\mu)$ имеет нуль в промежутке $(1, \infty)$, знаки $\sin m\pi$ и $\Pi(n-m)$ противоположны. При $\Pi(n-m)>0$ $\arg P_n^m(\mu)$ в промежутке $(1, \infty)$ принимает значения π и 0, а в точке $-\infty$ значение $n\pi$. При $\Pi(n-m)<0$ $\arg P_n^m(\mu)$ в промежутке $(1, \infty)$ принимает значения 0 и $-\pi$, а в точке $-\infty$ значение $(n-1)\pi$. Знак λ совпадает со знаком выражения

$$\sin(n+m)\pi\sin n\pi\,\Pi(n-m)\quad\text{и}\quad|\lambda|<2.$$

Таблица, относящаяся к рассматриваемому случаю, будет отличаться от приведенной выше двумя последними столбцами.

В первых четырех случаях за счет изменения $\arg P_n^m(\mu)$ в той точке промежутка $(1, \infty)$, где $P_n^m(\mu)$ обращается в нуль, общее число нулей должно быть уменьшено на единицу. Это число оказывается равным $E(n+m)-E(n-m+1)-[1]$ в случаях 1) и 3) и $E(n+m)-1-E(n-m+1)-[1]$ в случаях 2) и 4).

В случае 5) имеем $(n-1)\pi+\lambda\pi=(2I+1)\pi-m\pi$, $f'+\lambda=0$, и искомое число есть $E(n+m)-E(n-m+1)-[1]$.

В случае 6) имеем $(n-1)\pi+\lambda\pi=(2I+1)\pi-m\pi$,

$$E(n+m)+f'+\lambda-1=2I+1,$$

и так как $E(n+m)$ нечетно, а $\lambda>0$, то $f'+\lambda=2$; поэтому число нулей равно $E(n+m)+1-E(n-m+1)-[1]$.

В случае 7) $(n-1)\pi+\lambda\pi=2I\pi-m\pi$, $\lambda<0$, $E(n+m)$ нечетно и $\lambda+f'=0$; число нулей при этом равно

$$E(n+m)-E(n-m+1)-[1].$$

В случае 8) $(n-1)\pi+\lambda\pi=2I\pi-m\pi$, $\lambda>0$, $E(n+m)$ четно и $f'+\lambda=1$; число нулей равно $E(n+m)-E(n-m+1)-[1]$. Случай, когда $-\frac{1}{2}\leqslant n<0$ не представляет дополнительных затруднений.

Если $n+m$ целое положительное или нуль, то $\lambda=0$ и $n\pi+m\pi=2I$ или $2I+1$, таким образом, $E(n+m)-1$ равно $2I$ или $2I+1$. Так же как и выше, без труда можно рассмотреть различные возможные случаи.

Если $n+m$ целое отрицательное, то $P_n^m(\mu)$ может иметь нуль в промежутке $(-\infty, -1)$. Различные возможные случаи могут быть рассмотрены так же, как и выше. Мы рассмотрим подробно только тот случай, когда n и m оба целые.

234. Остается рассмотреть те случаи, когда хотя бы одно из чисел n и m целое.

1. Пусть m целое, а n не целое. Из формулы (33) гл. V вытекает, что $P_n^{-m}(\mu)=\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}P_n^m(\mu)$; следовательно, $P_n^{-m}(\mu)$ и $P_n^m(\mu)$ имеют одни и те же нули. Согласно формуле (б) п. 231, $P_n^m(\mu)$ не имеет нулей в промежутке $(1, \infty)$; нет их и в промежутке $(-\infty, -1)$. Число нулей в промежутке $(-1, 1)$ равно $E(n-|m|+1)$ (см. п. 230). Если предположить, что $m>0$, то из формулы (б) п. 231 мы увидим, что при $n>m$ $\arg P_n^m(\mu)$ в промежутке $(1, \infty)$ тождественно равен нулю, а при $n<m$ он равен 0 или π, в зависимости от того, положителен или отрицателен $\sin(m-n)\pi$. При $m>0$ функция $P_n^m(\mu)$ в окрестности $\mu=-1$ задается формулой, приведенной на стр. 217, и ее главная часть при малом $\mu+1$ есть

$$(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{\sin n\pi}{\pi}\frac{d^m}{d\mu^m}\ln\frac{\mu+1}{2}=(-1)^{m+1}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{\sin n\pi}{\pi}\frac{1}{(\mu+1)^m}.$$

Отсюда следует, что на пути от точки $-1-\eta+0\cdot i$ до точки $-1+\eta+0\cdot i$ $\arg P_n^m(\mu)$ изменяется на $\frac{1}{2}m\pi$; $\arg P_n^m(-1-\eta+0\cdot i)$ равен $2I\pi$ или $(2I+1)\pi$, где I — целое число. Приращение этого аргумента при переходе через точку $\mu=1$ равно $\frac{1}{2}m\pi$.

В предположении, что $\arg P_n^m(\mu)$ в промежутке $(1, \infty)$ равен нулю, имеем $n\pi+\lambda\pi=2I\pi$ или $(2I+1)\pi$.

Так как $n=E(n)+f$, $(n>0)$, то $f+\lambda=0$ или 1.

Приращение $\arg P_n^m(\mu)$ вдоль всего контура равно $n\pi+\lambda\pi+m\pi-E(n-m+1)\pi$, поэтому общее количество комплексных нулей равно тому из чисел $E(n)+m-E(n-m+1)$, $E(n)+m+1-E(n-m+1)$, которое четно. В том случае, когда $\arg P_n^m(\mu)=\pi$ в промежутке $(1, \infty)$, $(n+1)\pi+\lambda=2In$ или $(2I+1)\pi$, откуда $f+\lambda=0$ или 1. Приращение $\arg P_n^m(\mu)$ вдоль всего контура равно $n\pi+\lambda\pi+m\pi-E(n-m+1)\pi$ и, как и выше, общее количество комплексных нулей равно тому из чисел $E(n)+m-E(n-m+1)$, $E(n)+m+1-E(n-m+1)$, которое четно. Все это верно при $m>0$. При произвольном знаке m число комплексных нулей равно $E(n)+|m|-E(n-m+1)$ или $E(n)+|m|+1-E(n-|m|+1)$, в зависимости о того, какое из этих чисел четно. При $m=0$ комплексных нулей нет.

2. Пусть n целое, а m не целое. При этом функция $P_n^m(\mu)$ имеет всего n нулей, так как она представляет собой произведение $\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}m}$ на многочлен степени n от $\frac{1-\mu}{2}$. В промежуток $(-1, 1)$ попадает $E(n-|m|+1)$ нулей, и один нуль при нечетном n и $m<0$ оказывается в промежутке $(-\infty, -1)$.

Таким образом, мы имеем

$$n-E(n-|m|+1)$$

комплексных нулей, а когда n нечетно и $m<0$, число их равно $n-E(n-|m|+1)-1$.

3. Пусть n и m оба целые. При этом функции $P_n^{-m}(\mu)$ и $P_n^m(\mu)$ имеют одни и те же нули. Исключение составляет случай $m>n$, когда функция $P_n^m(\mu)$ не существует; впрочем, вместо нее можно рассматривать $\Pi(n-m)P_n^m(\mu)$. При $0<m<n$, согласно формуле (12) гл. V, $P_n^m(\mu)$ представляет собой произведение $(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}$ на многочлен степени $n-m$.

Таким образом, при $0<m<n$ комплексных нулей нет, так как $E(n-m+1)$ — число действительных нулей в промежутке $(-1, 1)$ — равно $n-m$. Если $m<0$, то $P_n^m(\mu)$, согласно формуле (11) гл. V, имеет n нулей; если $|m|\geqslant n$, то нулей в промежутке $(-1, 1)$ нет (см. п. 230).

В промежутке $(1, \infty)$ нулей нет (см. п. 231).

В промежутке $(-\infty+0\cdot i, -1+0\cdot i)$ при $m<0$ и $|m|>n$ имеем (см. п. 232)

$$P_n^m(-\mu+i\cdot 0)=(-1)^n P_n^m(\mu)+\frac{2}{\Pi(n-m)\,\Pi(-n-m-1)}e^{m\pi i}Q_n^{-m}(\mu).$$

Выражение в правой части может иметь один нуль; мы покажем, что нуль существует при четном n, а при нечетном n нулей нет. В самом деле, полиномиальный множитель

$$F\left(-n,\ n+1;\ 1+|m|;\ \frac{1+\mu}{2}\right),$$

входящий в $P_n^m(-\mu)$, положителен при $\mu+1=0$, а при $\mu+1\to\infty$ знак его определяется знаком $(-1)^n$; значит, при нечетном n он имеет один корень.

Так, например, легко проверить, что $\mu=-2$ является нулем функции $P_1^2(\mu)$. Следовательно, число комплексных нулей функции $P_n^m(\mu)$ в том случае, когда $m<0$ и $|m|>n$, равно n или $n-1$, в зависимости от того, которое из них четно.

Хилл занимался[1]) определением числа комплексных нулей функции $P_n^m(\mu)$ в том случае, когда число n действительное, хотя, может быть, не целое, а m целое положительное. Он пришел к выводу, что число комплексных нулей равно тому из чисел $E(n)-E(n-m+1)$, $E(n+1)-E(n-m+1)$, которое четно. Как у нас, нули в точках 1 и -1 им не учитывались.

Этот результат не согласуется с нашими выводами; он, безусловно, неверен уже тогда, когда m и n целые положительные и $m\leqslant n$. В самом деле, при этом $P_n^m(\mu)$ представляет собой произведение $(1-\mu^2)^{\frac{m}{2}}$ на многочлен степени $n-m$, все корни которого действительны. Следовательно,

[1]) Arkiv för Mat., 13, № 17 (1918—1919), 23.

комплексных нулей нет вовсе. Такое несоответствие объясняется тем, что для оценки изменения $\arg P_n^m(\mu)$ при прохождении через точку -1 Хилл пользовался разложением (а) (см. п. 231), которое расходится вблизи этой точки.

Сформулируем теперь окончательный результат:

Если m целое, а n не целое, то число комплексных нулей равно тому из чисел

$$E(n)+|m|-E(n-|m|+1), \qquad E(n)+|m|+1-E(n-|m|+1),$$

которое четно.

Если n целое, а m не целое, то число комплексных нулей равно тому из чисел

$$n-E(n-|m|+1), \qquad n-E(n-|m|+1)-1,$$

которое четно. При $|m|\geqslant n$ оно равно n или $n-1$.

Если n и m целые, то при $0\leqslant m<n$ комплексных нулей нет. Если $m<0$ и $|m|>n$, то число комплексных нулей равно тому из чисел n или $n-1$, которое четно.

Когда ни n, ни m не целые, число комплексных нулей определяется согласно результатам п. 233.

§ 6. НУЛИ ФУНКЦИЙ $Q_n^m(\mu)$

235. Относительно нулей функций $Q_n^m(\mu)$ мы сделаем только некоторые замечания, не излагая сколько-нибудь общей теории. При действительном $n>-1$ и $m\geqslant 0$, как видно из формулы (19) гл. V, $Q_n^m(\mu)$ не имеет нулей в промежутке $(1,\infty)$ действительной оси; то же верно и тогда, когда $n+\frac{3}{2}>0$ и $n+m>0$, так как все коэффициенты соответствующего гипергеометрического ряда положительны. Из соотношения

$$Q_n^{-m}(\mu)=\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}e^{-2m\pi i}Q_n^m(\mu)$$

вытекает, что при $m<0$ функция $Q_n^m(\mu)$ не имеет нулей в промежутке $(1,\infty)$. При этом предполагается, что ни $n+m$ ни $n-m$ не равно целому отрицательному числу. При действительном $n<-1$ в промежутке $(1,\infty)$, может быть лишь один нуль $Q_n^m(\mu)$, так как, будь их два, $P_n^m(\mu)$ имела бы нуль в этом промежутке, что, вообще говоря, невозможно (см. п. 231).

Функция $Q_n^m(\cos\theta)$ не является аналитическим продолжением функции $Q_n^m(\mu)$. К $Q_n^m(\cos\theta)$ применима формула (58) гл. V, которая выражает эту функцию посредством гипергеометрического ряда, сходящегося в промежутке $(0,\pi)$ изменения θ. Если $m>0$, то из асимптотического выражения гипергеометрического ряда после некоторых преобразований мы получаем при $\theta\to 0$, иначе говоря, при $\mu\to 1$

$$Q_n^m(\mu)\sim\frac{\Pi(m-1)}{2\sec m\pi}\left(\frac{2}{1-\mu}\right)^{\frac{1}{2}m}.$$

Подобным же образом, при $\theta\to\pi$ или при $\mu\to -1$

$$Q_n^m(\mu)\sim-\frac{\Pi(m-1)}{\sec n\pi}\left(\frac{2}{1+\mu}\right)^{\frac{1}{2}m}.$$

Следовательно, число нулей функции $Q_n^m(\cos\theta)$ в промежутке $(0,\pi)$ четно или нечетно, в зависимости от того, противоположны или одинаковы знаки $\cos n\pi$ и $-\cos m\pi$. Кроме того, функция $Q_n^m(\cos\theta)$ имеет нуль между любыми двумя соседними нулями функции $P_n^m(\cos\theta)$. Число последних равно $E(n-|m|+1)$ или $E(n-|m|+1)+1$. Число нулей $Q_n^m(\cos\theta)$ может превосходить это число на 1 или на 2 за счет нулей, не лежащих между соседними нулями функции $P_n^m(\cos\theta)$.

Итак, число нулей функции $Q_n^m(\cos\theta)$ равно

$$E(n-m+1)+k,$$

где k может принимать значения $-1, 0, 1, 2$, но должно быть таким, чтобы указанное число было четным тогда, когда знаки $\cos n\pi$ и $\cos m\pi$ противоположны, и нечетным тогда, когда знаки $\cos n\pi$ и $\cos m\pi$ одинаковы.

Если n целое положительное, а $m=0$, то, так как $\cos n\pi=(-1)^n$, число нулей $Q_n(\cos\theta)$ равно $n-1$, n или $n+1$; следовательно, это число должно быть равно $n-1$ или $n+1$.

Впрочем, мы покажем, что при целом положительном число нулей функции $Q_n(\cos\theta)$ в промежутке $(0, \pi)$ равно $n+1$.

В самом деле, так как

$$Q_n(\mu)=\frac{1}{2}P_n(\mu)\ln\frac{1+\mu}{1-\mu}-W_{n-1},$$

то при μ, весьма близком к -1, знак $Q_n(\mu)$ определяется знаком $(-1)^{n+1}$ и, следовательно, $\frac{Q_n(\mu)}{P_n(\mu)}<0$. Поэтому производная $\frac{d}{d\mu}\frac{Q_n(\mu)}{P_n(\mu)}$, а вместе с ней и выражение

$$P_n(\mu)\frac{dQ_n(\mu)}{d\mu}-Q_n(\mu)\frac{dP_n(\mu)}{d\mu}$$

положительны вблизи $\mu=-1$. Но такое выражение в промежутке $(-1, 1)$ сохраняет свой знак (см. п. 233), т. е. остается в этом промежутке положительным. Пусть μ_0 — ближайший к точке -1 нуль функции $P_n(\mu)$; тогда $-Q_n(\mu_0)\frac{dP_n(\mu_0)}{d\mu_0}>0$, следовательно, $Q_n(\mu_0)$ и $\frac{dP_n(\mu_0)}{d\mu_0}$ имеют противоположные знаки. Но знак $\frac{dP_n(\mu_0)}{d\mu_0}$ определяется знаком $(-1)^{n+1}$, поэтому знак $Q_n(\mu_0)$ определяется знаком $(-1)^n$, т. е. он оказывается противоположен знаку $Q_n(\mu)$ вблизи точки $\mu=-1$. Следовательно, $Q_n(\mu)$ имеет один нуль в промежутке $(-1, \mu_0)$, и число нулей функции $Q_n(\cos\theta)$ в промежутке $(0, \pi)$ равно $n+1$.

§ 7. НУЛИ ФУНКЦИЙ $Q_n(\mu)$ ПРИ ЦЕЛОМ ПОЛОЖИТЕЛЬНОМ n

236. Стильтьес показал[1]), что функция $Q_n(\mu)$, заданная на комплексной плоскости μ с разрезом $(-\infty, 1)$ вдоль действительной оси, не имеет нулей ни действительных, ни комплексных.

Согласно определению Ф. Неймана [см. формулу (63) гл. II],

$$Q_n(\mu)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_n(u)}{\mu-u}\,du.$$

Следовательно, если μ_0 — какой-нибудь нуль функции $Q_n(\mu)$, то

$$\int_{-1}^{1}\frac{P_n(u)}{\mu_0-u}\,du=0.$$

[1]) Ann. de Toulouse, 4 (1890).

Отсюда

$$\int_{-1}^{1} \frac{\{P_n(u)\}^2}{\mu_0 - u}\,du = \int_{-1}^{1} \frac{P_n(u)\,[P_n(u) - P_n(\mu_0)]}{\mu_0 - u}\,du + P_n(\mu_0)\int_{-1}^{1} \frac{P_n(u)}{\mu_0 - u}\,du,$$

где оба интеграла в правой части равны нулю; следовательно,

$$\int_{-1}^{1} \frac{\{P_n(u)\}^2}{\mu_0 - u}\,du = 0.$$

При μ действительном, большем 1, это невозможно. Если $\mu_0 = \alpha + i\beta$ $(\beta \neq 0)$, то

$$\int_{-1}^{1} \frac{\{P_n(u)\}^2}{\alpha \pm i\beta - u}\,du = 0,$$

откуда

$$\beta \int_{-1}^{1} \frac{\{P_n(u)\}^2}{(\alpha - u)^2 + \beta^2}\,du = 0,$$

что невозможно, так как подинтегральная функция положительна. Итак, мы приходим к теореме:

При целом положительном n функция $Q_n(\mu)$ не имеет ни действительных, ни комплексных нулей.

§ 8. НУЛИ ФУНКЦИЙ $P_{-\frac{1}{2}+pi}(\mu)$

237. Определением числа действительных и комплексных нулей функций $P_n(\mu)$ с комплексным n занимался Хилл. Мы займемся действительными нулями функций $P_{-\frac{1}{2}+pi}(\mu)$ — это единственный случай комплексного n, важный для теории потенциала.

При $n = -\frac{1}{2} + pi$ мы получим из формулы (11) гл. V для $\left|\frac{1-\mu}{2}\right| < 1$

$$P_{-\frac{1}{2}+pi}(\mu) = F\left(\frac{1}{2} - pi,\ \frac{1}{2} + pi;\ 1;\ \frac{1-\mu}{2}\right) =$$

$$= 1 + \frac{\frac{1}{2^2} + p^2}{1\cdot 1}\,\frac{1-\mu}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2^2} + p^2\right)\left(\frac{3^2}{2^2} + p^2\right)}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2}\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^2 + \ldots$$

Коэффициенты этого ряда действительны и положительны, следовательно, $P_{-\frac{1}{2}+pi}(\mu)$ не имеет нулей в промежутке $(-1, 1)$.

Для отыскания числа нулей в бесконечном промежутке $(1, \infty)$ воспользуемся формулой (143) гл. V

$$P_{-\frac{1}{2}+pi}(\operatorname{ch}\psi) = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{\pi}\operatorname{cth} p\pi \int_{\psi}^{\infty} \frac{\sin pu}{(\operatorname{ch} u - \operatorname{ch}\psi)^{\frac{1}{2}}}.$$

Пусть $\psi = \frac{r\pi}{p}$, где r — целое положительное; тогда

$$P_{-\frac{1}{2}+pi}\left(\operatorname{ch}\frac{r\pi}{p}\right) = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{\pi}\operatorname{cth} p\pi \left\{ \int_{\frac{r\pi}{p}}^{\frac{(r+1)\pi}{p}} + \int_{\frac{(r+1)\pi}{p}}^{\frac{(r+2)\pi}{p}} + \ldots \right\} \frac{\sin pu}{(\operatorname{ch} u - \operatorname{ch}\psi)^{\frac{1}{2}}}\,du =$$

$$= \frac{2^{\frac{1}{2}}}{\pi}\operatorname{cth} p\pi\,(-1)^r\,[I_r - I_{r+1} + I_{r+2} - \ldots],$$

где обозначено

$$I_r=(-1)^r\int\limits_{\frac{r\pi}{p}}^{\frac{(r+1)\pi}{p}}\frac{\sin pu}{(\operatorname{ch}u-\operatorname{ch}\psi)^{\frac{1}{2}}}\,du.$$

Ясно, что $I_r>I_{r+1}>I_{r+2}>\ldots$, следовательно, $P_{-\frac{1}{2}+pi}\left(\operatorname{ch}\frac{r\pi}{p}\right)$ положительно при четном r и отрицательно при r нечетном. Таким образом, в каждом промежутке $\left(\operatorname{ch}\frac{r\pi}{p},\ \operatorname{ch}\frac{(r+1)\pi}{p}\right)$ функция $P_{-\frac{1}{2}+pi}(\mu)$ имеет нечетное число нулей. Мы приходим к такому выводу:

Функция $P_{-\frac{1}{2}+pi}(\mu)$ *имеет бесконечное множество действительных нулей; все они заключены в промежутке* $(1,\infty)$.

Нетрудно установить, что любая производная от $P_{-\frac{1}{2}+pi}(\mu)$ имеет в промежутке $(1,\infty)$ бесконечно много нулей. Следовательно, то же верно и для функций $P^m_{-\frac{1}{2}+pi}(\mu)$ с целым положительным m. В промежутке $(-1, 1)$ эти функции не имеют нулей, так как они разлагаются в ряды по $\frac{1}{2}(1-\mu)$ с действительными положительными коэффициентами.

Выведем теперь приближенные выражения нулей $P_{-\frac{1}{2}+pi}(\mu)$. Пусть $u=v+\psi$, тогда

$$P_{-\frac{1}{2}+pi}(\operatorname{ch}\psi)\frac{\pi}{2^{\frac{1}{2}}}\operatorname{th}p\pi=$$

$$=\sin p\psi\int\limits_0^\infty\frac{\cos pv}{\{\operatorname{ch}(v+\psi)-\operatorname{ch}\psi\}^{\frac{1}{2}}}\,dv+\cos p\psi\int\limits_0^\infty\frac{\sin pv}{\{\operatorname{ch}(v+\psi)-\operatorname{ch}\psi\}^{\frac{1}{2}}}\,dv.$$

Отсюда при больших ψ

$$P_{-\frac{1}{2}+pi}(\operatorname{ch}\psi)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\operatorname{cth}p\pi\, e^{-\frac{1}{2}\psi}\left[\sin p\psi\int\limits_0^\infty\frac{\cos pv}{(e^v-1)^{\frac{1}{2}}}\,dv+\cos p\psi\int\limits_0^\infty\frac{\sin pv}{(e^v-1)^{\frac{1}{2}}}\,dv\right].$$

Так как

$$\frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}+pi\right)}{\Pi(pi)}=\int\limits_0^1 t^{-\frac{1}{2}+pi}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt=$$

$$=\int\limits_0^\infty\frac{\cos pv}{(e^v-1)^{\frac{1}{2}}}\,dv-i\int\limits_0^\infty\frac{\sin pv}{(e^v-1)^{\frac{1}{2}}}\,dv=U-iV,$$

то в нуле функции $P_{-\frac{1}{2}+pi}(\mu)$ имеем приближенное равенство

$$U\sin p\psi+V\cos p\psi=0,$$

откуда большие ψ получаются из уравнения $\operatorname{tg} p\psi = -\frac{V}{U}$. Итак, для больших нулей функции $P_{-\frac{1}{2}+pi}(\mu)$ мы получаем приближенную формулу

$$\psi = \frac{1}{p}\left(-\operatorname{arctg}\frac{V}{U} + k\pi\right),$$

где

$$U - iV = \frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}+pi\right)}{\Pi(pi)}.$$

§ 9. НУЛИ $P_n^m(\mu)$ КАК ФУНКЦИИ ОТ n

238. Для некоторых краевых задач[1]) бывает нужно отыскать значения n, при которых $P_n^m(\mu) = 0$ или выполняется более общее соотношение

$$AP_n^m(\mu) + BQ_n^m(\mu) = 0,$$

где μ имеет заданное значение $\cos\theta_0$, а m — заданное действительное значение, положительное или отрицательное. Нули $P_n^m(\mu)$ как функции от n исследовал Макдональд[2]).

Мы докажем следующую теорему:

Если m действительное положительное, а μ фиксировано в промежутке $(-1, 1)$ действительной оси, то $P_n^{-m}(\mu)$ как функция от n не имеет комплексных нулей.

Согласно п. 23, мы имеем

$$(n-n')(n+n'+1)\int_{\mu}^{1} P_n^{-m}(\mu)\, P_{n'}^{-m}(\mu)\, d\mu =$$
$$= (1-\mu^2)\left\{P_{n'}^{-m}(\mu)\frac{dP_n^{-m}(\mu)}{d\mu} - P_n^{-m}(\mu)\frac{dP_{n'}^{-m}(\mu)}{d\mu}\right\}.$$

Отсюда, если n и n' — значения n, для которых $P_n^{-m}(\mu)$ при фиксированном положительном m и фиксированном μ в промежутке $(-1, 1)$ обращается в нуль, то

$$\int_{\mu}^{1} P_n^{-m}(\mu)\, P_{n'}^{-m}(\mu)\, d\mu = 0,$$

если только $n - n' \neq 0$ и $n + n' + 1 \neq 0$.

При отрицательном m этот вывод несправедлив, так как в этом случае разложение

$$P_n^{-m}(\mu) = \frac{1}{\Pi(m)}\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-n,\, n+1;\, 1+m;\, \frac{1-\mu}{2}\right)$$

расходится в точке $\mu = 1$.

Если $P_n^{-m}(\mu) = 0$ при некотором комплексном n, то сопряженное с n значение n' также будет нулем этой функции; а $n + n' + 1$ обращается в нуль только при $\operatorname{Re}(n) = -\frac{1}{2}$. Этот случай придется рассмотреть отдельно[3]).

---

[1]) Thomson, Tait, Natural Philosophy, т. I, 1879, стр. 196. [См. также Г. Ламб, Гидродинамика, М.—Л., 1947, стр. 201. (*Прим. ред.*)]

[2]) Proc. Lond. Math. Soc. (1), 31 (1900), 264.

[3]) См. цит. соч. Макдональда, а также Proc. Lond. Math. Soc. (I), 29 (1898), где рассматриваются соответствующие свойства бесселевых функций.

Пусть $L+iM$ и $L-iM$ — значения $P_n^{-m}(\mu)$ соответственно для сопряженных значений n и n'; тогда

$$\int_\mu^1 P_n^{-m}(\mu)\,P_{n'}^{-m}(\mu)\,d\mu=\int_\mu^1 (L^2+M^2)\,d\mu,$$

и это выражение в нуль не обращается. Следовательно, $P_n^{-m}(\mu)$ не имеет комплексных нулей.

При $\operatorname{Re}(n)=-\frac{1}{2}$ все коэффициенты ряда

$$F\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1-\mu}{2}\right)$$

действительны и положительны, следовательно, $P_n^m(\mu)$ при таких n в нуль не обращается.

Макдональд показал также[1]), что при $m>0$ функция $P_n^m(\mu)$ имеет не более $2E(m)$ комплексных нулей.

§ 10. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ НУЛЕЙ ФУНКЦИИ $P_n^{-m}(\cos\theta)$

239. Большие действительные значения n, при которых $P_n^{-m}(\cos\theta)$ обращается в нуль, могут быть вычислены при фиксированном θ посредством формулы, данной в гл. VI.

Имеем

$$P_n^{-m}(\cos\theta)=\frac{2\Pi(n-m)}{\pi^{\frac12}\Pi\left(n+\frac12\right)}\left[\frac{\cos\left\{\left(n+\frac12\right)\theta-\frac{\pi}{4}-\frac{m\pi}{2}\right\}}{(2\sin\theta)^{\frac12}}+\right.$$

$$+\frac{1^2-4m^2}{2(2n+3)}\,\frac{\cos\left\{\left(n+\frac32\right)\theta-\frac{3\pi}{4}-\frac{m\pi}{2}\right\}}{(2\sin\theta)^{\frac32}}+$$

$$\left.+\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)}{2\cdot4(2n+3)(2n+5)}\,\frac{\cos\left\{\left(n+\frac52\right)\theta-\frac{5\pi}{4}-\frac{m\pi}{2}\right\}}{(2\sin\theta)^{\frac52}}+\dots\right].$$

Для больших n, обращающих $P_n^{-m}(\cos\theta)$ в нуль, имеем приближенное равенство

$$\left(n+\frac12\right)\theta-\frac{\pi}{4}-\frac{m\pi}{2}=(2k+1)\frac{\pi}{2},$$

где k — целое число. Иначе запишем это соотношение в виде

$$n+\frac12=\frac{\pi}{2\theta}\left(2k+m+\frac32\right).$$

Пусть

$$n+\frac12=x,\qquad \frac{\pi}{2\theta}\left(k+m+\frac32\right)=x_0.$$

---

[1]) Макдональд утверждает (цит. соч., стр. 266), что, когда n комплексное, $P_n^{-m}(\mu)$ разлагается в ряд по степеням $1-\mu$ с действительными коэффициентами. На самом деле, это верно только при $\operatorname{Re}(n)=-\frac{1}{2}$.

Тогда для больших положительных n, обращающих $P_n^{-m}(\cos\theta)$ в нуль, будем иметь

$$(x-x_0)\,\theta=\psi,$$

где

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{\dfrac{1^2-4m^2}{2^2(1+x)}\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}{2\sin\theta}+\dfrac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)}{2^4(1+x)(2+x)\,2!}\dfrac{\sin(\pi-2\theta)}{(2\sin\theta)^2}+\ldots}{1+\dfrac{1^2-4m^2}{2^2(1+x)}\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}{2\sin\theta}+\dfrac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)}{2^4(1+x)(2+x)\,2!}\dfrac{\cos(\pi-2\theta)}{(2\sin\theta)^2}+\ldots}.$$

Иначе можно записать

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{c_1}{1+x}+\frac{c_2}{(1+x)^2}+\frac{d_2}{(1+x)(2+x)}+\frac{c_3}{(1+x)^3}+\\+\frac{d_3}{(1+x)^2(2+x)}+\frac{e_3}{(1+x)(2+x)(3+x)}+\ldots,$$

где

$$c_1=b_1,\quad c_2=-a_1b_1,\quad d_2=b_2,\quad c_3=a_1^2b_1,\quad d_3=-a_2b_1-a_1b_2,$$
$$e_3=b_3,\quad c_4=-a_1^2b_1,\quad d_4=2a_1a_2b_1+a_1^2b_2,\quad e_4=-a_2b_2,$$
$$f_4=-a_1b_3-a_3b_1,\quad g_4=b_4,\ \ldots$$

и

$$a_1=\frac{1^2-4m^2}{2^2}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}{2\sin\theta},\quad b_1=\frac{1^2-4m^2}{2^2}\frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}{2\sin\theta},$$
$$a_2=\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)}{2^4(2\sin\theta)^2\,2!}\cos(\pi-2\theta),\ \ldots$$

Из этого соотношения получаем

$$\operatorname{tg}(x-x_0)\,\theta=\alpha_1+\alpha_2+\ldots,$$

где

$$\alpha_1=\frac{c_1}{1+x},\quad \alpha_2=\frac{c_2}{(1+x)^2}+\frac{d_2}{(1+x)(2+x)},\ \ldots$$

Разлагая по формуле Лагранжа и опуская члены порядка $\dfrac{1}{(1+x_0)^3}$, получим

$$x=x_0+\frac{1}{\theta}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\ldots)=-\frac{1}{3}(\alpha_1^3-\alpha_1^2\alpha_2)+\\+\frac{1}{\theta^2}(\alpha_1\alpha_1'+\alpha_1\alpha_2'+\alpha_1'\alpha_2)+\ldots,$$

где в α_1, α_2, ... вместо x фигурирует x_0, а α_1', α_2', ... обозначают соответственно $\dfrac{d\alpha_1}{dx_0}$, $\dfrac{d\alpha_2}{dx_0}$, ...

Подставляя вместо α_1, α_2, ... их выражения, будем иметь

$$x=x_0+\frac{b_1}{\theta(1+x_0)}+\frac{b_2}{\theta(1+x_0)(2+x_0)}-\frac{a_1b_1}{\theta(1+x_0)^2}+\frac{3a_1^2b_1-b_1^3}{3\theta(1+x_0)^3}-\\-\frac{a_2b_1+a_1b_2}{\theta(1+x_0)^2(2+x_0)}+\frac{b_3}{\theta(1+x_0)(2+x_0)(3+x_0)}-\frac{b_1^2}{\theta^2(1+x_0)^3}+\\+\frac{a_1b_1^3-a_1^3b_1}{\theta(1+x_0)^4}+\frac{2a_1a_2b_1+a_1^2b_2-b_1^2b_2}{\theta(1+x_0)^3(2+x_0)}-\frac{a_2b_2}{\theta(1+x_0)^3(2+x_0)^2}-\\-\frac{a_1b_3+a_3b_1}{\theta(1+x_0)^2(2+x_0)(3+x_0)}+\frac{b_4}{\theta(1+x_0)(2+x_0)(3+x_0)(4+x_0)}+\\+\frac{3a_1b_1^2}{\theta^2(1+x_0)^4}-\frac{2b_1b_2}{\theta^2(1+x_0)^3(2+x_0)}+\frac{b_1b_2}{\theta^2(1+x_0)^2(2+x_0)^2}+\ldots$$

Отрицательные значения n получим, изменив знаки в правой части, так как функция $P_n^{-m}(\mu)$ не изменяется при замене n на $-n-1$.

Если θ заключено между $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3}{4}\pi$, то отбрасывание членов порядка $\frac{1}{(1+x_0)^4}$ и более высокого может повлиять лишь на пятый десятичный знак; удерживая большее число членов, можно добиться еще большей точности. При θ, близких к 0 или к π, пользоваться указанным рядом нельзя.

§ 11. НУЛИ ФУНКЦИИ $P_n^{-m}(\cos\theta)$ ПРИ θ, БЛИЗКИХ К 0 ИЛИ π

240. Макдональд рассмотрел также тот случай, когда θ мало. Он представил $P_n^{-m}(\cos\theta)$ в виде ряда, содержащего бесселевы функции:

$$P_n^{-m}(\cos\theta) =$$
$$= \frac{1}{\left(n\cos\frac{1}{2}\theta\right)^m}\left[J_m(x) - \sin\frac{1}{2}\theta J_{m+1}(x) - \sin^2\frac{1}{2}\theta\left\{\frac{1}{2}J_{m+2}(x) - \frac{1}{6}xJ_{m+3}(x)\right\} - \right.$$
$$-\sin^2\frac{1}{2}\theta\left\{\frac{2}{x}J_{m+2}(x) - \frac{3}{2}J_{m+3}(x) + \frac{1}{6}xJ_{m+4}(x)\right\} +$$
$$\left. + \sin^4\frac{1}{2}\theta\left\{\frac{1}{72}x^2J_{m+6}(x) - \frac{17}{60}xJ_{m+5}(x) + \frac{11}{8}J_{m+4}(x) - \frac{4}{3x}J_{m+3}(x)\right\} - \ldots\right],$$

где $x = 2n\sin\frac{\theta}{2}$.

При очень малом θ нули рассматриваемой функции определяются нулями бесселевой функции $J_m(x)$; если эта последняя имеет нуль x_0, то в качестве первого приближения соответствующего нуля функции $P_n^{-m}(\cos\theta)$ можно взять $n = \frac{1}{2}x_0\csc\frac{1}{2}\theta$ или $n = \frac{x_0}{\theta}$. С помощью того же ряда можно получить и лучшие приближения.

Для отыскания нулей функции

$$J_m(x) - \sin\frac{\theta}{2}J_{m+1}(x) + \ldots$$

Макдональд полагает

$$x = x_0 + a_1\sin\frac{\theta}{2} + a_2\sin^2\frac{\theta}{2} + \ldots$$

и, с помощью теоремы Лагранжа, получает для первых четырех коэффициентов такие выражения:

$$a_1 = -1, \quad a_2 = -\frac{x_0}{6}\left(1 + \frac{1-4m^2}{x_0^2}\right), \quad a_3 = 0,$$
$$a_4 = -\frac{17}{360}x_0 + \frac{592m^2 + 40m - 13}{180x_0} + \frac{48m^4 + 6480m^2 + 28400m + 7720}{360x_0^2}.$$

Чтобы получить удобную формулу для $P_n^{-m}(\cos\theta)$ при малых $\pi-\theta$, выразим $P_n^{-m}(\cos\theta)$ как функцию от $-\cos\theta$. В силу формулы (62) гл. V, имеем

$$P_n^m(-\cos\theta) = \cos(n+m)\pi\, P_n^m(\cos\theta) - \frac{2\sin(n+m)\pi}{\pi}Q_n^m(\mu);$$
$$Q_n^m(\cos\theta) = \frac{\pi}{2\sin m\pi}\left\{P_n^m(\cos\theta)\cos m\pi - \frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)}P_n^{-m}(\cos\theta)\right\},$$

откуда

$$P_n^m(-\cos\theta) = \cos(n+m)\pi\, P_n^m(\cos\theta) -$$
$$-\frac{\sin(n+m)\pi}{\sin m\pi}\left\{P_n^m(\cos\theta)\cos m\pi - \frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)}P_n^{-m}(\cos\theta)\right\}.$$

Таким образом, нули функции $P_n^{-m}(\cos\theta)$ при малых $\pi-\theta$ можно получить из уравнения

$$\operatorname{tg}(n-m)\pi=\frac{\sin m\pi\, P_n^{-m}(-\cos\theta)}{\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}P_n^{-m}(-\cos\theta)-\cos m\pi\, P_n^{-m}(-\cos\theta)},$$

т. е.

$$n=m+k+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left\{\frac{\sin m\pi\, P_n^{-m}(-\cos\theta)}{\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}P_n^{m}(-\cos\theta)-\cos m\pi P_n^{-m}(-\cos\theta)}\right\},$$

где k принимает все целые неотрицательные значения.

