

# ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

---

Под редакцией С. К. ГОДУНОВА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
Москва 1976

518  
Ч-67  
УДК 519.95

Численное решение многомерных задач газовой динамики. С. К. Годунов, А. В. Забродин, М. Я. Иванов, А. Н. Крайко, Г. П. Прокопов. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1976.

Монография посвящена описанию эффективного метода численного интегрирования квазилинейных систем уравнений гиперболического типа и изложению результатов решения широкого класса задач газовой динамики, аэродинамики и ряда других разделов механики сплошных сред, которые были получены при помощи этого метода.

Одним из существенных требований, предъявляемых к современным численным методам, является адаптируемость алгоритмов к особенностям рассчитываемых течений. Отсюда возникает необходимость использования нерегулярных подвижных сеток, выделения поверхностей разрыва, удовлетворения граничным условиям различных типов и т. п. Все эти вопросы, вместе с традиционными требованиями, предъявляемыми к разностным схемам, освещаются в предлагаемой монографии.

Монография предназначена для широкого круга научных работников, студентов и аспирантов, специализирующихся в области численных методов и их применения к задачам механики сплошных сред.

Илл. 166, табл. 5, библ. 164 назв.

Годунов Сергей Константинович, Забродин Алексей Валерьевич,  
Иванов Михаил Яковлевич, Крайко Александр Николаевич,  
Прокопов Геннадий Павлович

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ  
ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

М., 1976 г., 400 стр. с илл.

Редактор Н. П. Рябенькая  
Технический редактор В. Н. Кондакова  
Корректор Т. С. Плетнева

Сдано в набор 30/XII 1975 г. Подписано к печати 4/V 1976 г.  
Бумага 60×90<sup>1/16</sup>. Физ. печ. л. 25. Условн. печ. л. 25. Уч.-  
изд. л. 25-16. Тираж 6500 экз. Т-05686. Цена книги 1 р. 75 к.  
Заказ № 3709.

Издательство «Наука»  
Главная редакция физико-математической литературы  
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Первая Образцовая типография  
имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном  
комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии  
и книжной торговли. Москва, М-54, Валовая, 28

Отпечатано во 2-ой тип изд-ва «Наука». Москва, Г-99, Шубинский, 10. Зак. 634.

Ч 20204—069  
053 (02)-76 61-76

© Главная редакция  
физико-математической литературы  
издательства «Наука», 1976

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	9
Список основных обозначений . . . . .	14
Часть первая. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДА . . . . .	15
Глава I. Построение разностных схем для линейных гиперболических систем уравнений . . . . .	15
§ 1. Одномерная акустика . . . . .	15
Уравнения акустики с одной пространственной переменной. Законы сохранения. Формулы общего решения и решения с заданными начальными данными. Задача о распаде разрыва.	
§ 2. Разностная схема . . . . .	20
Кусочно-постоянная аппроксимация начальных данных. Построение решения с помощью распадов разрывов. Усреднение и законы сохранения. Разностные формулы. Построение той же схемы с помощью соотношений на характеристиках.	
§ 3. Аппроксимация и устойчивость схемы . . . . .	25
Проверка аппроксимации схемы без граничных условий. Исследование устойчивости методом Фурье. Энергетическое неравенство. Вывод условия устойчивости для неограниченной области.	
§ 4. Численные примеры . . . . .	32
Неустойчивость схемы при числе Куранта $v > 1$ . Размазывание разрывов при $v < 1$ . Разностная вязкость. Оценка зоны размазывания. Монотонность схемы. Плавный характер размазывания в сравнении с осцилляциями в схеме второго порядка.	
§ 5. Схема для смешанной задачи . . . . .	40
Постановка граничных условий. Граничный распад разрыва. Модификация схемы на случай смешанной задачи. Диссипативные граничные условия обеспечивают устойчивость.	
§ 6. Исследование точности схемы на границах . . . . .	44
Построение решения разностной задачи в случае линейных начальных данных и граничных условий. Обоснование первого порядка точности схемы с граничными условиями. Разностный эффект на контактной границе. Обоснование точности схемы на контактной границе.	
§ 7. Двумерная акустика . . . . .	54
Уравнения звуковых волн, зависящих от двух пространственных переменных. Прямоугольная разностная сетка. Разностные законы сохранения. Расчет вспомогательных («больших») величин с помощью распадов разрыва. Постановка граничных условий. Расчет «больших» величин на границах.	
§ 8. Устойчивость двумерной схемы для акустики . . . . .	59
Закон сохранения энергии. Сеточная норма функций. Расщепление двумерной схемы на «одномерные». Достаточное условие устойчивости схемы в энергетической норме при диссипативных граничных условиях. Доказательство его необходимости методом Фурье.	

§ 9. Явная одномерная схема для произвольной гиперболической системы . . . . .	65
Симметрические системы. Интеграл энергии. Приведение системы к каноническому виду. Разностная схема. Основное неравенство — разностный аналог интеграла энергии. Условие устойчивости. Корректная постановка граничных условий. Диссипативные граничные условия обеспечивают устойчивость схемы при достаточно малом шаге. Конструкция схемы для несимметрической гиперболической системы. Модификация схемы на случай переменных коэффициентов.	
§ 10. Явная двумерная схема для произвольной гиперболической системы . . . . .	75
Постановка смешанной задачи с диссипативными граничными условиями. Разностная схема на прямоугольной сетке. Основное неравенство — аналог интеграла энергии. Достаточное условие устойчивости схемы без граничных условий и с диссипативными граничными условиями. Условие устойчивости для параллелограммной сетки. Двумерные уравнения линейной теории упругости.	
§ 11. Неявные разностные схемы . . . . .	87
Общая конструкция неявных схем, основанных на интегральных законах сохранения (метод предиктор-корректор). Неявная схема для простейшего модельного уравнения. Исследование устойчивости методом Фурье. Сглаживающее усреднение. Реализация граничных условий. Перенесение схемы на систему уравнений с одной пространственной переменной. Прогонка как метод решения уравнений на промежуточном слое. Обобщение схемы на случай двух пространственных переменных.	
<b>Г л а в а II. Квазилинейные гиперболические системы с двумя переменными . . . . .</b>	<b>100</b>
§ 12. Нестационарная одномерная газовая динамика . . . . .	100
Система нестационарных уравнений газовой динамики с одной пространственной переменной. Уравнение состояния. Законы сохранения массы, импульса и энергии. Соотношения на разрывах. Закон сохранения энтропии на гладких решениях и возрастания на ударных волнах. Условия Бете — Вейля для уравнения состояния. Понятие обобщенного решения.	
§ 13. Задача о распаде разрыва . . . . .	105
Постановка задачи. Схематическое описание возможных конфигураций. Сведение к алгебраическому уравнению для давления на контактном разрыве. Итерационный процесс для его решения. Свойства уравнения и применение метода касательных Ньютона. Досчит величин, описывающих конфигурацию, возникающую при распаде разрыва. Пример неоднозначного решения задачи о распаде разрыва без привлечения закона возрастания энтропии.	
§ 14. Схема для одномерных задач газовой динамики . . . . .	117
Общее описание схемы. Разностные законы сохранения в случае «плоской» геометрии. Использование подвижных сеток и соответствующая модификация разностной схемы. Осесимметричная геометрия, дифференциальная и разностная форма законов сохранения. Уравнения газовой динамики в форме «каналового» приближения.	
§ 15. Граничные условия для одномерных задач . . . . .	124
Системе разностных уравнений требуется задание потоков массы, импульса и энергии через границы. Модификация задачи о распаде разрыва как способ реализации граничных условий в случаях: 1° непроницаемая стена, 2° внешняя ударная волна, 3° свободная граница. Реализация граничных условий при сверхзвуковом режиме на «входе» (4°) или на «выходе» (5°) потока газа. Организация расчета на внутренних границах между счетными областями	
§ 16. Аппроксимация и устойчивость одномерной схемы . . . . .	129
Линеаризованная модель нестационарных уравнений одномерной газовой динамики и разностной схемы. «Звуковой» распад разрыва. Условие устойчивости линеаризованной модели схемы без граничных условий. Перенесение критерия устойчивости на нелинейную схему. Аппроксимация линеаризованных уравнений. Разностная вязкость.	

§ 17. Иллюстрация одномерной схемы для нестационарных задач . . . . .	134
Расчет взаимодействия ударных волн, образующихся при распаде разрыва и отражении от твердой стены. Структура точного решения. Результаты группового расчета с «размазыванием» разрывов. Описание тактики расчета с выделением некоторых из разрывов.	
§ 18. Двумерные стационарные сверхзвуковые течения . . . . .	140
Уравнения стационарного сверхзвукового течения в форме интегральных законов сохранения. Условие постоянства полной энтальпии. Разностные законы сохранения. Формулы для газодинамических величин. Проведение расчета на границах области. Условие устойчивости схемы.	
§ 19. Задача о взаимодействии двух равномерных сверхзвуковых потоков . . . . .	147
Различные схемы взаимодействия. Приближенные формулы для взаимодействия потоков со слабо отличающимися параметрами. Формулы, пригодные для расчета взаимодействия в случае интенсивных волн разрежения.	
§ 20. Примеры, иллюстрирующие точность стационарной схемы . . . . .	153
Расчет косого скачка уплотнения и центрированной волны разрежения. Течение в осесимметричном сопле Лаваля и истечение недорасширенной сверхзвуковой струи в затопленное пространство	
§ 21. Неявная одномерная схема для квазилинейных задач . . . . .	159
Интегральные законы сохранения и квазилинейные уравнения. Общее описание схемы с пересчетом. Система неявных уравнений на промежуточном слое. Реализация граничных условий. Явный счет на границах счетных областей. Учет подвижности сетки.	
Глава III. Построение разностных схем для решения многомерных задач . . . . .	168
§ 22. Законы сохранения и уравнения газовой динамики . . . . .	168
Интегральная форма законов сохранения массы, импульса и энергии в механике сплошной среды. Соответствующие дифференциальные уравнения. Соотношения на разрывах. Различные формы уравнений нестационарной газовой динамики в декартовых и цилиндрических координатах. Симметризация уравнений математической физики и, в частности, уравнений газовой динамики. Дополнительный закон сохранения для симметрических систем уравнений.	
§ 23. Подвижные сетки и простейшие способы их построения . . . . .	176
Дискретизация задачи и общая схема расчета. Простейшая сетка с движением границ по неподвижным лучам. Рассстановка узлов сетки вдоль лучей. Расчет сетки в области с криволинейными границами по интерполяционным формулам.	
§ 24. Расчетные формулы схемы для нестационарных двумерных задач	184
Разностные законы сохранения для произвольной сетки. Расчет потоков через боковые грани ячейки. Проведение расчета на внешних границах области. Движение внешних границ. Изменения в схеме для осесимметричных задач.	
§ 25. Устойчивость и выбор шага по времени . . . . .	193
Схема расчета двумерных нестационарных газодинамических задач на прямоугольной сетке. Линеаризованная модель нестационарных уравнений газовой динамики. Критерий устойчивости линеаризованной модели. Использование его в квазилинейных задачах нестационарной двумерной газовой динамики. Линеаризованные модели для стационарной задачи с двумя и тремя переменными. Критерии устойчивости разностных схем для стационарных сверхзвуковых течений.	
§ 26. Схема для стационарных пространственных сверхзвуковых течений	200
Конструкция разностной сетки. Разностные законы сохранения. Определение «больших» величин из задач о взаимодействии двух потоков. Условие устойчивости схемы.	
§ 27. Схема для нестационарных пространственных течений . . . . .	207
Неподвижная пространственная сетка. Разностная форма законов сохранения. Условие устойчивости схемы.	

<b>Г л а в а IV. Решение газодинамических задач в произвольных криволинейных координатах . . . . .</b>	<b>211</b>
<b>§ 28. Формализация способов описания картины рассчитываемого течения . . . . .</b>	<b>211</b>
Использование априорной информации о решении при построении вычислительного алгоритма. Связь криволинейной системы координат с конфигурацией особенностей решения. Формализация описания картины течения посредством понятий: счетная область, счетная граница, образ счетной области, образ счетной границы.	
<b>§ 29. Нестационарная система координат, следящая за движением границ. Выбор переменных . . . . .</b>	<b>213</b>
Локальная криволинейная система координат. Выбор неизвестных функций для описания движения и параметров, задающих локальную криволинейную систему координат.	
<b>§ 30. Уравнения газовой динамики в форме законов сохранения для криволинейной системы координат . . . . .</b>	<b>216</b>
Построение интегральной системы уравнений газовой динамики в локальном базисе.	
<b>§ 31. Вычисление координат граничных точек в процессе движения . . . . .</b>	<b>222</b>
Способ задания положения счетных границ и гидродинамических величин, к ним относящихся, на данном временном шаге. Построение алгоритма движения счетных границ и определение их положения на следующий временной шаг.	
<b>§ 32. Уравнения для построения сеток . . . . .</b>	<b>227</b>
Математическая формализация задачи построения разностной сетки. Алгоритм I, использующий «обратные» уравнения Лапласа. Обеспечение его большей гибкости введением переменных параметров. Использование конформных и квазиконформных отображений (алгоритм II). Построение сеток, близких к ортогональным (алгоритм III).	
<b>§ 33. Численная реализация алгоритмов построения сеток . . . . .</b>	<b>235</b>
Разностные уравнения, возникающие при численном решении систем уравнений, отвечающих алгоритмам I и II. Простейшие итерационные процессы для их решения. Численная реализация алгоритма III посредством метода переменных направлений. Оптимизация итерационных параметров. Некоторые примеры, иллюстрирующие алгоритмы построения сеток.	
<b>§ 34. Система разностных уравнений для нестационарных задач газовой динамики в локальной криволинейной системе координат . . . . .</b>	<b>252</b>
Построение в пространстве $x, y, t$ элементарного объема $V$ . Замена в интегральной системе уравнений газовой динамики, записанной в локальном базисе, произвольной области интегрирования на элементарный объем $V$ . Дискретизация полученных интегральных соотношений и построение системы разностных уравнений.	
<b>§ 35. Расчет гидродинамических величин на промежуточном слое . . . . .</b>	<b>271</b>
Получение явной и неявной схем в зависимости от способа вычисления гидродинамических величин на промежуточном слое. Интерпретация плоского распада разрыва в случае, когда два состояния газа разделены криволинейной границей. Неявная схема. Построение на основе системы уравнений, записанной в локальных криволинейных координатах, двух систем, каждая из которых зависит от одной пространственной переменной. Линеаризация этих систем и построение на их основе неявной разностной схемы.	
<b>§ 36 Некоторые замечания о принципах конструирования методики . . . . .</b>	<b>277</b>
Требования к разностному алгоритму, сложившиеся на основе опыта эксплуатации методики. Подходы и тактика решения задач.	

<b>Часть вторая. ИЛЛЮСТРАЦИЯ ВОЗМОЖНОСТЕЙ МЕТОДА . . . . .</b>	<b>283</b>
<b>Глава V. Задачи нестационарной газовой динамики . . . . .</b>	<b>283</b>
<b>§ 37. Дифракция ударной волны на двумерных телах . . . . .</b>	<b>283</b>
Дифракция плоской ударной волны (с равномерным сверхзвуковым и дозвуковым потоком за ней) на ромбовидном профиле, цилиндре, поставленном перпендикулярно плоскости течения, и на сфере. Развитие течения во времени и установление стационарной картины обтекания.	
<b>§ 38. Взаимодействие сферического взрыва с плоской поверхностью . . . . .</b>	<b>288</b>
Возникновение пространственного течения в результате взаимодействия сферически симметричного потока, образовавшегося при точечном взрыве, с плоскостью. Эволюция отражения ударной волны от регулярного к нерегулярному («маховскому»).	
<b>§ 39. Взрыв несферического заряда . . . . .</b>	<b>291</b>
Идеализация задачи, заменяющая область выделения энергии при взрыве областью покоящегося газа с повышенным давлением. Использование подвижной разностной сетки, выделяющей головную ударную волну и контактную поверхность. Образование вторичной ударной волны. Влияние формы заряда.	
<b>§ 40. Некоторые задачи динамики нестационарных течений в каналах . . . . .</b>	<b>295</b>
Течение в ударной трубе переменного сечения. Развитие течения в канале воздухозаборника со сверхзвуковым потоком на входе, «замыкающим» скака уплотнения вблизи сечения минимальной площади и дозвуковым потоком на выходе при изменении параметров в сечении входа или выхода. Динамические процессы в каналах, частично разделенных продольными перегородками. Отражение плоских волн от дозвуковой и трансзвуковой части сопла Лаваля.	
<b>§ 41. Распространение ударной волны по проводящему газу в круглой трубе при наличии меридионального магнитного поля . . . . .</b>	<b>305</b>
Использование подвижной сетки, связанной с ударной волной. Эффект ускорения ударной волны, обусловленный двумерным характером течения. Сопоставление с выводами одномерного приближения.	
<b>§ 42. Расчет соударения металлических пластин (сварка взрывом) . . . . .</b>	<b>309</b>
Постановка задачи. Выбор тактики расчета. Анализ полученных результатов	
<b>Глава VI. Расчет смешанных течений методом установления . . . . .</b>	<b>314</b>
<b>§ 43. Прямая задача теории двумерных сопел Лаваля . . . . .</b>	<b>315</b>
Постановка задачи в случае сопла, примыкающего к полубесконечной цилиндрической трубе, и для сопла с «замкнутым» контуром. Течение в соплах различных типов (классическом сопле Лаваля и в сопле с центральным телом). Расчет закрученного и неизэнтропического потока в соплах и влияние эффектов закрутки и переменности энтропии на форму звуковой линии. Решение прямой задачи о течении проводящего газа в осесимметричном сопле Лаваля при наличии меридионального магнитного поля.	
<b>§ 44. Смешанные течения в плоских решетках . . . . .</b>	<b>321</b>
Установление стационарной картины течения со сходом потока с задней кромки без использования в процессе расчета условия Чаплыгина—Жуковского. Применение криволинейных сеток.	
<b>§ 45. Истечение перерасширенной струи в затопленное пространство . . . . .</b>	<b>326</b>
Случай нерегулярного отражения скакча, идущего от кромки сопла, с образованием «диска Маха». Применение «полуподвижной» разностной сетки. Сравнение результатов, полученных при различном числе расчетных ячеек, сопоставление с результатами эксперимента.	
<b>§ 46. «Нормальное» соударение сверхзвуковой струи со стенкой . . . . .</b>	<b>329</b>
Различные схемы течения. Подвижная сетка, выделяющая границу струи. Примеры расчета.	
<b>§ 47. Обтекание плоских и осесимметричных тел . . . . .</b>	<b>332</b>
Обтекание кругового цилиндра, помещенного нормально плоскости течения, и комбинации конус—цилиндр равномерным сверхзвуковым потоком с образо-	

ванием местных дозвуковых зон. Течение около плоских профилей при сверхзвуковой скорости набегающего потока. Некоторые результаты расчета звукового обтекания тел. Расчет околосзвукового обтекания осесимметричных тел типа мотогондолы воздушно реактивного двигателя.

§ 48. Пространственное обтекание тел околосзвуковым потоком . . . . .	338
Остроконечное тело с эллиптическим поперечным сечением, обтекаемое звуковым потоком под углом атаки. Околозвуковое и звуковое течения около комбинации конус—цилиндр, помещенной в поток под углом атаки.	
§ 49. Прямая задача теории пространственного сопла Лаваля . . . . .	339
Пространственные сопла с одной и с двумя плоскостями симметрии. Сравнение результатов расчета трансзвукового течения в соплах с поперечным сечением в форме эллипса при различном отношении длин полуосей. Несимметрия потока, вызванная несимметрией формы сопла.	
Глава VII. Стационарные сверхзвуковые течения . . . . .	346
§ 50. Плоские и осесимметричные течения идеального газа . . . . .	346
Недорасширенные струи, истекающие в затопленное пространство при больших степенях нерасчетности, когда часть струи, разворачиваясь около кромки сопла, течет в направлении, почти обратном первоначальному. Кольцевые и веерные струи. Примеры расчета течения в плоских воздухозаборниках.	
§ 51. Течение в расширяющейся части пространственных сопел . . . . .	356
Течение в расширяющейся части сопел с эллиптическим и с почти квадратным поперечным сечением. Пространственное течение в расширяющейся части осесимметричного сопла, обусловленное несимметрией течения в начальном сечении.	
§ 52. Истечение недорасширенных струй из сопел с некруговым выходным сечением . . . . .	361
Истечение сверхзвуковой струи из сопел с эллиптическим и с почти квадратным выходным сечением. Эффект изменения ориентации «большой оси» поперечного сечения струи при удалении от среза сопла.	
§ 53. Боковое взаимодействие сверхзвуковых осесимметричных струй друг с другом и с твердыми поверхностями . . . . .	366
Взаимодействие недорасширенных осесимметричных струй с плоскостями, параллельными и не параллельными осям сопла. Взаимодействие между одинаковыми «параллельными» струями, истекающими из сопел, оси которых лежат в одной плоскости. Боковое взаимодействие струи с цилиндрической поверхностью, параллельной оси сопла	
§ 54. Обтекание конических тел . . . . .	375
Использование процесса установления по переменной $r$ сферической системы координат. Примеры расчета обтекания кругового, эллиптического и почти пирамидального конусов, треугольного и V-образного крыла и комбинации кругового конуса с треугольным крылом.	
§ 55. Сверхзвуковое обтекание остроконечных пространственных конфигураций . . . . .	387
Сравнение обтекания эквивалентных (в смысле распределения площади поперечного сечения) пространственных тел. Обтекание тела типа летательного аппарата.	
Заключение . . . . .	390
Литература . . . . .	393

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В книге излагаются теоретические основы эффективного метода численного интегрирования квазилинейных систем уравнений в частных производных гиперболического типа и приводятся примеры решения этим методом широкого круга задач нестационарной газовой динамики, внешней и внутренней аэrodинамики и некоторых других разделов механики сплошной среды.

В основе метода, который будет здесь описан, лежат идеи, первоначально изложенные в публикациях, появившихся в печати в 1957—1961 гг. [29], [5], [30], [37]. Этих идей, на наш взгляд, две. Первая идея состоит в использовании для построения разностной схемы точных решений уравнений с кусочно-постоянными начальными данными. Для гиперболической системы такие решения распадаются на совокупности независимых и сравнительно просто рассчитываемых деталей — «распадов разрывов». Вторая идея — это использование гибких и зачастую двигающихся, деформирующихся разностных сеток, связанных с контактными границами областей, ударными волнами и тому подобными линиями, выделяемыми при расчете изначально. При этом ячейки сетки, вообще говоря, не связаны с движущимися частицами вещества.

Использование таких гибких сеток предъявляет к разностной схеме чрезвычайно жесткие требования, и схема «распадов разрывов», как показала многолетняя практика, этим требованиям удовлетворяет.

В этой книге речь будет идти не только и не столько о разностной схеме, сколько о структуре вычислительного процесса решения сложных задач.

Указанные принципы построения вычислительного алгоритма оказались чрезвычайно плодотворными, получили широкое распространение (особенно в последние 5—7 лет), были перенесены на гиперболические системы, отличные от рассмотренных первоначально, и подверглись значительной модернизации и усовершенствованию, что нашло отражение в многочисленных статьях, опубликованных в различных периодических изданиях. Одним из существенных достоинств метода является его применимость

при расчете процессов установления. Использование установления позволяет решить смешанные (эллиптико-гиперболические) задачи о трансзвуковых течениях.

Метод привлекает внимание все более широкого круга специалистов, вынужденных знакомиться с его основами по отрывочным, а подчас и устаревшим публикациям, что, безусловно, затрудняет проведение соответствующих исследований или снижает их уровень.

Отрезок времени (более 20 лет), прошедший с момента создания метода, опробование метода на многих задачах, которые были с его помощью решены и которые представляют, кроме того, и большой самостоятельный интерес, вполне оправдывают, как нам кажется, выпуск этой монографии.

Авторы монографии являются либо создателями метода, либо вложили много труда в его дальнейшее развитие и применение.

Книга разделена на две части. В первой части, состоящей из четырех глав, рассмотрены теоретические основы метода.

Глава I посвящена описанию принципов построения используемых нами схем для модельных симметрических гиперболических систем. Обсуждаются вопросы аппроксимации, условия устойчивости и их физическая интерпретация, постановка граничных условий. Мы ограничиваемся разбором только случая диссипативных граничных условий, теория которых наиболее прозрачна.

В главе II, посвященной квазилинейным гиперболическим системам с двумя независимыми переменными, на примере уравнений одномерной нестационарной газовой динамики и двумерных стационарных сверхзвуковых течений осуществляется построение вычислительной схемы. Показывается, как исследование линейных модельных задач можно использовать для получения суждения о свойствах расчетной схемы и в более общих случаях.

Дальнейшие обобщения идей метода идут в направлении роста числа независимых переменных. Этим обобщениям (двумерные и трехмерные нестационарные и стационарные сверхзвуковые течения) посвящена глава III.

В главе IV рассматриваются вопросы, связанные с решением газодинамических задач в произвольных криволинейных координатах с использованием подвижных сеток. Описываются некоторые алгоритмы построения сеток в случае сложных расчетных областей, системы уравнений в криволинейных координатах и схемы расчета, адаптирующиеся к конкретным задачам и к их особенностям.

Во второй части книги, состоящей из трех глав, демонстрируются возможности метода на примере решения широкого круга задач двумерной и трехмерной стационарной и нестационарной газовой динамики.

В числе примеров нестационарных газодинамических задач в главе V будут рассмотрены: дифракция ударной волны на телах, взрыв несферического заряда, взаимодействие сферического взрыва с плоскостью, распространение ударной волны по проводящему газу в круглой трубе при наличии меридионального магнитного поля, динамика течения газа в каналах, отражение плоских волн от дозвуковой части сопла Лаваля, а также задача о «сварке взрывом», решаемая в гидродинамическом приближении.

Возможности решения смешанных задач (с использованием процесса установления), которым посвящена глава VI, будут проиллюстрированы результатами расчета прямой задачи теории сопла Лаваля в двумерном и в пространственном случаях расчета смешанных течений в плоских решетках, задачами об истечении недорасширенной и перерасширенной струи, содержащей диск Маха, о взаимодействии сверхзвуковой струи со стенкой, а также широким кругом двумерных и пространственных задач трансзвукового, звукового и сверхзвукового обтекания тел.

Примеры расчета чисто сверхзвуковых стационарных течений, представленные в главе VII, будут касаться течений в пространственных соплах и струях, обтекания различных конических и пространственных остроконечных тел, а также «бокового» взаимодействия сверхзвуковых струй друг с другом и со стенками различной формы.

Мы выбрали здесь обзорный характер изложения, так как ставим своей целью рассказать о гибкости описываемой методики и об удобстве ее приспособления к различным конкретным условиям. На самом деле решение конкретной задачи каждого нового типа состоит зачастую в нескольких, а то и в десятках расчетов с различным выбором числа и распределения точек, с различным разбиением на счетные области. После этого схожие по типу задачи решаются уже почти автоматически. Мы не могли здесь останавливаться на описании всех деталей этой работы, а привели ее результаты и приемы решения наиболее распространенных задач.

Из этого обзора содержания книги видно, что мы не ставили своей целью описание и сравнение различных методик и разностных схем газодинамических расчетов, а хотели только собрать в одном месте и связно изложить современное состояние лишь одного метода, который мы разрабатывали и которым решали многочисленные и разнообразные задачи.

Разные части книги писались разными авторами. §§ 1—12 написаны С. К. Годуновым и Г. П. Прокоповым, §§ 13—17, 21—25 и 32—33—Г. П. Прокоповым, §§ 28—31, 34—36, 42—А. В. Забродиным, М. Я. Иванов и А. Н. Крайко написали §§ 18—20, 26, 27 в первой части книги и вторую ее часть (кроме § 42). Это, естественно, наложило некоторый отпечаток на характер изло-

жения. Надо сказать, что собранные воедино результаты многолетней работы и для авторов осветили некоторые новые аспекты на, казалось бы, хорошо известный им предмет.

Не все вопросы изложены с одинаковой степенью подробности. Так, весьма кратко описаны принципы построения криволинейных и подвижных сеток. Дело в том, что, несмотря на длительное время разработки этого вопроса, у авторов до сих пор нет окончательной точки зрения на принципы, которые должны быть положены в основу проектирования расчетных методик, а используемые методы построения сеток, несмотря на их многообразие, носят зачастую «фельдшерский» характер, и мы не всегда решаемся их рекомендовать. Нам кажется, что эти обстоятельства, явно подчеркнутые, должны способствовать привлечению научной молодежи к решению поставленных вопросов и, следовательно, к дальнейшему совершенствованию метода.

Мы предполагаем, что читатель настоящей книги знаком с теорией гиперболических дифференциальных уравнений, например, в объеме, изложенном в книге [34], и с теорией разностных схем в объеме последней главы книги [34] и книги [40].

Предполагается также, что читатель знаком с газовой динамикой по какому-нибудь из известных курсов, например [88], хотя все или почти все основные факты, на которые мы будем опираться, изложены в предлагаемой монографии.

Понимая несколько узкий характер нашей монографии, посвященной изложению современного состояния только одного из большого числа распространенных в настоящее время методов газодинамических расчетов, мы ни в коей мере не претендуем на то, чтобы предлагаемая книга служила как пособие для изучения численных методов газовой динамики. Читатели, интересующиеся современным состоянием этих методов, должнызнакомиться с ними по обширной литературе. Среди алгоритмов более высокого порядка точности для задач, связанных с исследованием стационарных газодинамических течений, следует прежде всего назвать метод, изложенный в монографии [4]. В монографии [91] имеется подробная библиография работ, посвященных проблеме обтекания тупых тел. Достаточно полное представление о многочисленных методах решения задач нестационарной газовой динамики можно получить, ознакомившись с работами, приведенными в списке литературы (см., например, [7], [24], [28], [51], [100], [118], [122] и др.).

При создании и доводке метода, которому посвящена книга, нами руководили наши учителя, помогали товарищи, ученики и сотрудники. Их роль мы постарались отразить в тексте или в соответствующих ссылках.

Вся работа по созданию как одномерного, так и двумерного вариантов описываемого здесь метода проходила под наблюдение-

нием и при активном участии М. В. Келдыша, на семинарах которого детально обсуждались результаты последовательных этапов работы. Вопросы, связанные с обобщением метода на стационарные течения, а также значительная часть результатов, составивших вторую часть книги, докладывались и обсуждались на семинаре, руководимом Г. Г. Чёрным, влияние которого во многом определяло направление соответствующих исследований.

По мнению авторов, монография будет интересна широкому кругу научных работников, студентов и аспирантов, специализирующихся в области численных методов и их применения к задачам механики сплошной среды.

*С. К. Годунов, А. В. Забродин, М. Я. Иванов,  
А. Н. Крайко, Г. П. Прокопов*

## **СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ**

$t$  — время

$x, y, z$  — декартовы пространственные координаты

$x, r, \varphi$  — цилиндрические координаты

$\rho$  — плотность среды

$p$  — давление

$q$  — вектор скорости среды

$u, v, w$  — компоненты вектора скорости

$R, P, U, V, W$  — вспомогательные («большие») величины

$\kappa$  — показатель адиабаты

$c$  — скорость звука

$\varepsilon$  — внутренняя энергия единицы массы

$h$  — шаг одномерной разностной сетки

$h_x, h_y, h_z$  — шаги пространственной сетки

$\tau$  — шаг по времени

$\tau_x, \tau_y, \tau_z$  — шаги по времени «одномерных» схем

$\nu$  — число Куранта

$j, k$  — целочисленные индексы узлов сетки  $j=0, 1, \dots, J; k=0, 1, \dots, K$

$j-1/2, k-1/2$  — полуцелые индексы ячеек сетки

# Часть первая

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДА

---

### Г л а в а I

#### ПОСТРОЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

##### § 1. Одномерная акустика

Уравнения акустики с одной пространственной переменной. Законы сохранения. Формулы общего решения и решения с заданными начальными данными. Задача о распаде разрыва.

Начнем с рассмотрения системы дифференциальных уравнений, которая описывает распространение плоских звуковых волн. Она имеет вид \*)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} &= 0.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Здесь  $u$  — скорость среды, по которой распространяется звук,  $p$  — давление в этой среде (говоря точнее, малые отклонения скорости и давления от их значений в невозмущенной среде, вызванные распространением звуковых волн). Постоянные  $\rho_0$ ,  $c_0$  связаны со свойствами среды:  $\rho_0$  — ее плотность,  $c_0^2$  характеризует сжимаемость среды.

Интегрируя уравнения (1.1) по произвольной области с границей  $\Gamma$  на плоскости переменных  $x$ ,  $t$  и переходя к контурным интегралам, получим интегральные равенства

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} \rho_0 u \, dx - p \, dt &= 0, \\ \oint_{\Gamma} \frac{p}{c_0^2} \, dx - \rho_0 u \, dt &= 0.\end{aligned}\tag{1.2}$$

---

\*) С выводом уравнений акустики можно ознакомиться, например, по книге [88], § 63, или по первым двум главам книги [76].

Первое из них представляет закон сохранения количества движения ( $\int \rho_0 u dx$  — количество движения,  $\int p dt$  — импульс силы), второе — закон сохранения массы, так как в рассматриваемом акустическом случае  $p = c_0^2 (\rho - \rho_0)$  в силу уравнения состояния.

В дальнейшем будет полезен также закон сохранения энергии акустических волн, который получается следующим образом. Умножив первое из уравнений (1.1) на  $\rho_0 u$ , а второе — на  $p / (\rho_0 c_0^2)$  и сложив результаты, приходим к тождеству, выполненному на решениях уравнений акустики:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (pu) = 0. \quad (1.3)$$

Из него следует, что для любого замкнутого контура имеет место интегральное равенство

$$\oint_{\Gamma} \left( \rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2} \right) dx - pu dt = 0, \quad (1.4)$$

которое мы и будем называть законом сохранения энергии акустических волн \*).

Обычно уравнения механики сплошной среды сначала выводятся в виде интегральных законов сохранения и лишь затем из них получаются дифференциальные уравнения.

Вернемся снова к акустической системе (1.1). Несложным преобразованием ее можно привести к простейшему виду, который в дальнейшем мы будем называть каноническим. Именно, умножая второе уравнение на  $1 / (\rho_0 c_0)$ , а затем складывая с первым и вычитая из него, получаем два таких уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( u + \frac{p}{\rho_0 c_0} \right) + c_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( u + \frac{p}{\rho_0 c_0} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( u - \frac{p}{\rho_0 c_0} \right) - c_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( u - \frac{p}{\rho_0 c_0} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Если ввести обозначения

$$u + \frac{p}{\rho_0 c_0} = Y, \quad u - \frac{p}{\rho_0 c_0} = Z, \quad (1.6)$$

то эти уравнения записываются в виде

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + c_0 \frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial t} - c_0 \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \quad (1.7)$$

\*). По поводу закона сохранения энергии в акустике см., например, § 64 из книги [88] или гл. IV из [76]. Интересна также дискуссия по этому вопросу в [114], стр. 249—256.

который позволяет сразу выписать их общее решение:

$$Y = f(x - c_0 t), \quad Z = g(x + c_0 t).$$

Здесь  $f$  и  $g$ —произвольные функции, которые должны быть дифференцируемы для того, чтобы можно было говорить о выполнении равенств (1.7).

Выражая из (1.6) величины  $u$  и  $p$  через  $Y$ ,  $Z$ , получим представление общего решения уравнений распространения звука (1.1):

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} [f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)], \\ p &= \frac{\rho_0 c_0}{2} [f(x - c_0 t) - g(x + c_0 t)]. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Величины  $Y$ ,  $Z$ , определенные формулами (1.6), носят название *римановых инвариантов* (в честь немецкого математика Римана, который ввел их в аналогичном, но несколько более сложном случае). Формула  $u + \frac{p}{\rho_0 c_0} = f(x - c_0 t)$  показывает, что величина  $Y = u + \frac{p}{\rho_0 c_0}$  остается постоянной вдоль прямой  $x - c_0 t = \text{const}$ , т. е. график функции  $Y(x)$  с течением времени перемещается вправо со скоростью  $c_0$ . Аналогично, величина  $Z = u - \frac{p}{\rho_0 c_0}$  постоянна вдоль прямой  $x + c_0 t = \text{const}$ , и ее график перемещается влево с той же скоростью. Это дает основание для того, чтобы назвать  $c_0$  скоростью распространения звуковых волн или скоростью звука. Линии  $x \pm c_0 t = \text{const}$  ( $\frac{dx}{dt} = \pm c_0$ ) на плоскости  $x$ ,  $t$  называются *характеристиками* системы (1.1).

Как уже было сказано, формулы (1.8) дают представление для общего решения системы (1.1). Чтобы выделить вполне определенное единственное решение, должны быть наложены дополнительные требования, формулируемые в виде так называемых *начальных и граничных условий*.

Так, например, если потребовать, чтобы решение системы (1.1) удовлетворяло начальным данным

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad p(x, 0) = p_0(x) \tag{1.9}$$

на отрезке  $x_I \leq x \leq x_{II}$ , то нужно подбирать функции  $f$  и  $g$  на основании равенств

$$u_0(x) = \frac{1}{2} [f(x) + g(x)],$$

$$p_0(x) = \frac{\rho_0 c_0}{2} [f(x) - g(x)].$$

Из них следует, что

$$f(x) = u_0(x) + \frac{p_0(x)}{\rho_0 c_0}, \quad g(x) = u_0(x) - \frac{p_0(x)}{\rho_0 c_0},$$

и, следовательно, решение системы (1.1) с начальными данными (1.9) будет иметь вид

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{u_0(x - c_0 t) + u_0(x + c_0 t)}{2} + \frac{p_0(x - c_0 t) - p_0(x + c_0 t)}{2\rho_0 c_0}, \\ p(x, t) &= \frac{p_0(x - c_0 t) + p_0(x + c_0 t)}{2} - \rho_0 c_0 \frac{u_0(x - c_0 t) - u_0(x + c_0 t)}{2}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Несложными рассуждениями можно обосновать не только существование, но и единственность решения системы уравнений

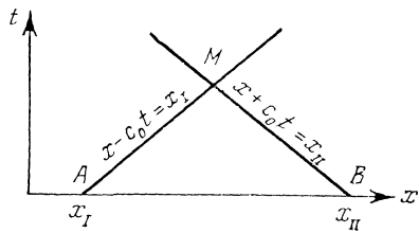


Рис. 1.1.

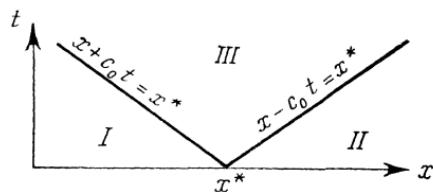


Рис. 1.2.

(1.1) с начальными данными внутри так называемого характеристического треугольника  $ABM$  (рис. 1.1). Его сторонами являются, во-первых, отрезок  $AB$  оси  $x$ , на котором заданы начальные данные; во-вторых, отрезок  $AM$  характеристики семейства  $x - c_0 t = \text{const}$ , выпущенной из левого конца  $x = x_I$ ; в-третьих, отрезок  $BM$  характеристики семейства  $x + c_0 t = \text{const}$ , выпущенной из правого конца  $x = x_{II}$ .

Мы уже отмечали выше, что функции  $f$  и  $g$  должны быть гладкими (дифференцируемыми) для того, чтобы  $u$ ,  $p$ , вычисляемые по формулам (1.10), можно было объявить решением системы (1.1). Как следует из формул (1.10), так оно и будет, если функции  $u_0(x)$ ,  $p_0(x)$ , задающие начальные данные, являются дифференцируемыми. Как же быть, если это не так?

Рассмотрим, в частности, следующую простейшую задачу. Пусть в момент времени  $t = 0$  начальные условия (1.9) имеют вид

$$\begin{aligned} u_0(x) &= u_I, \quad p_0(x) = p_I \quad \text{при } x < x^*, \\ u_0(x) &= u_{II}, \quad p_0(x) = p_{II} \quad \text{при } x > x^*, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где  $u_I$ ,  $u_{II}$ ,  $p_I$ ,  $p_{II}$  — некоторые постоянные, причем выполнено одно из неравенств:  $u_I \neq u_{II}$  или  $p_I \neq p_{II}$ , или оба одновременно.

Не обращая пока внимания на разрывный характер начальных данных, будем конструировать решение, как и ранее. При-

ведя (1.1) к каноническому виду (1.5) и учитывая постоянство риманова инварианта  $Y - u + \frac{p}{\rho_0 c_0}$  вдоль характеристик  $x - c_0 t = \text{const}$  и инварианта  $Z = u - \frac{p}{\rho_0 c_0}$  вдоль характеристик  $x + c_0 t = \text{const}$ , мы приходим к структуре, изображенной на рис. 1.2.

В области I имеем

$$u + \frac{p}{\rho_0 c_0} = u_I + \frac{p_I}{\rho_0 c_0}, \quad u - \frac{p}{\rho_0 c_0} = u_I - \frac{p_I}{\rho_0 c_0},$$

откуда следует, что  $u = u_I$ ,  $p = p_I$ , т. е. сохраняются невозмущенные «левые» величины.

В области II, аналогично,

$$u + \frac{p}{\rho_0 c_0} = u_{II} + \frac{p_{II}}{\rho_0 c_0}, \quad u - \frac{p}{\rho_0 c_0} = u_{II} - \frac{p_{II}}{\rho_0 c_0},$$

и, следовательно,  $u = u_{II}$ ,  $p = p_{II}$ , т. е. сохраняются невозмущенные «правые» величины.

Наконец, в области III величины  $u$ ,  $p$  могут быть найдены из уравнений

$$u + \frac{p}{\rho_0 c_0} = u_I + \frac{p_I}{\rho_0 c_0}, \quad u - \frac{p}{\rho_0 c_0} = u_{II} - \frac{p_{II}}{\rho_0 c_0}.$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи дается следующими формулами:

$$\begin{aligned} u &= u_I, \quad p = p_I, \quad \text{если } x < x^* - c_0 t, \\ u &= u_{II}, \quad p = p_{II}, \quad \text{если } x > x^* + c_0 t, \\ u &= \frac{u_I + u_{II}}{2} - \frac{p_{II} - p_I}{2\rho_0 c_0}, \quad \text{если } x^* - c_0 t < x < x^* + c_0 t. \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$p = \frac{p_I + p_{II}}{2} - \rho_0 c_0 \frac{u_{II} - u_I}{2}.$$

Построенные функции  $u(x, t)$ ,  $p(x, t)$  имеют разрыв вдоль двух линий:  $x + c_0 t = x^*$  и  $x - c_0 t = x^*$ , разделяющих области I, II, III. Эти две линии разрыва образовались из начального разрыва в точке  $x = x^*$ . На этом основании рассмотренную задачу можно условно назвать *задачей о распаде разрыва*. Функции  $u(x, t)$ ,  $p(x, t)$  считать решением рассматриваемой задачи формально нельзя, поскольку они не являются даже непрерывными. Поэтому объявим их *обобщенным решением* задачи о распаде разрыва. Веским аргументом в пользу таких действий является следующее рассуждение. Проведем «сглаживание» начальных данных (1.11), изменив их на малом отрезке  $x^* - \delta \leq x \leq x^* + \delta$ , окружающем точку разрыва  $x^*$ , так, чтобы новые начальные данные  $u|_{t=0} = u_\delta(x)$ ,  $p|_{t=0} = p_\delta(x)$  были, во-первых, дифферен-

цируемыми и, во-вторых, мало отличались от исходных:

$$\int |u_\delta(x) - u_0(x)| dx < \delta, \quad \int |p_\delta(x) - p_0(x)| dx < \delta.$$

Тогда для них можно построить «классическое» (гладкое) решение. Рассмотрим далее последовательность таких решений при  $\delta \rightarrow 0$ . Легко видеть, что при очень малых  $\delta$  графики построенных сглаженных решений будут неотличимы от графиков тех функций, которые мы сконструировали выше и назвали обобщенными решениями.

Наряду с таким подходом к проблеме обобщенного решения, рассматриваемого как предел гладких решений, имеются и другие подходы. Мы не будем сейчас на этом останавливаться. Читателю, желающему получить более подробное представление об этом вопросе, можно рекомендовать обратиться к § 19 книги [34]. Понятие обобщенного решения было введено С. Л. Соболевым.

## § 2. Разностная схема

Кусочно-постоянная аппроксимация начальных данных. Построение решения с помощью распадов разрывов. Усреднение и законы сохранения. Разностные формулы. Построение той же схемы с помощью соотношений на характеристиках.

Для того чтобы практически реализовать численные методы расчета процессов, описываемых теми или иными дифференциальными уравнениями, необходимо перейти от функций с непрерывными аргументами к некоторым дискретным наборам чисел, их заменяющих.

Эту дискретизацию будем осуществлять так. Представим себе, что среда, процессы в которой мы предполагаем рассчитывать, разделена на ряд слоев по координате  $x$  при помощи точек  $x_j$ , называемых *узлами* разностной сетки ( $j$  — целочисленный индекс). Чтобы пока не останавливаться на вопросе о граничных условиях, будем считать, что начальные данные заданы на всей оси  $x$  и разностная сетка всю ее заполняет (т. е. содержит бесконечное счетное множество узлов).

Для простоты будем считать, что расстояния между соседними узлами одинаковы:  $x_j - x_{j-1} = h$ . Величина  $h$  называется *шагом сетки* по координате  $x$ . Будем предполагать, что в начальный момент времени  $t = 0$  внутри каждого слоя величины  $u$ ,  $p$  постоянны. Их значения в слое между узлами  $x_{j-1}$  и  $x_j$  обозначим  $u_{j-1/2}$ ,  $p_{j-1/2}$ , присвоив слою «полуцелый» индекс  $j - 1/2$ . Таким образом, в качестве начальных данных мы имеем некоторую кусочно-постоянную функцию. На границе между каждыми двумя соседними слоями возникает распад разрыва, которым мы уже

занимались в § 1. В результате в каждом узле сетки образуются звуковые волны, распространяющиеся вправо и влево со скоростью звука  $c_0$ , и в течении некоторого времени структура решения имеет вид, схематически изображенный на рис. 2.1. В частности, в окрестности точки  $x_j$ , в соответствии с формулами (1.12), будем иметь

$$\begin{aligned} u &= u_{j-1/2}, \quad p = p_{j-1/2} \text{ в области } I: x_{j-1} + c_0 t < x < x_j - c_0 t; \\ u &= u_{j+1/2}, \quad p = p_{j+1/2} \text{ в области } II: x_j + c_0 t < x < x_{j+1} - c_0 t; \\ u &= U_j = \frac{u_{j-1/2} + u_{j+1/2}}{2} - \frac{p_{j+1/2} - p_{j-1/2}}{2\rho_0 c_0} \quad (2.1) \\ &\qquad \text{в области } III: x_j - c_0 t < x < x_j + c_0 t, \\ p &= P_j = \frac{p_{j-1/2} + p_{j+1/2}}{2} - \rho_0 c_0 \frac{u_{j+1/2} - u_{j-1/2}}{2}. \end{aligned}$$

Изображенная на рис. 2.1 структура решения будет сохраняться до тех пор, пока звуковые волны, вышедшие из соседних узлов сетки, не встретятся между собой. После этого ее нужно

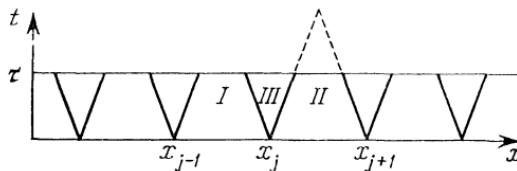


Рис. 2.1.

пересматривать заново. В случае, если интервалы сетки не равны между собой, моменты перестройки будут различными для разных узлов. Но даже в простейшем случае равномерной сетки описать точное решение для больших значений  $t$  весьма громоздко. Имея в виду иллюстративный характер рассматриваемой задачи и необходимость дальнейших обобщений на случай более сложных уравнений с переменными коэффициентами, разумным выходом для преодоления создавшегося затруднения представляется следующий.

Рассмотрим решение на момент времени  $t = \tau$  и заменим его другим, а именно имеющим такую же структуру, как и в начальный момент  $t = 0$ , позаботившись о том, чтобы его можно было считать «приближенным» для истинного решения на момент  $t = \tau$ . Точное содержание термина «приближенное решение» мы выясним позже, ограничившись пока чисто интуитивными соображениями.

Итак, будем предполагать, что в момент времени  $t = \tau$  приближенное решение представляют функции, которые постоянны внутри интервалов, ограниченных прежними узлами сетки  $x_j$ .