С помощью ряда Лагранжа, считая $\varphi=\pi-\theta$ очень малым, получим

$$n=m+k+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left\{\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)}\frac{\Pi(-m)}{\Pi(m)}\operatorname{tg}^{2m}\frac{\varphi}{2}\sin m\pi\right\},$$

или

$$n=m+k+\frac{\Pi(2m+k)}{\Pi(m)\,\Pi(m-1)\,\Pi(k)}\operatorname{tg}^{2m}\frac{\varphi}{2}.$$

Отрицательные нули получим, взяв $-n-1$ вместо n. При целом m, когда этот прием неприменим, можно действовать следующим образом: из

$$P_n^{-m}(-\cos\theta)=\cos(n-m)\pi P_n^{-m}(\cos\theta)-\frac{2\sin(n-m)\pi}{\pi}Q_n^{-m}(\cos\theta)$$

получаем для значений n, обращающих $P_n^{-m}(\cos\theta)$ в нуль, в предположении, что $\pi-\theta$ мало, соотношение

$$\frac{2\sin(n-m)\pi}{\pi}\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}Q_n^{-m}(-\cos\theta)-\cos(n-m)\pi\, P_n^{-m}(-\cos\theta)=0,$$

откуда

$$n=m+k+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left\{\frac{\Pi(n+m)}{\Pi(n-m)}\frac{P_n^{-m}(-\cos\theta)}{Q_n^{-m}(-\cos\theta)}\frac{\pi}{2}\right\},$$

где k может принимать любые целые неотрицательные значения.

При $m\neq 0$ и $\varphi=\pi-\theta$, разлагая в ряд, получим прежнее выражение

$$n=m+k+\frac{\Pi(2m+k)}{\Pi(m)\,\Pi(m-1)\,\Pi(k)}\operatorname{tg}^{2m}\frac{\varphi}{2}.$$

Если же $m=0$, то

$$n=k+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left\{\frac{\pi}{\ln\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\right\},$$

или

$$n=k+\frac{1}{2\ln\frac{2}{\varphi}}.$$

§ 12. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ НУЛЕЙ $P_n^m(\mu)$ И $\frac{d}{d\mu}P_n^m(\mu)$ ПРИ ЗАДАННОМ $\mu=\cos\theta$

241. Для отыскания значений n, обращающих $P_n^m(\cos\theta)$ в нуль при заданных m и θ, Боланат Пал предложил[1]) следующий метод.

[1]) Bull. of. Calcutta Math. Soc., 9 (1917—1918), 85; 10 (1918—1919), 187.

Из асимптотического выражения гипергеометрического ряда, предложенного Ватсоном (см. п. 198), он вывел асимптотическую формулу

$$P_n^m(\cos\theta)=\frac{\Pi(n)}{\Pi(n-m)}\left(\frac{2}{n\pi\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\left[\cos\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{m\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right\}\left\{1+\frac{m^2-\frac{1}{2}}{2n}+\frac{3C_2}{(2n)^2}+\ldots\right\}+\right.$$
$$\left.+\sin\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{m\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right\}\left\{-\frac{m^2-\frac{1}{4}}{2n}\operatorname{ctg}\theta-\frac{3C_2'}{(2n)^2}-\ldots\right\}\right],$$

где

$$C_2=\frac{1}{6}\left(m^2-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{6}\left(m^2-\frac{9}{4}\right)\left(m^2-\frac{1}{4}\right)\operatorname{ctg}^2\theta,$$
$$C_2'=\frac{1}{3}\left(m^2-\frac{3}{2}\right)\left(m^2-\frac{1}{4}\right)\operatorname{ctg}\theta.$$

С помощью разложения в ряд Лагранжа Пал получил выражение

$$n=\xi+\frac{1}{\theta}\left[-\frac{\left(m^2-\frac{1}{4}\right)\operatorname{ctg}\theta}{2\xi}+\left(m^2-\frac{1}{2}\right)\left(m^2-\frac{1}{4}\right)\operatorname{ctg}\theta-3C_2'+\right.$$
$$\left.+\frac{3\left(m^2-\frac{1}{4}\right)C_2'\operatorname{ctg}\theta}{(2\xi)^3}+\frac{\left(m^2-\frac{1}{4}\right)^3\operatorname{ctg}^3\theta}{3(2\xi)^3}+\ldots\right]+$$
$$+\frac{1}{\theta^2}\left[-\frac{\left(m^2-\frac{1}{4}\right)^2\operatorname{ctg}^2\theta}{2^2\xi^3}-\frac{2\left\{\left(m^2-\frac{1}{2}\right)\left(m^2-\frac{1}{4}\right)\operatorname{ctg}\theta-3C_2'\right\}^2}{2^4\xi^5}-\ldots\right],$$

где

$$\xi=\frac{\pi}{2\theta}\left(2k-m+\frac{3}{2}-\frac{\theta}{\pi}\right).$$

Подобное же асимптотическое выражение Пал получил для $\frac{d}{d\theta}P_n^m(\cos\theta)$. Для отыскания значений n, обращающих $\frac{d}{d\theta}P_n^m(\cos\theta)$ в нуль, он воспользовался асимптотической формулой (15) гл. VI; большие значения n определяются им из уравнения

$$\cos\left\{\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}+\frac{m\pi}{2}\right\}-\cos\theta\left\{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}+\frac{m\pi}{2}\right\}=0.$$

Для первых нескольких нулей функции $\frac{d}{d\mu}P_n^m(\mu)$, отвечающей значениям $\theta=\frac{\pi}{4}$, $m=0$, $\theta=\frac{\pi}{4}$, $m=1$, $\theta=\frac{\pi}{4}$, $m=2$, составлены таблицы.

В своей второй статье Пал дает таблицу нулей функции $P_n^m(\mu)$ для $\theta=\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{12}$ и $m=0, 1, 2$. Табулированы также нули производной $\frac{d}{d\mu}P_n^m(\mu)$ для $\theta=\frac{\pi}{6}$, $m=0, -1, -2$, и $\theta=\frac{\pi}{2}$, $m=0, -1, -2$.

Глава X

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В ОБЛАСТЯХ, ОГРАНИЧЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЯМИ ВРАЩЕНИЯ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

242. В этой главе мы применим теорию сферических функций к задаче отыскания функций, гармонических в области, внутренней или внешней по отношению к поверхности вращения заданной формы. Мы увидим, что для этой цели понадобятся присоединенные функции Лежандра, и степенями и значениями аргумента отличные от тех, которые обычно встречаются в случае сферы.

Если декартовы координаты x, y, z выразить в виде $z + i\rho = f(\eta + i\theta)$, $x + iy = \rho e^{i\varphi}$, где $\rho = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ — расстояние точки (x, y, z) от оси z, то, как легко видеть, η и θ будут служить параметрами ортогональных семейств кривых в плоскостях, проходящих через ось z. Таким образом, фиксируя произвольно любую из переменных η, θ, φ, мы получим три взаимно ортогональных семейства поверхностей. Из них $\theta = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$ представляют собой семейства поверхностей вращения, осью которых служит ось z. Мы покажем, что при выполнении некоторых дополнительных условий, налагаемых на функцию $f(\eta + i\theta)$, уравнение Лапласа, отнесенное к независимым переменным η, θ, φ, будет иметь нормальные решения.

Отысканием функции, гармонической внутри некоторого сфероида, по заданным ее значениям на границе впервые занимался Ламе[1]) в связи с задачами теплопроводности. Ту же задачу рассматривал Гейне в своей диссертации[2]); он же впервые показал, что функции, фигурирующие в решении, суть P_n^m — присоединенные функции Лежандра. Такой же вид имеет решение в позднейшей работе Ламе.

Решение внешней задачи дал Гейне; именно в этой связи были им впервые введены функции Лежандра второго рода, а также присоединенные функции. Ф. Нейман получил[3]) разложение обратной величины расстояния между двумя точками в ряд по сфероидальным функциям. Гейне предложил[4]) другое решение этой задачи; он же подробно рассмотрел задачу с круглым диском как предельный случай задачи со сжатым сфероидом.

Мы имеем

$$(dx)^2 + (dy)^2 = (d\rho)^2 + \rho^2 (d\varphi)^2,$$
$$(dz)^2 + (d\rho)^2 = f'(\eta + i\theta) f'(\eta - i\theta) [(d\eta)^2 + (d\theta)^2],$$

откуда

$$(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = \rho^2 (d\varphi)^2 + f'(\eta + i\theta) f'(\eta - i\theta) [(d\eta)^2 + (d\theta)^2].$$

---

[1]) Journ. de Liouville, 4 (1839), 351.

[2]) De aequationibus nonnulis differentialibus, 1842; см. также Journ. f. reine angew. Math., 26 (1843). Полное изложение этого вопроса, с многочисленными литературными указаниями, приведено в Kugelfunktionen, т. II, 1881, стр. 98—136.

[3]) Journ. f. reine u. angew. Math., 37 (1848), 21.

[4]) Там же, 42 (1851), 70.

В обозначениях, введенных в п. 2, имеем

$$H_1^2 = \frac{1}{\rho^2}, \quad H_2^2 = H_3^2 = \frac{1}{f'(\eta + i\theta) f'(\eta - i\theta)},$$

и уравнение Лапласа принимает вид

$$f'(\eta + i\theta) f'(\eta - i\theta) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = 0,$$

где $2i\rho = f(\eta + i\theta) - f(\eta - i\theta)$.

Полагая $u = \mathrm{H}\Theta\Phi$, где H зависит только от η, Θ — только от θ, Φ — только от φ, приведем уравнение Лапласа к виду

$$-\frac{4}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \frac{1}{\mathrm{H}}\frac{f(\eta + i\theta) - f(\eta - i\theta)}{f'(\eta + i\theta) f'(\eta - i\theta)}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\{f(\eta + i\theta) - f(\eta - i\theta)\}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \eta}\right] + \\ + \frac{1}{\Theta}\frac{f(\eta + i\theta) - f(\eta - i\theta)}{f'(\eta + i\theta) f'(\eta - i\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\{f(\eta + i\theta) - f(\eta - i\theta)\}\frac{\partial \Theta}{\partial \theta}\right] = 0.$$

Оно может удовлетворяться лишь тогда, когда $\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}$ принимает постоянное значение, которое мы обозначим $-m^2$. При этом $\Phi = \frac{\cos}{\sin} m\varphi$. Функции H и Θ в этом предположении удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{\mathrm{H}}\frac{f(\eta + i\theta) - f(\eta - i\theta)}{f'(\eta + i\theta) f'(\eta - i\theta)}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\{f(\eta + i\theta) - f(\eta - i\theta)\}\frac{d\mathrm{H}}{d\eta}\right] + \\ + \frac{1}{\Theta}\frac{f(\eta + i\theta) - f(\eta - i\theta)}{f'(\eta + i\theta) f'(\eta - i\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\{f(\eta + i\theta) - f(\eta - i\theta)\}\frac{d\Theta}{d\theta}\right] + 4m^2 = 0.$$

Допустим теперь, что функция f такова, что

$$\frac{f'(\eta + i\theta) f'(\eta - i\theta)}{[f(\eta + i\theta) - f(\eta - i\theta)]^2}$$

представляется в виде суммы функции $\chi_1(\eta)$ от η и функции $\chi_2(\theta)$ от θ. Тогда это уравнение можно будет записать в виде

$$\frac{1}{\mathrm{H}}\frac{d^2\mathrm{H}}{d\eta^2} + \frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \frac{f'(\eta + i\theta) - f'(\eta - i\theta)}{f(\eta + i\theta) - f(\eta - i\theta)}\frac{1}{\mathrm{H}}\frac{d\mathrm{H}}{d\eta} + \\ + i\frac{f'(\eta + i\theta) + f'(\eta - i\theta)}{f(\eta + i\theta) - f(\eta - i\theta)}\frac{1}{\Theta}\frac{d\Theta}{d\theta} + 4m^2[\chi_1(\eta) + \chi_2(\theta)] = 0.$$

Если, далее, допустить, что

$$\frac{f'(\eta' + i\theta) - f'(\eta - i\theta)}{f(\eta + i\theta) - f(\eta - i\theta)} = F_1(\eta)$$

есть функция только от η, а

$$i\frac{f'(\eta + i\theta) + f'(\eta - i\theta)}{f(\eta + i\theta) - f(\eta - i\theta)} = F_2(\theta)$$

— функция только от θ, то рассматриваемое уравнение может удовлетворяться лишь тогда, когда

$$\frac{d^2\mathrm{H}}{d\eta^2} + F_1(\eta)\frac{d\mathrm{H}}{d\eta} + 4m^2\chi_1(\eta)\mathrm{H} = \alpha\mathrm{H}$$

и одновременно

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + F_2(\eta)\frac{d\Theta}{d\theta} + 4m^2\chi_2(\theta)\Theta = -\alpha\Theta,$$

где α — некоторая постоянная. Когда f удовлетворяет всем перечисленным условиям, существуют нормальные решения $\Phi\mathrm{H}\Theta$, где $\Phi = \frac{\cos}{\sin} m\varphi$, H и Θ суть решения указанных обыкновенных дифференциальных уравнений, а m и α — произвольные постоянные.

§ 2. ВЫТЯНУТЫЕ СФЕРОИДЫ

243. Сначала мы рассмотрим случай

$$f(\eta+i\theta)=c\operatorname{ch}(\eta+i\theta).$$

При этом

$$z=c\operatorname{ch}\eta\cos\theta,\quad x=c\operatorname{sh}\eta\sin\theta\cos\varphi,\quad y=c\operatorname{sh}\eta\sin\theta\sin\varphi;$$

параметр η определяет семейство софокусных вытянутых сфероидов (эллипсоидов вращения)

$$\frac{z^2}{c^2\operatorname{ch}^2\eta}+\frac{x^2+y^2}{c^2\operatorname{sh}^2\eta}=1,$$

а параметр θ — семейство гиперболоидов вращения

$$\frac{z^2}{c^2\cos^2\theta}-\frac{x^2+y^2}{c^2\sin^2\theta}=1.$$

Если мы заключим η, θ, φ в промежутки

$$0\leqslant\eta<\infty,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\varphi<2\pi,$$

то всякая точка пространства будет однозначно определяться своими криволинейными координатами $(\eta,\ \theta,\ \varphi)$.

В рассматриваемом случае будем иметь

$$f(\eta+i\theta)=c\operatorname{ch}(\eta+i\theta),\quad f'(\eta+i\theta)=c\operatorname{sh}(\eta+i\theta),$$

откуда

$$f'(\eta+i\theta)f'(\eta-i\theta)=c^2(\operatorname{sh}^2\eta\cos^2\theta+\operatorname{ch}^2\eta\sin^2\theta)=$$
$$=c^2(\operatorname{ch}^2\eta-\cos^2\theta)=c^2(\operatorname{sh}^2\eta+\sin^2\theta),$$

и

$$[f(\eta+i\theta)-f(\eta-i\theta)]^2=-4c^2\operatorname{sh}^2\eta\sin^2\theta.$$

Таким образом,

$$\frac{f'(\eta+i\theta)f'(\eta-i\theta)}{[f(\eta+i\theta)f(\eta-i\theta)]^2}=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2\eta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\right),$$

так что

$$\chi_1(\eta)=-\frac{1}{4\operatorname{sh}^2\eta},\quad \chi_2(\theta)=-\frac{1}{4\sin^2\theta}.$$

Далее имеем

$$\frac{f'(\eta+i\theta)-f'(\eta-i\theta)}{f(\eta+i\theta)-f(\eta-i\theta)}=\operatorname{cth}\eta,$$

и

$$i\,\frac{f'(\eta+i\theta)+f'(\eta-i\theta)}{f(\eta+i\theta)-f(\eta-i\theta)}=\operatorname{ctg}\theta.$$

Итак, нормальное решение уравнения Лапласа имеет вид $\mathrm{H}\Theta\,{\cos \atop \sin}\,m\varphi$, где H и Θ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{d^2\mathrm{H}}{d\eta^2}+\operatorname{cth}\eta\,\frac{d\mathrm{H}}{d\eta}-\left[\frac{m^2}{\operatorname{sh}^2\eta}+n(n+1)\right]\mathrm{H}\operatorname{sh}\eta=0,$$
$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\operatorname{ctg}\theta\,\frac{d\Theta}{d\theta}+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta\sin\theta=0,$$

в которых n постоянно.

Мы видим, что в качестве Θ можно взять $P_n^m(\cos\theta)$ или $Q_n^m(\cos\theta)$, а в качестве H функцию $P_n^m(\operatorname{ch}\eta)$ или $Q_n^m(\operatorname{ch}\eta)$. В обычных приложениях $P_n^m(\cos\theta)$ берутся с целыми положительными m и n, причем $m\leqslant n$. Итак, мы возьмем нормальные решения

$$P_n^m(\cos\theta)\,P_n^m(\operatorname{ch}\eta){\cos \atop \sin}\,m\varphi,\quad P_n^m(\cos\theta)\,Q_n^m(\operatorname{ch}\eta)\,{\cos \atop \sin}\,m\varphi,$$

где $0\leqslant m\leqslant n$.

Из них первое неприменимо в случае области с неограниченной границей, так как $P_n^m(\operatorname{ch}\eta)$ стремится к бесконечности вместе с η. Что касается функции $Q_n^m(\operatorname{ch}\eta)$, то она бесконечна в точке $\eta=0$, следовательно, она неприменима в случае области, содержащей начало координат. Итак, в случае области, внутренней по отношению к некоторому сфероиду $\eta=\eta_0$, мы берем решения

$$P_n^m(\cos\theta)\,P_n^m(\operatorname{ch}\eta)\,{\cos \atop \sin}\,m\varphi,$$

в случае области, внешней по отношению к $\eta=\eta_0$, — решение

$$P_n^m(\cos\theta)\,Q_n^m(\operatorname{ch}\eta)\,{\cos \atop \sin}\,m\varphi.$$

244. Функции

$$P_n\left(\frac{z+ix\cos t+iy\sin t}{c}\right) \text{ и } Q_n\left(\frac{z+ix\cos t+iy\sin t}{c}\right),$$

очевидно, удовлетворяют уравнению Лапласа, так как они представляют собой функции от линейной комбинации переменных x, y, z с коэффициентами, сумма квадратов которых равна нулю. Мы покажем, что эти функции могут быть представлены как суммы нормальных сфероидальных решений уравнения Лапласа. В самом деле, согласно теореме сложения п. 220, полагая $\mu=\operatorname{ch}\eta$, $\mu'=\cos\theta+0\cdot i$, где $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, и имея в виду равенство

$P_n^m(\cos\theta)=e^{\frac{1}{2}m\pi i}\,P_n^m(\cos\theta+0\cdot i)$, получим

$$P_n(\operatorname{ch}\eta\cos\theta-i\operatorname{sh}\eta\sin\theta\cos\varphi)=P_n(\operatorname{ch}\eta)\,P_n(\cos\theta)+$$
$$+2\sum_{m=1}^{n}(-1)^m\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}e^{-\frac{1}{2}m\pi i}\,P_n^m(\operatorname{ch}\eta)\,P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi.$$

Взяв $\varphi+\pi-t$ вместо φ, придем к искомому выражению:

$$P_n\left(\frac{z+ix\cos t+iy\sin t}{c}\right)=P_n(\operatorname{ch}\eta)\,P_n(\cos\theta)+$$
$$+2\sum_{m=1}^{n}e^{-\frac{1}{2}m\pi i}\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}P_n^m(\operatorname{ch}\eta)\,P_n^m(\cos\theta)\cos m(\varphi-t).$$

Отсюда прямо получим формулы

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_n\left(\frac{z+ix\cos t+iy\sin t}{c}\right)dt=P_n(\operatorname{ch}\eta)\,P_n(\cos\theta),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_n\left(\frac{z+ix\cos t+iy\sin t}{c}\right){\cos \atop \sin}\,mt\,dt=$$
$$=e^{-\frac{1}{2}m\pi i}\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}P_n^m(\operatorname{ch}\eta)\,P_n^m(\cos\theta)\,{\cos \atop \sin}\,m\varphi.$$

Если в теореме сложения п. 223 положим $\mu'=\cos\theta+0\cdot i$, $\mu=\operatorname{ch}\eta$, где $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, то при $\frac{\operatorname{ch}\eta+1}{\operatorname{ch}\eta-1}<\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$ будем иметь

$$Q_n(\operatorname{ch}\eta\cos\theta-i\operatorname{sh}\eta\sin\theta\cos\varphi)=$$
$$=Q_n(\operatorname{ch}\eta)\,P_n(\cos\theta)+2\sum_{m=1}^{\infty}Q_n^m(\operatorname{ch}\eta)\,(-1)^m e^{\frac{1}{2}m\pi i}\,P_n^{-m}(\cos\theta)\cos m\varphi.$$

В случае же $\frac{\operatorname{ch}\eta+1}{\operatorname{ch}\eta-1} > \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$

$$Q_n(\operatorname{ch}\eta\cos\theta - i\operatorname{sh}\eta\sin\theta\cos\varphi) = P_n(\operatorname{ch}\eta)\, Q_n(\cos\theta + 0\cdot i) + \\ + 2\sum (-1)^m P_n^{-m}(\operatorname{ch}\eta)\, Q_n^m(\cos\theta + 0\cdot i)\cos m\varphi.$$

При этом предполагается, что $\eta \neq 0$.

Подобным же образом мы получим

$$Q_n\left(\frac{z+ix\cos t+iy\sin t}{c}\right) = Q_n(\operatorname{ch}\eta)\, P_n(\cos\theta) + \\ + 2\sum_{m=1}^{\infty} e^{\frac{1}{2}m\pi i}\, Q_n^m(\operatorname{ch}\eta)\, P_n^{-m}(\cos\theta)\cos m(\varphi - t)$$

или

$$P_n(\operatorname{ch}\eta)\, Q_n(\cos\theta + 0\cdot i) + \\ + 2\sum P_n^{-m}(\operatorname{ch}\eta)\, Q_n^m(\cos\theta + 0\cdot i)\cos m(\varphi - t),$$

в зависимости от того, $\cos\theta\operatorname{ch}\eta > 1$ или $\cos\theta\operatorname{ch}\eta < 1$.

Далее,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_n\left(\frac{z+ix\cos t+iy\sin t}{c}\right) dt = \\ = \begin{cases} Q_n(\operatorname{ch}\eta)\, P_n(\cos\theta) & \text{при } \cos\theta\operatorname{ch}\eta > 1, \\ P_n(\operatorname{ch}\eta)\, Q_n(\cos\theta + 0\cdot i) & \text{при } \cos\theta\operatorname{ch}\eta < 1, \end{cases}$$

и

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_n\left(\frac{z+ix\cos t+iy\sin t}{c}\right) {\cos \atop \sin}\, mt\, dt = \\ = \begin{cases} e^{\frac{1}{2}m\pi i}\, Q_n^m(\operatorname{ch}\eta)\, P_n^{-m}(\cos\theta) {\cos \atop \sin}\, m\varphi & \text{при } \cos\theta\operatorname{ch}\eta > 1, \\ P_n^{-m}(\operatorname{ch}\eta)\, Q_n^m(\cos\theta + 0\cdot i) {\cos \atop \sin}\, m\varphi & \text{при } \cos\theta\operatorname{ch}\eta < 1. \end{cases}$$

Неравенствам $\cos\theta\operatorname{ch}\eta > 1$ и < 1 соответствуют неравенства $z > c$ и $z < c$.

Особым оказывается случай $z = c$, когда эти формулы неприменимы.

Удобное для вычислений выражение $Q_n^m(\operatorname{ch}\eta)$ можно получить с помощью формулы (67) гл. V. Пусть $z = e^{\eta}$; тогда

$$Q_n^m(\operatorname{ch}\eta) = 2^m(-1)^m \frac{\Pi(n+m)\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)} \operatorname{sh}^m\eta \times \\ \times e^{-(n+m+1)\eta} F\left(\frac{1}{2}+m,\ n+m+1;\ n+\frac{3}{2};\ e^{-2\eta}\right),$$

$$Q_n(\operatorname{ch}\eta) = \frac{\Pi(n)\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)} e^{-(n+1)\eta}\, F\left(\frac{1}{2},\ n+1;\ n+\frac{3}{2};\ e^{-2\eta}\right).$$

Аналогично, согласно формуле (70) гл. V,

$$P_n(\operatorname{ch}\eta) = \frac{\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\Pi(n)\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)} e^{n\eta} F\left(\frac{1}{2},\ -n;\ \frac{1}{2}-n;\ e^{-2\eta}\right) + \\ + \operatorname{tg} n\pi \frac{\Pi(n)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)} e^{-(n+1)\eta}\, F\left(\frac{1}{2},\ n+1;\ n+\frac{3}{2};\ e^{-2\eta}\right).$$

245. Мы разложим в ряд по нормальным функциям обратную величину расстояния D между двумя точками $(\eta,\ \theta,\ \varphi)$ и $(\eta',\ \theta',\ \varphi')$, где $\eta>\eta'$. Имеем

$$\frac{D^2}{c^2}=(\operatorname{ch}\eta\cos\theta-\operatorname{ch}\eta'\cos\theta')^2+(\operatorname{sh}\eta\sin\theta\cos\varphi-\operatorname{sh}\eta'\sin\theta'\cos\varphi')^2+$$
$$+(\operatorname{sh}\eta\sin\theta\sin\varphi-\operatorname{sh}\eta'\sin\theta'\sin\varphi')^2=$$
$$=(\operatorname{ch}\eta\operatorname{ch}\eta'-\cos\theta\cos\theta')^2-$$
$$-\{\operatorname{sh}\eta\operatorname{sh}\eta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')\}^2-\sin^2\theta\sin^2\theta'\sin^2(\varphi-\varphi').$$

Пусть

$$A\equiv\operatorname{ch}\eta\operatorname{ch}\eta'-\cos\theta\cos\theta',$$
$$B\equiv\operatorname{sh}\eta\operatorname{sh}\eta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi'),$$
$$C\equiv\sin\theta\sin\theta'\sin(\varphi-\varphi');$$

тогда

$$\frac{D^2}{c^2}=A^2-B^2-C^2$$

и

$$A-B\cos v-C\sin v=\operatorname{ch}\eta\operatorname{ch}\eta'-\cos\theta\cos\theta'-$$
$$-\{\operatorname{sh}\eta\operatorname{sh}\eta'+\sin\theta\sin^2\theta'\cos(\varphi-\varphi')\cos v\}-\sin\theta\sin\theta'\sin(\varphi-\varphi')\sin v=$$
$$=\operatorname{ch}\eta\operatorname{ch}\eta'-\operatorname{sh}\eta\operatorname{sh}\eta'\cos v-$$
$$-\{\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos[v-(\varphi-\varphi')]\}.$$

Отсюда, согласно результату п. 218,

$$\frac{2\pi c}{D}=\int_0^{2\pi}\frac{dv}{\gamma-\delta},$$

где

$$\gamma=\operatorname{ch}\eta\operatorname{ch}\eta'-\operatorname{sh}\eta\operatorname{sh}\eta'\cos v$$

и

$$\delta=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos[v-(\varphi-\varphi')].$$

В силу того что $\gamma>1$, $\delta<1$,

$$\frac{1}{\gamma-\delta}=\sum(2n+1)\,Q_n(\gamma)\,P_n(\delta),$$

причем этот ряд сходится равномерно относительно v. Поэтому

$$\frac{c}{D}=\frac{1}{2\pi}\sum(2n+1)\int_0^{2\pi}Q_n(\operatorname{ch}\eta\operatorname{ch}\eta'-\operatorname{sh}\eta\operatorname{sh}\eta'\cos v)\times$$
$$\times P_n\{\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos[v-(\varphi-\varphi')]\}\,dv.$$

Применяя к

$$Q_n(\operatorname{ch}\eta\operatorname{ch}\eta'-\operatorname{sh}\eta\operatorname{sh}\eta'\cos v)$$

и

$$P_n\{\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos[v-(\varphi-\varphi')]\}$$

теоремы сложения (см. п. 223, 227), мы получим

$$\frac{c}{D}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,P_n(\cos\theta)\,P_n(\cos\theta')\,Q_n(\operatorname{ch}\eta)\,P_n(\operatorname{ch}\eta')+$$
$$+2\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\sum_{m=1}^{n}(-1)^m\left\{\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right\}^2P_n^m(\cos\theta)\,P_n^m(\cos\theta')\times$$
$$\times Q_n^m(\operatorname{ch}\eta)\,P_n^m(\operatorname{ch}\eta')\cos m(\varphi-\varphi')$$

где $\eta > \eta'$. Как и в п. 185, это разложение сходится равномерно относительно φ и φ'.

246. Пусть η_0 — значение параметра η на заданной сфероидальной поверхности. Тогда, если краевая функция, заданная на этой поверхности, имеет вид $AP_n^m(\cos\theta)\frac{\cos}{\sin}m\varphi$, то решением внутренней задачи Дирихле для сфероида будет служить функция

$$A\frac{P_n^m(\operatorname{ch}\eta)}{P_n^m(\operatorname{ch}\eta_0)}P_n^m(\cos\theta)\frac{\cos}{\sin}m\varphi,$$

а решением соответствующей внешней задачи — функция

$$A\frac{Q_n^m(\operatorname{ch}\eta)}{Q_n^m(\operatorname{ch}\eta_0)}P_n^m(\cos\theta)\frac{\cos}{\sin}m\varphi.$$

Очевидно, что в случае краевой функции, представляющей собой сумму конечного числа членов вида $AP_n^m(\cos\theta)\frac{\cos}{\sin}m\varphi$, решениями внутренней и внешней задач Дирихле будут соответственно суммы конечного числа членов вида

$$A\frac{P_n^m(\operatorname{ch}\eta)}{P_n^m(\operatorname{ch}\eta_0)}P_n^m(\cos\theta)\frac{\cos}{\sin}m\varphi$$

и

$$A\frac{Q_n^m(\operatorname{ch}\eta)}{Q_n^m(\operatorname{ch}\eta_0)}P_n^m(\cos\theta)\frac{\cos}{\sin}m\varphi.$$

Теперь мы перейдем к рассмотрению общего случая, когда краевая функция представляется как сумма ряда таких функций. В некоторых случаях нам удастся получить в явном виде решение задачи Дирихле для областей рассматриваемого вида. Известно, что решение этой задачи единственно.

247. Пусть функция $U=f(\theta,\varphi)$ абсолютно интегрируема в области $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $0\leqslant\varphi<2\pi$. Пусть, далее,

$$f(\theta,\varphi)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}P_n(\cos\gamma)f(\theta',\varphi')\sin\theta'\,d\varphi'\,d\theta'$$

соответствующий ей ряд по сферическим функциям; здесь $\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$, а интегралы берутся по поверхности $\eta=\eta_0$, точкам которой приписаны координаты $(\eta_0,\theta',\varphi')$. Никаких предположений относительно сходимости такого ряда мы пока не высказываем.

Запишем этот ряд в виде

$$U\sim\sum_{n=0}^{\infty}Y_n(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}Y_n^m(\theta,\varphi),$$

где

$$Y_n^m(\theta,\varphi)=\frac{2n+1}{4\pi}\cdot 2\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\theta)\times$$
$$\times\left[\cos m\varphi\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta',\varphi')P_n^m(\cos\theta')\cos m\varphi'\sin\theta'\,d\varphi'\,d\theta'+\right.$$
$$\left.+\sin m\varphi\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta',\varphi')P_n^m(\cos\theta')\sin m\varphi'\sin\theta'\,d\varphi'\,d\theta'\right];$$

при $m=0$ множитель 2 опускается.

Рассмотрим ряды

$$U_i \sim \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} Y_n^m(\theta, \varphi)\frac{P_n^m(\operatorname{ch}\eta)}{P_n^m(\operatorname{ch}\eta_0)} \quad \text{для} \quad \eta < \eta_0, \tag{а}$$

$$U_e \sim \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} Y_n^m(\theta, \varphi)\frac{Q_n^m(\operatorname{ch}\eta)}{Q_n^m(\operatorname{ch}\eta_0)} \quad \text{для} \quad \eta > \eta_0. \tag{б}$$

Покажем, что они абсолютно сходятся соответственно в областях $\eta < \eta_0$ и $\eta > \eta_0$ и, следовательно, имеют в этих областях определенные суммы U_i и U_e.

При $\eta < \eta_0$ дробь $\dfrac{P_n^m(\operatorname{ch}\eta)}{P_n^m(\operatorname{ch}\eta_0)}$ можно представить в виде

$$\left(\frac{\operatorname{sh}\eta}{\operatorname{sh}\eta_0}\right)^m\left[\frac{\operatorname{ch}\eta}{\operatorname{ch}\eta_0}\right]\frac{(\operatorname{ch}^2\eta-\alpha_1^2)(\operatorname{ch}^2\eta-\alpha_2^2)\ldots(\operatorname{ch}^2\eta-\alpha_p^2)}{(\operatorname{ch}^2\eta_0-\alpha_1^2)(\operatorname{ch}^2\eta_0-\alpha_2^2)\ldots(\operatorname{ch}^2\eta_0-\alpha_p^2)},$$

где p обозначает либо $\frac{1}{2}(n-m)$, либо $\frac{1}{2}(n-m-1)$ и множитель $\dfrac{\operatorname{ch}\eta}{\operatorname{ch}\eta_0}$ присутствует только в последнем случае; все числа $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \ldots, \alpha_p^2$ заключены в промежутке $(0,1)$. Так как $\dfrac{\operatorname{ch}^2\eta-\alpha^2}{\operatorname{ch}^2\eta_0-\alpha^2} < \dfrac{\operatorname{ch}^2\eta}{\operatorname{ch}^2\eta_0}$, то при $\eta < \eta_0$

$$\frac{P_n^m(\operatorname{ch}\eta)}{P_n^m(\operatorname{ch}\eta_0)} < \left(\frac{\operatorname{ch}\eta}{\operatorname{ch}\eta_0}\right)^n.$$

Обращаясь к ряду (б), заметим, что $Q_n^m(\operatorname{ch}\eta)$ пропорционально интегралу $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} mu}{(\operatorname{ch}\eta+\operatorname{sh}\eta\operatorname{ch}u)^{n+1}}\,du$ [см. формулу (117) гл. V], и так как при $\eta > \eta_0$

$$(\operatorname{ch}\eta+\operatorname{sh}\eta\operatorname{ch}u)\operatorname{ch}\eta_0 > (\operatorname{ch}\eta_0+\operatorname{sh}\eta_0\operatorname{ch}u)\operatorname{ch}\eta,$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{ch} mu}{(\operatorname{ch}\eta+\operatorname{sh}\eta\operatorname{ch}u)^{n+1}}\,du < \left(\frac{\operatorname{ch}\eta_0}{\operatorname{ch}\eta}\right)^{n+1}\int_0^\infty\frac{\operatorname{ch} mu}{(\operatorname{ch}\eta_0+\operatorname{sh}\eta_0\operatorname{ch}u)^{n+1}}\,du,$$

следовательно,

$$\frac{Q_n^m(\operatorname{ch}\eta)}{Q_n^m(\operatorname{ch}\eta_0)} < \left(\frac{\operatorname{ch}\eta_0}{\operatorname{ch}\eta}\right)^{n+1}.$$

Так как

$$P_n(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\bar\varphi) =$$
$$= P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta') + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\theta)P_n^m(\cos\theta')\cos m\bar\varphi,$$

то

$$\int_0^{2\pi}\cos m\bar\varphi\, P_n(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\bar\varphi)\,d\bar\varphi = 2\pi\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\theta)P_n^m(\cos\theta'),$$

откуда вытекает, что при всех значениях n, m, θ, θ'

$$\left|\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\theta)P_n^m(\cos\theta')\right| < 1.$$

Следовательно, так как $f(\theta, \varphi)$ абсолютно интегрируема на поверхности единичной сферы, $|Y_n^m(\theta, \varphi)|$ меньше, чем $2n+1$ с некоторым постоянным множителем.

Итак, мы видим, что общие члены рядов (а) и (б) по абсолютной величине меньше некоторых величин, пропорциональных соответственно

$$(2n+1)\left(\frac{\operatorname{ch}\eta}{\operatorname{ch}\eta_0}\right)^n \text{ и } (2n+1)\,\frac{(\operatorname{ch}\eta_0)^{n+1}}{(\operatorname{ch}\eta)}.$$

Следовательно, ряды (а) и (б) сходятся абсолютно в их областях определения, т. е. при $\eta < \eta_0$ и $\eta > \eta_0$ соответственно.