Новые «средние» значения этих функций в слое между узлами  $x_{j-1}$  и  $x_j$  обозначим  $u^{j-1/2}$ ,  $p^{j-1/2}$ , отмечая перенесением индекса  $j-1/2$  наверх то обстоятельство, что они отвечают моменту времени  $t=\tau$ , в отличие от прежних  $u_{j-1/2}$ ,  $p_{j-1/2}$  в момент  $t=0$ . Для того чтобы вычислить эти усредненные  $u^{j-1/2}$ ,  $p^{j-1/2}$ , естественно воспользоваться следующей процедурой. Сначала вычисляем  $u^*(x, \tau)$ ,  $p^*(x, \tau)$  в виде кусочно-постоянной функции, разрывы которой совпадают с точками, до которых к рассматриваемому времени дойдут разрывы (волны), возникшие при распадах разрывов, образовавшихся в момент времени  $t=0$ . Затем полученное точное решение усредняется по интервалам  $(x_{j-1}, x_j)$  с помощью формул

$$u^{j-1/2} = \frac{1}{x_j - x_{j-1}} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u^*(x, \tau) dx,$$

$$p^{j-1/2} = \frac{1}{x_j - x_{j-1}} \int_{x_{j-1}}^{x_j} p^*(x, \tau) dx.$$

После этого приближенное решение, даваемое функциями

$$\hat{u}(x, \tau) = u^{j-1/2}, \quad \hat{p}(x, \tau) = p^{j-1/2} \quad \text{при } x_{j-1} < x < x_j,$$

оказывается опять кусочно-постоянным, но это новое кусочно-постоянное приближение удобнее для использования, чем точное решение, благодаря тому, что его разрывы расположены в тех же точках  $x_j$ , что и разрывы в начальных данных.

Оказывается, что при вычислении  $u^{j-1/2}$ ,  $p^{j-1/2}$  можно и вообще отказаться от вычисления точного решения  $u^*(x, \tau)$ ,  $p^*(x, \tau)$ , а сразу вычислять их по формулам

$$u^{j-1/2} = u_{j-1/2} - \frac{\tau}{h} \frac{1}{\rho_0} (P_j - P_{j-1}), \quad (2.2)$$

$$p^{j-1/2} = p_{j-1/2} - \frac{\tau}{h} \rho_0 c_0^2 (U_j - U_{j-1}),$$

где  $U_j$ ,  $P_j$ —величины, выработавшиеся при распаде разрыва в точке  $x=x_j$  и вычисляемые по формулам

$$U_j = \frac{u_{j-1/2} + u_{j+1/2}}{2} - \frac{p_{j+1/2} - p_{j-1/2}}{2\rho_0 c_0}, \quad (2.3)$$

$$P_j = \frac{p_{j-1/2} + p_{j+1/2}}{2} - \rho_0 c_0 \frac{u_{j+1/2} - u_{j-1/2}}{2};$$

$U_{j-1}$ ,  $P_{j-1}$ —аналогичные величины для точки  $x=x_{j-1}$ . Действи-

тельно, выпишем первый из законов сохранения (1.2):

$$\oint \left( u dx - \frac{p}{\rho_0} dt \right) = 0,$$

для прямоугольной ячейки сетки на плоскости  $x, t$ , ограниченной прямыми  $x = x_{j-1}$ ,  $x = x_j$ ,  $t = 0$ ,  $t = \tau$ :

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} u(x, \tau) dx = \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(x, 0) dx - \frac{1}{\rho_0} \int_0^\tau [p(x_j, t) - p(x_{j-1}, t)] dt. \quad (2.4)$$

Будем исходить из того, что функция  $u(x, t)$  при  $t = 0$  постоянна на интервале от  $x_{j-1}$  до  $x_j$ , принимая значения  $u_{j-1/2}$ . На левой и правой сторонах ячейки функция  $p(x, t)$  принимает постоянные значения  $P_{j-1}$  и  $P_j$ , соответственно (в силу задачи о распаде разрыва), по крайней мере до тех пор, пока эти значения не будут изменены звуковыми волнами, пришедшими из соседних узлов сетки.

Следовательно, равенство (2.4) может быть переписано в виде

$$\frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(x, \tau) dx = u_{j-1/2} - \frac{\tau}{h} \frac{1}{\rho_0} (P_j - P_{j-1}). \quad (2.5)$$

Полагая далее «среднее» значение функции  $u(x, t)$  в интервале  $x_{j-1} < x < x_j$  в момент времени  $t = \tau$  равным  $u^{j-1/2}$ , мы и приходим к первой из формул (2.2). Вторая получается совершенно аналогичным рассуждением из второго закона сохранения (1.2):

$$\oint (p dx - \rho_0 c_0^2 u dt) = 0.$$

Заметим, что разрывы, возникшие при  $t = 0$  в точках  $x = x_j$ , перемещаются со скоростью звука  $c_0$ . При  $t = h/(2c_0)$  они встречаются в средних между  $x_{j-1}$  и  $x_j$  точках  $(x_{j-1} + x_j)/2$ . От этого столкновения возникнут новые волны, которые через следующий отрезок времени (длительностью  $h/(2c_0)$ ) выйдут на точки  $x_j$ ,  $x_{j-1}$ . До этого момента выхода, т. е. в течение времени  $h/c_0 = h/(2c_0) + h/(2c_0)$  от первоначального распада разрыва, значения  $U_j$ ,  $P_j$  в точках  $x_j$ , возникшие при этом распаде, будут сохраняться неизменными. Это поясняет допустимость использования формул (2.2) для вычисления  $u^{j-1/2}$ ,  $p^{j-1/2}$ , если  $\tau < h/c_0$ . Мы увидим в дальнейшем, что точно такое же ограничение на величину  $\tau$  появится у нас из совершенно других сопротивлений при исследовании устойчивости разностной схемы.

Последовательно применяя формулы (2.2), (2.3) для всех узлов разностной сетки, мы получаем на момент времени  $t_1 = \tau$  в

качестве «приближенного решения» кусочно-постоянные функции, которые устроены точно так же, как начальные данные. Это позволяет, опираясь на полученные результаты, как на исходные, продвинуться по времени еще раз на  $\tau$ , получив в такой же форме решение на момент  $t_2 = 2\tau$ , затем  $t_3 = 3\tau$  и т. д. Условимся в дальнейшем переход от состояния задачи на момент времени  $t = t_{n-1}$  к состоянию на момент  $t_n = t_{n-1} + \tau$  называть «расчетом одного шага». Заметим, что интервал времени  $\tau$ , вообще говоря,

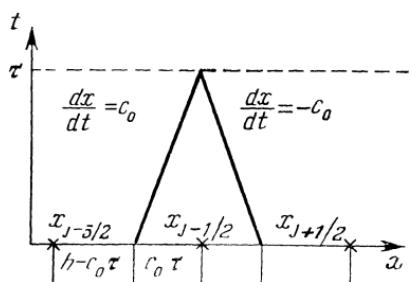


Рис. 2.2.

может меняться от шага к шагу по целому ряду причин, о которых мы будем говорить ниже. Величины, отвечающие моменту  $t = t_{n-1}$ , будем называть величинами «нижнего» слоя, отмечая их нижними индексами, а величины, отвечающие моменту  $t_n = t_{n-1} + \tau$ , — величинами «верхнего» слоя, отмечая их индексами вверху.

Нам представляется любопытным отметить еще одну интер-

претацию описанной разностной схемы. Дело в том, что первоначально схема была получена из других соображений, основанных на использовании уже упоминавшихся нами римановых инвариантов (1.6):

$$Y = u + \frac{p}{\rho_0 c_0}, \quad Z = u - \frac{p}{\rho_0 c_0}.$$

Постоянство этих величин вдоль характеристик, с привлечением линейной интерполяции их по значениям в соседних точках «нижнего» слоя, приводит (рис. 2.2) к следующим формулам для приближенного расчета значений римановых инвариантов на «верхнем» слое:

$$\begin{aligned} Y^{j-1/2} &= \left(1 - \frac{\tau}{h} c_0\right) Y_{j-1/2} + \frac{\tau}{h} c_0 Y_{j-3/2}, \\ Z^{j-1/2} &= \left(1 - \frac{\tau}{h} c_0\right) Z_{j-1/2} + \frac{\tau}{h} c_0 Z_{j+1/2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Отметим сразу же, что эти формулы представляют интерполяцию только в случае, если выполнено условие  $\tau \leq \tau^* = h/c_0$ , как легко видеть из рис. 2.2. В случае же его нарушения в формулах (2.6) появляются отрицательные веса.

После подстановки в (2.6) выражений инвариантов  $Y, Z$  через соответствующие значения  $u, p$  из них могут быть получены формулы для величин  $u^{j-1/2}, p^{j-1/2}$  на «верхнем» слое

в следующем виде:

$$\begin{aligned} u^{j+1/2} &= u_{j-1/2} - \frac{\tau}{h} \rho_0 \left[ \left( \frac{p_{j-1/2} + p_{j+1/2}}{2} - \rho_0 c_0 \frac{u_{j+1/2} - u_{j-1/2}}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{p_{j-1/2} + p_{j-3/2}}{2} - \rho_0 c_0 \frac{u_{j-1/2} - u_{j-3/2}}{2} \right) \right], \\ p^{j+1/2} &= p_{j-1/2} - \frac{\tau}{h} \rho_0 c_0^2 \left[ \left( \frac{u_{j-1/2} + u_{j+1/2}}{2} - \frac{p_{j+1/2} - p_{j-1/2}}{2\rho_0 c_0} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{u_{j-1/2} + u_{j-3/2}}{2} - \frac{p_{j-1/2} - p_{j-3/2}}{2\rho_0 c_0} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Группировка слагаемых в квадратных скобках появилась в этих формулах почти случайно, из соображений удобства организации расчета на электрическом клавишном арифмометре, по настоянию В. В. Палейчик (это было еще до широкого распространения электронных вычислительных машин). Лишь в дальнейшем, через несколько месяцев, было случайно обнаружено, что выражения в круглых скобках совпадают с формулами для давления и скорости, возникающих при распаде разрыва. Внимательное рассмотрение этого любопытного обстоятельства и привело к той интерпретации разностной схемы, с описания которой мы начали наше изложение.

Конструкция разностной схемы, описанная в этом параграфе, появилась как результат большой экспериментальной работы, проведенной в 1953 г. С. К. Годуновым. В этой работе участвовали Н. М. Зуева и группа вычислителей под руководством В. В. Палейчик. Во время этой работы была выработана не только описанная здесь схема для линейных уравнений, но и схема для нелинейных уравнений газовой динамики, близкая к описанной в § 14. На выработку этих схем оказали существенное влияние обсуждения различных вариантов и результатов экспериментов с И. М. Гельфандом и К. А. Семеняевым.

### § 3. Аппроксимация и устойчивость схемы

Проверка аппроксимации схемы без граничных условий. Исследование устойчивости методом Фурье. Энергетическое неравенство. Вывод условия устойчивости для неограниченной области.

Проверим, что предложенная схема аппроксимирует уравнения акустики (1.1). Для этой цели удобно исходить из уравнений (2.7), которые перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{u^{j+1/2} - u_{j-1/2}}{\tau} + \frac{1}{\rho_0} \frac{p_{j+1/2} - p_{j-3/2}}{2h} - c_0 \frac{u_{j+1/2} - 2u_{j-1/2} + u_{j-3/2}}{2h} &= 0, \\ \frac{p^{j+1/2} - p_{j-1/2}}{\tau} + \rho_0 c_0^2 \frac{u_{j+1/2} - u_{j-3/2}}{2h} - c_0 \frac{p_{j+1/2} - 2p_{j-1/2} + p_{j-3/2}}{2h} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Полагая, что  $u(x, t)$ ,  $p(x, t)$ —достаточно гладкие функции, разлагаем входящие в формулы (3.1) величины в ряды Тейлора, удерживая члены до второго порядка по  $h$  и  $\tau$ . Для первого из уравнений (3.1) получим

$$\begin{aligned}\frac{u^{j+1/2} - u_{j-1/2}}{\tau} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + o(\tau), \\ \frac{p_{j+1/2} - p_{j-3/2}}{2h} &= \frac{\partial p}{\partial x} + o(h), \\ \frac{u_{j+1/2} - 2u_{j-1/2} + u_{j-3/2}}{2h} &= \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + o(h).\end{aligned}$$

В этих формулах подразумевается, что значения производных берутся в «опорной» точке  $x = \frac{1}{2}(x_{j-1} + x_j)$ ,  $t = t_0$ . Таким образом, первое из разностных уравнений (3.1) можно записать так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{h}{2} c_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + o(h + \tau), \quad (3.2)$$

а второе, как совершенно очевидно, аналогичными выкладками приводится к виду

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{h}{2} c_0 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + o(h + \tau). \quad (3.3)$$

Если вторые производные функций  $u(x, t)$ ,  $p(x, t)$  ограничены, то при  $\tau \rightarrow 0$ ,  $h \rightarrow 0$  правые части равенств (3.2), (3.3) стремятся к нулю. Этот факт позволяет заявить, что описанная разностная схема обеспечивает аппроксимацию уравнений акустики. Остаточные члены имеют первый порядок по  $h$  и  $\tau$ . Это означает, что при уменьшении шагов  $\tau$  по времени и  $h$  по координате  $x$  в несколько раз можно рассчитывать на соответствующее уменьшение погрешности решения примерно в такое же число раз.

В силу исходных уравнений (1.1) в правых частях равенств (3.2), (3.3) можно исключить производные по времени  $t$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial p}{\partial t} \right) = c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( -\rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\rho_0 c_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) = c_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.\end{aligned}$$

Тогда оказывается, что на решениях уравнений акустики наша разностная схема аппроксимирует со вторым порядком точности

систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} &= h \frac{c_0}{2} \left( 1 - c_0 \frac{\tau}{h} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} &= h \frac{c_0}{2} \left( 1 - c_0 \frac{\tau}{h} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ее называют первым дифференциальным приближением. Любопытно обратить внимание на то, что величина  $\tau^* = h/c_0$  и здесь играет особую роль. Например, при  $\tau > h/c_0$  для системы (3.4) оказывается некорректно поставленной задача Коши. Читатель может самостоятельно разобраться в этом по аналогии с задачей Коши для уравнения теплопроводности  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  при  $t < 0$  (см., например, [34], § 8).

Ограничение  $\tau \leq h/c_0$  играет весьма существенную роль и возникло отнюдь не случайно. В следующем § 4 мы приведем в качестве примера результаты расчета, который был проведен с нарушением этого условия. Этот пример показывает, что, хотя наши расчетные формулы аппроксимируют уравнения акустики (с первым порядком точности), считать по ним с  $\tau > h/c_0$  нельзя. Говорят, что при  $\tau > h/c_0$  описанная схема неустойчива.

Грубо говоря, содержание понятия устойчивости состоит в том, что разностные решения, построенные по ограниченным начальными данным, остаются ограниченными в течение любого конечного промежутка времени, вне зависимости от того, с каким шагом  $\tau$  (большим или малым) ведется расчет. Можно показать, что для устойчивой разностной схемы ошибки округлений, допускаемые неизбежно при выполнении расчета, приводят к погрешности вычислительного решения примерно того же порядка, что и сами погрешности, допускавшиеся в промежуточных вычислениях.

Кроме того, и это очень важно, можно показать, что если разностная схема аппроксимирует дифференциальные уравнения и устойчива, то при уменьшении шагов ее решения сходятся к решениям дифференциальных уравнений. Мы не будем сейчас останавливаться на обосновании и на более строгой формулировке этих фактов, которые в настоящее время общеизвестны. При желании читатель может с ними ознакомиться в [34], [40], [103].

Напротив, в случае неустойчивой схемы ошибки округления неограниченно нарастают, приводя в конечном счете к переполнению разрядной шкалы ЭВМ.

Исследование устойчивости описанной разностной схемы проведем посредством приема, известного под названием метода Фурье. С этой целью у изучаемых уравнений (3.1) будем рассматривать

решения вида

$$\begin{aligned} u^{j-1,2} &= \lambda u_{j-1/2} = \lambda u^* e^{ij\varphi}, \\ p^{j-1/2} &= \lambda p_{j-1/2} = \lambda p^* e^{ij\varphi}. \end{aligned}$$

Здесь  $u^*$ ,  $p^*$ ,  $\lambda$ ,  $\varphi$ —постоянные величины,  $i$ —мнимая единица. Для  $u^*$ ,  $p^*$  получаем систему двух линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \left[ \lambda - 1 - \frac{\tau}{h} c_0 \frac{e^{i\varphi} - 2 + e^{-i\varphi}}{2} \right] u^* + \frac{\tau}{h} \frac{1}{\rho_0} \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2} p^* &= 0, \\ \frac{\tau}{h} \rho_0 c_0^2 \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2} u^* + \left[ \lambda - 1 - \frac{\tau}{h} c_0 \frac{e^{i\varphi} - 2 + e^{-i\varphi}}{2} \right] p^* &= 0. \end{aligned}$$

Для ее разрешимости необходимо, чтобы определитель этой системы равнялся нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 + v(1 - \cos \varphi) & \frac{1}{\rho_0 c_0} i v \sin \varphi \\ \rho_0 c_0 i v \sin \varphi & \lambda - 1 + v(1 - \cos \varphi) \end{vmatrix} = 0,$$

где  $v = c_0 \tau / h$ . Это равенство является квадратным уравнением, корни которого суть

$$\lambda_{1,2} = 1 - v(1 - \cos \varphi) \pm i v \sin \varphi. \quad (3.5)$$

Легко видеть, что

$$|\lambda_{1,2}| = \sqrt{[1 - v(1 - \cos \varphi)]^2 + v^2 \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - 4v(1 - v) \sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

При  $0 \leq v \leq 1$ , очевидно,

$$0 \leq 4v(1 - v) \leq 1, \quad 0 \leq 1 - 4v(1 - v) \sin^2 \frac{\varphi}{2} \leq 1,$$

и, следовательно,  $|\lambda_{1,2}| \leq 1$  для любого  $\varphi$ . В случае, если  $v > 1$ , существуют значения  $\varphi$ , при которых  $|\lambda_{1,2}| > 1$ . Например, при  $\varphi = \pi$  будем иметь

$$|\lambda_{1,2}(\pi)| = \sqrt{1 - 4v(1 - v)} = |2v - 1| > 1, \quad \text{если } v > 1.$$

Из этих свойств корней  $\lambda(v, \varphi)$  делается вывод, что при  $v = c_0 \tau / h \leq 1$  схема устойчива, а при  $v = c_0 \tau / h > 1$ —неустойчива. Величину  $v$  принято называть *числом Куранта*.

Для наших дальнейших целей будет удобно пользоваться при исследовании устойчивости не методом Фурье, а так называемыми оценками разностных решений в энергетических нормах (см., например, [103]).

Значения  $\{u_{j-1,2}, p_{j-1/2}\}$  на одном сеточном слое  $t = \text{const}$  образуют сеточную вектор-функцию. В пространстве таких се-

точных вектор-функций мы введем норму

$$\begin{aligned} \|\{u_{j-1/2}, p_{j-1/2}\}\| &= \sqrt{h \sum_j \left[ \rho_0 \frac{u_{j-1/2}^2}{2} + \frac{p_{j-1/2}^2}{2\rho_0 c_0^2} \right]} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} h \rho_0 \sum_j [Y_{j-1/2}^2 + Z_{j-1/2}^2]}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где  $Y$  и  $Z$  — римановы инварианты:

$$Y = u + \frac{p}{\rho_0 c_0}, \quad Z = u - \frac{p}{\rho_0 c_0}.$$

Исследование устойчивости в энергетической норме сводится к доказательству того, что при  $v = c_0 \tau / h \leq 1$  имеет место неравенство

$$\|\{u^{j-1/2}, p^{j-1/2}\}\| \leq \|\{u_{j-1/2}, p_{j-1/2}\}\|.$$

Идея этого доказательства состоит в использовании разностного аналога закона сохранения энергии для акустических волн (1.4). Как мы видели в § 1, его вывод сводится к получению в качестве следствия из уравнений акустики (1.1) дифференциального равенства (1.3):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (pu) = 0.$$

Мы сейчас покажем, что при  $c_0 \tau / h \leq 1$  имеет место неравенство

$$\rho_0 \frac{(u^{j-1/2})^2}{2} + \frac{(p^{j-1/2})^2}{2\rho_0 c_0^2} \leq \rho_0 \frac{u_{j-1/2}^2}{2} + \frac{p_{j-1/2}^2}{2\rho_0 c_0^2} - \frac{\tau}{h} (P_j U_j - P_{j-1} U_{j-1}), \quad (3.7)$$

если входящие в него величины вычисляются по формулам (2.2), (2.3) описанной разностной схемы. Неравенство (3.7) является разностным аналогом дифференциального равенства (1.3).

Используя определение римановых инвариантов, в силу которого

$$Y_{j-1/2} = u_{j-1/2} + \frac{p_{j-1/2}}{\rho_0 c_0}, \quad Z_{j-1/2} = u_{j-1/2} - \frac{p_{j-1/2}}{\rho_0 c_0},$$

уравнения (2.3) для «больших» величин можно записать в виде

$$\begin{aligned} U_j &= \frac{u_{j-1/2} + u_{j+1/2}}{2} - \frac{p_{j+1/2} - p_{j-1/2}}{2\rho_0 c_0} = \frac{1}{2} (Y_{j-1/2} + Z_{j+1/2}), \\ P_j &= \frac{p_{j-1/2} + p_{j+1/2}}{2} - \rho_0 c_0 \frac{u_{j+1/2} - u_{j-1/2}}{2} = \frac{\rho_0 c_0}{2} (Y_{j-1/2} - Z_{j+1/2}). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Неравенство (3.7), которое мы хотим доказать, можно поэтому записать с помощью римановых инвариантов в следующей форме:

$$\rho_0 [(Y^{j-1/2})^2 + (Z^{j-1/2})^2] \leq \rho_0 [Y_{j-1/2}^2 + Z_{j-1/2}^2] - \\ - \frac{\tau}{h} \rho_0 c_0 [(Y_{j-1/2}^2 - Z_{j+1/2}^2) - (Y_{j-3/2}^2 - Z_{j-1/2}^2)]. \quad (3.9)$$

Это неравенство является очевидным следствием из следующих двух:

$$(Y^{j-1/2})^2 \leq \left(1 - \frac{\tau}{h} c_0\right) Y_{j-1/2}^2 + \frac{\tau}{h} c_0 Y_{j-3/2}^2, \\ (Z^{j-1/2})^2 \leq \left(1 - \frac{\tau}{h} c_0\right) Z_{j-1/2}^2 + \frac{\tau}{h} c_0 Z_{j+1/2}^2, \quad (3.10)$$

обоснование которых при дополнительном условии  $v = c_0 \tau / h \leq 1$  мы сейчас проведем. Напомним, что в предыдущем параграфе уже было показано, что для нашей разностной схемы в терминах римановых инвариантов имеют место равенства (2.6):

$$Y^{j-1/2} = \left(1 - \frac{\tau}{h} c_0\right) Y_{j-1/2} + \frac{\tau}{h} c_0 Y_{j-3/2}, \\ Z^{j-1/2} = \left(1 - \frac{\tau}{h} c_0\right) Z_{j-1/2} + \frac{\tau}{h} c_0 Z_{j+1/2}.$$

Таким образом, для обоснования неравенств (3.10) надо показать, что при  $0 < v \leq 1$  из равенства  $c = (1 - v)a + vb$  вытекает неравенство  $c^2 \leq (1 - v)a^2 + vb^2$ . Это, очевидно, следует из элементарной выкладки:

$$c^2 = [(1 - v)a + vb]^2 = (1 - v)a^2 + vb^2 - v(1 - v)(a + b)^2 \leq \\ \leq (1 - v)a^2 + vb^2. \quad (3.11)$$

Таким образом, доказательство неравенства (3.9), а следовательно, и неравенства (3.7) полностью завершено.

Просуммируем теперь доказанное неравенство (3.7) по индексу  $j$  от  $J' + 1$  до  $J''$ :

$$\sum_{j=J'+1}^{J''} \left[ \rho_0 \frac{(u^{j-1/2})^2}{2} + \frac{(p^{j-1/2})^2}{2\rho_0 c_0^2} \right] \leq \\ \leq \sum_{j=J'+1}^{J''} \left[ \rho_0 \frac{u_{j-1/2}^2}{2} + \frac{p_{j-1/2}^2}{2\rho_0 c_0^2} \right] - \frac{\tau}{h} \sum_{j=J'+1}^{J''} (P_j U_j - P_{j-1} U_{j-1}).$$

В результате такого суммирования получим

$$h \sum_{j=J'+1}^{J''} \left[ \rho_0 \frac{(u^{j-1/2})^2}{2} + \frac{(p^{j-1/2})^2}{2\rho_0 c_0^2} \right] \leq \\ \leq h \sum_{j=J'+1}^{J''} \left[ \rho_0 \frac{u_{j-1/2}^2}{2} + \frac{p_{j-1/2}^2}{2\rho_0 c_0^2} \right] - \frac{\tau}{h} (P_{J''} U_{J''} - P_{J'} U_{J'}). \quad (3.12)$$

Именно это утверждение служит основанием для исследования устойчивости.

Сначала разберем более простой случай неограниченной в обе стороны разностной сетки. Пусть норма

$$\| \{u_{j-1/2}, p_{j-1/2}\} \| = \sqrt{h \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left( \rho_0 \frac{u_{j-1/2}^2}{2} + \frac{p_{j-1/2}^2}{2\rho_0 c_0^2} \right)}$$

конечна, т. е. ряд, стоящий под корнем, сходится. Отсюда во всяком случае вытекает, что  $u_{j-1/2} \rightarrow 0$ ,  $p_{j-1/2} \rightarrow 0$  при  $j \rightarrow \pm \infty$ , а следовательно, стремятся к нулю вычисляемые через них  $P_j$ ,  $U_j$ . Это позволяет в доказанном неравенстве применить суммирование по  $j$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  и отбросить граничные члены  $P_{J''} U_{J''} - P_{J'} U_{J'}$ , после чего получаем

$$h \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[ \rho_0 \frac{(u^{j-1/2})^2}{2} + \frac{(p^{j-1/2})^2}{2\rho_0 c_0^2} \right] \leq h \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left( \rho_0 \frac{u_{j-1/2}^2}{2} + \frac{p_{j-1/2}^2}{2\rho_0 c_0^2} \right).$$

Тем самым обосновано неравенство

$$\| \{u^{j-1/2}, p^{j-1/2}\} \| \leq \| \{u_{j-1/2}, p_{j-1/2}\} \|,$$

из которого следует устойчивость схемы в случае неограниченной области при дополнительном условии  $v = tc_0/h \leq 1$ .

На практике, конечно, приходится решать задачи в области с границами, на которых ставятся те или иные граничные условия. Обсуждению возможных постановок задач в ограниченной области, разностным схемам для таких задач и условиям их устойчивости посвящен следующий параграф.

Прежде чем переходить к этим вопросам, сделаем одно замечание, касающееся доказательства нашего основного неравенства (3.7). Из приведенного выше вывода этого неравенства может сложиться впечатление, что его обоснование использует формулы (2.3) для «больших» величин

$$U_j = \frac{u_{j-1/2} + u_{j+1/2}}{2} - \frac{p_{j+1/2} - p_{j-1/2}}{2\rho_0 c_0},$$

$$P_j = \frac{p_{j-1/2} + p_{j+1/2}}{2} - \rho_0 c_0 \frac{u_{j+1/2} - u_{j-1/2}}{2}$$

при значениях индекса  $j = J'$ ,  $J'+1, \dots, J''$ ,  $J''+1$ . Однако на самом деле достаточно ограничиться их выполнением лишь для  $j = J'+1, \dots, J''$ , а для крайних значений  $j = J'$  и  $j = J''+1$  использовать лишь по одному условию:

$$U_{J'} - \frac{1}{\rho_0 c_0} P_{J'} = u_{J'+1/2} - \frac{1}{\rho_0 c_0} p_{J'+1/2} = Z_{J'+1/2},$$

$$U_{J''} + \frac{1}{\rho_0 c_0} P_{J''} = u_{J''-1/2} + \frac{1}{\rho_0 c_0} p_{J''-1/2} = Y_{J''-1/2}.$$

Величины  $(u_{J'-1/2}, p_{J'-1/2})$ ,  $(u_{J''+1/2}, p_{J''+1/2})$ , участвующие в приведенном выше выводе, могут быть определены фиктивно с большой степенью произвола, лишь бы они удовлетворяли следующей (недоопределенной) системе линейных уравнений:

$$u_{J'-1/2} + \frac{1}{\rho_0 c_0} p_{J'-1/2} = U_{J'} + \frac{1}{\rho_0 c_0} P_{J'},$$

$$u_{J''+1/2} - \frac{1}{\rho_0 c_0} p_{J''+1/2} = U_{J''} - \frac{1}{\rho_0 c_0} P_{J''}.$$

Этим замечанием мы в дальнейшем будем пользоваться при изучении устойчивости для задач с граничными условиями.

#### § 4. Численные примеры

Неустойчивость схемы при числе Куранта  $v > 1$ . Размазывание разрывов при  $v < 1$ . Разностная вязкость. Оценка зоны размазывания. Монотонность схемы. Плавный характер размазывания в сравнении с осцилляциями в схеме второго порядка.

Приведем несколько простых примеров, имеющих целью проиллюстрировать те факты, которые были изложены для уравнений акустики (1.1) и разностной схемы, (2.2), (2.3) для их численного интегрирования.

Возьмем систему уравнений (1.1) с коэффициентами  $\rho_0 = 0,25$ ,  $c_0 = 2,0$  и начальными данными в виде «ступеньки»:

$$u_I = 1,0, \quad p_I = 5,0 \quad \text{при } x < 0;$$

$$u_{II} = 0, \quad p_{II} = 2,0 \quad \text{при } x > 0.$$

Согласно изложенному в § 2, при «распаде разрыва» возникнут две «волны», которые распространяются от точки  $x = 0$  со скоростью  $c_0 = 2,0$  относительно среды. В области между ними  $u$ ,  $p$  постоянны и, согласно формулам (1.12), их значения  $U = 3,5$ ,  $P = 3,75$ . Построим равномерную разностную сетку  $x_j = jh$  с шагом  $h = 0,05$  и проведем расчет по разностным формулам (2.2), (2.3) при различных значениях величины  $v = c_0 \tau / h$ . Результаты оказываются следующими.

**Вариант 1.** При  $v = 1$  разностная схема точно воспроизводит описанное в § 1 решение задачи о распаде разрыва.

**Вариант 2.** Для  $v = 2$  в таблицах 1 и 2 приведены полученные на первых пяти шагах расчета ( $n$  — номер шага) значения  $u_{j-1/2}$ ,  $p_{j-1/2}$  в узлах сетки, примыкающих к  $x = 0$ . Очевидно, что они не имеют никакого отношения к правильному решению. Обращаем внимание на знакочередующийся характер полученных величин. Этот факт объясняется так. Как было установлено в § 3 при исследовании устойчивости схемы методом Фурье, собственные значения  $\lambda$  разностного оператора, описывающего переход

Таблица 1  
Скорость  $u_{j-1/2}$

$n \backslash j$	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4
0	1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	6	7	0	0	0
2	1	1	11	1	0	14	0	0
3	1	21	-9	6	7	-14	28	0
4	41	-39	21	1	0	28	-56	56
5	-119	81	-19	6	7	-28	112	-168

Таблица 2  
Давление  $p_{j-1/2}$

$n \backslash j$	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4
0	5	5	5	5	2	2	2	2
1	5	5	5	2,5	5,5	2	2	2
2	5	5	0	5	2	9	2	2
3	5	-5	10	2,5	5,5	-5	16	2
4	-5	10	2,5	3,75	3,75	5,5	-5	16
5	65	-35	15	2,5	5,5	-12	58	-82

от одного временного слоя к следующему, определяются формулой (3.5):

$$\lambda = 1 - v(1 - \cos \varphi) \pm iv \sin \varphi.$$

Поэтому при  $v = 2$  получается, что вещественная часть этих значений  $\operatorname{Re} \lambda = 1 - v(1 - \cos \varphi)$  будет отрицательной для тех  $\varphi$ , которые удовлетворяют неравенству  $\cos \varphi < 1/2$ . При изображении результатов расчета на графиках они имели бы характерный «пилообразный» вид со стремительно нарастающей от шага к шагу амплитудой (поскольку, например, при  $\varphi = \pi$  получаем  $|\lambda(\pi)| = |2v - 1| = 3$ , если  $v = 2$ ). Практически (при расчетах на ЭВМ) это довольно быстро приводит к переполнению ее разрядной шкалы.

При любом  $v > 1$  ситуация аналогична описанной для  $v = 2$ . Схема неустойчива, и проводить по ней расчеты с  $v > 1$  нельзя.

Вариант 3. Для  $v = 0,8$  на рис. 4.1, а, б приведены результаты расчета скорости  $u$  и давления  $p$ , полученные на 5, 10, 15 и 20 шагах. Описанные выше разрывы «размазываются» разностной схемой. Это «размазывание» можно объяснить следующим образом. Как мы выяснили в § 3, используемая разностная схема на решениях уравнений акустики аппроксимирует

со вторым порядком точности систему уравнений (3.4):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = h \frac{c_0}{2} \left( 1 - c_0 \frac{\tau}{h} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} = h \frac{c_0}{2} \left( 1 - c_0 \frac{\tau}{h} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

По аналогии с физической вязкостью, которая присутствует в дифференциальных уравнениях при рассмотрении течений

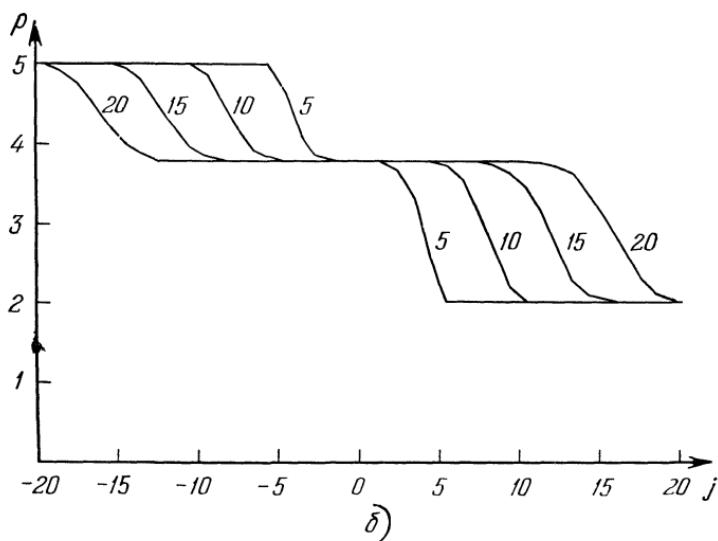
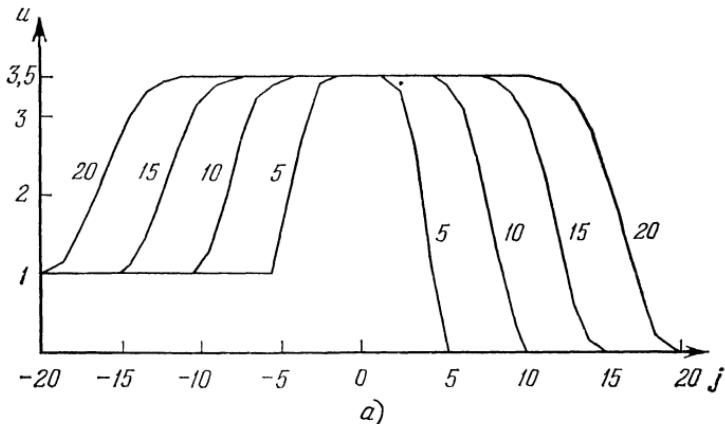


Рис. 4.1.

вязкой жидкости, иногда трактуют члены, стоящие в правых частях этих уравнений, как внутреннюю вязкость самой разностной

схемы. Присутствие этих членов приводит к наблюдаемому эффекту.

Оценка ширины этой зоны размазывания может быть осуществлена с помощью следующих соображений (см. [33], гл. II, § 1). Рассмотрим одно уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.1)$$

и разностную схему для него

$$u^j = \left(1 - \frac{\tau}{h}\right) u_j + \frac{\tau}{h} u_{j-1}. \quad (4.2)$$

Заметим, что, как видно из формулы (2.6), эта схема только заменой индекса  $j - 1/2$  на  $j$  отличается от описываемой нами схемы с точки зрения риманова инварианта  $Y = u + p/(p_0 c_0)$  (коэффициент  $c_0 = 1$ ).

Возьмем начальные данные вида

$$u_j = \begin{cases} 1 & \text{при } j = 0, \\ 0 & \text{при } j \neq 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

и посмотрим, как их преобразует схема (4.2).

Введем обозначение  $u_j^n$  для значения решения на  $n$ -м шаге расчета в узле с номером  $j$ , а также обозначим  $v = \tau/h$ . Непосредственной проверкой можно убедиться, что интересующее нас решение имеет вид

$$u_j^n = \begin{cases} C_n^{n-j} v^j (1-v)^{n-j} & \text{при } 0 \leq j < n, \\ 0 & \text{при остальных } j. \end{cases} \quad (4.4)$$

Функция, стоящая в правой части (биномиальный закон распределения), приближенно может быть представлена в виде

$$u_j^n \approx \hat{u}_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi nv(1-v)}} e^{-\frac{(j-nv)^2}{2nv(1-v)}}. \quad (4.5)$$

График решения на  $n$ -м шаге будет иметь вид, приведенный на рис. 4.2. Максимум правой части (4.5)  $\hat{u}_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2\pi nv(1-v)}}$  достигается при  $j = nv$ , т. е. имеет координату  $x = jh = n\tau = t$ . Так как  $x - t = 0$  — характеристика уравнения  $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ , то мы видим, что максимум решения движется по характеристике. Назовем условно шириной зоны размазывания длину отрезка, на котором решение принимает значения  $u > e^{-\alpha^2} \hat{u}_{\max}$  (см. рис. 4.2). Как легко видеть из формулы (4.5), ширина этой зоны

$$H = 2\alpha \sqrt{v(1-v) th}. \quad (4.6)$$

Следовательно, при  $h \rightarrow 0$  область, в которой решение существенно отлично от нуля, стягивается к характеристике  $x-t=0$  (рис. 4.3). С течением времени  $t$  область размазывания расширяется пропорционально  $\sqrt{t}$ . Решение разностных уравнений с начальными данными в виде «ступеньки»

$$u_j^0 = \begin{cases} 1 & \text{при } j < 0, \\ 0 & \text{при } j \geq 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

можно получить суммированием специальных решений такого вида, как мы только что изучили. Выше уже отмечалось, что наша разностная схема для уравнений акустики с точки зрения римановых инвариантов аналогична (4.2). Поэтому можно ожидать, что полученная оценка (4.6) для ширины зоны размазывания качественно воспроизводится и для нашей разностной схемы.

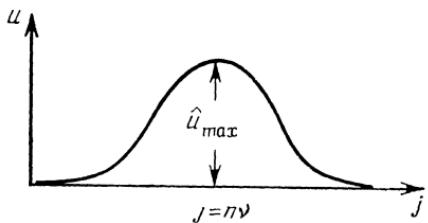


Рис. 4.2.

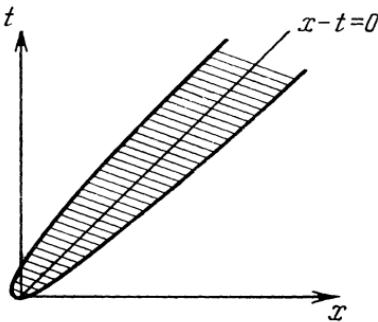


Рис. 4.3.

На рис. 4.4 сравниваются результаты описанного расчета с шагом  $h=0,05$  (вариант 3,  $v=0,8$ ) и расчета с шагом, уменьшенным в 4 раза ( $h=0,0125$ ), на один и тот же момент времени  $t=0,3$  (достигаемый на 15 и 60 шагах соответственно). Несущественную часть графика (в окрестности  $x=0$ ) мы опустили. Как видно из рис. 4.4, геометрическая протяженность зоны «размазывания» уменьшилась примерно в 2 раза.

Заметим также, что при величине числа Куранта  $v=1$  формула (4.6) дает для ширины зоны размазывания значение  $H=0$ , что подтверждается упомянутым вариантом 1, в котором схема воспроизводит точное решение.

Обращаем внимание на плавную форму размазанных разрывов. Это объясняется тем, что применяемая схема удовлетворяет условию монотонности. В работе [30] доказан следующий простой критерий монотонности схемы.

Для того чтобы разностная схема вида

$$u^j = \sum_k \alpha_{k-j} u_k \quad (4.8)$$

переводила все монотонные функции в монотонные с тем же направлением роста, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты  $\alpha_{k-j}$  были неотрицательными.

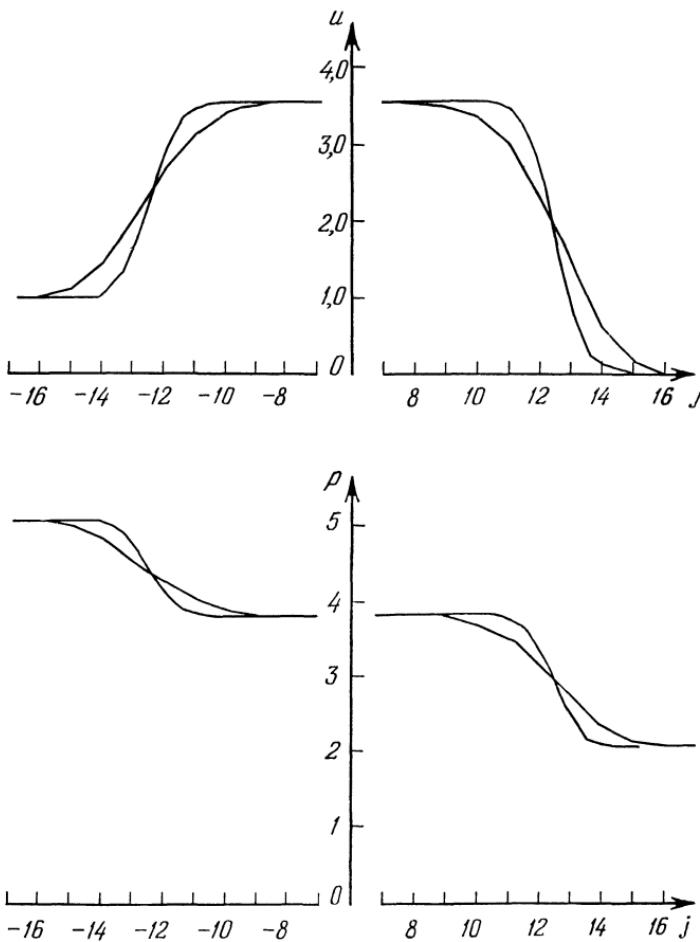


Рис. 4.4.

Доказательство этого критерия несложно, и мы приведем его здесь.

Пусть  $\alpha_k \geq 0$  и  $\{u_j\}$  монотонна. Для определенности допустим, что  $\{u_j\}$  возрастает, т. е. что все  $u_j - u_{j-1}$  неотрицательны. Тогда

$$\begin{aligned} u^j - u^{j-1} &= \sum_k \alpha_{k-j} u_k - \sum_k \alpha_{k-j+1} u_k = \\ &= \sum_k \alpha_{k-j} u_k - \sum_k \alpha_{k-j} u_{k-1} = \sum_k \alpha_{k-j} (u_k - u_{k-1}), \end{aligned}$$

т. е.  $u^j - u^{j-1} \geqslant 0$ . Таким образом, достаточность условия доказана.

Докажем необходимость. Пусть, например,  $\alpha_{k_0} < 0$ . Положим

$$u_j = \begin{cases} 1 & \text{при } j \geqslant k_0, \\ 0 & \text{при } j \leqslant k_0 - 1. \end{cases}$$

Тогда  $u^0 - u^{-1} = \alpha_{k_0} < 0$ , что невозможно, если предполагать, что

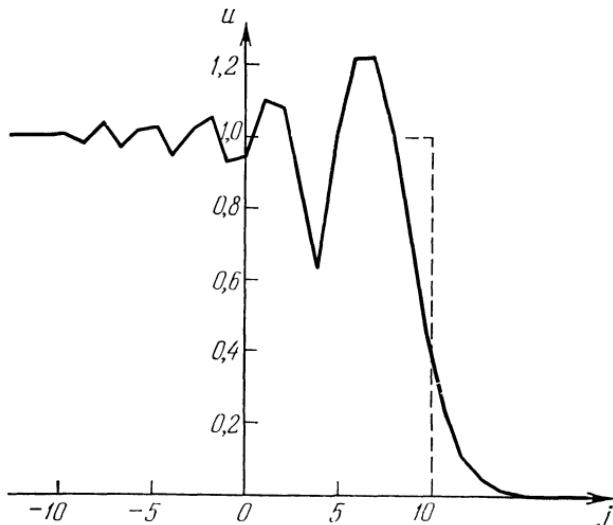


Рис. 4.5.

схема переводит монотонные последовательности в монотонные с тем же направлением роста. Необходимость доказана.

Для монотонных схем легко обосновывается устойчивость. В самом деле, если все ее коэффициенты  $\alpha_k \geqslant 0$  и, кроме того,

$$\sum_k \alpha_k = 1, \quad (4.9)$$

то, как легко видеть,

$$\max_j |u^j| < \sum_k |\alpha_{k-j}| \cdot \max_j |u_j|.$$

Так как при наших предположениях  $\max_k |\alpha_k| \leqslant 1$ , то имеет место неравенство

$$\sum_j |u^j| \leqslant \sum_j |u_j|,$$

которое и означает устойчивость. Условие (4.9) является довольно естественным для схем, аппроксимирующих многие дифференци-

альные уравнения, и означает, что решение уравнений  $u = \text{const}$  является также решением и разностных уравнений (4.8).

В работе [30] доказано, что среди линейных разностных схем второго порядка точности для уравнения  $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  нет схемы, удовлетворяющей условию монотонности. Поэтому при проведении расчета по схеме второго порядка могут получаться графики

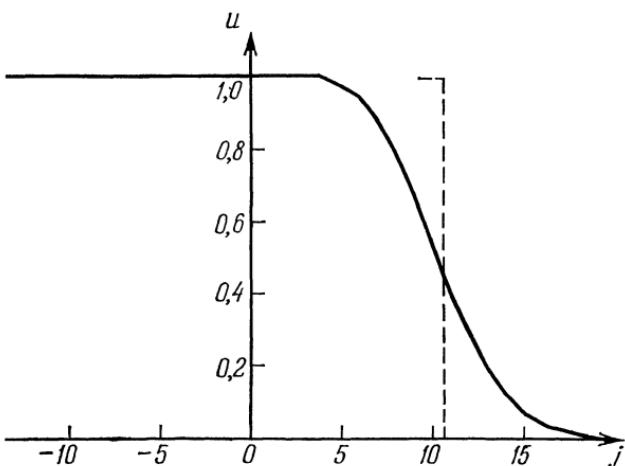


Рис. 4.6.

решения примерно такого вида, как на рис. 4.5. На нем изображен результат, полученный при расчете уравнения  $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  по разностной схеме

$$\frac{u^j - u_j}{\tau} + \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} = \frac{\tau}{2} \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2}, \quad (4.10)$$

аппроксимирующей его со вторым порядком точности на решениях. График отвечает 100-му шагу расчета с начальными данными (4.7) при значении числа Куранта  $\nu = \tau/h = 0,1$ . К форме (4.10) в линеаризованном случае приводится, в частности, известная схема Лакса—Вендроффа [143]. Приведенный график показывает, что при применении таких схем в случаях, когда число  $\nu$  мало (в квазилинейных задачах, как правило, дело обстоит именно так), необходимы специальные меры по подавлению возникающих осцилляций. Обычно они сводятся либо к приписыванию в уравнения специальных членов, которые принято называть искусственной вязкостью, либо к принудительному сглажи-

ванию результатов, безотносительно к решаемым дифференциальным уравнениям.

Для сравнения мы приводим на рис. 4.6 результат, полученный в тех же условиях ( $v = \tau/h = 0,1$ ) по схеме (4.2).

## § 5. Схема для смешанной задачи

Постановка граничных условий. Граничный распад разрыва. Модификация схемы на случай смешанной задачи. Диссипативные граничные условия обеспечивают устойчивость.

При решении уравнений акустики (1.1) в конечной области  $x_1 \leq x \leq x_{II}$  на концах  $x = x_1$ ,  $x = x_{II}$  этого отрезка приходится ставить те или иные граничные условия. Пусть эти условия имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_1(t)u + \beta_1(t)p &= f_1(t) \quad \text{при } x = x_1; \\ \alpha_{II}(t)u + \beta_{II}(t)p &= f_{II}(t) \quad \text{при } x = x_{II}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Из общей теории дифференциальных уравнений (см. [34]) известно, что такие граничные условия для нашей системы допустимы, если только комбинация  $\alpha_i u + \beta_i p$  не пропорциональна риманову инварианту  $Z = u - \frac{p}{\rho_0 c_0}$  для семейства характеристик  $\frac{dx}{dt} = -c_0$  с отрицательным наклоном, а  $\alpha_{II}u + \beta_{II}p$  не пропорциональна риманову инварианту  $Y = u + \frac{p}{\rho_0 c_0}$ , отвечающему характеристикам  $\frac{dx}{dt} = c_0$ . Иными словами, для допустимости граничных условий необходимо, чтобы

$$\left| \begin{array}{cc} \alpha_1 & \beta_1 \\ 1 & -\frac{1}{\rho_0 c_0} \end{array} \right| \neq 0, \quad \left| \begin{array}{cc} \alpha_{II} & \beta_{II} \\ 1 & \frac{1}{\rho_0 c_0} \end{array} \right| \neq 0. \quad (5.2)$$

Для описанной разностной схемы есть очень простой и естественный вариант включения граничных условий в вычислительный процесс.