248. Теперь мы покажем, что при фиксированных θ и η функции U_i и U_e стремятся к $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{n} Y_n^m(\theta, \varphi)$, когда $\eta \to \eta_0$, если только этот ряд сходится *абсолютно* в том смысле, что сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} |Y_n^m(\theta, \varphi)|.$$

Для этого нам понадобится следующая лемма:

Пусть ряд $a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + a_r\varphi_r(x) + \ldots$ *сходится при* $a \leqslant x < 1$ *и имеет сумму* $s(x)$. *Если* $0 < |\varphi_r(x)| < 1$ *и* $\lim\limits_{x\to 1}\varphi_r(x) = 1$ *при всех* r *и если ряд* $a_1 + a_2 + \ldots + a_r + \ldots$ *абсолютно сходится и имеет сумму* s, *то*

$$s = \lim_{x\to 1} s(x).$$

Заметим, что при $\varphi_r(s) = x^r$ вместо абсолютной сходимости ряда $\sum a_r$ достаточно, согласно известной теореме Абеля, требовать, чтобы этот ряд сходился в обычном смысле.

Для доказательства заметим, что можно указать такое p, что

$$|a_{p+1}| + |a_{p+2}| + \ldots$$

меньше наперед заданного положительного числа $\varepsilon > 0$. Для любого целого $n > p$ будем тогда иметь

$$|s_n - s_n(x)| \leqslant |s_p - s_p(x)| + |a_{p+1}|\{1 - \varphi_{p+1}(x)\} + \ldots$$
$$\ldots + |a_n|\,|\{1 - \varphi_n(x)\}| \leqslant |s_p - s_p(x)| + 2\varepsilon$$

Так как

$$\lim_{x\to 1}\varphi_1(x) - a_1 = 0,\quad \lim_{x\to 1}\varphi_2(x) - a_2 = 0,\ \ldots,\ \lim_{x\to 1}\varphi_r(x) - a_r = 0,$$

то можно выбрать число X_ε такое, что $|s_p - s_p(x)| < \varepsilon$ для всех $x \geqslant X_\varepsilon$. Следовательно, при $x \geqslant X_\varepsilon$ и $n > p$

$$|s_n - s_n(x)| < 3\varepsilon,$$

откуда при $x \geqslant X_\varepsilon$

$$|s - s(x)| \leqslant 3\varepsilon,$$

т. е., так как ε произвольно, $s = \lim\limits_{x\to 1} s(x)$.

Прямым следствием этой леммы является следущее предложение:

Если при фиксированных θ *и* φ *ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{n} Y_n^m(\theta, \varphi)$ *сходится абсолютно, в том смысле, что сходится ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{n} |Y_n^m(\theta, \varphi)|$, *то при* $\eta \to \eta_0$

функции U_i и U_e, заданные соответственно в областях $\eta < \eta_0$, $\eta > \eta_0$, *стремятся к сумме ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{n} Y_n^m(\theta, \varphi)$.

С помощью этого предложения при некоторых дополнительных условиях нам удастся доказать, что функция $f(\theta, \varphi)$, заданная на поверхности $\eta = \eta_0$, служит пределом функций U_i и U_e при $\eta \to \eta_0$. Для этого недостаточно доказать, как поступает, например, Гейне[1]) при рассмотрении U_i, что ряды (а) и (б), представляющие U_i и U_e, сходятся равномерно. Чтобы U_i и U_e стремились к $f(\theta, \varphi)$, необходимо установить сходимость ряда $\sum\sum |Y_n^m(\theta, \varphi)|$; для этого можно воспользоваться только что установленным признаком или каким-либо другим, менее стеснительным. Кроме того, нужно проверить, что U_i и U_e представляют собой гармонические функции в соответствующих областях. Для этого можно воспользоваться теоремой Гарнака, упомянутой в п. 97.

При любом n_1 функции

$$\sum_{n=0}^{n_1}\sum_{m=0}^{n} Y_n^m(\theta, \varphi)\frac{P_n^m(\operatorname{ch}\eta)}{P_n^m(\operatorname{ch}\eta_0)},$$

$$\sum_{n=1}^{n_1}\sum_{m=0}^{n} Y_n^m(\theta, \varphi)\frac{Q_n^m(\operatorname{ch}\eta)}{Q_n^m(\operatorname{ch}\eta_0)}$$

гармонические соответственно внутри и вне сфероида $\eta = \eta_0$. При $n \to \infty$ последовательности этих функций сходятся, первая к U_i, вторая к U_e. Если они сходятся равномерно на поверхности сфероида, т. е. при $\eta = \eta_0$, то, согласно теореме Гарнака, U_i и U_e представляют собой гармонические функции в соответствующих областях.

Итак, мы приходим к следующей теореме:

Пусть $f(\theta, \varphi)$ — функция, заданная на поверхности $\eta = \eta_0$ и представляемая на ней посредством ряда сферических функций. Если этот ряд на рассматриваемой поверхности сходится равномерно и абсолютно, то функцией, гармонической во внутренней области и стремящейся к $f(\theta, \varphi)$ на ее границе, является

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} Y_n^m(\theta, \varphi)\frac{P_n^m(\operatorname{ch}\eta)}{P_n^m(\operatorname{ch}\eta_0)}.$$

Во внешней области соответствующая функция представляется в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} Y_n^m(\theta, \varphi)\frac{Q_n^m(\operatorname{ch}\eta)}{Q_n^m(\operatorname{ch}\eta_0)}.$$

§ 3. СЖАТЫЕ СФЕРОИДЫ

249. Если положить (см. п. 242)

$$f(\eta + i\theta) = c \operatorname{sh}(\eta + i\theta),$$

то будем иметь

$$z = c\operatorname{sh}\eta\cos\theta, \quad x = c\operatorname{ch}\eta\sin\theta\cos\varphi, \quad y = c\operatorname{ch}\eta\sin\theta\sin\varphi$$

и η будет служить параметром семейства софокусных сжатых сфероидов (эллипсоидов вращения)

$$\frac{x^2+y^2}{c^2\operatorname{ch}^2\eta} + \frac{z^2}{c^2\operatorname{sh}^2\eta} = 1$$

[1]) Kugelfunktionen, т. II, стр. 120.

с осью z в качестве оси вращения; θ будет служить параметром семейства гиперболоидов вращения

$$\frac{x^2+y^2}{c^2\sin^2\theta}-\frac{z^2}{c^2\cos^2\theta}=1.$$

Если ограничить значения η, θ и φ промежутками $0\leqslant\eta<\infty$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ и $0\leqslant\varphi<2\pi$, то любая точка пространства будет однозначно определяться криволинейными координатами (η, θ, φ).

При $\eta=0$ сфероид сплющивается в круг $z=0$, $x^2+y^2=c^2$.

Итак, в рассматриваемом случае

$$f'(\eta+i\theta)\,f'(\eta-i\theta)=\operatorname{ch}^2\eta-\sin^2\theta=\operatorname{sh}^2\eta+\cos^2\theta$$

и

$$[f(\eta+i\theta)-f(\eta-i\theta)]^2=-4\operatorname{ch}^2\eta\sin^2\theta,$$

откуда

$$\frac{f'(\eta+i\theta)\,f'(\eta-i\theta)}{[f(\eta+i\theta)-f(\eta-i\theta)]^2}=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-\frac{1}{\operatorname{ch}^2\eta}\right),$$

так что

$$\chi_1(\eta)=\frac{1}{4\operatorname{ch}^2\eta},\quad \chi_2(\theta)=-\frac{1}{4\sin^2\theta}.$$

Далее,

$$\frac{f'(\eta+i\theta)-f'(\eta-i\theta)}{f(\eta+i\theta)-f(\eta-i\theta)}=\operatorname{th}\eta,\quad i\,\frac{f'(\eta+i\theta)+f'(\eta-i\theta)}{f(\eta+i\theta)-f(\eta-i\theta)}=\operatorname{ctg}\theta,$$

и мы видим, что нормальные решения уравнения Лапласа в координатах (η, θ, φ) имеют вид $\mathrm{H}\Theta\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}m\varphi$, где H, Θ — решения дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2\mathrm{H}}{d\eta^2}+\operatorname{th}\eta\frac{d\mathrm{H}}{d\eta}-\frac{m^2}{\operatorname{ch}^2\eta}\mathrm{H}=n(n+1)\,\mathrm{H},$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\operatorname{ctg}\theta\frac{d\Theta}{d\theta}-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\Theta=-n(n+1)\,\Theta,$$

где n постоянно. Решения этих уравнений суть

$$\mathrm{H}=P_n^m(i\operatorname{sh}\eta)\quad\text{или}\quad Q_n^m(i\operatorname{sh}\eta),$$

$$\Theta=P_n^m(\cos\theta)\quad\text{или}\quad Q_n^m(\cos\theta).$$

В простейших задачах теории потенциала в качестве Θ приходится брать функции $P_n^m(\cos\theta)$ с целыми неотрицательными m и n, причем $m\leqslant n$. Мы покажем, что в некоторой точке фокального круга $z=0$, $x^2+y^2=c^2$ производная функции $P_n^m(\cos\theta)\,Q_n^m(i\operatorname{sh}\eta)$ по направлению нормали к поверхности $\eta=\text{const}$ или к поверхности $\theta=\text{const}$ обращается в бесконечность. Следовательно, ни в какой области, охватывающей фокальный круг, гармоническая функция не должна содержать произведения $P_n^m(\cos\theta)\times\times Q_n^m(i\operatorname{sh}\eta)\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}m\varphi$. Функция $P_n^m(i\operatorname{sh}\eta)$ сама стремится к бесконечности вместе с η, поэтому ею нельзя пользоваться для построения гармонической функции в областях, содержащих точки со сколь угодно большой координатой η. Итак, в области, внутренней по отношению к сфероиду $\eta=\eta_0$, мы будем пользоваться нормальными функциями вида $P_n^m(\cos\theta)\times\times P_n^m(i\operatorname{sh}\eta)\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}m\varphi$, а во внешней области — функциями $P_n^m(\cos\theta)\times\times Q_n^m(i\operatorname{sh}\eta)\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}m\varphi$.

Элементы длины по направлению нормалей к поверхности $\eta = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$ выражаются, как легко видеть, формулами

$$d\nu_1 = c(\cos^2\theta + \operatorname{sh}^2\eta)^{\frac{1}{2}} d\eta, \qquad d\nu_2 = c(\cos^2\theta + \operatorname{sh}^2\eta)^{\frac{1}{2}} d\theta,$$

следовательно, нормальные производные функции $P_n^m(\cos\theta)\, Q_n^m(i\operatorname{sh}\eta)$ по этим направлениям суть

$$P_n^m(\cos\theta)\frac{dQ_n^m(i\operatorname{sh}\eta)}{c(\cos^2\theta+\operatorname{sh}^2\eta)^{\frac{1}{2}}\, d\eta}, \qquad \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d(\cos\theta)}\,\frac{\sin\theta}{c(\cos^2\theta+\operatorname{sh}^2\eta)^{\frac{1}{2}}}\, Q_n^m(i\operatorname{sh}\eta).$$

Если $n-m$ четно, то $\dfrac{P_n^m(\cos\theta)}{\cos\theta}$ становится бесконечно при $\theta\to\dfrac{\pi}{2}$; следовательно, первая из этих производных обращается в бесконечность в точке $\eta=0$, $\theta=\dfrac{\pi}{2}$, так как $\dfrac{d}{d\eta}Q_n^m(i\operatorname{sh}\eta)$ в этой точке не равна нулю. Если $n-m$ нечетно, то $\dfrac{d}{d\cos\theta}P_n^m(\cos\theta)$ в нуль не обращается; $Q_n^m(i\operatorname{sh}\eta)$ также не равна нулю при $\eta=0$, а множитель $\dfrac{\sin\theta}{(\cos^2\theta+\operatorname{sh}^2\eta)^{\frac{1}{2}}}$ обращается в бесконечность в точке $\eta=0$, $\theta=\dfrac{\pi}{2}$. Таким образом, обе рассматриваемые производные в точке $\eta=0$, $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ претерпевают разрыв.

250. Функции $P_n\left(\dfrac{x\cos t+y\sin t+iz}{c}\right)$ и $Q_n\left(\dfrac{x\cos t+y\sin t+iz}{c}\right)$ удовлетворяют уравнению Лапласа; мы покажем, что обе они могут быть разложены в ряд по нормальным решениям, только что полученным нами для сжатого сфероида.

Положив $\mu = i\operatorname{sh}\eta$, $\mu' = \cos\theta + 0\cdot i$, получим с помощью теоремы сложения гл. VIII

$$P_n(i\operatorname{sh}\eta\cos\theta+\operatorname{ch}\eta\sin\theta\cos\varphi) = P_n(i\operatorname{sh}\eta)\,P_n(\cos\theta) + 2\sum_{m=1}^{n}(-1)^m\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}e^{-\frac{1}{2}m\pi i}P_n^m(i\operatorname{sh}\eta)\,P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi.$$

Взяв $\varphi - t$ вместо φ, получим требуемое выражение

$$P_n\left(\frac{iz+x\cos t+y\sin t}{c}\right) = P_n(i\operatorname{sh}\eta)\,P_n(\cos\theta) + 2\sum_{m=1}^{n}(-1)^m\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n+m)}e^{-\frac{1}{2}m\pi i}P_n^m(i\operatorname{sh}\eta)\,P_n^m(\cos\theta)\cos m(\varphi-t).$$

Отсюда непосредственно вытекают равенства[1])

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_n\left(\frac{iz+x\cos t+y\sin t}{c}\right)dt = P_n(i\operatorname{sh}\eta)\,P_n(\cos\theta),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_n\left(\frac{iz+x\cos t+y\sin t}{c}\right)\frac{\cos}{\sin}mt\,dt = e^{-\frac{1}{2}m\pi}(-1)^m P_n^m(i\operatorname{sh}\eta)\,P_n^m(\cos\theta)\frac{\cos}{\sin}m\varphi,$$

[1]) См. Blades, Proc. Edin. Math Soc., 33 (1914—1915), 68.

выражающие нормальные функции одного из двух видов для сжатого сфероида через интегралы от $P_n\left(\frac{x\cos t+y\sin t+iz}{c}\right)$.

Положив теперь $\mu=i\operatorname{sh}\eta$, $\mu'=\cos\theta+0\cdot i$ для $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ и заметив, что

$$1=\left|\frac{i\operatorname{sh}\eta+1}{i\operatorname{sh}\eta-1}\right|<\left|\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right|,$$

применим теорему сложения п. 223. В полученном равенстве

$$Q_n(i\operatorname{sh}\eta\cos\theta+\operatorname{ch}\eta\sin\theta\cos\varphi)=P_n(\cos\theta)\,Q_n(i\operatorname{sh}\eta)+\\+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m e^{\frac{1}{2}m\pi i}P_n^{-m}(\cos\theta)\,Q_n^m(i\operatorname{sh}\eta)\cos m\varphi$$

заменим φ разностью $\varphi-t$. Тогда

$$Q_n\left(\frac{x\cos t+y\sin t+iz}{c}\right)=P_n(\cos\theta)\,Q_n(i\operatorname{sh}\eta)+\\+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m e^{-\frac{1}{2}m\pi i}P_n^{-m}(\cos\theta)\,Q_n^m(i\operatorname{sh}\eta)\cos m(\varphi-t),$$

откуда для $0<\theta<\frac{\pi}{2}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Q_n\left(\frac{x\cos t+y\sin t+iz}{c}\right)dt=P_n(\cos\theta)\,Q_n(i\operatorname{sh}\eta),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Q_n\left(\frac{x\cos t+y\sin t+iz}{c}\right)\frac{\cos}{\sin}mt\,dt=\\=(-1)^m e^{\frac{1}{2}m\pi i}P_n^{-m}(\cos\theta)\,Q_n^m(i\operatorname{sh}\eta)\frac{\cos}{\sin}m\varphi.$$

Мы получили[1]) выражение нормальных функций второго вида через интегралы от $Q_n\left(\frac{x\cos t+y\sin t+iz}{c}\right)$.

Подобные же выражения можно получить для промежутка $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$; при этом функции P и Q меняются ролями.

251. Теперь мы получим разложение в ряд по нормальным функциям обратной величины расстояния между точками $(\eta,\ \theta,\ \varphi)$ и $(\eta',\ \theta',\ \varphi')$, где $\eta>\eta'$.

Имеем

$$\frac{D^2}{c^2}=(\operatorname{sh}\eta\cos\theta-\operatorname{sh}\eta'\cos\theta')^2+(\operatorname{ch}\eta\sin\theta\cos\varphi-\operatorname{ch}\eta'\sin\theta'\cos\varphi')^2+\\+(\operatorname{ch}\eta\sin\theta\sin\varphi-\operatorname{ch}\eta'\sin\theta'\sin\varphi')^2,$$

что можно представить в виде

$$\frac{D^2}{c^2}=-(\operatorname{sh}\eta\operatorname{sh}\eta'+\cos\theta\cos\theta')^2+(\operatorname{ch}\eta\operatorname{ch}\eta'-\sin\theta\sin\theta'\cos\omega)^2+\\+\sin^2\theta\sin^2\theta'\sin^2\omega=-A^2+B^2+C^2,$$

где A, B, C обозначают действительные выражения в скобках, а $\omega=\varphi-\varphi'$.

---

[1]) См. Jeffery, Proc. Edin. Math. Soc., 33 (1914—1915), ч. 2, 118. Теорема сложения для Q в этой статье формулируется неверно.

Как легко видеть,

$$\frac{2\pi c}{D}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{A+B\operatorname{ch}u+iC\operatorname{sh}u}-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{A-B\operatorname{ch}u+iC\operatorname{sh}u}=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{\operatorname{sh}\eta\operatorname{sh}\eta'+\operatorname{ch}\eta\operatorname{ch}\eta'\operatorname{ch}u+\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'\cos(\omega+iu)}-$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{\operatorname{sh}\eta\operatorname{sh}\eta'-\operatorname{ch}\eta\operatorname{ch}\eta'\operatorname{ch}u+\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\omega-iu)}.$$

Последнее равенство можно записать в виде

$$\frac{2\pi c}{D}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{\alpha-\beta}-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{\alpha'-\beta'},$$

где

$$\alpha=\operatorname{sh}\eta\operatorname{sh}\eta'+\operatorname{ch}\eta\operatorname{ch}\eta'\operatorname{ch}u,$$

$$\beta=(\sin\theta\sin\theta'\cos\omega\operatorname{ch}u-\cos\theta\cos\theta')-i\sin\theta\sin\theta'\sin\omega\operatorname{sh}u;$$

α' и β' выражаются аналогично.

Согласно п. 38,

$$\frac{1}{\alpha-\beta}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,Q_n(\alpha)\,P_n(\beta),$$

если только $|\beta+(\beta^2-1)^{\frac{1}{2}}|<|\alpha+(\alpha^2-1)^{\frac{1}{2}}|$. Сейчас мы убедимся в том, что последнее условие выполняется при любом u.

Пусть

$$\sin\theta\sin\theta'\cos\omega\operatorname{ch}u-\cos\theta\cos\theta'=p\cos q, \tag{а}$$

$$-\sin\theta\sin\theta'\sin\omega\operatorname{sh}u=(p^2-1)^{\frac{1}{2}}\sin q, \tag{б}$$

где $p\geqslant 1$. Тогда

$$\beta^2-1=\{\cos q\,(p^2-1)^{\frac{1}{2}}+ip\sin q\}^2,$$

откуда

$$\beta+(\beta^2-1)^{\frac{1}{2}}=\{p+(p^2-1)^{\frac{1}{2}}\}(\cos q+i\sin q)$$

и

$$|\beta+(\beta^2-1)^{\frac{1}{2}}|=|p+(p^2-1)^{\frac{1}{2}}|.$$

Докажем, что $p<\operatorname{ch}u$ при $u\neq 0$ и, следовательно,

$$|\beta+(\beta^2-1)^{\frac{1}{2}}|<e^{|u|}.$$

Исключая q из уравнений (*а*) и (*б*), получим для p^2 следующее квадратное уравнение:

$$p^2(p^2-1)-(p^2-1)(\sin\theta\sin\theta'\operatorname{ch}u\cos\omega-\cos\theta\cos\theta')^2-$$
$$-p^2\sin^2\theta\sin^2\theta'\sin^2\omega\operatorname{sh}^2u=0.$$

Его левая часть положительна при $p^2 = \pm\infty$ и отрицательна при $p^2 = 1$, следовательно, между 1 и $+\infty$ лежит один корень уравнения. Если мы покажем, что взяв вместо p^2 величину $\operatorname{ch}^2 u$, мы придем к положительному значению левой части, то отсюда будет следовать, что $p^2 < \operatorname{ch}^2 u$.

Берем $\operatorname{ch}^2 u$ вместо p^2 и отбрасываем положительный множитель $\operatorname{sh}^2 u$; левая часть уравнения примет тогда вид

$$\operatorname{ch}^2 u\,(1 - \sin^2\theta\sin^2\theta') - \cos^2\theta\cos^2\theta' + 2\sin\theta\sin\theta'\cos\theta\cos\theta'\cos\omega\operatorname{ch} u.$$

Надо показать, что это выражение положительно. Для этого рассмотрим квадратный трехчлен

$$x^2(1 - \sin^2\theta\sin^2\theta') - \cos^2\theta\cos^2\theta' + 2x\sin\theta\sin\theta'\cos\theta\cos\theta'\cos\omega.$$

Он имеет единственный положительный корень; поэтому, если мы покажем, что этот трехчлен положителен при $x = 1$, то он будет положителен и при $x = \operatorname{ch} u$.

При $x = 1$ имеем

$$1 - \sin^2\theta\sin^2\theta' - \cos^2\theta\cos^2\theta' + 2\sin\theta\sin\theta'\cos\theta\cos\theta'\cos\omega.$$

Сравнивая это выражение с

$$1 - \cos^2(\theta - \theta') + 2\sin\theta\sin\theta'\cos\theta\cos\theta'\,(1 + \cos\omega)$$

и

$$1 - \cos^2(\theta + \theta') - 2\sin\theta\sin\theta'\cos\theta\cos\theta'\,(1 - \cos\omega),$$

мы увидим, что при $\sin\theta\sin\theta'\cos\theta\cos\theta' > 0$ оно больше $\sin^2(\theta - \theta')$ и меньше $\sin^2(\theta + \theta')$, а при $\sin\theta\sin\theta'\cos\theta\cos\theta' < 0$ оно больше $\sin^2(\theta + \theta')$ и меньше $\sin^2(\theta - \theta')$; в том и другом случае оно положительно. Итак, доказано, что $p < \operatorname{ch} u$ при $u \neq 0$; если же $u = 0$, то $p = 1$. Следовательно, $|\beta + (\beta^2 - 1)^{\frac{1}{2}}| \leqslant e^{|u|}$.

Из неравенств $\alpha > \operatorname{ch}\eta\operatorname{ch}\eta'\operatorname{ch} u$, $(\alpha^2 - 1)^{\frac{1}{2}} > \operatorname{sh} u$ вытекает $\alpha + (\alpha^2 - 1)^{\frac{1}{2}} > (\operatorname{ch}\eta\operatorname{ch}\eta' - 1)\operatorname{ch} u + e^{|u|}$. Отсюда $|\beta + (\beta^2 - 1)^{\frac{1}{2}}| < |\alpha + (\alpha^2 - 1)^{\frac{1}{2}}|$ при всяком $u \neq 0$.

Итак, мы доказали, что при $u \neq 0$ ряд $\sum(2n+1)Q_n(\alpha)P_n(\beta)$ сходится к $\frac{1}{\beta - \alpha}$. Теперь мы покажем, что этот ряд можно интегрировать почленно по u от $-\infty$ до $+\infty$.

Для этого достаточно показать, что сумма ряда $\sum|(2n+1)Q_n(\alpha)P_n(\beta)|$ интегрируема в промежутке $(-\infty, \infty)$[1]).

Имеем

$$Q_n(\alpha) = \frac{\Pi(n)\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(n + \frac{1}{2}\right)}\frac{1}{z^{n+1}}F\left(\frac{1}{2},\ n+1;\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{z^2}\right),$$

---

[1]) В самом деле, если $f_n(u) + i\varphi_n(u)$ — общий член ряда и ряд $\sum|f_n + i\varphi_n|$, т. е. $\sum\{f_n^2(u) + \varphi_n^2(u)\}^{\frac{1}{2}}$, имеет интегрируемую в промежутке $(-\infty, \infty)$ сумму, то тем же свойством обладают ряды $\sum|f_n(u)|$ и $\sum|\varphi_n(u)|$. Тогда, согласно известному свойству действительных рядов (см. Hobson, Theory of functions of a real variable, т. II, стр. 306), ряды $\sum f_n(u)$ и $\sum\varphi_n(u)$, а следовательно, и $\sum\{f_n(u) + i\varphi_n(u)\}$ можно интегрировать почленно.

где $z = \alpha + (\alpha^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$; отсюда (см. гл. VI, п. 192)

$$|Q_n(\alpha)| < \left(\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{z^{n+1}} F\left(\frac{1}{2},\ n+1;\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{z^2}\right) < \left(\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{z^{n+1}} \left(1 - \frac{1}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Кроме того [см. формулу (61) гл. II],

$$P_n(\beta) = \frac{\Pi\left(n - \frac{1}{2}\right)}{\Pi(n)\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)} \{\beta + (\beta^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\}^n F\left(\frac{1}{2},\ -n;\ \frac{1}{2} - n;\ \frac{1}{[\beta + (\beta^2 - 1)^{\frac{1}{2}}]^2}\right);$$

отсюда, так как

$$1 = P_n(1) = \frac{\Pi\left(n - \frac{1}{2}\right)}{\Pi(n)\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)} F\left(\frac{1}{2},\ -n;\ \frac{1}{2} - n;\ 1\right),$$

вытекает неравенство

$$|P_n(\beta)| < |\beta + (\beta^2 - 1)^{\frac{1}{2}}|^n.$$

Следовательно,

$$|(2n+1)\,Q_n(\alpha)\,P_n(\beta)| < \frac{(2n+1)\,\pi^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}} \frac{|\beta + (\beta^2 - 1)^{\frac{1}{2}}|^n}{\{\alpha + (\alpha^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\}^{n+1}} \left(1 - \frac{1}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

и

$$|(2n+1)\,Q_n(\alpha)\,P_n(\beta)| < \frac{(2n+1)\,\pi^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}} \left\{\frac{e^{|u|}}{(\operatorname{ch}\eta \operatorname{ch}\eta' - 1)\operatorname{ch} u + e^{|u|}}\right\}^n \times$$

$$\times \frac{1}{(\operatorname{ch}\eta \operatorname{ch}\eta' - 1)\operatorname{ch} u + e^{|u|}} \left(1 - \frac{1}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Предположим, что η и η' не равны нулю одновременно. Тогда $\operatorname{ch}\eta \operatorname{ch}\eta' - 1 > 0$ и $(\operatorname{ch}\eta \operatorname{ch}\eta' - 1)\operatorname{ch} u + e^{|u|} > (1 + \lambda)\,e^{|u|}$, где λ — некоторое положительное число, не зависящее от u; поэтому

$$|(2n+1)\,Q_n(\alpha)\,P_n(\beta)| < \frac{(2n+1)\,\pi^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^{n+1} e^{-|u|} \left(1 - \frac{1}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда следует неравенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} |(2n+1)\,Q_n(\alpha)\,P_n(\beta)| <$$

$$< \pi^{\frac{1}{2}} e^{-|u|} \sum \frac{(2n+1)}{n^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{1}{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Так как $\lambda > 0$, то правая часть меньше $e^{-|u|}$ с некоторым постоянным множителем; следовательно, она интегрируема по u в промежутке $(-\infty, \infty)$.

Итак. мы доказали, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\alpha-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, Q_n(\alpha)\, P_n(\beta).$$

Почти так же доказывается, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\alpha'-\beta'} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, Q_n(\alpha')\, P_n(\beta').$$

Поэтому

$$\frac{2\pi c}{D} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} Q_n(\alpha)\, P_n(\beta)\, du - \int_{-\infty}^{\infty} Q_n(\alpha')\, P_n(\beta')\, du \right\}.$$

Подставим вместо $P_n(\beta)$ и $P_n(\beta')$ их выражения, получающиеся согласно теореме сложения:

$$P_n(\beta) = (-1)^n \sum_{m=0}^{n} (-1)^m a_n^m P_n^m(\cos\theta)\, P_n^m(\cos\theta') \cos m(\omega+iu),$$

$$P_n(\beta') = (-1)^n \sum_{m=0}^{n} a_n^{(m)} P_n^m(\cos\theta)\, P_n^m(\cos\theta') \cos m(\omega-iu),$$

где $a_n^{(m)} = 2\frac{(n-m)!}{(n+m)!}$ $(m \neq 0)$ и $a_n^{(0)} = 1$.

Итак, общий член ряда, представляющего $\frac{2\pi c}{D}$, есть

$$(2n+1)(-1)^n \sum_{m=0}^{n} a_n^{(m)} P_n^m(\cos\theta)\, P_n^m(\cos\theta') \int_{-\infty}^{\infty} \{(-1)^m Q_n(\alpha) - Q_n(\alpha')\} \times$$
$$\times \operatorname{ch} mu \cos m\omega\, du.$$

Для вычисления

$$(-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \{(-1)^m Q_n(\alpha) - Q_n(\alpha')\} \operatorname{ch} mu\, du$$

воспользуемся результатом п. 228, который состоял в том, что $(-1)^n Q_n(\alpha)$ есть среднее арифметическое интегралов

$$\int_0^{\operatorname{arcctg}(\operatorname{sh}\eta)} \frac{(\operatorname{sh}\eta - \operatorname{ch}\eta\cos\chi)^n}{\{\operatorname{sh}\eta' + \cos(\chi \pm iu)\operatorname{ch}\eta'\}^{n+1}}\, d\chi.$$

То же верно и для α'; при этом вместо $\operatorname{ch}\eta'$ берется $-\operatorname{ch}\eta'$.

Таким образом,

$$(-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \{(-1)^m Q_n(\alpha) - Q_n(\alpha')\} \operatorname{ch} mu\, du = 2 \int_0^{\operatorname{arcctg}(\operatorname{sh}\eta)} (\operatorname{sh}\eta - \operatorname{ch}\eta\cos\chi)^n\, d\chi \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} [(-1)^m \{\operatorname{sh}\eta' + \operatorname{ch}(u+i\chi)\operatorname{ch}\eta'\}^{-(n+1)} -$$
$$- \{\operatorname{sh}\eta' - \operatorname{ch}(u+i\chi)\operatorname{ch}\eta'\}^{-(n+1)}] \operatorname{ch} mu\, du.$$

При $\eta > \eta'$ в первом интеграле $\chi \leqslant \operatorname{arcctg}\operatorname{sh}\eta$, откуда $\operatorname{sh}\eta' < \operatorname{sh}\eta < \operatorname{ctg}\chi$. Следовательно, при любом η' значение χ заключено в промежутке $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; вместе с тем в точке, в которой $\operatorname{sh}\eta' + \operatorname{ch}(u+i\chi)\operatorname{ch}\eta'$ обращается в нуль, значение χ превосходит $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, такая точка всегда лежит вне области, ограниченной линией $u=0$ и ей параллельной, отстоящей от нее на расстоянии χ.

Выражение

$$\operatorname{sh}\eta' - \operatorname{ch}(u+i\chi)\operatorname{ch}\eta'$$

обращается в нуль в точке, в которой $u=0$ и $\cos\chi = \operatorname{th}\eta'$. Так как наибольшее значение χ равно $\operatorname{arcctg}\operatorname{sh}\eta \equiv \arccos\operatorname{th}\eta < \arccos\operatorname{th}\eta'$, то такая точка оказывается вне прямоугольника, ограниченного линией $u=0$ и линией, ей параллельной, отстоящей от нее на расстоянии χ.

Как в п. 172, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} m(u+i\chi)\,du}{[\operatorname{sh}\eta' + \operatorname{ch}\eta' \operatorname{ch}(u+i\chi)]^{n+1}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} mu\,du}{(\operatorname{sh}\eta' + \operatorname{ch}\eta' \operatorname{ch} u)^{n+1}},$$

так как $\operatorname{sh}\eta' + \operatorname{ch}\eta' \operatorname{ch} u$ не обращается в нуль между линиями u и $u+i\chi$.

Мы имеем также

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} m(u+i\chi)\,du}{[\operatorname{sh}\eta' + \operatorname{ch}\eta' \operatorname{ch}(u+i\chi)]^{n+1}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} mu}{(\operatorname{sh}\eta' + \operatorname{ch}\eta' \operatorname{ch} u)^{n+1}} = 0.$$

Умножая на $\operatorname{ch} mi\chi$, $\operatorname{sh} mi\chi$ и вычитая, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} mu\,du}{[\operatorname{sh}\eta' + \operatorname{ch}\eta' \operatorname{ch}(u+i\chi)]^{n+1}} = \cos m\chi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} mu\,du}{(\operatorname{sh}\eta' + \operatorname{ch}\eta' \operatorname{ch} u)^{n+1}}.$$

Подобным же образом находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} mu\,du}{[\operatorname{sh}\eta' - \operatorname{ch}\eta' \operatorname{ch}(u+c\chi)]^{n+1}} = \cos m\chi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} mu\,du}{(\operatorname{sh}\eta' - \operatorname{ch}\eta' \operatorname{ch} u)^{n+1}}.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{ch} mu\,[(-1)^m\{\operatorname{sh}\eta' + \operatorname{ch}\eta' \operatorname{ch}(u+i\chi)\}^{-(n+1)} -$$

$$-\{\operatorname{sh}\eta' - \operatorname{ch}\eta' \operatorname{ch}(u+i\chi\}^{-(n+1)}]\,du = (-1)^m \cos m\chi \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} mu\,du}{(\operatorname{sh}\eta' + \operatorname{ch}\eta' \operatorname{ch} u)^{n+1}} - \right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} m(u+i\pi)\,du}{\{\operatorname{sh}\eta' + \operatorname{ch}\eta' \operatorname{ch}(u+i\pi)\}^{n+1}}\right].$$

Как в п. 172,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} mu\,du}{(\operatorname{sh}\eta' + \operatorname{ch}\eta' \operatorname{ch} u)^{n+1}} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} m(u+i\pi)\,du}{\{\operatorname{sh}\eta' + \operatorname{ch}\eta' \operatorname{ch}(u+i\pi)\}^{n+1}} =$$

$$= -2i \int_0^{\pi} \frac{\cos m\psi\,d\psi}{(\operatorname{sh}\eta' + \operatorname{ch}\eta' \cos\psi)^{n+1}}.$$

В п. 172 случай, когда критическая точка оказывается на линии $u=0$, был исключен. Но когда n и m целые, интегралу в правой части в этом случае можно приписать определенный смысл, если, интегрируя, обойти точку $\arccos\operatorname{th}\eta'$ по малой полуокружности. Согласно уравнению (109) п. 166,

$$i\int_0^{\pi} \frac{\cos m\psi\,d\psi}{(\operatorname{sh}\eta' + \operatorname{ch}\eta' \cos\psi)^{n+1}} = \pi(-1)^m i^{n+1} \frac{(n-m)!}{n!} P_n^m(i\operatorname{sh}\eta'),$$

в то же время в силу уравнения (118) п. 171

$$\int\limits_0^{\operatorname{arcctg}\operatorname{sh}\eta} \cos m\chi\,(\operatorname{sh}\eta-\operatorname{ch}\eta\cos\chi)^n\,d\chi = i^{-n}\,(-1)^m\,\frac{n!}{(n+m)!}\,Q_n^m(i\operatorname{sh}\eta).$$

Следовательно,

$$(-1)^n\int\limits_{-\infty}^{\infty}\{(-1)^m Q_n(\alpha)-Q_n(\alpha')\}\operatorname{ch}mu\,du = 2\pi\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\,P_n^m(i\operatorname{sh}\eta')\,Q_n^m(i\operatorname{sh}\eta).$$

Итак, мы доказали, что обратная величина расстояния D между точками (η, θ, φ) и $(\eta', \theta', \varphi')$, где $\eta > \eta'$, выражается в виде

$$\frac{c}{D}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\Big[P_n(\cos\theta)\,P_n(\cos\theta')\,Q_n(i\operatorname{sh}\eta)\,P_n(i\operatorname{sh}\eta')+$$
$$+2\sum_{m=1}^{n}(-1)^m\Big(\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\Big)^2 P_n^m(\cos\theta)\,P_n^m(\cos\theta')\times$$
$$\times Q_n^m(i\operatorname{sh}\eta)\,P_n^m(i\operatorname{sh}\eta')\cos m(\varphi-\varphi')\Big],$$

т. е. разлагается в ряд по нормальным решениям. Идея доказательства принадлежит Гейне, но само его доказательство изложено здесь со значительными изменениями.