Пусть отрезок  $x_1 \leq x \leq x_{II}$  разделен на  $J$  интервалов длины  $h = (x_{II} - x_1)/J$  каждой точками  $x_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, J$ , причем  $x_0 = x_1$ ,  $x_J = x_{II}$ , и пусть на каждом из участков  $x_{j-1} < x < x_j$  начальные значения величин  $u$ ,  $p$  заданы постоянными и равными  $u_{j-1/2}$ ,  $p_{j-1/2}$  соответственно. Расчет мы начинаем, как и в случае неограниченной области, с вычисления величин  $U_j$ ,  $P_j$ . При  $j = 1, 2, \dots, J-1$ , т. е. во внутренних точках деления отрезка  $[x_1, x_{II}]$ , их вычисление проводится по тем же формулам (2.3), что и в случае неограниченной области. Граничные значения  $U_0$ ,  $P_0$ ,  $U_J$

$P_J$  мы предлагаем определять из уравнений

$$\begin{aligned} \alpha_I U_0 + \beta_I P_0 &= f_I, \\ U_0 - \frac{1}{\rho_0 c_0} P_0 &= u_{1/2} - \frac{1}{\rho_0 c_0} p_{1/2} \end{aligned} \quad (5.3)$$

в левой граничной точке  $x = x_0 = x_I$  и из уравнений

$$\begin{aligned} \alpha_{II} U_J + \beta_{II} P_J &= f_{II}, \\ U_J + \frac{1}{\rho_0 c_0} P_J &= u_{J-1/2} + \frac{1}{\rho_0 c_0} p_{J-1/2} \end{aligned} \quad (5.4)$$

в правой граничной точке  $x = x_J = x_{II}$ . Коэффициенты  $(\alpha_I, \beta_I, f_I), (\alpha_{II}, \beta_{II}, f_{II})$  в случае, если граничные условия (5.1) переменны по времени, представляют некоторые усредненные значения соответствующих функций на интервале времени от  $t_0$  до  $t_0 + \tau$  либо их значения в момент  $t_0$  или  $t_0 + \tau$ .

Системы (5.3), (5.4) совместны и имеют единственное решение, так как мы считаем, что выполнены условия (5.2). Предлагаемый способ имеет следующую наглядную интерпретацию. Для вычисления  $U_0, P_0$  решаем задачу «граничного распада разрыва», состоящую в нахождении решения при  $x > x_0$  по постоянным начальным данным  $u = u_{1/2}, p = p_{1/2}$  и по граничному условию  $\alpha_I u + \beta_I p = f_I$ , задаваемому при  $x = x_0$ . Решение такой задачи будет кусочно-постоянным. Области постоянства (их две) отделяются друг от друга характеристикой  $x - c_0(t - t_0) = x_0$ . При  $x - c_0(t - t_0) > x_0$ , т. е. там, куда не дошло распространяющееся со скоростью звука  $c_0$  влияние границы  $x = x_0$ , будем иметь  $u = u_{1/2}, p = p_{1/2}$  (начальное состояние). При  $x - c_0(t - t_0) < x_0$  риманов инвариант  $u - p / (\rho_0 c_0)$ , сохраняющий постоянное значение вдоль характеристики  $dx/dt = -c_0$ , будет тем же, что и в начальных данных:  $u - p / (\rho_0 c_0) = u_{1/2} - p_{1/2} / (\rho_0 c_0)$ , тогда как инвариант, отвечающий другому семейству характеристик  $dx/dt = c_0$ , должен быть подобран так, чтобы обеспечить выполнение граничного условия  $\alpha_I u + \beta_I p = f_I$  при  $x = x_0$ . Таким образом, значения  $u = U_0, p = P_0$  при  $x - c_0(t - t_0) < x_0$  должны определяться из условий (5.3).

Совершенно так же истолковываются правила вычисления  $U_J, P_J$ , дающие решение при  $x > x_J - c_0(t - t_0)$  задачи «граничного распада разрыва», т. е. решение, удовлетворяющее условиям

$$u|_{t=t_0} = u_{J-1/2}; \quad p|_{t=t_0} = p_{J-1/2}; \quad (\alpha_{II} u + \beta_{II} p)|_{x=x_J} = f_{II}.$$

Таким образом, вычисление  $U_0, P_0, U_J, P_J$  на начальном шаге расчета  $t = t_0$  мы описали. На всех дальнейших шагах их определение точно такое же.

Разностная схема для граничной задачи построена. Для обоснования ее применимости надо доказать, что она аппроксимирует решение смешанной задачи и устойчива. Обсуждение вопроса об аппроксимации отложим до следующего параграфа, а сейчас займемся исследованием устойчивости. Для упрощения изложения будем предполагать, что граничные условия (5.1) однородны, т. е.

$$f_I(t) \equiv 0, \quad f_{II}(t) \equiv 0. \quad (5.5)$$

Устойчивость разностной схемы докажем в случае, если граничные условия, поставленные при  $x = x_I$  и при  $x = x_{II}$ , являются диссипативными. С этим понятием можно ознакомиться по § 13 книги [34]. В рассматриваемом нами примере уравнений акустики диссипативность будет сейчас определена.

Мы знаем, что на любых решениях этих уравнений и для любого контура выполнено интегральное тождество (1.4):

$$\oint_{\Gamma} \left( \rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2} \right) dx - pu dt = 0,$$

означающее выполнение закона сохранения энергии. Выберем контур интегрирования в виде прямоугольника, ограниченного прямыми  $t = t_0$ ,  $t = t_1$  ( $t_1 > t_0$ ),  $x = x_I$ ,  $x = x_{II}$ . Для этого контура закон сохранения энергии принимает вид

$$\begin{aligned} \int_{x_I}^{x_{II}} \left( \rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2} \right)_{t=t_0} dx = \\ = \int_{x_I}^{x_{II}} \left( \rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2} \right)_{t=t_0} dx + \int_{t_0}^{t_1} (pu)_{x=x_I} dt - \int_{t_0}^{t_1} (pu)_{x=x_{II}} dt. \end{aligned}$$

В силу однородных граничных условий

$$(\alpha_I u + \beta_I p)_{x=x_I} = 0, \quad (\alpha_{II} u + \beta_{II} p)_{x=x_{II}} = 0$$

мы можем считать, что

$$(pu)_{x=x_I} = -\frac{\beta_I}{\alpha_I} p^2(x_I, t),$$

$$(pu)_{x=x_{II}} = -\frac{\beta_{II}}{\alpha_{II}} p^2(x_{II}, t).$$

Если  $\beta_{II}$  и  $\alpha_{II}$  имеют разные знаки, а  $\beta_I$  и  $\alpha_I$  — одного знака, то

$$\int_{t_0}^{t_1} (pu)_{x=x_I} dt - \int_{t_0}^{t_1} (pu)_{x=x_{II}} dt \leq 0.$$

Следовательно,

$$\int_{x_I}^{x_{II}} \left( \rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2} \right)_{t=t_1} dx \leq \int_{x_I}^{x_{II}} \left( \rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2} \right)_{t=t_0} dx,$$

т. е. энергия с течением времени убывает (точнее говоря, не возрастает), диссилируясь на границе. Поэтому однородные граничные условия

$$(\alpha_I u + \beta_I p)_{x=x_I} = 0, \quad (\alpha_{II} u + \beta_{II} p)_{x=x_{II}} = 0$$

называются *диссипативными*, если в силу этих условий выполнены неравенства

$$(p u)_{x=x_I} \leq 0, \quad (p u)_{x=x_{II}} \geq 0. \quad (5.6)$$

Для этого, как мы только что установили, достаточно, чтобы

$$\alpha_I \beta_I \geq 0, \quad \alpha_{II} \beta_{II} \leq 0. \quad (5.7)$$

Простейшие граничные условия  $p = 0$  либо  $u = 0$  тоже, очевидно, диссипативны.

Теперь можно переходить к доказательству устойчивости разностной схемы. В § 3 мы доказывали, что для решения разностных уравнений описанной нами схемы выполнено неравенство (3.12):

$$\begin{aligned} h \sum_{j=1}^J \left[ \rho_0 \frac{(u^{j-1/2})^2}{2} + \frac{(p^{j-1/2})^2}{2\rho_0 c_0^2} \right] &\leq \\ &\leq h \sum_{j=1}^J \left( \rho_0 \frac{u_{j-1/2}^2}{2} + \frac{p_{j-1/2}^2}{2\rho_0 c_0^2} \right) - \tau (P_J U_J - P_0 U_0). \end{aligned} \quad (5.8)$$

В замечании к выводу этого неравенства, сделанном в конце § 3, было отмечено, что  $U_0$ ,  $P_0$ ,  $U_J$ ,  $P_J$  (граничные значения  $P$ ,  $U$ ) для справедливости этого вывода должны удовлетворять условиям

$$U_0 - \frac{1}{\rho_0 c_0} P_0 = u_{1/2} - \frac{1}{\rho_0 c_0} p_{1/2},$$

$$U_J + \frac{1}{\rho_0 c_0} P_J = u_{J-1/2} + \frac{1}{\rho_0 c_0} p_{J-1/2}.$$

При описанном нами способе вычисления граничных значений  $P$ ,  $U$  это требование выполнено. Так как, кроме того,  $P_0$ ,  $U_0$ ,  $P_J$ ,  $U_J$  удовлетворяют диссипативным граничным условиям

$$\alpha_1 U_0 + \beta_1 P_0 = 0, \quad \alpha_{II} U_J + \beta_{II} P_J = 0, \text{ то}$$

$$P_0 U_0 \leqslant 0, \quad P_J U_J \geqslant 0, \quad P_0 U_0 - P_J U_J \leqslant 0.$$

Итак, мы пришли к неравенству

$$h \sum_{j=1}^J \left[ \rho_0 \frac{(u^{j-1/2})^2}{2} + \frac{(p^{j-1/2})^2}{2\rho_0 c_0^2} \right] \leqslant h \sum_{j=1}^J \left( \rho_0 \frac{u_{j-1/2}^2}{2} + \frac{p_{j-1/2}^2}{2\rho_0 c_0^2} \right),$$

которое удобно записывать в символическом виде

$$\| \{u^{j-1/2}, p^{j-1/2}\} \| \leqslant \| \{u_{j-1/2}, p_{j-1/2}\} \|.$$

Устойчивость нашей схемы при диссипативных граничных условиях доказана.

## § 6. Исследование точности схемы на границах

Построение решения разностной задачи в случае линейных начальных данных и граничных условий. Обоснование первого порядка точности схемы с граничными условиями. Разностный эффект на контактной границе. Обоснование точности схемы на контактной границе.

В предыдущем параграфе мы описали разностную схему для численного интегрирования уравнений акустики

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (6.1)$$

с начальными данными  $u(x, 0) = u_0(x)$ ,  $p(x, 0) = p_0(x)$ , заданными на отрезке  $x_1 \leqslant x \leqslant x_{II}$ , и граничными условиями

$$\begin{aligned} \alpha_1 u(x_1, t) + \beta_1 p(x_1, t) &= f_1, \\ \alpha_{II} u(x_{II}, t) + \beta_{II} p(x_{II}, t) &= f_{II} \end{aligned} \quad (6.2)$$

и исследовали ее устойчивость. Настоящий параграф будет посвящен вопросу об аппроксимации и точности этой разностной схемы в окрестности границ.

Рассмотрим разностные уравнения в интервале  $j = 1/2$ , прилегающем к левой границе счетной области. Они имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{u^{1/2} - u_{1/2}}{\tau} + \frac{1}{\rho_0} \frac{P_1 - P_0}{h} &= 0, \\ \frac{p^{1/2} - p_{1/2}}{\tau} + \rho_0 c_0^2 \frac{U_1 - U_0}{h} &= 0, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где вспомогательные величины  $U_1$ ,  $P_1$  определяются формулами

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{u_{1/2} + u_{3/2}}{2} - \frac{p_{3/2} - p_{1/2}}{2\rho_0 c_0}, \\ P_1 &= \frac{p_{1/2} + p_{3/2}}{2} - \rho_0 c_0 \frac{u_{3/2} - u_{1/2}}{2}, \end{aligned} \quad (6.4)$$

а величины  $U_0$ ,  $P_0$ —из уравнений

$$\begin{aligned}\alpha_I U_0 + \beta_I P_0 &= f_I, \\ U_0 - \frac{1}{\rho_0 c_0} P_0 &= u_{1/2} - \frac{1}{\rho_0 c_0} p_{1/2}.\end{aligned}\quad (6.5)$$

Исключая из уравнений (6.3) величины  $U_1$ ,  $P_1$  с помощью формул (6.4), перепишем их в виде, который будет нам полезен в дальнейшем:

$$\begin{aligned}\frac{u^{1/2} - u_{1/2}}{\tau} + \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{p_{3/2} - p_{1/2}}{2h} - \rho_0 c_0 \frac{u_{3/2} - u_{1/2}}{2h} + \frac{p_{1/2} - P_0}{h} \right) &= 0, \\ \frac{p^{1/2} - p_{1/2}}{\tau} + \rho_0 c_0^2 \left( \frac{u_{3/2} - u_{1/2}}{2h} - \frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{p_{3/2} - p_{1/2}}{2h} + \frac{u_{1/2} - U_0}{h} \right) &= 0.\end{aligned}\quad (6.6)$$

Пусть  $u^*(x, t)$ ,  $p^*(x, t)$ —точное решение нашей задачи. Будем считать, что в (6.5)

$$\alpha_I = \alpha_I(t), \quad \beta_I = \beta_I(t), \quad f_I = f_I(t),$$

где  $t$ —время, отвечающее «нижнему» слою. Тогда формулы (6.5) могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned}p_{1/2} - P_0 &= \rho_0 c_0 (u_{1/2} - U_0), \\ u_{1/2} - U_0 &= \frac{\alpha_I u_{1/2} + \beta_I p_{1/2} - f_I}{\alpha_I + \rho_0 c_0 \beta_I} = \frac{\alpha_I (u_{1/2} - u_0^*) + \beta_I (p_{1/2} - p_0^*)}{\alpha_I + \rho_0 c_0 \beta_I},\end{aligned}\quad (6.7)$$

где  $u_0^* = u^*(x_1, t)$ ,  $p_0^* = p^*(x_1, t)$ .

Обратимся теперь к рассмотрению одного простого, но важного примера. Уравнениям акустики (6.1), как легко проверить, удовлетворяют следующие функции, линейные по  $x$  и  $t$ :

$$\begin{aligned}u^*(x, t) &= \frac{F}{\rho_0 c_0^2} x - Gt, \\ p^*(x, t) &= \rho_0 Gx - Ft,\end{aligned}\quad (6.8)$$

где  $F$ ,  $G$ —произвольные постоянные. Рассмотрим, далее, вспомогательные функции  $\tilde{u}(x, t)$ ,  $\tilde{p}(x, t)$ , отличающиеся от них на некоторые величины  $\Delta u$  и  $\Delta p$  (не зависящие от времени  $t$ ):

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x, t) &= \frac{F}{\rho_0 c_0^2} x - Gt + \Delta u, \\ \tilde{p}(x, t) &= \rho_0 Gx - Ft + \Delta p,\end{aligned}\quad (6.9)$$

и соответствующие функциям  $\tilde{u}(x, t)$ ,  $\tilde{p}(x, t)$  сеточные функции значения которых  $\tilde{u}_{j-1/2}$ ,  $\tilde{p}_{j-1/2}$  вычисляются по формулам (6.9) при  $x = (j - 1/2)h$ ,  $t = t_{n-1} = (n - 1)\tau$ , где  $n$ —номер шага по времени. Нетрудно убедиться непосредственной проверкой, что эти функции удовлетворяют уравнениям разностной схемы (2.7)

во всех «внутренних» интервалах сетки при произвольных значениях  $\Delta u$ ,  $\Delta p$  и уравнениям (6.6), (6.7) для граничного интервала  $j = 1/2$ , если  $\Delta u$  и  $\Delta p$  удовлетворяют соотношению

$$\alpha_I \left( \Delta u - \frac{Gh}{2c_0} \right) + \beta_I \left( \Delta p - \frac{Fh}{2c_0} \right) = 0. \quad (6.10)$$

Точно так же, как для интервала  $j = 1/2$ , можно рассмотреть разностные уравнения в интервале  $j = J - 1/2$ , примыкающем к правой границе, и убедиться, что те же сеточные функции  $\{\tilde{u}_{j-1/2}\}$ ,  $\{\tilde{p}_{j-1/2}\}$  удовлетворяют этим уравнениям при условии, что

$$\alpha_{II} \left( \Delta u - \frac{Gh}{2c_0} \right) + \beta_{II} \left( \Delta p - \frac{Fh}{2c_0} \right) = 0. \quad (6.11)$$

Если  $\alpha_I\beta_{II} - \alpha_{II}\beta_I \neq 0$ , то (6.10) и (6.11) однозначно определяют величины

$$\Delta u = \frac{Gh}{2c_0}, \quad \Delta p = \frac{Fh}{2c_0}. \quad (6.12)$$

Тем самым мы показали, что при использовании в граничных условиях

$$\alpha_I U_0 + \beta_I P_0 = f_I, \quad \alpha_{II} U_J + \beta_{II} P_J = f_{II}$$

значений коэффициентов, отвечающих моменту  $t$  «нижнего» слоя, по описанной нами разностной схеме вместо точного линейного решения  $u^*(x, t)$ ,  $p^*(x, t)$ , определенного формулами (6.8), получаются линейные функции (6.9) с таким же градиентом, но сдвинутые относительно точного решения на величины порядка  $h$ , определенные формулами (6.12).

Кажущаяся неоднозначность определения величин  $\Delta u$ ,  $\Delta p$  в частном случае, если коэффициенты в граничных условиях оказываются пропорциональными ( $\alpha_I\beta_{II} - \alpha_{II}\beta_I = 0$ ), снимается единственностью решения при корректной постановке смешанной задачи.

Полученные при рассмотрении этого примера формулы (6.10), (6.11) для вычисления «сдвигов» давления  $\Delta p$  и скорости  $\Delta u$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \alpha_I \left[ \Delta u + \frac{h}{2c_0} \left( \frac{\partial u^*}{\partial t} \right)_I \right] + \beta_I \left[ \Delta p + \frac{h}{2c_0} \left( \frac{\partial p^*}{\partial t} \right)_I \right] &= 0, \\ \alpha_{II} \left[ \Delta u + \frac{h}{2c_0} \left( \frac{\partial u^*}{\partial t} \right)_{II} \right] + \beta_{II} \left[ \Delta p + \frac{h}{2c_0} \left( \frac{\partial p^*}{\partial t} \right)_{II} \right] &= 0, \end{aligned} \quad (6.13)$$

где  $\left( \frac{\partial u^*}{\partial t} \right)_I$ ,  $\left( \frac{\partial p^*}{\partial t} \right)_I$  — значения производных точного решения в левой граничной точке  $x = x_I$ , а  $\left( \frac{\partial u^*}{\partial t} \right)_{II}$ ,  $\left( \frac{\partial p^*}{\partial t} \right)_{II}$  — на правой

границе  $x = x_{II}$ . В рассмотренном линейном случае

$$\left(\frac{\partial u^*}{\partial t}\right)_I = \left(\frac{\partial u^*}{\partial t}\right)_{II} = -G, \quad \left(\frac{\partial p^*}{\partial t}\right)_I = \left(\frac{\partial p^*}{\partial t}\right)_{II} = -F.$$

Как выясняется при более детальном анализе, формулы (6.13) оказываются с точностью до величин порядка  $h^2$  верными не только на линейных, но и на любых гладких решениях уравнений акустики.

Это позволяет провести исследование аппроксимации разностной схемы с граничными условиями следующим образом. Будем подставлять в разностные уравнения не точное решение  $u^*(x, t)$ ,  $p^*(x, t)$ , а вспомогательные функции

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x, t) &= u^*(x, t) + \Delta u, \\ \tilde{p}(x, t) &= p^*(x, t) + \Delta p,\end{aligned}\tag{6.14}$$

где  $\Delta u$ ,  $\Delta p$  — зависящие от  $t$  величины, определенные из уравнений (6.13). При такой подстановке для всех «внутренних» интервалов сетки удобно пользоваться записью разностных уравнений в форме (3.1). Эти уравнения, как мы видели в начале § 3, для произвольных гладких функций  $u(x, t)$ ,  $p(x, t)$  (не только решений!) можно привести к виду (3.2), (3.3), откуда сразу видно, что результат подстановки  $\tilde{u}(x, t)$ ,  $\tilde{p}(x, t)$  даст остаточные члены  $O(h + \tau)$ . Для интервала  $j = 1/2$  около левой границы  $x = x_I$  подстановку удобно делать в уравнения (6.6), дополненные формулами (6.7). Легко убедиться, что подстановка в них сеточных значений  $\tilde{u}(x, t)$ ,  $\tilde{p}(x, t)$  тоже даст остаточный член  $O(h + \tau)$ , так же как и подстановка в аналогичные уравнения для интервала около правой границы  $x = x_{II}$ .

Следовательно, построенные по формулам (6.14), (6.13) вспомогательные функции  $\tilde{u}(x, t)$ ,  $\tilde{p}(x, t)$  удовлетворяют всем разностным уравнениям с точностью  $O(h + \tau)$ . Поэтому естественно ожидать, что разностные уравнения имеют своими решениями функции  $u$ ,  $p$ , отличающиеся от  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{p}$  на величины  $O(h + \tau)$ . Это можно показать и аккуратно, пользуясь устойчивостью схемы. Поскольку, в свою очередь,  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{p}$  отличаются от точного решения  $u^*$ ,  $p^*$  на величины  $O(h)$  согласно (6.14) — (6.13), отсюда следует, что решение, которое вычисляется по разностной схеме, отличается от точного решения  $u^*$ ,  $p^*$  на  $O(h + \tau)$ .

Аккуратно эта схема рассуждений на несколько других примерах проведена в § 37 книги [34] и в § 40 книги [40].

Из методических соображений мы сочли целесообразным начать исследование точности разностной схемы с анализа смешанной задачи. Фактически же описанный прием конструирования разностного решения типа (6.9), позволяющий исследовать

эффекты, возникающие около границы счетной области, первоначально возник из рассмотрения эффекта, который был замечен при анализе газодинамических расчетов вблизи контактных разрывов.

Впервые этот эффект был обнаружен при изучении расчетных графиков К. А. Семеняевым, роль которого в создании и во внедрении методики, которой посвящена книга, нельзя недооценить. Он внимательно следил за всем первоначальным периодом исследований, приведших к ее созданию, и руководил в течение нескольких лет многочисленными расчетами, которые по ней проводились. Разностный эффект, о котором пойдет речь, был подтвержден на линеаризованной модели, подробно описанной в работе [30]. Для полноты изложения мы приведем ее здесь.

Пусть в уравнениях акустики (6.1) коэффициенты  $\rho_0, c_0$  различны для  $x > 0$  и  $x < 0$ :

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_0 &= \overline{\rho}_0, & \bar{c}_0 &= \overline{c}_0 & \text{для } x < 0, \\ \bar{\rho}_0 &= \rho_0, & \bar{c}_0 &= c_0 & \text{для } x > 0. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Легко проверить, что в таком случае уравнения допускают следующее решение, непрерывное в точке  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} \hat{u}(x, t) &= \begin{cases} \frac{F}{\bar{\rho}_0 \bar{c}_0^2} x - Gt & \text{при } x < 0, \\ \frac{F}{\rho_0 c_0^2} x - Gt & \text{при } x > 0, \end{cases} \\ \hat{p}(x, t) &= \begin{cases} \bar{\rho}_0 Gx - Ft & \text{при } x < 0, \\ \rho_0 Gx - Ft & \text{при } x > 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (6.16)$$

где  $F, G$  — произвольные постоянные.

На рис. 6.1,  $a, b$  приведены графики, полученные при расчете решения такого вида по описанной нами разностной схеме. Конкретные значения параметров были взяты следующими:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_0 &= 4,0, & \bar{c}_0 &= 0,5, & F &= -3,0, \\ \bar{\rho}_0 &= 2,0, & \bar{c}_0 &= 1,0, & G &= 2,0. \end{aligned}$$

Шаг равномерной сетки  $h = 0,05$ ,  $v = \tau/h = 0,8$ . Тогда решение (6.16) таково:

$$\begin{aligned} \hat{u} &= -3x - 2t, & \hat{p} &= 8x + 3t & \text{при } x < 0, \\ \hat{u} &= -1,5x - 2t, & \hat{p} &= 4x + 3t & \text{при } x > 0. \end{aligned}$$

Рис. 6.1 соответствует моменту  $t^* = 0,8$  (20-й шаг расчета), для которого

$$\hat{u}(0, t^*) = -1,6, \quad \hat{p}(0, t^*) = 2,4.$$

Возникновение в разностном решении разрывов при  $x=0$ , аналогичных сдвигам давления  $\Delta p$  и скорости  $\Delta u$ , описанным выше, допускает следующее объяснение. При составлении разностных уравнений (2.2), (2.3) для уравнений (1.1) будем использовать значения  $\rho_0 = \bar{\rho}_0$ ,  $c_0 = \bar{c}_0$ ,  $h = \bar{h}$  для номеров  $j < 0$  и

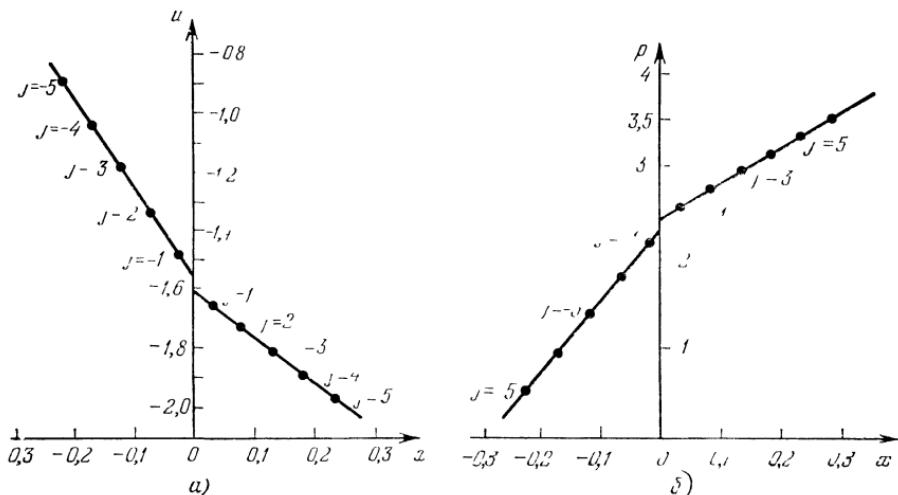


Рис. 6.1.

значения  $\rho_0 = \bar{\rho}_0$ ,  $c_0 = \bar{c}_0$ ,  $h = \bar{h}$  для номеров  $j > 0$ . (Различные шаги  $\bar{h}$ ,  $\bar{\bar{h}}$  мы оговариваем для дальнейшего.) Величины  $U_0$ ,  $P_0$  в узле  $x_0 = 0$  в силу изложенных принципов построения разностной схемы должны быть вычислены из уравнений

$$\begin{aligned} U_0 + \frac{P_0}{\rho_0 c_0} &= u_{-1/2} + \frac{p_{-1/2}}{\rho_0 c_0}, \\ U_0 - \frac{P_0}{\bar{\rho}_0 \bar{c}_0} &= u_{1/2} - \frac{p_{1/2}}{\bar{\rho}_0 \bar{c}_0}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Можно убедиться проверкой, что полученная таким образом система разностных уравнений (мы будем рассматривать ее без граничных условий, т. е. на бесконечной сетке) допускает решение, которое, как и (6.16), является линейной функцией  $x$  и  $t$  в областях  $x < 0$  и  $x > 0$  и имеет в этих областях одинаковые

градиенты с (6.16). Таким решением будет

$$u(x, t) = \begin{cases} \hat{u}(x, t) + \frac{G\bar{h}}{2c_0} + k_1 & \text{при } x < 0, \\ \hat{u}(x, t) + \frac{G\bar{h}}{2c_0} + k_1 & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad (6.18)$$

$$p(x, t) = \begin{cases} \hat{p}(x, t) + \frac{F\bar{h}}{2c_0} + k_2 & \text{при } x < 0, \\ \hat{p}(x, t) + \frac{F\bar{h}}{2c_0} + k_2 & \text{при } x > 0, \end{cases}$$

где  $k_1, k_2$  — произвольные постоянные. Значения разностного решения  $u^{i-1/2}, p^{i-1/2}$  на  $n$ -м шаге по времени вычисляются из этих формул при  $x = (j - 1/2)\bar{h}$ ,  $t = n\tau$  с соответствующим значением  $\bar{h} = h$  или  $\bar{h} = \bar{h}$ .

Формулы (6.18) дают при  $x \rightarrow 0$  справа и слева различные значения, разности между которыми составляют

$$[u] = \frac{G}{2} \left( \frac{\bar{h}}{c_0} - \frac{\bar{h}}{c_0} \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right)_{x=0} \left( \frac{\bar{h}}{c_0} - \frac{\bar{h}}{c_0} \right),$$

$$[p] = \frac{F}{2} \left( \frac{\bar{h}}{c_0} - \frac{\bar{h}}{c_0} \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} \right)_{x=0} \left( \frac{\bar{h}}{c_0} - \frac{\bar{h}}{c_0} \right). \quad (6.19)$$

Поскольку разностное решение определено только в полуцелых точках  $j - 1/2$ , никакого реального разрыва давлений и скоростей мы не наблюдаем. Однако если линейно проэкстраполировать результаты расчета в точку  $x = 0$ , то мы и получим такой разрыв. На рис. 6.1 он соответствует конкретным значениям числовых параметров.

Полученные формулы (6.19) «скачка» давления и скорости на контактной границе, как выясняется при более детальном рассмотрении, оказываются с точностью до величин порядка  $h^2$  верными не только на линейных, но и на любых гладких решениях уравнений акустики. При этом формулы для «скаков» принимают вид

$$[u] = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right)_{x=0} \left( \frac{\bar{h}}{c_0} - \frac{\bar{h}}{c_0} \right) + O(h^2),$$

$$[p] = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} \right)_{x=0} \left( \frac{\bar{h}}{c_0} - \frac{\bar{h}}{c_0} \right) + O(h^2), \quad (6.20)$$

где  $\hat{u}(x, t), \hat{p}(x, t)$  — точное решение задачи для системы уравнений акустики (6.1) с разрывными коэффициентами (6.15), не-

прерывное в точке  $x=0$ :

$$\hat{u}(-0, t) = \hat{u}(+0, t), \quad \hat{p}(-0, t) = \hat{p}(+0, t).$$

При дальнейшем исследовании мы будем предполагать его гладкость (обеспечиваемую соответствующими начальными данными) во всех точках, кроме  $x=0$ . В точке  $x=0$ , кроме непрерывности, предполагается гладкость только производных по времени  $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial \hat{p}}{\partial t}$ .

Опишем теперь кратко, как проводится исследование аппроксимации разностной схемы на контактной границе. Для этой цели построим вспомогательные функции:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) &= \begin{cases} \hat{u}(x, t) - \frac{\bar{h}}{2\bar{c}_0} \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right)_{x=0} & \text{при } x < 0, \\ \hat{u}(x, t) - \frac{\bar{h}}{2\bar{c}_0} \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right)_{x=0} & \text{при } x > 0, \end{cases} \\ \tilde{p}(x, t) &= \begin{cases} \hat{p}(x, t) - \frac{\bar{h}}{2\bar{c}_0} \left( \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} \right)_{x=0} & \text{при } x < 0, \\ \hat{p}(x, t) - \frac{\bar{h}}{2\bar{c}_0} \left( \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} \right)_{x=0} & \text{при } x > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.21)$$

Они отличаются от точного решения на величину порядка  $\bar{h}$  причем отличие введено таким образом, чтобы оно моделировало описанный выше граничный эффект. Проверяя аппроксимацию, мы будем подставлять в разностные уравнения не точное решение  $\hat{u}(x, t)$ ,  $\hat{p}(x, t)$ , а эти вспомогательные функции  $\tilde{u}(x, t)$ ,  $\tilde{p}(x, t)$ . Для всех «внутренних» интервалов сетки такая подстановка ничем не отличается от описанной выше для смешанной задачи и приводит к остаточным членам  $O(h+\tau)$ . Для интервалов  $j=1/2$  и  $j=-1/2$ , примыкающих к точке  $x_0=0$ , исследование должно быть проведено особо. Мы опишем его только для  $j=1/2$  и рассмотрим только одно из двух разностных уравнений схемы, например второе. Исходя из изложенного в начале этого параграфа, можно сразу взять его в форме второго из уравнений (6.6), полагая  $\rho_0 = \bar{\rho}_0$ ,  $c_0 = \bar{c}_0$ . Подставив в него выражение для  $U_0$ , полученное из формул (6.17):

$$U_0 = u_{1/2} - \frac{\bar{\rho}_0 \bar{c}_0 (u_{1/2} - u_{-1/2}) - (p_{1/2} - p_{-1/2})}{\bar{\rho}_0 \bar{c}_0 + \bar{\rho}_0 \bar{c}_0},$$

можно записать это уравнение в виде

$$\frac{p^{1/2} - p_{1/2}}{\tau} - \bar{\rho}_0 \bar{c}_0^2 \left[ \frac{u_{3/2} - u_{1/2}}{2\bar{h}} - \frac{p_{3/2} - p_{1/2}}{2\bar{h}\bar{\rho}_0 \bar{c}_0} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\bar{\rho}_0 \bar{c}_0 + \bar{\rho}_0 \bar{c}_0} \left( \frac{u_{1/2} - u_{-1/2}}{\bar{h}} \bar{\rho}_0 \bar{c}_0 - \frac{p_{1/2} - p_{-1/2}}{\bar{h}} \right) \right] = 0. \quad (6.22)$$

В полученное уравнение (6.22) подставим далее сеточные значения вспомогательных функций  $\tilde{u}(x, t)$ ,  $\tilde{p}(x, t)$ , определенных формулами (6.21), и проведем разложение входящих в него выражений по формуле Тейлора. При этом будем иметь в виду, что в силу разрывности коэффициентов (6.15) в уравнениях (6.1) для производных точного решения  $\hat{u}(x, t)$ ,  $\hat{p}(x, t)$  выполнены равенства

$$\left( \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} \right)_{x=0} = -\bar{\rho}_0 \bar{c}_0^2 \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right)_{x=-0} = -\bar{\rho}_0 \bar{c}_0^2 \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right)_{x=+0}, \\ \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right)_{x=0} = -\frac{1}{\bar{\rho}_0} \left( \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \right)_{x=-0} = -\frac{1}{\bar{\rho}_0} \left( \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \right)_{x=+0}. \quad (6.23)$$

Начнем с выражения  $\tilde{u}_{1/2} - \tilde{u}_{-1/2}$ . Поскольку

$$\tilde{u}_{1/2} - \tilde{u}_{-1/2} = \hat{u}_{1/2} - \hat{u}_{-1/2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right)_{x=0} \left( \frac{\bar{h}}{\bar{c}_0} - \frac{\bar{h}}{\bar{c}_0} \right)$$

и, в свою очередь,

$$\hat{u}_{1/2} - \hat{u}_{-1/2} = (\hat{u}_{1/2} - \hat{u}_0) + (\hat{u}_0 - \hat{u}_{-1/2}) = \\ = \frac{\bar{h}}{2} \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right)_{-0} + \frac{\bar{h}}{2} \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right)_{+0} + O(h^2),$$

с помощью формул (6.23) получаем

$$\tilde{u}_{1/2} - \tilde{u}_{-1/2} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} \right)_{x=0} \left( \frac{\bar{h}}{\bar{\rho}_0 \bar{c}_0^2} + \frac{\bar{h}}{\bar{\rho}_0 \bar{c}_0^2} \right) - \\ - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right)_{x=0} \left( \frac{\bar{h}}{\bar{c}_0} - \frac{\bar{h}}{\bar{c}_0} \right) + O(h^2).$$

Аналогично получается формула

$$\tilde{p}_{1/2} - \tilde{p}_{-1/2} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right)_{x=0} (\bar{\rho}_0 \bar{h} + \bar{\rho}_0 \bar{h}) - \\ - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} \right)_{x=0} \left( \frac{\bar{h}}{\bar{c}_0} - \frac{\bar{h}}{\bar{c}_0} \right) + O(h^2).$$

Пользуясь этими результатами и произведя разложение по фор-

муге Тейлора остальных слагаемых в уравнении (6.22), после элементарной выкладки можно убедиться, что его левая часть на функциях  $\hat{u}(x, t)$ ,  $\hat{p}(x, t)$  принимает вид

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial t} + \bar{\rho}_0 \bar{c}_0^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - \frac{1}{\bar{\rho}_0 \bar{c}_0} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \right) - \frac{1}{2 \bar{c}_0} \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{1}{\bar{\rho}_0 \bar{c}_0} \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} \right) \right] + O(h). \quad (6.24)$$

Значения производных в этом выражении берутся в точке  $x = \bar{h}/2$ , которую можно принять за опорную при разложениях. В силу уравнений акустики выражение (6.24) есть величина  $O(h)$ .

Таким образом, из проведенного исследования и аналогичного исследования, которое можно провести для первого из уравнений (6.3) и разностных уравнений в точке  $x = -\bar{h}/2$ , следует, что вспомогательные функции  $\hat{u}(x, t)$ ,  $\hat{p}(x, t)$ , построенные по гладким функциям  $u(x, t)$ ,  $p(x, t)$  с помощью формул (6.21), удовлетворяют всем разностным уравнениям с точностью до  $O(h)$ . После этого могут быть произнесены те же слова, что и в случае смешанной задачи: естественно ожидать, что разностные уравнения имеют своими решениями функции  $u$ ,  $p$ , отличающиеся от  $\hat{u}$ ,  $\hat{p}$  на величины  $O(h)$ . Поскольку, в свою очередь,  $\hat{u}$ ,  $\hat{p}$  отличаются на  $O(h)$  от точного решения  $u$ ,  $p$  по построению (6.21), отсюда следует, что существует решение разностных уравнений, отличающееся от точного решения  $\hat{u}$ ,  $\hat{p}$  на  $O(h)$ .

В заключение несколько слов о борьбе с обнаруженным эффектом. Как видно из формул (6.19), для его ослабления желательно выбирать шаги сетки  $\bar{h}$  и  $\bar{\bar{h}}$  так, чтобы было выполнено условие

$$\frac{\bar{h}}{\bar{c}_0} \approx \frac{\bar{\bar{h}}}{\bar{\bar{c}}_0}. \quad (6.25)$$

В тех случаях, когда это удается сделать, описанный эффект «скакков» давления и скорости, проэкстраполированных на контактную границу слева и справа, практически удается устраниить, что свидетельствует о повышении точности схемы на границе. Правда, здесь надо быть осторожным. При наличии нескольких границ выбором шагов в средних областях можно добиться уменьшения разрывов на всех границах. Но, несмотря на это, разность погрешностей остается неизменной. Мы ограничимся этим замечанием, не останавливаясь на подробном исследовании отмеченного здесь эффекта. Кроме того, в нелинейных газодинамических задачах, которые мы будем рассматривать в следующих главах книги, выполнение условия (6.25) затрудняется тем, что скорость звука  $c_0$  меняется в процессе расчета.

## § 7. Двумерная акустика

Уравнения звуковых волн, зависящих от двух пространственных переменных. Прямоугольная разностная сетка. Разностные законы сохранения. Расчет вспомогательных («больших») величин с помощью распадов разрыва. Постановка граничных условий. Расчет «больших» величин на границах.

Описанная в §§ 2, 5 разностная схема для численного интегрирования уравнений акустики с одной пространственной переменной легко, но не совсем тривиально обобщается на случай двух или более пространственных переменных. В качестве

иллюстрации мы рассмотрим ее применение к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (7.1)$$

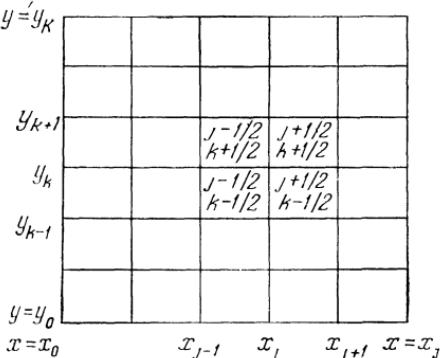


Рис. 7.1.

$v = v(x, y, t)$  — две компоненты скорости среды (по  $x$  и  $y$  соответственно),  $p = p(x, y, t)$  — давление в среде. Постоянные  $\rho_0$  и  $c_0$  имеют тот же смысл, что и в одномерном случае, описанном в § 1.

Конструирование разностной схемы начинается с построения разностной сетки, по которой будет вестись расчет. Для простоты изложения выберем равномерную прямоугольную сетку, изображенную на рис. 7.1. Она образована двумя семействами прямых линий. Первое семейство — прямые  $x = x_j$ , параллельные оси  $y$ . Второе — прямые  $y = y_k$ , параллельные оси  $x$ . Предполагаем, что величина  $h_x = x_j - x_{j-1}$  одинакова для всех значений  $j$ , а величина  $h_y = y_k - y_{k-1}$  — для всех значений  $k$ , и будем называть  $h_x$ ,  $h_y$  шагами сетки по  $x$  и  $y$  соответственно. Прямоугольник с вершинами в точках  $(x_{j-1}, y_{k-1})$ ,  $(x_j, y_{k-1})$ ,  $(x_j, y_k)$ ,  $(x_{j-1}, y_k)$  будем называть ячейкой сетки с номером  $(j-1/2, k-1/2)$ .

Функции  $u(x, y, t)$ ,  $v(x, y, t)$ ,  $p(x, y, t)$ , описывающие состояние среды на момент времени  $t$ , будем считать постоянными в пределах одной ячейки сетки и этим постоянным присваивать номер соответствующей ячейки. В частности, для ячейки с номером  $(j-1/2, k-1/2)$  они имеют вид  $u_{j-1/2, k-1/2}$ ,  $v_{j-1/2, k-1/2}$ ,  $p_{j-1/2, k-1/2}$ .

Расчет ведется последовательными шагами по времени. Отдельный шаг расчета состоит в том, что по величинам  $\{(u, v, p)_{j-1/2, k-1/2}\}$  на момент времени  $t = t_0$  определяются такие же величины, постоянные по каждой ячейке, в момент времени  $t = t_0 + \tau$ , где  $\tau$  — величина шага по времени. Их значения на момент  $t_0 + \tau$  мы будем отличать тем, что номера ячейки будем приписывать в виде верхних индексов:  $(u, v, p)^{j-1/2, k-1/2}$  — значения для ячейки с номером  $(j-1/2, k-1/2)$  на момент  $t_0 + \tau$ .

Основанием для вывода расчетных формул будут служить интегральные соотношения, представляющие законы сохранения массы и импульса для рассматриваемой акустической задачи:

$$\begin{aligned} \oint \rho_0 u dx dy + p dy dt &= 0, \\ \oint \rho_0 v dx dy + p dx dt &= 0, \\ \oint p dx dy + \rho_0 c_0^2 (u dy dt + v dx dt) &= 0. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Интегралы в левых частях этих равенств могут быть взяты по любой замкнутой поверхности, гомеоморфной сфере в трехмерном пространстве  $x, y, t$ . Система дифференциальных уравнений (7.1) является следствием этих законов сохранения.

Возьмем первое из интегральных равенств (7.2):

$$\oint \rho_0 u dx dy + p dy dt = 0,$$

и применим к ячейке с номером  $(j-1/2, k-1/2)$  в течение времени  $\tau$ . В результате получим

$$\begin{aligned} \rho_0 (u^{j-1/2, k-1/2} - u_{j-1/2, k-1/2}) h_x h_y + \\ + \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \int_{y_{k-1}}^{y_k} [p(x_j, y, t) - p(x_{j-1}, y, t)] dy dt = 0. \end{aligned} \quad (7.3)$$

В этой формуле слагаемое

$$\int_{t_0}^{t_0 + \tau} \int_{y_{k-1}}^{y_k} p(x_j, y, t) dy dt \quad (7.4)$$

представляет интеграл, взятый по границе между ячейками  $(j-1/2, k-1/2)$  и  $(j+1/2, k-1/2)$ , которой естественно присвоить номер  $(j, k-1/2)$ . Координата  $x$  вдоль этой границы постоянна и равна  $x_j$ . В отличие от разобранного в § 1 одномерного случая, величина  $p(x_j, y, t)$  в этом интеграле не будет постоянна вдоль границы ячейки, даже если при  $t = t_0$  внутри ячеек  $(j-1/2, k-1/2)$  и  $(j+1/2, k-1/2)$  величины постоянны и шаг  $\tau$  достаточно мал. Постоянство будет нарушаться в окрест-

ности угловых точек, где возникают сложные неодномерные течения. При составлении разностной схемы мы, однако, не будем обращать на это внимания, заменяя в (7.4) функцию  $p(x_j, y, t)$  постоянной в течение времени от  $t_0$  до  $t_0 + \tau$ . Эту постоянную обозначим  $P_{j, k-1/2}$ .

В настоящее время, после того как по схеме проведено уже много удачных расчетов, этот шаг кажется совершенно естественным. Но на него было очень трудно решиться в период, когда схема впервые конструировалась. В 1956 г. К. В. Брушлинский выполнил построение схемы для уравнений акустики с точным расчетом решений в углах по функционально-инвариантным решениям С. Л. Соболева. По этой схеме были проведены модельные расчеты, сравнение которых с расчетами по описываемой «грубой» схеме показало, что они практически совпадают. Только после этого было решено пользоваться той «грубой» схемой, которую мы описываем. Исследование К. В. Брушлинского было осуществлено по инициативе и под руководством И. М. Гельфанд, внимательно следившего за разработкой схемы. Дискуссии с ним были для этой разработки чрезвычайно существенны.

Вернемся снова к описанию схемы. Вводя аналогичную постоянную  $P_{j-1, k-1/2}$  для счета интегрального второго слагаемого

$$\int_{t_0}^{t_0 + \tau} \int_{y_{k-1}}^{y_k} p(x_{j-1}, y, t) dy dt$$

в формуле (7.3), мы придем к следующему результату:

$$\rho_0(u_{j-1/2, k-1/2} - u_{j-1/2, k-1/2}) h_x h_y + \tau h_y (P_{j, k-1/2} - P_{j-1, k-1/2}) = 0. \quad (7.5)$$

Аналогично переводятся в разностные формулы и остальные законы сохранения (7.2):

$$\begin{aligned} \rho_0(v_{j-1/2, k-1/2} - v_{j-1/2, k-1/2}) h_x h_y + \tau h_x (P_{j-1/2, k} - P_{j-1/2, k-1}) &= 0, \\ (\rho_{j-1/2, k-1/2} - \rho_{j-1/2, k-1/2}) h_x h_y + & \\ + \tau \rho_0 c_0^2 h_y (U_{j, k-1/2} - U_{j-1, k-1/2}) + & \\ + \tau \rho_0 c_0^2 h_x (V_{j-1/2, k} - V_{j-1/2, k-1}) &= 0. \end{aligned} \quad (7.6)$$

В этих формулах пока еще не определены величины  $P, U, V$ , которые должны быть вычислены на границах ячеек (в дальнейшем мы будем для краткости называть их «большими» величинами). По аналогии с одномерной схемой мы используем для их вычисления решения модельных задач, которые условно назовем *расчетом распадов разрыва*.

Пусть в полуплоскости  $x < x_j$  состояние среды в некоторый момент описывается постоянными  $(u, v, p)_{j-1/2, k-1/2}$ , а в полуплоскости  $x > x_j$ —постоянными  $(u, v, p)_{j+1/2, k-1/2}$ .

Тогда, как мы уже видели в § 1, образуются звуковые волны, распространяющиеся вправо и влево со скоростью звука  $c_0$ , и на линии  $x=x_j$  значения величин  $u$ ,  $p$  вычисляются по формулам, аналогичным (1.12):

$$\begin{aligned} u &= U_{j, k-1/2} = \\ &= \frac{u_{j-1/2, k-1/2} + u_{j+1/2, k-1/2}}{2} - \frac{p_{j+1/2, k-1/2} - p_{j-1/2, k-1/2}}{2\rho_0 c_0}, \\ p &= P_{j, k-1/2} = \\ &= \frac{p_{j-1/2, k-1/2} + p_{j+1/2, k-1/2}}{2} - \rho_0 c_0 \frac{u_{j+1/2, k-1/2} - u_{j-1/2, k-1/2}}{2}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Их мы и будем использовать в формулах (7.5), (7.6). Заметим, что величина  $V_{j, k-1/2}$  в них не участвует, а поэтому определять ее нет нужды.