252. Пусть η_0 — значение координаты η на заданном сжатом сфероиде. Если краевые значения гармонической функции на нем суть

$$AP_n^m(\cos\theta)\,{}^{\cos}_{\sin}\,m\varphi,$$

то внутри сфероида гармоническая функция, принимающая эти краевые значения, выражается в виде

$$A\,\frac{P_n^m(i\operatorname{sh}\eta)}{P_n^m(i\operatorname{sh}\eta_0)}\,P_n^m(\cos\theta)\,{}^{\cos}_{\sin}\,m\varphi.$$

Вне сфероида соответствующей гармонической функцией является

$$A\,\frac{Q_n^m(i\operatorname{sh}\eta)}{Q_n^m(i\operatorname{sh}\eta_0)}\,P_n^m(\cos\theta)\,{}^{\cos}_{\sin}\,m\varphi.$$

Если краевая функция представляет собой конечную сумму членов вида $AP_n^m(\cos\theta)\,{}^{\cos}_{\sin}\,m\varphi$, то соответствующие гармонические функции внутри и вне сфероида суть соответственно суммы членов вида

$$A\,\frac{P_n^m(i\operatorname{sh}\eta)}{P_n^m(i\operatorname{sh}\eta_0)}\,P_n^m(\cos\theta)\,{}^{\cos}_{\sin}\,m\varphi$$

и

$$A\,\frac{Q_n^m(i\operatorname{sh}\eta)}{Q_n^m(i\operatorname{sh}\eta_0)}\,P_n^m(\cos\theta)\,{}^{\cos}_{\sin}\,m\varphi.$$

Теперь мы рассмотрим, так же как в случае вытянутого сфероида, общий случай, когда краевые значения заданы посредством ряда функций вида $AP_n^m(\cos\theta)\,{}^{\cos}_{\sin}\,m\varphi$.

Пусть $U\equiv f(\theta,\varphi)$ — функция, абсолютно интегрируемая (в смысле Лебега) в области $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $0\leqslant\varphi<2\pi$. Запишем соответствующий ей ряд сферических функций

$$\sum \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} P_n(\cos\gamma) f(\theta', \varphi') \sin\theta' \, d\varphi' \, d\theta',$$

где $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi')$. Никаких предположений относительно сходимости этого ряда мы пока не высказываем.

Запишем заданный ряд в виде

$$U \sim \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} Y_n^m(\theta, \varphi),$$

где

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = \frac{2n+1}{4\pi} 2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta) \times$$
$$\times \left[\cos m\varphi \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta', \varphi') \cos m\varphi' \sin\theta' \, d\varphi' \, d\theta' + \right.$$
$$\left. + \sin m\varphi \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta', \varphi') \sin m\varphi' \sin\theta' \, d\varphi' \, d\theta' \right];$$

там, где $m = 0$, множитель 2 опускается.

Рассмотрим ряды

$$U_i \sim \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} Y_n^m(\theta, \varphi) \frac{P_n^m(i \operatorname{sh}\eta)}{P_n^m(i \operatorname{sh}\eta_0)} \quad \text{для} \quad \eta < \eta_0, \tag{а}$$

$$U_e \sim \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} Y_n^m(\theta, \varphi) \frac{Q_n^m(i \operatorname{sh}\eta)}{Q_n^m(i \operatorname{sh}\eta_0)} \quad \text{для} \quad \eta > \eta_0. \tag{б}$$

Покажем, что они абсолютно сходятся соответственно при $\eta < \eta_0$ и $\eta > \eta_0$ и, следовательно, имеют определенные суммы U_i и U_e.

При $\eta < \eta_0$

$$\frac{P_n^m(i \operatorname{sh}\eta)}{P_n^m(i \operatorname{sh}\eta_0)} = \left(\frac{\operatorname{ch}\eta}{\operatorname{ch}\eta_0}\right)^m \left[\frac{\operatorname{sh}\eta}{\operatorname{sh}\eta_0}\right] \frac{(\operatorname{sh}^2\eta + \alpha_1^2) \ldots (\operatorname{sh}^2\eta + \alpha_p^2)}{(\operatorname{sh}^2\eta_0 + \alpha_1^2) \ldots (\operatorname{sh}^2\eta_0 + \alpha_p^2)},$$

где p обозначает либо $\frac{1}{2}(n-m)$, либо $\frac{1}{2}(n-m-1)$ и множитель $\frac{\operatorname{sh}\eta}{\operatorname{sh}\eta_0}$ присутствует только во втором случае. Нетрудно видеть, что

$$\frac{\operatorname{sh}^2\eta + \alpha^2}{\operatorname{sh}^2\eta_0 + \alpha^2} < \frac{\operatorname{ch}^2\eta}{\operatorname{ch}^2\eta_0}$$

и, следовательно,

$$\left| \frac{P_n^m(i \operatorname{sh}\eta)}{P_n^m(i \operatorname{sh}\eta_0)} \right| < \left(\frac{\operatorname{ch}\eta}{\operatorname{ch}\eta_0}\right)^n.$$

Что касается ряда (б), то, так как $Q_n^m(i \operatorname{sh}\eta)$ пропорционально

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} mu}{(\operatorname{sh}\eta + \operatorname{ch}\eta \operatorname{ch} u)^{n+1}} du$$

[см. формулу (117) п. 170] и при $\eta > \eta_0$

$$(\operatorname{sh}\eta + \operatorname{ch}\eta \operatorname{ch} u) \operatorname{ch}\eta_0 > (\operatorname{sh}\eta_0 + \operatorname{ch}\eta_0 \operatorname{ch} u) \operatorname{ch}\eta,$$

то

$$|Q_n^m(i \operatorname{sh}\eta)| < \left(\frac{\operatorname{ch}\eta_0}{\operatorname{ch}\eta}\right)^{n+1} |Q_n^m(i \operatorname{sh}\eta_0)|,$$

т. е.

$$\left| \frac{Q_n^m(i \operatorname{sh} \eta)}{Q_n^m(i \operatorname{sh} \eta_0)} \right| < \left(\frac{\operatorname{ch} \eta_0}{\operatorname{ch} \eta} \right)^{n+1}.$$

Так же как в п. 247, мы видим, что

$$\left| \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta) P_n^m(\cos\theta') \right| < 1.$$

Таким образом, общие члены рядов (а) и (б) по абсолютной величине меньше величин, пропорциональных соответственно $(2n+1)\left(\frac{\operatorname{ch}\eta}{\operatorname{ch}\eta_0}\right)^n$ и $(2n+1)\left(\frac{\operatorname{ch}\eta_0}{\operatorname{ch}\eta}\right)^{n+1}$, поэтому эти ряды сходятся равномерно, ряд (а) при $\eta < \eta_0$, ряд (б) при $\eta > \eta_0$.

Итак, *если абсолютно интегрируемой функции* $f(\theta, \varphi)$ *соответствует на поверхности* $\eta = \eta_0$ *ряд по сферическим функциям* $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} Y_n^m(\theta, \varphi)$, *то ряды*

$$\sum \sum Y_n^m(\theta, \varphi) \frac{P_n^m(i \operatorname{sh} \eta)}{P_n^m(i \operatorname{sh} \eta_0)}, \qquad \sum \sum Y_n^m(\theta, \varphi) \frac{Q_n^m(i \operatorname{sh} \eta)}{Q_n^m(i \operatorname{sh} \eta_0)}$$

сходятся абсолютно соответственно при $\eta < \eta_0$ *и* $\eta > \eta_0$.

Точно так же, как в п. 248, применяя теорему Гарнака, мы приходим к следующему результату:

Если ряд, представляющий $f(\theta, \varphi)$, *сходится равномерно и абсолютно на поверхности* $\eta = \eta_0$, *то внутренняя задача Дирихле с краевой функцией* $f(\theta, \varphi)$ *имеет решение*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} Y_n^m(\theta, \varphi) \frac{P_n^m(i \operatorname{sh} \eta)}{P_n^m(i \operatorname{sh} \eta_0)}.$$

Решением соответствующей внешней задачи служит

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} Y_n^m(\theta, \varphi) \frac{Q_n^m(i \operatorname{sh} \eta)}{Q_n^m(i \operatorname{sh} \eta_0)}.$$

§ 4. КОЛЬЦЕВЫЕ ФУНКЦИИ

253. Теперь мы рассмотрим *кольцевые*, или *тороидальные* функции, появляющиеся тогда, когда уравнение Лапласа записывается в переменных, одно из которых служит параметром семейства торов, другое — параметром семейства сферических сегментов, ортогональных к этим торам, а третье — параметром семейства полуплоскостей, ортогональных к тем и другим.

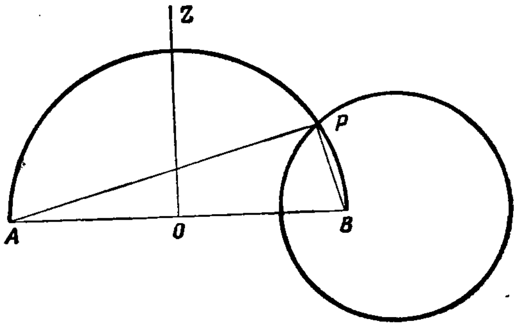
Если A, B — точки на прямой (черт. 34), проходящей через начало координат перпендикулярно к оси z и образующей угол φ с осью x, то за координаты точки P, лежащей в плоскости $\varphi = \text{const}$, мы примем $\eta = \ln \frac{AP}{BP}$, угол $\theta = \angle APB$ и сам угол φ. Расстояние $2c = AB$ предполагается фиксированным. Поверхности $\eta = \text{const}$ представляют собой торы, образованные вращением вокруг оси z некоторого семейства окружностей; точки A и B являются предельными для центров сечений этих торов соответствующей плоскостью $\varphi = \text{const}$. Поверхности $\theta = \text{const}$ суть сферические сегменты с общим основанием; последним служит окружность в плоскости xy, образованная вращением вокруг оси z точки A (или B).

Ограничив значения η, θ и φ промежутками $0 \leqslant \eta < \infty$, $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$ и $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, мы однозначно отнесем каждой точке координаты (η, θ, φ), за исключением точек в плоскости xy, отстоящих от оси z на расстоянии $\leqslant c$, где $\theta = \pm \pi$. Над плоскостью xy мы считаем θ положительным, под плоскостью xy — отрицательным.

Пусть ρ — расстояние от точки P до оси z; тогда $2cz = AP \cdot BP \sin\theta$, $AP^2 + BP^2 = 4c^2 + 2AP \cdot BP \cdot \cos\theta$, откуда

$$AP \cdot BP = \frac{2c^2}{\operatorname{ch}\eta - \cos\theta},$$

$$z = \frac{c \sin\theta}{\operatorname{ch}\eta - \cos\theta}.$$



Черт. 34.

Кроме того, $AP^2 - BP^2 = 4c\rho$, откуда

$$\rho = \frac{c \operatorname{sh}\eta}{\operatorname{ch}\eta - \cos\theta}.$$

Для элемента длины дуги ds имеем выражение

$$ds^2 = d\rho^2 + dz^2 + \rho^2 d\varphi^2;$$

в координатах η, θ, φ

$$ds^2 = \frac{c^2}{(\operatorname{ch}\eta - \cos\theta)^2}\{d\eta^2 + d\theta^2 + \operatorname{sh}^2\eta \, d\varphi^2\}.$$

Согласно общей формуле для лапласиана [см. формулу (2) п. 2], уравнение Лапласа запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\operatorname{sh}\eta}{\operatorname{ch}\eta - \cos\theta}\frac{\partial V}{\partial\eta}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\operatorname{sh}\eta}{\operatorname{ch}\eta - \cos\theta}\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{(\operatorname{ch}\eta - \cos\theta)\operatorname{sh}\eta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Преобразуем это уравнение. Пусть $V = U(\cos\eta - \cos\theta)^{\frac{1}{2}}$; упрощая, получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2\eta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + \operatorname{ctg}\eta\frac{\partial U}{\partial\eta} + \frac{1}{4}U = 0.$$

Положив, как обычно, $U = \mathrm{H}\Theta\Phi$, где H, Θ и Φ зависят каждая лишь от одной переменной, соответственно η, θ и φ, разделив на U, придем к

$$\frac{1}{\mathrm{H}}\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial\eta^2} + \frac{1}{\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2\eta}\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \frac{\operatorname{cth}\eta}{\mathrm{H}}\frac{d\mathrm{H}}{d\eta} + \frac{1}{4} = 0.$$

Отсюда для Φ и Θ получаем уравнения

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m^2\Phi = 0$$

и

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + n^2\Theta = 0,$$

где m и n постоянные. Функция H определяется из уравнения

$$\frac{d^2\mathrm{H}}{d\eta^2} + \operatorname{cth}\eta\frac{d\mathrm{H}}{d\eta} - \left(n^2 - \frac{1}{4} + \frac{m^2}{\operatorname{sh}^2\eta}\right)\mathrm{H} = 0,$$

к числу решений которого принадлежат $P^m_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta)$ и $Q^m_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta)$. Итак, искомые решения уравнения Лапласа суть

$$(\operatorname{ch}\eta - \cos\theta)^{\frac{1}{2}} P^m_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n\theta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi$$

и

$$(\operatorname{ch}\eta-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}Q^{m}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta)\ {\cos\atop\sin}\ n\theta\ {\cos\atop\sin}\ m\varphi.$$

В обычных задачах теории потенциала эти функции должны быть периодическими по θ и φ, следовательно, m и n должны быть целыми положительными числами. Таким образом, мы встречаемся с функциями Лежандра и с присоединенными функциями целого порядка и полуцелой степени от действительного аргумента $\geqslant 1$. Гармонические функции указанного вида носят название тороидальных или кольцевых функций; их ввел К. Нейманн [1]) в связи с задачей распределения тепла в твердом теле, имеющем форму тора. Вкратце их рассмотрел также Риман [2]). Подробному изучению их подвергли Хикс [3]), Бассет [4]) и Нивен [5]); изложены они и у Гейне [6]).

Как внутренняя, так и внешняя по отношению к поверхности тора области не односвязны. Поэтому тороидальные функции не всегда могут быть прямо употреблены в тех задачах, в которых фигурирует циркуляция, так как в таких задачах потенциал не всегда определяется однозначно своими значениями на поверхности тора. Хикс рассмотрел некоторые случаи, когда такого рода потенциалы могут быть определены.

254. Нам придется рассмотреть поведение функций

$$(\operatorname{ch}\eta-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}P^{m}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta)\ {\cos\atop\sin}\ n\theta\ {\cos\atop\sin}\ m\varphi$$

и

$$(\operatorname{ch}\eta-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}Q^{m}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta)\ {\cos\atop\sin}\ n\theta\ {\cos\atop\sin}\ m\varphi$$

в области $0\leqslant\eta<\eta_0$, т. е. вне тора, поверхность которого изображается уравнением $\eta=\eta_0$, и в области $\eta_0<\eta\leqslant\infty$ внутри этого тора. Область, внешняя по отношению к тору, содержит плоскость $\eta=0$; на ней $e^{-2\eta}=1$ и, согласно формуле (110) гл. V, функция

$$(\operatorname{ch}\eta-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}P^{m}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta),$$

с точностью до постоянного множителя, сводится к

$$(1-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}\int\limits_0^{\pi}\cos m\varphi\,d\varphi$$

и, следовательно, при $m\neq 0$ обращается в нуль, а при $m=0$ — в $\pi(1-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$. Итак, $(\operatorname{ch}\eta-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}P^{m}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta)$ конечна всюду в области $0\leqslant\eta<\eta_0$. Что касается функции

$$(\operatorname{ch}\eta-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}Q^{m}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta),$$

[1]) Theorie der Elektrizitäts- und Wärmevertheilung in einem Ringe, Halle, 1864.
[2]) Сочинения, М.—Л., 1948, стр. 367—372.
[3]) Phil. Trans., 172 (1881).
[4]) Amer. Journ. Math., 15 (1893), 287.
[5]) Proc. Lond. Math. Soc. (2), 24 (1892), 372.
[6]) Kugelfunktionen, т. II, стр. 283—290.

то, согласно формуле (67) гл. V, она пропорциональна

$$e^{-\eta\left(n+\frac{1}{2}\right)}(1-e^{-2\eta})^m F\left(\frac{1}{2}+m,\ n+m+\frac{1}{2};\ n+1;\ e^{-2\eta}\right)(\operatorname{ch}\eta-\cos\theta\Big)^{\frac{1}{2}};$$

последняя при $\eta \to 0$, с точностью до постоянного множителя, асимптотически выражается в виде

$$(1-e^{-2\eta})^{-m}(1-\cos\theta)^{\frac{1}{2}},$$

следовательно, она бесконечна при $\eta=0$. При $m=0$ асимптотическим выражением служит $\ln\frac{1}{1-e^{-2\eta}}$; оно также бесконечно в плоскости $\eta=0$. Итак, в области, внешней по отношению к тору $\eta=\eta_0$, мы будем пользоваться лишь функциями

$$(\operatorname{ch}\eta-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}P^m_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta)\ {\cos \atop \sin}\ n\theta\ {\cos \atop \sin}\ m\varphi.$$

Область, внутренняя по отношению к тору $\eta=\eta_0$, содержит круг, в котором $\eta=+\infty$. Функция $P^m_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta)$, согласно формуле (73) гл. V, пропорциональна функции

$$e^{-\eta\left(n-\frac{1}{2}\right)}(1-e^{-2\eta})^m F\left(\frac{1}{2}+m,\ n+m+\frac{1}{2};\ 2m+1;\ 1-e^{-2\eta}\right);$$

при $\eta\to\infty$ эта последняя асимптотически выражается в виде $Ce^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)\eta}(e^{-2\eta})^{-n}$ или $Ce^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta}$, где C постоянно. Такое выражение при $\eta\to\infty$ становится бесконечным. Что касается функции $Q^m_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta)$, то она пропорциональна

$$e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta}(1-e^{-2\eta})^m F\left(\frac{1}{2}+m,\ n+m+\frac{1}{2};\ n+1;\ e^{-2\eta}\right);$$

при $\eta\to\infty$ последнее выражение асимптотически равно $e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta}$, следовательно, оно стремится к нулю.

Итак, в области, внутренней по отношению к тору $\eta=\eta_0$, применимы[1]) функции

$$(\operatorname{ch}\eta-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}Q^m_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta)\ {\cos \atop \sin}\ n\theta\ {\cos \atop \sin}\ m\varphi.$$

255. Из формул (95) и (96) гл. V вытекают следующие соотношения:

$$P^m_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta)=\frac{\Pi\left(n+m-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(n-m-\frac{1}{2}\right)}\frac{\operatorname{sh}^m\eta}{2^m\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\times$$

$$\times\int_0^\pi(\operatorname{ch}\eta+\operatorname{sh}\eta\cos\psi)^{n-m-\frac{1}{2}}\sin^{2m}\psi\,d\psi=$$

$$=\frac{\Pi\left(n+m-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(n-m-\frac{1}{2}\right)}\frac{\operatorname{sh}^m\eta}{2^m\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\int_0^\pi\frac{\sin^{2m}\psi}{(\operatorname{ch}\eta+\operatorname{sh}\eta\cos\psi)^{n+m+\frac{1}{2}}}\,d\psi;$$

[1]) У Гейне (см. Kugelfunktionen, т. II, стр. 290) ошибочно указано, что нормальные функции, содержащие $P^m_{n-\frac{1}{2}}$, применимы во внутренней области, а содержащие $Q^m_{n-\frac{1}{2}}$ — во внешней.

при $m=0$

$$P_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\operatorname{ch}\eta+\operatorname{sh}\eta\cos\psi)^{n-\frac{1}{2}}d\psi=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{d\psi}{(\operatorname{ch}\eta+\operatorname{sh}\eta\cos\psi)^{n+\frac{1}{2}}}\,d\psi$$

Согласно формулам (108) и (109), имеем

$$P^m_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta)=\frac{1}{2\pi}\frac{\Pi\left(n+m-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}\int_0^{2\pi}(\operatorname{ch}\eta+\operatorname{sh}\eta\cos\varphi)^{n-\frac{1}{2}}\cos m\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(n-m-\frac{1}{2}\right)}(-1)^m\int_0^{2\pi}\frac{\cos m\varphi}{(\operatorname{ch}\eta+\operatorname{sh}\eta\cos\varphi)^{n+\frac{1}{2}}}\,d\varphi,$$

а по формуле (141) гл. V —

$$P_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta)=\frac{2}{\pi}\int_0^\eta\frac{\operatorname{ch}n\varphi}{(2\operatorname{ch}\eta-2\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}}\,d\varphi.$$

Согласно формуле (117) гл. V, при $n-m+\frac{1}{2}>0$ имеем

$$Q^m_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta)=(-1)^m\frac{\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(n-m-\frac{1}{2}\right)}\int_0^\infty\frac{\operatorname{ch}mu\,du}{(\operatorname{ch}\eta+\operatorname{sh}\eta\operatorname{ch}u)^{n+\frac{1}{2}}},$$

в частности,

$$Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta)=\int_0^\infty\frac{du}{(\operatorname{ch}\eta+\operatorname{sh}\eta\operatorname{ch}u)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Согласно формуле (118) гл. V,

$$Q^m_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta)=(-1)^m\frac{\Pi\left(n+m-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\ln\operatorname{cth}\frac{1}{2}\eta}(\operatorname{ch}\eta-\operatorname{sh}\eta\operatorname{ch}u)^{n-\frac{1}{2}}\operatorname{ch}mu\,du,$$

откуда

$$Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta)=\int_0^{\ln\operatorname{cth}\frac{1}{2}\eta}(\operatorname{ch}\eta-\operatorname{sh}\eta\operatorname{ch}u)^{n-\frac{1}{2}}du.$$

256. Согласно формуле (67) гл. V, имеем

$$Q^m_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta)=(-1)^m2^m\frac{\Pi\left(n+m-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi(n)}\operatorname{sh}^m\eta\cdot e^{-\left(n+m+\frac{1}{2}\right)\eta}\times$$

$$\times F\left(\frac{1}{2}+m,\ n+m+\frac{1}{2};\ n+1;\ e^{-2\eta}\right),$$

в частности,

$$Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta)=\frac{\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi(n)}e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta}F\left(\frac{1}{2},\ n+\frac{1}{2};\ n+1;\ e^{-2\eta}\right).$$

Отсюда можно получить приближенные выражения этих функций для больших η.

Так, например, для $Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta)$ получаем приближенное выражение

$$\frac{\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi(n)}e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta}$$

Согласно формуле (74) гл. V, имеем

$$P^{-m}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta)=\frac{1}{2^m\,\Pi(m)}(1-e^{-2\eta})^m e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta}\times$$
$$\times F\left(\frac{1}{2}+m,\ n+m+\frac{1}{2};\ 2m+1;\ 1-e^{-2\eta}\right)$$

и, в частности,

$$P_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta)=e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta}F\left(\frac{1}{2},\ n+\frac{1}{2};\ 1;\ 1-e^{-2\eta}\right).$$

Отсюда можно получить приближенные выражения этих функций при малом η.

257. Получить приближенное выражение для $P^m_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta)$ при больших значениях η значительно труднее, чем для $Q^m_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta)$. Такого рода выражение—разложение по степеням $(\operatorname{ch}\eta)^{-1}$—было получено в гл. V [см. формулу (37)].

Легко видеть, что формулы (68) гл. V теряют смысл в том случае, когда $n-\frac{1}{2}$ целое число, которое мы обозначим p_0. Сейчас мы займемся необходимым для этого случая преобразованием упомянутых формул.

Рассмотрим формулу

$$P^m_n(\operatorname{ch}\sigma)=2^m\frac{\sin(n+m)\pi}{\cos n\pi}\frac{\Pi(n+m)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}\operatorname{sh}^m\sigma\cdot e^{-(n+m+1)\sigma}\times$$
$$\times F\left(m+\frac{1}{2},\ n+m+1;\ n+\frac{3}{2};\ e^{-2\sigma}\right)+$$
$$+2^m\frac{\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\Pi(n-m)\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}\operatorname{sh}^m\sigma\cdot e^{(n-m)\sigma}\times F\left(m+\frac{1}{2},\ m-n;\ \frac{1}{2}-n;\ e^{-2\sigma}\right)$$

при $n+\frac{1}{2}$, равном целому числу p_0. Прежде всего мы имеем конечную сумму

$$S_1=2^m\frac{\Pi(p_0-1)}{\Pi\left(p_0-\frac{1}{2}-m\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}\operatorname{sh}^m\sigma\cdot e^{\left(p_0-\frac{1}{2}-m\right)\sigma}\times$$
$$\times\left[1+\frac{\left(\frac{1}{2}+m\right)\left(p_0-\frac{1}{2}-m\right)}{1\,(p_0-1)}e^{-2\sigma}+\right.$$
$$+\frac{\left(\frac{1}{2}+m\right)\left(\frac{3}{2}+m\right)\left(p_0-m-\frac{1}{2}\right)\left(p_0-m-\frac{3}{2}\right)e^{-2\sigma}}{1\cdot 2\,(p_0-1)(p_0-2)\,e^{-2p_0\sigma}}+$$
$$\left.+\frac{\left(\frac{1}{2}+m\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+m+p_0-2\right)\left(p_0-\frac{1}{2}-m\right)\cdots\left(\frac{3}{2}-m\right)}{(p_0-1)!\,(p_0-2)!}e^{-2(p_0-1)\sigma}\right]$$

и при $p \neq p_0$ — выражение

$$2^m \frac{\sin\left(p-\frac{1}{2}+m\right)\pi}{\cos\left(p-\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\Pi\left(p+m-\frac{1}{2}\right)}{\Pi(p)\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)} \operatorname{sh}^m \sigma \cdot e^{-\left(m+p_0+\frac{1}{2}\right)\sigma} \times$$

$$\times F\left(m+\frac{1}{2},\ p+m+\frac{1}{2};\ p+1;\ e^{-2\sigma}\right)+$$

$$+2^m \frac{\Pi(p-1)}{\Pi\left(p-m-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)} \operatorname{sh}^m \sigma \cdot e^{\left(p-m-\frac{1}{2}\right)\sigma-2p_0\sigma} \times$$

$$\times \frac{\left(\frac{1}{2}+m\right)\ldots\left(\frac{1}{2}+m+p_0-1\right)\left(p-m-\frac{1}{2}\right)\ldots\left(p-m-\frac{1}{2}-p_0+1\right)}{p_0!\,(p-1)(p-2)\ldots(p-p_0)} \times$$

$$\times\left[1+\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\Pi\left(m+p_0+s-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(m+p_0-\frac{1}{2}\right)} \frac{\Pi\left(p-m-p_0-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(p-m-p_0-s-\frac{1}{2}\right)} \times\right.$$

$$\left.\times \frac{\Pi(p_0)\,\Pi(p-p_0-s-1)}{\Pi(p_0+s)\,\Pi(p-p_0-1)}\, e^{-2s\sigma}\right],$$

которое становится неопределенным при $p \to p_0$.

Коэффициент

$$2^m \frac{\Pi(p-1)}{\Pi\left(p-m-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)} \frac{\Pi\left(p_0+m-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)} \times$$

$$\times \frac{\Pi\left(p-m-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(p-p_0-m-\frac{1}{2}\right)} \frac{\Pi(p-p_0-1)}{\Pi(p_0)\,\Pi(p-1)}$$

равен

$$\frac{2^m}{\Pi(p_0)} \frac{\Pi\left(p_0+m-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)} \frac{\Pi\left(p_0-p+m-\frac{1}{2}\right)}{\Pi(p_0-p)} \frac{\sin\left(p_0-p+m-\frac{1}{2}\right)\pi}{\sin(p_0-p)\pi},$$

а

$$\frac{\sin\left(p-\frac{1}{2}+m\right)\pi}{\cos\left(p-\frac{1}{2}\pi\right)} : \frac{\sin\left(p_0-p+m-\frac{1}{2}\right)\pi}{\sin(p_0-p)}$$

при $p \to p_0$ имеет предел -1; далее, при $p=p_0$ показательные множители совпадают, а с ними вместе и оба ряда в рассматриваемом выражении.

Раскрывая неопределенность по обычному правилу, мы придем к сумме S_2+S_3, в которой

$$S_2 = 2^m \frac{\Pi\left(p_0+m-\frac{1}{2}\right)}{\Pi(p_0)\,\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)} \operatorname{sh}^m \sigma \lim_{p\to p_0} \frac{d}{dp}\left[\frac{p-p_0}{\sin(p_0-p)\pi} \frac{\Pi\left(p_0-p+m-\frac{1}{2}\right)}{\Pi(p_0-p)} \times\right.$$

$$\times \sin\left(p_0-p+m-\frac{1}{2}\right)\pi \cdot e^{-\left(m+\frac{1}{2}\right)\sigma+(p-2p_0)\sigma} \times$$

$$\times\left\{1+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\Pi\left(m+p_0+s-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(p-m-p_0-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(m+p_0-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(p-m-p_0-s-\frac{1}{2}\right)}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\Pi(p_0)\,\Pi(p-p_0-s-1)}{\Pi(p_0+s)\,\Pi(p-p_0-1)}e^{-2s\sigma}\right\}\Bigg],$$

$$S_3=\frac{2^m}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}\operatorname{sh}^m\sigma\lim_{p\to p_0}\frac{d}{dp}\left[\frac{p-p_0}{\cos\left(p-\frac{1}{2}\right)\pi}\,\frac{\Pi\left(p+m-\frac{1}{2}\right)}{\Pi(p)}\sin\left(p-\frac{1}{2}+m\right)\pi\times\right.$$

$$\left.\times e^{-\left(m+p+\frac{1}{2}\right)\sigma}F\left(m+\frac{1}{2},\ p+m+\frac{1}{2};\ p+1;\ e^{-2\sigma}\right)\right].$$

Предположим для упрощения, что m целое положительное или нуль; при этом $\cos\left(p_0-p-m-\frac{1}{2}\right)\pi$ и $\cos\left(p-\frac{1}{2}+m\right)\pi$ при $p\to p_0$ будут стремиться к нулю.

Так как

$$\frac{d}{dp}\frac{p-p_0}{\sin(p_0-p)\pi}\quad\text{и}\quad\frac{d}{dp}\frac{p-p_0}{\cos\left(p-\frac{1}{2}\right)\pi}$$

при $p\to p_0$ стремятся к нулю, то искомое выражение представится в виде суммы таких членов:

1) конечная сумма S_1;

2) $$(-1)^m 2^{m+1}\frac{\Pi\left(p_0+m-\frac{1}{2}\right)}{\pi\Pi(p_0)\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}\sigma\operatorname{sh}^m\sigma\times$$

$$\times e^{-\left(m+p_0+\frac{1}{2}\right)\sigma}F\left(m+\frac{1}{2},\ m+p_0+\frac{1}{2};\ p_0+1;\ e^{-2\sigma}\right);$$

3) $$2^m\frac{\Pi\left(p_0+m-\frac{1}{2}\right)}{\pi\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi(p_0)}\operatorname{sh}^m\sigma(-1)^m e^{-\left(m+p_0+\frac{1}{2}\right)\sigma}\times$$

$$\times\left\{\frac{\Pi'(0)}{\Pi(0)}-\frac{\Pi'\left(m-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}-\frac{\Pi'\left(m+p_0-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(m+p_0-\frac{1}{2}\right)}+\frac{\Pi'(p_0)}{\Pi(p_0)}\right\}\times$$

$$\times F\left(m+\frac{1}{2},\ m+p_0+\frac{1}{2};\ p_0+1;\ e^{-2\sigma}\right);$$

4) $$\frac{(-1)^m 2^m}{\pi\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}\operatorname{sh}^m\sigma\cdot e^{-\left(m+p_0+\frac{1}{2}\right)\sigma}\sum_{s=1}^{\infty}\left[\frac{\Pi\left(m+s-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(m+p_0+s-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)\Pi(p_0+s)\,\Pi(s)}\times\right.$$

$$\times\left\{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{s}-\frac{1}{m+\frac{1}{2}}-\frac{1}{m+\frac{3}{2}}-\ldots-\frac{1}{m+s-\frac{1}{2}}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{p_0+1}+\ldots+\frac{1}{p_0+s}-\frac{1}{p_0+m+\frac{1}{2}}-\ldots-\frac{1}{p_0+m+s-\frac{1}{2}}\right\}e^{-2s\sigma}\right].$$

Не составило бы труда найти соответствующие выражения при не целом m.

Чтобы упростить 3), заметим, что

$$\frac{\Pi'(p_0)}{\Pi(p_0)}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{p}+\frac{\Pi'(0)}{\Pi(0)},$$

$$\frac{\Pi'\left(m-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{m-\frac{1}{2}}+\frac{1}{m-\frac{3}{2}}+\ldots+\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{\Pi'\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)},$$

$$\frac{\Pi'\left(m+p_0-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(m+p_0-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{m+p_0-\frac{1}{2}}+\ldots+\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{\Pi'\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)},$$

откуда

$$\frac{\Pi'(0)}{\Pi(0)}-\frac{\Pi'\left(m-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}-\frac{\Pi'\left(m+p_0-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(m+p_0-\frac{1}{2}\right)}+\frac{\Pi'(p_0)}{\Pi(p_0)}=$$

$$=2\left\{-\frac{\Pi'\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}+\frac{\Pi'(0)}{\Pi(0)}\right\}+\left[\frac{1}{1}+\ldots+\frac{1}{p_0}-\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}+\ldots-\frac{1}{m-\frac{1}{2}}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}+\ldots+\frac{1}{p_0+m-\frac{1}{2}}\right)\right].$$

Логарифмируя известное равенство

$$\Pi(x-1)\,\Pi\left(x-\frac{1}{2}\right)=(2\pi)^{\frac{1}{2}}\,2^{\frac{1}{2}-2x}\,\Pi(2x-1),$$

дифференцируя затем обе части и полагая $x=\frac{1}{2}$, получим

$$\frac{\Pi'(0)}{\Pi(0)}-\frac{\Pi'\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}=\ln 4.$$

Объединяя 2), 3) и 4), получим

$$(-1)^m 2^{m+1}\frac{\Pi\left(p_0+m-\frac{1}{2}\right)}{\pi\Pi(p_0)\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}\ln(4e^{\sigma})\,\mathrm{sh}^m\sigma\cdot e^{-\left(p_0+m-\frac{1}{2}\right)\sigma}\times$$

$$\times F\left(m+\frac{1}{2},\ m+p_0+\frac{1}{2};\ p_0+1;\ e^{-2\sigma}\right)+$$

$$+(-1)^m 2^m\frac{\mathrm{sh}^m\sigma\cdot e^{-\left(p_0+m+\frac{1}{2}\right)\sigma}}{\pi\,\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\Pi\left(m+s-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(m+p_0+s-\frac{1}{2}\right)}{\Pi(p_0+s)\,\Pi(s)}\times$$

$$\times\left\{u_{p_0+s}+u_s-v_{m+s-\frac{1}{2}}-v_{p_0+m+s-\frac{1}{2}}\right\},$$

где

$$u_r=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{r},$$

$$v_{r+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\frac{3}{2}}+\ldots+\frac{1}{r+\frac{1}{2}}.$$

Написав n вместо p_0, так что n оказывается целым числом, получим для $P^m_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\sigma)$ выражение

$$2^m \frac{\Pi(n-1)}{\Pi\left(n-\frac{1}{2}-m\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)} \operatorname{sh}^m \sigma \cdot e^{\left(n-m-\frac{1}{2}\right)\sigma} \left\{ 1 + \frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(n-m-\frac{1}{2}\right)}{1\,(n-1)} e^{-2\sigma} + \ldots + \right.$$

$$+ \frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)\ldots\left(m+n-\frac{3}{2}\right)\left(n-m-\frac{1}{2}\right)\ldots\left(\frac{3}{2}-m\right)}{(n-1)!\,(n-1)!} e^{-2(n-1)\sigma} +$$

$$+ (-1)^m 2^{m+1} \frac{\Pi\left(n+m-\frac{1}{2}\right)}{\Pi(n)\,\pi^{\frac{3}{2}}} \ln(4e^\sigma) \operatorname{sh}^m\sigma \cdot e^{-\left(n+m-\frac{1}{2}\right)\sigma} \times$$

$$\times F\left(m+\frac{1}{2},\ m+n+\frac{1}{2};\ n+1;\ e^{-2\sigma}\right) + (-1)^m 2^m \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)} \times$$

$$\left. \times \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\Pi\left(m+s-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(m+n+s-\frac{1}{2}\right)}{\Pi(n+s)\,\Pi(s)} u_{n+s} + u_s - v_{m+s-\frac{1}{2}} - v_{m+n+s-\frac{1}{2}} \right\},$$

в котором u_r и $v_{r+\frac{1}{2}}$ определены выше.

При $m=0$ получим выражение для $P_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\sigma)$

$$\frac{\Pi(n-1)}{\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi^{\frac{1}{2}}} e^{\left(n-\frac{1}{2}\right)\sigma} \left\{ 1 + \frac{\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)}{1\cdot n} e^{-2\sigma} + \ldots + \right.$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)\ldots\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)\ldots\frac{3}{2}}{(n-1)!\,(n-1)!} e^{-2(n-1)\sigma} +$$

$$+ \frac{2\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\pi^{\frac{3}{2}}\Pi(n)} \ln(4e^\sigma)\, e^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)\sigma} F\left(\frac{1}{2};\ n+\frac{1}{2};\ n+1;\ e^{-2\sigma}\right) +$$

$$\left. + \frac{1}{\pi^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\Pi\left(s-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(n+s-\frac{1}{2}\right)}{\Pi(n+s)\,\Pi(s)} \left(u_{n+s} + u_s - v_{s-\frac{1}{2}} - v_{n+s-\frac{1}{2}}\right) \right\}.$$

Этот частный случай другим методом получили Бассет и Нивен (см. цитированные на стр. 416 статьи).