Для расчета «больших» величин  $P_{j-1/2, k}$ ,  $V_{j-1/2, k}$  рассматривается аналогичная задача о распаде разрыва, который произойдет, если при  $y < y_k$  поместить среду, характеризующуюся постоянными  $(u, v, p)_{j-1/2, k-1/2}$ , а при  $y > y_k$ —постоянными  $(u, v, p)_{j-1/2, k+1/2}$ . Тогда на линии  $y=y_k$  мы будем иметь

$$\begin{aligned} v &= V_{j-1/2, k} = \\ &= \frac{v_{j-1/2, k-1/2} + v_{j-1/2, k+1/2}}{2} - \frac{p_{j-1/2, k+1/2} - p_{j-1/2, k-1/2}}{2\rho_0 c_0}, \\ p &= P_{j-1/2, k} = \\ &= \frac{p_{j-1/2, k-1/2} + p_{j-1/2, k+1/2}}{2} - \rho_0 c_0 \frac{v_{j-1/2, k+1/2} - v_{j-1/2, k-1/2}}{2}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Величину  $U_{j-1/2, k}$  определять нет необходимости.

Из формул (7.5), (7.6) можно выразить значения величин  $(u, v, p)_{j-1/2, k-1/2}$  на момент времени  $t=t_0+\tau$  (т. е. на «верхнем» слое):

$$\begin{aligned} u^{j-1/2, k-1/2} &= u_{j-1/2, k-1/2} - \frac{\tau}{\rho_0 h_x} (P_{j, k-1/2} - P_{j-1, k-1/2}), \\ v^{j-1/2, k-1/2} &= v_{j-1/2, k-1/2} - \frac{\tau}{\rho_0 h_y} (P_{j-1/2, k} - P_{j-1/2, k-1}), \\ p^{j-1/2, k-1/2} &= p_{j-1/2, k-1/2} - \frac{\tau}{h_x} \rho_0 c_0^2 (U_{j, k-1/2} - U_{j-1, k-1/2}) - \\ &\quad - \frac{\tau}{h_y} \rho_0 c_0^2 (V_{j-1/2, k} - V_{j-1/2, k-1}), \end{aligned} \quad (7.9)$$

и, используя формулы (7.7), (7.8) для вспомогательных «больших» величин, получить, таким образом, их явные выражения через значения величин  $\{(u, v, p)_{j-1/2, k-1/2}\}$  на момент времени  $t_0$

(на «нижнем» слое). Можно проверить, что полученная система разностных уравнений аппроксимирует систему дифференциальных уравнений (7.1) с первым порядком аппроксимации, если функции  $u(x, y, t)$ ,  $v(x, y, t)$ ,  $p(x, y, t)$  считать достаточно гладкими.

До сих пор мы вели описание разностной схемы в предположении, что сетка является неограниченной в направлении переменных  $x$  и  $y$ . Практически, однако, расчет ведется в конечной области, на границах которой задаются те или иные граничные условия. Для простоты мы рассмотрим случай, когда область расчета представляет прямоугольник, ограниченный прямыми  $x = x_0$ ,  $x = x_J$ ,  $y = y_0$ ,  $y = y_K$ . Чтобы система равенств (7.9) позволяла вычислить все величины  $(u, v, p)^{j-1/2, k-1/2}$ , ее нужно дополнить формулами для вычисления следующих «больших» величин:

$$\begin{aligned} P_{0, k-1/2}, U_{0, k-1/2} &\text{ на левой границе } x = x_0, \\ P_{J, k-1/2}, U_{J, k-1/2} &\text{ на правой границе } x = x_J, \\ P_{j-1/2, 0}, V_{j-1/2, 0} &\text{ на нижней границе } y = y_0, \\ P_{j-1/2, K}, V_{j-1/2, K} &\text{ на верхней границе } y = y_K. \end{aligned}$$

Рассмотрим ситуацию на интервале  $y_{k-1} < y < y_k$  левой границы. По аналогии с одномерным случаем одно уравнение для «больших» величин выписывается как соотношение, выражающее сохранение риманова инварианта  $u - p/(\rho_0 c_0)$  вдоль характеристик  $dx/dt = -c_0$  «одномерной» системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \tag{7.10}$$

получающейся из (7.1) вычеркиванием производных по  $y$ . Это соотношение имеет вид

$$U_{0, k-1/2} - \frac{1}{\rho_0 c_0} P_{0, k-1/2} = u_{1/2, k-1/2} - \frac{1}{\rho_0 c_0} p_{1/2, k-1/2}. \tag{7.11}$$

Если на границе  $x = x_0$  задано граничное условие

$$\alpha_0(y, t) u(x_0, y, t) + \beta_0(y, t) p(x_0, y, t) = f_0(y, t), \tag{7.12}$$

то, аппроксимируя его на интервале  $y_{k-1} < y < y_k$  соотношением

$$\alpha_{0, k-1/2} U_{0, k-1/2} + \beta_{0, k-1/2} P_{0, k-1/2} = f_{0, k-1/2}, \tag{7.13}$$

мы получаем возможность из уравнений (7.11) и (7.13) вычислить требуемые величины  $U_{0, k-1/2}$ ,  $P_{0, k-1/2}$ . Для этого нужно только,

чтобы было выполнено условие

$$\begin{vmatrix} \alpha_0(y, t) & \beta_0(y, t) \\ 1 & -\frac{1}{\rho_0 c_0} \end{vmatrix} \neq 0,$$

аналогичное первому из условий (5.2) в одномерном случае.

Если граничное условие имеет более общий вид, чем (7.12), и содержит функцию  $v(x_0, y, t)$ , то после аппроксимации его соотношением

$$\alpha_{0, k-1/2} U_{0, k-1/2} + \beta_{0, k-1/2} P_{0, k-1/2} + \gamma_{0, k-1/2} V_{0, k-1/2} = f_{0, k-1/2}$$

можно исключить  $V_{0, k-1/2}$ , полагая, например,  $V_{0, k-1/2} = v_{1/2, k-1/2}$  на основании уравнения  $\partial v / \partial t = 0$  в упомянутой выше «одномерной» системе (7.10). Совершенно аналогично рассматривается вопрос о вычислении «больших» величин  $(P, U)_{J, k-1/2}$  на правой границе  $x = x_J$ . Изменение состоит лишь в замене соотношения (7.11) на

$$U_{J, k-1/2} + \frac{1}{\rho_0 c_0} P_{J, k-1/2} = u_{J-1/2, k-1/2} + \frac{1}{\rho_0 c_0} p_{J-1/2, k-1/2},$$

выражающее постоянство инварианта  $u + p / (\rho_0 c_0)$  вдоль характеристик  $dx/dt = c_0$ , и использовании граничных условий для правой границы.

Для вычисления «больших» величин на нижней ( $y = y_0$ ) и верхней ( $y = y_K$ ) границах расчетной области привлекается «одномерная» система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \tag{7.14}$$

получающаяся из (7.1) вычеркиванием производных по  $x$ . Мы не будем на этом останавливаться более подробно, поскольку все действия аналогичны описанным для левой границы.

## § 8. Устойчивость двумерной схемы для акустики

Закон сохранения энергии. Сеточная норма функций. Расщепление двумерной схемы на «одномерные». Достаточное условие устойчивости схемы в энергетической норме при диссипативных граничных условиях. Доказательство его необходимости методом Фурье.

Для рассмотренной в предыдущем параграфе системы уравнений (7.1) имеет место тождество

$$\begin{aligned} u \left( \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) + v \left( \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} \right) + p \left( \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \\ = \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_0 \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (pu) + \frac{\partial}{\partial y} (pv) = 0, \end{aligned}$$

из которого следует, что по любой замкнутой поверхности и для гладких функций  $u$ ,  $v$ ,  $p$

$$\oint \left( \rho_0 \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2} \right) dx dy + pu dy dt + pv dt dx = 0. \quad (8.1)$$

Это интегральное тождество является законом сохранения энергии акустических волн в случае двух пространственных переменных.

Исследование устойчивости будет основано на неравенстве, которое является разностной моделью интегрального тождества (8.1). Аналогично подобным рассмотрениям в одномерном случае, энергетическую норму сеточной вектор-функции  $\mathbf{F} = \{(u, v, p)_{j-1/2, k-1/2}\}$  на временном слое  $t = t_0$  определим следующей формулой:

$$\|\mathbf{F}\| = \sqrt{\sum_j h_x \sum_k h_y \left( \rho_0 \frac{u_{j-1/2, k-1/2}^2 + v_{j-1/2, k-1/2}^2}{2} + \frac{p_{j-1/2, k-1/2}^2}{2\rho_0 c_0^2} \right)}. \quad (8.2)$$

Мы покажем, что наша разностная схема не увеличивает эту сеточную норму при переходе на один шаг по времени, если он ограничен условием, которое будет приведено ниже. Это и будет означать устойчивость описанной разностной схемы.

При доказательстве того, что  $\|\mathbf{F}\|$  не возрастает, мы воспользуемся приемом расщепления многомерной схемы на «одномерные», предложенным в работе [5]. Нашей разностной схеме соответствует некоторая матрица  $\mathbf{H}$ , которая переводит вектор  $\mathbf{F}$ , отвечающий моменту  $t = t_0$ , в вектор такой же размерности  $\tilde{\mathbf{F}}$ , отвечающий следующему моменту  $t = t_0 + \tau$ . Эта матрица  $\mathbf{H}$  может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = \mathbf{I} + \tau_x \mathbf{H}_x + \tau_y \mathbf{H}_y = \\ = \left( 1 - \frac{\tau}{\tau_x} - \frac{\tau}{\tau_y} \right) \mathbf{I} + \frac{\tau}{\tau_x} (\mathbf{I} + \tau_x \mathbf{H}_x) + \frac{\tau}{\tau_y} (\mathbf{I} + \tau_y \mathbf{H}_y). \end{aligned} \quad (8.3)$$

Здесь  $\mathbf{I}$  — единичная матрица, а матрицы  $\mathbf{I} + \tau_x \mathbf{H}_x$  и  $\mathbf{I} + \tau_y \mathbf{H}_y$  задают «одномерные» разностные схемы, из которых первая действует на вектор  $\{(u, v, p)_{j-1/2, k-1/2}\}$  при фиксированном индексе  $k-1/2$ , а вторая — при фиксированном индексе  $j-1/2$ ,  $\tau_x$  и  $\tau_y$  —

«шаги по времени» этих фиктивных «одномерных» схем ( $\tau_x > 0$ ,  $\tau_y > 0$ ).

Так как по определению нормы

$$\|\mathbf{H}\| \leq \left| 1 - \frac{\tau}{\tau_x} - \frac{\tau}{\tau_y} \right| \cdot \|\mathbf{I}\| + \frac{\tau}{\tau_x} \|\mathbf{I} + \tau_x \mathbf{H}_x\| + \frac{\tau}{\tau_y} \|\mathbf{I} + \tau_y \mathbf{H}_y\|,$$

то для устойчивости схемы, задаваемой матрицей  $\mathbf{H}$ , достаточно выбрать ее шаг, исходя из условия

$$1 - \frac{\tau}{\tau_x} - \frac{\tau}{\tau_y} \geq 0, \quad (8.4)$$

если  $\tau_x$  и  $\tau_y$  обеспечивают выполнение неравенств

$$\|\mathbf{I} + \tau_x \mathbf{H}_x\| \leq 1, \quad \|\mathbf{I} + \tau_y \mathbf{H}_y\| \leq 1, \quad (8.5)$$

т. е. устойчивость «одномерных» схем.

Мы сейчас приведем формулы для этих «одномерных» схем, отвечающих матрицам  $\mathbf{I} + \tau_x \mathbf{H}_x$  и  $\mathbf{I} + \tau_y \mathbf{H}_y$ . Первая из схем дается формулами

$$\begin{aligned} \bar{u}^{j-1/2, k-1/2} &= u_{j-1/2, k-1/2} - \frac{\tau_x}{\rho_0 h_x} (P_{j, k-1/2} - P_{j-1, k-1/2}), \\ \bar{p}^{j-1/2, k-1/2} &= p_{j-1/2, k-1/2} - \frac{\tau_x}{h_x} \rho_0 c_0^2 (U_{j, k-1/2} - U_{j-1, k-1/2}), \\ \bar{v}^{j-1/2, k-1/2} &= v_{j-1/2, k-1/2}, \end{aligned} \quad (8.6)$$

где «большие» величины определяются формулами (7.7), и аппроксимирует систему уравнений (7.10), а вторая — формулами

$$\begin{aligned} \bar{\bar{u}}^{j-1/2, k-1/2} &= u_{j-1/2, k-1/2}, \\ \bar{\bar{v}}^{j-1/2, k-1/2} &= v_{j-1/2, k-1/2} - \frac{\tau_y}{h_y} \frac{1}{\rho_0} (P_{j-1/2, k} - P_{j-1/2, k-1}), \\ \bar{\bar{p}}^{j-1/2, k-1/2} &= p_{j-1/2, k-1/2} - \frac{\tau_y}{h_y} \rho_0 c_0^2 (V_{j-1/2, k} - V_{j-1/2, k-1}), \end{aligned} \quad (8.7)$$

в которых «большие» величины определяются формулами (7.8), и аппроксимирует систему уравнений (7.14).

Выясним условия, которые обеспечивают выполнение первого из неравенств (8.5):

$$\|\mathbf{I} + \tau_x \mathbf{H}_x\| \leq 1. \quad (8.8)$$

Вся необходимая для этого работа была выполнена в § 3 для задачи без граничных условий и в § 6 для случая диссипативных граничных условий. Из приведенных там выкладок мы можем для схемы (8.6) сразу утверждать, что при условии

$$\tau_x \leq \frac{h_x}{c_0} \quad (8.9)$$

выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \sum_j h_x \left[ \rho_0 \frac{(\bar{u}^{j-1/2, k-1/2})^2}{2} + \frac{(\bar{p}^{j-1/2, k-1/2})^2}{2\rho_0 c_0^2} \right] &\leq \\ &\leq \sum_j h_x \left[ \rho_0 \frac{u_{j-1/2, k-1/2}^2}{2} + \frac{p_{j-1/2, k-1/2}^2}{2\rho_0 c_0^2} \right] - \\ &- \tau_x (P_{J, k-1/2} U_{J, k-1/2} - P_{0, k-1/2} U_{0, k-1/2}) \quad (8.10) \end{aligned}$$

для любого значения индекса  $k-1/2$ .

Предположим, что граничные условия на левой и правой границах расчетной области диссипативны, т. е. в силу этих граничных условий выполнены неравенства

$$(pu)_{x=x_0} \leq 0, \quad (pu)_{x=x_J} \geq 0 \quad (8.11)$$

для любого значения  $y (y_0 \leq y \leq y_K)$ .

Тогда в формуле (8.10) можно отбросить последние слагаемые и, пользуясь тем, что  $\bar{v}^{j-1/2, k-1/2} = v_{j-1/2, k-1/2}$  в силу последнего из соотношений (8.6), после суммирования по индексу  $k$  получить неравенство

$$\begin{aligned} \sum_j h_x \sum_k h_y \left[ \rho_0 \frac{(\bar{u}^{j-1/2, k-1/2})^2 + (\bar{v}^{j-1/2, k-1/2})^2}{2} + \frac{(\bar{p}^{j-1/2, k-1/2})^2}{2\rho_0 c_0^2} \right] &\leq \\ &\leq \sum_j h_x \sum_k h_y \left[ \rho_0 \frac{u_{j-1/2, k-1/2}^2 + v_{j-1/2, k-1/2}^2}{2} + \frac{p_{j-1/2, k-1/2}^2}{2\rho_0 c_0^2} \right]. \quad (8.12) \end{aligned}$$

Таким образом, условие (8.8) устойчивости «одномерной» схемы по координате  $x$  имеет место при ограничении (8.9) на шаг  $\tau_x$  и диссипативности граничных условий, обеспеченнной при выполнении неравенств (8.11) для любых  $u, p$ , удовлетворяющих левым и правым граничным условиям.

Проводя совершенно аналогичное рассмотрение для второй «одномерной» схемы (8.7), можно получить неравенство

$$\begin{aligned} \sum_j h_x \sum_k h_y \left[ \rho_0 \frac{(\bar{u}^{j-1/2, k-1/2})^2 + (\bar{v}^{j-1/2, k-1/2})^2}{2} + \frac{(\bar{p}^{j-1/2, k-1/2})^2}{2\rho_0 c_0^2} \right] &\leq \\ &\leq \sum_j h_x \sum_k h_y \left[ \rho_0 \frac{u_{j-1/2, k-1/2}^2 + v_{j-1/2, k-1/2}^2}{2} + \frac{p_{j-1/2, k-1/2}^2}{2\rho_0 c_0^2} \right], \end{aligned}$$

обозначающее устойчивость «одномерной» схемы по координате  $y$ , если выполнено ограничение на ее шаг  $\tau_y \leq h_y/c_0$  и диссипативны граничные условия на нижней и верхней границах расчетной

области, т. е. если в силу этих условий выполнены неравенства

$$(pv)_{y=y_0} \leqslant 0, \quad (pv)_{y=y_K} \geqslant 0 \quad (8.13)$$

для любого значения  $x$  ( $x_0 \leqslant x \leqslant x_J$ ).

Резюмируя все изложенное, мы показали, что наша разностная схема для системы уравнений акустики (7.1) с двумя пространственными переменными, описанная в предыдущем параграфе, на прямоугольной сетке при переходе на один шаг по времени обеспечивает выполнение неравенства

$$\begin{aligned} \sum_I h_x \sum_k h_y \left[ \rho_0 \frac{(u^{j-1/2, k-1/2})^2 + (v^{j-1/2, k-1/2})^2}{2} + \frac{(p^{j-1/2, k-1/2})^2}{2\rho_0 c_0^2} \right] \leqslant \\ \leqslant \sum_I h_x \sum_k h_y \left[ \rho_0 \frac{u_{j-1/2, k-1/2}^2 + v_{j-1/2, k-1/2}^2}{2} + \frac{p_{j-1/2, k-1/2}^2}{2\rho_0 c_0^2} \right] - \\ - \tau \sum_k [(PU)_{J, k-1/2} - (PU)_{0, k-1/2}] - \\ - \tau \sum_j [(PV)_{j-1/2, K} - (PV)_{j-1/2, 0}] \end{aligned} \quad (8.14)$$

при условии, что шаг по времени  $\tau$  подчиняется неравенству (8.4), т. е.

$$\tau \left( \frac{1}{\tau_x} + \frac{1}{\tau_y} \right) \leqslant 1, \quad \tau_x = \frac{h_x}{c_0}, \quad \tau_y = \frac{h_y}{c_0}. \quad (8.15)$$

Отметим, как это уже было сделано в одномерном случае, что  $\tau_x$  может рассматриваться как время, необходимое для того, чтобы звуковые волны, возникшие при распаде разрыва на вертикальной границе ячейки  $x = x_J$ , достигли противоположной границы ячейки и изменили выработавшиеся там значения вспомогательных «больших» величин. Аналогичный смысл имеет и величина  $\tau_y$ .

Неравенство (8.14) можно рассматривать как разностный аналог интегрального закона сохранения энергии (8.1). Если выполнены неравенства (8.11) и (8.13), обеспечивающие диссипативность граничных условий, то неравенство (8.14) означает устойчивость рассматриваемой разностной схемы в смысле энергетической нормы (8.2) при ограничении (8.15) на шаг по времени  $\tau$ .

Ограничение (8.15) получено нами как достаточное условие, обеспечивающее устойчивость. Можно, однако, используя метод Фурье, убедиться, что оно является и необходимым. Чтобы у читателя не было сомнений в том, что это так, а не предопределено искусственным приемом, связанным с расщеплением (8.3) нашей схемы на «одномерные», мы сейчас проведем соответствующее рассмотрение. Как и в одномерном случае, исследование проводится только для задачи без граничных условий. У системы

разностных уравнений (7.9), (7.7), (7.8) будем искать решения вида

$$\begin{bmatrix} u^{j-1/2, k-1/2} \\ v^{j-1/2, k-1/2} \\ p^{j-1/2, k-1/2} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u_{j-1/2, k-1/2} \\ v_{j-1/2, k-1/2} \\ p_{j-1/2, k-1/2} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \\ p^* \end{bmatrix} e^{i(j\varphi + k\psi)}.$$

Подставляя это представление в разностные уравнения, мы придем к системе трех линейных уравнений, которым должны удовлетворять  $u^*$ ,  $v^*$ ,  $p^*$ . Эта система имеет вид

$$\begin{aligned} & \left[ \lambda - 1 - \frac{\tau c_0}{h_x} \frac{e^{i\varphi} - 2 + e^{-i\varphi}}{2} \right] u^* + \frac{\tau}{\rho_0 h_x} \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2} p^* = 0, \\ & \left[ \lambda - 1 - \frac{\tau c_0}{h_y} \frac{e^{i\psi} - 2 + e^{-i\psi}}{2} \right] v^* + \frac{\tau}{\rho_0 h_y} \frac{e^{i\psi} - e^{-i\psi}}{2} p^* = 0, \\ & \left[ \lambda - 1 - \frac{\tau c_0}{h_x} \frac{e^{i\varphi} - 2 + e^{-i\varphi}}{2} - \frac{\tau c_0}{h_y} \frac{e^{i\psi} - 2 + e^{-i\psi}}{2} \right] p^* + \\ & \quad + \rho_0 c_0^2 \left[ \frac{\tau}{h_x} \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2} u^* + \frac{\tau}{h_y} \frac{e^{i\psi} - e^{-i\psi}}{2} v^* \right] = 0. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Для ее разрешимости необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы был равен нулю. В результате получаем кубическое уравнение для собственных значений  $\lambda$  разностного оператора перехода на следующий временной слой. Мы не выписываем его здесь из-за громоздкости. Необходимое условие устойчивости состоит в том, чтобы все корни этого уравнения были подчинены условию  $|\lambda| \leqslant 1$  при произвольных значениях параметров  $\varphi$ ,  $\psi$ . Для наших целей достаточно будет рассмотреть только частный случай  $\varphi = \psi = \pi$ . Тогда матрица системы (8.16) становится диагональной, и все три корня характеристического уравнения для  $\lambda$  определяются сразу:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 - 2 \frac{\tau c_0}{h_x} = 1 - 2 \frac{\tau}{\tau_x}, \\ \lambda_2 &= 1 - 2 \frac{\tau c_0}{h_y} = 1 - 2 \frac{\tau}{\tau_y}, \\ \lambda_3 &= 1 - 2 \frac{\tau c_0}{h_x} - 2 \frac{\tau c_0}{h_y} = 1 - 2\tau \left( \frac{1}{\tau_x} + \frac{1}{\tau_y} \right). \end{aligned} \quad (8.17)$$

Все они вещественны и меньше 1. Если выполнено найденное ранее достаточное условие (8.15):

$$\tau \left( \frac{1}{\tau_x} + \frac{1}{\tau_y} \right) \leqslant 1,$$

то все три корня (8.17) больше  $-1$ , а при нарушении этого условия корень  $\lambda_3$  выходит за пределы отрезка  $-1 \leqslant \lambda \leqslant 1$ , и, следовательно, разностная схема становится неустойчивой. Таким

образом, ограничение на шаг (8.15) является не только достаточным, но и необходимым для устойчивости схемы.

Если разностная сетка является не прямоугольной, а параллелограммной (рис. 8.1), то при вычислении допустимых шагов «одномерных» схем  $\tau_x$  и  $\tau_y$  в качестве величин  $h_x$  и  $h_y$  естественно подразумевать не длины сторон  $h_1$  и  $h_{II}$ , а высоты параллелограмма, изображающего ячейку сетки. Во всяком случае, это согласуется с описанным выше физическим смыслом величин  $\tau_x$  и  $\tau_y$  как интервалов времени, в течение которых волны, образующиеся при распаде разрывов на границе ячейки, доходят до ее противоположной стороны.

При первоначальной разработке схемы необходимое условие устойчивости для параллелограммной сетки именно в таком виде было получено Г. Б. Алалыкиным. Попытки обосновать достаточность условий (8.15) привели, хотя и не сразу, авторов работы [5] к использованию расщепления разностного оператора и выпуклости нормы, которые мы применили выше.

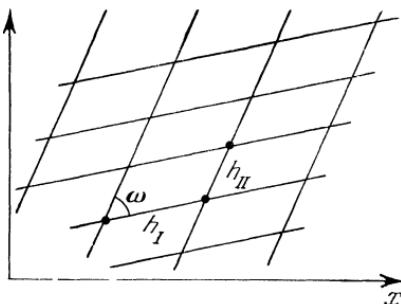


Рис. 8.1.

## § 9. Явная одномерная схема для произвольной гиперболической системы

Симметрические системы. Интеграл энергии. Приведение системы к каноническому виду. Разностная схема. Основное неравенство — разностный аналог интеграла энергии. Условие устойчивости. Корректная постановка граничных условий. Диссипативные граничные условия обеспечивают устойчивость схемы при достаточно малом шаге. Конструкция схемы для несимметрической гиперболической системы. Модификация схемы на случай переменных коэффициентов.

Простота и наглядность описанного нами на примерах уравнений акустики алгоритма конструирования разностной схемы вызывают естественное желание изложить его для случая произвольной линейной гиперболической системы дифференциальных уравнений первого порядка. Мы осуществим такое изложение для случая симметрических систем.

Как известно из теории гиперболических уравнений (см., например, [34]), система уравнений

$$A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + C \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = Q \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (9.1)$$

называется *t-гиперболической* (по Фридрихсу [135]), если матрицы  $A, B, C$  являются симметрическими \*), а матрица  $A$ , кроме того,— положительно определенная.

Элементы квадратных матриц  $A, B, C$  размерности  $m^*$  предполагаются достаточно гладкими функциями  $x, y, t$ . (Если они, кроме того, зависят и от  $u$ , то система называется квазилинейной.) Матрица  $Q$  симметричной не предполагается. Ее элементы, так же как и компоненты вектор-функции  $f$ , могут зависеть от  $x, y, t$ .

Для симметрических *t*-гиперболических систем может быть выведено важное тождество, которое лежит в основе построения теории таких систем. Умножая уравнения (9.1) скалярно на вектор  $2u$  и проведя несложные преобразования, использующие симметричность матриц  $A, B, C$ , можно получить следующее тождество, выполненное на любом решении (9.1):

$$\frac{\partial}{\partial t}(Au, u) + \frac{\partial}{\partial x}(Bu, u) + \frac{\partial}{\partial y}(Cu, u) = (Du, u) + 2(f, u), \quad (9.2)$$

где  $(u, v)$ —скалярное произведение  $u$  и  $v$ ,

$$D = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} - (Q + Q^*),$$

$Q^*$ —транспонированная матрица  $Q$ . После его интегрирования по произвольной области  $\Omega$ , гомеоморфной сфере в трехмерном пространстве  $(x, y, t)$ , лежащей внутри области существования решения  $u$ , и преобразования объемного интеграла от левой части (9.2) в интеграл по поверхности  $\Gamma$ , ограничивающей область  $\Omega$ , мы придем к интегральному тождеству

$$\oint_{\Gamma} ([\zeta A + \xi B + \eta C] u, u) d\Gamma = \iiint_{\Omega} [(Du, u) + 2(f, u)] d\Omega, \quad (9.3)$$

где  $(\xi, \eta, \zeta)$ —единичный вектор внешней нормали к поверхности  $\Gamma$ . Мы не приводим здесь более подробного вывода равенств (9.2) и (9.3). Его можно найти, например, в § 9 книги [34]. Полученное тождество (9.3) называется *интегралом энергии* для симметрической системы (9.1) и в разностной форме будет играть существенную роль при обосновании устойчивости схемы, конструкцию которой мы опишем.

В настоящем параграфе мы рассмотрим одномерный случай, когда уравнения (9.1) зависят от  $t$  и одной пространственной переменной  $x$ . Для упрощения изложения будем предполагать, что матрицы  $A$  и  $B$  постоянны, а правая часть системы равна

\* ) В комплексном случае—эрмитовыми.

нулю:

$$A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad (9.4)$$

Тогда дифференциальная форма интеграла энергии (9.2) такова:

$$\frac{\partial}{\partial t} (A \mathbf{u}, \mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial x} (B \mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0, \quad (9.5)$$

а закон сохранения энергии (9.3) —

$$\oint_{\Gamma} (A \mathbf{u}, \mathbf{u}) dx - (B \mathbf{u}, \mathbf{u}) dt = 0, \quad (9.6)$$

где  $\Gamma$  — произвольный замкнутый контур на плоскости  $(x, t)$ .

Рассмотрим преобразование вектор-функции  $\mathbf{u}$  вида  $\mathbf{u} = \Lambda \mathbf{v}$  с невырожденной матрицей  $\Lambda$ . Система (9.4) при этом может быть переписана так:

$$\Lambda^* A \Lambda \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \Lambda^* B \Lambda \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = 0, \quad (9.7)$$

где  $\Lambda^*$  — транспонированная матрица  $\Lambda$ .

Поскольку  $A$  и  $B$  симметрические матрицы, причем матрица  $A$  — положительно определенная, то, как известно из линейной алгебры, можно выбрать  $\Lambda$  таким образом, чтобы матрица  $\Lambda^* A \Lambda$  стала единичной, а матрица  $\Lambda^* B \Lambda$  — диагональной, элементы которой мы обозначим  $\mu_m$  ( $m = 1, \dots, m^*$ ). Заметим, что по закону инерции квадратичных форм число положительных и отрицательных значений среди величин  $\mu_m$  определяется только матрицей  $B$  и не зависит от выбора преобразования, приводящего ее к диагональному виду. В рассматриваемом нами случае  $\mu_m$  могут быть найдены как корни характеристического уравнения

$$\det \| \mu A + B \| = 0. \quad (9.8)$$

Что касается матрицы  $\Lambda$ , то ее можно построить следующим образом. Преобразование  $\mathbf{u} = H \mathbf{v}_1$  с ортогональной матрицей  $H$ , столбцами которой являются нормированные собственные векторы матрицы  $A$ , преобразует матрицу  $A$  к диагональному виду  $A_1 = H^* A H$  с элементами  $\lambda_m$  по главной диагонали.  $\lambda_m$  — собственные значения  $A$ , т. е. корни уравнения  $\det \| A - \lambda I \| = 0$ , причем все  $\lambda_m > 0$ , так как матрица  $A$  — положительно определенная. Матрица  $B$  при этом преобразуется в некоторую матрицу  $B_1 = H^* B H$ . Далее, замена  $\mathbf{v}_1 = D \mathbf{v}_2$  с диагональной матрицей, элементы которой суть  $1/\sqrt{\lambda_m}$ , преобразует  $A_1$  в  $D^* A_1 D = I$ , где  $I$  — единичная матрица, а  $B_1$  — в матрицу  $B_2 = D^* B_1 D$ . Наконец, преобразование  $\mathbf{v}_2 = K \mathbf{v}$  с ортогональной матрицей  $K$ , составленной из координат собственных векторов матрицы  $B_2$ , сохра-

нит неизменной единичную матрицу  $I$ , а матрицу  $B_2$  превратит в диагональную  $M = K^* B_2 K$  с элементами  $\mu_m$  по главной диагонали. Таким образом, в качестве искомой матрицы  $\Lambda$  можно взять  $\Lambda = HDK$ . Из изложенного ясно, что в ее построении имеется произвол, связанный с выбором ортогонального базиса из собственных векторов в инвариантном подпространстве, отвечающем кратным значениям  $\mu_m$ , если таковые имеются.

Полученная каноническая система уравнений для вектор-функции  $v$ :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + M \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (9.9)$$

если рассматривать ее без граничных условий, распадается на  $m^*$  независимых уравнений для отдельных компонент  $v^{(m)}$ :

$$\frac{\partial v^{(m)}}{\partial t} + \mu_m \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x} = 0. \quad (9.10)$$

Компоненты  $v^{(m)}$  носят название римановых инвариантов и сохраняют постоянные значения вдоль характеристик  $dx/dt = \mu_m$ . Это обстоятельство упрощает описание конструкции разностной схемы, к которому мы и переходим.

Как обычно, начинаем с задания узлов сетки  $\{x_j\}$ , которую будем считать равномерной ( $x_j - x_{j-1} = h$ ) и неограниченной в обе стороны оси  $x$ . Совокупность величин  $\{u_{j-1/2}\}$  задает вектор-функцию  $u(x, t)$  на нижнем слое  $t = t_0$ , а  $\{u^{j-1/2}\}$  — на верхнем слое  $t = t_0 + \tau$ . Они связаны между собой формулами, представляющими разностные законы сохранения для интервала  $j-1/2$ :

$$A \frac{u^{j-1/2} - u_{j-1/2}}{\tau} + B \frac{U_j - U_{j-1}}{h} = 0. \quad (9.11)$$

$U_j$  — вспомогательные «большие» величины, которые находятся как решение задачи о распаде разрыва для рассматриваемой системы уравнений (9.4) с начальными данными:

$$u = \begin{cases} u_{j-1/2} & \text{при } x < x_j, \\ u_{j+1/2} & \text{при } x > x_j. \end{cases} \quad (9.12)$$

Из методических соображений нам удобнее выписать это решение в терминах вектор-функции  $v = \Lambda^{-1}u$ , для которой система уравнений имеет канонический вид (9.9) с диагональной матрицей  $M$ . Тогда разностная формула (9.11) принимает вид

$$\frac{v^{j-1/2} - v_{j-1/2}}{\tau} + M \frac{V_j - V_{j-1}}{h} = 0. \quad (9.13)$$

Компоненты вектора  $V_j$  определяются так:

$$V_j^{(m)} = \begin{cases} v_{j-1/2}^{(m)}, & \text{если } \mu_m > 0, \\ v_{j+1/2}^{(m)}, & \text{если } \mu_m < 0. \end{cases} \quad (9.14)$$

В случае  $\mu_m = 0$  величины  $V_j^{(m)}$  могут быть назначены произвольно, так как в (9.13) они будут умножены на  $\mu_m$ .

Из формул (9.13), (9.14) следует, что для компоненты с номером  $m$ , который мы опустим, имеют место равенства

$$v^{j-1/2} = \begin{cases} \left(1 - \mu_m \frac{\tau}{h}\right) v_{j-1/2} + \mu_m \frac{\tau}{h} v_{j-3/2}, & \text{если } \mu_m > 0, \\ \left(1 + \mu_m \frac{\tau}{h}\right) v_{j-1/2} - \mu_m \frac{\tau}{h} v_{j+1/2}, & \text{если } \mu_m < 0, \\ v_{j-1/2}, & \text{если } \mu_m = 0. \end{cases} \quad (9.15)$$

А теперь, как и в § 3, воспользуемся тем, что при  $0 < v \leq 1$  из равенства  $c = (1-v)a + vb$  получается неравенство  $c^2 \leq (1-v)^2 a^2 + vb^2$  с помощью элементарной выкладки (3.11). В результате приходим к неравенству

$$\frac{(v^{j-1/2})^2 - (v_{j-1/2})^2}{\tau} + \mu_m \frac{V_j^2 - V_{j-1}^2}{h} \leq 0$$

для каждой из компонент, если выполнено условие  $|\mu_m| \frac{\tau}{h} \leq 1$ .

Объединение этих неравенств для всех компонент приводит к следующему векторному неравенству:

$$\frac{(\mathbf{v}^{j-1/2}, \mathbf{v}^{j-1/2}) - (\mathbf{v}_{j-1/2}, \mathbf{v}_{j-1/2})}{\tau} + \frac{(M\mathbf{V}_j, \mathbf{V}_j) - (M\mathbf{V}_{j-1}, \mathbf{V}_{j-1})}{h} \leq 0. \quad (9.16)$$

выполненному, если шаг  $\tau$  подчинен ограничению

$$\frac{\tau}{h} \cdot \max_m |\mu_m| \leq 1. \quad (9.17)$$

Прежде чем переходить к дальнейшему изложению, сделаем одно замечание, аналогичное сделанному в конце § 3 при изучении уравнений акустики. Внимательное рассмотрение доказательства неравенства (9.16) показывает, что в его выводе участвуют величины  $v_{j-3/2}^{(m)}$ , отвечающие  $\mu_m > 0$ , и величины  $v_{j+1/2}^{(m)}$ , отвечающие  $\mu_m < 0$ . Неравенство (9.16) будет выполнено при произвольных значениях этих величин, если только  $V_j$  назначаются по формулам (9.14). Это замечание будет нам полезно в дальнейшем при рассмотрении задач с граничными условиями.

Напомним теперь, что  $\mathbf{u} = \Lambda \mathbf{v}$ ,  $\Lambda^* A \Lambda = I$ ,  $\Lambda^* B \Lambda = M$ . Полученное неравенство (9.16) можно переписать в виде

$$\frac{(A\mathbf{u}^{j-1/2}, \mathbf{u}^{j-1/2}) - (A\mathbf{u}_{j-1/2}, \mathbf{u}_{j-1/2})}{\tau} + \frac{(B\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_j) - (B\mathbf{U}_{j-1}, \mathbf{U}_{j-1})}{h} \leq 0. \quad (9.18)$$

Оно представляет разностный аналог интеграла энергии (9.5), (9.6) для интервала сетки  $x_{j-1} \leq x \leq x_j$  в течение промежутка времени, отвечающего переходу с «нижнего» на «верхний» слой. Суммируя неравенства (9.18) по всем значениям индекса  $j$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  и предполагая конечность суммы  $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} (A\mathbf{u}_{j-1/2}, \mathbf{u}_{j-1/2})$  для начальных данных, приходим к заключению, что

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} (A\mathbf{u}^{j-1/2}, \mathbf{u}^{j-1/2}) \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} (A\mathbf{u}_{j-1/2}, \mathbf{u}_{j-1/2}), \quad (9.19)$$

если выполнено условие (9.17). Тем самым доказана устойчивость описанной разностной схемы без граничных условий, если шаг по времени удовлетворяет ограничению  $\frac{\tau}{h} \max_m |\mu_m| \leq 1$ .

Полученное достаточное условие устойчивости является и необходимым. Это легко проверить с помощью метода Фурье для скалярных уравнений (9.15), и мы не будем на этом останавливаться.

Поскольку величины  $\mu_m$  представляют корни характеристического уравнения

$$\det \|\mu A + B\| = 0,$$

полученное ограничение на шаг по времени можно сформулировать еще и так:

$$\tau/h \leq \xi, \quad (9.20)$$

где  $\xi > 0$  — наибольшее возможное число, при котором матрицы  $A \pm \xi B$  неотрицательны, т. е.  $(A\mathbf{u}, \mathbf{u}) \pm \xi(B\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0$  для произвольного вектора  $\mathbf{u}$ .

Обратимся теперь к рассмотрению смешанной задачи с начальными данными  $\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x)$ , заданными на отрезке  $x_1 \leq x \leq x_{II}$ , и некоторыми граничными условиями на левом и правом концах отрезка:

$$\begin{aligned} \Phi_I \mathbf{u}(x_I, t) &= \mathbf{g}_I(t), \\ \Phi_{II} \mathbf{u}(x_{II}, t) &= \mathbf{g}_{II}(t). \end{aligned} \quad (9.21)$$

Здесь  $\Phi_I$ ,  $\Phi_{II}$  — некоторые прямоугольные матрицы с числом строк  $m_I$  и  $m_{II}$  соответственно;  $\mathbf{g}_I(t)$ ,  $\mathbf{g}_{II}(t)$  — заданные вектор-

функции соответствующей размерности, согласованные с начальными данными при  $t=0$ .

Как известно из теории гиперболических уравнений (см., например, [34]), чтобы поставленная задача была корректной, граничные условия (9.21) можно задавать далеко не произвольно. Обозначим  $m_+$  число положительных значений среди описанных выше величин  $\mu_m$ , а  $m_-$  — число отрицательных значений (тогда, очевидно,  $m_0 = m^* - m_+ - m_-$  есть число нулевых значений). Тогда для корректности рассматриваемой смешанной задачи на левой границе должно быть задано  $m_1 = m_+$  независимых граничных условий (по числу характеристик, «уходящих» с левой границы), а на правой границе соответственно  $m_{II} = m_-$  независимых граничных условий (по числу характеристик, «уходящих» с нее). При этом в качестве граничных условий нельзя задавать комбинации неизвестных, отвечающие римановым инвариантам для характеристик, «приходящих» на границу.

Будем, кроме того, предполагать, что граничные условия являются *диссипативными* в том смысле, как это сформулировано в § 13 книги [34]: *в граничных точках для любой вектор-функции  $u$ , удовлетворяющей граничным условиям, выполнены неравенства:*

$$\begin{aligned} (Bu, u) &\leqslant 0 \text{ на левой границе } x = x_1, \\ (Bu, u) &\geqslant 0 \text{ на правой границе } x = x_{II}. \end{aligned} \quad (9.22)$$

Переходя к конструкции разностной схемы, как обычно, разбиваем отрезок  $x_1 \leqslant x \leqslant x_{II}$  узлами сетки  $\{x_j\}$  на  $J$  интервалов, причем  $x_0 = x_1$ ,  $x_J = x_{II}$ . Для простоты пусть сетка равномерна:  $x_j - x_{j-1} = h$ . Как и раньше, нам удобнее из методических соображений описать схему в терминах вектор-функции  $v$ . Во внутренних интервалах разностные уравнения уже были выписаны в виде формул (9.13), (9.14). Они должны быть дополнены уравнениями для вычисления «больших» величин  $V_0$  и  $V_J$  в граничных точках. Для левого узла  $x_0 = x_1$  соответствующая система из  $m^*$  уравнений для вычисления вектора  $V_0$  составляется так. В качестве  $m_+$  уравнений, отвечающих «уходящим» характеристикам с  $\mu_m > 0$ , берутся заданные граничные условия (переписанные через компоненты вектор-функции  $v$ ). Для  $m_-$  значений, отвечающих  $\mu_m < 0$ , записываются соответствующие из уравнений (9.14), принимающих для  $j=0$  вид

$$V_0^{(m)} = v_{1/2}^{(m)}.$$

Так же поступаем и для  $m_0$  значений с  $\mu_m = 0$ . Составление системы уравнений для правого граничного узла  $x = x_J$  мы не описываем ввиду его полной аналогии.

Система разностных уравнений в терминах компонент вектор-функции  $\mathbf{v}$  полностью описана. Запись ее через компоненты вектор-функции  $\mathbf{u}$  осуществляется с помощью обратного преобразования  $\mathbf{v} = \Lambda^{-1}\mathbf{u}$ . (Заметим, что, вообще говоря, можно вычислить величины  $\mathbf{v}^{j-1/2}$  на «верхнем» слое и только после этого «восстанавливать»  $\mathbf{u}^{i-1/2}$ , причем не обязательно на каждом шаге расчета, если в этом нет необходимости.)

Что касается исследования устойчивости описанной разностной схемы, то оно уже подготовлено изложенными фактами. Суммируя неравенства (9.16) по индексу  $j$ , получаем

$$\sum_{j=1}^J (\mathbf{v}^{j-1/2}, \mathbf{v}^{j-1/2}) \leq \sum_{j=1}^J (\mathbf{v}_{j-1/2}, \mathbf{v}_{j-1/2}) + \\ + \frac{\tau}{h} [(M\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_0) - (M\mathbf{V}_J, \mathbf{V}_J)],$$

если шаг  $\tau$  подчиняется прежнему условию (9.17) или (9.20).

При получении этого неравенства, согласно замечанию, сделанному на стр. 69 после вывода неравенства (9.16), для крайних значений  $j=1$  и  $j=J$  используются «заграничные» значения только для характеристик, «уходящих» с границ счетной области, которые оставались свободными. Соотношения вдоль этих характеристик заменяются заданными диссипативными граничными условиями, в силу которых

$$(M\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_0) \leq 0, \quad (M\mathbf{V}_J, \mathbf{V}_J) \geq 0.$$

Для вектор-функции  $\mathbf{u}$  путем суммирования неравенств (9.18) получаем

$$\sum_{j=1}^J (A\mathbf{u}^{j-1/2}, \mathbf{u}^{j-1/2}) \leq \sum_{j=1}^J (A\mathbf{u}_{j-1/2}, \mathbf{u}_{j-1/2}) + \\ + \frac{\tau}{h} [(B\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_0) - (B\mathbf{U}_J, \mathbf{U}_J)]. \quad (9.23)$$

Поскольку диссипативные граничные условия, согласно определению (9.22), обеспечивают выполнение неравенств

$$(B\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_0) \leq 0, \quad (B\mathbf{U}_J, \mathbf{U}_J) \geq 0, \quad (9.24)$$

имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^J (A\mathbf{u}^{j-1/2}, \mathbf{u}^{j-1/2}) \leq \sum_{j=1}^J (A\mathbf{u}_{j-1/2}, \mathbf{u}_{j-1/2}),$$

если шаг  $\tau$  удовлетворяет ограничению (9.17) или (9.20). Оно и означает устойчивость схемы для смешанной задачи в смысле соответствующей нормы сеточных функций.

Отметим еще одно весьма важное обстоятельство. До сих пор мы рассматривали систему уравнений

$$A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0$$

с симметрическими матрицами  $A$ ,  $B$  и положительно определенной матрицей  $A$ .

Изложенный нами алгоритм конструирования разностной схемы может быть обобщен на случай гиперболической системы уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + C \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad (9.25)$$

где матрица  $C$  не является симметрической (для упрощения изложения будем считать  $C$  постоянной). Для этой цели нам достаточно уметь найти характеристики системы (9.25) и соотношения на них. Пусть  $\lambda$  — корень характеристического уравнения

$$\det \|C - \lambda I\| = 0$$

или, что то же самое, уравнения

$$\det \|C^* - \lambda I\| = 0,$$

$\mathbf{z}$  — собственный вектор матрицы  $C^*$ , отвечающий этому значению  $\lambda$ , т. е.  $C^* \mathbf{z} = \lambda \mathbf{z}$ . Тогда  $z^* C = \lambda z^*$ , где  $z^*$  — вектор-строка, который принято называть левым собственным вектором матрицы  $C$ . Как нетрудно видеть, в силу уравнения (9.25) будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{z}, \mathbf{u}) + \lambda \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{z}, \mathbf{u}) = 0,$$

т. е. вдоль характеристики  $dx/dt = \lambda$  выполнено соотношение

$$(\mathbf{z}, \mathbf{u}) = \text{const.}$$

Гиперболичность системы (9.25) предполагает, что матрица  $C^*$  имеет полную систему из  $m^*$  линейно независимых собственных векторов, отвечающих вещественным собственным значениям  $\lambda$  (может быть, кратным). Фактически мы описали алгоритм приведения системы (9.25) к каноническому виду

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + M \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = 0$$

с диагональной матрицей  $M$  (иногда говорят о записи системы в «характеристиках»). Это достигается введением вспомогательных переменных  $\mathbf{v} = L \mathbf{u}$  с матрицей  $L$ , строки которой представляют собственные векторы матрицы  $C^*$ . После этого описанная

нами разностная схема может быть реализована для системы (9.25), например, в форме уравнений

$$\frac{\mathbf{u}^{j-1/2} - \mathbf{u}_{j-1/2}}{\tau} + C \frac{\mathbf{U}_j - \mathbf{U}_{j-1}}{h} = 0, \quad (9.26)$$

для которых «большие» величины отыскиваются на основе канонического вида системы точно так же, как и раньше.

Заметим, однако (и это очень важно!), что обоснование устойчивости такой схемы и обсуждение вопросов о диссипативности граничных условий становятся возможными только благодаря тому факту, что система (9.25) с несимметричной матрицей  $C$  может быть симметризована, т. е. умножением на некоторую положительно определенную симметричную матрицу  $I$ , может быть, преобразованием искомой вектор-функции приводится к симметрической системе вида (9.4). В частности, такой симметризацией является приведение системы (9.25) к каноническому виду с диагональной матрицей  $M$ . Мы неоднократно будем обращать внимание на это обстоятельство.

В тривиальной форме вопрос о симметризации встает уже для уравнений акустики (1.1), которые следует переписать в виде

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

или в матричной форме

$$\begin{vmatrix} \rho_0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} \end{vmatrix} = 0.$$

Как мы увидим в дальнейшем, в некоторых случаях, например для квазилинейной системы уравнений газовой динамики (см. § 22), практическое осуществление такой симметризации достигается далеко не просто. Положение облегчается тем, что, как мы только что описали, можно конструировать разностную схему и не прибегая к симметризации. Однако при исследовании алгоритма возможность ее осуществления всегда будет подразумеваться.

В заключение сделаем несколько замечаний по поводу перенесения описанного алгоритма на случай, когда в системе (9.4) матрицы являются переменными, т. е. их элементы представляют функции  $x, t$ . Целесообразно считать ее заданной тогда в форме

$$\frac{\partial}{\partial t} [A(x, t) \mathbf{u}] + \frac{\partial}{\partial x} [B(x, t) \mathbf{u}] = Q(x, t) \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (9.27)$$

которая называется *дивергентной*. Требование гиперболичности предполагает, что приведение ее к каноническому виду с помощью преобразования  $\mathbf{u} = \Lambda \mathbf{v}$  возможно в любой точке  $(x, t)$ . Конечно,

при этом матрица  $\Lambda$  перехода от  $\mathbf{u}$  к «римановым инвариантам»  $\mathbf{v}$  будет своей в каждой точке  $(x, t)$ , как и корни характеристического уравнения  $\mu_m = \mu_m(x, t)$ . Следовательно, величины  $m_+, m_-, m_0$ , которые определяли структуру уравнений для вспомогательных «больших» величин, теперь будут зависеть от точки  $(x, t)$ . В каноническом уравнении (9.9) появится правая часть, даже если исходное уравнение (9.27) было однородным:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + M(x, t) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = H(x, t) \mathbf{v} + \mathbf{g}(x, t); \quad (9.28)$$

$H(x, t)$  — матрица с элементами, зависящими от  $x, t$ . Наличие в исходном уравнении (9.27) правой части, очевидно, вносит лишь «дополнительный вклад» в правую часть уравнения (9.28).