258. Чтобы выразить с помощью тороидальных функций обратную величину расстояния D между двумя точками $(\eta,\ \theta,\ \varphi)$ и $(\eta',\ \theta',\ \varphi')$, заметим, что

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{c\sqrt{2}} \frac{(\operatorname{ch}\eta - \cos\theta)^{\frac{1}{2}} (\operatorname{ch}\eta' - \cos\theta')^{\frac{1}{2}}}{[\mu - \cos(\theta-\theta')]^{\frac{1}{2}}},$$

где $\mu = \operatorname{ch}\eta \operatorname{ch}\eta' - \operatorname{sh}\eta \operatorname{sh}\eta' \cos(\varphi-\varphi') > 0$.

Разложим $(1-2h\cos\alpha+h^2)^{-\frac{1}{2}}$ при условии $0<|h|<1$ по косинусам дуг, кратных α. Имеем разложение

$$(1-he^{i\alpha})^{-\frac{1}{2}}(1-he^{-i\alpha})^{-\frac{1}{2}}=\left[1+\frac{1}{2}he^{i\alpha}+\ldots+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}h^n e^{ni\alpha}+\ldots\right]\times$$
$$\times\left[1+\frac{1}{2}he^{-i\alpha}+\ldots+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}h^n e^{-ni\alpha}+\ldots\right].$$

Ряды справа сходятся абсолютно, поэтому их можно перемножать почленно и в произведении произвольным образом группировать члены. Представим же это произведение в виде

$$1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2r-1}{2}\right)^2}{(r!)^2}h^{2r}+\sum_{n=1}^{\infty}(e^{ni\alpha}+e^{-ni\alpha})\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}h^n\times$$
$$\times\left\{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}h^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\frac{(2n+1)(2n+3)}{(2n+2)(2n+4)}h^4+\ldots\right\}=$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}2\cos n\alpha\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n n!}h^n F\left(\frac{1}{2},\ n+\frac{1}{2};\ n+1;\ h^2\right).$$

Так же, как в п. 185, легко показать, что этот ряд сходится равномерно относительно α. С помощью формулы (69) п. 149 мы получим

$$Q_{n-\frac{1}{2}}(\mu)=\frac{\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi(n)}z^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}F\left(\frac{1}{2},\ n+\frac{1}{2};\ n+1;\ \frac{1}{z^2}\right),$$

где $z=\mu+\sqrt{\mu^2-1}$. Положив $h=\frac{1}{z}$, будем иметь

$$\pi(2\mu-2\cos\alpha)^{-\frac{1}{2}}=Q_{-\frac{1}{2}}(\mu)+2\sum_{n=1}^{\infty}Q_{n-\frac{1}{2}}(\mu)\cos n\alpha.$$

Отсюда

$$(\mu-\cos\alpha)^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\pi}Q_{-\frac{1}{2}}(\mu)+\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}Q_{n-\frac{1}{2}}(\mu)\cos n\alpha.$$

Мы видим, что, так же как $P_n(\cos\alpha)$ служит коэффициентом при h^n в разложении $(1-2h\cos\alpha+h^2)^{-\frac{1}{2}}$ по степеням h, $Q_{n-\frac{1}{2}}(\mu)\,z^{\frac{1}{2}}$ оказывается, с точностью до постоянного множителя, коэффициентом при $\cos n\alpha$ в разложении той же функции по косинусам дуг, кратных α.

Подставив полученное разложение функции

$$\{\mu-\cos(\theta-\theta')\}^{-\frac{1}{2}}$$

в выражение $\frac{1}{D}$, получим

$$\frac{1}{D}=\frac{1}{c\pi}(\operatorname{ch}\eta-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta'-\cos\theta')^{\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\left\{Q_{-\frac{1}{2}}(\mu)+2\sum_{n=1}^{\infty}Q_{n-\frac{1}{2}}(\mu)\cos n(\theta-\theta')\right\}.$$

Применив теорему сложения, приведенную в п. 223,

$$Q_{-\frac{1}{2}}(\mu)=Q_{-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta)P_{-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta')+$$

$$+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}-m\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{2}+m\right)}Q^m_{-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta)P^m_{-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta')\cos m(\varphi-\varphi'),$$

$$Q_{n-\frac{1}{2}}(\mu)=Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta)P_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta')+$$

$$+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\Pi\left(n-m-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(n-\frac{1}{2}+m\right)}Q^m_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta)P^m_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta')\cos m(\varphi-\varphi'),$$

получим, в предположении $\eta>\eta'$, разложение $\frac{1}{D}$ в двойной ряд, общий член которого пропорционален произведениям

$$(\operatorname{ch}\eta-\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}Q^m_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta)\cos m(\varphi-\varphi')$$

и

$$(\operatorname{ch}\eta'-\cos\theta')^{\frac{1}{2}}P^m_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta')\cos m(\varphi-\varphi').$$

§ 5. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В ОБЛАСТЯХ, ОГРАНИЧЕННЫХ КОНИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

259. Рассмотрим теперь случай ограниченной области, лежащей внутри одной полости конической поверхности $\theta=\alpha$, граница которой образована самой этой поверхностью и сферическими поверхностями $r=a$ и $r=b$. Поставим задачу найти функцию V, гармоническую в такой области, принимающую наперед заданные значения на сферических участках границы и равную нулю на конической части границы. Согласно п. 230, существует последовательность положительных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_s, \ldots$, вообще говоря, не целых, для которых $P_{n_s}(\cos\alpha)=0$. Поэтому, если краевые значения V на поверхностях $r=a$ и $r=b$ можно представить в виде рядов

$$\sum A_s P_{n_s}(\cos\theta),\qquad \sum B_s P_{n_s}(\cos\theta),$$

то, определив постоянные a_s и b_s из условий

$$A_s=a_s a^{n_s}+b_s b^{-n_s-1},\qquad B_s=a_s b^{n_s}+b_s b^{-n_s-1},$$

мы получим для V выражение

$$V=\sum_{s=1}^{\infty}(a_s r^{n_s}+b_s r^{-n_s-1})P_{n_s}(\cos\theta).$$

При этом мы предполагаем, что ряды, представляющие значения краевой функции, сходятся равномерно. В этом предположении коэффициенты можно получить, воспользовавшись соотношением

$$\int_0^{\alpha}P_{n_s}(\cos\theta)P_{n_t}(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta=0\qquad(n_s\neq n_t),$$

которое вытекает из общей формулы (40), содержащейся в п. 23. Этот же метод применим и тогда, когда краевое условие на коническом участке границы имеет вид $\left(\frac{\partial}{\partial\nu}P(\cos\theta)\right)_{\theta=\alpha}=0$.

Эта задача служит примером применения функций Лежандра дробной степени. В этом случае, когда граница области содержит еще участки плоскостей $\varphi=0$ и $\varphi=\varphi_1$, можно воспользоваться сферическими функциями $\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} k\varphi P_n^m(\cos\theta)$ с дробными m и n. На возможность использования этих функций для решения задач теории потенциала в некоторых специальных областях указали Томсон и Тэт [1]).

260. Рассмотрим теперь случай области, описанной в п. 259, но при краевой функции, равной нулю на сферических участках границы. Пусть S_n обозначает сферическую функцию произвольной степени n; эту степень мы определим из условия, что $\left(Ar^n+\frac{B}{r^{n+1}}\right)S_n=0$ при $r=a$ и $r=b$.

Из уравнений $Aa^n+Ba^{-n-1}=0$, $Ab^n+Bb^{-n-1}=0$ имеем $a^{2n+1}=b^{2n+1}$, откуда $n=-\frac{1}{2}+\frac{k\pi i}{\ln\frac{b}{a}}$, где k — любое целое число. В связи с этой задачей появляются, таким образом, сферические функции комплексной степени вида $-\frac{1}{2}+pi$.

Если в уравнении Лежандра и в присоединенном уравнении положить $n=-\frac{1}{2}+pi$, то получим $n(n+1)=-p^2-\frac{1}{4}$, и эти уравнения примут вид

$$\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{du}{d\mu}\right\}-\left(p^2+\frac{1}{4}\right)u=0,$$
$$\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{du}{d\mu}\right\}-\left[p^2+\frac{1}{4}+\frac{m^2}{1-\mu^2}\right]=0.$$

Решения этих уравнений ввел Мелер [2]) в связи с некоторыми задачами электростатики, назвав их коническими функциями (Kegelfunktionen). Основные свойства этих функций будут выведены здесь из общих результатов, полученных в гл. V.

261. Гармонические функции рассматриваемого вида представляются как произведения $r^{-\frac{1}{2}\pm pi}K_p(\cos\theta)$, где для простоты введено обозначение $K_p(\cos\theta)=P_{-\frac{1}{2}+pi}(\cos\theta)$.

Согласно формуле (11) гл. V,

$$K_p(\cos\theta)=F\left(\frac{1}{2}-pi,\ \frac{1}{2}+pi;\ 1;\ \sin^2\frac{1}{2}\theta\right)=$$
$$=1+\frac{4p^2+1^2}{2^2}\sin^2\frac{1}{2}\theta+\frac{(4p^2+1^2)(4p^2+3^2)}{2^2\cdot4^2}\sin^4\frac{1}{2}\theta+\ldots$$

Все коэффициенты этого ряда действительны, и $K_p(\cos\theta)$ при $\theta=0$ принимает значение 1. Кроме того, $K_p(\cos\theta)=K_{-p}(\cos\theta)$.

Взяв $\pi-\theta$ вместо θ, получим

$$K_p(-\cos\theta)=1+\frac{4p^2+1^2}{2^2}\cos^2\frac{1}{2}\theta+\frac{(4p^2+1^2)(4p^2+3^2)}{2^2\cdot4^2}\cos^4\frac{1}{2}\theta+\ldots,$$

откуда мы заключаем, что $K_p(\cos\theta)$ при $\theta=\pi$ бесконечно.

---

[1]) Natural Philosophy, т. I, стр. 180, 196—197.

[2]) Journ. f. reine u. angew. Math., 68 (1868), 134. См. также статью Мелера в Math. Ann., 18 (1881), 161. Следует еще упомянуть статью К. Неймана в том же томе Math. Ann. Кроме того, см. Hobson, Camb. Phil. Trans, 14 (1889), 211, где эти функции рассматриваются как частный случай сферических.

В гл. V было показано [см. формулы (130) и (144)], что

$$K_p(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}\int_0^\theta \frac{\operatorname{ch} pu}{(2\cos u-2\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}\,du$$

и

$$K_p(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}\operatorname{ch} p\pi\int_0^\infty \frac{\cos pu}{(2\cos\theta+2\operatorname{ch} u)^{\frac{1}{2}}}\,du,$$

а согласно формуле (49) гл. V, имеем для $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

$$K_p(\cos\theta)=F\left(\frac{n+1}{2},\ -\frac{n}{2};\ 1;\ \sin^2\theta\right)=$$

$$=1+\frac{p^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2^2}\sin^2\theta+\frac{\left(p^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\left(p^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)}{2^2\cdot 4^2}\sin^4\theta+\ldots.$$

В п. 181 мы вывели соотношение

$$\frac{1}{2}\left\{Q_{-\frac{1}{2}+pi}(\cos\theta)+Q_{-\frac{1}{2}-pi}(\cos\theta)\right\}=\int_0^\infty \frac{\cos pu}{(2\operatorname{ch} u-2\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}\,du,$$

где

$$Q_{-\frac{1}{2}+pi}(\cos\theta)=\int_0^\infty \frac{\cos pu}{(2\operatorname{ch} u-2\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}\,du-i\operatorname{sh} p\pi\int_0^\infty \frac{\cos pu}{(2\operatorname{ch} u+2\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}\,du.$$

Таким образом,

$$K_p(-\cos\theta)=\frac{1}{\pi}\operatorname{ch} p\pi\left\{Q_{-\frac{1}{2}+pi}(\cos\theta)+Q_{-\frac{1}{2}-pi}(\cos\theta)\right\}.$$

Мы видим, что функцией $K_p(-\cos\theta)$ можно пользоваться в случае области, внешней по отношению к конусу; на участках оси конуса, лежащих вне и внутри конуса, эта функция равна соответственно 1 и ∞.

262. Обратная величина расстояния D между точками $(r,\ \theta,\ \varphi)$ и $(r',\ \theta',\ \varphi')$ равна

$$\frac{1}{D}=e^{-\frac{1}{2}(\sigma+\sigma')}\frac{1}{\{2\operatorname{ch}(\sigma-\sigma')-\cos\gamma\}^{\frac{1}{2}}},$$

где $r=e^\sigma$, $r'=e^{\sigma'}$, $\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$.

С помощью интеграла Фурье запишем это выражение в виде

$$\frac{1}{D}=\frac{2^{\frac{1}{2}}}{\pi}e^{-\frac{1}{2}(\sigma+\sigma')}\int_0^\infty \cos v(\sigma-\sigma')\,dv\int_0^\infty \frac{\cos uv}{(\operatorname{ch} u-\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}}\,du=$$

$$=e^{-\frac{1}{2}(\sigma+\sigma')}\int_0^\infty \frac{\cos v(\sigma-\sigma')}{\operatorname{ch}\pi v}K_v(-\cos\gamma)\,dv.$$

Чтобы представить это выражение как функцию от θ, θ', $\varphi-\varphi'$, прибегнем к теореме сложения для функции K. Пользуясь формулой п. 227

и предполагая, что $\theta < \frac{\pi}{2}$ и $\theta' < \frac{\pi}{2}$, запишем

$$K_p(\cos\gamma) = K_p(\cos\theta) K_p(\cos\theta') + \\ + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}+pi-m\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{2}+pi+m\right)} K_p^m(\cos\theta) K_p^m(\cos\theta') \cos m(\varphi-\varphi'),$$

где

$$\frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}+pi-m\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{2}+pi+m\right)} = \frac{(-1)^m}{\left(p^2+\frac{1}{4}\right)\left(p^2+\frac{36}{4}\right)\cdots\left(p^2+\frac{((2m-1)!)^2}{4}\right)}.$$

Согласно п. 227, это равенство выполняется также при $0 < \theta' < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, $\theta+\theta' < \pi$, и

$$Q_{-\frac{1}{2}+pi}(\cos\gamma) = K_p(\cos\theta') Q_{-\frac{1}{2}+pi}(\cos\theta) + \\ + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}+pi-m\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{2}+pi+m\right)} K_p^m(\cos\theta') Q^m_{-\frac{1}{2}+ip}(\cos\theta) \cos m(\varphi-\varphi'),$$

причем ряд сходится равномерно относительно φ и φ'.

Взяв теперь $-p$ вместо p, сложив оба выражения и умножив на $\frac{1}{\pi}\operatorname{ch} p\pi$, получим

$$K_p(-\cos\gamma) = K_p(\cos\theta') K_p(\cos\theta) + \\ + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\left(p^2+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(p^2+\frac{((2m-1)!)^2}{4}\right)} K_p^m(\cos\theta') K_p(-\cos\theta) \cos m(\varphi-\varphi').$$

Это равенство справедливо при $0 < \theta' < \frac{\pi}{2} < \theta$ и $\theta+\theta' < \pi$.

Выразим теперь в развернутом виде обратную величину расстояния между точками $(r, \theta\ \varphi)$ и (r', θ', φ'):

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{(rr')^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{\cos v(\sigma-\sigma')}{\operatorname{ch}\pi v} K_v(\cos\theta') K_v(-\cos\theta)\, dv + \\ + \frac{2}{(rr')^{\frac{1}{2}}} \sum \cos m(\varphi-\varphi') \int_0^{\infty} \alpha_m \frac{\cos v(\varphi-\varphi')}{\operatorname{ch}\pi v} K_v^m(\cos\theta') K_v^m(-\cos\theta)\, dv,$$

где

$$\alpha_m = \frac{(-1)^m}{\left(v^2+\frac{1}{4}\right)\cdots\left\{v^2+\frac{((2m-1)!)^2}{4}\right\}}$$

и $\theta > \theta'$

263. Предположим, что на конусе $\theta=\theta_0$ функция V задана в виде $\frac{1}{r^{\frac{1}{2}}} f(\sigma, \varphi)$, где $f(\sigma, \varphi)$ разлагается в равномерно сходящийся **ряд Фурье**

$$f(\sigma, \varphi) = F_0(\sigma) + \sum \{F_m(\sigma)\cos m\varphi + G_m(\sigma)\sin m\varphi\},$$

а функции $F_0(\sigma)$, $F_m(\sigma)$ и $G_m(\sigma)$, любая из которых будет обозначаться $f(\sigma)$, представляются интегралом Фурье

$$f(\sigma)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} \cos v(\sigma-\sigma') f(\sigma')\,d\sigma'.$$

Так как функции $K_v^m(\cos\theta)\cos v(\sigma-\sigma')\,{\cos\atop\sin}\,m\varphi$ удовлетворяют уравнению Лапласа и конечны внутри конуса, то V_i может быть определена следующим равенством:

$$V_i=\frac{1}{2\pi r^{-\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_v(\cos\theta)}{K_v(\cos\theta_0)} F_0(\sigma')\cos v(\sigma-\sigma')\,d\sigma'+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_v^m(\cos\theta)}{K_v^m(\cos\theta_0)}\cos v(\sigma-\sigma')\,\{F_m(\sigma')\cos m\varphi+G_m(\sigma')\sin m\varphi\}\,d\sigma'.$$

Для решения внешней задачи нужно в этой формуле взять $-\cos\theta$, $-\cos\theta_0$ вместо $\cos\theta$, $\cos\theta_0$, так как $K_v^m(-\cos\theta)$ конечна при $\theta=\pi$. То, что эта функция гармоническая и на границе имеет заданные предельные значения, требует особой проверки.

Применение этого метода Мелером к задачам электростатики вызывает возражения на том основании, что нормальные решения вида $r^{-\frac{1}{2}}\,{\cos\atop\sin}\,(p\ln r)\,K_p(\cos\theta)$ обращаются в бесконечность в вершине конуса. Действительно, Гейне установил, что найденная Мелером функция сама не гармоническая, а представляет собой лишь предел гармонических функций. Некоторые замечания по этому поводу высказал Макдональд в статье[1]), где он находит распределение зарядов в коническом проводнике вблизи вершины при наличии точечного заряда, помещенного на оси конуса; метод Макдональда свободен от указанного дефекта.

§ 6. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В БИПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

264. Пусть точка P (черт. 35) имеет сферические координаты r, θ, φ. Фиксируем на оси $\theta=0$, π точку C на расстоянии $OC=k$ от O и ставим в соответствие точке P такую точку P', лежащую в той же полуплоскости $\varphi'=\varphi$, для которой $\frac{OP'}{CP'}=\frac{OP}{OC}$. Пусть $r=ke^{\sigma}$; тогда

$$CP^2=k^2+r^2-2kr\cos\theta=k^2e^{\sigma}(2\operatorname{ch}\sigma-2\cos\theta).$$

Кроме того,

$$\frac{OP'}{CP'}=\frac{OP}{OC}=\frac{r}{k}=e^{\sigma},$$

откуда

$$\sigma=\ln\frac{OP'}{CP'}.$$

Переменные σ, θ и φ часто называют биполярными координатами точки P'. Когда P лежит на какой-нибудь сфере с центром в O, геометрическим местом точек P' служит сфера $\sigma=\ln\frac{r}{k}$ с центром на оси $\theta=0$ или $\theta=\pi$. Конусу $\theta=\theta_0$ отвечает веретенообразная поверхность, образу-

[1]) Camb. Phil. Trans., 18 (1900), 292. Вывод Мелера содержится в упомянутых выше статьях, см. также Гейне, Kugelfunktionen, т. II, стр. 249.

емая вращением дуги, отвечающей углу $\pi-\theta$, вокруг своей хорды OC. Плоскости $\varphi=\mathrm{const}$ отвечает сама эта плоскость. Семейства этих сфер, «веретен» и плоскостей взаимно ортогональны.

Согласно теореме п. 75, функции $r^nY_n(\theta, \varphi)$ точки P соответствует гармоническая функция точки P', выражающаяся в виде

$$ke^{\frac{1}{2}\sigma}(2\operatorname{ch}\sigma-2\cos\theta)^{\frac{1}{2}}e^{n\sigma}Y_n(\theta, \varphi),$$

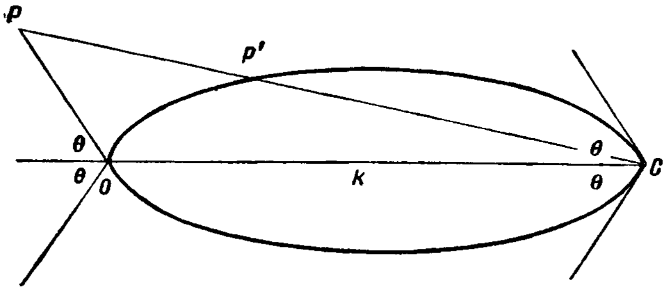
или, с точностью до постоянного множителя,

$$e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\sigma}(\operatorname{ch}\sigma-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}Y_n(\theta, \varphi).$$

Что функции

$$e^{\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\sigma}(\operatorname{ch}\sigma-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}Y_n(\theta, \varphi)$$

удовлетворяют уравнению Лапласа в координатах σ, θ, φ, можно проверить непосредственным вычислением.



Черт. 35.

В точках O и C координата σ обращается соответственно в $-\infty$ и $+\infty$. Сферы, на которых σ принимает отрицательные постоянные значения, охватывают точку O; сферы, на которых σ постоянна и положительна, охватывают точку C.

Обратная величина расстояния между точками $(\sigma, \theta, \varphi)$ и $(\sigma', \theta', \varphi')$, как легко видеть, выражается так:

$$\frac{1}{D}=\frac{(\operatorname{ch}\sigma-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\sigma'-\cos\theta')^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}(\sigma+\sigma')}}{k\{\operatorname{ch}(\sigma-\sigma')-\cos\gamma\}^{\frac{1}{2}}},$$

где

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi'),$$

а это выражение можно представить в виде рядов

$$\frac{1}{k}(\operatorname{ch}\sigma-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\sigma'-\cos\theta')^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)(\sigma-\sigma')}P_n(\cos\gamma),$$

$$\frac{1}{k}(\operatorname{ch}\sigma-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\sigma'-\cos\theta')^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)(\sigma'-\sigma)}P_n(\cos\gamma)$$

соответственно при $\sigma<\sigma'$ и $\sigma>\sigma'$. Каждый член этих рядов представляет собой гармоническую функцию как по σ, θ, φ, так и по σ', θ', φ'.

265. В системе биполярных координат можно найти гармоническую функцию V по заданным ее значениям на двух непересекающихся сферах;

последние могут быть расположены одна вне другой или одна может быть вложена в другую.

Пусть краевые значения V на поверхности $\sigma=\sigma_1$ заданы функцией $f_1(\theta, \varphi)$, а на поверхности $\sigma=\sigma_2$ — функцией $f_2(\theta, \varphi)$. Допустим, что функции

$$\frac{f_1(\theta, \varphi)}{(\operatorname{ch}\sigma_1-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}, \qquad \frac{f_2(\theta, \varphi)}{(\operatorname{ch}\sigma_2-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

могут быть разложены соответственно в ряды

$$\sum Y_n(\theta, \varphi) \qquad \sum Z_n(\theta, \varphi).$$

Тогда при выполнении известных условий, касающихся характера сходимости этих рядов, искомую гармоническую функцию можно выразить в виде

$$V=(\operatorname{ch}\sigma-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\left(n+\frac{1}{2}\right)(\sigma-\sigma_2)}{\operatorname{sh}\left(n+\frac{1}{2}\right)(\sigma_1-\sigma_2)}Y_n(\theta, \varphi)+$$

$$+(\operatorname{ch}\sigma-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\left(n+\frac{1}{2}\right)(\sigma-\sigma_1)}{\operatorname{sh}\left(n+\frac{1}{2}\right)(\sigma_2-\sigma_1)}Z_n(\theta, \varphi).$$

В случае области, внутренней по отношению к сфере $\sigma=\sigma_1$ и внешней по отношению к $\sigma=\sigma_2$, будем иметь

$$V=(\operatorname{ch}\sigma-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}\sum e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)(\sigma_0-\sigma)}Y_n(\theta, \varphi)$$

для $\sigma>\sigma_0$.

Первое решение задачи о распределении температуры между неизлучающими сферическими поверхностями дал Томсон (Кельвин)[1]. К. Нейман[2] решил задачу в общем виде. Ее рассматривал также Дирихле в своих лекциях.

266. Рассмотренная система координат применима и в том случае, когда краевые значения гармонической функции задаются на «веретенообразной» координатной поверхности. При этом надо подвергнуть указанному преобразованию те нормальные решения уравнения Лапласа, которыми мы пользовались в случае области, ограниченной конусом. В результате мы получим элементарные решения вида

$$(\operatorname{ch}\sigma-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\sigma}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}p\sigma\cdot K_p^m(\pm\cos\theta)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}m\varphi.$$

Ряды по таким функциям могут представить гармоническую функцию с краевыми значениями, заданными на поверхности «веретена».

§ 7. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ВНУТРИ СФЕРИЧЕСКОГО СЕГМЕНТА

267. Система координат, которой мы пользовались в п. 253 для построения тороидальных функций, применима и в случае области, ограниченной сферическим сегментом $\theta=\text{const}$ или поверхностью «линзы», т. е. двумя сферическими сегментами такого рода. Впрочем, сейчас нам надо так перестроить систему координат, чтобы θ изменялось непрерывно при пересечении круга, на котором $\theta=\pi$.

---

[1]) Journ. de Liouville, 12 (1846), 256.

[2]) Algemeine Lösung des Problems über den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers, welcher von irgend nichtconzentrischen Kugelflächen begrenzt wird. Halle, 1862.

Пусть $\theta=\theta_1$ и $\theta=\theta_2$, где $\theta_1<\theta_2$, — уравнения двух граней линзы. Для точек, лежащих внутри линзы, мы полагаем $\theta_1<\theta<\theta_2$, а в области, внешней по отношению к линзе, $\theta_2<\theta<\theta_1+2\pi$. Координата θ изменяется в промежутке от 0 до ∞.

Искомые частные решения уравнения Лапласа суть

$$(\operatorname{ch}\eta-\cos\theta)^{\frac{1}{2}} K_p^m(\operatorname{ch}\eta) \frac{\operatorname{ch}}{\operatorname{sh}} p\theta \frac{\cos}{\sin} m\varphi,$$

где $K_p(\operatorname{ch}\eta)$ обозначает $P_{-\frac{1}{2}+pi}(\operatorname{ch}\eta)$, а также соответствующие произведения, содержащие функции Лежандра второго рода.

В отличие от п. 261, где мы также имели дело с функциями $K_p(\operatorname{ch}\eta)$, теперь аргумент этих функций принимает значения, большие 1.

Формулы (144), (143) и (141) гл. V дают нам следующие выражения:

$$K_p(\operatorname{ch}\eta)=\frac{2}{\pi}\operatorname{ch}p\pi\int_0^\infty \frac{\cos pu}{(2\operatorname{ch}u+2\operatorname{ch}\eta)^{\frac{1}{2}}}\,du, \tag{а}$$

$$K_p(\operatorname{ch}\eta)=\frac{2}{\pi}\operatorname{ch}p\pi\int_\eta^\infty \frac{\sin pu}{(2\operatorname{ch}u-2\operatorname{ch}\eta)^{\frac{1}{2}}}\,du, \tag{б}$$

$$K_p(\operatorname{ch}\eta)=\frac{2}{\pi}\int_0^\eta \frac{\cos pu}{(2\operatorname{ch}\eta-2\operatorname{ch}u)^{\frac{1}{2}}}\,du. \tag{в}$$

Тессеральные функции $K_p^m(\operatorname{ch}\eta)$ определяются так:

$$K_p^m(\operatorname{ch}\eta)=\operatorname{sh}^m\eta\,\frac{d^m}{d(\operatorname{ch}\eta)^m}K_p^m(\operatorname{ch}\eta),$$

т. е. (см. п. 180)

$$\frac{2^{m+1}\operatorname{sh}^m\eta}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-m-\frac{1}{2}\right)}\int_0^\infty \frac{\cos pu\operatorname{ch}p\pi}{(2\operatorname{ch}u+2\operatorname{ch}\eta)^{m-\frac{1}{2}}}\,du.$$

Согласно формуле (150) гл. V, имеем

$$Q_{-\frac{1}{2}+pi}(\operatorname{ch}\eta)=\int_\eta^\infty \frac{e^{-piu}}{(2\operatorname{ch}u-2\operatorname{ch}\eta)^{\frac{1}{2}}}\,du,$$

откуда

$$Q_{-\frac{1}{2}+pi}(\operatorname{ch}\eta)+Q_{-\frac{1}{2}-pi}(\operatorname{ch}\eta)=2\int_\eta^\infty \frac{\cos pu}{(2\operatorname{ch}u-2\operatorname{ch}\eta)^{\frac{1}{2}}}\,du.$$

Следовательно, если, по определению, положить

$$K_p(-\operatorname{ch}\eta)=\frac{2}{\pi}\operatorname{ch}p\pi\int_0^\infty \frac{\cos pu}{(2\operatorname{ch}u-2\operatorname{ch}\eta)^{\frac{1}{2}}}\,du,$$

мы получаем

$$K_p(-\operatorname{ch}\eta)=\frac{2}{\pi}\operatorname{ch}p\pi\,\{Q_{-\frac{1}{2}+pi}(\operatorname{ch}\eta)+Q_{-\frac{1}{2}-pi}(\operatorname{ch}\eta)\}.$$

Нули функции $K_p(\operatorname{ch}\eta)$ были исследованы в п. 237.

268. Обратная величина расстояния между точками $(\eta,\ \theta,\ \varphi)$ и $(\eta',\ \theta'\ \varphi')$ выражается в виде

$$\frac{1}{D}=\frac{(\operatorname{ch}\eta-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta'-\cos\theta')^{\frac{1}{2}}}{k\cdot 2^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{\{\operatorname{ch}\gamma-\cos(\theta-\theta')\}^{\frac{1}{2}}},$$

где

$$\operatorname{ch}\gamma=\operatorname{ch}\eta\operatorname{ch}\eta'-\operatorname{sh}\eta\operatorname{sh}\eta'\cos(\varphi-\varphi').$$

Так как

$$\{\operatorname{ch}\gamma-\cos(\theta-\theta')\}^{-\frac{1}{2}}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{du}{u^2+\operatorname{ch}\gamma-\cos(\theta-\theta')},$$

где $u^2+\operatorname{ch}\gamma=\operatorname{ch}v$, то

$$\frac{1}{D}=\frac{1}{\pi}\int_\gamma^\infty\frac{1}{\operatorname{ch}v-\cos(\theta-\theta')}\frac{\operatorname{sh}v}{(\operatorname{ch}v-\operatorname{ch}\gamma)^{\frac{1}{2}}}\,dv.$$

Чтобы преобразовать это последнее выражение, заметим, что

$$\frac{2\operatorname{sh}v}{\operatorname{ch}v-\cos(\theta-\theta')}=i\left[\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\theta-\theta'+iv)-\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\theta-\theta'-iv)\right]$$

и воспользуемся равенством

$$\pi\operatorname{ctg}\lambda\pi=\int_0^1\frac{z^{\lambda-1}-z^{-\lambda}}{1-z}\,dz,$$

где $\operatorname{Re}(\lambda)$ заключено между 0 и 1.

Сделав замену переменной $z=e^{-2w\pi}$, получим

$$\pi\operatorname{ctg}\lambda\pi=-2\pi\int_0^\infty\frac{\operatorname{sh}(2\lambda-1)w\pi}{\operatorname{sh}w\pi}\,dw,$$

откуда, придав λ значения

$$\frac{1}{2\pi}(\theta-\theta'+iv),\qquad\frac{1}{2\pi}(\theta-\theta'-iv)$$

и воспользовавшись выражением (б), придем к равенству

$$\frac{2\operatorname{sh}v}{\operatorname{ch}v-\cos(\theta-\theta')}=\int_0^\infty\frac{\operatorname{ch}(\theta-\theta'-\pi)p}{\operatorname{ch}p\pi}K_p\operatorname{ch}(\gamma)\,dp.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{D}=\frac{(\operatorname{ch}\eta-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta'-\cos\theta')^{\frac{1}{2}}}{k}\int_0^\infty\frac{\operatorname{ch}(\theta-\theta'-\pi)p}{\operatorname{ch}\pi p}K_p(\operatorname{ch}\gamma)\,dp,$$

где $0<\theta-\theta'<2\pi$.

С помощью теоремы сложения п. 220 можно представить $K_p(\operatorname{ch}\gamma)$ равномерно сходящимся рядом по косинусам дуг, кратных $\varphi-\varphi'$.

В связи с материалом этого параграфа см. статьи Мелера, упомянутые на стр. 426, и мемуар К. Неймана[1]).

[1]) См. Trans. of the Saxon Soc., 12.

Глава XI.

ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

269. В связи с задачей об установившемся распределении температуры в эллипсоиде при заданных значениях температуры на границе, Ламе получил [1]) систему нормальных решений уравнения Лапласа, отнесенного к координатам, которые служат параметрами семейств софокусных эллипсоидов, однополостных и двуполостных гиперболоидов.

Эти решения представляются в виде произведений трех функций, каждая из которых зависит от параметра лишь одного из этих трех семейств; каждый из таких множителей, называемый функцией Ламе, задается как определенное частное решение некоторого дифференциального уравнения второго порядка, известного под названием уравнения Ламе. Систематическое изложение результатов Ламе имеется у Гейне [2]), и этим изложением мы существенно воспользовались в настоящей главе.

Чтобы получить решения уравнения Лапласа требуемого вида, введем так называемые эллиптические координаты Ламе; их следует, впрочем, называть *эллипсоидальными координатами*, во избежание смешения с эллиптическими координатами в плоскости.

Эллипсоидальные координаты (ρ, μ, ν) связаны с декартовыми координатами (x, y, z) соотношениями

$$\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-h^2}+\frac{z^2}{\rho^2-k^2}=1,$$
$$\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-h^2}-\frac{z^2}{k^2-\mu^2}=1,$$
$$\frac{x^2}{\nu^2}-\frac{y^2}{h^2-\nu^2}-\frac{z^2}{k^2-\nu^2}=1,$$

причем $k^2 \leqslant \rho^2 < \infty$, $h^2 \leqslant \mu^2 \leqslant k^2$, $0 \leqslant \nu^2 \leqslant h^2$; положительные постоянные $k > h$ фиксируются произвольным образом. Эти уравнения изображают соответственно семейства софокусных эллипсоидов, однополостных и двуполостных гиперболоидов. Все три семейства взаимно ортогональны.

Так как ρ^2, μ^2 и ν^2 служат корнями кубического уравнения относительно λ^2

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-h^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-k^2}=1,$$

то

$$x^2=\frac{\rho^2\mu^2\nu^2}{h^2k^2}$$

и

$$y^2=\frac{(\rho^2-h^2)(\mu^2-h^2)(h^2-\nu^2)}{h^2(k^2-h^2)},$$
$$z^2=\frac{(\rho^2-k^2)(k^2-\mu^2)(k^2-\nu^2)}{k^2(k^2-h^2)}.$$

---

[1]) Исследования Ламе были опубликованы в Journ. de Liouville, 2 (1837), 147; 4 (1899), 126; 8 (1843). См. также его монографии «Leçons sur les fonctions inverses des transcendentes et les surfaces isothermes», Paris, 1857, и «Leçons sur les coordonnées curvilignes», Paris, 1859.

[2]) Kugelfunktionen, т. I, стр. 350—381; т. II, стр. 164—173.

Чтобы всякая точка определялась, вообще говоря, единственной системой значений ρ, μ и ν, мы условимся считать, что ρ положительно и заключено между k и $+\infty$; μ изменяется от h до k и далее от k до h, так что $\sqrt{k^2-\mu^2}$ изменяет знак, когда μ достигает значения k; ν изменяется от $-h$ до h и далее от h до $-h$, так что $\sqrt{h^2-\nu^2}$ меняет знак с $+$ на $-$, когда ν достигает значения h.