Присутствие правых частей в уравнениях (9.27), естественно, должно быть учтено в разностных законах сохранения (9.11). При их написании в каждом из интервалов сетки используются свойства матрицы, т. е. уравнения (9.11) принимают вид

$$(A^{j-1/2} \mathbf{u}^{j-1/2} - A_{j-1/2} \mathbf{u}_{j-1/2}) + \frac{\tau}{x_j - x_{j-1}} (B_j \mathbf{U}_j - B_{j-1} \mathbf{U}_{j-1}) = \tau (Q_{j-1/2} \mathbf{u}_{j-1/2} + \mathbf{f}_{j-1/2}). \quad (9.29)$$

При расчете «больших» величин  $\mathbf{U}_j$  первый порядок точности разностной схемы формально сохранится даже в том случае, если пользоваться равенствами (9.14) для однородного случая, в которых следует перейти к компонентам вектор-функции  $\mathbf{u} = \Lambda \mathbf{v}$ . При более аккуратном подходе следует соответствующие разностные уравнения писать, исходя из уравнений (9.28). Формально сохраняет первый порядок аппроксимации и использование для вычисления правых частей в уравнениях (9.29) величин  $\mathbf{u}_{j-1/2}$  с «нижнего» слоя, что наиболее просто с алгоритмической точки зрения. Впрочем, в некоторых случаях бывает целесообразным вычислять правые части, используя  $\mathbf{u}^{j-1/2}$  с «верхнего» слоя или средние величины  $\frac{1}{2}(\mathbf{u}_{j-1/2} + \mathbf{u}^{j-1/2})$ .

## § 10. Явная двумерная схема для произвольной гиперболической системы

Постановка смешанной задачи с диссипативными граничными условиями. Разностная схема на прямоугольной сетке. Основное неравенство — аналог интеграла энергии. Достаточное условие устойчивости схемы без граничных условий и с диссипативными граничными условиями. Условие устойчивости для параллелограммной сетки. Двумерные уравнения линейной теории упругости.

Рассмотрим симметрическую  $t$ -гиперболическую (по Фридрихсу) систему уравнений (9.1) с двумя пространственными

переменными  $x, y$ . В предыдущем параграфе мы уже привели соответствующее определение и интеграл энергии (9.3) для такой системы. В настоящем параграфе для нее будет описана конструкция разностной схемы. Чтобы упростить изложение, будем предполагать, что матрицы  $A, B, C$  постоянны, а правая часть системы (9.1) равна нулю:

$$A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + C \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = 0. \quad (10.1)$$

Тогда дифференциальная форма интеграла энергии (9.2) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (A \mathbf{u}, \mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial x} (B \mathbf{u}, \mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (C \mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0. \quad (10.2)$$

Будем рассматривать для системы (10.1) задачу с начальными данными  $\mathbf{u}(x, y, 0) = \mathbf{u}_0(x, y)$ , заданными либо на всей плоскости  $x, y$ , либо в прямоугольнике  $x_1 \leq x \leq x_{II}, y_1 \leq y \leq y_{II}$ . В последнем случае интегральное тождество (9.3), выражающее закон сохранения энергии, принимает вид

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_{II}} \int_{y_1}^{y_{II}} [(A \mathbf{u}, \mathbf{u})_{t=t_1} - (A \mathbf{u}, \mathbf{u})_{t=t_0}] dx dy + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \int_{y_1}^{y_{II}} [(B \mathbf{u}, \mathbf{u})_{x=x_{II}} - (B \mathbf{u}, \mathbf{u})_{x=x_1}] dy dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_1}^{x_{II}} [(C \mathbf{u}, \mathbf{u})_{y=y_{II}} - (C \mathbf{u}, \mathbf{u})_{y=y_1}] dx dt = 0. \end{aligned} \quad (10.3)$$

На границах прямоугольника должны быть заданы некоторые граничные условия.

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_I(y, t) \mathbf{u}(x_1, y, t) = \varphi_I(y, t), \\ \Phi_{II}(y, t) \mathbf{u}(x_{II}, y, t) = \varphi_{II}(y, t), \\ \Psi_I(x, t) \mathbf{u}(x, y_1, t) = \psi_I(x, t), \\ \Psi_{II}(x, t) \mathbf{u}(x, y_{II}, t) = \psi_{II}(x, t), \end{array} \right\} \begin{array}{l} y_1 \leq y \leq y_{II}, \\ x_1 \leq x \leq x_{II}, \end{array} \quad t > t_0, \quad (10.4)$$

$\Phi_I, \Phi_{II}, \Psi_I, \Psi_{II}$  — прямоугольные матрицы с числом строк, равным соответствующим числам положительных или отрицательных собственных значений матриц  $A^{-1}B$  или  $A^{-1}C$ . Граничные условия предполагаются диссипативными в смысле определения, которое мы уже приводили в предыдущем параграфе (см. также § 13 книги [34]): в каждой точке границы для любой вектор-функции  $\mathbf{u}$ ,

удовлетворяющей граничным условиям, выполнены неравенства

$$\begin{aligned} (B\mathbf{u}, \mathbf{u}) &\leqslant 0 \quad \text{при } x = x_1, \quad (B\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geqslant 0 \quad \text{при } x = x_{II}, \\ (C\mathbf{u}, \mathbf{u}) &\leqslant 0 \quad \text{при } y = y_1, \quad (C\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geqslant 0 \quad \text{при } y = y_{II}. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Рассмотрим прямоугольную сетку, определяемую двумя семействами прямых  $x = x_j$  и  $y = y_k$ . Для простоты шаги сетки  $x_j - x_{j-1} = h_x$ ,  $y_k - y_{k-1} = h_y$  будем считать постоянными. Искомая вектор-функция  $\mathbf{u}$  на нижнем слое по времени  $t = t_0$  определяется совокупностью значений  $\{\mathbf{u}_{j-1/2, k-1/2}\}$ , а на верхнем слое  $t = t_0 + \tau$  — значениями  $\{\mathbf{u}^{j-1/2, k-1/2}\}$ . Для них записываются разностные уравнения

$$A \frac{\mathbf{u}^{j-1/2, k-1/2} - \mathbf{u}_{j-1/2, k-1/2}}{\tau} + B \frac{\mathbf{U}_{j, k-1/2} - \mathbf{U}_{j-1, k-1/2}}{h_x} + C \frac{\mathbf{U}_{j-1/2, k} - \mathbf{U}_{j-1/2, k-1}}{h_y} = 0, \quad (10.6)$$

которые можно рассматривать как разностную форму законов сохранения для уравнений (10.1). По аналогии с тем, как было описано в § 7 для уравнения акустики с двумя пространственными переменными, вспомогательные величины  $\mathbf{U}_{j, k-1/2}$  на «вертикальных» ребрах ячеек  $x = x_j$ , находятся как решения «одномерных» задач о распаде разрыва для системы уравнений

$$A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0 \quad (10.7)$$

с начальными данными

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{u}_{j-1/2, k-1/2} & \text{при } x < x_j, \\ \mathbf{u}_{j+1/2, k-1/2} & \text{при } x > x_j. \end{cases} \quad (10.8)$$

Вспомогательные величины  $\mathbf{U}_{j-1/2, k}$  на «горизонтальных» ребрах ячеек  $y = y_k$  представляют решения задач о распаде разрыва для одномерной системы

$$A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + C \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = 0 \quad (10.9)$$

с начальными данными

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{u}_{j-1/2, k-1/2} & \text{при } y < y_k, \\ \mathbf{u}_{j-1/2, k+1/2} & \text{при } y > y_k. \end{cases} \quad (10.10)$$

Для такой разностной схемы имеет место следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \frac{(A\bar{\mathbf{u}}^{j-1/2, k-1/2}, \bar{\mathbf{u}}^{j-1/2, k-1/2}) - (A\mathbf{u}_{j-1/2, k-1/2}, \mathbf{u}_{j-1/2, k-1/2})}{\tau} + \\ & + \frac{(BU_{j, k-1/2}, U_{j, k-1/2}) - (BU_{j-1, k-1/2}, U_{j-1, k-1/2})}{h_x} + \\ & + \frac{(CU_{j-1/2, k}, U_{j-1/2, k}) - (CU_{j-1/2, k-1}, U_{j-1/2, k-1})}{h_y} \leqslant 0, \quad (10.11) \end{aligned}$$

если величина  $\tau$  достаточно мала. Это неравенство представляет разностный аналог дифференциальной формы (10.2) для интеграла энергии и играет важную роль в обосновании устойчивости схемы и в оценках решений. Для его доказательства сконструируем «одномерные» разностные схемы, отвечающие системам уравнений (10.7) и (10.9). Для системы (10.7) выписываем разностные уравнения вида

$$A \frac{\bar{\mathbf{u}}^{j-1/2, k-1/2} - \mathbf{u}_{j-1/2, k-1/2}}{\tau_x} + B \frac{U_{j, k-1/2} - U_{j-1, k-1/2}}{h_x} = 0, \quad (10.12)$$

где  $U_{j, k-1/2}$  уже определены выше. Согласно изложенному в предыдущем параграфе, для схемы (10.12) имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & (A\bar{\mathbf{u}}^{j-1/2, k-1/2}, \bar{\mathbf{u}}^{j-1/2, k-1/2}) - (A\mathbf{u}_{j-1/2, k-1/2}, \mathbf{u}_{j-1/2, k-1/2}) + \\ & + \frac{\tau_x}{h_x} [(BU_{j, k-1/2}, U_{j, k-1/2}) - (BU_{j-1, k-1/2}, U_{j-1, k-1/2})] \leqslant 0, \quad (10.13) \end{aligned}$$

если  $\tau_x/h_x \leqslant \xi$ , где  $\xi$ —наибольшее число, при котором матрица  $A \pm \xi B$  неотрицательна. Точно так же для системы (10.9) выписываются разностные уравнения

$$A \frac{\bar{\mathbf{u}}^{j-1/2, k-1/2} - \mathbf{u}_{j-1/2, k-1/2}}{\tau_y} + C \frac{U_{j-1/2, k} - U_{j-1/2, k-1}}{h_y} = 0 \quad (10.14)$$

и для них выполнено аналогичное неравенство

$$\begin{aligned} & (A\bar{\bar{\mathbf{u}}}^{j-1/2, k-1/2}, \bar{\bar{\mathbf{u}}}^{j-1/2, k-1/2}) - (A\mathbf{u}_{j-1/2, k-1/2}, \mathbf{u}_{j-1/2, k-1/2}) + \\ & + \frac{\tau_y}{h_y} [(CU_{j-1/2, k}, U_{j-1/2, k}) - (CU_{j-1/2, k-1}, U_{j-1/2, k-1})] \leqslant 0, \quad (10.15) \end{aligned}$$

если  $\tau_y/h_y = \eta$ , где  $\eta$ —наибольшее число, при котором матрица  $A \pm \eta C$  неотрицательна.

Пусть  $\theta$ —числовой параметр. Выберем в уравнениях (10.12) и (10.14) шаги  $\tau_x$  и  $\tau_y$  так:

$$\tau_x = \theta \xi h_x, \quad \tau_y = \theta \eta h_y.$$

Неравенства (10.13) и (10.15) будут выполнены, если  $0 \leq \theta \leq 1$ . Складывая (10.12) и (10.14), получим уравнение

$$A \left( \frac{\bar{u}^{j-1/2, k-1/2} - u_{j-1/2, k-1/2}}{\theta \xi h_x} + \frac{\bar{\bar{u}}^{j-1/2, k-1/2} - u_{j-1/2, k-1/2}}{\theta \eta h_y} \right) + \\ + B \frac{U_{j, k-1/2} - U_{j-1, k-1/2}}{h_x} + C \frac{U_{j-1/2, k} - U_{j-1/2, k-1}}{h_y} = 0.$$

Оно превращается в нужное нам уравнение (10.6), если положить

$$u^{j-1/2, k-1/2} = \frac{\tau}{\theta \xi h_x} \bar{u}^{j-1/2, k-1/2} + \frac{\tau}{\theta \eta h_y} \bar{\bar{u}}^{j-1/2, k-1/2} \quad (10.16)$$

при условии, что

$$\frac{\tau}{\theta \xi h_x} + \frac{\tau}{\theta \eta h_y} = 1. \quad (10.17)$$

Параметр  $0 \leq \theta \leq 1$ , следовательно, действительно можно подобрать, если подчинить шаг ограничению

$$\tau \left( \frac{1}{\tau_x} + \frac{1}{\tau_y} \right) \leq 1, \quad \tau_x = \xi h_x, \quad \tau_y = \eta h_y. \quad (10.18)$$

Величины  $\tau_x$ ,  $\tau_y$  представляют максимальные значения шага по времени, при которых устойчивы «одномерные» схемы (10.12) и (10.14). При этом из (10.16) и (10.17) следует, что

$$(A \bar{u}^{j-1/2, k-1/2}, \bar{u}^{j-1/2, k-1/2}) \leq \frac{\tau}{\theta \xi h_x} (A \bar{u}^{j-1/2, k-1/2}, \bar{u}^{j-1/2, k-1/2}) + \\ + \frac{\tau}{\theta \eta h_y} (A \bar{\bar{u}}^{j-1/2, k-1/2}, \bar{\bar{u}}^{j-1/2, k-1/2}).$$

Используя далее неравенства (10.13) и (10.15), мы и приходим к обещанному неравенству (10.11), которое, таким образом, доказано при условии, что шаг  $\tau$  подчинен ограничению (10.18).

Если разностная схема рассматривается на неограниченной сетке, заполняющей всю плоскость, то суммирование неравенств (10.11) по всем ячейкам сетки приводит к следующему:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (A \bar{u}^{j-1/2, k-1/2}, \bar{u}^{j-1/2, k-1/2}) \leq \\ \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (A \bar{u}_{j-1/2, k-1/2}, \bar{u}_{j-1/2, k-1/2}), \quad (10.19)$$

при условии, что сумма, стоящая в правой части, ограничена для начальных данных. Полученное неравенство (10.19) означает устойчивость описанной разностной схемы в смысле соответствую-

щей энергетической нормы сеточных функций, если  $\tau$  удовлетворяет условию (10.18).

Если расчетная область является прямоугольником

$$x_1 \leq x \leq x_{II}, \quad y_1 \leq y \leq y_{II},$$

а узлы разностной сетки выбраны так, что

$$x_0 = x_1, \quad x_J = x_{II}, \quad y_0 = y_1, \quad y_K = y_{II},$$

то в результате суммирования неравенств (10.11) по всем ячейкам сетки получим следующее:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (A\mathbf{u}^{j-1/2, k-1/2}, \mathbf{u}^{j-1/2, k-1/2}) - \\ & - \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (A\mathbf{u}_{j-1/2, k-1/2}, \mathbf{u}_{j-1/2, k-1/2}) \leqslant \\ & \leqslant \frac{\tau}{h_x} \sum_{k=1}^K [(B\mathbf{U}_{0, k-1/2}, \mathbf{U}_{0, k-1/2}) - (B\mathbf{U}_{J, k-1/2}, \mathbf{U}_{J, k-1/2})] + \\ & + \frac{\tau}{h_y} \sum_{j=1}^J [(C\mathbf{U}_{j-1/2, 0}, \mathbf{U}_{j-1/2, 0}) - (C\mathbf{U}_{j-1/2, K}, \mathbf{U}_{j-1/2, K})]. \end{aligned} \quad (10.20)$$

Это неравенство представляет разностный аналог интеграла энергии (10.3) для симметрической системы (10.1). Диссипативность граничных условий (10.5) обеспечивает отрицательность право- части неравенства (10.20) и, следовательно, устойчивость разностной схемы для смешанной задачи при ограничении (10.18) на шаг по времени  $\tau$ .

Изложенное доказательство устойчивости можно перенести и на случай более сложной области, чем прямоугольник. Пусть, например, разностная сетка заполняет на плоскости  $x, y$  область, изображенную на рис. 10.1. В результате суммирования (10.11) по всем ее ячейкам получается неравенство такого вида:

$$\begin{aligned} & \sum_{j, k} (A\mathbf{u}^{j-1/2, k-1/2}, \mathbf{u}^{j-1/2, k-1/2}) - \sum_{j, k} (A\mathbf{u}_{j-1/2, k-1/2}, \mathbf{u}_{j-1/2, k-1/2}) \leqslant \\ & \leqslant \frac{\tau}{h_x} \sum_j^I \xi_j (B\mathbf{U}_{j, k-1/2}, \mathbf{U}_{j, k-1/2}) + \\ & + \frac{\tau}{h_y} \sum_k^{II} \eta_k (C\mathbf{U}_{j-1/2, k}, \mathbf{U}_{j-1/2, k}). \end{aligned} \quad (10.21)$$

В правой части этого неравенства первая сумма  $\left(\sum_j^I\right)$  распространяется на «вертикальные» ребра ячеек  $x = x_j$ , расположенные на внешнем контуре области, вырезаемой сеткой, а вторая сумма  $\left(\sum_k^{II}\right)$  — на «горизонтальные» ребра  $y = y_k$ , лежащие на внешнем

контуре. Величины  $\xi_j$  и  $\eta_k$  равны  $\pm 1$  в зависимости от направления внешней нормали к области (на рис. 10.1, например,  $\xi_j = +1$  на «левом» контуре  $\Gamma_1\Gamma_2$ ;  $\xi_j = -1$  на «правом» контуре  $\Gamma_3\Gamma_4$ ;  $\eta_k = 1$  — на «нижнем»  $\Gamma_2\Gamma_3$ ;  $\eta_k = -1$  — на «верхнем»  $\Gamma_4\Gamma_1$ ). При диссипативных граничных условиях правая часть неравенства (10.21) отрицательна и, следовательно, разностная схема для соответствующей смешанной задачи устойчива (конечно, все при том же ограничении (10.18) на шаг по времени  $\tau$ ).

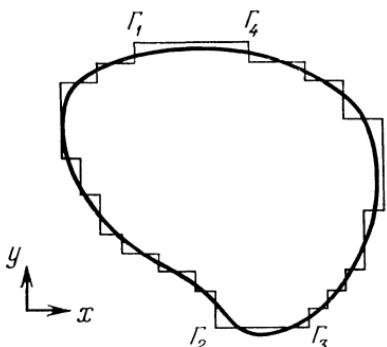


Рис. 10.1.

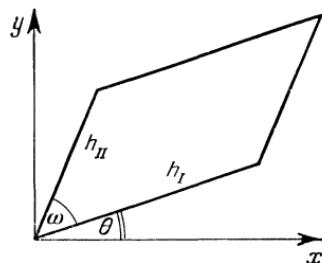


Рис. 10.2.

В дальнейшем при решении двумерных задач газовой динамики мы будем использовать не только прямоугольные сетки, но и сетки, ячейки которых представляют четырехугольники произвольного вида. В связи с этим представляет интерес получение критерия устойчивости и для более общих сеток. Это оказывается возможным для равномерной сетки, составленной из параллелограммов (см. рис. 8.1), и мы сейчас рассмотрим этот вопрос.

Заметим прежде всего, что аффинным преобразованием независимых переменных

$$\bar{x} = \gamma_{11}x + \gamma_{12}y, \quad \bar{y} = \gamma_{21}x + \gamma_{22}y \quad (10.22)$$

с выбранными соответствующим образом коэффициентами можно равномерную прямоугольную сетку преобразовать в квадратную со сторонами  $\Delta\bar{x} = \Delta\bar{y} = 1$ . В частности, для ячейки сетки, изображенной на рис. 10.2, такое преобразование имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x \sin(\omega + \theta) - y \cos(\omega + \theta)}{h_I \sin \omega}, \\ \bar{y} &= \frac{-x \sin \theta + y \cos \theta}{h_{II} \sin \omega}. \end{aligned} \quad (10.23)$$

Исходная система (10.1) преобразованием (10.22) приводится к виду

$$A \frac{\partial u}{\partial t} + \bar{B} \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{C} \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (10.24)$$

где

$$\bar{B} = \gamma_{11}B + \gamma_{12}C, \quad \bar{C} = \gamma_{21}B + \gamma_{22}C. \quad (10.25)$$

Следовательно, система (10.24) тоже симметрическая.

Прежде чем рассматривать случай общей симметрической гиперболической системы, в качестве примера обратимся к системе (7.1) нестационарных уравнений акустики с двумя пространственными переменными. После умножения двух первых ее уравнений на  $\rho_0$ , а третьего — на  $1/(\rho_0 c_0^2)$ , в матричной форме она принимает вид (10.1) с матрицами коэффициентов

$$A = \begin{vmatrix} \rho_0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad (10.26)$$

т. е. становится симметрической. После этого конструирование разностной схемы и исследование ее устойчивости, проведенные в §§ 7, 8, становятся частным случаем только что описанного общего алгоритма. Мы сочли возможным предварительно изложить эти вопросы для уравнений акустики в качестве «живой» иллюстрации ряда понятий, с которыми будем работать.

Собственные значения матрицы  $\gamma_1 B + \gamma_2 C - \mu A$  при произвольных значениях  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  могут быть вычислены как корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} -\mu\rho_0 & 0 & \gamma_1 \\ 0 & -\mu\rho_0 & \gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & -\frac{1}{\rho_0 c_0^2} \mu \end{vmatrix} = 0.$$

Их значения суть

$$\mu_{1,2} = \pm c_0 \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}, \quad \mu_3 = 0.$$

Следовательно, для уравнений акустики матрицы  $A \pm \xi \bar{B}$  и  $A \pm \eta \bar{C}$ , где  $\bar{B}$  и  $\bar{C}$  задаются формулами (10.25), будут неотрицательными при значениях  $\xi$  и  $\eta$ , которые определяются равенствами

$$\xi = \frac{1}{c_0 \sqrt{\gamma_{11}^2 + \gamma_{12}^2}}, \quad \eta = \frac{1}{c_0 \sqrt{\gamma_{21}^2 + \gamma_{22}^2}}. \quad (10.27)$$

Описанная нами разностная схема для системы уравнений (10.24) на квадратной сетке с шагами  $\Delta\bar{x}=\Delta\bar{y}=1$  будет устойчива при условии, что шаг по времени  $\tau$  удовлетворяет условию

$$\tau \left( \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\eta} \right) \leq 1.$$

С учетом формул (10.27) оно переписывается в виде

$$\tau c_0 (\sqrt{\gamma_{11}^2 + \gamma_{12}^2} + \sqrt{\gamma_{21}^2 + \gamma_{22}^2}) \leq 1. \quad (10.28)$$

Подставим сюда, согласно формулам (10.23), значения

$$\begin{aligned}\gamma_{11} &= \frac{\sin(\omega + \theta)}{h_I \sin \omega}, & \gamma_{12} &= -\frac{\cos(\omega + \theta)}{h_I \sin \omega}, \\ \gamma_{21} &= -\frac{\sin \theta}{h_{II} \sin \omega}, & \gamma_{22} &= \frac{\cos \theta}{h_{II} \sin \omega}.\end{aligned}$$

В результате получаем, что для параллелограммной сетки, ячейка которой изображена на рис. 10.2, наша разностная схема будет устойчива, если шаг удовлетворяет ограничению

$$\tau \left( \frac{c_0}{h_I \sin \omega} + \frac{c_0}{h_{II} \sin \omega} \right) \leq 1. \quad (10.29)$$

Полученное достаточное условие для уравнений акустики, следовательно, совпадает с указанным в конце § 8 необходимым условием, согласно которому в случае параллелограммной сетки вместо длин сторон параллелограмма нужно при вычислении одномерных шагов  $\tau_x$  и  $\tau_y$  использовать его высоты  $h_I \sin \omega$  и  $h_{II} \sin \omega$ .

Обратимся теперь к рассмотрению случая произвольной гиперболической симметрической системы.

Прежде всего заметим, что положительность матриц  $A \pm \xi B$  и  $A \pm \eta C$  при некоторых значениях  $\xi > 0$ ,  $\eta > 0$  гарантирует положительность матрицы  $A \pm \zeta(\gamma_1 B + \gamma_2 C)$  при значении  $\zeta$ , определяемом из формулы

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{|\gamma_1|}{\xi} + \frac{|\gamma_2|}{\eta}.$$

Это утверждение следует из тождества

$$\begin{aligned}A \pm \zeta(\gamma_1 B + \gamma_2 C) &= \left[ 1 - \zeta \left( \frac{|\gamma_1|}{\xi} + \frac{|\gamma_2|}{\eta} \right) \right] A + \\ &\quad + \zeta \frac{|\gamma_1|}{\xi} (A \pm \xi B \operatorname{sign} \gamma_1) + \zeta \frac{|\gamma_2|}{\eta} (A \pm \eta C \operatorname{sign} \gamma_2),\end{aligned}$$

где

$$\operatorname{sign} \gamma = \begin{cases} 1, & \text{если } \gamma > 0, \\ -1, & \text{если } \gamma < 0. \end{cases}$$

Применяя его к матрицам  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$ , заданным формулами (10.25), получаем, что максимальные значения  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\eta}$ , при которых неотрицательны матрицы  $A \pm \bar{\xi}\bar{B}$  и  $A \pm \bar{\eta}\bar{C}$ , определяются из равенств

$$\frac{1}{\bar{\xi}} = \frac{|\gamma_{11}|}{\bar{\xi}} + \frac{|\gamma_{12}|}{\bar{\eta}}, \quad \frac{1}{\bar{\eta}} = \frac{|\gamma_{21}|}{\bar{\xi}} + \frac{|\gamma_{22}|}{\bar{\eta}}. \quad (10.30)$$

Достаточное условие устойчивости разностной схемы для системы уравнений (10.24) на квадратной сетке с шагами  $\Delta\bar{x} = \Delta\bar{y} = 1$ , как мы уже указывали выше, имеет вид

$$\tau \left( \frac{1}{\bar{\xi}} + \frac{1}{\bar{\eta}} \right) \leq 1$$

и с учетом формул (10.30) переписывается так:

$$\tau \left[ \frac{|\gamma_{11}| + |\gamma_{21}|}{\bar{\xi}} + \frac{|\gamma_{12}| + |\gamma_{22}|}{\bar{\eta}} \right] \leq 1.$$

Подставляя сюда конкретные значения коэффициентов преобразования (10.23), получаем, что для параллелограммной сетки, ячейка которой изображена на рис. 10.2, разностная схема для произвольной симметрической системы (10.1) будет устойчива, если шаг  $\tau$  удовлетворяет ограничению

$$\tau \left[ \frac{1}{\bar{\xi}} \left( \frac{|\sin(\omega + \theta)|}{h_I \sin \omega} + \frac{|\sin \theta|}{h_{II} \sin \omega} \right) + \frac{1}{\bar{\eta}} \left( \frac{|\cos(\omega + \theta)|}{h_I \sin \omega} + \frac{|\cos \theta|}{h_{II} \sin \omega} \right) \right] \leq 1.$$

В загруженной, но более простой форме это условие может быть переписано в виде

$$\tau \left( \frac{1}{\bar{\xi}} + \frac{1}{\bar{\eta}} \right) \left( \frac{1}{h_I} + \frac{1}{h_{II}} \right) \frac{1}{\sin \omega} \leq 1.$$

Полученное достаточное условие является несколько более жестким, чем критерий (10.29) для уравнений акустики. Это связано с оценками (10.30) для собственных чисел матриц  $A \pm \bar{\xi}\bar{B}$  и  $A \pm \bar{\eta}\bar{C}$ . В каждом конкретном случае эти оценки, по-видимому, можно улучшить, как показывает сравнение формул (10.27) и (10.30) для уравнений акустики.

Остановимся кратко на вопросах, связанных с конструированием схемы в случае, когда в уравнениях (10.1) элементы матриц  $A$ ,  $B$ ,  $C$  являются функциями  $x$ ,  $y$ ,  $t$ . Алгоритм расщепления схемы на «одномерные» сводит решение этих вопросов на «одномерный» уровень, и вступают в силу те замечания, которые были высказаны по этому поводу в конце предыдущего параграфа. Это касается прежде всего дивергентной формы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t} [A\mathbf{u}] + \frac{\partial}{\partial x} [B\mathbf{u}] + \frac{\partial}{\partial y} [C\mathbf{u}] = Q\mathbf{u} + \mathbf{f}. \quad (10.31)$$

Наличие правой части у этих уравнений должно быть учтено при составлении для них разностных уравнений, аналогичных (10.6).

Если матрица  $Q \neq 0$ , то алгоритмически наиболее просто при вычислении правой части пользоваться значениями  $\{u_{j-1/2, k-1/2}\}$  на «нижнем» слое, хотя в некоторых случаях бывает целесообразным использовать  $u^{j-1/2, k-1/2}$  с «верхнего» слоя или величины  $\frac{1}{2}(u_{j-1/2, k-1/2} + u^{j-1/2, k-1/2})$ . В «одномерных» разностных уравнениях (10.12) и (10.14) для соответствующих систем (10.7) и (10.9) в дивергентной форме наличие правой части у системы (10.31) может не учитываться. Можно проверить, что это не препятствует получению разностной схемы с первым порядком аппроксимации на гладких решениях.

Заметим, далее, что предложенный алгоритм построения разностной схемы может быть осуществлен и в случае, если матрицы рассматриваемой системы уравнений не симметричны. Алгоритм расщепления позволяет и здесь свести возникающие вопросы на уровень «одномерных» задач. Что касается обоснования устойчивости, оценок разностных решений и диссипативности граничных условий, то их удается исследовать только для такой системы, которая может быть симметризована, т. е. умножением на некоторую положительно определенную симметричную матрицу  $i$ , может быть, переходом от  $u$  к новым искомым функциям  $v$  приводится к симметрической системе (10.1). Возможность такой симметризации будет всегда подразумеваться в дальнейшем.

В частности, для системы (7.1) нестационарных уравнений акустики с двумя пространственными переменными симметризация достигается путем умножения первых двух уравнений на  $\rho_0 c_0^2$  и третьего на  $\frac{1}{\rho_0 c_0^2}$ , после чего в матричной форме она принимает вид (10.26).

Более сложный пример представляют двумерные уравнения линейной теории упругости. В терминах компонент  $u$ ,  $v$  вектора смещения и компонент  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$  тензора напряжений они имеют вид

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y}, \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y}, \\ \sigma_{11} &= \rho a^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \rho (a^2 - 2b^2) \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \sigma_{22} &= \rho (a^2 - 2b^2) \frac{\partial u}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \sigma_{12} &= \frac{1}{2} \rho b^2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (10.32)$$

Здесь  $\rho$  — плотность среды,  $a$  и  $b$  — скорости распространения продольных и поперечных упругих волн.

Введем в качестве неизвестных функций компоненты вектора скорости перемещения:

$$\hat{u} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \hat{v} = \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Тогда система (10.32) может быть превращена в систему уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y}, \\ \rho \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y}, \\ \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} &= \rho a^2 \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \rho (a^2 - 2b^2) \frac{\partial \hat{v}}{\partial y}, \\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial t} &= \rho (a^2 - 2b^2) \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial \hat{v}}{\partial y}, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \rho b^2 \left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (10.33)$$

Эта система путем замены третьего и четвертого уравнений их линейными комбинациями

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\alpha \sigma_{11} + \beta \sigma_{22})}{\partial t} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial (\beta \sigma_{11} + \alpha \sigma_{22})}{\partial t} - \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

где

$$\alpha = \frac{a^2}{4\rho b^2 (a^2 + b^2)}, \quad \beta = -\frac{a^2 - 2b^2}{4\rho b^2 (a^2 + b^2)},$$

и деления последнего уравнения на  $\frac{1}{2} \rho b^2$  преобразуется в симметрическую. Описанную симметризацию (в несколько иных обозначениях) можно найти в § 11 книги [34]. Для численного решения различных задач теории линейной упругости, описываемых системой (10.33) в плоской геометрии, а также для решения задач в цилиндрической геометрии и задач, связанных с учетом температурных напряжений, приводящих к появлению у уравнений (10.33) соответствующих правых частей, применялась и описанная нами разностная схема. По этому поводу можно обратиться к работам [115], [116].

В заключение этого параграфа заметим, что предложенная конструкция разностной схемы автоматически обобщается на слу-

чай трех пространственных переменных:

$$\frac{\partial}{\partial t} (A_0 \mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial x} (A_1 \mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (A_2 \mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial z} (A_3 \mathbf{u}) = \mathbf{F}, \quad (10.34)$$

и приводит к условию устойчивости, обобщающему критерий (10.18):

$$\tau \left( \frac{1}{\tau_x} + \frac{1}{\tau_y} + \frac{1}{\tau_z} \right) \leqslant 1, \quad (10.35)$$

которое вряд ли требует пояснений.

Разностные схемы для гиперболических систем, которые мы рассматривали до сих пор, были удобны тем, что никаких затруднений при решении связанной с ними системы разностных уравнений не возникает. Эти уравнения можно решать последовательно от одного временного слоя к следующему, причем каждую точку разностной схемы можно рассчитать независимо. При этом удается либо выписать явные формулы, по которым вычисляются величины на «верхнем» слое по времени, либо для их вычисления в каждом интервале сетки нужно решать системы из  $m^*$  алгебраических уравнений, где  $m^*$  — число дифференциальных уравнений в исходной системе. Такие схемы получили название *явных*.

Однако у явных схем есть один существенный недостаток. Они допускают счет лишь с шагом по времени, подчиненным определенному ограничению. При его нарушении схема становится неустойчивой и проведение расчета становится невозможным.

В тех случаях, когда такое ограничение на шаг по времени не вызывается существом дела, возникает естественное желание его избежать. Такая возможность реализуется путем использования *неявных* разностных схем.

## § 11. Неявные разностные схемы

Общая конструкция неявных схем, основанных на интегральных законах сохранения (метод предиктор-корректор). Неявная схема для простейшего модельного уравнения. Исследование устойчивости методом Фурье. Сглаживающее усреднение. Реализация граничных условий. Перенесение схемы на систему уравнений с одной пространственной переменной. Прогонка как метод решения уравнений на промежуточном слое. Обобщение схемы на случай двух пространственных переменных.

В отличие от явных схем, при применении неявной схемы для совокупности величин на очередном временном слое выписывается система разностных уравнений, которая затем решается тем или иным способом. Алгоритм для ее решения, как правило, опирается на специфику этой системы, состоящую в том, что каждое из ее уравнений «захватывает» небольшое число неизвестных из нескольких «соседних» точек разностной сетки.

Например, в случае одной пространственной переменной часто применяются «трехточечные» разностные уравнения, для решения которых имеется очень простой и эффективный метод прогонки (см., например, [40]). Значительно сложнее обстоит дело, когда число пространственных переменных две или больше.

Неявные схемы, о которых мы будем довольно кратко говорить в этой книге, как и явные схемы, которым будет уделено существенно большее внимание, основываются на интегральных законах сохранения. Расчет шага, т. е. переход от состояния на момент  $t_0$  к состоянию на момент  $t_0 + \tau$ , разбивается на два этапа: вычисление вспомогательных величин на «промежуточном» слое по неявной схеме (в случае явной схемы их роль играли «большие» величины, определяемые из распадов разрывов) и затем вычисление величин на верхнем слое с соблюдением законов сохранения в разностной форме («пересчет»), как и в случае явной схемы. Такой прием носит название *счет-пересчет (предиктор-корректор)*. Важно отметить, что при его реализации не нужно заботиться о законах сохранения при счете промежуточного слоя (предиктор) — их выполнение для результирующей схемы обеспечивает второй этап (корректор).

Не следует, однако, думать, что в качестве предиктора можно взять любую неявную разностную схему для рассматриваемых дифференциальных уравнений, поскольку пересчет осуществляется по явной схеме. Наша цель состоит в том, чтобы результирующая схема предиктор-корректор была устойчива при произвольном значении  $\tau$ . Таким образом, требования устойчивости, а также аппроксимации (и, может быть, некоторые другие) вынуждают очень внимательно и осторожно подходить к выбору неявной схемы.

Одна из таких схем для одномерных задач газовой динамики была подробно изложена в [2]. Немного позже мы коротко остановимся на ее содержании, а сейчас изложим конструкцию другой неявной разностной схемы, которая близка к ней по структуре, но в некоторых отношениях удобнее для наших целей.

Сначала опишем нашу неявную схему на примере простейшего дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (11.1)$$

с постоянным коэффициентом  $a$  и равномерной сетки с шагом  $h$  по координате  $x$ .

Пусть  $u_{j-1/2}$  — значение функции  $u(x, t)$  в интервале между узлами сетки  $x_{j-1}$  и  $x_j$  на «нижнем» слое по времени  $t = t_0$ . Расчет новых значений  $\{u^{j-1/2}\}$  на «верхнем» слое  $t = t_0 + \tau$  состоит в следующем. Сначала вычисляются «предварительные» значения  $\bar{U}_j$

на промежуточном слое из разностных уравнений

$$\frac{\bar{U}_j - \frac{1}{2} (u_{j-1/2} + u_{j+1/2})}{\omega\tau} + a \frac{u_{j+1/2} - u_{j-1/2}}{h} - \omega\tau a^2 \frac{\bar{U}_{j+1} - 2\bar{U}_j + \bar{U}_{j-1}}{h^2} = 0; \quad (11.2)$$

здесь  $\omega$ —постоянный параметр, смысл которого можно истолковать так, что промежуточный слой отвечает моменту времени  $t_0 + \omega\tau$ . Мы будем применять уравнение (11.2) как при  $a < 0$ , так и при  $a > 0$ .

После этого вычисленные из неявной системы разностных уравнений (11.2) величины  $\bar{U}_j$  подвергаются сглаживанию:

$$U_j = (1-\alpha)\bar{U}_j + \frac{\alpha}{2}(\bar{U}_{j-1} + \bar{U}_{j+1}), \quad (11.3)$$

где  $\alpha$ —числовой параметр (для его значений ниже будет получено ограничение  $0 \leq \alpha \leq 0,5$ ).

Наконец, осуществляется вычисление новых величин  $u^{j-1/2}$  по формуле

$$u^{j-1/2} = u_{j-1/2} - \frac{\tau}{h} a (U_j - U_{j-1}), \quad (11.4)$$

представляющей «закон сохранения» для уравнения (11.1) в интервале сетки  $j-1/2$ .

Прежде чем переходить к изучению свойств описанной схемы, сделаем одно методическое замечание по поводу происхождения уравнения (11.2) для промежуточного слоя. Временно введем в рассмотрение на промежуточном слое не только величины  $\bar{U}_j$  с целочисленными индексами, но и величины  $\bar{U}_{j-1/2}$ . Для этих последних «естественно» записывается в интервале  $j-1/2$  уравнение

$$\frac{\bar{U}_{j-1/2} - u_{j-1/2}}{\omega\tau} + a \frac{\bar{U}_j - \bar{U}_{j-1}}{h} = 0. \quad (11.5)$$

Привлекая аналогичное уравнение в интервале  $j+1/2$ :

$$\frac{\bar{U}_{j+1/2} - u_{j+1/2}}{\omega\tau} + a \frac{\bar{U}_{j+1} - \bar{U}_j}{h} = 0, \quad (11.6)$$

«интерполяцией» этих двух уравнений получаем уравнение для узла с номером  $j$ :

$$\frac{\bar{U}_j - \frac{1}{2} (u_{j-1/2} + u_{j+1/2})}{\omega\tau} + a \frac{\bar{U}_{j+1/2} - \bar{U}_{j-1/2}}{h} = 0. \quad (11.7)$$

Исключая из уравнения (11.7) величины  $\bar{U}_{j-1/2}$  и  $\bar{U}_{j+1/2}$  с помощью уравнений (11.5), (11.6), мы и получим выписанное выше уравнение (11.2), связывающее три соседних значения  $\bar{U}_{j-1}$ ,  $\bar{U}_j$  и  $\bar{U}_{j+1}$  с целыми индексами. Величины же  $\{\bar{U}_{j-1/2}\}$  фигурировали только в процессе «вывода» уравнения (11.2) и, как видно из описания схемы (11.2)–(11.4), в счете не участвуют.

Не касаясь пока вопроса о граничных условиях, начнем изучение свойств предложенной схемы с исследования условий, при которых можно надеяться на ее устойчивость при произвольном значении  $\tau$ . Проведем его с помощью метода Фурье. Зададим значения  $u_{j-1/2}$  в виде

$$u_{j-1/2} = e^{i(j-1/2)\varphi},$$

где  $\varphi$  — параметр ( $0 \leq \varphi \leq \pi$ ),  $i$  — мнимая единица, и посмотрим, как их преобразуют разностные операторы, определенные формулами (11.2)–(11.4).

Собственное значение  $\bar{\lambda}$  неявного разностного оператора, отвечающего системе (11.2), определяется равенством

$$\bar{\lambda} - \frac{e^{-i\varphi/2} + e^{i\varphi/2}}{2} + \omega v a (e^{i\varphi/2} - e^{-i\varphi/2}) - \omega^2 v^2 a^2 (e^{i\varphi} - 2 + e^{-i\varphi}) \bar{\lambda} = 0,$$

где  $v = a\tau/h$  — число Куранта. Из него следует, что

$$\bar{\lambda} = \frac{\cos \frac{\varphi}{2} - 2i\omega v \sin \frac{\varphi}{2}}{1 + 4\omega^2 v^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Рассматривая далее сглаживание (11.3) и «пересчет» (11.4), получим, что собственное значение  $\lambda$  разностного оператора перехода от величин  $\{u_{j-1/2}\}$  к величинам  $\{u^{j-1/2}\}$  определяется формулой

$$\lambda = 1 - i2v \sin \frac{\varphi}{2} \left( 1 - 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \frac{\cos \frac{\varphi}{2} - 2i\omega v \sin \frac{\varphi}{2}}{1 + 4\omega^2 v^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}},$$

или, после элементарных преобразований,

$$\lambda = \frac{1 - 4v^2 \omega \left( 1 - \omega - 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \sin^2 \frac{\varphi}{2} - iv \left( 1 - 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \sin \varphi}{1 + 4\omega^2 v^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}. \quad (11.8)$$

Для исследования устойчивости рассмотрим величину  $1 - |\lambda|^2$ , которая может быть записана в виде

$$1 - |\lambda|^2 = \frac{4v^2 \left(1 - 2\alpha \sin^2 \frac{\Phi}{2}\right) \left(2\omega - 1 + 2\alpha \sin^2 \frac{\Phi}{2}\right) \sin^2 \frac{\Phi}{2}}{1 + 4\omega^2 v^2 \sin^2 \frac{\Phi}{2}}.$$

Отсюда следует, что  $1 - |\lambda|^2 \geq 0$  при любом значении  $\varphi$  в том и только том случае, если выполнены условия

$$\omega \geq 0,5, \quad 0 \leq \alpha \leq 0,5, \quad (11.9)$$

причем это будет иметь место при любом значении  $v$ . Таким образом, при выполнении условий (11.9) можно рассчитывать на устойчивость описанной неявной схемы (11.2)–(11.4) при любом шаге по времени.

Представляется естественным в качестве параметра  $\omega$  применять либо  $\omega = 0,5$ , либо  $\omega = 1$ . Если  $\omega = 0,5$ , т. е. промежуточный слой отвечает времени  $t = t_0 + \tau/2$ , то из формулы (11.8) следует, что вещественная часть комплексного числа

$$\operatorname{Re} \lambda = \frac{1 + v^2 \sin^2 \frac{\Phi}{2} \left(4\alpha \sin^2 \frac{\Phi}{2} - 1\right)}{1 + v^2 \sin^2 \frac{\Phi}{2}}. \quad (11.10)$$

При  $\alpha = 0$ , т. е. при отсутствии сглаживающего оператора (11.3), оказывается, что  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  для значений  $\varphi$  таких, что  $v \sin(\varphi/2) > 1$ . Следовательно, будут наблюдаться осцилляции разностного решения на «высоких гармониках» (хотя и затухающие по времени, поскольку  $|\lambda| \leq 1$ ). Оператор сглаживания и вводится для того, чтобы бороться с этим явлением. Например, при  $\alpha = 0,25$  из формулы (11.10) можно видеть, что  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  только в случае  $v \sin \varphi > 2$ , т. е. при  $v \leq 2$  не осуществляется вообще, а при  $v > 2$  — только на полосе частот вблизи  $\varphi = \pi/2$ .

Если  $\omega = 1$ , т. е. промежуточный слой отвечает времени  $t_0 + \tau$ , то из формулы (11.8) имеем, что

$$\operatorname{Re} \lambda = \frac{1 + 8\alpha v^2 \sin^4 \frac{\Phi}{2}}{1 + 4v^2 \sin^2 \frac{\Phi}{2}}.$$

Следовательно,  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  при всех значениях  $\varphi$  и без сглаживания (при  $\alpha = 0$ ). Впрочем, и в этом случае сглаживание может оказаться полезным, поскольку пока мы рассматривали только простейшее модельное уравнение (11.1) и разностную схему на равномерной сетке и без граничных условий.

Сделаем теперь некоторые замечания, которые окажутся полезными в дальнейшем при получении условий устойчивости двумерных схем.

Вычисление величин  $\{u^{j-1/2}\}$  по величинам  $\{u_{j-1/2}\}$  по описанному процессу состоит из следующих деталей. Сначала вычисляем  $\{U_j\}$ —это вычисление представляет собой линейное преобразование  $\{u_{j-1/2}\}$  с помощью некоторого оператора, который мы символически обозначим  $\mathcal{R}(\omega t)$ , чтобы подчеркнуть его зависимость от параметра  $\omega t$ :

$$\{U_j\} = \mathcal{R}(\omega t) \{u_{j-1/2}\}.$$

Пересчет по формулам (11.4)

$$u^{j-1/2} = u_{j-1/2} - \frac{\tau}{h} a (U_j - U_{j-1})$$

мы символически запишем в виде операторного равенства

$$\{u^{j-1/2}\} = I \{u_{j-1/2}\} - \frac{\tau}{h} \Delta \{U_j\} = \left[ I - \frac{\tau}{h} \Delta \mathcal{R}(\omega t) \right] \{u_{j-1/2}\}.$$

Здесь  $I$ —единичный оператор,  $\Delta$ —оператор разности. Из проведенного исследования вытекает, что если определить норму сеточной функции при помощи формулы

$$\| \{u^{j-1/2}\} \| = \sqrt{\sum_l (u^{j-1/2})^2},$$

то из нашего исследования методом Фурье можно получить следующее неравенство для нормы оператора  $I - \frac{\tau}{h} \Delta \mathcal{R}(\omega t)$ :

$$\left\| I - \frac{\tau}{h} \Delta \mathcal{R}(\omega t) \right\| \leq 1,$$

если только  $\omega \geqslant 1/2$ . В самом деле, переходя к преобразованиям Фурье

$$\begin{aligned} \hat{u}(\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_l u^{j-1/2} e^{il(j-1/2)\varphi}, \\ u(\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_l u_{j-1/2} e^{il(j-1/2)\varphi} \end{aligned}$$

и пользуясь равенством Парсеваля

$$\int_0^{2\pi} |\hat{u}(\varphi)|^2 d\varphi = \sum_l |u^{j-1/2}|^2,$$

$$\int_0^{2\pi} |u(\varphi)|^2 d\varphi = \sum_l |u_{j-1/2}|^2$$

и тем, что

$$\hat{u}(\varphi) = \lambda\left(\varphi, \omega, \frac{\tau}{h}\right) u(\varphi),$$

легко заключаем, что

$$\left\| I - \frac{\tau}{h} \Delta \mathcal{R}(\omega \tau) \right\| = \max_{\varphi} \left| \lambda\left(\varphi, \omega, \frac{\tau}{h}\right) \right| \leq 1$$

при условии  $\omega \geq 1/2$ . Именно неравенство  $\left\| I - \frac{\tau}{h} \Delta \mathcal{R}(\omega \tau) \right\| \leq 1$  вместе с условием  $\omega \geq 1/2$  будет в дальнейшем использоваться при исследовании двумерных схем.

Если для уравнения (11.1) решается краевая задача на отрезке  $x_1 \leq x \leq x_{II}$ , то постановка граничных условий зависит от знака коэффициента  $a$ .

Если  $a > 0$ , то следует задавать  $u(x_1, t) = g_1(t)$ , а на правой границе граничное условие ставить не нужно. Если  $a < 0$ , то, наоборот, нужно задавать  $u(x_{II}, t) = g_{II}(t)$ , а на левой границе граничное условие отсутствует.