При этом декартовы координаты выражаются через эллипсоидальные по формулам

$$x=\frac{\rho\mu\nu}{hk}, \qquad y=\frac{\sqrt{\rho^2-h^2}\sqrt{\mu^2-h^2}\sqrt{h^2-\nu^2}}{h\sqrt{k^2-h^2}},$$

$$z=\frac{\sqrt{\rho^2-k^2}\sqrt{k^2-\mu^2}\sqrt{k^2-\nu^2}}{k\sqrt{k^2-h^2}},$$

где $\sqrt{k^2-h^2}$ берется со знаком $+$, а знаки остальных корней определяются согласно только что принятому соглашению. При $\rho=k$ соответствующий эллипсоид сплющивается в эллипс

$$z=0, \qquad \frac{x^2}{k^2}+\frac{y^2}{k^2-h^2}=1.$$

Введем переменные θ и φ, положив

$$\cos\theta=\frac{\mu\nu}{hk}, \qquad \sin\theta\cos\varphi=\frac{\sqrt{\mu^2-h^2}\sqrt{h^2-\nu^2}}{h\sqrt{k^2-h^2}},$$

$$\sin\theta\sin\varphi=\frac{\sqrt{k^2-\mu^2}\sqrt{k^2-\nu^2}}{k\sqrt{k^2-h^2}},$$

где

$$0\leqslant\theta\leqslant\pi, \qquad 0\leqslant\varphi<2\pi.$$

Тогда

$$x=\rho\frac{\mu\nu}{hk}, \qquad y=\sqrt{\rho^2-h^2}\sin\theta\cos\varphi, \qquad z=\sqrt{\rho^2-k^2}\sin\theta\sin\varphi.$$

§ 2. УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА В СФЕРО-КОНИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

270. Прежде чем рассмотреть уравнение Лапласа в эллипсоидальных координатах, введем сферо-конические координаты r, μ, ν, связанные с декартовыми координатами соотношениями

$$x=r\frac{\mu\nu}{hk}, \qquad y=r\frac{\sqrt{\mu^2-h^2}\sqrt{h^2-\nu^2}}{h\sqrt{k^2-h^2}}, \qquad z=r\frac{\sqrt{k^2-\mu^2}\sqrt{k^2-\nu^2}}{k\sqrt{k^2-h^2}},$$

где μ и ν изменяются так, как описано в п. 269. Соответствующие координатные поверхности суть сферы

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

и конусы

$$\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-h^2}-\frac{z^2}{k^2-\mu^2}=0,$$

$$\frac{x^2}{\nu^2}-\frac{y^2}{h^2-\nu^2}-\frac{z^2}{k^2-\nu^2}=0.$$

В этих координатах

$$(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2=$$

$$=(dr)^2+(\mu^2-\nu^2)r^2\left\{\frac{(d\mu)^2}{(\mu^2-h^2)(k^2-\mu^2)}+\frac{(d\nu)^2}{(h^2-\nu^2)(k^2-\nu^2)}\right\}.$$

Отсюда, согласно общей формуле (2) гл. I, уравнение Лапласа запишется в виде

$$(\mu^2-\nu^2)\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\sqrt{\mu^2-h^2}\sqrt{k^2-\mu^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\sqrt{\mu^2-h^2}\sqrt{k^2-\mu^2}\frac{\partial V}{\partial\mu}\right)+$$
$$+\sqrt{h^2-\nu^2}\sqrt{k^2-\nu^2}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\sqrt{h^2-\nu^2}\sqrt{k^2-\nu^2}\frac{\partial V}{\partial\nu}\right)=0.$$

Если положить

$$\eta=\int\limits_h^\mu\frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2-h^2}\sqrt{k^2-\mu^2}},\qquad \zeta=\int\limits_0^\nu\frac{d\nu}{\sqrt{h^2-\nu^2}\sqrt{k^2-\nu^2}},$$

то уравнение Лапласа можно будет записать так:

$$(\mu^2-\nu^2)\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 V}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial\zeta^2}=0.$$

Пусть $V=r^n u$; тогда u должно удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}+n(n+1)(\mu^2-\nu^2)u=0,$$

которое представляет собой отнесенное к переменным η, ζ уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+n(n+1)u=0,$$

а частным решением этого последнего служит сферическая функция степени n.

Допустим, что u можно представить как произведение $E(\mu)E(\nu)$, где $E(\mu)$ зависит только от μ, а $E(\nu)$ — только от ν. Подставляя $u=E(\mu)E(\nu)$ в дифференциальное уравнение, получим

$$E(\nu)\left\{\frac{d^2E(\mu)}{d\eta^2}+n(n+1)\mu^2E(\mu)\right\}+E(\mu)\left\{\frac{d^2E(\nu)}{d\zeta^2}-n(n+1)\nu^2E(\nu)\right\}=0.$$

Оно удовлетворяется только тогда, когда

$$\frac{d^2E(\mu)}{d\eta^2}+[n(n+1)\mu^2-p(h^2+k^2)]E(\mu)=0,$$
$$\frac{d^2E(\nu)}{d\zeta^2}-[n(n+1)\nu^2-p(h^2+k^2)]E(\nu)=0,$$

где p — некоторая постоянная. Вводя сюда значения η и ζ, получим уравнение

$$(\mu^2-h^2)(\mu^2-k^2)\frac{d^2E(\mu)}{d\mu^2}+\mu(2\mu^2-h^2-k^2)\frac{dE(\mu)}{d\mu}+$$
$$+\{(h^2+k^2)p-n(n+1)\mu^2\}E(\mu)=0.$$

и точно такое же уравнение относительно переменного ν. Таким образом, $E(\mu)$ и $E(\nu)$ удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению, но в различных промежутках изменения аргументов.

Постоянная p произвольна; поэтому можно выделить бесконечно много решений уравнения Лапласа вида $r^nE(\mu)E(\nu)$. Прежде чем перейти к подробному исследованию функций $E(\mu)$ и $E(\nu)$, выясним их связь с решениями уравнения Лапласа в эллипсоидальных координатах.

§ 3. УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА В ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

271. Выражая x, y, z через эллипсоидальные координаты, мы находим

$$(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2=\frac{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)}{(\rho^2-h^2)(\rho^2-k^2)}(d\rho)^2+$$
$$+\frac{(\rho^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)}{(\mu^2-h^2)(k^2-\mu^2)}(d\mu)^2+\frac{(\rho^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}{(h^2-\nu^2)(k^2-\nu^2)}(d\nu)^2,$$

откуда вытекает такой вид уравнения Лапласа:

$$(\mu^2-\nu^2)\frac{\partial^2 V}{\partial\xi^2}+(\rho^2-\nu^2)\frac{\partial^2 V}{\partial\eta^2}+(\rho^2-\mu^2)\frac{\partial^2 V}{\partial\zeta^2}=0, \tag{A}$$

где

$$\xi=\int_k^\rho\frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2-h^2}\sqrt{\rho^2-k^2}},\qquad \eta=\int_h^\mu\frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2-h^2}\sqrt{k^2-\mu^2}},$$
$$\zeta=\int_0^\nu\frac{d\nu}{\sqrt{h^2-\nu^2}\sqrt{k^2-\nu^2}},$$

так что η и ζ определяются так же, как в п. 270. Мы замечаем, что этому уравнению удовлетворяет произведение $E(\rho)E(\mu)E(\nu)$, где $E(\mu)$ и $E(\nu)$ определены в п. 270, а функция $E(\rho)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2E(\rho)}{d\xi^2}-\{n(n+1)\rho^2-(h^2+k^2)p\}E(\rho)=0$$

или, если выразить ξ через ρ, уравнению

$$(\rho^2-h^2)(\rho^2-k^2)\frac{d^2E(\rho)}{d\rho^2}+\rho(2\rho^2-h^2-k^2)\frac{dE(\rho)}{d\rho}+$$
$$+\{(h^2+k^2)p-n(n+1)\rho^2\}E(\rho)=0.$$

Мы видим, что $E(\rho)$ удовлетворяет такому же дифференциальному уравнению по переменному ρ, что и функции $E(\mu)$, $E(\nu)$ по переменным μ и ν. Итак, каково бы ни было значение постоянной p, существуют функции $E(\rho)$, $E(\mu)$ и $E(\nu)$ такие, что $E(\rho)E(\mu)E(\nu)$ представляет собой решение уравнения Лапласа в эллипсоидальных координатах, а $r^2E(\mu)E(\nu)$ — решение уравнения Лапласа в сферо-конических координатах, введенных в п. 270. Показателю степени n мы будем, как правило, приписывать целые положительные значения.

Из уравнения (А) прямо следует, что функции ξ, η и ζ, а вместе с ними и $A\xi+B$, $A'\eta+B'$, $A''\zeta+B''$ являются решениями уравнения Лапласа. Постоянные можно определить, например, так, чтобы $A\xi+B$ принимала заданные значения на двух каких-нибудь эллипсоидах $\xi=\xi_1$ и $\xi=\xi_2$. Посредством решений такого рода можно выразить установившуюся температуру или электростатический потенциал в однородной среде, ограниченной двумя эллипсоидами или двумя гиперболоидами, описанными выше, на которых заданы постоянные значения температуры или потенциала. В этой связи величины ξ, η, ζ называют термометрическими параметрами.

Координаты ρ, μ, ν можно выразить через ξ, η, ζ посредством эллиптических функций Якоби. Если обозначить $k_1^2=\frac{k^2-h^2}{k^2}$, $k_1'^2=\frac{h^2}{k^2}$, то, согласно определению ρ, μ и ν,

$$\rho = k\,\mathrm{dn}\,(ik\xi,\ k_1), \qquad \mu = k\,\mathrm{dn}\,(K - k\eta,\ k_1), \qquad \nu = k\,\mathrm{sn}\,(k\zeta,\ k_1'),$$

где $K = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi}}$. Эти выражения получены Якоби.

§ 4. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ $E(\mu)\,E(\nu)$ И ТЕССЕРАЛЬНЫМИ СФЕРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

272. Функции $E(\mu)$ и $E(\nu)$ зависят от параметра p, входящего в дифференциальное уравнение, посредством которого эти функции определяются. Мы покажем, что p можно задать так, чтобы при целых положительных n функции $r^nE(\mu)\,E(\nu)$ были однозначны и непрерывны на всех сферах $r = \mathrm{const}$, и таких значений можно указать $2n+1$. Если решения уравнения Лапласа $r^nP_n^m(\cos\theta)\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} m\varphi$, где n — целое положительное, а $m = 0, 1, 2, \ldots, n$, удастся выразить через μ и ν, то, так как $\cos\theta$, $\sin\theta\cos\varphi$, $\sin\theta\sin\varphi$ выражаются рационально через

$$\mu\nu, \quad \sqrt{\mu^2-h^2}\sqrt{h^2-\nu^2}, \quad \sqrt{k^2-\mu^2}\sqrt{k^2-\nu^2},$$

функции $P_n^m(\cos\theta)\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} m\varphi$ также выразятся через эти произведения рационально.

В зависимости от того, четно m или нечетно и от $m\varphi$ берется косинус или синус, и мы получим выражения следующих четырех видов:

$$P_n^{2m}(\cos\theta)\cos 2m\varphi = U_n,$$
$$P_n^{2m}(\cos\theta)\sin 2m\varphi = \sqrt{\mu^2-h^2}\sqrt{k^2-\mu^2}\sqrt{h^2-\nu^2}\sqrt{k^2-\nu^2}\,U_{n-2},$$
$$P_n^{2m+1}(\cos\theta)\cos(2m+1)\varphi = \sqrt{\mu^2-h^2}\sqrt{h^2-\nu^2}\,U_{n-1},$$
$$P_n^{2m+1}(\cos\theta)\sin(2m+1)\varphi = \sqrt{k^2-\mu^2}\sqrt{k^2-\nu^2}\,U_{n-1},$$

где U — многочлены относительно μ и ν, а индекс указывает степень соответствующего многочлена как по μ, так и по ν. Мы утверждаем, что при всяком n для p можно указать $2n+1$ различных значений, при которых $E(\mu)\,E(\nu)$ выражается как многочлен степени n относительно μ, $\sqrt{\mu^2-h^2}$, $\sqrt{k^2-\mu^2}$ и относительно ν, $\sqrt{h^2-\nu^2}$, $\sqrt{k^2-\nu^2}$, и такие выражения могут быть одного из следующих видов:

$$K(\mu) = a_0\mu^n + a_1\mu^{n-2} + \ldots,$$
$$L(\mu) = \sqrt{\mu^2-h^2}\,(a_0\mu^{n-1} + a_1\mu^{n-3} + \ldots),$$
$$M(\mu) = \sqrt{\mu^2-k^2}\,(a_0\mu^{n-1} + a_1\mu^{n-3} + \ldots),$$
$$N(\mu) = \sqrt{\mu^2-h^2}\sqrt{\mu^2-k^2}\,(a_0\mu^{n-2} + a_1\mu^{n-4} + \ldots).$$

При этом в зависимости от того, четно или нечетно n, число функций вида $K(\mu)$ равно $1+\frac{1}{2}n$ или $\frac{1}{2}(n+1)$, число функций вида $L(\mu)$ и $M(\mu)$ равно $\frac{n}{2}$ или $\frac{1}{2}(n-1)$, вида $N(\mu)$ равно $\frac{n}{2}$ или $\frac{1}{2}(n+1)$.

Соответственно получаем выражения

$$P_n^{2m}(\cos\theta)\cos 2m\varphi = \sum \alpha K(\mu)\,K(\nu),$$
$$P_n^{2m+1}(\cos\theta)\cos(2m+1)\varphi = \sum \alpha L(\mu)\,L(\nu),$$
$$P_n^{2m}(\cos\theta)\sin 2m\varphi = \sum \alpha N(\mu)\,N(\nu),$$
$$P_n^{2m+1}(\cos\theta)\sin(2m+1)\varphi = \sum \alpha M(\mu)\,M(\nu),$$

где α — постоянные коэффициенты, а число слагаемых в правых частях равно числу функций соответствующего класса. Теперь мы покажем, что такие функции K, L, M, N в самом деле существуют и действительны.

§ 5. СУЩЕСТВОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ЛАМЕ И ИХ ПОСТРОЕНИЕ

273. Докажем теперь существование всех четырех видов функций $K(\mu)$, $L(\mu)$, $M(\mu)$, $N(\mu)$, известных под названием функций Ламе. Мы покажем, что при заданном n — это число называется степенью функции Ламе — существуют ровно $2n+1$ функций всех четырех видов. Мы покажем также, что совокупность функций вида $\sum\limits_1^{2n+1} a_r E_r(\mu) E_r(\nu)$ при всевозможных a_r совпадает с совокупностью всех сферических функций вида $\sum\limits_{m=0}^{n} P_n^m(\mu)(b_m \cos m\varphi + c_m \sin m\varphi)$, а функции вида $\sum\limits_1^{2n+1} a_r E_r(\rho) E_r(\mu) E_r(\nu)$ исчерпывают все шаровые функции

$$\sum_{m=0}^{n} r^n P_n^m(\mu)(b_m \cos m\varphi + c_m \sin m\varphi).$$

1. Для отыскания функций $K(\mu)$ подставим выражение

$$K(\mu) = a_0 \mu^n + a_1 \mu^{n-2} + a_2 \mu^{n-4} + \ldots$$

в уравнение Ламе

$$\frac{d^2K}{d\eta^2} + \{n(n+1)\mu^2 - p(h^2+k^2)\} K = 0.$$

Отнеся его к независимому переменному μ, получим

$$(\mu^2-h^2)(\mu^2-k^2)\frac{d^2K}{d\mu^2} + \mu(2\mu^2-h^2-k^2)\frac{dK}{d\mu} + \{p(h^2+k^2) - n(n+1)\mu^2\} K = 0,$$

откуда, обозначив $h^2+k^2=\alpha$, $h^2k^2=\beta$ и приравняв нулю коэффициенты при всех степенях μ, придем к системе уравнений

$$2(2n-1)a_1 = \alpha\{p-n^2\}a_0,$$
$$4(2n-3)a_2 = \alpha\{p-(n-2)^2\}a_1 + \beta n(n-1)a_0,$$
$$6(2n-5)a_3 = \alpha\{p-(n-4)^2\}a_2 + \beta(n-2)(n-3)a_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2r(2n+1-2r)a_r = \alpha\{p-(n-2r+2)^2\}a_{r-1} + \beta(n-2r+4)(n-2r+3)a_{r-2},$$
$$(2r+2)(2n-1-2r)a_{r+1} = \alpha\{p-(n-2r)^2\}a_r + \beta(n-2r+2)(n-2r+1)a_{r-1},$$
$$(2r+3)(2n-3-2r)a_{r+2} = \alpha\{p-(n-2r-2)^2\}a_{r+1}.$$

Здесь $r=\frac{n}{2}$ или $\frac{1}{2}(n-1)$, в зависимости от того, четно n или нечетно. Заметим, что в последнее уравнение не входит β. Величину p мы найдем из условия, что $a_{r+1}=0$, $a_{r+2}=0$, $a_{r+3}=0\ldots$, так что $K(\mu)$ окажется многочленом относительно μ степени n; в общем случае $K(\mu)$ разлагается в ряд по убывающим степеням μ. Если определить p так, чтобы выполнялось равенство $a_{r+1}=0$, то a_{r+2}, a_{r+3}, ... непременно обратятся в нуль. Поэтому p мы будем искать из уравнения, которое получим, приравняв нулю определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 2(2n-1), & -\alpha(p-n^2) \\ \dots & 4(2n-3) & \dots & -\alpha\{p-(n-1)^2\}, & -\beta n(n-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\alpha\{p-(n-2r)^2\}, & -\beta(n-2r+2)(n-2r+1) & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Этот определитель представляет собой многочлен степени $r+1$ относительно p, следовательно, мы получим $r+1$ значений p, которые мы обозначим $p_1, p_2, \dots, p_{r+1}$. Ниже мы покажем, что все они действительны и различны.

2. Для отыскания функций $L(\mu)$ положим $L(\mu) = z\sqrt{\mu^2-h^2}$; тогда для z будем иметь дифференциальное уравнение

$$(\mu^2-h^2)(\mu^2-k^2)\frac{d^2z}{d\mu^2} + \mu(4\mu^2-\alpha-2k^2)\frac{dz}{d\mu} + [\alpha p - k^2 - (n-1)(n+2)\mu^2]\,z = 0.$$

Полагая

$$z = a_0\mu^{n-1} + a_1\mu^{n-2} + a_2\mu^{n-3} + \dots,$$

подставляя это выражение в дифференциальное уравнение и приравнивая нулю коэффициенты при всех степенях μ, получим систему уравнений

$$2(2n-1)\,a_1 = [\alpha\{p-(n-1)^2\} - (2n-1)k^2]\,a_0,$$

$$4(2n-3)\,a_2 = [\alpha\{p-(n-3)^2\} - (2n-5)k^2]\,a_1 + \\ + \beta(n-1)(n-2)\,a_0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$2(n-r-1)(2r+3)\,a_{n-r-1} = [\alpha\{p-(2r+3-n)^2\} - (4r+7-2n)k^2]\,a_{n-r-2} + \\ + \beta(2r+4-n)(2r+5-n)\,a_{n-r-3},$$

$$2(n-r-2)(2r+5)\,a_{n-r} = [\alpha\{p-(2r+1-n)^2\} - (4r+3-2n)k^2]\,a_{n-r-1} + \\ + \beta(2r+2-n)(2r+3-n)\,a_{n-r-2},$$

в которой $r = \frac{n}{2}$ или $\frac{1}{2}(n-1)$.

Постоянную p будем искать из условия $a_{n-r} = 0$, при выполнении которого обращаются в нуль и все следующие a. Таким образом, мы получим для p уравнение степени $n-p$; его корни дадут нам значения p для $n-r$ функций вида $L(\mu)$.

3. Функции M находятся подобным же образом.

4. Для отыскания функций $N(\mu)$ полагаем

$$N(\mu) = z\sqrt{\mu^2-h^2}\sqrt{\mu^2-k^2},$$

тогда для z будем иметь дифференциальное уравнение

$$(\mu^2-h^2)(\mu^2-k^2)\frac{d^2z}{d\mu^2} + 3\mu(2\mu^2-h^2-k^2)\frac{dz}{d\mu} + \\ + \{6\mu^2 + (p-1)(h^2+k^2) - n(n+1)\mu^2\}\,z = 0.$$

Полагая

$$z = a_0\mu^{n-2} + a_1\mu^{n-4} + a_2\mu^{n-6} + \dots$$

мы, так же как в предыдущих случаях, получим систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&2(2n-1)\,a_1=\{p-(n-1)^2\alpha\}\,a_0,\\
&4(2n-3)\,a_2=\{p-(n-3)^2\alpha\}\,a_1+\beta(n-2)(n-3)\,a_0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&(2r-2)(2n+3-2r)\,a_{r-1}=\{p-(n-2r+3)^2\}\,a_{r-2}+\\
&\qquad\qquad\qquad+\beta(n+4-2r)\,(n+3-2r)\,a_{r-3},\\
&2r(2n+1-2r)\,a_r=\{p-(n-2r+1)^2\}\,a_{r-1}+\\
&\qquad\qquad\qquad+\beta(n+2-2r)\,(n+1-2r)\,a_{r-2},
\end{aligned}
$$

в которой $r=\frac{n}{2}$ или $\frac{1}{2}(n-1)$. Условие $a_r=0$, влекущее за собой обращение в нуль $a_{r+1}, a_{r+2}, \dots$, даст нам для p уравнение степени r; для функций вида $N(\mu)$ мы получим r значений постоянной p.

Итак, при заданной степени n мы будем иметь $r+1$ функций вида K, $n-r$ функций вида L, $n-r$ функций вида M и r функций вида N, всего $2n+1$ функций. Прежде чем исследовать эти значения p и доказывать, что полученные функции действительны и линейно независимы, мы рассмотрим некоторые частные случаи.

§ 6. ФУНКЦИИ ЛАМЕ В СЛУЧАЕ СФЕРОИДА

274. При $h=0$ переменное ρ служит параметром семейства софокусных сжатых сфероидов, μ — параметром семейства гиперболоидов вращения, а ν обращается в нуль, причем так, что при $h\to 0$ отношение $\frac{\nu}{h}$ остается конечным. Положим

$$\rho^2-k^2=\rho'^2,\quad \mu=k\sin\varphi',\quad \nu=h\cos\varphi',$$

тогда

$$x=\sqrt{\rho'^2+k^2}\sin\theta'\cos\varphi',\quad y=\sqrt{\rho'^2+k^2}\sin\theta'\sin\varphi',\quad z=\rho'\cos\theta',$$

т. е. ρ', θ', φ' оказываются теми координатами, которые мы ввели в гл. X при рассмотрении сфероидальных гармонических функций. Уравнение, из которого определяется p для функций K, в силу того, что $\beta=0$, $\alpha=k^2$, приводится к

$$[p-n^2]\,[p-(n-2)^2]\,[p-(n-4)^2]\dots[p-(n-2r)^2]=0.$$

Уравнения, определяющие p для функций L, M и N, суть соответственно

$$
\begin{aligned}
&[p-n^2]\,[p-(n-2)^2]\dots[p-(n-2r+2)^2]=0,\\
&[p-(n-1)^2]\,[p-(n-3)^2]\dots[p-(n-2r-1)^2]=0,\\
&[p-(n-1)^2]\,[p-(n-3)^2]\dots[p-(n-2r+1)^2]=0.
\end{aligned}
$$

При $p=m^2$ дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет $E(\mu)$, имеет вид

$$\mu^2(\mu^2-k^2)\frac{d^2E}{d\mu^2}+\mu(2\mu^2-k^2)\frac{dE}{d\mu}+\{m^2k^2-n(n+1)\mu^2\}\,E=0.$$

Если в качестве независимого переменного взять $\mu'=\frac{1}{k}\sqrt{k^2-\mu^2}$, то это уравнение преобразуется в

$$\frac{d}{d\mu'}\left\{(1-\mu'^2)\frac{dE}{d\mu'}\right\}+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{1-\mu'^2}\right\}E=0.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае $E(\mu)$ есть $P_n^m(\mu')$; соответственно $E(\rho)$ совпадает с $P_n^m(i\rho')$. Если положить $\frac{\nu}{h}=\cos\varphi'$ и заставить ν и h стремиться к нулю, то для $E(\nu)$ получим уравнение

$$\frac{d^2E}{d\varphi'^2}+m^2E=0;$$

таким образом, в качестве $K(\nu)$ и $M(\nu)$ мы будем иметь $\cos m\varphi'$, а в качестве $L(\nu)$ и $N(\nu)$ будем иметь $\sin m\varphi'$. Итак, в рассматриваемом частном случае $2n+1$ нормальных решений уравнения Лапласа $E(\rho)E(\mu)E(\nu)$ приводятся к функциям

$$P_n^m(i\rho')\,P_n^m(\cos\theta')\,{\cos\atop\sin}\,m\varphi'.$$

В случае $h=k$ переменное ρ служит параметром семейства вытянутых софокусных сфероидов. Если положить $\frac{\nu}{h}=\cos\theta'$, а μ и h заставить стремиться к нулю так, чтобы выполнялись соотношения

$$\sqrt{\frac{k^2-\mu^2}{k^2-h^2}}=\sin\varphi,\qquad \sqrt{\frac{\mu^2-h^2}{k^2-h^2}}=\cos\varphi,$$

то, как нетрудно показать, произведение $E(\rho)E(\mu)E(\nu)$ приведется к

$$P_n^m(\rho)\,P_n^m(\cos\theta)\,{\cos\atop\sin}\,m\varphi.$$

§ 7. ФУНКЦИИ ЛАМЕ СТЕПЕНЕЙ 0, 1, 2, 3

275. Перейдем теперь к рассмотрению функций Ламе и соответствующих нормальных решений уравнения Лапласа при $n=0,\ 1,\ 2,\ 3$.

При $n=0$ существует только функция вида $K(\mu)$, притом единственная: $K(\mu)=1$. Таким образом,

$$E_0(\rho)\,E_0(\mu)\,E_0(\nu)=1.$$

При $n=1$ мы имеем функции

$$K(\mu)=\mu,\qquad L(\mu)=\sqrt{\mu^2-k^2},\quad M(\mu)=\sqrt{h^2-\mu^2}$$

и им соответствуют нормальные формы

$$\rho\mu\nu,\quad \sqrt{\rho^2-k^2}\sqrt{k^2-\mu^2}\sqrt{k^2-\nu^2},\qquad \sqrt{\rho^2-h^2}\sqrt{\mu^2-h^2}\sqrt{h^2-\nu^2};$$

последние суть не что иное, как гармонические функции x, y и z.

При $n=2$ мы имеем две функции вида K; значения p для них находятся из уравнения $a_2=0$, т. е. из квадратного уравнения $\alpha^2p(p-4)+12\beta=0$. Если p_1, p_2 — его корни, то искомые функции $K(\mu)$ суть

$$\mu^2+\frac{1}{6}(p_1-4)\alpha,\qquad \mu^2+\frac{1}{6}(p_2-4)\alpha.$$

Далее мы имеем по одной функции вида L, M и N; ими являются соответственно $\mu\sqrt{\mu^2-h^2}$, $\mu\sqrt{k^2-\mu^2}$ и $\sqrt{k^2-\mu^2}\sqrt{\mu^2-h^2}$. Таким образом, мы получаем пять произведений

$$\left\{\rho^2+\frac{1}{6}(p-4)\alpha\right\}\left\{\mu^2+\frac{1}{6}(p_1-4)\alpha\right\}\left\{\nu^2+\frac{1}{6}(p_1-4)\alpha\right\},$$
$$\left\{\rho^2+\frac{1}{6}(p_2-4)\alpha\right\}\left\{\mu^2+\frac{1}{6}(p_2-4)\alpha\right\}\left\{\nu^2+\frac{1}{6}(p_2-4)\alpha\right\},$$
$$\rho\mu\nu\sqrt{\rho^2-k^2}\sqrt{k^2-\mu^2}\sqrt{k^2-\nu^2},\qquad \rho\mu\nu\sqrt{\rho^2-h^2}\sqrt{\mu^2-h^2}\sqrt{h^2-\nu^2},$$
$$\sqrt{\rho^2-h^2}\sqrt{\rho^2-k^2}\sqrt{k^2-\mu^2}\sqrt{\mu^2-h^2}\sqrt{k^2-\nu^2}\sqrt{h^2-\nu^2}.$$

Из этих гармонических функций первые две в декартовых координатах имеют вид $A(y^2-z^2)+B(z^2-x^2)$, остальные три суть xz, xy и yz.

При $n=3$ мы имеем две функции вида K, две — вида L, две — вида M и одну — вида N. Значения p, служащие для построения функций $K(\mu)$, представляют собой корни p_1, p_2 квадратного уравнения

$$\alpha^2(p-1)(p-9)+60\beta=0,$$

сами функции $K(\mu)$ суть

$$\mu^3+\frac{1}{10}(p_j-9)\beta\mu, \qquad j=1,\ 2.$$

Для $L(\mu)$ значениями p служат корни p_3, p_4 квадратного уравнения

$$(\alpha p-k^2)\{\alpha(p-4)-5k^2\}+20\beta=0,$$

а сами функции $L(\mu)$ суть

$$\sqrt{\mu^2-h^2}\left[\mu^2+\frac{1}{10}\{(p_j-4)\,\alpha-5k^2\}\right], \quad j=3,\ 4.$$

Для $M(\mu)$ значениями p служат корни p_5, p_6 квадратного уравнения

$$(\alpha p-h^2)\{\alpha(p-4)-5h^2\}+20\beta=0,$$

а сами $M(\mu)$ суть

$$\sqrt{k^2-\mu^2}\left[\mu^2+\frac{1}{10}\{(p_j-4)\,\alpha-5h^2\}\right], \qquad j=5, 6.$$

Функция $N(\mu)$ есть

$$\mu\sqrt{k^2-\mu^2}\sqrt{\mu^2-h^2}.$$

Итак, все семь функций, отвечающих значению $n=3$, найдены.

То, что все корни p уравнения, соответствующего функциям какого-нибудь определенного вида — K, L, M или N — действительны, Ламе доказывает следующим образом. Пусть E_1 и E_2 — две функции одного и того же вида, вычисленные для значений p_1 и p_2 параметра p; тогда

$$\frac{d^2E_1}{d\eta^2}+\{n(n+1)\mu^2-p_1(h^2+k^2)\}E_1=0,$$

$$\frac{d^2E_2}{d\eta^2}+\{n(n+1)\mu^2-p_2(h^2+k^2)\}E_2=0,$$

откуда

$$(p_1-p_2)(h^2+k^2)E_1E_2=E_2\frac{d^2E_1}{d\eta^2}-E_1\frac{d^2E_2}{d\eta^2}.$$

Интегрируя обе части равенства по η в пределах от 0 до ω, где

$$\omega=\int_h^k\frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2-h^2}\sqrt{k^2-\mu^2}},$$

получим

$$(p_1-p_2)(h^2+k^2)\int_0^\omega E_1E_2\,d\eta=\left[E_2\frac{dE_1}{d\eta}-E_1\frac{dE_2}{d\eta}\right]_0^\omega.$$

Очевидно, что

$$E_2\frac{dE_1}{d\eta}-E_1\frac{dE_2}{d\eta}=\sqrt{\mu^2-h^2}\sqrt{k^2-\mu^2}\left(E_2\frac{dE_1}{d\mu}-E_1\frac{dE_2}{d\mu}\right).$$

Покажем, что это выражение обращается в нуль при значениях $\mu=h$ и $\mu=k$, соответствующих значениям $\eta=0$ и $\eta=\omega$. Когда E_1 и E_2 — функции вида K, это очевидно, так как при этом $E_2\frac{dE_1}{d\mu}-E_1\frac{dE_2}{d\mu}$ представляет собой многочлен относительно μ. Если функции E_1 и E_2 — вида L, то обе они суть многочлены относительно μ, умноженные на $\sqrt{\mu^2-h^2}$; поэтому

$\frac{dE_1}{d\mu}$ и $\frac{dE_2}{d\mu}$ представляют собой многочлены, деленные на $\sqrt{\mu^2-h^2}$, и $E_2\frac{dE_1}{d\mu}-E_1\frac{dE_2}{d\mu}$ оказывается многочленом. Таким образом, и в этом случае

$$\sqrt{\mu^2-h^2}\sqrt{\mu^2-k^2}\left(E_2\frac{dE_1}{d\mu}-E_1\frac{dE_2}{d\mu}\right)$$

обращается в нуль при $\mu=h$ и $\mu=k$. То же имеет место тогда, когда E_1 и E_2 — функции остальных двух видов. Итак,

$$(p_1-p_2)\int\limits_0^\omega E_1E_2\,d\eta=0.$$

При $p_1\neq p_2$ мы имеем $\int\limits_0^\omega E_1E_2\,d\eta=0$; при $p_1=p_2$ интеграл в левой части равенства обращается в $\int\limits_0^\omega E_1^2\,d\eta$.

Допустим, что $p_1=P+iQ$; взяв в качестве p_2 сопряженный корень соответствующего уравнения, $p_2=P-iQ$, получим для $\int\limits_0^\omega E_1E_2\,d\eta$ выражение вида $\int\limits_0^\omega (H^2+J^2)\,d\eta$, не могущее равняться нулю. Таким образом, все p действительны.

Вместе с p оказываются действительными все коэффициенты выражения E_1, следовательно, сама E_1 действительна и $\int\limits_0^\omega E_1^2\,d\eta$ не может быть равным нулю.

Покажем теперь, что при заданном n функции $E_s(\mu)$ одного и того же вида линейно независимы. В самом деле, если допустить соотношение вида

$$\sum_1^r c_sE_s(\mu)=0,$$

где c_s — постоянные, то, умножив его на E_t и проинтегрировав по η от 0 до ω, получим

$$c_t\int\limits_0^\omega E_t^2\,d\eta=0,$$

откуда $c_t=0$. Так как t — произвольный номер, то $E_1, E_2, \ldots, E_r$ линейно независимы. Если заметить, что, согласно самому определению функций $K(\mu)$, $L(\mu)$, $M(\mu)$ и $N(\mu)$, функции одного вида не могут выражаться линейно через функции другого вида, то мы придем к заключению, что все $2n+1$ функций $E(\mu)$ действительны и линейно независимы.

Если функция $f(\mu)$ может быть выражена равномерно сходящимся рядом функций Ламе какого-нибудь одного вида и фиксированной степени,

$$f(\mu)=\sum c_sE_s(\mu),$$

то, согласно предыдущему,

$$c_s=\frac{\int\limits_0^\omega f(\mu)E_s(\mu)\,d\eta}{\int\limits_0^\omega E_s^2\,d\eta},$$

отсюда, в частности, следует, что такое представление $f(\mu)$ единственно.

§ 8. ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕКОТОРОГО ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

276. Пусть $E_n^s(\mu)$, $E_{n'}^t(\mu)$ — какие-либо функции Ламе одинакового вида; n и n' — их степени. Покажем, что двойной интеграл

$$\int_0^{\omega}\int_0^{\omega'}(\mu^2-\nu^2)\,E_n^s(\mu)\,E_n^s(\nu)\,E_{n'}^t(\mu)\,E_{n'}^t(\nu)\,d\eta\,d\rho,$$

где

$$\omega=\int_h^k\frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2-h^2}\sqrt{k^2-\mu^2}},\qquad \omega'=\int_0^h\frac{d\nu}{\sqrt{h^2-\nu^2}\sqrt{k^2-\nu^2}}$$

равен нулю, за исключением того случая, когда $n=n'$ и $s=t$.

В силу дифференциальных уравнений, которым удовлетворяет $E_n^s(\mu)$ и $E_{n'}^t(\mu)$ как функции от η, мы имеем

$$\frac{d^2E_n^s(\mu)}{d\eta^2}+[n(n+1)\mu^2-p_n^s(h^2+k^2)]\,E_n^s(\mu)=0,$$

$$\frac{d^2E_{n'}^t(\mu)}{d\eta^2}+[n'(n'+1)\mu^2-p_{n'}^t(h^2+k^2)]\,E_{n'}^t(\mu)=0,$$

откуда

$$\frac{d}{d\eta}\left\{E_{n'}^t(\mu)\frac{dE_n^s(\mu)}{d\eta}-E_n^s(\mu)\frac{dE_{n'}^t(\mu)}{d\eta}\right\}=(h^2+k^2)(p_n^s-p_{n'}^t)\,E_n^s(\mu)\,E_{n'}^t(\mu)-$$
$$-(n-n')(n+n'+1)\,\mu^2E_n^s(\mu)\,E_{n'}^t(\mu).$$

Интегрируя последнее тождество по η в пределах от 0 до ω, получим

$$(h^2+k^2)(p_n^s-p_{n'}^t)\int_0^{\omega}E_n^s(\mu)\,E_{n'}^t(\mu)\,d\eta=$$
$$=(n-n')(n+n'+1)\int_0^{\omega}\mu^2F_n^s(\mu)\,E_{n'}^t(\mu)\,d\eta.$$

Подобным же образом из уравнений, которым удовлетворяют $E_n^s(\nu)$ и $E_{n'}^t(\nu)$, вытекает

$$(h^2+k^2)(p_n^s-p_{n'}^t)\int_0^{\omega'}E_n^s(\nu)\,E_{n'}^t(\nu)\,d\zeta=(n-n')(n+n'+1)\int_0^{\omega'}\nu^2E_n^s(\nu)\,E_{n'}^t(\nu)\,d\zeta.$$

Отсюда

$$(n-n')(n+n'+1)(h^2+k^2)(p_n^s-p_{n'}^t)\int_0^{\omega}\int_0^{\omega'}(\mu^2-\nu^2)\times$$
$$\times E_n^s(\mu)\,E_n^s(\nu)\,E_{n'}^t(\mu)\,E_{n'}^t(\nu)\,d\zeta\,d\eta=0,$$

и мы видим, что этот двойной интеграл равен нулю по крайней мере тогда, когда $n\neq n'$ и одновременно $p_n^s\neq p_{n'}^t$.

При $n=n'$ и $p_n^s=p_{n'}^t$ этот двойной интеграл обращается в

$$\int_0^{\omega}\int_0^{\omega'}(\mu^2-\nu^2)\,\{E_n^s(\mu)\,E_n^s(\nu)\}^2\,d\zeta\,d\eta$$

и не равняется нулю, так как $\mu^2>\nu^2$.

Если $n=n'$, но $p_n^s \neq p_{n'}^t$, то

$$\int_0^{\omega} E_n^s(\mu) E_n^t(\mu)\, d\eta = 0, \qquad \int_0^{\omega'} E_n^s(\nu) E_n^t(\nu)\, d\zeta = 0,$$

и двойной интеграл, очевидно, равен нулю.