Как осуществить реализацию граничных условий в описываемой неявной схеме? Начнем с системы (11.2) на промежуточном слое. Уравнения для «внутренних» узлов сетки выписаны. Для получения замкнутой системы они должны быть дополнены еще двумя уравнениями. В случае  $a < 0$  одним из них будет уравнение  $\bar{U}_J = g_{II}(t_0 + \omega \tau)$  согласно граничному условию  $u(x_{II}, t) = g_{II}(t)$ . Второе уравнение выписывается в узле  $x_0 = x_1$  и, поскольку никакого граничного условия в нем не ставится, представляет аппроксимацию исходного уравнения (11.1) такого вида:

$$\frac{\frac{1}{2}(\bar{U}_0 + \bar{U}_1) - u_{1/2}}{\omega \tau} + a \frac{\bar{U}_1 - \bar{U}_0}{h} = 0. \quad (11.11)$$

В случае  $a > 0$ , очевидно, следует на левом конце  $x_0 = x_1$  пользоваться заданным граничным условием, полагая  $\bar{U}_0 = g_1(t_0 + \omega \tau)$ , а на правом — уравнением, аналогичным (11.11):

$$\frac{\frac{1}{2}(\bar{U}_J + \bar{U}_{J-1}) - u_{J-1/2}}{\omega \tau} + a \frac{\bar{U}_J - \bar{U}_{J-1}}{h} = 0.$$

При выполнении сглаживания величин  $\bar{U}_j$ , полученных из решения системы уравнений на промежуточном слое, крайние значения будем оставлять без изменения:  $U_0 = \bar{U}_0$ ,  $U_J = \bar{U}_J$ , а для остальных — применяем формулу (11.3).

Устойчивость предлагаемой схемы была тщательно проверена экспериментальными расчетами при различных значениях параметра  $v = at/h$ . В этой работе принимала участие Л. А. Плиннер.

На этом мы закончим описание разностной схемы для скалярного уравнения (11.1) и рассмотрим, как ее применить к численному решению краевой задачи для гиперболической системы дифференциальных уравнений с постоянной матрицей коэффициентов

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0 \quad (11.12)$$

на отрезке  $x_1 \leqslant x \leqslant x_{II}$ , постановку которой мы подробно обсудили в § 9. (Матрицу  $A$  будем считать единичной. Симметричность матрицы  $B$  не предполагается.)

Сосредоточим пока свое внимание на составлении системы уравнений на промежуточном слое, аналогичной (11.2) в случае одного уравнения (11.1). После приведения системы (11.12) к каноническому виду с помощью «римановых инвариантов»  $\mathbf{v}$  для каждой компоненты вектор-функции  $\mathbf{v}$  получается скалярное уравнение

$$\frac{\partial v^{(m)}}{\partial t} + \mu_m \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x} = 0 \quad (m = 1, \dots, m^*).$$

Это позволяет в каждом из «внутренних» узлов сетки написать уравнения, аналогичные (11.2), отдельно для каждой из компонент  $v^{(m)}$ .

Поскольку вид этих уравнений одинаков независимо от знаков коэффициентов  $\mu_m$ , их можно сразу заменить эквивалентной системой уравнений для компонент вектора  $\mathbf{u}$ . В матричной форме она будет иметь вид

$$\begin{aligned} \bar{U}_j - \frac{1}{2} (u_{j-1/2} + u_{j+1/2}) \\ \frac{\omega\tau}{\omega\tau + B} + B \frac{u_{j+1/2} - u_{j-1/2}}{h} - \\ - \omega\tau B^2 \frac{\bar{U}_{j+1} - 2\bar{U}_j + \bar{U}_{j-1}}{h^2} = 0. \end{aligned} \quad (11.13)$$

Полученное множество уравнений должно быть дополнено  $m^*$  уравнениями в левом граничном узле  $x_0 = x_1$  и  $m^*$  уравнениями в узле  $x_J = x_{II}$ . Между тем при постановке задачи в узле  $x_0 = x_1$  задано только  $m_+$  независимых граничных условий, а в узле  $x_J = x_{II}$  — только  $m_-$  независимых граничных условий. Они предполагаются заданными в форме соотношений (9.21), связывающих компоненты вектор-функции  $\mathbf{u}$ .

Набор из  $m^*$  уравнений для левого узла  $x_0 = x_1$  составляется из  $m_+$  заданных граничных соотношений, дополненных уравнениями, которые пишутся по аналогии с уравнением (11.5) для каждого из «римановых инвариантов»  $v^{(m)}$ , отвечающего «приход-

дящей» на левую границу характеристике:

$$\frac{\frac{1}{2}(\bar{V}_0^{(m)} + \bar{V}_1^{(m)}) - v_{1/2}^{(m)}}{\omega\tau} + \mu_m \frac{\bar{V}_1^{(m)} - \bar{V}_0^{(m)}}{h} = 0, \quad \text{если } \mu_m \leq 0. \quad (11.14)$$

Сюда же включен и случай  $\mu_m = 0$ .

Эти уравнения должны быть переписаны в терминах компонент вектор-функции  $\mathbf{u}$  с помощью обратного преобразования  $\mathbf{v} = \Lambda^{-1}\mathbf{u}$ .

Совершенно аналогично составляются  $m^*$  уравнений для правого узла  $x_J = x_{II}$ . Полученная система разностных уравнений для промежуточного слоя имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 \bar{\mathbf{U}}_0 - \mathcal{B}_0 \bar{\mathbf{U}}_1 &= \mathbf{f}_0, \\ \mathcal{A}_j \bar{\mathbf{U}}_{j-1} - \mathcal{B}_j \bar{\mathbf{U}}_j + \mathcal{C}_j \bar{\mathbf{U}}_{j+1} &= \mathbf{f}_j \quad (j = 1, \dots, J-1), \\ -\mathcal{B}_J \bar{\mathbf{U}}_{J-1} + \mathcal{C}_J \bar{\mathbf{U}}_J &= \mathbf{f}_J, \end{aligned} \quad (11.15)$$

где  $\mathcal{A}_j$ ,  $\mathcal{B}_j$ ,  $\mathcal{C}_j$  — квадратные матрицы порядка  $m^*$ ,  $\mathbf{f}_j$  — векторы той же размерности  $m^*$ .

Ее решение может быть осуществлено методом прогонки. Скалярный вариант трехточечной прогонки описан, например, в [40]. Для полноты изложения опишем ее для рассматриваемого векторного случая. Сначала прямой прогонкой последовательно рассчитываются прогоночные матрицы  $\mathcal{L}_{j-1/2}$  и векторы  $\mathbf{K}_{j-1/2}$ . Исходными служат

$$\mathcal{L}_{1/2} = \mathcal{A}_0^{-1} \mathcal{B}_0, \quad \mathbf{K}_{1/2} = \mathcal{A}_0^{-1} \mathbf{f}_0.$$

Затем используются рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{j+1/2} &= (\mathcal{B}_j - \mathcal{A}_j \mathcal{L}_{j-1/2})^{-1} \mathcal{C}_j, \\ \mathbf{K}_{j+1/2} &= (\mathcal{B}_j - \mathcal{A}_j \mathcal{L}_{j-1/2})^{-1} (\mathcal{C}_j \mathbf{K}_{j-1/2} - \mathbf{f}_j) \end{aligned}$$

для  $j = 1, \dots, J-1$ . После того, как будут вычислены матрица  $\mathcal{L}_{J-1/2}$  и вектор  $\mathbf{K}_{J-1/2}$ , определяется искомый вектор  $\bar{\mathbf{U}}_J$  на правой границе по формуле

$$\bar{\mathbf{U}}_J = (\mathcal{C}_J - \mathcal{B}_J \mathcal{L}_{J-1/2})^{-1} (\mathbf{f}_J + \mathcal{B}_J \mathbf{K}_{J-1/2}).$$

Затем обратной прогонкой считаются искомые векторы  $\bar{\mathbf{U}}_j$  по рекуррентным формулам

$$\bar{\mathbf{U}}_{j-1} = \mathcal{L}_{j-1/2} \bar{\mathbf{U}}_j + \mathbf{K}_{j-1/2}$$

для значений  $j = J, J-1, \dots, 1$ .

Обоснование метода прогонки можно найти, например, в работах [40], [95], и мы не будем останавливаться на этом вопросе.

После получения величин  $\bar{U}_j$  на промежуточном слое дальнейшее сглаживание (а затем и пересчет) можно выполнять независимо для каждой из компонент вектор-функции  $\mathbf{u}$ . Для крайних значений  $j=0$  и  $j=J$  векторы  $\bar{U}_0$ ,  $\bar{U}_J$  оставляем без изменения:  $\mathbf{U}_0 = \bar{U}_0$ ,  $\mathbf{U}_J = \bar{U}_J$ .

Заметим, что в случае, когда схема рассматривается без граничных условий на бесконечной сетке, из самого способа ее конструирования следует, что она распадается на независимые схемы для каждого риманова инварианта  $v^{(m)}$ ,  $m=1, \dots, m^*$ .

Поэтому устойчивость описанной схемы без граничных условий при любом шаге по времени  $\tau$  прямо следует из проведенного выше исследования для модельного уравнения (11.1).

Так же, как и для скалярных уравнений, вычисление  $\mathbf{u}^{j-1/2}$  по  $\mathbf{u}_{j-1/2}$  можно себе представлять в виде составного оператора  $I - \frac{\tau}{h} B \Delta \mathcal{R}(\omega\tau)$ , где  $\mathcal{R}(\omega\tau)$ —зависящий от параметра  $\omega\tau$  оператор вычисления  $\mathbf{U}_j$ ,  $\Delta$ —оператор разности

$$\Delta \mathbf{U}_j = \mathbf{U}_j - \mathbf{U}_{j-1},$$

$B$ —матрица коэффициентов при  $\frac{\partial}{\partial x}$  в уравнении  $\frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ . Результат описанного сейчас исследования устойчивости задачи без граничных условий так же, как и в скалярном случае, можно представить в виде символического неравенства

$$\left\| I - \frac{\tau}{h} B \Delta \mathcal{R}(\omega\tau) \right\| \leq 1, \quad (11.16)$$

если только  $\omega \geqslant 1/2$ . Наличие граничных условий нарушает такое расщепление (за исключением случая, когда в качестве граничных условий задаются римановы инварианты для «уходящих» характеристик; тогда можно вообще решить задачу независимо для каждого инварианта). Для исследования устойчивости приходится прибегнуть к численному эксперименту, как мы и поступили в скалярном случае. Если же элементы матрицы  $B$  являются функциями  $x$  и  $t$ , вступают в силу те замечания, которые мы сделали в § 9 при описании явной схемы. Мы не видим никаких принципиальных затруднений для перенесения описанной неявной схемы на случай переменных коэффициентов. Что касается конкретных изменений при конструировании схемы, то мы изложим их в § 21 сразу для более сложного случая квазилинейной системы гиперболических уравнений.

Как мы уже упоминали выше, еще одна неявная схема для гиперболических уравнений была предложена в книге [2], и по ней проводилось численное интегрирование системы квазилинейных уравнений одномерной газовой динамики. Мы не будем здесь приводить ее описания и исследования. В отличие от схемы,

которую мы только что изложили, в схеме из [2] значения функции на «нижнем» и «верхнем» слое задаются в узлах сетки с целочисленными номерами  $j$ , а на промежуточном слое — в «половцелых» точках  $j - 1/2$ . Это вызвало определенные различия при конкретной реализации этих двух схем ввиду их разного «взаимодействия» с границами счетной области. Что касается принципов, заложенных в основу конструирования неявной схемы, то они одни и те же для обеих схем. Мы отдали предпочтение схеме, описанной выше, по той причине, что она опирается на ту же сетку, что и явные схемы, излагаемые в этой книге. Это обстоятельство облегчает нам изложение, а на практике упрощает возможность применить при решении конкретных задач явную или неявную схему, в зависимости от необходимости или по желанию.

В заключение этого параграфа мы кратко остановимся на вопросе об использовании неявных разностных схем для задач с двумя пространственными переменными на примере линейной гиперболической системы уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + C \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = \mathbf{f}, \quad (11.17)$$

где  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, t)$  — искомая вектор-функция с  $m^*$  компонентами,  $B, C$  — квадратные симметрические матрицы порядка  $m^*$ ,  $\mathbf{f}$  — заданная вектор-функция.

Симметрия матриц  $B, C$  обеспечивает выполнение интеграла энергии, имеющего в дифференциальной форме вид

$$\frac{\partial (\mathbf{u}, \mathbf{u})}{\partial t} + \frac{\partial (B\mathbf{u}, \mathbf{u})}{\partial x} + \frac{\partial (C\mathbf{u}, \mathbf{u})}{\partial y} = 2(\mathbf{f}, \mathbf{u}).$$

Такое предположение удобно при исследовании устойчивости. Полученные ниже результаты без труда переносятся на симметрические системы вида

$$A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + C \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = 0,$$

$$A = A^*, \quad B = B^*, \quad C = C^*, \quad (A\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0,$$

и на системы, которые заменой уравнений их линейными комбинациями к такому виду приводятся. Система (11.17) рассматривается в прямоугольной области, на которой строится такая же прямоугольная сетка, как и в случае уравнений акустики с двумя пространственными переменными в § 7. Неявная схема используется только для счета промежуточного слоя, а затем полученные величины (после сглаживающего усреднения) участают в пересчете, основанном на интегральных законах сохранения. Выписывая неявные уравнения для величин на промежуточном слое, приходится с самого начала задумываться о том, каким образом можно решить получаемую систему уравнений, ибо

в двумерном случае эта проблема гораздо более серьезная, чем в одномерном. Один из возможных выходов состоит в том, чтобы расщепить систему уравнений на промежуточном слое на «одномерные» системы. С этой целью введем на нем два набора вспомогательных величин:  $\{\mathbf{U}_{j, k-1/2}\}$  и  $\{\mathbf{U}_{j-1/2, k}\}$ , аналогичных «большим» величинам в явной схеме. Для вычисления первого набора величин  $\{\mathbf{U}_{j, k-1/2}\}$  составляются «одномерные» системы уравнений при фиксированном индексе  $k$  для однородной системы уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0.$$

Этот процесс ничем не отличается от описанного выше для одномерного случая, и мы на нем не останавливаемся, так же как и на описании решения полученных уравнений с последующим сглаживающим усреднением. Совершенно аналогично составляются и решаются неявные уравнения для величин второго набора  $\{\mathbf{U}_{j-1/2, k}\}$ . При фиксированном индексе  $j$  они составляются для однородной системы уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + C \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = 0,$$

а затем решаются точно так же, как и в одномерном случае, и подвергаются сглаживающему усреднению. После этого выполняется пересчет по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{j-1/2, k-1/2} = & \mathbf{u}_{j-1/2, k-1/2} - \frac{\tau}{h_x} B [\mathbf{U}_{j, k-1/2} - \mathbf{U}_{j-1, k-1/2}] - \\ & - \frac{\tau}{h_y} C [\mathbf{U}_{j-1/2, k} - \mathbf{U}_{j-1/2, k-1}], \end{aligned}$$

которые можно рассматривать как разностные законы сохранения для уравнений (11.17). В случае переменных коэффициентов уравнения (11.17) должны быть предварительно записаны в дивергентной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [B \mathbf{u}] + \frac{\partial}{\partial y} [C \mathbf{u}] = Q \mathbf{u} + f.$$

При написании разностных уравнений для пересчета матрицы коэффициентов будут своими в каждом интервале сетки, как уже было описано в конце предыдущего параграфа.

Остановимся на исследовании устойчивости описанной неявной схемы в двумерном случае (в задаче без граничных условий). Символическая построенная схема может быть записана в виде оператора

$$I - \frac{\tau}{h_x} B \Delta_x \mathcal{R}(\omega \tau) - \frac{\tau}{h_y} C \Delta_y Q(\omega \tau),$$

где  $\mathcal{R}(\omega \tau)$ ,  $Q(\omega \tau)$  — «одномерные» операторы вычисления величин  $\{\mathbf{U}_{j, k-1/2}\}$ ,  $\{\mathbf{U}_{j-1/2, k}\}$  соответственно. Доказательство устой-

чности проводится при помощи того же приема «расщепления», что и в случае явной схемы.

Действительно, при исследовании одномерных схем мы установили неравенства

$$\begin{aligned} \left\| I - \frac{\tau}{h_x} B \Delta_x \mathcal{R}(\omega \tau) \right\| &\leq 1, \\ \left\| I - \frac{\tau}{h_y} C \Delta_y Q(\omega \tau) \right\| &\leq 1 \quad \text{при } \tau \geq 0, \quad \omega \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(второе неравенство отличается от первого только заменой  $x$  на  $y$  и обозначениями). Заменим в этих неравенствах  $\tau$  на  $2\tau$ :

$$\begin{aligned} \left\| I - \frac{2\tau}{h_x} B \Delta_x \mathcal{R}(2\omega \tau) \right\| &\leq 1, \\ \left\| I - \frac{2\tau}{h_y} C \Delta_y Q(2\omega \tau) \right\| &\leq 1 \quad \text{при } \tau \geq 0, \quad \omega \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Из полученных неравенств следует, что

$$\begin{aligned} \left\| I - \frac{\tau}{h_x} B \Delta_x \mathcal{R}(2\omega \tau) - \frac{\tau}{h_y} C \Delta_y Q(2\omega \tau) \right\| &= \\ &= \left\| \frac{1}{2} \left[ I - \frac{2\tau}{h_x} B \Delta_x \mathcal{R}(2\omega \tau) \right] + \frac{1}{2} \left[ I - \frac{2\tau}{h_y} C \Delta_y Q(2\omega \tau) \right] \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left\| I - \frac{2\tau}{h_x} B \Delta_x \mathcal{R}(2\omega \tau) \right\| + \frac{1}{2} \left\| I - \frac{2\tau}{h_y} C \Delta_y Q(2\omega \tau) \right\| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Итак,

$$\left\| I - \frac{\tau}{h_x} B \Delta_x \mathcal{R}(2\omega \tau) - \frac{\tau}{h_y} C \Delta_y Q(2\omega \tau) \right\| \leq 1,$$

если только  $\tau \geq 0$ ,  $\omega \geq 1/2$ . Удобно это неравенство, переобозначив  $2\omega$  через  $\omega$ , записать так:

$$\left\| I - \frac{\tau}{h_x} B \Delta_x \mathcal{R}(\omega \tau) - \frac{\tau}{h_y} C \Delta_y Q(\omega \tau) \right\| \leq 1,$$

если только  $\tau \geq 0$ ,  $\omega \geq 1$ .

Устойчивость доказана, но в этом доказательстве пришлось на  $\omega$  наложить более жесткое ограничение  $\omega \geq 1$ , чем в одномерном случае, где мы полагали  $\omega \geq 1/2$ . Как правило, при выполнении двумерных расчетов по неявной схеме мы пользовались значением  $\omega = 1$ .

Несложным видоизменением проведенного доказательства можно доказать несколько более общее условие устойчивости:

$$\left\| I - \frac{\tau}{h_x} B \Delta_x \mathcal{R}(\omega_1 \tau) - \frac{\tau}{h_y} C \Delta_y Q(\omega_2 \tau) \right\| \leq 1,$$

если только  $\tau \geq 0$ ,  $\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} \geq 2$ . Его использование позволяет применять при «одномерных» прогонках по  $x$  и по  $y$  различные коэффициенты запаса  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

## Г л а в а II

# КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

## § 12. Нестационарная одномерная газовая динамика

Система нестационарных уравнений газовой динамики с одной пространственной переменной. Уравнение состояния. Законы сохранения массы, импульса и энергии. Соотношения на разрывах. Закон сохранения энтропии на гладких решениях и возрастания на ударных волнах. Условия Бете — Вейля для уравнения состояния. Понятие обобщенного решения.

Система дифференциальных уравнений, описывающая течение газа, которое зависит от времени  $t$  и одной декартовой координаты  $x$ , имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho + \rho u^2)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho (\varepsilon + u^2/2)}{\partial t} + \frac{\partial [\rho u (\varepsilon + u^2/2) + \rho u]}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (12.1)$$

Здесь  $\rho$  — плотность,  $p$  — давление,  $\varepsilon$  — внутренняя энергия единицы массы газа,  $u$  — скорость в направлении оси  $x$ . Система (12.1) является частным случаем нестационарных уравнений газовой динамики для пространственных течений (22.16), которые будут выписаны в § 22.

В систему (12.1) входят четыре искомые функции  $\rho$ ,  $u$ ,  $p$ ,  $\varepsilon$ . Поэтому она должна быть дополнена еще одним уравнением. Как известно, среди термодинамических величин, описывающих состояние газа, только две могут быть выбраны в качестве независимых, остальные же можно вычислить при помощи так называемого *уравнения состояния*. В частности, если уравнение состояния задано в виде зависимости

$$\varepsilon = \varepsilon(V, S), \quad (12.2)$$

где  $S$  — энтропия,  $V = 1/\rho$  — удельный объем, то с помощью термодинамического тождества

$$d\varepsilon + p dV = T dS \quad (12.3)$$

могут быть вычислены давление  $p$  и абсолютная температура  $T$  через параметры  $V, S$  по формулам

$$\begin{aligned} p &= p(V, S) = -\frac{\partial \varepsilon(V, S)}{\partial V}, \\ T &= T(V, S) = \frac{\partial \varepsilon(V, S)}{\partial S}. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Если нужно вычислить давление  $p$  по заданным величинам  $\rho, \varepsilon$ , то это можно сделать в два приема: сначала из неявного уравнения (12.2) находится  $S = S(V, \varepsilon)$ , а затем по формуле  $p = -\frac{\partial \varepsilon(V, S)}{\partial V}$  определяется  $p$ . Поэтому можно считать, что зависимость

$$p = p(\rho, \varepsilon) \quad \text{или} \quad \varepsilon = \varepsilon(p, \rho) \quad (12.5)$$

легко вычислима. Более того, если уравнение состояния может быть задано в форме (12.5), то система уравнений (12.1) замыкается без привлечения энтропии  $S$ , и, следовательно, вычислительный алгоритм можно описать в терминах величин  $\rho, p, \varepsilon$ , а другие термодинамические величины досчитывать лишь в случае необходимости (при анализе и интерпретации результатов расчета и т. п.). В дальнейшем мы будем предполагать уравнение состояния заданным именно в таком виде.

Для некоторых простейших уравнений состояния эта зависимость сама по себе не сложна. Например, для идеального газа она имеет вид

$$p = (\kappa - 1) \rho \varepsilon, \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{p}{(\kappa - 1) \rho}. \quad (12.6)$$

Величина  $\kappa$  называется *показателем адиабаты*. Для такого газа

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{\kappa - 1} \rho^{\kappa-1} \sigma(S), \\ p &= \rho^\kappa \sigma(S), \quad \sigma(S) = e^{S/c_V} V. \end{aligned} \quad (12.7)$$

Мы будем в дальнейшем вместо энтропии  $S$  использовать иногда ту или иную энтропийную функцию  $\sigma(S)$ . Величина  $c_V$  называется *удельной теплоемкостью* при постоянном объеме.

Двучленное уравнение состояния, являющееся несложным обобщением уравнения состояния идеального газа, имеет вид

$$\varepsilon(p, \rho) = \frac{p - c_0^2(\rho - \rho_0)}{(\kappa - 1)\rho}, \quad (12.8)$$

где величины  $\rho_0$ ,  $c_0$  суть некоторые постоянные. Давление через плотность и энтропию выражается так:

$$p = \sigma(S) \cdot \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\kappa} - \frac{\rho_0 c_0^2}{\kappa}. \quad (12.9)$$

Этим уравнением состояния можно пользоваться при изучении процессов, происходящих в воде, а также в металлах при высоких давлениях. Заметим, что уравнение состояния идеального газа получается как частный случай двучленного уравнения, если положить  $c_0 = 0$ ,  $\rho_0 = 1$ .

Если  $\rho = \rho(x, t)$ ,  $u = u(x, t)$ ,  $\epsilon = \epsilon(x, t)$  — гладкие функции, являющиеся решением уравнений газовой динамики (12.1), то для любой подобласти  $\Omega$  с границей  $\Gamma$  из области определения решения имеют место равенства

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} \right] dx dt &= \oint_{\Gamma} \rho dx - \rho u dt = 0, \\ \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho + \rho u^2)}{\partial x} \right] dx dt &= \oint_{\Gamma} \rho u dx - (\rho + \rho u^2) dt = 0, \\ \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \rho (\epsilon + u^2/2)}{\partial t} + \frac{\partial [\rho u (\epsilon + u^2/2) + \rho u]}{\partial x} \right\} dx dt &= \\ &= \oint_{\Gamma} \rho (\epsilon + u^2/2) dx - [\rho u (\epsilon + u^2/2) + \rho u] dt = 0. \end{aligned}$$

Интегральные тождества

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \rho dx - \rho u dt &= 0, \\ \oint_{\Gamma} \rho u dx - (\rho + \rho u^2) dt &= 0, \\ \oint_{\Gamma} \rho (\epsilon + u^2/2) dx - [\rho u (\epsilon + u^2/2) + \rho u] dt &= 0 \end{aligned} \quad (12.10)$$

являются математическим выражением основных законов физики — законов сохранения массы, импульса и энергии. Естественно считать, что они должны быть выполнены на любых функциях  $\rho(x, t)$ ,  $u(x, t)$ ,  $p(x, t)$ ,  $\epsilon(x, t)$ , описывающих реальные газовые течения, а не только на достаточно гладких таких функциях.

В реальных потоках встречаются поверхности, на которых физические величины меняются скачком. Это ударные волны и контактные разрывы. Из интегральных законов сохранения (12.10) вытекают соотношения, связывающие величины по обе стороны разрыва. Эти соотношения носят название условий на ударных волнах.

Пусть разрыв распространяется со скоростью  $\frac{dx}{dt} = D$ . Изобразим траекторию этого разрыва на плоскости  $x, t$  (рис. 12.1) и рассмотрим контур (изображенный на этом рисунке штриховой линией), который почти прилегает к линии разрыва, охватывая некоторый ее участок. Из законов сохранения, выписанных для этого контура, следует, что вдоль линии разрыва

$$\begin{aligned}\int [\rho] dx - [\rho u] dt &= \int ([\rho] D - [\rho u]) dt = 0, \\ \int [\rho u] dx - [p + \rho u^2] dt &= \int ([\rho u] D - [p + \rho u^2]) dt = 0, \\ \int [\rho (\epsilon + u^2/2)] dx - [\rho u (\epsilon + u^2/2) + pu] dt &= \\ &= \int \{[\rho (\epsilon + u^2/2)] D - [\rho u (\epsilon + u^2/2) + pu]\} dt = 0,\end{aligned}\quad (12.11)$$

где интегралы взяты вдоль любого участка разрыва. Квадратными скобками мы обозначаем разность значений стоящей внутри скобок величины по обе стороны разрыва.

Из-за произвольности области интегрирования в каждой точке разрыва выполнены соотношения (условия на ударных волнах)

$$\begin{aligned}[\rho] D - [\rho u] &= 0, \\ [\rho u] D - [p + \rho u^2] &= 0, \\ [\rho (\epsilon + u^2/2)] D - [\rho u (\epsilon + u^2/2) + pu] &= 0.\end{aligned}\quad (12.12)$$

Интересно и важно отметить, что не всякий закон сохранения, выполненный на гладких решениях, будет выполнен и на разрывных. Вот очень поучительный пример.

Если уравнения газовой динамики (12.1) с уравнением состояния  $\epsilon = \epsilon(\rho, S)$  умножить соответственно на множители

$$\begin{aligned}-\frac{\epsilon + \rho \epsilon_p - u^2/2}{\epsilon_S}, \quad -\frac{u}{\epsilon_S}, \quad \frac{1}{\epsilon_S} \text{ и сложить, то получим} \\ -\frac{\epsilon + \rho \epsilon_p - u^2/2}{\epsilon_S} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} \right\} - \frac{u}{\epsilon_S} \left\{ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (p + \rho u^2)}{\partial x} \right\} + \\ + \frac{1}{\epsilon_S} \left\{ \frac{\partial \rho (\epsilon + u^2/2)}{\partial t} + \frac{\partial [\rho u (\epsilon + u^2/2) + pu]}{\partial x} \right\} = \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho u S}{\partial x} = 0.\end{aligned}\quad (12.13)$$

Если  $\rho(x, t)$ ,  $S(x, t)$ ,  $u(x, t)$  — гладкие функции, то отсюда следует, что по любому контуру Г

$$\oint \rho S dx - \rho u S dt = 0. \quad (12.14)$$

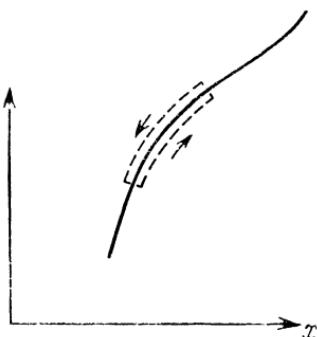


Рис. 12.1.

Это закон сохранения энтропии, который выполнен на гладких решениях уравнений газовой динамики.

При создании первой математической теории ударных волн (еще до их экспериментального открытия) Риман положил в основу своей теории закон сохранения энтропии на разрывах. Но при этом ему пришлось не учитывать закон сохранения энергии. Эта знаменитая ошибка Римана была исправлена Ренкином и Гюгонио. Оказалось, что закон сохранения энтропии на разрывах не выполняется. При прохождении элемента среды через разрыв энтропия в нем возрастает. Вместо закона сохранения энтропии (12.14) мы должны считать, что имеет место закон ее возрастания \*)

$$\oint_{\Gamma} \rho S dx - \rho u S dt \leqslant 0 \quad (12.15)$$

(интегрирование в контурном интеграле подразумевается против часовой стрелки). Контур  $\Gamma$  теперь можно считать произвольным (захватывающим и участки разрыва).

Таким образом, на любых кусочно-непрерывных функциях  $\rho(x, t)$ ,  $u(x, t)$ ,  $S(x, t)$ , описывающих течения газов, для любого контура должны быть выполнены интегральные условия (12.10) и (12.15).

Общий вид всех возможных законов сохранения, выполненных на гладких решениях уравнений газовой динамики, был указан в интересной работе Б. Л. Рождественского, изложенной в § 5 книги [101].

К настоящему времени можно считать установленным (хотя строгое математическое доказательство этого и отсутствует), что функции, удовлетворяющие интегральным условиям (12.10), выражающим сохранение массы, импульса и энергии, и условию (12.15) неубывания энтропии, однозначно определяются своими начальными значениями при  $t = 0$ , если уравнение состояния не является слишком «вычурным». Более четко это утверждение состоит в следующем. Функция  $\varepsilon = \varepsilon(V, S)$ , называемая термодинамическим потенциалом, поскольку давление  $p$  и абсолютная температура  $T$  выражаются из нее в виде производных (12.4), должна быть выпуклой функцией своих аргументов. Условие выпуклости функции  $\varepsilon = \varepsilon(V, S)$  состоит в положительной определенности матрицы ее вторых производных, т. е. в выполнении условий

$$\varepsilon_{VV} > 0, \quad \varepsilon_{VV}\varepsilon_{SS} - \varepsilon_{VS}^2 > 0. \quad (12.16)$$

\*) Строго говоря, следовало бы употребить термин «неубывание энтропии». Однако мы сочли возможным здесь и в дальнейшем не обращать на это внимания.

Кроме того, функция  $\epsilon = \epsilon(V, S)$  должна удовлетворять дополнительным ограничениям, предложенными Бете и Вейлем в работе [163]:

$$\epsilon_{VS} < 0, \quad \epsilon_{VV} < 0. \quad (12.17)$$

В работах [25], [26] при рассмотрении задачи о распаде произвольного начального разрыва в газе, у которого условия Бете—Вейля не выполнены, обнаружена неединственность решения задачи Коши. Непосредственным дифференцированием легко убедиться, что приведенные выше уравнения состояния идеального газа (12.7) и двучленное уравнение состояния (12.8)—(12.9) неравенствам Бете—Вейля удовлетворяют.

Изложенные сейчас факты приводят к мысли, впервые высказанной в несколько иной форме Дж. фон Нейманом и состоящей в том, что при проектировании расчетных схем для уравнений газовой динамики надо аппроксимировать не дифференциальные уравнения газовой динамики, применимые только в областях, где функции, описывающие течение,—гладкие, а интегральные равенства (12.10) и энтропийное неравенство (12.15). Дж. фон Нейман [151] предлагал рассчитывать уравнения с искусственно введенной вязкостью, которая размазывает разрывы при выполнении законов сохранения и условия роста энтропии. На самом деле оказалось, что специально вводить в уравнения вязкость нет необходимости. Разностная дискретная аппроксимация функций, описывающих поля физических величин, автоматически приводит к размазыванию, сглаживанию разрывов примерно такому же, какому ведет введение искусственной вязкости Дж. фон Неймана.

Обычно говорят, что функции, удовлетворяющие интегральным равенствам и неравенству для энтропии, являются обобщенными решениями уравнений газовой динамики. Заметим, что если ограничиться только законами сохранения массы, импульса и энергии и не привлекать к определению обобщенного решения закона возрастания энтропии, то задача о восстановлении решения по начальному состоянию среды при  $t = 0$  может иметь не единственное решение (даже в случае простейшего уравнения состояния идеального газа). С такой ситуацией мы столкнемся в задаче о распаде разрыва для нелинейных уравнений газовой динамики. Соответствующий пример будет рассмотрен в конце следующего параграфа.

### § 13. Задача о распаде разрыва

Постановка задачи. Схематическое описание возможных конфигураций. Сведение к алгебраическому уравнению для давления на контактном разрыве. Итерационный процесс для его решения. Свойства уравнения и применение метода касательных Ньютона. Досчет величин, описывающих

конфигурацию, возникающую при распаде разрыва. Пример неоднозначного решения задачи о распаде разрыва без привлечения закона возрастания энтропии.

В настоящем параграфе мы построим обобщенное решение для одной важной задачи, которая в дальнейшем будет играть существенную роль при конструировании разностной схемы и, кроме того, представляет самостоятельный интерес для практического анализа ситуаций, возникающих в газодинамических расчетах. Речь идет о так называемой задаче о распаде разрыва.

Пусть имеется среда (газ, жидкость, металл), для которой термодинамические величины: давление  $p$ , плотность  $\rho$ , внутренняя энергия единицы массы  $\epsilon$  — подчиняются двучленному уравнению состояния

$$\epsilon = \frac{p + \kappa p_0}{(\kappa - 1) \rho} - \frac{c_0^2}{\kappa - 1}, \quad (13.1)$$

где  $p_0 = \frac{1}{\kappa} \rho_0 c_0^2$ ;  $\kappa$ ,  $\rho_0$ ,  $c_0$  — некоторые постоянные величины \*). Идеальный газ является частным случаем ( $c_0 = 0$ ). Предположим, что в начальный момент времени  $t = 0$  для левого полупространства  $x < 0$  среда характеризуется значениями параметров  $p_l$ ,  $\rho_l$ ,  $u_l$ , а для правого полупространства  $x > 0$  — значениями  $p_r$ ,  $\rho_r$ ,  $u_r$ . Здесь  $u$  — компонента вектора скорости в направлении координаты  $x$  (другие ее компоненты равны нулю).

Так, например, если привести в соприкосновение две массы газа, сжатые до различных давлений, и убрать перегородку между ними, то поверхность их соприкосновения будет поверхностью разрыва в начальном распределении давления. Существенно отметить, что скачки на разрыве могут быть совершенно произвольными. Между тем мы знаем, что на поверхности разрывов, которые могут существовать в качестве устойчивых образований, должны соблюдаться определенные соотношения (12.12), выписанные в предыдущем параграфе. Поэтому очевидно, что в случае, если в начальном разрыве эти необходимые условия не выполнены, он не может существовать как таковой и должен распадаться на несколько разрывов, которые с течением времени будут отходить друг от друга. Общее исследование вопроса о поведении распада разрыва было дано Н. Е. Коининым и излагается во всех серьезных курсах механики сплошной среды (см., например, § 93 книги [88]). Схематически автомодельная картина возникающего течения на плоскости  $x, t$  изображается одной из пяти возможных конфигураций, изображенных на рис. 13.1.

\*.) Можно было бы рассмотреть и более общий случай, когда постоянные  $\kappa$ ,  $\rho_0$ ,  $c_0$  в уравнении состояния (13.1) различны слева и справа от границы  $x = 0$ . Мы этого не будем делать, чтобы не загромождать изложение излишними техническими усложнениями.

Первые четыре из них содержат контактный разрыв  $KP$ , отмеченный штриховой линией, на котором испытывает скачок плотность, а давление и поперечная компонента скорости непрерывны. Их одинаковые постоянные значения в областях слева и справа от контактного разрыва мы обозначим  $P$  и  $U$ , а различные значения плотности и, следовательно, внутренней энергии,  $R_1$ ,  $E_1$  —

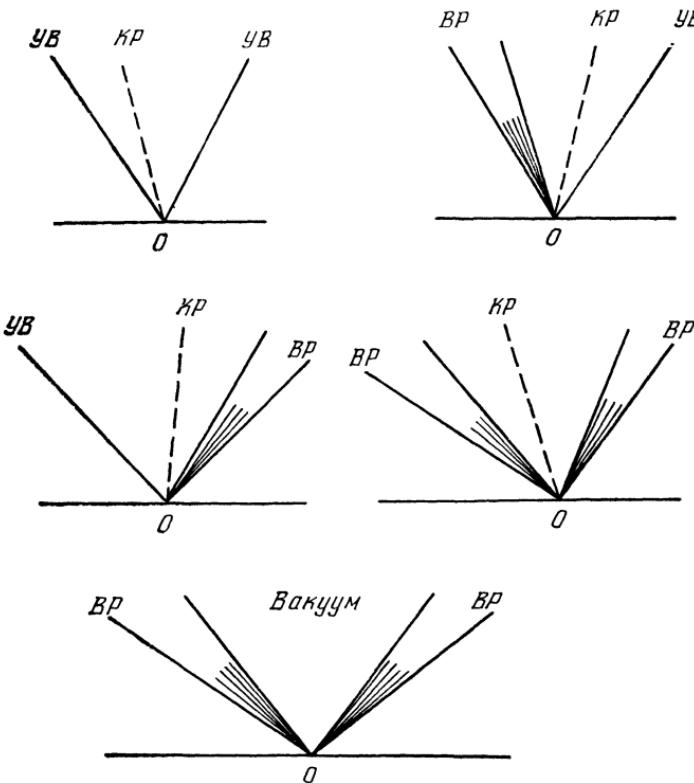


Рис. 13.1.

для левой и  $R_{II}$ ,  $E_{II}$  — для правой области. В свою очередь, эти области отделены от невозмущенных областей с параметрами  $(p_1, \rho_1, u_1)$  слева и  $(p_{II}, \rho_{II}, u_{II})$  справа либо ударной волной  $УВ$ , либо волной разрежения  $BP$ , которые мы будем для краткости условно называть «правой» или «левой». Последняя конфигурация представляет предельный случай, когда в результате «разлета» образуется область вакуума, в которой плотность падает до значения  $\rho = 0$  в двух волнах разрежения, примыкающих к области вакуума справа и слева. Перейдем к математическому рассмотрению этой задачи. Как мы уже отметили, на ударной волне должны быть выполнены соотношения (12.12), связывающие

скорость ударной волны  $D$  и величины перед ее фронтом и за ним. Из них в качестве следствия легко получить равенство (см., например, [88], § 82)

$$E - \varepsilon - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} \right) (p + P) = 0,$$

где  $(p, \rho, \varepsilon)$ —величины перед ударной волной,  $(P, R, E)$ —за фронтом ударной волны. Исключая из него  $\varepsilon$  и  $E$  с помощью уравнения состояния (13.1), получим аддабату Гюгонио

$$R = \rho \frac{(\gamma + 1)(P + p_0) + (\gamma - 1)(p + p_0)}{(\gamma - 1)(P + p_0) + (\gamma + 1)(p + p_0)}. \quad (13.2)$$

Вводя, как это было сделано в работе [30], в рассмотрение массовую скорость

$$a_I = \rho_I (u_I - D_I) = R_I (U - D_I),$$

из соотношений (12.12), выписанных для левой ударной волны (если она таковой является), получим

$$U - u_I + \frac{P - p_I}{a_I} = 0, \quad (13.3)$$

$$a_I = \sqrt{\rho_I \left[ \frac{\gamma + 1}{2} (P + p_0) + \frac{\gamma - 1}{2} (p_I + p_0) \right]}. \quad (13.4)$$

Аналогично, для правой ударной волны (если она является ударной волной) после введения массовой скорости

$$a_{II} = \rho_{II} (D_{II} - u_{II}) = R_{II} (D_{II} - U)$$

из тех же соотношений (12.12) получим

$$U - u_{II} - \frac{P - p_{II}}{a_{II}} = 0, \quad (13.5)$$

$$a_{II} = \sqrt{\rho_{II} \left[ \frac{\gamma + 1}{2} (P + p_0) + \frac{\gamma - 1}{2} (p_{II} + p_0) \right]}. \quad (13.6)$$

В случае волны разрежения вместо соотношений (12.12) нужно воспользоваться условиями непрерывности римановых инвариантов

$$[u] \pm \frac{2}{\gamma - 1} [c] = 0, \quad [\sigma(S)] = 0, \quad (13.7)$$

где  $c$ —скорость звука,  $S$ —энтропия. Квадратными скобками мы обозначим здесь разность постоянных значений соответствующих величин в областях, примыкающих к волне разрежения слева и справа. Знак плюс в первом из уравнений (13.7) берется для левой волны разрежения, знак минус—для правой. Для дву-

ченного уравнения состояния (13.1) величины  $c$ ,  $\sigma(S)$  вычисляются по формулам

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p + p_0}{\rho}}, \quad \sigma(S) = \frac{\kappa(p + p_0)}{\rho^\kappa}. \quad (13.8)$$

Это позволяет соотношения (13.7) записать для левой волны разрежения в виде

$$U - u_I + \frac{2}{\kappa-1} c_I \left[ 1 - \left( \frac{P + p_0}{p_I + p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} \right] = 0, \quad (13.9)$$

а для правой волны разрежения в виде

$$U - u_{II} + \frac{2}{\kappa-1} c_{II} \left[ 1 - \left( \frac{P + p_0}{p_{II} + p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} \right] = 0. \quad (13.10)$$

Система соотношений (13.3)–(13.6), (13.9)–(13.10) совершенно аналогична тем, которые были использованы в работе [30] при построении итерационного процесса для расчета распада разрыва в идеальном газе. Для этой цели соотношениям (13.9) и (13.10) в случае волн разрежения можно придать ту форму, что и в случае ударных волн (13.3), (13.5):

$$U - u_I + \frac{P - p_I}{a_I} = 0 \text{ для левой волны,}$$

$$U - u_{II} - \frac{P - p_{II}}{a_{II}} = 0 \text{ для правой волны,}$$

если ввести условные массовые скорости с помощью формул

$$a_I = \frac{\kappa-1}{2\kappa} \rho_I c_I \frac{1 - \frac{P + p_0}{p_I + p_0}}{1 - \left( \frac{P + p_0}{p_I + p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}}, \quad (13.11)$$

$$a_{II} = \frac{\kappa-1}{2\kappa} \rho_{II} c_{II} \frac{1 - \frac{P + p_0}{p_{II} + p_0}}{1 - \left( \frac{P + p_0}{p_{II} + p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}}. \quad (13.12)$$

После этого итерационный процесс конструируется так. Пусть  $P^{(i-1)}$ —полученное приближение для величины  $P$  (для первой итерации  $P^{(0)}$  задается). Тогда вычисляем величину  $a_I^{(i-1)} = a_I(P^{(i-1)})$  по формуле (13.4), если  $P^{(i-1)} \geq p_I$ , или (13.11), если  $P^{(i-1)} < p_I$ , а величину  $a_{II}^{(i-1)} = a_{II}(P^{(i-1)})$ —по формуле (13.6), если  $P^{(i-1)} \geq p_{II}$ , или (13.12), если  $P^{(i-1)} < p_{II}$ . Затем новое приближение

$P^{(i)}$  определяется формулой

$$P^{(i)} = \varphi(P^{(i-1)}) = \frac{a_{II}^{(i-1)} p_I + a_I^{(i-1)} p_{II} + a_I^{(i-1)} a_{II}^{(i-1)} (u_I - u_{II})}{a_I^{(i-1)} + a_{II}^{(i-1)}}, \quad (13.13)$$

которая при известных значениях  $a_I$ ,  $a_{II}$  является следствием системы двух линейных уравнений (13.3) и (13.5) для величин  $P$  и  $U$ . Величина  $U$  может быть найдена по формуле

$$U = \frac{a_I u_I + a_{II} u_{II} + p_I - p_{II}}{a_I + a_{II}} \quad (13.14)$$

после того, как итерационный процесс доведен до сходимости. Детальное исследование показывает, что процесс сходится, если в результате распада не получается очень сильных волн разрежения. Чтобы сделать его сходящимся во всех случаях, в работе [30] предложено вести итерации по несколько видоизмененным формулам:

$$P^{(i)} = \frac{\alpha_{i-1} P^{(i-1)} + \varphi(P^{(i-1)})}{1 + \alpha_{i-1}},$$

$$\alpha_{i-1} = \begin{cases} \frac{x-1}{3x} \frac{1-z_{i-1}}{\frac{x+1}{i-1} \left(1 - z \frac{x-1}{i-1}\right)} - 1, \\ \text{если это выражение больше нуля,} \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

$$z_{i-1} = \frac{P^{(i-1)} + p_0}{(p_I + p_0) + (p_{II} + p_0)}.$$

Поскольку решение задачи о распаде разрыва будет массовой элементарной операцией при численном интегрировании нестационарных задач газовой динамики по разностной методике, описываемой в настоящей книге, нам представляется целесообразным описать для нее еще один алгоритм, использующий метод касательных Ньютона и обеспечивающий очень быструю сходимость итерационного процесса.

Исключая из полученных соотношений (13.3), (13.5) скорость контактного разрыва  $U$ , мы приходим к следующему уравнению для давления  $P$ :

$$F(P) \equiv f(P, p_I, \rho_I) + f(P, p_{II}, \rho_{II}) = u_I - u_{II}, \quad (13.15)$$

где для значений  $k = I, II$

$$f(P, p_k, \rho_k) = \begin{cases} \frac{P - p_k}{\rho_k c_k \sqrt{\frac{x+1}{2x} \pi_k + \frac{x-1}{2x}}}, & \text{если } P \geq p_k, \\ \frac{2}{x-1} c_k \left( \pi_k^{\frac{x-1}{2x}} - 1 \right), & \text{если } P < p_k, \end{cases} \quad (13.16)$$

$$\pi_k = \frac{P + p_0}{p_k + p_0}, \quad c_k = \sqrt{\frac{\rho_k + p_0}{\rho_k}}.$$

Вычислим первую и вторую производные функции  $f(P, p_k, \rho_k)$  по переменной  $P$ :

$$f'(P, p_k, \rho_k) = \begin{cases} \frac{(\kappa+1)\pi_k + (3\kappa-1)}{4\kappa\rho_k c_k \sqrt{\left(\frac{\kappa+1}{2\kappa}\pi_k + \frac{\kappa-1}{2\kappa}\right)^3}}, & \text{если } P \geq p_k, \\ \frac{1}{\kappa(P+p_0)} c_k \pi_k^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}, & \text{если } P < p_k, \end{cases} \quad (13.17)$$

$$f''(P, p_k, \rho_k) = \begin{cases} -\frac{(\kappa+1)[(\kappa+1)\pi_k + (7\kappa-1)]}{16\kappa\rho_k^2 c_k^3 \sqrt{\left(\frac{\kappa+1}{2\kappa}\pi_k + \frac{\kappa-1}{2\kappa}\right)^5}}, & \text{если } P > p_k, \\ -\frac{\kappa+1}{2\kappa^2(P+p_0)^2} c_k \pi_k^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}, & \text{если } P < p_k. \end{cases} \quad (13.18)$$

Следовательно, при всех  $P > -p_0$  будем иметь

$$f'(P, p_k, \rho_k) > 0, \quad f''(P, p_k, \rho_k) < 0, \quad (13.19)$$

т.е. левая часть уравнения (13.15) является монотонно возрастающей выпуклой функцией аргумента  $P$ . Поскольку при  $P=p_k$  из формулы (13.17) следует, что

$$\lim_{P \rightarrow p_k^-} f'(P, p_k, \rho_k) = \lim_{P \rightarrow p_k^+} f'(P, p_k, \rho_k) = \frac{1}{\rho_k c_k}, \quad (13.20)$$

ее первая производная непрерывна. В общем случае, когда  $p_1 \neq p_{II} \neq -p_0$ , график функции  $F(P)$  схематично изображен на рис. 13.2. Для упрощения изложения мы будем предполагать в дальнейшем, что

$$p_1 \leq p_{II}. \quad (13.21)$$

Это не является ограничением общности, так как в противном случае можно изменить направление отсчета на оси  $x$ , т.е. знаки у скоростей  $u_1, u_{II}$  и поменять местами индексы I, II для исходных параметров, а после проведения расчета проделать обратную операцию.