Если $p_n^s = p_{n'}^t$, но $n \neq n'$, то из дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют $E_n^s(\mu)$, $E_{n'}^t(\mu)$ и $E_n^s(\nu)$, $E_{n'}^s(\nu)$, вытекают равенства

$$\int_0^{\omega} \mu^2 E_n^s(\mu) E_{n'}^t(\mu)\, d\eta = 0, \qquad \int_0^{\omega'} \nu^2 E_n^s(\nu) E_{n'}^t(\nu)\, d\zeta = 0,$$

следовательно, и в этом случае рассматриваемый двойной интеграл равен нулю.

Вычислим теперь

$$\gamma_n^s = \int_0^{\omega} \int_0^{\omega'} (\mu^2 - \nu^2) \{E_n^s(\mu) E_n^s(\nu)\}^2\, d\zeta\, d\eta.$$

Интегралы вида

$$\int_0^{\omega} \mu^r\, d\eta, \qquad \int_h^k \frac{\mu^{2r}\, d\mu}{\sqrt{\mu^2-h^2}\sqrt{k^2-\mu^2}}$$

могут быть выражены через интегралы

$$\int_h^k \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2-h^2}\sqrt{k^2-\mu^2}}, \qquad \int_h^k \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{\mu^2-h^2}\sqrt{k^2-\mu^2}},$$

т. е. через

$$\int_0^{\omega} d\eta, \qquad \int_0^{\omega} \mu^2\, d\eta.$$

Следовательно, интегралы

$$\int_0^{\omega} [E(\mu)]^2\, d\eta, \qquad \int_0^{\omega} \mu^2 [E(\mu)]^2\, d\eta$$

могут быть представлены соответственно интегралами вида

$$\int_0^{\omega} (\alpha - \beta\mu^2)\, d\eta, \qquad \int_0^{\omega} (A - B\mu^2)\, d\eta.$$

Подобным же образом

$$\int_0^{\omega'} \{E(\nu)\}^2\, d\zeta, \qquad \int_0^{\omega'} \nu^2 \{E(\nu)\}^2\, d\nu$$

могут быть представлены в виде

$$\int_0^{\omega'} (\alpha - \beta\nu^2)\, d\zeta, \qquad \int_0^{\omega'} (A - B\nu^2)\, d\zeta,$$

где постоянные α, β, A, B — одинаковые для обеих пар интегралов — выражаются рационально через коэффициенты функции E.

Отсюда

$$\gamma_n^s = (\beta A - \alpha B) \int_0^{\omega} \int_0^{\omega'} (\mu^2 - \nu^2)\, d\eta\, d\zeta;$$

интеграл в правой части, как извество, равен $\frac{\pi}{2}$. Итак,

$$\gamma_n^s = \frac{\pi}{2} (\beta A - \alpha B).$$

Постоянный множитель в E_n^s условимся выбрать так, чтобы γ_n^s равнялось 1.

277. Если какая-нибудь функция $F(\mu, \nu)$ разложена по произведениям функций Ламе, то с помощью результатов предыдущего пункта можно найти коэффициенты такого разложения. Представим $F(\mu, \nu)$ как сумму восьми слагаемых вида

$$A, \quad A_1\mu\nu, \quad B\sqrt{\mu^2 - h^2}\sqrt{h^2 - \nu^2}, \quad B_1\mu\nu\sqrt{\mu^2 - h^2}\sqrt{h^2 - \nu^2},$$
$$C\sqrt{k^2 - \mu^2}\sqrt{k^2 - \nu^2}, \quad C_1\mu\nu\sqrt{k^2 - \mu^2}\sqrt{k^2 - \nu^2},$$
$$D\sqrt{\mu^2 - h^2}\sqrt{k^2 - \mu^2}\sqrt{h^2 - \nu^2}\sqrt{k^2 - \nu^2},$$
$$D_1\mu\nu\sqrt{\mu^2 - h^2}\sqrt{k^2 - \mu^2}\sqrt{h^2 - \nu^2}\sqrt{k^2 - \nu^2},$$

где A, A_1 B, B_1, ... — суммы конечного числа членов, четных относительно μ, ν, $\sqrt{\mu^2 - h^2}$, ... Этим восьми слагаемым соответствуют четыре класса произведений функций Ламе, подразделенные каждый на два подкласса произведений, четных и нечетных относительно μ или ν. Каждое из таких слагаемых разлагается по произведениям функций Ламе, принадлежащим одному из восьми подклассов.

Пусть $f(\mu, \nu)$ — какое-нибудь одно из таких слагаемых функции $F(\mu, \nu)$; запишем его в виде

$$f(\mu, \nu) = \sum \sum c_n^s E_n^s(\mu) E_n^s(\nu),$$

где суммирование по n распространено на все четные или все нечетные значения n, а суммирование по s — на номера, соответствующие тому виду функций E, к которому относится слагаемое $f(\mu, \nu)$.

Умножая обе части этого равенства на

$$E_n^s(\mu) E_n^s(\nu) (\mu^2 - \nu^2)$$

и интегрируя по η и ζ соответственно от 0 до ω и от 0 до ω', получим

$$c_n^s \int_0^{\omega} \int_0^{\omega'} (\mu^2 - \nu^2) [E_n^s(\mu) E_n^s(\nu)]^2\, d\zeta\, d\eta =$$
$$= \int_0^{\omega} \int_0^{\omega'} f(\mu, \nu) E_n^s(\mu) E_n^s(\nu) (\mu^2 - \nu^2)\, d\zeta\, d\eta,$$

откуда в силу выбора постоянных множителей в функциях E (см. п. 276)

$$c_n^s = \int_0^{\omega} \int_0^{\omega'} f(\mu, \nu) E_n^s(\mu) E_n^s(\nu) (\mu^2 - \nu^2)\, d\zeta\, d\eta.$$

Отсюда можно вывести следующее заключение, которое понадобится нам при рассмотрении нулей функций $E(\mu)$; если $\varphi(\mu, \nu)$ — многочлен относительно $\mu\nu$, $\sqrt{\mu^2-h^2}\sqrt{h^2-\nu^2}$, $\sqrt{k^2-\mu^2}\sqrt{k^2-\nu^2}$ степени $< n$, то

$$\int_0^{\omega}\int_0^{\omega'} (\mu^2-\nu^2)\,\varphi(\mu,\nu)\,E_n^p(\mu)\,E_n^p(\nu)\,d\zeta\,d\eta = 0.$$

§ 9. НУЛИ ФУНКЦИЙ ЛАМЕ

278. Покажем теперь, что все корни уравнения $E(\mu)=0$ действительны, различны и не превосходят k. Прежде всего установим, что функции

$$K(\mu),\qquad (\mu^2-h^2)^{-\frac{1}{2}}L(\mu),\qquad (k^2-\mu^2)^{-\frac{1}{2}}M(\mu),\qquad (\mu^2-h^2)^{-\frac{1}{2}}(k^2-\mu^2)^{-\frac{1}{2}}N(\mu)$$

не обращаются в нуль при $\mu=\pm h$ и $\mu=\pm k$. Каждая из них удовлетворяет дифференциальному уравнению вида

$$(\mu^2-h^2)(\mu^2-k^2)\frac{d^2u}{d\mu^2}+P\frac{du}{d\mu}+Qu=0,$$

где P и Q не содержат множителей μ^2-h^2 и μ^2-k^2. Поэтому если бы решение u обращалось в нуль при $\mu=\pm h$ или при $\mu=\pm k$, то в той же точке обращалась бы в нуль и $\frac{du}{d\mu}$; дифференцируя уравнение по μ, мы убедились бы, что в тех же точках обращаются в нуль $\frac{d^2u}{d\mu^2}$ и все высшие производные, что невозможно.

Подобным же образом можно показать, что уравнение $E(\mu)=0$ не может иметь кратных корней, так как в противном случае в некоторой точке обращались бы в нуль $E(\mu)$, $\frac{dE}{d\mu}$, $\frac{d^2E}{d\mu^2}$, ...

Так как

$$\int_0^{\omega}\int_0^{\omega'} (\mu^2-\nu^2)\,E(\mu)\,E(\nu)\,d\zeta\,d\eta = 0$$

и

$$\mu^2-\nu^2>0,$$

то по крайней мере один из множителей $E(\mu)$, $E(\nu)$ под интегралом должен менять знак в некоторой точке α соответствующего промежутка изменения μ или ν. Функция $E(\mu)E(\nu)$, если опустить множитель $\mu\nu$, который может в ней содержаться, должна быть четной как по переменному μ, так и по ν, поэтому она должна содержать множитель $(\mu^2-\alpha^2)(\nu^2-\alpha^2)$. Применяя к функции

$$\varphi(\mu,\nu)=(\mu^2-\alpha^2)\,(\nu^2-\alpha^2)$$

замечание, приведенное в конце п. 277, получим равенство

$$\int_0^{\omega}\int_0^{\omega'} (\mu^2-\nu^2)(\mu^2-\alpha^2)(\nu^2-\alpha^2)\,E(\mu)\,E(\nu)\,d\zeta\,d\eta = 0.$$

Подинтегральная функция содержит множитель $(\mu^2-\alpha^2)^2(\nu^2-\alpha^2)^2$; отсюда, повторяя то же рассуждение, мы придем к выводу, что $E(\mu)$ или $E(\nu)$ должна менять знак в некоторой точке β, отличной от α, и в $E(\mu)E(\nu)$ должен входить множитель $(\mu^2-\beta^2)(\nu^2-\beta^2)$. Полагая

$$\varphi(\mu,\nu)=(\mu^2-\alpha^2)\,(\nu^2-\alpha^2)\,(\mu^2-\beta^2)\,(\nu^2-\beta^2)$$

и снова, применяя замечание п. 277, придем к выводу, что в $E(\mu)E(\nu)$ входит еще множитель $(\mu^2-\gamma^2)(\nu^2-\gamma^2)$. Продолжая рассуждать таким образом, мы обнаружим, что все нули функций $E(\mu)$ и $E(\nu)$ действительны и лежат в промежутке между $-k$ и k.

§ 10. ФУНКЦИИ ЛАМЕ ВТОРОГО РОДА

279. Произведение $E(\rho)E(\mu)E(\nu)$ представляет собой гармоническую функцию, непрерывную внутри эллипсоида $\rho=\rho_1$; в теории потенциала такие функции играют для эллипсоида ту же роль, что $r^nP_n^m(\cos\theta)\frac{\cos}{\sin}m\varphi$ для шара или $r^nE(\mu)E(\nu)$ для части шарового слоя, вырезанной круглым конусом. Для области, внешней по отношению к эллипсоиду, потребуются решения уравнения Ламе, на бесконечности обращающиеся в нуль. Если обозначить такое решение $F(\rho)$, то произведение $F(\rho)E(\mu)E(\nu)$ будет соответствовать функциям $\nu^{-n-1}P_n^m(\cos\theta)\frac{\cos}{\sin}m\varphi$ и $r^{-n-1}E(\mu)E(\nu)$ для только что упомянутых областей.

Интересующее нас решение $E(\rho)$ уравнения Ламе

$$\frac{d^2u}{d\xi^2}-\{n(n+1)\rho^2-p(h^2+k^2)\}u=0,$$

в предположении, что известно $E(\rho)$, отыскивается, как обычно, из уравнения

$$\frac{d}{d\xi}\left\{F(\rho)\frac{dE(\rho)}{d\xi}-E(\rho)\frac{dF(\rho)}{d\xi}\right\}=0.$$

Записав это последнее в виде

$$F(\rho)\frac{dE(\rho)}{d\xi}-E(\rho)\frac{dF(\rho)}{d\xi}=C$$

и интегрируя по ρ, получим

$$\frac{F(\rho)}{E(\rho)}=C\int\limits_\rho^\infty\frac{d\rho}{\{E(\rho)\}^2\sqrt{\rho^2-h^2}\sqrt{\rho^2-k^2}}.$$

$F(\rho)$ должно обращаться в нуль при $\rho=\infty$. Выберем C так, чтобы при больших ρ функция $\frac{F(\rho)}{E(\rho)}$ равнялась $\frac{1}{\rho^{2n+1}}$; тогда, полагая коэффициент при ρ^n в $E(\rho)$ равным 1, получим

$$\frac{1}{\rho^{2n+1}}=C\int\limits_\rho^\infty\frac{d\rho}{\rho^{2n+2}}$$

откуда $C=2n+1$. Итак, искомое второе решение уравнения Ламе имеет вид

$$F_n(\rho)=(2n+1)E_n(\rho)\int\limits_0^\infty\frac{d\rho}{\{E_n(\rho)\}^2\sqrt{\rho^2-h^2}\sqrt{\rho^2-k^2}}.$$

Можно показать, что интеграл в правой части этого равенства можно выразить через эллиптические интегралы первого и второго родов.

Так, например, при $n=0$

$$E(\rho)=1,\qquad F(\rho)=\int\limits_\rho^\infty\frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2-h^2}\sqrt{\rho^2-k^2}}.$$

При $n=1$ функциями $E(\rho)$ являются

$$\rho, \quad \sqrt{\rho^2-h^2}, \qquad \sqrt{\rho^2-k^2},$$

а функциями $F(\rho)$ —

$$3\rho\int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho^2\sqrt{\rho^2-h^2}\sqrt{\rho^2-k^2}}, \qquad 3\sqrt{\rho^2-h^2}\int_0^\infty \frac{d\rho}{(\rho^2-h^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\rho^2-k^2}},$$

$$3\sqrt{\rho^2-k^2}\int_\rho^\infty \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2-h^2}\,(\rho^2-k^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Впервые функции Ламе второго рода ввели независимо друг от друга Лиувилль[1]) и Гейне[2]).

§ 11. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА В СЛУЧАЕ ЭЛЛИПСОИДА

280. С помощью нормальных решений уравнения Лапласа $E(\rho)E(\mu)E(\nu)$ и $F(\rho)E(\mu)E(\nu)$ можно получить гармоническую функцию внутри или вне эллипсоида $\rho=\rho_1$, принимающую на самом этом эллипсоиде заданное постоянное значение. Эти функции суть

$$\frac{E(\rho)}{E(\rho_1)}E(\mu)E(\nu), \qquad \frac{F(\rho)}{F(\rho_1)}E(\mu)E(\nu);$$

на поверхности $\rho=\rho_1$ они обе принимают значение $E(\mu)E(\nu)$.

Если краевой функцией является конечная сумма вида $\sum AE(\mu)E(\nu)$, в которой $E(\mu)$ и $E(\nu)$ могут быть произвольного вида и иметь различные степени, то решениями внутренней и внешней задачи служат соответственно

$$V_i=\sum A\frac{E(\rho)}{E(\rho_1)}E(\mu)E(\nu)$$

и

$$V_0=\sum A\frac{F(\rho)}{F(\rho_1)}E(\mu)E(\nu).$$

Теперь предположим, что краевая функция $f(\mu, \nu)=F(\theta, \varphi)$ разложена в равномерно сходящийся ряд $Y_0+Y_1+Y_2+\ldots+Y_n+\ldots$ сферических функций. Каждая из функций Y_n представляется в виде

$$\sum_{m=1}^{2n+1} a_n^{(m)}E_n^{(m)}(\mu)E_n^{(m)}(\nu),$$

поэтому самое $f(\mu, \nu)$ можно представить как сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{2n+1} a_n^{(m)}E_n^{(m)}(\mu)E_n^{(m)}(\nu).$$

Можно доказать, что при соблюдении некоторых условий

$$V_i=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{2n+1} a_n^{(m)}\frac{E_n^{(m)}(\rho)}{E_n^{(m)}(\rho_1)}E_n^{(m)}(\mu)E_n^{(m)}(\nu),$$

$$V_0=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{2n+1} a_n^{(m)}\frac{F_n^{(m)}(\rho)}{F_n^{(m)}(\rho_1)}E_n^{(m)}(\mu)E_n^{(m)}(\nu)$$

---

[1]) Journ. de Liouville, 10 (1845), 222.

[2]) Journ. f. reine u. angew. Math., 29 (1845), 185, См. также Kugelfunktionen, т. 1, стр. 384.

представляют собой функции, гармонические соответственно внутри и вне эллипсоида $\rho=\rho_1$, стремящиеся к $f(\mu, \nu)$ при $\rho \to \rho_1$. Доказательство основывается на том, что частные суммы этих рядов являются гармоническими функциями, краевые значения которых выражаются соответствующими частными суммами ряда, изображающего $f(\mu, \nu)$; при этом используется теорема Гарнака (см. п. 97). Это доказательство было проведено в п. 248 для сжатого сфероида и в п. 252 — для вытянутого.

Коэффициенты α_n^m определяются из соотношений

$$\iint f(\mu, \nu) E_n^{(m)}(\mu) E_n^{(m)}(\nu)(\mu^2-\nu^2)\, d\mu\, d\nu =$$

$$= \alpha_n^{(m)} \iint \{E_n^{(m)}(\mu) E_n^{(m)}(\nu)\}^2 (\mu^2-\nu^2)\, d\mu\, d\nu.$$

§ 12. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В РЯДЫ ПО ПРОИЗВЕДЕНИЯМ ФУНКЦИЙ ЛАМЕ

281. Мы доказали, что сферические функции степени n выражаются через $2n+1$ произведений функций Ламе той же степени от переменных μ и ν, определяемых соотношениями

$$\cos\theta = \frac{\mu\nu}{h\sqrt{k^2-h^2}}, \qquad \sin\theta\cos\varphi = \frac{\sqrt{\mu^2-h^2}\sqrt{h^2-\nu^2}}{h\sqrt{k^2-h^2}},$$

$$\sin\theta\sin\varphi = \frac{\sqrt{k^2-\mu^2}\sqrt{k^2-\nu^2}}{k\sqrt{k^2-h^2}}.$$

Поэтому всякая функция, которую можно разложить в ряд по сферическим функциям, выражается через произведения функций Ламе. В качестве примера выведем такого рода выражение для функции

$$P_n(\cos\gamma),$$

где

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi') =$$

$$= \frac{\mu\nu\mu'\nu'}{h^2k^2} + \frac{\sqrt{(\mu^2-h^2)(h^2-\nu^2)(\mu'^2-h^2)(h^2-\nu'^2)}}{h^2(k^2-h^2)} +$$

$$+ \frac{\sqrt{(k^2-\mu^2)(k^2-\nu^2)(k^2-\mu'^2)(k^2-\nu'^2)}}{k^2(k^2-h^2)}.$$

Функция $P_n(\cos\gamma)$ симметрична относительно μ, ν и μ', ν', поэтому ее разложение по произведениям функций Ламе должно иметь вид

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{s=1}^{2n+1} c_s E_n^s(\mu) E_n^s(\nu) E_n^s(\mu') E_n^s(\nu'),$$

где c_s — подлежащие определению постоянные.

Мы имеем равенство

$$P_n(\cos\gamma) = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_n(\cos\gamma') P_n(\cos\gamma'')\sin\theta''\, d\varphi''\, d\theta'',$$

в котором

$$\cos\gamma' = \cos\theta\cos\theta'' + \sin\theta\sin\theta''\cos(\varphi-\varphi''),$$
$$\cos\gamma'' = \cos\theta'\cos\theta'' + \sin\theta'\sin\theta''\cos(\varphi'-\varphi'').$$

Записав его в виде

$$P_n(\cos\gamma) = \frac{2(2n+1)}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_n(\cos\gamma') P_n(\cos\gamma'')\sin\theta''\, d\theta''\, d\varphi'',$$

перейдя к эллипсоидальным координатам μ'', ν'' и введя под интеграл выражения $P_n(\cos\gamma')$ и $P_n(\cos\gamma'')$ через функции Ламе, получим (см. стр. 445)

$$P_n(\cos\gamma)=\frac{2(2n+1)}{\pi}\sum k_s^2 E_n^s(\mu)E_n^s(\nu)E_n^s(\mu')E_n^s(\nu')\times$$
$$\times\int_0^{\omega}\int_0^{\omega'}(\mu''^2-\nu''^2)\{E_n^s(\mu'')E_n^s(\nu'')\}^2\,d\zeta_2\,d\eta_2.$$

Сравнивая оба полученных выражения $P_n(\cos\theta)$ через произведения функций Ламе, получим

$$\frac{1}{k_s}=\frac{2(2n+1)}{\pi}\int_0^{\omega}\int_0^{\omega'}(\mu''^2-\nu''^2)\{E_n^s(\mu'')E_n^s(\nu'')\}^2\,d\zeta_2\,d\eta_2.$$

Если постоянные, входящие в функции E, задать так, как условлено в п. 276, то для $P_n(\cos\theta)$ получим формулу

$$P_n(\cos\gamma)=\frac{\pi}{2(2n+1)}\sum_{s=1}^{2n+1}E_n^s(\mu)E_n^s(\nu)E_n^s(\mu')E_n^s(\nu').$$

§ 13. ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЕ И СФЕРО-КОНИЧЕСКИЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

282. Ферререс[1]) и, более подробно, Нивен[2]) показали, что в целях симметрии целесообразно выражать $E(\rho)E(\mu)E(\nu)$ в декартовых координатах.

В п. 272 было показано, что корни уравнения $E(\rho)=0$ действительны, различны и, за исключением тех, которые появляются за счет множителя $\sqrt{\rho^2-k^2}$, меньше k. Функции $E(\rho)\,E(\mu)\,E(\nu)$ сводятся к следующим видам:

$$\left\{\begin{matrix} 1, & \rho, & \sqrt{\rho^2-h^2}, & \sqrt{\rho^2-k^2}, & \sqrt{\rho^2-h^2}\sqrt{\rho^2-k^2}\\ 1, & \mu, & \sqrt{\mu^2-h^2}, & \sqrt{k^2-\mu^2}, & \sqrt{\mu^2-h^2}\sqrt{k^2-\mu^2}\\ 1, & \nu, & \sqrt{h^2-\nu^2}, & \sqrt{k^2-\nu^2}, & \sqrt{h^2-\nu^2}\sqrt{k^2-\nu^2}\end{matrix}\right\}\times$$
$$\times\prod(\rho^2-\rho_s^2)(\mu^2-\rho_s^2)(\nu^2-\rho_s^2),$$

где столбцы схемы в витых скобках соответствуют различным видам функций Ламе, а произведение $\prod$ распространяется на все ρ_s; число этих последних для различных видов равно $\frac{n}{2}$, $\frac{1}{2}(n-1)$, $\frac{1}{2}(n-2)$ и $\frac{1}{2}(n-3)$.

В силу соотношений

$$x^2=\frac{\rho^2\mu^2\nu^2}{h^2k^2},\qquad y^2=\frac{(\rho^2-h^2)(\mu^2-h^2)(h^2-\nu^2)}{h^2(k^2-h^2)},$$
$$z^2=\frac{(\rho^2-k^2)(k^2-\mu^2)(k^2-\nu^2)}{k^2(k^2-h^2)},$$

выражение

$$\frac{x^2}{\rho_s^2}+\frac{y^2}{\rho_s^2-h^2}+\frac{z^2}{\rho_s^2-k^2}-1$$

может быть записано в виде дроби, знаменатель которой есть $\rho_s^2(\rho_s^2-h^2)(\rho_s^2-k^2)$, а числитель — многочлен третьей степени относительно ρ_s^2

[1]) Spherical Harmonics, 1877, гл. VI.
[2]) Phil. Trans., 182 (1891), 231.

с коэффициентами, содержащими ρ^2, μ^2 и ν^2. Так как

$$\frac{x^2}{\rho_s^2}+\frac{y^2}{\rho_s^2-h^2}+\frac{z^2}{\rho_s^2-k^2}-1$$

обращается в нуль при $\rho_s^2=\rho^2$, μ^2, ν^2, то

$$\frac{x^2}{\rho_s^2}+\frac{y^2}{\rho_s^2-h^2}+\frac{z^2}{\rho_s^2-k^2}-1=\frac{(\rho^2-\rho_s^2)(\mu^2-\rho_s^2)(\nu^2-\rho_s^2)}{\rho_s^2(\rho_s^2-h^2)(\rho_s^2-k^2)}.$$

Поэтому функции $E(\rho)E(\mu)E(\nu)$ представляются в виде

$$\left\{\begin{matrix} & x & yz & \\ 1 & y & zx & xyz \\ & z & xy & \end{matrix}\right\}\prod\left(\frac{x^2}{\rho_s^2}+\frac{y^2}{\rho_s^2-h^2}+\frac{z^2}{\rho_s^2-k^2}-1\right),$$

причем из множителей, указанных в витых скобках, всегда фигурирует только один; определяется он видом функции $E(\rho)E(\mu)E(\nu)$.

Уравнение основного эллипсоида запишем в виде

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

где $a^2-b^2=h^2$, $a^2-c^2=k^2$. Пусть $a^2+\theta=\rho^2$, $a^2+\theta_s=\rho_s^2$, тогда рассматриваемые функции примут вид

$$\left\{\begin{matrix} & x & yz & \\ 1 & y & zx & xyz \\ & z & xy & \end{matrix}\right\}\prod_{s=1}^{m}\left(\frac{x^2}{a^2+\theta_s}+\frac{y^2}{b^2+\theta_s}+\frac{z^2}{c^2+\theta_s}-1\right),$$

где m принимает значения $\frac{n}{2}$, $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n-2}{2}$ или $\frac{n-3}{2}$, в зависимости от вида функции.

Обозначим

$$\Theta_s=\frac{x^2}{a^2+\theta_s}+\frac{y^2}{b^2+\theta_s}+\frac{z^2}{c^2+\theta_s}=1.$$

Тогда эллипсоидальные функции запишутся в виде

$$\left\{\begin{matrix} & x & yz & \\ 1 & y & zx & xyz \\ & z & xy & \end{matrix}\right\}\Theta_1\Theta_2\ldots\Theta_m.$$

Значения θ_1, θ_2, ..., θ_m, ... действительны, так как, согласно п. 278, нули функции $E(\rho)$ действительны.

Все $2n+1$ эллипсоидальные гармонические функции степени n мы обозначим

$$G_n^1,\ G_n^2,\ \ldots,\ G_n^s,\ \ldots,\ G_n^{2n+1}$$

и будем называть их внутренними эллипсоидальными гармоническими функциями, так как они используются при решении внутренней краевой задачи теории потенциала в случае эллипсоида.

Согласно п. 279, каждой внутренней эллипсоидальной функции соответствует внешняя эллипсоидальная функция

$$\mathfrak{G}_n^s=G_n^s I_n^s,$$

где (см. п. 279)

$$I_n^s=\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{(\theta_1-\theta)^2(\theta_2-\theta)^2\ldots(\theta_m-\theta)^2}\frac{d\theta}{\sqrt{(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)}};$$

нижний предел интеграла ε обозначает положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+\varepsilon}+\frac{y^2}{b^2+\varepsilon}+\frac{z^2}{c^2+\varepsilon}=1.$$

Значение этого интеграла на поверхности основного эллипсоида, т. е. при $\varepsilon=0$, мы обозначим $I_n^s(0)$.

283. В сферо-конических координатах мы имеем выражения

$$x^2=r^2\frac{\mu^2\nu^2}{h^2},\qquad y^2=\frac{(\rho^2-h^2)(\mu^2-h^2)(h^2-\nu^2)}{h^2(k^2-h^2)},$$

$$z^2=\frac{(\rho^2-k^2)(k^2-\mu^2)(k^2-\nu^2)}{k^2(k^2-h^2)}.$$

Отсюда следует, что $\frac{x^2}{\rho_s^2}+\frac{y^2}{\rho_s^2-h^2}+\frac{z^2}{\rho_s^2-k^2}$ может быть выражено в виде дроби, у которой знаменатель есть $\rho_s^2(\rho_s^2-h^2)(\rho_s^2-k^2)$, а числитель — квадратный трехчлен относительно ρ_s^2 с коэффициентами, зависящими от r^2, μ^2 и ν^2. Так как выражение $\frac{x^2}{\rho_s^2}+\frac{y^2}{\rho_s^2-h^2}+\frac{z^2}{\rho_s^2-k^2}$ обращается в нуль при $\rho_s^2=\mu^2$ и $\rho_s^2=\nu^2$, то

$$\frac{x^2}{\rho_s^2}+\frac{y^2}{\rho_s^2-h^2}+\frac{z^2}{\rho_s^2-k^2}=\frac{r^2(\mu^2-\rho_s^2)(\nu^2-\rho_s^2)}{\rho_s^2(\rho_s^2-h^2)(\rho_s^2-k^2)}.$$

Таким образом, в обозначениях, аналогичных принятым выше, рассматриваемые произведения имеют вид

$$\left\{\begin{matrix} & x & yz & \\ 1 & y & zx & xyz \\ & z & xy & \end{matrix}\right\}\prod\left(\frac{x^2}{\rho_s^2}+\frac{y^2}{\rho_s^2-h^2}+\frac{z^2}{\rho_s^2-k^2}\right).$$

Иначе их можно записать а виде

$$\left\{\begin{matrix} & x & yz & \\ 1 & y & zx & xyz \\ & z & xy & \end{matrix}\right\}\prod_{s=1}^{m}\left(\frac{x^2}{a^2+\theta_s}+\frac{y^2}{b^2+\theta_s}+\frac{z^2}{c^2+\theta_s}\right),$$

где m принимает одно из значений $\frac{n}{2}$, $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n-2}{2}$, $\frac{n-3}{2}$.

Мы видим, таким образом, что нормальные решения уравнения Лапласа в сферо-конических координатах можно получить, отобрав члены степени n из выражений нормальных решений в эллипсоидальных координатах.

Соответствующие внешние функции получаются из внутренних функций умножением их на $\frac{1}{r^{2n+1}}$.

§ 14. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ И СФЕРО-КОНИЧЕСКИХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

284. Для отыскания значений θ_1, θ_2, ..., θ_m мы должны подставить $G_n^s(x, y, z)$ в уравнение Лапласа и записать условия, при которых уравнение будет удовлетворяться.

Если взять, например, функцию Θ степени 2, то получим условие

$$\frac{1}{a^2+\theta}+\frac{1}{b^2+\theta}+\frac{1}{c^2+\theta}=0.$$

Корни такого квадратного уравнения определят две гармонические функции такого вида; остальные суть yz, zx и xy.

Подставив в уравнение Лапласа произведение $\Theta_1\Theta_2\ldots\Theta_m$, придем к уравнению

$$\left(\frac{1}{a^2+\theta_1}+\frac{1}{b^2+\theta_1}+\frac{1}{c^2+\theta_1}\right)\Theta_2\Theta_3\ldots\Theta_m+(m-1)\text{ аналогичных членов}+$$
$$+4\left\{\frac{x^2}{(a^2+\theta_1)(a^2+\theta_2)}+\frac{y^2}{(b^2+\theta_1)(b^2+\theta_2)}+\frac{z^2}{(c^2+\theta_1)(c^2+\theta_2)}\right)\Theta_3\ldots\Theta_m+$$
$$+\text{члены такого же вида}=0.$$

Заметив, что

$$\frac{x^2}{(a^2+\theta_1)(a^2+\theta_2)}+\frac{y^2}{(b^2+\theta_1)(b^2+\theta_2)}+\frac{z^2}{(c^2+\theta_1)(c^2+\theta_2)}=\frac{\Theta_2-\Theta_1}{\theta_1-\theta_2},$$

мы придем к заключению, что $\Theta_1\Theta_2\ldots\Theta_m$ удовлетворяет уравнению Лапласа только тогда, когда $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ удовлетворяют системе уравнений

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{a^2+\theta_1}+\dfrac{1}{b^2+\theta_1}+\dfrac{1}{c^2+\theta_1}+\dfrac{4}{\theta_1-\theta_2}+\ldots+\dfrac{4}{\theta_1-\theta_m}=0.\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dfrac{1}{a^2+\theta_m}+\dfrac{1}{b^2+\theta_m}+\dfrac{1}{c^2+\theta_m}+\dfrac{4}{\theta_m-\theta_1}+\ldots+\dfrac{4}{\theta_m-\theta_{m-1}}=0.\end{array}\right\}$$

Назовем эти уравнения характеристическими уравнениями для гармонических функций $\Theta_1\Theta_2\ldots\Theta_m$.

Нетрудно видеть, что для гармонических функций типа $x\Theta_1\Theta_2\ldots\Theta_m$ характеристические уравнения имеют тот же вид, лишь в первом столбце нужно брать $\frac{3}{a^2+\theta}$ вместо $\frac{1}{a^2+\theta}$; для функций типа $yz\Theta_1\Theta_2\ldots\Theta_m$ множитель 3 должен быть введен во втором и третьем столбцах; для функций $xyz\Theta_1\Theta_2\ldots\Theta_m$ множитель 3 вводится в первых трех столбцах.

Первое из характеристических уравнений имеет относительно θ_1 степень $m+1$, а относительно каждого из остальных неизвестных $\theta_2, \theta_3\ldots\theta_m$ степень 1; во все остальные уравнения θ_1 входит в 1-й степени. Поэтому, исключая $\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_m$, мы получим уравнение степени $m(m+1)$ относительно θ_1. Но так как система характеристических уравнений такова, что, коль скоро из m неизвестных θ заданы $m-1$, последнее неизвестное определяется однозначно из любого уравнения системы, то полученные $m(m-1)$ корней разбиваются на $m+1$ групп, каждая из которых даст по одному значению каждому θ. Все такие группы определяют $m+1$ эллипсоидальных функций типа $\Theta_1\Theta_2\ldots\Theta_m$. Подобные же рассуждения применимы и к функциям других типов.

285. Запишем характеристические уравнения в виде

$$\left(\frac{k_1}{a^2+\theta_p}+\frac{k_2}{b^2+\theta_p}+\frac{k_3}{c^2+\theta_p}\right)+\sum_{q=1}^{m}\frac{1}{\theta_p-\theta_q}=0,$$

где индекс суммирования q минует значение p, а коэффициенты k_1, k_2 и k_3 равны $\frac{1}{4}$ или $\frac{3}{4}$, в зависимости от класса функции.

Из характеристических уравнений можно извлечь дополнительные сведения о $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$. Согласно п. 278, все θ_i действительны, заключены между $-a^2$ и $-c^2$ и не совпадают ни между собой, ни с одним из чисел $-a^2$, $-b^2$, $-c^2$.

Теперь мы выясним, сколько из этих θ_i попадает в промежуток $(-a^2, -b^2)$ и сколько — в промежуток $(-b^2, -c^2)$. Левая часть последнего уравнения представляет собой логарифмическую производную по θ_p функции

$$F=\prod_{p=1}^{m}(a^2+\theta_p)^{k_1}(b^2+\theta_p)^{k_2}(c^2+\theta_p)^{k_3}\prod_{q\neq p}|\theta_p-\theta_q|.$$

Будем рассматривать $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ как переменные, из которых первые $r-1$ заключены в промежутке

$$-a^2<\theta_p\leqslant -b^2 \quad (p=1,\ 2,\ \ldots,\ r-1),$$

а остальные — в промежутке

$$-b^2<\theta_p\leqslant -c^2 \quad (p=r+1,\ \ldots,\ m);$$

число r предполагается фиксированным. Функция F непрерывна, ограничена и не равна тождественно нулю в указанной области изменения ее аргументов. А так как $F=0$, когда хотя бы одно θ_p принимает какое-нибудь из значений $-a^2$, $-b^2$, $-c^2$ и существуют точки, в которых $F>0$, то существует единственное решение

$$\theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_m$$

системы характеристических уравнений, удовлетворяющее при заданном r условиям

$$\begin{aligned}-a^2<\theta_p<-b^2, &\qquad p=1,\ 2,\ \ldots,\ r-1,\\ -b^2<\theta_p<-c^2, &\qquad p=r,\ r+1,\ \ldots,\ m.\end{aligned}$$

Итак, мы показали, что из $m+1$ произведений функций Ламе заданного вида одно, и только одно, обладает тем свойством, что $r-1$ из соответствующих θ заключены в промежутке $(-a^2, -b^2)$, а остальные — в промежутке $(-b^2, -c^2)$.

Этот результат впервые получил Клейн [1]) из геометрических соображений при рассмотрении вопроса о вырождении узловых линий сферо-конических функций на поверхности сферы в узловые линии сферических функций при $b^2=c^2$.

Приведенное здесь доказательство основывается на соображениях, использованных Стильтьесом при доказательстве одной более общей теоремы [2]).

§ 15. СВЯЗЬ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ СО СФЕРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

286. Внутренняя эллипсоидальная функция степени n содержит члены степени n, $n-2$, $n-4, \ldots$ относительно x, y, z. Ясно, что каждый из таких членов представляет собой гармоническую функцию, следовательно, эллипсоидальная функция степени n является суммой сферических функций степеней n, $n-2, \ldots$

Пусть

$$K=\frac{x^2}{a^2+\theta}+\frac{y^2}{b^2+\theta}+\frac{z^2}{c^2+\theta},$$

тогда

$$\Theta=K-1$$

и произведения

$$\left\{\begin{matrix} & x & yz & \\ 1 & y & zx & xyz \\ & z & xy & \end{matrix}\right\}K_1K_2\ldots K_m$$

[1]) Math. Ann., 18 (1881), 237.

[2]) Acta Math., 6 (1885), 321.

будут представлять собой сферические функции с теми же значениями θ, которые входят в выражения эллипсоидальных функций G_n. Одновременно они будут сферо-коническими функциями.