Значения функции  $F(P)$  в точках  $P = -p_0, p_1, p_{II}$  позволяют еще до решения уравнения (13.15) определить, какая из конфигураций, перечисленных на рис. 13.1, возникает при распаде

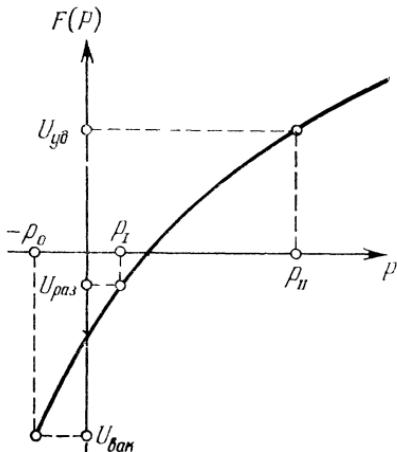


Рис. 13.2.

разрыва. Эти значения таковы:

$$\begin{aligned} F(p_{II}) = U_{уд} &= \frac{p_{II} - p_1}{\sqrt{\rho_1 \left[ \frac{\kappa+1}{2} (p_{II} + p_0) + \frac{\kappa-1}{2} (p_1 + p_0) \right]}}, \\ F(p_1) = U_{раз} &= -\frac{2c_{II}}{\kappa-1} \left[ 1 - \left( \frac{p_1 + p_0}{p_{II} + p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} \right], \\ F(-p_0) = U_{вак} &= -\frac{2c_1}{\kappa-1} - \frac{2c_{II}}{\kappa-1}. \end{aligned} \quad (13.22)$$

Как легко видеть из графика функции  $F(P)$ , в зависимости от величины  $u_1 - u_{II}$  возможны следующие ситуации:

1°  $u_1 - u_{II} > U_{уд}$ . Тогда  $P > p_{II}$  и, следовательно,  $P > p_1$ . Вправо и влево распространяются ударные волны.

2°  $U_{раз} < u_1 - u_{II} < U_{уд}$ . Тогда  $p_1 < P < p_{II}$ . Влево — ударная волна, вправо — волна разрежения.

3°  $U_{вак} < u_1 - u_{II} < U_{раз}$ . Тогда  $-p_0 < P < p_1$ , возникают две волны разрежения.

4°  $u_1 - u_{II} < U_{вак}$ . Возникает область вакуума, в которой следует полагать  $P = -p_0$ ,  $R = 0$ . Попытка решить уравнение (13.15) в этом случае обречена на неудачу, так как у него нет вещественного корня.

Мы опустили предельные случаи, когда  $u_1 - u_{II}$  равно одному из чисел  $U_{уд}$ ,  $U_{раз}$ ,  $U_{вак}$ , ввиду их очевидности.

Таким образом, уравнение (13.15) всегда имеет единственный корень, если выполнено условие

$$u_1 - u_{II} \geqslant U_{вак} = -\frac{2}{\kappa-1} (c_1 + c_{II}). \quad (13.23)$$

Что касается итерационного алгоритма для его отыскания, то в силу монотонности и выпуклости функции  $F(P)$  нам представляется наиболее целесообразным применение метода касательных Ньютона.

Если  $P^{(i-1)}$  — полученное приближенное значение корня, то полагаем

$$P^{(i)} = P^{(i-1)} - \frac{f(P^{(i-1)}, p_1, \rho_1) + f(P^{(i-1)}, p_{II}, \rho_{II}) - (u_1 - u_{II})}{f'(P^{(i-1)}, p_1, \rho_1) + f'(P^{(i-1)}, p_{II}, \rho_{II})}. \quad (13.24)$$

Входящие сюда функции и производные были определены выше формулами (13.16), (13.17).

Поскольку функция  $F(P)$  выпукла вверх, ибо  $F''(P) < 0$ , начальное приближение  $P^{(0)}$  рекомендуется выбирать так, чтобы было выполнено условие

$$F(P^{(0)}) < u_1 - u_{II}. \quad (13.25)$$

Тогда последовательные приближения сходятся к искомому корню снизу, монотонно возрастаю.

Как хорошо известно из курсов приближенных вычислений, метод Ньютона по скорости сходимости является итерационным процессом второго порядка, т. е. убывание погрешности искомого корня  $P^*$  осуществляется так:

$$P^{(i)} - P^* = \frac{1}{2} \frac{F''(\tilde{P})}{F'(P^{(i-1)})} [P^{(i-1)} - P^*]^2,$$

где  $\tilde{P}$  — некоторая точка на отрезке  $[P^{(i-1)}, P^{(i)}]$ , чрезвычайно быстро приводя процесс к сходимости.

В качестве одного из возможных алгоритмов расчета начального приближения  $P^{(0)}$  можно рекомендовать «звуковой распад разрыва». Вместо нелинейного уравнения (13.15) в этом случае рассматривается результат его линеаризации:

$$\frac{P - p_1}{\rho_1 c_1} + \frac{P - p_{II}}{\rho_{II} c_{II}} = u_1 - u_{II},$$

из которого определяется

$$P^{(0)} = \frac{\rho_1 \rho_{II} c_1 + \rho_{II} \rho_1 c_1 + (u_1 - u_{II}) \rho_1 c_1 \rho_{II} c_{II}}{\rho_1 c_1 + \rho_{II} c_{II}}. \quad (13.26)$$

Любопытно отметить, что формула (13.26) дает приближение для искомого корня  $P^*$  снизу, т. е. удовлетворяет упомянутому выше «желательному» условию (13.25). Мы не приводим здесь простых, но несколько громоздких рассуждений, подтверждающих это, оставляя их на усмотрение читателя.

Мы не случайно остановились на вопросе о выборе начального приближения. Дело в том, что хорошие приближенные формулы, обеспечивающие достаточную для практических целей точность, позволяют значительно сократить объем работы для расчета распада разрыва. Особенно это касается «массового» случая, когда величины  $(p_1, \rho_1, u_1)$  мало отличаются от  $(p_{II}, \rho_{II}, u_{II})$ , с которым, как мы увидим в дальнейшем, мы будем часто встречаться. В такой ситуации уже «звуковое приближение» (13.26) без всякого итерационного процесса может оказываться вполне удовлетворительным.

Хорошие результаты, особенно в случае двух ударных волн, дает замена уравнения (13.15), имеющего в этом случае вид

$$\sqrt{\rho_1 \left( \frac{\kappa+1}{2} P + \frac{\kappa-1}{2} p_1 + \kappa p_0 \right)} + \sqrt{\rho_{II} \left( \frac{\kappa+1}{2} P + \frac{\kappa-1}{2} p_{II} + \kappa p_0 \right)} = u_1 - u_{II}, \quad (13.27)$$

на «приближенное» уравнение

$$\frac{P-p_1}{V\theta_1\rho_1(P+p_0)} + \frac{P-p_{II}}{V\theta_{II}\rho_{II}(P+p_0)} = u_1 - u_{II},$$

где  $\theta_1, \theta_{II}$  — некоторые постоянные. Оно в свою очередь сводится к квадратному уравнению для  $P$ , и в качестве приближенного решения (13.27) следует брать его больший корень. Что касается величин  $\theta_1, \theta_{II}$ , то можно рекомендовать полагать  $\theta_1 = \theta_{II} = (\kappa + 1)/2$ , если ожидается  $P \gg p_{II} > p_1$ , или  $\theta_1 = \theta_{II} = \kappa$ , если  $P \approx p_{II} \approx p_1$ , и т. п.

Еще один вариант приближенного расчета распада разрыва можно найти в работе [96].

Наконец, заметим, что случайные комбинации входных данных, для которых выполнено одно из неравенств

$$|u_1 - u_{II} - U_{уд}| < \delta, \quad |u_1 - u_{II} - U_{раз}| < \delta, \quad |u_1 - u_{II} - U_{вак}| < \delta,$$

где  $U_{уд}, U_{раз}, U_{вак}$  определены выше формулами (13.22),  $\delta$  — предусмотренная мера точности, позволяют сразу полагать  $P^* \approx p_{II}$ ,  $P^* \approx p_1$ ,  $P^* \approx -p_0$  соответственно. Более содержательным является случай, когда при распаде разрыва возникают две волны разрежения. Тогда уравнение (13.15) принимает вид

$$-\frac{2}{\kappa-1} c_1 \left[ 1 - \left( \frac{P+p_0}{p_1+p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} \right] - \frac{2}{\kappa-1} c_{II} \left[ 1 - \left( \frac{P+p_0}{p_{II}+p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} \right] = u_1 - u_{II} \quad (13.28)$$

и его решение  $P^*$  вычисляется сразу по формуле

$$P^* = (p_1 + p_0) \left[ \frac{u_1 - u_{II} - U_{вак}}{U_{раз} - U_{вак}} \right]^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}} - p_0. \quad (13.29)$$

Для завершения описания алгоритма решения задачи о распаде разрыва нам остается привести формулы для других величин, описывающих возможные конфигурации, указанные на рис. 13.1. Все они могут быть легко найдены после того, как вычислено давление  $P$  на контактном разрыве. Формулу (13.14) для скорости  $U$  контактного разрыва мы уже приводили:

$$U = \frac{a_1 u_1 + a_{II} u_{II} + p_1 - p_{II}}{a_1 + a_{II}}.$$

Здесь  $a_1, a_{II}$  — массовые скорости, вычисленные на последней итерации.

Если левая волна является ударной, то ее скорость

$$D_1 = u_1 - \frac{a_1}{\rho_1}, \quad (13.30)$$

а плотность  $R_I$  вычисляется по адиабате Гюгонио (13.2):

$$R_I = \rho_I \frac{(\kappa+1)(P+p_0) + (\kappa-1)(p_I+p_0)}{(\kappa-1)(P+p_0) + (\kappa+1)(p_I+p_0)} = \frac{\rho_I a_I}{a_I - \rho_I(u_I - U)}.$$

Если левая волна является волной разрежения, то скорости крайних характеристик, ее ограничивающих, вычисляются по формулам

$$D_I = u_I - c_I, \quad D_I^* = U - c_I^*,$$

где  $c_I^* = c_I + \frac{\kappa-1}{2}(u_I - U)$ , а плотность  $R_I$  в области слева от контактного разрыва — по формуле

$$R_I = \kappa \frac{P + p_0}{(c_I^*)^2}.$$

Аналогичные формулы записываются для правой волны. Если она является ударной волной, то

$$D_{II} = u_{II} + \frac{a_{II}}{\rho_{II}}, \quad R_{II} = \frac{\rho_{II} a_{II}}{a_{II} + \rho_{II}(u_{II} - U)},$$

а если волной разрежения, то

$$D_{II} = u_{II} + c_{II}, \quad c_{II}^* = c_{II} - \frac{\kappa-1}{2}(u_{II} - U),$$

$$D_{II}^* = U + c_{II}^*, \quad R_{II} = \kappa \frac{P + p_0}{(c_{II}^*)^2}.$$

Таким образом, мы полностью описали алгоритм построения обобщенного решения газодинамической задачи о распаде начального разрыва. Как уже отмечалось в предыдущем параграфе, единственность решения этой задачи достигается за счет привлечения закона о возрастании энтропии. В противном же случае гарантировать единственность нельзя. Ввиду принципиальной важности этого вопроса дадим подробное описание соответствующего примера.

Входные параметры задачи о распаде разрыва ( $p_I$ ,  $\rho_I$ ,  $u_I$ ), ( $p_{II}$ ,  $\rho_{II}$ ,  $u_{II}$ ) для простоты возьмем удовлетворяющими условиям симметрии относительно границы раздела:  $p_I = p_{II}$ ,  $\rho_I = \rho_{II}$ ,  $u_I = -u_{II}$ .

Кроме того, пусть  $p_0 = 0$ . Тогда  $c_I = c_{II} = c$ ,  $U_{\text{раз}} = 0$ ,  $U_{\text{вак}} = -\frac{2c}{\kappa-1}$ . Если выполнено условие

$$-\frac{2c}{\kappa-1} < \frac{1}{2}(u_I - u_{II}) < 0,$$

то после распада разрыва образуются две волны разрежения, разделенные областью, в которой  $U = 0$ , а давление  $P^*$  определяется формулой (13.29).

Попытаемся теперь искать решение этой задачи в виде конфигурации с двумя ударными волнами. Тогда давление  $P$  в области между ними следует определять из уравнения (13.27), которое для описанных значений входных параметров принимает вид

$$P - p_1 = \frac{u_1 - u_{II}}{2} \sqrt{\rho_1 \left( \frac{\kappa+1}{2} P + \frac{\kappa-1}{2} p_1 \right)}. \quad (13.31)$$

После возвведения в квадрат получим уравнение

$$(P - p_1)^2 = \rho_1 \left( \frac{u_1 - u_{II}}{2} \right)^2 \left( \frac{\kappa+1}{2} P + \frac{\kappa-1}{2} p_1 \right), \quad (13.32)$$

которое всегда имеет два вещественных корня. При выполнении дополнительного условия

$$\frac{\kappa-1}{2} \rho_1 \left( \frac{u_1 - u_{II}}{2} \right)^2 < p_1 \quad (13.33)$$

один из этих корней, который положителен и меньше  $p_1$ , дает решение уравнения (13.31). Второй корень больше  $p_1$  и поэтому является лишним, возникая при переходе от уравнения (13.31) к (13.32).

Таким образом, наряду с описанной выше конфигурацией распада разрыва с волнами разрежения, нами построено другое решение с ударными волнами.

Оно будет удовлетворять законам сохранения массы, импульса и энергии (заложенным при конструировании алгоритма). Но не закону возрастания энтропии!

В самом деле, вычислим для полученного значения  $P < p_1$  величину  $R$  по адиабате Гюгонио (13.2) и рассмотрим отношение величины  $\sigma = P/R^\kappa$  за фронтом ударной волны к величине  $\sigma_1 = p_1/\rho_1^\kappa$  перед фронтом. Напомним, что  $\sigma = \sigma(S)$  есть функция энтропии, причем ее производная  $\sigma'(S) > 0$ , как следует из формулы (12.7)

$$\frac{\sigma}{\sigma_1} = \frac{P}{p_1} \left( \frac{R}{\rho_1} \right)^{-\kappa} = (1+\theta) \left( \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2\kappa} \theta}{1 + \frac{\kappa+1}{2\kappa} \theta} \right)^\kappa = g(\theta),$$

где  $\theta = P/p_1 - 1$ . Очевидно,  $-1 < \theta < 0$ , если  $P < p_1$ . Непосредственным дифференцированием легко убедиться, что

$$\frac{dg}{d\theta} = \frac{\kappa^2 - 1}{4\kappa^2} \frac{\theta^2}{\left( 1 + \frac{\kappa-1}{2\kappa} \theta \right) \left( 1 + \frac{\kappa+1}{2\kappa} \theta \right) (1+\theta)} g(\theta).$$

Из этих формул следует, во-первых, что при малых  $\theta$  величина  $g(\theta) = O(\theta^3)$ , т. е. в ударной волне слабой интенсивности

скачок энтропии является малой величиной третьего порядка по сравнению со скачком давления (см., например, § 83 из [88]). Во-вторых, поскольку  $g(0) = 1$ ,  $\frac{dg}{d\theta} \geq 0$ , получаем, что  $g(\theta) < 1$  при  $\theta < 0$ , т. е.  $S < s_1$  для  $P < p_1$ , как мы и утверждали выше. Соответствующее решение называют иногда ударной волной разрежения (в отличие от реальных ударных волн, представляющих ударные волны сжатия). Существование таких волн отвергается, как противоречащее закону возрастания энтропии.

Таким образом, уже рассмотрение задачи о распаде разрыва показывает, что для обеспечения единственности решения, кроме законов сохранения массы, импульса и энергии (следствием которых являются те алгебраические соотношения на волнах, которые мы использовали выше), должен быть привлечен и закон возрастания энтропии на разрывах.

#### § 14. Схема для одномерных задач газовой динамики

Общее описание схемы. Разностные законы сохранения в случае «плоской» геометрии. Использование подвижных сеток и соответствующая модификация разностной схемы. Осесимметричная геометрия, дифференциальная и разностная форма законов сохранения. Уравнения газовой динамики в форме «каналового» приближения.

Исходя из принципов, которые мы изложили в гл. I на примерах систем линейных гиперболических уравнений, разностную схему для нестационарных уравнений газовой динамики (12.1), зависящих от одной пространственной переменной  $x$ , мы будем конструировать на основе законов сохранения массы, импульса и энергии, имеющих вид интегральных тождеств (12.10), дополненных уравнением состояния  $\varepsilon = \varepsilon(p, \rho)$ .

Пусть в начальный момент времени  $t = t_0$  газ разбит на слои посредством узлов сетки с координатами  $x_j$ . Длины интервалов  $x_j - x_{j-1} = h_{j-1/2}$ , вообще говоря, могут быть различны. Внутри каждого слоя величины  $u$ ,  $\rho$ ,  $p$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(p, \rho)$  постоянны, и для слоя с номером  $j - 1/2$ , заключенного между узлами  $x_{j-1}$  и  $x_j$ , их значения обозначаются  $(u, \rho, p, \varepsilon)_{j-1/2}$ . Так как скорости и давления в соседних слоях  $j - 1/2$ ,  $j + 1/2$  могут быть неодинаковы, то на границе между ними, т. е. в точке  $x = x_j$ , произойдет распад разрыва. Как следует из результатов предыдущего параграфа, изменение физических величин при этом распаде будет описываться автомодельным решением уравнений газовой динамики вида

$$u = u(\xi), \quad \rho = \rho(\xi), \quad p = p(\xi), \quad \varepsilon = \varepsilon(\xi),$$

где автомодельная переменная  $\xi = \frac{x - x_j}{t - t_0}$ . Из этих формул видно, что значения  $u$ ,  $\rho$ ,  $p$ ,  $\varepsilon$  в точке  $x = x_j$  будут сохраняться

равными некоторым постоянным, которые мы обозначим соответственно  $U_j$ ,  $R_j$ ,  $P_j$ ,  $E_j$  («большие» величины), до тех пор, пока в точку  $x=x_j$  не придут волны, образовавшиеся при распаде разрывов в соседних узлах  $x=x_{j-1}$  и  $x=x_{j+1}$ . Мы будем поэтому рассматривать описываемый процесс в течение не слишком большого промежутка времени  $\tau$ , такого, чтобы значения  $U_j$ ,  $R_j$ ,  $P_j$ ,  $E_j$  во всех узлах  $j$  можно было считать неменяющимися.

Распределение величин  $u$ ,  $\rho$ ,  $p$ ,  $\epsilon$  по координате  $x$  на момент времени  $t=t_0+\tau$ , построенное с помощью алгоритма расчета распада разрывов во всех узлах  $x_j$ , будет весьма сложным. Как уже описывалось в § 2 для уравнений акустики, мы заменим его кусочно-постоянным распределением, которое получится, если внутри каждого интервала  $j-1/2$  считать плотности массы  $\rho$ , импульса  $\rho u$  и полной энергии  $\rho(\epsilon+u^2/2)$  равными их среднему значению по интервалу. Новые значения полученных таким образом величин на момент  $t_0+\tau$  будем обозначать  $(u, \rho, p, \epsilon)^{j-1/2}$ . Законы сохранения, примененные к ячейке сетки  $j-1/2$  в течение времени от  $t_0$  до  $t_0+\tau$ , позволяют выписать уравнения для средних значений  $(u, \rho, p, \epsilon)^{j-1/2}$ , не используя распределение по слою при  $t=t_0+\tau$ , в виде

$$\begin{aligned} [\rho^{j-1/2} - \rho_{j-1/2}] (x_j - x_{j-1}) + \tau [\mathcal{M}_j - \mathcal{M}_{j-1}] &= 0, \\ [(\rho u)^{j-1/2} - (\rho u)_{j-1/2}] (x_j - x_{j-1}) + \tau [\mathcal{I}_j - \mathcal{I}_{j-1}] &= 0, \\ \left[ \rho \left( \epsilon + \frac{u^2}{2} \right)^{j-1/2} - \rho \left( \epsilon + \frac{u^2}{2} \right)_{j-1/2} \right] (x_j - x_{j-1}) + \tau [\mathcal{E}_j - \mathcal{E}_{j-1}] &= 0, \end{aligned} \quad (14.1)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_j &= (R U)_j, \\ \mathcal{I}_j &= (P + R U^2)_j, \\ \mathcal{E}_j &= \left[ R U \left( E + \frac{U^2}{2} \right) + P U \right]_j \end{aligned} \quad (14.2)$$

для величин, которые представляют потоки массы, импульса и энергии на единицу длины бокового ребра прямоугольной ячейки сетки на плоскости переменных  $x$ ,  $t$ . Дополнив их уравнением состояния

$$\epsilon^{j-1/2} = \epsilon(p^{j-1/2}, \rho^{j-1/2}),$$

мы получим возможность выписать явные формулы для вычисления величин  $(u, \rho, p, \epsilon)^{j-1/2}$ . Можно считать, что они приближенно описывают состояние газа в момент времени  $t_0+\tau$ . Если их принять за начальное состояние и опять провести расчет по описанной схеме, то нам удается продвинуться по времени еще на величину  $\bar{\tau}$  (вообще говоря, отличную от  $\tau$ ), получив приближенное состояние газа на момент времени  $t_0+\tau+\bar{\tau}$ , и т. д.

Можно проверить, что на гладких функциях описанная разностная схема дает аппроксимацию дифференциальных уравнений газовой динамики (12.1) с первым порядком точности. Устойчивость схемы, которую мы обеспечиваем, проведя расчет с шагом по времени, удовлетворяющим соответствующему критерию, а также то обстоятельство, что основой для построения схемы служили законы сохранения, дают основание надеяться, что полученные при помощи этой разностной схемы приближенные решения будут близки к обобщенным решениям уравнений газовой динамики, даже если эти обобщенные решения содержат разрывы (ударные волны).

До сих пор мы описывали разностную схему в предположении, что узлы сетки неподвижны. Между тем не вызывает никаких сомнений тот факт, что выделение в процессе расчета границ, представляющих интерес с физической точки зрения (ударных волн, контактных разрывов, границ волн разрежения, границ между различными средами и т. п.), может существенно повысить качество расчета. Такая возможность реализуется в описываемой разностной схеме, если уметь проводить расчет в подвижных сетках. Для этого требуется лишь внести некоторые изменения в счет «больших» величин и в формулы для расчета потоков. К этому мы сейчас и перейдем.

Пусть на момент  $t = t_0$  границы счетной области имели координаты  $x_0 = x_I$ ,  $x_J = x_{II}$ . Из рассмотрения граничных условий, как мы увидим ниже, могут быть определены скорости границ  $W_I^*$  и  $W_{II}^*$ . Их новое положение на момент  $t_0 + \tau$  вычислим по формулам

$$\bar{x}_I = x_I + \tau W_I^*, \quad \bar{x}_{II} = x_{II} + \tau W_{II}^*.$$

Если сохранить такой же закон расстановки узлов сетки внутри счетной области \*), как на слое  $t = t_0$ , то их новые координаты на момент  $t_0 + \tau$  будут следующими:

$$x^j = \bar{x}_I + \frac{\bar{x}_{II} - \bar{x}_I}{x_{II} - x_I} (x_j - x_I).$$

Будем считать, что на интервале времени от  $t_0$  до  $t_0 + \tau$  узел сетки с номером  $j$  перемещается с постоянной скоростью  $W_j^* = (x^j - x_j)/\tau$ . При вычислении «больших» величин  $(U, R, P, E)_j$  учет этого обстоятельства сводится к тому, что после расчета

\*) Это не обязательно, и на практике закон расстановки может изменяться в ходе расчета. Наиболее просто «плавно» изменять его от шага к шагу.

Однако возможна и кардинальная перестройка, например выбрасывание узлов сетки или вставка новых. Более подробно читатель может ознакомиться с этим вопросом по книге [2].

соответствующего распада разрыва для назначения «больших» величин нужно посмотреть, в какую из зон попадает луч  $\xi = \frac{x-x_j}{t-t_0} = W_j^*$ , описывающий движение узла  $j$ .

Например, в случае конфигурации, изображенной на рис. 14.1, это будет выглядеть так:

1° Если  $W_j^* \leq D_I$ , то  $(U, P, R)_j = (u, p, \rho)_{j-1/2}$  из области I.

2° Если  $W_j^* \geq D_{II}$ , то  $(U, P, R)_j = (u, p, \rho)_{j+1/2}$  из области II.

3° Если  $D_I^* \leq W_j^* \leq U$ , то  $(U, P, R)_j = (U, P, R_I)$  для области III

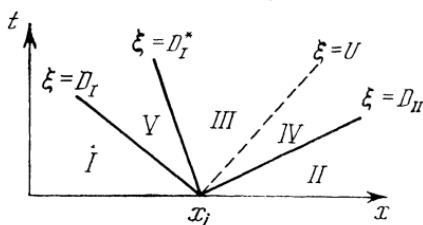


Рис. 14.1.

Что для волны разрежения должны быть выполнены соотношения (13.7), получаем следующие формулы для «больших» величин на луче:

$$\begin{aligned} c_j^* &= \frac{\kappa-1}{\kappa+1} (u_{j-1/2} - W_j^*) + \frac{2}{\kappa+1} c_{j-1/2}, \\ U_j &= W_j^* + c_j^*, \\ P_j &= (p_{j-1/2} + p_0) \left( \frac{c_j^*}{c_{j-1/2}} \right)^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}} - p_0, \\ R_j &= \frac{\kappa(P_j + p_0)}{(c_j^*)^2}. \end{aligned} \quad (14.3)$$

Аналогично могут быть рассмотрены и остальные конфигурации, возникающие при распаде разрыва (см. рис. 13.1).

Кроме расчета «больших» величин, движение узлов сетки должно быть учтено в формулах (14.1), представляющих разностную форму законов сохранения (12.10) для интервала сетки с номером  $j-1/2$  на промежутке времени от  $t_0$  до  $t_0 + \tau$ . Нетрудно убедиться, что в случае, если точка  $x_j$  перемещается со скоростью  $W_j^*$ , в формулах (14.1) потоки массы  $\mathcal{M}_j$ , импульса  $\mathcal{J}_j$  и энергии  $\mathcal{E}_j$  должны быть заменены соответственно на величины

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_j &= [R(U - W^*)]_j, \\ \mathcal{J}_j &= [P + RU(U - W^*)]_j = P_j + \mathcal{M}_j U_j, \\ \mathcal{E}_j &= \left[ R \left( E + \frac{U^2}{2} \right) (U - W^*) + PU \right]_j = \left( E + \frac{U^2}{2} \right)_j \mathcal{M}_j + P_j U_j. \end{aligned} \quad (14.4)$$

Аналогичным изменениям подвергаются потоки для узла с номером  $j-1$ . Этим и исчерпываются изменения, связанные с введением подвижных сеток.

Следует отметить, что при расчете конкретных физических задач возникновение разрывов, взаимодействие их между собой и с границами области, как правило, делают нереальным выделение их всех в процессе расчета. Большинство из них «размазывается» разностной схемой при сквозном счете. Однако выделением основных границ удается даже при сравнительно небольшом числе интервалов сетки получать вполне удовлетворительные результаты. Можно рекомендовать читателю работу [41], в которой, в частности, обсуждается и этот вопрос.

Остановимся на вопросе о применении изложенных принципов построения разностной схемы к расчету осесимметричных нестационарных газодинамических течений, описываемых функциями, зависящими только от расстояния до оси симметрии  $r$  и времени  $t$ . Соответствующие законы сохранения массы, импульса и энергии имеют вид

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{a} r dr - \mathbf{b} r dt = \iint_{\Omega} \mathbf{f} dr dt, \quad (14.5)$$

где введены обозначения для вектор-столбцов:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho \left( \epsilon + \frac{v^2}{2} \right) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \rho v \\ p + \rho v^2 \\ \rho \left( \epsilon + \frac{v^2}{2} \right) v + \rho v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (14.6)$$

Величины  $\rho$ ,  $p$ ,  $\epsilon$  сохраняют прежний смысл, а величина  $v$  есть радиальная составляющая вектора скорости (две же другие ее компоненты—вдоль оси симметрии и по углу вращения—считываются равными нулю). Интегрирование в (14.5) выполняется по произвольному замкнутому контуру  $\Gamma$ , ограничивающему область  $\Omega$  на плоскости переменных  $r$ ,  $t$ .

Разбиваем, как и ранее, газ на слои по координате  $r$  узлами  $r_j$  и полагаем, что внутри слоя  $r_{j-1} < r < r_j$  величины  $(v, p, \rho, \epsilon)_{j-1/2}$  постоянны. Для законов сохранения (14.5) тогда может быть выписана разностная форма, аналогичная (14.1):

$$(\mathbf{a}^{j-1/2} - \mathbf{a}_{j-1/2}) \frac{r_j^2 - r_{j-1}^2}{2} + \tau (\mathbf{B}_j - \mathbf{B}_{j-1}) \frac{r_j + r_{j-1}}{2} = \\ = \mathbf{f}_{j-1/2} \tau (r_j - r_{j-1}). \quad (14.7)$$

Здесь  $\mathbf{B}$ —вектор-столбец, составленный из потоков, аналогичных

(14.4):

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathcal{M} \\ \mathcal{J} \\ \mathcal{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(V - W^*) \\ P + V\mathcal{M} \\ \mathcal{M}\left(E + \frac{V^2}{2}\right) + PV \end{bmatrix}, \quad (14.8)$$

$W^*$  — скорость движения узла сетки. Необходимые для вычисления потоков «большие» величины рассчитываются точно таким способом, как и в плоском случае. При вычислении правой части для простоты можно использовать значение  $p_{j-1/2}$  на «нижнем» слое.

Для законов сохранения (14.5) по обычным правилам вариационного исчисления могут быть выписаны соответствующие дифференциальные уравнения, которым должны удовлетворять гладкие решения:

$$\frac{\partial}{\partial t}(ar) + \frac{\partial}{\partial r}(br) = f, \quad (14.9)$$

где векторы  $a$ ,  $b$ ,  $f$  определены (14.6).

Эти уравнения являются частным случаем уравнений газовой динамики, которые будут приведены в § 22. Система уравнений (14.9) эквивалентна системе вида

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial r} = \frac{1}{r}(f - b). \quad (14.10)$$

Некоторые авторы отдают предпочтение разностной схеме, построенной на основе интегральных равенств, выполненных для (14.10):

$$\oint_{\Gamma} a dr - b dt = \iint_{\Omega} \frac{1}{r}(f - b) dr dt.$$

Соответствующие разностные уравнения имеют вид

$$(a^{j-1/2} - a_{j-1/2})(r_j - r_{j-1}) + \tau(B_j - B_{j-1}) = \tau \frac{2}{r_j + r_{j-1}}(f_{j-1/2} - b_{j-1/2})(r_j - r_{j-1}), \quad (14.11)$$

если при вычислении правой части используются величины с «нижнего» слоя.

Сравнение разностных уравнений (14.11) с уравнениями (14.7), которые после сокращения на  $\frac{1}{2}(r_j + r_{j-1})$  принимают вид

$$(a^{j-1/2} - a_{j-1/2})(r_j - r_{j-1}) + \tau(B_j - B_{j-1}) = \tau f_{j-1/2} \frac{2}{r_j + r_{j-1}}(r_j - r_{j-1}), \quad (14.12)$$

показывает, что они различаются только правыми частями. Предпочтение, которое отдается схеме (14.11) перед (14.7) или (14.12), обычно объясняется сравнением численных результатов, которые как утверждается, в окрестности оси симметрии (т. е. при малых  $r$ ) оказываются точнее для схемы (14.11). С этим, по-видимому, можно согласиться.

В качестве контраргумента в пользу схемы (14.7) можно указать на следующее. При наличии в уравнениях правой части в разностной форме обычно не удается точно выполнить соответствующий интегральный закон сохранения, рассматриваемый для всей расчетной области. Поэтому в схеме (14.7) в разностной форме точно выполнены законы сохранения массы и энергии счетной области и только приближенно — импульса по осевому направлению. В схеме же (14.11) все три закона сохранения будут выполнены приближенно.

В заключение заметим, что рассмотренные уравнения для плоской и цилиндрической симметрии являются частными случаями более общих одномерных уравнений газовой динамики, которые в интегральной форме имеют вид

$$\oint_{\Gamma} Q(r) [a \, dr - b \, dt] = \iint_{\Omega} f Q'(r) \, dr \, dt. \quad (14.13)$$

Соответствующие дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} [Q(r) a] + \frac{\partial}{\partial r} [Q(r) b] = f Q'(r) \quad (14.14)$$

обычно принято называть уравнениями газовой динамики в «каналовом» приближении, поскольку одномерные течения газа можно рассматривать как течения в трубке с жесткими стенками;  $Q(r)$  — площадь поперечного сечения такой трубы. В плоских задачах  $Q(r) = 1$ , в цилиндрических  $Q(r) = r$ , в сферически симметричных  $Q(r) = r^2$ . Описанная нами разностная схема очевидным образом обобщается и на случай уравнений, вытекающих из законов сохранения (14.13).

Более того, по аналогии с изложенным, можно конструировать явную разностную схему для произвольной квазилинейной системы гиперболических уравнений с двумя переменными, основываясь на соответствующей ей совокупности интегральных законов сохранения. В частности, в § 18 это будет выполнено для уравнений гиперболического типа, описывающих стационарные течения газа, зависящие от двух пространственных переменных, если по одной из этих переменных течение является сверхзвуковым.

## § 15. Границные условия для одномерных задач

Системе разностных уравнений требуется задание потоков массы, импульса и энергии через границы. Модификация задачи о распаде разрыва как способ реализации граничных условий в случаях: 1° непроницаемая стена, 2° внешняя ударная волна, 3° свободная граница. Реализация граничных условий при сверхзвуковом режиме на «входе» (4°) или на «выходе» (5°) потока газа. Организация расчета на внутренних границах между счетными областями.

В предыдущем параграфе мы описали разностную схему для расчета нестационарных задач газовой динамики с одной пространственной переменной в предположении, что сетка  $\{x_i\}$  неограниченно простирается в обе стороны по оси  $x$ . Между тем в практических задачах счетная область, как правило, бывает конечной.

Пусть в начальный момент  $t = t_0$  это отрезок  $x_1 \leq x \leq x_{II}$ . Разобьем его на  $J$  слоев узлами сетки  $x_j; j = 0, 1, \dots, J$ , краяние из которых совпадают с концами отрезка:  $x_0 = x_1, x_J = x_{II}$ .

Описанный алгоритм позволяет нам провести вычисления для «внутренних» интервалов сетки  $j - 1/2 = 1, \dots, J - 2$ , а для осуществления расчета в двух крайних интервалах он должен быть дополнен, как показывают формулы (14.1) и (14.4), правилами для расчета величин

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0 &= R_0(U_0 - W_0^*), \quad \mathcal{I}_0 = P_0 + U_0 \mathcal{M}_0, \\ \mathcal{E}_0 &= \left( E + \frac{U^2}{2} \right)_0 \mathcal{M}_0 + P_0 U_0 \end{aligned} \quad (15.1)$$

для левого конца счетной области  $x = x_1$  и аналогичных величин  $\mathcal{M}_J, \mathcal{I}_J, \mathcal{E}_J$ , для правого конца области  $x = x_{II}$ . Мы будем называть их в дальнейшем граничными потоками массы, импульса и энергии.

Совершенно очевидно, что для вычисления перечисленных величин должна быть привлечена дополнительная информация. Обычно она задается в виде граничных условий, форма которых определяется конкретным содержанием решаемой физической задачи. В ходе расчета мы должны, таким образом, обеспечить выполнение (в приближенном смысле) не только уравнений газовой динамики, но и соответствующих граничных условий на левом и правом конце отрезка. Мы не ставим своей задачей описать здесь «универсальные» формулы, пригодные на все случаи жизни, а рассмотрим несколько типичных ситуаций.

Для определенности пусть речь идет о левой границе отрезка.

1° Пусть левая граница — неподвижная стена, непроницаемая для газа. Тогда, очевидно, мы можем полагать, что  $U_0 = W_0^* = 0$ . Для вычисления граничных потоков (15.1) нам не хватает, следовательно, только величины  $P_0$ . Чтобы вывести

формулу для ее вычисления, представим себе вспомогательную задачу о распаде разрыва, рассмотренную в § 13, для которой в качестве правых величин  $(u_{II}, p_{II}, \rho_{II})$  взяты текущие значения  $(u_{1/2}, p_{1/2}, \rho_{1/2})$  для интервала сетки, примыкающего к левому концу счетной области, а в качестве левых величин  $(u_I, p_I, \rho_I)$  — значения  $(-u_{1/2}, p_{1/2}, \rho_{1/2})$ , отличающиеся от правых только противоположным знаком скорости  $u$ . Очевидно, что такой распад разрыва дает геометрическую картину, симметричную относительно точки  $x = x_0$ . В частности, будет обеспечено условие  $U = U_0 = 0$  и получено некоторое значение для давления  $P$  на контактном разрыве, которое и есть требуемое  $P_0$ .

На этом можно было бы закончить рассмотрение случая неподвижной стенки \*). Однако симметричный характер вспомогательной задачи о распаде разрыва позволяет выписать явные формулы для ее решения.

Если  $u_{1/2} < 0$ , то образуются две ударные волны. Уравнение (13.27) для давления  $P$  при этом принимает вид

$$\frac{P - p_{1/2}}{\sqrt{\rho_{1/2} \left( \frac{\kappa+1}{2} P + \frac{\kappa-1}{2} p_{1/2} + \kappa p_0 \right)}} = -u_{1/2}.$$

Оно сводится к квадратному уравнению, и в качестве  $P_0$  следует взять его больший корень.

Если  $u_{1/2} > 0$ , то возникают две волны разрежения и давление  $P_0$  может быть сразу вычислено на основании уравнения (13.28):

$$P_0 = (p_{1/2} + p_0) \left( 1 - \frac{\kappa-1}{2} \frac{u_{1/2}}{c_{1/2}} \right)^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}} - p_0.$$

Заметим, что совершенно аналогично можно было бы рассмотреть случай, когда непроницаемая стенка не неподвижна, а перемещается с заданной скоростью  $W_1^*$  вдоль оси  $x$ . Достаточно лишь в выписанных формулах заменить величину  $u_{1/2}$  на скорость газа относительно стенки, равную  $u_{1/2} - W_1^*$ , что соответствует переходу к системе координат, движущейся со скоростью  $W_1^*$ , в которой стенка станет неподвижной. При расчете потоков (15.1), естественно, нужно полагать  $W_0^* = W_1^*$ . Скорость  $W_1^*$  может зависеть, конечно, от времени  $t$ , и тогда на каждом шаге расчета следует вычислять ее новое значение.

2° Пусть левая граница — ударная волна, перемещающаяся по среде с заданными значениями давления  $p^*$ , плотности  $\rho^*$ ,

\*) Такой прием использования подпрограммы для расчета распада разрыва может применяться при практической реализации алгоритма на ЭВМ.

скорости  $u^*$ . Естественно рассмотреть задачу о распаде разрыва, для которой левые значения  $(u_1, p_1, \rho_1)$  полагаются равными величинам  $(u^*, p^*, \rho^*)$ , а правые значения  $(u_{II}, p_{II}, \rho_{II})$ —величинам  $(u_{1/2}, p_{1/2}, \rho_{1/2})$ . Рассчитав соответствующую конфигурацию по алгоритму § 13, в качестве левой волны, граничащей с внешним потоком, состояние которого характеризуется параметрами  $(u^*, p^*, \rho^*)$ , мы должны получить ударную волну. Ее скорость, которая в § 13 обозначалась  $D_1$  и досчитывалась по формуле (13.30), объявляется скоростью движения левой границы  $W_0^* = W_1^*$ . В качестве величин  $U_0, P_0, R_0$ , необходимых для расчета граничных потоков (15.1), можно задавать или величины  $(u^*, p^*, \rho^*)$ , или величины  $(U, P, R)$ , сосчитанные для распада разрыва. Они должны давать одни и те же значения для потоков (15.1) в силу соотношений на левой ударной волне. Отметим, что параметры  $u^*, p^*, \rho^*$  среды, по которой распространяется ударная волна, могут быть не постоянными, а зависеть от координаты  $x$ , или от времени  $t$ , или от обеих переменных  $x, t$ . Это лишь сделает необходимым вычисление на каждом шаге новых значений  $u^*, p^*, \rho^*$  в зависимости от текущего местонахождения ударной волны.

 3° Пусть в качестве граничного условия на левой границе задано давление  $p = p^*$ . (В случае  $p^* = 0$  принято говорить, что граница является свободной.) Рассмотрим полубесконечную одномерную модельную задачу: на границе  $x = x_0$  среды, характеризующейся параметрами  $u_{1/2}, p_{1/2}, \rho_{1/2}$  при  $x > x_0$ , приложено давление  $p(x_0, t) = p^*$ . По аналогии с задачей о распаде разрыва для нее можно построить автомодельное решение следующего вида.

К границе примыкает справа область с постоянными значениями давления  $P_0 = p^*$ , плотности  $R_0$  и скорости  $U_0$ . Если  $p^* > p_{1/2}$ , то эта область отделена ударной волной от среды справа, состояние которой определяют параметры  $u_{1/2}, p_{1/2}, \rho_{1/2}$ . Из соотношений (13.5), (13.6) на этой «правой» ударной волне следует, что величина  $U_0$  может быть вычислена по формулам

$$U = u_{1/2} + \frac{p^* - p_{1/2}}{a_{1/2}},$$

$$a_{1/2} = \sqrt{\rho_{1/2} \left[ \frac{\kappa+1}{2} (p^* + p_0) + \frac{\kappa-1}{2} (p_{1/2} + p_0) \right]}.$$

Если  $p^* < p_{1/2}$ , то «правая» волна будет волной разрежения. Из соотношений на ней следует формула (13.10) для величины  $U_0$ :

$$U_0 = u_{1/2} - \frac{2}{\kappa-1} c_{1/2} \left[ 1 - \left( \frac{p^* + p_0}{p_{1/2} + p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} \right].$$

В обоих случаях скорость движения левой границы  $W_1^*$  полагаем равной  $U_0$ .

Отметим, что и для описанного типа граничного условия сохраняет силу сделанное выше примечание о модификации расчета в случае, если  $p^*$  зависит от  $x$  и  $t$ .

4° Весьма простой с точки зрения расчета представляется ситуация, когда через неподвижную ( $W_0^* = 0$ ) левую границу счетной области «втекает» поток газа, характеризуемый параметрами  $u^*$ ,  $p^*$ ,  $\rho^*$ , который является сверхзвуковым, т. е.

$$u^* > c^* = \sqrt{\kappa \frac{p^* + p_0}{\rho^*}}.$$

Тогда «большие» величины назначаются, очевидно, так:

$$U_0 = u^*, \quad P_0 = p^*, \quad R_0 = \rho^*.$$

5° Следующим типом границы, который мы рассмотрим, является случай, когда на границе можно не ставить никаких граничных условий. Речь идет о ситуации, когда поток газа «вытекает» через границу области со сверхзвуковой скоростью. При практической реализации обычно поступают так: вводится фиктивный интервал, примыкающий к границе с внешней стороны счетной области, параметры в котором либо переносятся из приграничного интервала, либо линейно экстраполируются по двум интервалам, примыкающим к границе. Если поток сверхзвуковой, то при решении задачи о распаде разрыва эти величины просто не будут использованы в расчете. Однако, даже если это условие нарушается, в ряде случаев можно рассчитывать на удовлетворительный характер получаемых результатов (например, если считается задача на установление, а нарушение имеет место только на начальной стадии процесса, или если граница поставлена «достаточно далеко», так что практически не влияет на ту часть счетной области, которая представляет главный интерес в расчете, и т. п.). Следует только подчеркнуть необходимость критического внимания и повышенного контроля в ситуациях такого рода.

Конечно, рассмотренные типы граничных условий не исчерпывают всех возможных ситуаций, возникающих на практике. Однако нам представляется, что их достаточно для того, чтобы подсказать читателю разумный способ действия в любом конкретном случае. Мы также не будем здесь рассматривать граничных условий на правой границе. Очевидно, что они приводят точно к таким же формулам, как и на левой границе, отличаясь от них только некоторыми из знаков и использованием величин  $(u, p, \rho)_{J-1/2}$  вместо  $(u, p, \rho)_{1/2}$ .

В заключение этого параграфа остановимся еще на одном важном вопросе, который касается проведения расчета на вну-

тренних границах, разделяющих различные счетные области задачи. Такие границы возникают, как мы уже отмечали в § 14, при выделении в процессе расчета ударных волн, контактных разрывов, границ между различными средами и т. д., представляющих специальный интерес с физической точки зрения. Их выделение может существенно повышать качество счета.

Применение задачи о распаде разрыва позволяет без затруднений включить расчет внутренних границ в описанную разностную схему. В качестве входной информации для алгоритма, описанного в § 13, нужно задать соответствующие значения параметров на данный момент времени из интервалов двух счетных областей, примыкающих к рассматриваемой границе справа и слева. (Если речь идет о границе между двумя различными средами, то следует также задавать соответствующие параметры, описывающие их уравнения состояния. Алгоритм, описанный в § 13, естественным образом обобщается, например, на случай двучленных уравнений состояния, отличающихся параметрами  $\kappa$ ,  $\rho_0$ ,  $c_0$ .)

В результате расчета распада разрыва будет получена некоторая из конфигураций, описанных в § 13 (см. рис. 13.1). В качестве внутренней границы принимается одна из линий, описывающих эту конфигурацию, исходя из физического содержания задачи. Например, если речь идет о контактной границе или границе между двумя средами, то в полученной конфигурации внутренняя граница отождествляется с контактным разрывом. Если рассматриваемая граница между счетными областями представляет ударную волну, выделенную в процессе расчета, то при ее выделении указывается, о какой волне — «правой» или «левой» — идет речь. (Условные названия «правой» и «левой» волны мы уже ввели на стр. 107 в § 13. Скорость «левой» волны, согласно формуле (13.30), равна  $D_1 = u_1 - a_1/\rho_1$ , а «правой»  $D_{II} = u_{II} + a_{II}/\rho_{II}$ . Ясно, что может оказаться, что  $D_1 > 0$  или  $D_{II} < 0$ , так что можно лишь условно говорить, что «левая» волна распространяется влево, а «правая» волна — вправо.) Позже, в § 17, мы поясним это на конкретном примере.

После того, как внутренняя граница отождествлена с некоторой конкретной линией, описывающей конфигурацию распада разрыва, определяется скорость  $W^*$  ее движения на данном шаге, необходимая для расчета нового положения сетки, а также величины потоков массы, импульса и энергии, необходимые для расчета новых газодинамических величин согласно законам сохранения. Заметим, что в назначении «больших» величин имеется некоторый произвол, однако потоки определяются однозначно. Это обстоятельство мы уже отмечали в пункте 2° настоящего параграфа.

## § 16. Аппроксимация и устойчивость одномерной схемы

Линеаризованная модель нестационарных уравнений одномерной газовой динамики и разностной схемы. «Звуковой» распад разрыва. Условие устойчивости линеаризованной модели схемы без граничных условий. Перенесение критерия устойчивости на нелинейную схему. Аппроксимация линеаризованных уравнений. Разностная вязкость.

В силу нелинейного характера уравнений газовой динамики (12.1) не представляется возможным провести исследование аппроксимации и устойчивости непосредственно для описанной в §§ 14, 15 разностной схемы. Мы ограничимся исследованием ее аналога для линейной системы уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u_0 \frac{\partial p}{\partial x} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (16.1)$$

на всей прямой  $-\infty < x < +\infty$ , чтобы не осложнять изложение рассмотрением граничных условий.

Эта система получается линеаризацией уравнений (12.1) и использованием линеаризованного уравнения состояния  $p = k_1 \rho + k_2 u$  с постоянными  $k_1, k_2$ , связанными соотношением

$$k_1 + \frac{\rho_0}{\rho_0^2} k_2 = c_0^2.$$

Система (16.1) хорошо описывает процессы в области, где давление, плотность и скорость достаточно мало отличаются от постоянных значений  $\rho_0, \rho_0, u_0$  и их производные ограничены. Входящие в уравнения величины  $p, \rho, u$  представляют собой отклонения давления, плотности и скорости от их значений в невозмущенном состоянии.