Условимся обозначать их

$$H_n^1, \quad H_n^2, \ldots, H_n^{2n+1}$$

и называть сферическими (или сферо-коническими) функциями, связанными с соответствующими сфероидальными функциями $G_n^1, \quad G_n^2, \ldots, \quad G_n^{2n+1}$.

Если G_n^s и G_n^t — любые две различные внутренние эллипсоидальные функции одной и той же степени, то

$$\iint G_n^s G_n^t \overline{p}\, dS = 0,$$

где интеграл берется по поверхности основного эллипсоида, а $\overline{p}$ обозначает длину перпендикуляра, опущенного из центра на плоскость, касательную к соответствующему элементу поверхности.

Чтобы это доказать, заметим, что если G_n^s и G_n^t — различных типов, то элементы такого интеграла в каждой паре смежных октантов равны по абсолютной величине и противоположны по знаку; сам интеграл, таким образом, равен нулю. Если же G_n^s и G_n^t — одного типа, то теорема сводится к теореме, доказанной в п. 276, так как $\overline{p}\, dS = (\mu^2 - \nu^2)\, d\eta\, d\zeta$, и в этом случае интегралы рассматриваемого вида на участках эллипсоида, заключенных в отдельных октантах, обращаются в нуль.

Воспользуемся этой теоремой для доказательства соотношения

$$\iint H_n^s H_n^t\, d\sigma = 0 \qquad (s \neq t),$$

где $d\sigma$ — элемент поверхности сферы, имеющей общий центр с основным эллипсоидом, а интеграл берется по всей такой сфере.

На эллипсоиде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

функция

$$\Theta = \frac{x^2}{a^2+\theta} + \frac{y^2}{b^2+\theta} + \frac{z^2}{c^2+\theta} - 1$$

выражается в виде

$$\Theta = -\theta \left\{ \frac{x^2}{a^2(a^2+\theta)} + \frac{y^2}{b^2(b^2+\theta)} + \frac{z^2}{c^2(c^2+\theta)} \right\} = -\theta \left\{ \frac{x_1^2}{a^2+\theta} + \frac{y_1^2}{b^2+\theta} + \frac{z_1^2}{c^2+\theta} \right\},$$

где (x_1, y_1, z_1) — точка сферы единичного радиуса, соответствующая точке (x, y, z) на основном эллипсоиде. Следовательно, на этом эллипсоиде

$$G_n^s(x, y, z) = (-1)^m \left\{ \begin{matrix} & a & bc & \\ 1 & b & ca & abc \\ & c & ab & \end{matrix} \right\} H_n^s(x_1, y_1, z_1),$$

$$G_n^t(x, y, z) = (-1)^m \left\{ \begin{matrix} & a & bc & \\ 1 & b & ca & abc \\ & c & ab & \end{matrix} \right\} H_n^t(x_1, y_1, z_1)$$

и

$$\overline{p}\, dS = abc\, d\sigma.$$

Равенство

$$\iint H_n^s H_n^t \, d\sigma = 0.$$

следует теперь непосредственно из только что установленного интегрального свойства функций G_n^s.

Таким образом, $2n+1$ сферических функций H_n^s, связанных с эллипсоидальными функциями G_n^s, образуют сопряженную систему; такие системы рассматривались в гл. VI. Легко показать, что полюсы функций H_n^s непременно лежат в главных плоскостях эллипсоида. Мы имеем, следовательно, ∞^2 систем сопряженных гармонических функций заданной степени, так как мы можем произвольно задавать отношение двух каких-нибудь полуосей эллипсоида к третьей.

В соответствии с выводами п. 87 полученному результату можно придать такую чисто алгебраическую формулировку:

Тернарная форма степени n, в которой переменные подчинены условию $x^2+y^2+z^2=0$, может быть представлена как линейная комбинация многочленов вида

$$\left\{\begin{matrix} & x & yz & \\ 1 & y & zx & xyz \\ & z & xy & \end{matrix}\right\} \prod_{s=0}^{m}\left(\frac{x^2}{a^2+\theta_s}+\frac{y^2}{b^2+\theta_s}+\frac{z^2}{c^2+\theta_s}\right);$$

так как параметры a, b, c, находятся в нашем распоряжении, то такое представление можно осуществить дважды бесконечным числом способов.

§ 16. РАЗЛОЖЕНИЕ ВНУТРЕННИХ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ПО СФЕРИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ

287. Для того чтобы выразить $G_n(x, y, z)$ в виде суммы сферических функций степени n, $n-2, \ldots$, воспользуемся теоремой п. 79. Участвующую в этом разложении сферическую функцию степени n обозначим $H_n(x, y, z)$, слагаемые низших степеней мы выразим как значения некоторых дифференциальных операторов от $H_n(x, y, z)$.

Итак, требуется выразить

$$G_n(x, y, z) = \left\{\begin{matrix} & x & yz & \\ 1 & y & zx & xyz \\ & z & xy & \end{matrix}\right\} \prod\left(\frac{x^2}{a^2+\theta}+\frac{y^2}{b^2+\theta}+\frac{z^2}{c^2+\theta}-1\right)$$

через сферическую функцию

$$H_n(x, y, z) = \left\{\begin{matrix} & x & yz & \\ 1 & y & zx & xyz \\ & z & xy & \end{matrix}\right\} \prod\left(\frac{x^2}{a^2+\theta}+\frac{y^2}{b^2+\theta}+\frac{z^2}{c^2+\theta}\right).$$

На поверхности эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

имеем

$$\frac{x^2}{a^2+\theta}+\frac{y^2}{b^2+\theta}+\frac{z^2}{c^2+\theta}-1 = -\theta\left(\frac{x^2}{a^2(a^2+\theta)}+\frac{y^2}{b^2(b^2+\theta)}+\frac{z^2}{c^2(c^2+\theta)}\right);$$

и, следовательно,

$$G_n(x, y, z) = (-1)^s \theta_1\theta_2 \ldots \theta_s H_n\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right) \left\{\begin{matrix} & a & bc & \\ 1 & b & ca & abc \\ & c & ab & \end{matrix}\right\},$$

где s — число крадратичных множителей, равное $\frac{n}{2}$, $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n-2}{2}$ или $\frac{n-3}{2}$.

Так как $H_n(x, y, z)$ — сферическая функция, то (см. п. 80)

$$H_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r} = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^n n!} \frac{1}{r^{2n+1}} H_n(x, y, z).$$

Взяв в этом равенстве $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$ вместо x, y, z, получим

$$H_n\left(a\frac{\partial}{\partial x}, b\frac{\partial}{\partial y}, c\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{(-1)^n (2n)!}{2^n n!} H_n\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}(2n+1)}.$$

Отсюда вытекает, что при $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$

$$G_n = (-1)^s \theta_1\theta_2 \ldots \theta_s \left\{\begin{matrix} & a & bc & \\ 1 & b & ca & abc \\ & c & ab & \end{matrix}\right\} \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n)!} \times$$

$$\times H_n\left(a\frac{\partial}{\partial x}, b\frac{\partial}{\partial y}, c\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Далее, так как

$$\frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{1}{r} = 0,$$

то

$$\left(\frac{1}{a^2+\theta}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{b^2+\theta}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1}{c^2+\theta}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{1}{r} =$$

$$= \left(\frac{1}{a^2+\theta}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{b^2+\theta}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1}{c^2+\theta}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{1}{r} - \frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{1}{r} =$$

$$= -\frac{1}{\theta}\left(\frac{a^2}{a^2+\theta}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{b^2}{b^2+\theta}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{c^2}{c^2+\theta}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{1}{r},$$

откуда

$$H_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r} =$$

$$= \frac{(-1)^s}{\theta_1\theta_2 \ldots \theta_s}\left\{\begin{matrix} & a^{-1} & b^{-1}c^{-1} & \\ 1 & b^{-1} & c^{-1}a^{-1} & a^{-1}b^{-1}c^{-1} \\ & c^{-1} & a^{-1}b^{-1} & \end{matrix}\right\} H_n\left(a\frac{\partial}{\partial x}, b\frac{\partial}{\partial y}, c\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r}.$$

Взяв здесь $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$ вместо x, y, z, получим равенство

$$H_n\left(a\frac{\partial}{\partial x}, b\frac{\partial}{\partial y}, c\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{(-1)^s}{\theta_1\theta_2 \ldots \theta_s}\left\{\begin{matrix} & a^{-1} & b^{-1}c^{-1} & \\ 1 & b^{-1} & c^{-1}a^{-1} & a^{-1}b^{-1}c^{-1} \\ & c^{-1} & a^{-1}b^{-1} & \end{matrix}\right\} \times$$

$$\times H_n\left(a^2\frac{\partial}{\partial x}, b^2\frac{\partial}{\partial y}, c^2\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Итак, на поверхности $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

$$G_n=\frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n)!} H_n\left(a^2\frac{\partial}{\partial x},\ b^2\frac{\partial}{\partial y},\ c^2\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Беря $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$ вместо x, y, z и обращаясь к тереме п. 79, получим

$$f_n\left(a\frac{\partial}{\partial x},\ b\frac{\partial}{\partial y},\ c\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=$$
$$=\frac{(-1)^n(2n)!}{2^n n!}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}(2n+1)}\times$$
$$\times\left\{1-\frac{\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)D^2}{2(2n-1)}+\ldots\right\}f_n\left(\frac{x}{a},\ \frac{y}{b},\ \frac{z}{c}\right),$$

где

$$D^2=a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+b^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+c^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Пусть

$$f_n\left(\frac{x}{a},\ \frac{y}{b},\ \frac{z}{c}\right)=H_n(x,\ y,\ z),$$

тогда

$$f_n\left(a\frac{\partial}{\partial x},\ b\frac{\partial}{\partial y},\ c\frac{\partial}{\partial z}\right)=H_n\left(a^2\frac{\partial}{\partial x},\ b^2\frac{\partial}{\partial y},\ c^2\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

и полученная формула принимает вид

$$H_n\left(a^2\frac{\partial}{\partial x},\ b^2\frac{\partial}{\partial y},\ c^2\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=$$
$$=\frac{(-1)^n 2n!}{2^n n!}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}(2n+1)}\times$$
$$\times\left\{1-\frac{\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)D^2}{2(2n-1)}+\ldots\right\}H_n(x,\ y,\ z).$$

При $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ будем иметь

$$G_n=\left\{1-\frac{D^2}{2(2n-1)}+\frac{D^4}{2.4(2n-1)(2n-3)}-\ldots\right\}H_n(x,\ y,\ z),$$

Мы видим таким образом, что для всех x, y, z

$$G_n(x,\ y,\ z)=\left\{1-\frac{D^2}{2(2n-1)}+\ldots\right\}H_n+\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)U,$$

где U — сумма членов степени $\leqslant n-2$.

Возьмем теперь $a^2+\lambda$, $b^2+\lambda$, $c^2+\lambda$ вместо a^2, b^2, c^2 и каждое θ уменьшим на λ. При этом G_n и $\left\{1-\frac{D^2}{2(2n-1)}+\ldots\right\}H_n$ не изменятся, D^2 примет вид

$$(a^2+\lambda)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(b^2+\lambda)\frac{\partial^2}{\partial y^2}+(c^2+\lambda)\frac{\partial}{\partial z^2},$$

а $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$ превратится в

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}-1.$$

Следовательно, $U \equiv 0$, и мы получаем искомое выражение G_n через H_n:

$$G_n(x, y, z) = \left\{1 - \frac{D^2}{2(2n-1)} + \frac{D^4}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)} - \ldots\right\} H_n(x, y, z),$$

где

$$D^2 = a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b^2\frac{\partial}{\partial y^2} + c^2\frac{\partial}{\partial z^2}.$$

Впервые его получил Нивен[1]), но его вывод требовал для каждого вида функции G_n особого рассмотрения. Приведенный здесь вывод, применимый сразу ко всем четырем видам, принадлежит Гобсону[2]).

§ 17. ВЫРАЖЕНИЕ ВНЕШНИХ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ЧЕРЕЗ СФЕРИЧЕСКИЕ

288. В формуле (40) п. 103

$$\iint Y_n(x, y, z) f(x, y, z)\,dS =$$
$$= 4\pi R^{2n+2}\frac{2^n n!}{(2n+1)!}\left\{1 + \frac{R^2\nabla^2}{2(2n+3)} + \frac{R^4\nabla^4}{2\cdot 4(2n+3)(2n+5)} + \ldots\right\}$$
$$Y_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) f(x, y, z),$$

где $f(x, y, z)$ на поверхности сферы радиуса R разлагается в абсолютно сходящийся степенной ряд, интегрируемый на сфере почленно; в правой части после выполнения всех операций x, y и z полагаются равными нулю.

Положим $R = 1$ и возьмем $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$ вместо x, y, z; тогда интеграл в левой части будет распространен на поверхность эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Вместо dS придется взять $\frac{\overline{p}dS}{abc}$, где в числителе dS — площадь элемента поверхности эллипсоида, $\overline{p}$ — длина перпендикуляра, опущенного из центра эллипсоида на плоскость, касательную к элементу поверхности. Мы получим при этом формулу

$$\iint Y_n\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right) f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)\overline{p}\,dS =$$
$$= 4\pi abc\frac{2^n n!}{(2n+1)!}\left\{1 + \frac{D^2}{2\cdot(2n+3)} + \ldots\right\} Y_n\left(a\frac{\partial}{\partial x}, b\frac{\partial}{\partial y}, c\frac{\partial}{\partial z}\right) f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right),$$

где

$$D^2 = a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + c^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

и в правой части после выполнения всех указанных операций x, y, z полагаются равными нулю. Взяв $f(x, y, z)$ вместо $f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)$, получим

$$\iint Y_n\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right) f(x, y, z,)\,\overline{p}\,dS =$$
$$= 4\pi abc\frac{2^n n!}{(2n+1)!}\left\{1 + \frac{D^2}{2(2n+3)} + \ldots\right\} Y_n\left(a\frac{\partial}{\partial x}, b\frac{\partial}{\partial y}, c\frac{\partial}{\partial z}\right) f(x, y, z)$$

---

[1]) Phil. Trans., 182 (1891), 236.

[2]) Proc. Lond. Math. Soc. (1), 24 (1892), 60—64.

Пусть

$$f(x, y, z) = F(\xi - x, \eta - y, \zeta - z),$$

где ξ, η, ζ — координаты произвольной точки, лежащей вне эллипсоида. Тогда

$$\iint Y_n\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right) F(\xi - x, \eta - y, \zeta - z)\,\overline{p}\,dS =$$
$$= 4\pi abc\,(-1)^n \frac{2^n n!}{(2n+1)!}\left\{1 + \frac{D^2}{2(2n+3)} + \frac{D^4}{2\cdot 4\,(2n+3)(2n+5)} + \ldots\right\}$$
$$Y_n\left(a\frac{\partial}{\partial\xi}, b\frac{\partial}{\partial\eta}, c\frac{\partial}{\partial\zeta}\right) F(\xi, \eta, \zeta),$$

причем в этом случае

$$D^2 = a^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + b^2\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + c^2\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}.$$

Теперь положим

$$F(\xi - x, \eta - y, \zeta - z) = \varphi(\rho),$$

где

$$\rho = \{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2\}^{\frac{1}{2}};$$

при этом будем иметь

$$\iint Y_n\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)\varphi(\rho)\,\overline{p}\,dS =$$
$$= 4\pi abc\,(-1)^n \frac{2^n n!}{(2n+1)!}\left\{1 + \frac{D^2}{2(2n+3)} + \frac{D^4}{2\cdot 4\,(2n+3)(2n+5)} + \ldots\right\}$$
$$Y_n\left(a\frac{\partial}{\partial\xi}, b\frac{\partial}{\partial\eta}, c\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\varphi\left(\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}\right).$$

В частности, когда $\varphi(\rho) = \frac{1}{\rho}$, получим формулу

$$\iint Y_n\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)\overline{p}\,\frac{dS}{\rho} =$$
$$= 4\pi abc\,(-1)^n \frac{2^n n!}{(2n+1)!}\left\{1 + \frac{D^2}{2(2n+3)} + \ldots\right\}$$
$$Y_n\left(a\frac{\partial}{\partial\xi}, b\frac{\partial}{\partial\eta}, c\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}.$$

Интеграл слева представляет значение в точке (ξ, η, ζ) потенциала, который создается массой, распределенной на поверхности эллипсоида с плотностью $\overline{p}\,Y_n\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)$. Как показано в п. 287, на этой поверхности

$$G_n(x, y, z) = \left\{\begin{matrix} & a & bc & \\ 1 & b & ca & abc \\ & c & ab & \end{matrix}\right\}\prod(-\theta)\,H_n\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right).$$

Множитель, заключенный в витые скобки, обозначим k. Тогда при $Y_n = H_n$, в силу равенства

$$\frac{a^2}{a^2+\theta}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{b^2}{b^2+\theta}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{c^2}{c^2+\theta}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} =$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} - \theta\left(\frac{1}{a^2+\theta}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{1}{b^2+\theta}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{1}{c^2+\theta}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right),$$

получаем

$$H_n\left(a\frac{\partial}{\partial\xi},\ b\frac{\partial}{\partial\eta},\ c\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}=k\prod(-\theta)\,H_n\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\ \frac{\partial}{\partial\eta},\ \frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}},$$

и рассматриваемая формула приобретает вид

$$\iint\frac{1}{\rho}G_n(x,\ y,\ z)\,\bar{p}\,dS=$$
$$=4\pi abck^2\{\prod(\theta)\}^2\frac{2^n n!}{(2n+1)!}(-1)^n\left\{1+\frac{D^2}{2(2n+3)}+\ldots\right\}$$
$$H_n\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\ \frac{\partial}{\partial\eta},\ \frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}.$$

Так выражаются через сферические функции значения потенциала массы, несомой поверхностью эллипсоида, вне эллипсоида.

Поверхностная плотность σ распределения массы, создающей внешний потенциал $\mathfrak{G}_n(\xi,\ \eta,\ \zeta)$, выражается соотношением

$$4\pi\sigma=-\frac{\partial\mathfrak{G}_n}{\partial\nu}+I_n\frac{\partial G_n}{\partial\nu},$$

где $\frac{\partial}{\partial\nu}$ — дифференцирование по направлению внешней нормали к поверхности, и значения I_n берутся на самой поверхности. В нашем случае

$$4\pi\sigma=G_n(x,\ y,\ z)\frac{d\varepsilon}{d\nu}\frac{1}{\{\prod(\theta)\}^2}\frac{1}{abck^2}.$$

Легко видеть, что $\frac{d\varepsilon}{d\nu}=2\bar{p}$, следовательно,

$$\sigma=\frac{1}{2\pi}\frac{\bar{p}G(x,\ y,\ z)}{\{\prod(\theta)\}^2}\frac{1}{abck^2},$$

и мы получаем формулу

$$\mathfrak{G}_n(\xi,\ \eta,\ \zeta)=(-1)^n\frac{2^{n+1}n!}{(2n+1)!}H_n\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\ \frac{\partial}{\partial\eta},\ \frac{\partial}{\partial\zeta}\right)$$
$$\left\{1+\frac{D^2}{2(2n+3)}+\frac{D^4}{2\cdot4(2n+3)(2n+5)}+\ldots\right\}\frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}},$$

выражающую внешнюю эллипсоидальную функцию $\mathfrak{G}_n(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ в виде ряда по сферическим функциям.

Впервые ее получил Нивен. Справедливость ее установлена при известных условиях, касающихся положения точки $(\xi,\ \eta,\ c)$ относительно эллипсоида. Действительно, ряд в правой части может сходиться не во всех точках области, внешней по отношению к эллипсоиду.

Прежде всего, было предположено, что $\frac{1}{\rho}$ на поверхности эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ представляется абсолютно сходящимся рядом по степеням $x,\ y,\ z$.

Если r' обозначает расстояние от точки $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ до точки, отстоящей от начала координат на расстоянии r, то, как показано в п. 97, $\frac{1}{r'}$ разлагается на сфере радиуса r в абсолютно сходящийся ряд тогда, когда

$$r<(\sqrt{2}-1)\{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Чтобы последнее условие заведомо выполнялось, мы потребуем, чтобы $\rho > a(\sqrt{2}+1)$, где a — наибольшая из полуосей эллипсоида. Тогда, согласно п. 97,

$$\frac{1}{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{r'^{n+1}} i^n P_n(i\cos\overline{\gamma}),$$

причем каждый член этого ряда по абсолютной величине меньше соответствующего члена некоторого абсолютно сходящегося степенного ряда с положительными коэффициентами; следовательно, этот ряд можно почленно интегрировать.

Итак, полученное разложение внешней эллипсоидальной функции заведомо справедливо в точках (ξ, η, ζ), расстояние от которых до начала координат превосходит наибольшую из полуосей эллипсоида, умноженную на $\sqrt{2}+1$.

§ 18. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПО ЕЕ ЗНАЧЕНИЯМ НА ЭЛЛИПСОИДЕ

289. Решение внутренней или внешней краевой задачи теории потенциала в случае эллипсоида основано на разложении краевой функции $f(x, y, z)$ по внутренним эллипсоидальным функциям G_n. Такое разложение, если оно вообще возможно, имеет вид

$$f(x, y, z) = \frac{1}{4\pi abc}\iint f(x, y, z)\,\overline{p}\,dS + \ldots + \sum \frac{G_n^m(x, y, z)\iint G_n^m \overline{p} f(x, y, z)\,dS}{\iint \{G_n^m\}^2\,\overline{p}\,dS}.$$

В том случае, когда этот ряд сходится равномерно, выражения коэффициентов получаются с помощью соотношения $\iint GG'\overline{p}\,dS = 0$ (см. п. 286).

При соблюдении известных условий сумма ряда в правой части представляет собой функцию, гармоническую внутри эллипсоида и принимающую на поверхности эллипсоида значения $f(x, y, z)$. Вне эллипсоида соответствующими свойствами будет обладать функция

$$\sum \frac{\mathfrak{G}_n^m(x, y, z)}{I_n^m(0)} \frac{\iint G_n^m \overline{p} f(x, y, z)\,dS}{\iint \{G_n^m\}^2\,\overline{p}\,dS}.$$

Рассмотрим частный случай, когда $f(x, y, z)$ представляет собой однородный многочлен степени p. Согласно п. 101, имеем

$$\iint H_n\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right) f(x, y, z)\,\overline{p}\,dS =$$
$$= 4\pi abc \frac{2^n n!}{(2n+1)!}\left\{1 + \frac{D^2}{2(2n+3)} + \frac{D^4}{2\cdot 4(2n+3)(2n+5)} + \ldots\right\}$$
$$H_n\left(a\frac{\partial}{\partial x}, b\frac{\partial}{\partial y}, c\frac{\partial}{\partial z}\right) f(x, y, z),$$

где в правой части, по выполнении указанных операций, x, y, z полагаются равными нулю.

При $p < n$ выражение справа равно нулю; то же имеет место и тогда, когда $p - n$ нечетно. Если же $p - n = 2m$, то в правой части исчезают все члены, кроме того, в который входит D^{2m}, и формула принимает вид

$$\iint H_n\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right) f(x, y, z)\, \overline{p}\, dS =$$
$$= 4\pi abc \frac{2^n n!}{(2n+1)!} \frac{1}{2^m m!\,(2n+3)\ldots(2n+2m+1)} \times$$
$$\times H_n\left(a\frac{\partial}{\partial x}, b\frac{\partial}{\partial y}, c\frac{\partial}{\partial z}\right) D^{2m} f(x, y, z).$$

Взяв в качестве $f(x, y, z)$ функцию $H_n\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)$, получим

$$\iint \left\{H_n\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)\right\}^2 \overline{p}\, dS =$$
$$= 4\pi abc \frac{2^n n!}{(2n+1)!} H_n\left(a\frac{\partial}{\partial x}, b\frac{\partial}{\partial y}, c\frac{\partial}{\partial z}\right) H_n\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right).$$

Таким образом мы получаем разложение $f(x. y, z)$ по функциям H_n^s:

$$f(x, y, z) =$$
$$= \sum\sum \frac{H_n^s\left(a\frac{\partial}{\partial x}, b\frac{\partial}{\partial y}, c\frac{\partial}{\partial z}\right) D^{2m} f(x, y, z)}{H_n^s\left(a\frac{\partial}{\partial x}, b\frac{\partial}{\partial y}, c\frac{\partial}{\partial z}\right) H_n^s\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)} \frac{H_n^s\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)}{2^m m!\,(2n+3)\ldots(2n+2m+1)}.$$

Если принять во внимание соотношение

$$G_n^m(x, y, z) = \left\{\begin{matrix} & a & bc & \\ 1 & b & ca & abc \\ & c & ab & \end{matrix}\right\} \prod(-\theta)\, H_n\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right),$$

то одновременно мы получаем разложение $f(x, y, z)$ по функциям G_n^s. При заданном n суммирование по s распространяется на все возможные значения от 1 до $2n+1$, по n суммирование распространяется на все значения вида $n = p - 2m$, где m — целое.

§ 19. СВЕДЁНИЕ К СФЕРОИДАЛЬНЫМ ФУНКЦИЯМ

290. Интересно рассмотреть, какой вид принимают эллипсоидальные функции в случае $a^2 = b^2$. Характеристические уравнения для функций первого класса запишем в такой форме:

$$[(b^2+\theta_1)(c^2+\theta_1) + (c^2+\theta_1)(a^2+\theta_1) + (a^2+\theta_1)(b^2+\theta_1)](\theta_1-\theta_2)\ldots(\theta_1-\theta_m) +$$
$$+ 4(a^2+\theta_1)(b^2+\theta_1)(c^2+\theta_1)\{(\theta_1-\theta_2)\ldots(\theta_1-\theta_m)+\ldots\} = 0,$$

остальные уравнения будут выглядеть так же. Мы замечаем, что при $a = b$ такому уравнению удовлетворяет $\theta_1 = -a^2$. Пусть σ из общего числа искомых θ, а именно $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\sigma$, равны $-a^2$, а остальные $m-\sigma$ принимают значения, лежащие между $-a^2$ и $-c^2$. Если мы обозначим

$$q_1 = \frac{b^2+\theta_1}{b^2-a^2}, \quad q_2 = \frac{b^2+\theta_2}{b^2-a^2}, \quad \ldots, \quad q_\sigma = \frac{b^2+\theta_\sigma}{b^2-a^2},$$

то

$$q_1 - 1 = \frac{a^2+\theta_1}{b^2-a^2}, \quad q_2 - 1 = \frac{a^2+\theta_2}{b^2-a^2}, \quad \ldots, \quad q_\sigma - 1 = \frac{a^2+\theta_\sigma}{b^2-a^2}.$$

Подставив выражения $a^2+\theta_1$, $b^2+\theta_1$, $a^2+\theta_2$, $b^2+\theta_2, \ldots$ через $q_1, q_2, \ldots$ в характеристические уравнения и положив $a^2 = b^2$, после упрощений получим

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1-1} + 4\left(\frac{1}{q_1-q_2} + \frac{1}{q_1-q_3} + \ldots + \frac{1}{q_1-q_\sigma}\right) = 0.$$

Обозначим

$$f(q)=(q-q_1)(q-q_2)\ldots(q-q_\sigma),$$

тогда

$$f'(q)=f(q)\left(\frac{1}{q-q_1}+\frac{1}{q-q_2}+\ldots+\frac{1}{q-q_\sigma}\right),$$

$$f''(q)=f'(q)\left(\frac{1}{q-q_1}+\ldots+\frac{1}{q-q_\sigma}\right)-f(q)\left\{\frac{1}{(q-q_1)^2}+\ldots+\frac{1}{(q-q_\sigma)^2}\right\}=$$

$$=f'(q)\left(\frac{1}{q-q_2}+\ldots+\frac{1}{q-q_\sigma}\right)-f(q)\left\{\frac{1}{(q-q_2)^2}+\ldots+\frac{1}{(q-q_\sigma)^2}\right\}+$$

$$+\frac{f(q)}{q-q_1}\left(\frac{1}{q-q_2}+\ldots+\frac{1}{q-q_\sigma}\right),$$

и при $q=q_1$ будем иметь

$$f''(q_1)=2f'(q_1)\left(\frac{1}{q_1-q_2}+\ldots+\frac{1}{q_1-q_\sigma}\right).$$

Таким образом, первые σ характеристических уравнений примут вид

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{q-1}+2\frac{f''(q)}{f'(q)}=0.$$

Это — уравнение степени σ относительно q, так же как уравнение $f(\sigma)=0$. Следовательно,

$$q(q-1)f''(q)+\frac{1}{2}(2q-1)f'(q)=\sigma^2 f(q).$$

Положив $q=\sin^2\chi$, мы приведем это уравнение к виду

$$\frac{d^2f}{d\chi^2}+4\sigma^2 f=0;$$

в рассматриваемом случае нам понадобится его частное решение $\cos 2\sigma\chi$.

Всякий множитель k пропорционален $x^2(-q)+y^2(1-q)$, а

$$x^2(-q)+y^2(1-q)=(x^2+y^2)\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}-q\right)=(x^2+y^2)(\sin^2\varphi-q),$$

поэтому произведение $k_1k_2\ldots k_\sigma$ пропорционально

$$(x^2+y^2)^\sigma(\sin^2\varphi-\sin^2\chi_1)\ldots(\sin^2\varphi-\sin^2\chi_\sigma),$$

где $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\sigma$ удовлетворяют уравнению $\cos 2\sigma\chi=0$.

Пусть остальные корни $\theta_{\sigma+1}, \theta_{\sigma+2}, \ldots, \theta_m$ удовлетворяют некоторому алгебраическому уравнению $g(\theta)=0$. Так же как и выше, можно показать, что каждый из этих корней должен удовлетворять уравнению

$$\frac{4\sigma+2}{a^2+\theta}+\frac{1}{c^2+\theta}+2\frac{g''(\theta)}{g'(\theta)}=0.$$

Положим

$$p=\frac{c^2+\theta}{c^2-a^2},\quad p-1=\frac{a^2+\theta}{c^2-a^2},$$

тогда функция g должна удовлетворять уравнению

$$-2p(1-p)\frac{d^2g}{dp^2}+[(4\sigma+3)p-1]\frac{dg}{dp}=0.$$

Его левая часть — многочлен той же степени, что и $g(p)$; поэтому для определения g мы получаем дифференциальное уравнение

$$-2p(1-p)\frac{d^2g}{dp^2}+\{(4\sigma+3)p-1\}\frac{dg}{dp}=(m-\sigma)(2m+2\sigma+1)g.$$

Пусть $p=\mu^2$; последнее уравнение, отнесенное к независимому переменному μ, примет вид

$$(1-\mu^2)\frac{d^2g}{d\mu^2}-2(2\sigma+1)\mu\frac{dg}{d\mu}+(2m+2\sigma+1)g=0.$$

Возьмем его частное решение

$$g=(1-\mu^2)^\sigma\frac{d^{2\sigma}}{d\mu^{2\sigma}}P_{2m}(\mu).$$

Множитель k оказывается пропорциональным $z^2-p(x^2+y^2+z^2)$, и $m-\sigma$ множителей такого вида дадут в произведении

$$(x^2+y^2+z^2)^{m-\sigma}\frac{d^{2\sigma}}{d\mu^{2\sigma}}P_{2m}(\mu).$$

Эллипсоидальная функция запишется тогда так:

$$(\xi^{2\sigma}+\eta^{2\sigma})(x^2+y^2+z^2)^{m-\sigma}\frac{d^{2\sigma}}{d\mu^{2\sigma}}P_{2m}(\mu).$$

Функции, принадлежащие другим классам, могут быть приведены к сферическим подобным же способом.

Общий вид, который приобретают эллипсоидальные функции в рассматриваемом случае, таков:

$$r^n\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\sigma\varphi\,(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}\sigma}\frac{d^\sigma}{d\mu^\sigma}P_n(\mu).$$

291. Посмотрим теперь, как в случае $a=b$ функции G_n^σ выражаются через H_n^σ. На гармонические функции оператор

$$a^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+c^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

воздействует так же, как $(c^2-a^2)\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$; поэтому

$$G_n^\sigma=\left\{1-\frac{c^2-a^2}{2(2n-1)}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\ldots\right\}H_m^\sigma.$$

В рассматриваемом случае H_n^σ, с точностью до постоянного множителя, выражается в виде

$$\cos\sigma\varphi\,\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi(z+i\sqrt{x^2+y^2}\cos\psi)^n\cos\sigma\psi\,d\psi.$$

Проделав указанные действия, получим

$$G_n^\sigma=\cos\sigma\varphi\int\limits_0^\pi P_n\left(\frac{z+i\sqrt{x^2+y^2}\cos\psi}{\sqrt{c^2-a^2}}\right)\cos\sigma\psi\,d\psi.$$

В случае вытянутого сфероида положим

$$x=\sqrt{c^2-a^2}\sqrt{r^2-1}\sin\theta\cos\varphi,\quad y=\sqrt{c^2-a^2}\sqrt{r^2-1}\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z=cr\cos\theta,$$

тогда

$$G_n^\sigma=\cos\sigma\psi\int\limits_0^\pi P_n(r\cos\theta+i\sqrt{r^2-1}\sin\theta\cos\psi)\cos\sigma\psi\,d\psi.$$

Воспользовавшись формулой

$$P_n(r\cos\theta+i\sqrt{r^2-1}\sin\theta\cos\psi)=$$
$$=P_n(r)P_n(\cos\theta)+2\sum\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(r)P_n^m(\cos\theta)\cos m\psi,$$

мы придем к заключению, что G_n^s пропорционально

$$\cos\sigma\varphi\, P_n^\sigma(r)\, P_n^\sigma(\cos\theta);$$

с нормальными формами такого рода мы имели дело в гл. X. Подобное же приведение возможно в случае сжатого сфероида.

В случае гармонических функций в области, внешней по отношению к вытянутому сфероиду, мы должны рассмотреть интеграл

$$I_n^\sigma = \int\limits_\varepsilon^\infty \frac{d\theta}{(\theta-\theta_1)^2 \ldots \sqrt{(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)}}.$$

Из чисел $\theta_1, \theta_2, \ldots$ первые σ равны $-a^2$; следовательно,

$$I_n^\sigma = \int\limits_\varepsilon^\infty \frac{d\theta}{(\theta+a^2)^\sigma(\theta-\theta_{\sigma+1})^2 \ldots (a^2+\theta)\sqrt{c^2+\theta}}.$$

Пусть

$$c^2+\theta = (c^2-a^2)\lambda^2, \quad a^2+\theta = (c^2-a^2)(\lambda^2-1),$$

тогда $(\lambda-\lambda_{\sigma+1})(\lambda-\lambda_{\sigma+2})\ldots$ пропорционально $\frac{d^\sigma}{d\lambda^\sigma}P_n(\lambda)$, а I_n^σ, с точностью до постоянного множителя, оказывается равным

$$\int\limits_r^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda^2-1)^{\sigma+1}\left[\frac{d^\sigma}{d\lambda^\sigma}P_n(\lambda)\right]^2}.$$

Произведение

$$\cos\sigma\varphi\, P_n^\sigma(r)\, P_n^\sigma(\cos\theta),$$

умноженное на I_n^σ, даст нормальную форму гармонической функции вне сфероида

$$\cos\sigma\varphi\, Q_n^\sigma(r)\, P_n^\sigma(\cos\theta).$$

§ 20. ВЫРАЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ЛАМЕ ЧЕРЕЗ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

292. В нашей книге мы не ставили своей целью изложить результаты, касающиеся выражения функций Ламе через эллиптические функции Якоби и Вейерштрасса. Частично этот материал изложен в «Курсе современного анализа» Уиттекера и Ватсона; там же приведены ссылки на работы Эрмита, Альфана, Линдеманна и др., посвященные этим вопросам. Заметим, что Альфан[1]) проинтегрировал уравнение Ламе в том случае, когда n есть целое число плюс $\frac{1}{2}$. Разложению функций в ряды по функциям Ламе посвящены мемуары Диксона[2]) и Линдеманна[3]). Следует заметить[4]), что функции Ламе степени $-\frac{1}{2}+pi$ могут служить для решения краевой задачи теории потенциала в случае области, ограниченной эллиптическим конусом, подобно тому, как конические функции Мелера применяются в случае круглого конуса.

[1]) Fonctions elliptiques, т II, 1888.
[2]) Proc. Lond. Math. Soc. (1), 35 (1902), 162.
[3]) Math. Ann., 19 (1882), 332.
[4]) См. Hobson, Proc. Lond. Math. Soc., 23 (1892), 231.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава IV. СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Глава V. ОБОБЩЕННЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Глава VI. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЛЕЖАНДРА

Глава VII. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В РЯДЫ ЛЕЖАНДРА И ЛАПЛАСА

Глава VIII. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЛЕЖАНДРА

Глава IX. НУЛИ ФУНКЦИЙ ЛЕЖАНДРА И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Глава X. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В ОБЛАСТЯХ, ОГРАНИЧЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЯМИ ВРАЩЕНИЯ

Глава XI. ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Редактор *Д. А. ВАСИЛЬКОВ* Технический редактор *Б. И. Корнилов*

Сдано в производство 15/VIII 1952 г. Подписано к печати 29/X 1952 г. А 07643.
Бумага $70\times108^1/_{16}$=14,9 бум. л. 40,8 печ. л. Уч.-издат. л. 46,3. Изд. № 1/1601
Цена 34 р. 40 к. Заказ 474.

16-я тип. Главполиграфиздата при Совете Министров СССР. Москва, Трехпрудный пер., 9.