Описанная нами разностная схема после соответствующей линеаризации превращается в схему для линейной системы (16.1) и в случае равномерной сетки по координате  $x$  с шагом  $h$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho^{j-1/2} &= \rho_{j-1/2} - \frac{\tau}{h} [u_0 (R_j - R_{j-1}) + \rho_0 (U_j - U_{j-1})], \\ u^{j-1/2} &= u_{j-1/2} - \frac{\tau}{h} \left[ u_0 (U_j - U_{j-1}) + \frac{1}{\rho_0} (P_j - P_{j-1}) \right], \\ p^{j-1/2} &= p_{j-1/2} - \frac{\tau}{h} [u_0 (P_j - P_{j-1}) + \rho_0 c_0^2 (U_j - U_{j-1})]. \end{aligned} \quad (16.2)$$

Вспомогательные «большие» величины получаются из линеаризованной задачи о распаде разрыва, изученной нами в § 13. Чтобы ее изложить, заметим, что линейная система уравнений (16.1) может быть приведена к каноническому виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(p - c_0^2 \rho) + u_0 \frac{\partial}{\partial x}(p - c_0^2 \rho) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(u + \frac{p}{\rho_0 c_0}\right) + (u_0 + c_0) \frac{\partial}{\partial x}\left(u + \frac{p}{\rho_0 c_0}\right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(u - \frac{p}{\rho_0 c_0}\right) + (u_0 - c_0) \frac{\partial}{\partial x}\left(u - \frac{p}{\rho_0 c_0}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (16.3)$$

Отсюда очевидно, что она имеет три вещественные характеристики, на которых выполнены соотношения

$$\begin{aligned} p - c_0^2 \rho = \text{const} &\quad \text{вдоль} \quad \frac{dx}{dt} = u_0, \\ u + \frac{p}{\rho_0 c_0} = \text{const} &\quad \text{вдоль} \quad \frac{dx}{dt} = u_0 + c_0, \\ u - \frac{p}{\rho_0 c_0} = \text{const} &\quad \text{вдоль} \quad \frac{dx}{dt} = u_0 - c_0. \end{aligned} \quad (16.4)$$

В звуковом приближении образующиеся волны в узле  $x = x_j$  можно представить себе в виде трех слабых разрывов, распространяющихся со скоростями  $D_I = u_0 - c_0$ ,  $W = u_0$ ,  $D_{II} = u_0 + c_0$ . Они

делят полуплоскость  $\{-\infty < x < +\infty, t > 0\}$  на четыре зоны, например, так, как изображено на рис. 16.1. Аналогично тому, как это было описано для нелинейной задачи в § 14, необходимо рассматривать четыре различных случая назначения «больших» величин.

1. Если  $u_0 > c_0$ , то  $(P, R, U)_j = (p, \rho, u)_{j-1/2}$ .

2. Если  $u_0 < -c_0$ , то  $(P, R, U)_j = (p, \rho, u)_{j+1/2}$ .

Если  $|u_0| < c_0$ , то для вычисления «больших» величин нам придется привлечь соотношения на разрывах. Для линейных уравнений (16.1) они имеют вид

$$[\rho] \frac{dx}{dt} - u_0 [\rho] - \rho_0 [u] = 0, \quad (16.5)$$

$$[u] \frac{dx}{dt} - u_0 [u] - \frac{1}{\rho_0} [p] = 0, \quad (16.6)$$

$$[p] \frac{dx}{dt} - u_0 [p] - \rho_0 c_0^2 [u] = 0. \quad (16.7)$$

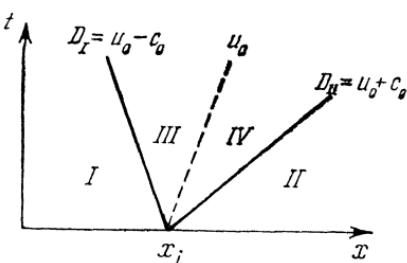


Рис. 16.1.

Заметим, что при  $\frac{dx}{dt} = u_0 \pm c_0$  соотношение (16.7) совпадает с (16.6), а при  $\frac{dx}{dt} = u_0$  совпадает с (16.5), и поэтому его можно не рассматривать.

Воспользовавшись соотношением (16.6) для  $\frac{dx}{dt} = u_0 + c_0$  и  $\frac{dx}{dt} = u_0 - c_0$ , получаем два уравнения для определения величин  $P$ ,  $U$  в областях III и IV на рис. 16.1:

$$(U - u_{j+1/2}) c_0 - \frac{1}{\rho_0} (P - p_{j+1/2}) = 0,$$

$$(U - u_{j-1/2}) c_0 + \frac{1}{\rho_0} (P - p_{j-1/2}) = 0.$$

Из них следует, что

$$P = \frac{p_{j-1/2} + p_{j+1/2}}{2} - \rho_0 c_0 \frac{u_{j+1/2} - u_{j-1/2}}{2},$$

$$U = \frac{u_{j-1/2} + u_{j+1/2}}{2} - \frac{p_{j+1/2} - p_{j-1/2}}{2\rho_0 c_0}.$$

(Отметим, что с этими формулами мы уже встречались в § 2 при описании разностной схемы для одномерной акустики.)

После этого из соотношения (16.5) на волне  $\frac{dx}{dt} = u_0 - c_0$  получаем значение  $R_{\text{III}}$  для области III:

$$R_{\text{III}} = \rho_{j-1/2} - \frac{\rho_0}{c_0} (U - u_{j-1/2}),$$

а из соотношения (16.5) на волне  $\frac{dx}{dt} = u_0 + c_0$  — значение  $R_{\text{IV}}$  для области IV:

$$R_{\text{IV}} = \rho_{j+1/2} + \frac{\rho_0}{c_0} (U - u_{j+1/2}).$$

В двух оставшихся случаях полагаем:

3. Если  $-c_0 < u_0 < 0$ , то  $P_j = P$ ,  $U_j = U$ ,  $R_j = R_{\text{IV}}$ .

4. Если  $0 < u_0 < c_0$ , то  $P_j = P$ ,  $U_j = U$ ,  $R_j = R_{\text{III}}$ .

Построение линеаризованной модели для разностной схемы, описанной в § 14, таким образом, завершено. Как мы видим, фактически она распадается на четыре различные схемы в зависимости от соотношения величин  $u_0$  и  $c_0$ :

$$u_0 > c_0, \quad 0 < u_0 < c_0, \quad -c_0 < u_0 < 0, \quad u_0 < -c_0. \quad (16.8)$$

Вместо кропотливого исследования на устойчивость каждой из этих схем можно сразу воспользоваться результатами, изложен-

ными в § 9. Заметим, что система (16.1) симметризуется хотя бы потому, что может быть записана в виде (16.3). Мы подробно описали линеаризованную модель, чтобы продемонстрировать, что разностная схема для нее построена так, как изложено в § 9. Теперь мы можем сразу утверждать, что эта разностная схема (без граничных условий) в любом из четырех случаев (16.8) устойчива в смысле сеточной нормы

$$\|\mathbf{F}\|^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[ \rho_0 \frac{u_{j-1/2}^2}{2} + \frac{p_{j-1/2}^2}{2\rho_0 c_0^2} + k (p_{j-1/2} - c_0^2 \rho_{j-1/2})^2 \right], \quad (16.9)$$

если шаг по времени  $\tau$  удовлетворяет условию

$$\tau < \tau^* = \frac{h}{\max(u_0 + c_0, c_0 - u_0)}. \quad (16.10)$$

Коэффициент  $k$  в формуле (16.9) может быть произвольным. Как уже отмечалось в § 9, условие (16.10) является не только достаточным, но и необходимым.

Полученное условие имеет простой и наглядный физический смысл:  $\tau^*$  есть время, которое требуется, чтобы «самая быстрая» из волн, образующихся при «звуковом» распаде разрыва в узле сетки  $x_j$ , дошла до соседнего узла сетки  $x_{j-1}$  или  $x_{j+1}$ .

Это дает основание надеяться, что полученный критерий может быть перенесен на описанную разностную схему для квазилинейной системы уравнений газовой динамики, для которой, как мы тщательно подчеркивали в ходе изложения этого параграфа, исследованная схема является линеаризованной моделью.

Заметим сразу же, что в газодинамической задаче допустимый промежуток времени  $\tau^*$  различен для каждого из значений даже в случае равномерной сетки ( $x_j - x_{j-1} = h_{j-1/2} = h$ ) из-за того, что скорости распространения волн, рассчитываемые по алгоритму для распада разрыва, описанному в § 13, будут зависеть от конкретных значений величин  $(u, p, \rho)_{j-1/2}$  и  $(u, p, \rho)_{j+1/2}$ .

Кроме того, в случае применения подвижных сеток нужно учитывать, что узел сетки  $x_j$  имеет скорость  $W_j^*$ , перемещаясь «навстречу» волне или «убегая» от нее. Поэтому естественно определить допустимое значение  $\tau_{j-1/2}^*$  для каждого из интервалов сетки  $x_{j-1} < x < x_j$  по формуле

$$\tau_{j-1/2}^* = \frac{x_j - x_{j-1}}{\max(D_{j-1}^{\text{II}} - W_j^*, -D_j^{\text{I}} - W_{j-1}^*)}, \quad (16.11)$$

в которой  $D_{j-1}^{\text{II}}$  и  $D_j^{\text{I}}$  обозначают значения скорости «самой правой волны» при распаде разрыва в узле  $x_{j-1}$  и «самой левой волны» при распаде разрыва в узле  $x_j$ .

В качестве допустимой величины шага по времени  $\tau^*$  следует взять наименьшее из значений  $\tau_{j-1/2}^*$  по всем интервалам сетки:

$$\tau^* = \min_j \tau_{j-1/2}^*. \quad (16.12)$$

Нужно, однако, учесть следующие обстоятельства. Во-первых, мы пользуемся условием устойчивости, которое обосновано только для линеаризованной модели газодинамической задачи. Во-вторых, с точки зрения практической организации расчета целесообразно расчет величин  $\tau_{j-1/2}^*$  выполнять одновременно с расчетом «больших» величин на данном шаге, а полученное ограничение шага  $\tau^*$  использовать на следующем шаге расчета, т. е. с опозданием на один шаг. Наконец, иногда бывает полезным провести расчет с шагом по времени меньшим, чем разрешает описанный критерий. Поэтому окончательную формулу для шага по времени  $\tau^{(n+1/2)} = t_{n+1} - t_n$ , где  $n$  — номер шага, предлагается взять в виде

$$\tau^{(n+1/2)} = v_n \tau^{*(n-1/2)}. \quad (16.13)$$

Коэффициент запаса  $v_n$  зададим формулой

$$v_n = \begin{cases} C_2, & \text{если } \tau^{*(n-1/2)} \geq C_1 \tau^{*(n-3/2)}, \\ C_1 \frac{\tau^{*(n-1/2)}}{\tau^{*(n-3/2)}} & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (16.14)$$

где  $C_1, C_2$  — постоянные величины,  $0 < C_1 \leq 1, 0 < C_2 \leq 1$ . Обычно они назначаются близкими к единице, а в случае необходимости могут корректироваться по ходу расчета. Практика многочисленных расчетов, проведенных по описанной схеме различными авторами, показывает, что предложенный критерий обеспечивает устойчивость схемы. Для изложенной линеаризованной модели разностной схемы можно провести такое же исследование аппроксимации, как мы описали в § 3 на примере уравнений акустики. Предполагая, что  $u, p, \rho$  суть достаточно гладкие функции от  $x, t$ , раскладываем входящие в формулы, описывающие разностную схему, величины в ряды Тейлора. Будем удерживать члены до второго порядка включительно. В качестве «опорной» точки можно принять, например,  $x = x_{j-1/2} = \frac{1}{2}(x_j + x_{j-1})$ ,  $t = t_0$ .

Выше уже отмечалось, что возможны четыре варианта формул для вычисления «больших» величин, т. е. четыре различных разностных схемы, отвечающие условиям (16.8). Мы не будем приводить здесь простых, но громоздких выкладок, а приведем лишь их результат, выписанный в работе [73]. Напомним, что возникающие в остаточных членах разложения производные по времени  $t$  можно исключить, используя исходные дифференциальные уравнения (16.1), точно так же, как мы поступили в § 3.

В случае  $u_0 > c_0$  («сверхзвуковое» течение) линеаризованная разностная схема на решениях уравнений (16.1) аппроксимирует со вторым порядком точности систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + u_0 \frac{\partial p}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{h}{2} \left[ \alpha \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right], \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{h}{2} \left[ \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{1}{\rho_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right], \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u_0 \frac{\partial p}{\partial x} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{h}{2} \left[ \alpha \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \beta \rho_0 c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right], \end{aligned} \quad (16.15)$$

в которой коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$  определяются формулами

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_I = u_0 \left( 1 - \frac{\tau}{h} \frac{u_0^2 + c_0^2}{u_0} \right), \\ \beta &= \beta_I = \rho_0 \left( 1 - 2u_0 \frac{\tau}{h} \right). \end{aligned} \quad (16.16)$$

В случае  $0 < u_0 < c_0$  («дозвуковое» течение) соответствующая система уравнений имеет тот же вид (16.15), но с другими коэффициентами:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_{II} = c_0 \left( 1 - \frac{\tau}{h} \frac{u_0^2 + c_0^2}{c_0} \right), \\ \beta &= \beta_{II} = \rho \frac{u_0}{c_0} \left( 1 - 2c_0 \frac{\tau}{h} \right). \end{aligned} \quad (16.17)$$

Для двух других случаев результат может быть выписан на основании двух приведенных и без дополнительных выкладок. Мы его приводить не будем. Правые части уравнений (16.15) можно трактовать как разностную вязкость (или диффузионные члены) линеаризованной схемы для уравнений газовой динамики. При  $u_0 = c_0$  формулы (16.16) и (16.17) совпадают, т. е. вязкость плавно изменяется при переходе через скорость звука. В работе [144] указывается, что введение диффузионного члена, содержащего характеристику потока (в данном случае скорость звука  $c_0$  и скорость потока  $u_0$ ), является оптимальным в смысле узкой локализации скачка уплотнения на разностной сетке в процессе расчета. Данный вывод подтверждается и результатами работы [128], где проведено сравнение расчетов течения с ударной волной по описанной нами схеме и по схеме Лакса [142], которая вводит в уравнения вязкость, не включающую характеристики потока.

## § 17. Иллюстрация одномерной схемы для нестационарных задач

Расчет взаимодействия ударных волн, образующихся при распаде разрыва и отражении от твердой стенки. Структура точного решения. Результаты грубого расчета с «размазыванием» разрывов. Описание тактики расчета с выделением некоторых из разрывов.

Чтобы проиллюстрировать работу нашей разностной схемы для нестационарных одномерных уравнений газовой динамики, рассмотрим численное решение следующей задачи. Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  слева от точки  $x = 0,5$  расположен идеальный газ, состояние которого характеризуется параметрами  $(p, \rho, u)_l$ , а справа — параметрами  $(p, \rho, u)_{II}$ , выписанными в таблице 1. Показатель адиабаты  $\kappa = 1,4$ . В точке  $x = 0$  расположена неподвижная твердая стенка, непроницаемая для газа.

Таблица 1

	I	II	III	IV
$p$	2,5000	0,5000	5,0000	5,0000
$\rho$	1,0000	1,0000	1,6250	3,8125
$u$	0,0000	-2,8026	-0,9806	-0,9806
$W_{лев}^*$	0,0000	-0,3328	-2,5495	-0,9806
$W_{пр}^*$	-2,5495	—	-0,9806	-0,3328
	V	VI	VII	VIII
$p$	9,3750	10,6177	10,6177	11,9989
$\rho$	2,5278	2,7627	6,4490	3,0147
$u$	0,0000	-0,2044	-0,2044	0,0000
$W_{лев}^*$	0,0000	-2,4046	-0,2044	0,0000
$W_{пр}^*$	1,7650	-0,2044	0,9179	2,2411

Возникающее течение газа можно рассчитать, последовательно применяя описанный в § 13 алгоритм для распада разрыва в точках  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  и т. д., отмеченных на рис. 17.1, в которых происходит встреча ударных волн со стенкой или с контактными разрывами.

На рис. 17.1 ударные волны отмечены сплошными линиями, контактные разрывы — штриховыми. Они разделяют плоскость на ряд областей, которым присвоены номера I, II, III и т. д. В каждой из них величины  $p$ ,  $\rho$ ,  $u$  постоянны, и их значения выписаны в таблице 1. В ней выписаны также значения  $W_{лев}^*$ ,  $W_{пр}^*$  скоростей левой и правой границ этих областей, которые представляют скорости ударных волн и контактных разрывов, возникающих в процессе взаимодействия.

Из приведенной на рис. 17.1 диаграммы непосредственно видно, как усложняется картина с течением времени. На момент  $t = 0,5$  на отрезке  $0 \leq x \leq 0,5$  имеется восемь участков с различными значениями параметров (в конфигурации, образующейся при пересечении ударных волн в точке  $\Pi_3$ , левая волна является

слабой волной разрежения). Для проведения численного расчета этой задачи по описанной в §§ 14, 15 разностной схеме на отрезке  $0 \leq x \leq 0,5$  взята равномерная сетка из 20 интервалов с шагом  $h = 0,025$ , в каждом из которых при  $t = 0$  заданы параметры области I. При заданных начальных данных можно было бы поместить правую границу задачи в точке  $x = 0,5$ , задав на ней граничное условие типа 4° («сверхзвуковое втекание газа»), как описано в § 15. Но из методических соображений мы дополнили сетку справа несколькими интервалами той же длины  $h = 0,025$ ,

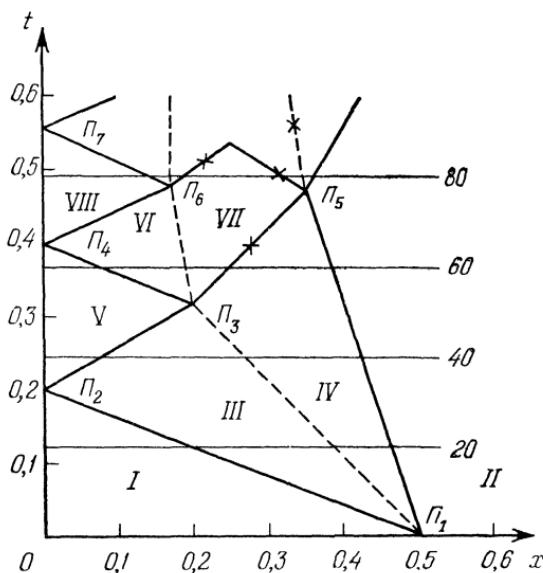


Рис. 17.1.

задав в них параметры области II. Нетрудно проверить, что в начальный момент  $t = 0$  допустимая величина шага по времени, исходя из критерия, описанного в предыдущем параграфе, определяется ячейками области II:

$$\tau^* = \frac{h}{c_{II} - u_{II}} = 0,00687.$$

Взяв коэффициент запаса  $v = 0,9$ , получим значение  $\tau = 0,00618$ . Эта величина шага сохранялась неизменной на протяжении расчета той стадии задачи, которую мы будем описывать. Сетка в процессе расчета оставалась неподвижной. Все разрывы «размазывались».

На рис. 17.2 представлены графики давления для моментов времени, отвечающих 10-, 15-, 20-, 25-му шагам расчета, из которых видно распространение двух ударных волн, возникших

при распаде разрыва в точке  $\Pi_1$ , и степень их «размазывания» в процессе расчета. Графики давления на более поздней стадии расчета (40-, 60-, 80-й шаги) представлены на рис. 17.3. Штриховой линией намечено точное решение, описанное выше. Аналогичные графики для плотности на 40-м и 80-м шагах расчета изображены на рис. 17.4. На первый придиличивый взгляд может показаться, что они далеки от точных. Конечно, с точки зрения детального описания точного решения погрешности довольно велики. Однако его качественное поведение, если иметь в виду, например, максимальные значения газодинамических параметров, передано достаточно хорошо. Напомним, что мы провели расчет

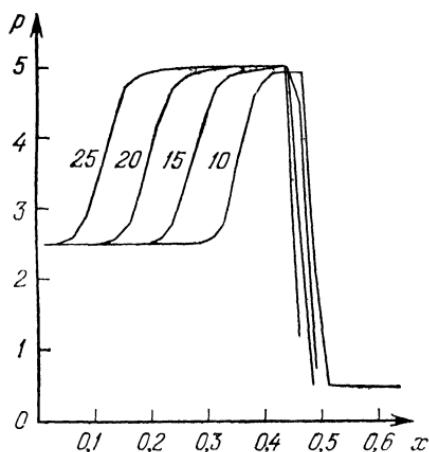


Рис. 17.2.

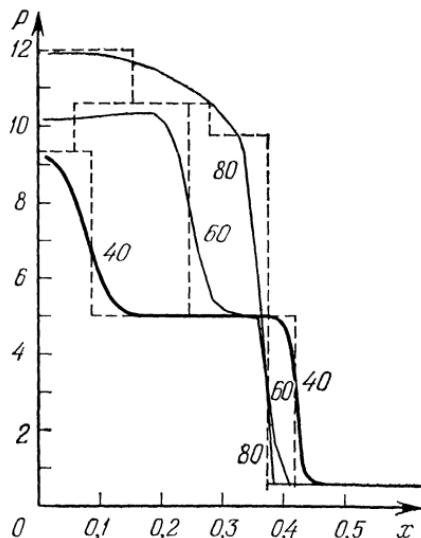


Рис. 17.3.

всего с 20 интервалами сетки, а к 80-му шагу расчетная область распадается фактически на 8 различных участков, разделенных волнами или контактными разрывами! Между тем для практики зачастую нет необходимости выяснить тонкую структуру точного решения, а достаточно ограничиться, например, информацией об изменении давления на стенке  $x=0$  как функции времени  $t$ . Такой график представлен на рис. 17.5 (сплошная линия 1) в сравнении с точным решением (штриховая линия). Заметим, что попытка уточнить его посредством удвоения числа точек (время расчета при этом возрастает в 4 раза, поскольку в 2 раза, кроме того, уменьшается и шаг по времени  $\tau$ ) приводит к довольно слабым изменениям (кривая 2 на рис. 17.5).

Поэтому в тех случаях, когда представляет интерес более детальная структура течения, возникает настоятельная необходимость проводить расчет с выделением по крайней мере основ-

ных разрывов. Именно на такой идеологии основана методика решения одномерных задач газовой динамики, описанная в книге [2]. При этом приходится вести расчет, «раскраивая» задачу на несколько счетных областей, число которых может изменяться в процессе расчета, вставляя и выбрасывая узлы сетки и т. п. Организация расчетных программ, реализующих такую методику, довольно сложна. Можно несколько упростить ее, если с самого начала наметить определенное число областей, ориентированное на выделение вполне конкретных разрывов.

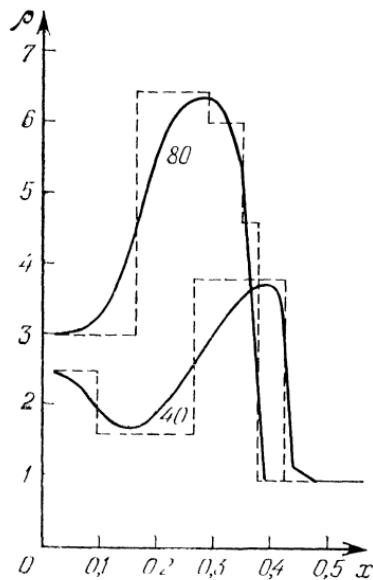


Рис. 17.4.

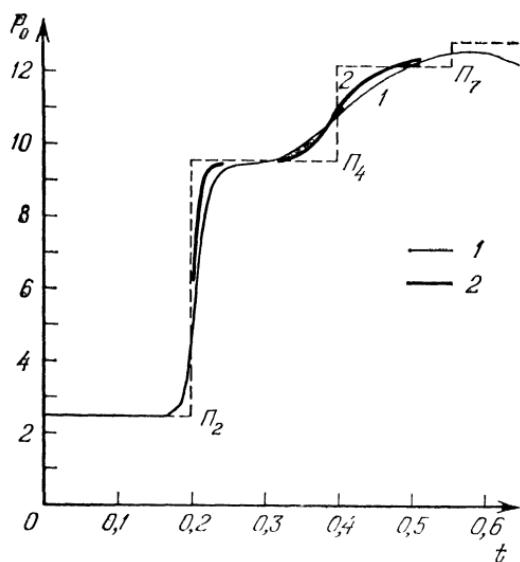


Рис. 17.5.

Поясним это на примере описанной задачи. «Запланируем» вести расчет с тремя счетными областями, имея в виду, например, что на уровне 20-го шага это будут области  $I$ ,  $III$ ,  $IV$  (область  $II$  выделять нет необходимости, так как можно заменить ее постановкой правого граничного условия, если, конечно, начальный «фон» в области  $II$  не зависит от координаты  $x$ ). Ситуация в точке  $\Pi_1$  в начальный момент времени  $t=0$  анализируется аналитически (назовем это «развязкой узла»), и исходя из этого намечается движение границ, разделяющих три счетные области. В дальнейшем их движение будет определяться автоматически на каждом шаге расчета, исходя из решения соответствующих задач о распаде разрыва, рассчитанных по величинам в интервалах сетки, примыкающих к границам слева и справа. Разумеется, расчет ведется с подвижными сетками.

При приближении к моменту времени  $t_2$ , отвечающему приходу ударной волны в точку  $\Pi_2$  на стенке, происходит стягивание области  $I$  в точку, в связи с чем шаг по времени стремится к нулю. Поэтому, не доходя до момента  $t_2$ , мы предотвращаем такое течение событий, изменяя тип границы между областями  $I$  и  $III$ : вместо «ударной волны, идущей влево», какой она была до сих пор, эта граница объявляется «ударной волной, идущей вправо». При этом в некоторой окрестности точки  $\Pi_2$  счет этой границы в течение небольшого промежутка времени будет вестись «размазанным» образом (в связи с перестройкой), а затем она превратится в выделенную ударную волну, представляющую границу между областями  $V$  и  $III$ .

При подходе к точке  $\Pi_3$  в связи со стягиванием в точку области  $III$  проводим аналогичную операцию: граница между областями  $V$  и  $III$  снова из «ударной волны, идущей вправо», объявляется «ударной волной, идущей влево». В течение некоторого небольшого промежутка времени счет ее будет «размазанным», а затем она превратится в выделенную ударную волну, разделяющую области  $V$  и  $VI$ . Контактный разрыв из границы между областями  $III$  и  $IV$  перейдет в контактный разрыв между областями  $VI$  и  $VII$ . Что касается ударной волны между областями  $VII$  и  $IV$ , то, не желая увеличивать число счетных областей, мы ею «пожертвуем», превратив в «размазанную». В дальнейшем точно так же можно поступить, например, со всеми границами, отмеченными на рис. 17.1 крестиками, оставаясь в рамках трех счетных областей.

Падение шага по времени из-за уменьшения длины счетной области создает определенные затруднения, увеличивая объем вычислений и не позволяя слишком близко подходить к узловым точкам  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  и т. д., в которых происходит перестройка структуры решения. Это затруднение значительно легче разрешается путем использования неявных разностных схем, которые мы рассмотрим ниже в § 21. Напомним, что упомянутая методика, описанная в книге [2], также была основана на неявной схеме.

В заключение этого параграфа мы остановимся на вопросе об использовании алгоритма расчета распада разрыва в нестационарных задачах. Как мы видим, его применение становится массовой операцией, занимая основное время ЭВМ при решении одномерных задач и значительную его часть в многомерных задачах. Именно поэтому мы уделили ему особое внимание в § 13. Как правило, этот алгоритм применяется на границе между двумя соседними ячейками, величины в которых различаются мало. В таком случае простые формулы для «звукового» распада разрыва, описанные в предыдущем § 16, дают вполне удовлетворительный результат, и нет необходимости прибегать к алгоритму § 13.

Но так бывает не всегда. Прежде всего это касается граничных узлов сетки. Однако и во внутренних узлах «звукового» распада разрыва может оказаться недостаточно. Например, в описанной нами задаче в точке  $\Pi_1$  «звуковой» распад разрыва между величинами I и II в таблице 1 дает значение  $P^{(0)} = 2,738$  вместо точного  $P^* = 5,0$ . В этой задаче применение «звуковых» распадов разрыва привело бы к несколько большей погрешности. Но в аналогичной ситуации, где рассматривалось бы соударение «холодных» идеальных газов, т. е. были бы заданы  $p_I = p_{II} = 0$ , по формулам «звукового» распада разрыва получилось бы  $P^{(0)} = 0$ . Задачу вообще сосчитать не удалось бы, поскольку движение газа не смогло бы начаться из-за нулевых массовых скоростей  $a_I$  и  $a_{II}$ . С использованием алгоритма § 13 расчет такой задачи проводится без затруднений, точно так же как и описанной выше.

Заметим, что в случае двучленного уравнения состояния (12.8) даже «звуковой» распад разрыва дает хороший результат, если скорость соударения не слишком велика. Например, при фронтальном соударении двух одинаковых пластин:  $\kappa = 3,0$ ,  $\rho_I = \rho_{II} = \rho_0 = 7,87$ ,  $p_I = p_{II} = 0$ ,  $c_0 = 5,0$  — с относительной скоростью  $u_I - u_{II} = 0,5$  точное значение давления  $P^* = 10,3417$ , а «звуковой» распад дает значение  $P^{(0)} = 9,8375$ , т. е. имеет погрешность  $\sim 5\%$ .

## § 18. Двумерные стационарные сверхзвуковые течения

Уравнения стационарного сверхзвукового течения в форме интегральных законов сохранения. Условие постоянства полной энталпии. Разностные законы сохранения. Формулы для газодинамических величин. Проведение расчета на границах области. Условие устойчивости схемы.

Как уже отмечалось в конце § 14, принципы, использованные при построении разностной схемы для расчета одномерных нестационарных течений, могут быть применены к произвольным гиперболическим системам квазилинейных уравнений с двумя независимыми переменными. В качестве иллюстрации этого в данном и в следующем параграфах построена аналогичная схема для расчета двумерных (плоских и осесимметричных) стационарных сверхзвуковых течений. Первоначально указанная схема была построена в работе [66].

Рассмотрение проведем в цилиндрической системе координат  $x, r, \varphi$ . Проекции вектора скорости газа  $\mathbf{q}$  на соответствующие оси обозначим через  $u$ ,  $v$  и  $w$ . Модуль вектора скорости  $q = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ . Течение будем предполагать сверхзвуковым в направлении координаты  $x$ , т. е. предполагать, что в любой точке рассчитываемой области выполнено условие

$$u > c, \quad (18.1)$$

где  $c$  — местная скорость звука.

Для упрощения изложения мы ограничимся не принципиальными с точки зрения построения разностной схемы ограничениями. Именно, будем считать, что газ является совершенным с показателем адиабаты  $\kappa$  и, кроме того, полная энталпия потока

$$i + \frac{q^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2}$$

в плоскости начальных данных (а следовательно, и во всем потоке) постоянна (см., например, [88]).

Прежде всего запишем уравнения течения в форме интегральных законов сохранения, причем, имея в виду дальнейшее обобщение на пространственный случай, первоначально не будем предполагать осевой симметрии потока. Возьмем на произвольной поверхности  $x = \text{const}$  некоторый замкнутый контур  $\Gamma$ , ограничивающий площадку  $S$ . Контур  $\Gamma$  и площадку  $S$  будем считать функциями  $x$ . При этом для определения закона, описывающего их деформацию, достаточно знать лежащий в плоскости  $x = \text{const}$  вектор

$$\xi = \frac{d\mathbf{n}}{dx},$$

где  $d\mathbf{n}$  — проекция смещения  $\Gamma$  на свою внешнюю нормаль. В каждой точке контура  $\Gamma$  вектор  $\xi$ , как и  $d\mathbf{n}$ , перпендикулярен оси  $x$  и полностью определяется проекциями  $\xi^r$  и  $\xi^\varphi$  на оси  $r$  и  $\varphi$ .

Дифференциальные уравнения течения и соотношения на сильных разрывах эквивалентны следующей системе интегральных законов сохранения:

$$\frac{d}{dx} \iint_S \mathbf{a} dr d\varphi = \oint_{\Gamma} (\mathbf{c} - \mathbf{a}\xi^\varphi) dr - (\mathbf{b} - \mathbf{a}\xi^r) d\varphi + \iint_S \mathbf{f} dr d\varphi, \quad (18.2)$$

в которых  $S$ ,  $\Gamma$ ,  $\xi^\varphi$  и  $\xi^r$  определены выше, а  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{f}$  — векторы-столбцы:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho uw \\ \rho uw \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ p + \rho v^2 \\ \rho vw \end{bmatrix}, \quad r\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ p + \rho w^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = -\frac{\rho}{r} \begin{bmatrix} v \\ uv \\ v^2 - w^2 \\ 2vw \end{bmatrix}. \quad (18.3)$$

В плоскости  $r, \varphi$  интегрирование вдоль  $\Gamma$  в (18.2) осуществляется в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки.

Система (18.2) в рассматриваемом случае замыкается условием постоянства полной энталпии

$$\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} + q^2 = \frac{\kappa+1}{\kappa-1}, \quad (18.4)$$

при написании которого предполагалось, что скорость отнесена к критической скорости потока  $q_*$ , плотность — к критической плотности  $\rho_*$ , а давление — к  $\rho_* q_*^2$ .

Если в начальном сечении полная энталпия не постоянна, то вместо (18.4) следует использовать уравнение энергии, которое в форме (18.2) приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_S \int (2i + q^2) \rho u dr d\varphi = \\ = \oint_{\Gamma} \rho (2i + q^2) \left\{ \left( \frac{\omega}{r} - u \xi^\Phi \right) dr - (v - u \xi^r) d\varphi \right\} - \\ - \int_S \int \frac{\rho v}{r} (2i + q^2) dr d\varphi. \quad (18.5) \end{aligned}$$

Естественно, что данное уравнение справедливо и при постоянстве полной энталпии. Использование в этом случае конечного соотношения (18.4) связано лишь с некоторой экономией памяти ЭВМ, поскольку позволяет запоминать меньшее число параметров в каждой расчетной точке. Вычисления, проводившиеся для сравнения по разностной схеме, которая получается при замене (18.4) на (18.5), требуют почти того же времени счета и приводят к практически одинаковым результатам.

В осесимметричном случае в качестве  $S$  удобно взять кольцо  $r_-(x) \leq r \leq r_+(x)$ . Его граница  $\Gamma$  образуется двумя окружностями радиусов  $r_+$  и  $r_-$ , на которых  $\xi^\Phi \equiv 0$ , а  $\xi^r = r_\pm \equiv dr_\pm/dx$ . Проводя для этого случая интегрирование по  $\varphi$  от  $0$  до  $2\pi$  и учитывая независимость всех величин от  $\varphi$ , получим систему интегральных законов сохранения для осесимметричного течения

$$\frac{d}{dx} \int_{r_-}^{r_+} \mathbf{a} dr = (\mathbf{a} r' - \mathbf{b}) \Big|_{r_-}^{r_+} + \int_{r_-}^{r_+} \mathbf{f} dr, \quad (18.6)$$

где векторы-столбцы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{f}$  по-прежнему определяются равенствами (18.3).

Используя уравнения (18.6), можно получить, в частности, известный результат, что вдоль любой линии тока  $r' = v/u$  в осесимметричном случае сохраняется циркуляция  $r w$ . Следовательно, если в начальном сечении  $\omega \equiv 0$ , то это равенство выполняется и во всем потоке. При этом четвертое скалярное уравнение из (18.6) удовлетворяется тождественно.

Как и в пространственном случае, система (18.6) замыкается условием постоянства полной энталпии (18.4) или интегральным законом сохранения энергии (18.5), который в данном случае

записывается в виде

$$\frac{d}{dx} \int_{r_-}^{r_+} (2i + q^2) \rho u dr = \\ = (ur' - v)(2i + q^2) \rho \Big|_{r_-}^{r_+} - \int_{r_-}^{r_+} \frac{\rho v}{r} (2i + q^2) dr. \quad (18.7)$$

Если в (18.6) и (18.7) опустить интегралы в правой части, то получающиеся в результате уравнения суть уравнения плоского течения. Практически тот же результат достигается, если рассматриваемая область взята так далеко от оси симметрии, что ее размеры оказываются много меньше, чем  $r$ . Отмеченное обстоятельство удобно использовать при расчете плоского течения с помощью «осесимметричных» программ.

Прежде чем переходить к построению разностной схемы, отметим, что приведенная выше форма записи интегральных законов сохранения не является единственно возможной. Более того, чаще те же законы записывают в виде

$$\frac{d}{dx} \iint_S r a dr d\Phi = \oint_{\Gamma} r [(c - a\xi^{\Phi}) dr - (b - a\xi^r) d\Phi], \quad (18.8)$$

где все величины имеют тот же смысл, что и в (18.2). Системы интегральных законов (18.2) и (18.7) эквивалентны, т. е. дают одинаковые дифференциальные уравнения течения и соотношения на сильных разрывах. Тем не менее, как показали многочисленные расчеты, в первом случае решения разностных уравнений обнаруживают более быструю сходимость (прежде всего в окрестности оси  $x$ ), чем во втором.

Перейдем к построению разностной схемы для расчета « $x$ -сверхзвуковых» в смысле выполнения условия (18.1) осесимметричных течений, причем ограничимся случаем отсутствия закрутки ( $w \equiv 0$ ) в плоскости начальных данных  $x=0$ , а следовательно, и во всем потоке. Начнем с описания разбиения исследуемой области

$$x \geqslant 0, \quad \mathcal{R}_-(x) \leqslant r \leqslant \mathcal{R}_+(x) \quad (18.9)$$

на расчетные ячейки. В (18.9) функции  $\mathcal{R}_-(x)$  и  $\mathcal{R}_+(x)$  или заданы, как, например, при течении в канале с твердыми стенками, или находятся в процессе решения, как в случае истечения струи. Если  $\mathcal{R}_-(x) \equiv 0$ , то нижней границей рассчитываемой области является ось симметрии (ось  $x$ ).

Любой отрезок  $x = x_0$ , принадлежащий области (18.9), разобъем на  $J$  «элементарных» частей одинаковой длины  $h_r = (\mathcal{R}_+ - \mathcal{R}_-)/J$ .

Получающиеся точки разбиения и отрезки нумеруются снизу вверх. Точкам разбиения приписываются номера  $j$ , где  $j=0, 1, \dots, J$ , а отрезкам — номера  $j-1/2$ , где  $j=1, \dots, J$ . При этом  $j=0$  и  $j=J$  отвечают нижней и верхней границам области (18.9). Наряду с сечением  $x=x_0$  рассмотрим сечение  $x=x_0+h_x$ , где  $h_x$  — шаг по  $x$ . Разбиение этого сечения (слоя) на  $J$  отрезков и их нумерацию проведем так же, как и в предыдущем случае. Средним по каждому «элементарному» отрезку параметрам при  $x=x_0$  присвоим соответствующий нижний индекс ( $\rho_{j-1/2}$ ,  $u_{j-1/2}$  и т. д.), а при  $x=x_0+h_x$  — такой же верхний индекс ( $\rho^{j-1/2}$ ,  $u^{j-1/2}$  и т. д.). Точки разбиения рассматриваемых сечений с одинаковыми номерами соединим «продольными» прямолинейными отрезками. Параметрам на таких отрезках припишем соответствующие нижние индексы, а значения, получающиеся для каждого подобного отрезка осреднением по  $x$ , как и ранее, будем обозначать прописными буквами.

Пусть известно течение на предыдущем слое (при  $x=x_0$ ) и, следовательно, — параметры с нижними полуцелыми индексами, шаг  $h_x$ , а также ординаты  $\mathcal{R}_+(x)$  и  $\mathcal{R}_-(x)$  верхней и нижней границ потока для следующего слоя, что позволяет провести его разбиение. Запишем систему (18.6) для каждого элементарного отрезка, взяв в качестве  $r_-$  и  $r_+$  ординаты двух соседних точек разбиения. Разностная схема, при помощи которой находятся параметры с верхними полуцелыми индексами, получается интегрированием (по  $x$  от  $x_0$  до  $x_0+h_x$ ) системы (18.6), записанной указанным образом, и последующим применением теоремы о среднем при вычислении интегралов по ребрам и площади четырехугольника, который в плоскости  $x, r$  образуют соответствующие вертикальные и продольные элементарные отрезки (рис. 18.1).

Рис. 18.1.

отрезка, взяв в качестве  $r_-$  и  $r_+$  ординаты двух соседних точек разбиения. Разностная схема, при помощи которой находятся параметры с верхними полуцелыми индексами, получается интегрированием (по  $x$  от  $x_0$  до  $x_0+h_x$ ) системы (18.6), записанной указанным образом, и последующим применением теоремы о среднем при вычислении интегралов по ребрам и площади четырехугольника, который в плоскости  $x, r$  образуют соответствующие вертикальные и продольные элементарные отрезки (рис. 18.1).

В итоге с учетом принятых обозначений получим

$$(ah_r)^{j-1/2} = (ah_r)_{j-1/2} + (Ah_r - Bh_x)_j - (Ah_r - Bh_x)_{j-1} + \\ + \frac{h_x}{2} [(fh_r)_{j-1/2} + (fh_r)^{j-1/2}]. \quad (18.10)$$

Здесь  $(h_r)_j = r^j - r_j$  и правило присвоения нижних и верхних индексов распространено на длины отрезков  $h_r$  и ординаты точек разбиения. Для незакрученного потока, когда  $w \equiv 0$ , уравнения

(18.10), в согласии с равенствами (18.3), принимают вид

$$\begin{aligned}\alpha^{j-1/2} &= \alpha_{j-1/2} + D_j - D_{j-1} - \delta_{j-1/2} - \delta^{j-1/2}, \\ \beta^{j-1/2} &= \beta_{j-1/2} + (Ph_r)_j - (Ph_r)_{j-1} + (VD)_j - \\ &\quad - (VD)_{j-1} - (u\delta)_{j-1/2} - (u\delta)^{j-1/2}, \\ \gamma^{j-1/2} &= \gamma_{j-1/2} + (P_{j-1} - P_j) h_x + (VD)_j - (VD)_{j-1} - (v\delta)_{j-1/2} - (v\delta)^{j-1/2},\end{aligned}\quad (18.11)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned}\alpha &= \rho u h_r, \quad \beta = (p + \rho u^2) h_r, \quad \gamma = \rho u v h_r, \\ \delta &= \rho v h_x h_r / (2r), \quad D = R (U h_r - V h_x).\end{aligned}\quad (18.12)$$

Если величины  $(\alpha, \beta, \gamma)^{j-1/2}$  вычислены, то по ним с привлечением условия постоянства полной энталпии (18.4) могут быть найдены новые значения газодинамических величин  $(u, v, p, \rho)^{j-1/2}$  на слое  $x = x_0 + h_x$ . В самом деле, выражая из формул (18.12) величины

$$v = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad \rho = \frac{\alpha}{u h_r}, \quad p = \frac{\beta - \alpha u}{h_r} \quad (18.13)$$

и подставляя их в условие (18.4), мы получаем квадратное уравнение для  $u$ . Искомое значение  $u$  вычисляется по формуле

$$u = \frac{\kappa \beta + \sqrt{\kappa^2 \beta^2 - (\kappa + 1) \alpha^2 + (\kappa^2 - 1)^2 \gamma^2}}{(\kappa + 1) \alpha}. \quad (18.14)$$

Отметим, что из двух возможных решений для  $u$ , которые получаются при различных знаках перед радикалом в формуле (18.14), взято то, которое удовлетворяет условию  $u > c$ . Второе решение отвечает переходу к дозвуковому потоку в прямом скачке уплотнения.

Верхние индексы  $j - 1/2$  в формулах (18.13), (18.14) мы опустили.

Необходимые для расчета по формулам (18.12) вспомогательные «большие» величины  $(U, V, P, R)_j$  на границе каждого элементарного четырехугольника (см. рис. 18.1) будем находить посредством решения автомодельной задачи о взаимодействии двух полубесконечных равномерных сверхзвуковых потоков, имеющих параметры  $(u, v, p, \rho)_{j-1/2}$  и  $(u, v, p, \rho)_{j+1/2}$ . Соответствующий алгоритм будет описан в следующем параграфе. Присутствие в правых частях (18.11) последних слагаемых (с верхними индексами  $j - 1/2$ ) требует итераций в процессе счета. Обычно достаточно двух итераций, причем в первой из них указанные слагаемые вычисляются по параметрам на слое  $x = x_0$ , т. е. с нижними индексами  $j - 1/2$ . Заметим кстати, что замена последних слагаемых в (18.11) предпоследними, не снижая порядка аппроксимации разностной схемы, несколько (хотя и

незначительно) увеличивает отличие результатов, полученных по упрощенной таким образом разностной схеме (18.11), от результатов аналогичных расчетов, выполненных методом характеристик.

Прежде чем переходить к формулам для вычисления «больших» величин, которые будут даны в следующем параграфе, отметим, что на границах крайних элементарных ячеек, боковые грани которых имеют номера  $j=0$  и  $j=J$ , указанные величины находятся из решения задач, соответствующих граничным условиям, поставленным при  $r=\mathcal{R}_-(x)$  и  $r=\mathcal{R}_+(x)$ . Пусть, например, рассчитывается течение в канале с твердыми стенками. Тогда при  $r=\mathcal{R}_{\pm}(x)$  известны углы наклона стенок  $\theta_{\pm}(x)$  к оси  $x$  или  $\zeta_{\pm}(x) \equiv \operatorname{tg} \theta_{\pm}(x) = [\mathcal{R}_{\pm}(x)]'$ . В этом случае  $(U, V, P, R)$  определяются из решения автомодельной задачи обтекания равномерным сверхзвуковым потоком плоской стенки с углом наклона к оси  $x$ , равным  $\theta_-(x_0 + h_x/2)$  или  $\theta_+(x_0 + h_x/2)$ . Аналогичным образом, если рассчитывается струя, вытекающая в пространство с заданным давлением  $p_e$ , то  $P=p_e$  и «большие» величины находятся из решения автомодельной задачи о вытекании равномерного плоского сверхзвукового потока в область с повышенным или пониженным давлением.

Построенная выше разностная схема, допуская сквозной счет поверхностей разрыва, позволяет в случае необходимости выделять их, причем, что особенно важно, без включения в программы для ЭВМ каких-либо дополнительных алгоритмов. Последнее связано с тем, что такой алгоритм уже содержится в задаче о взаимодействии двух однородных сверхзвуковых потоков, решение которой входит в рассматриваемую разностную схему для определения «больших» величин. Данное обстоятельство целесообразно использовать в задачах внешнего обтекания, беря в качестве одной из границ рассчитываемой области головную ударную волну (или в предельном случае — характеристику), отделяющую возмущенное течение от равномерного набегающего потока.

Нетрудно видеть, что полученная разностная схема является естественным аналогом схемы для расчета нестационарных одномерных течений, описанной в § 14. Сходство обеих схем настолько велико, что позволяет почти автоматически пользоваться результатами исследования аппроксимации и устойчивости нестационарной одномерной схемы, изложенными в § 16. Такое исследование для рассматриваемой схемы может быть проведено на линеаризованной модели. Она представляет частный случай более общей модели, которую мы рассмотрим в § 25, и сейчас описывать не будем. В соответствии с ее анализом можно ожидать, что построенная схема имеет первый порядок аппроксимации на гладких решениях. В качестве условия устойчивости линеаризованной плоской модели возникает ограничение (25.15) — (25.14) на

шаг по координате  $x$ . В нелинейной задаче, рассмотренной в этом параграфе, мы будем пользоваться критерием

$$h_x \leq h_x^* = \min_i (H_{j-1/2}^I, H_{j-1/2}^{II}), \quad (18.15)$$

где  $H_{j-1/2}^I$  — расстояние по координате  $x$ , на котором волна, образующаяся при взаимодействии потоков в узле  $r=r_j$ , достигает соседнего узла сетки  $r^{j-1}$ , а  $H_{j-1/2}^{II}$  — аналогичное расстояние, на котором волна, возникшая при  $r=r_{j-1}$ , достигает узла  $r^j$ . Необходимые для их вычисления угловые коэффициенты соответствующих волн определяются из решения вспомогательных задач о взаимодействии потоков, к рассмотрению которых мы и переходим.

### § 19. Задача о взаимодействии двух равномерных сверхзвуковых потоков

Различные схемы взаимодействия. Приближенные формулы для взаимодействия потоков со слабо отличающимися параметрами. Формулы, пригодные для расчета взаимодействия в случае интенсивных волн разрежения.

Как было сказано в предыдущем параграфе, параметры на верхней и нижней границах каждой элементарной ячейки («большие» величины) определяются из решения плоской автомодельной задачи о взаимодействии двух равномерных полубезграничных потоков, встречающихся по прямой линии. При этом параметры указанных потоков берутся равными величинам, характеризующим течение на двух соседних отрезках предыдущего слоя. В независимых переменных  $x, r$  решение каждой такой задачи зависит (если оно существует) только от отношения  $\eta = (r - r_i)/(x - x_0)$ , где  $i = j$  и  $i = j - 1$  для верхней и нижней границ соответственно (потоки начинают взаимодействовать в точке  $x = x_0, r = r_i$ ). Различные ситуации, которые реализуются в зависимости от параметров взаимодействующих потоков, приведены на рис. 19.1, на котором двойные линии — ударные волны, пунктирные — границы вееров волн разрежения и штриховые — тангенциальные разрывы. В областях 1—4 на рис. 19.1,  $a$ —19.1,  $g$  и в областях 1—3 на рис. 19.1,  $\delta$  параметры потоков постоянны. В случае, изображенном на рис. 19.1,  $\delta$ , между замыкающими границами вееров волн разрежения, которые при этом одновременно являются линиями тангенциальных разрывов, располагается область вакуума (область 3). Одинарной сплошной линией на рис. 19.1 показано одно из возможных положений рассматриваемой границы элементарной ячейки, а стрелками — направления и величины скоростей взаимодействующих потоков. Заметим, что граница ячейки может, вообще говоря, попадать в любую область справа

от вертикали  $x = x_0$  и, в частности, внутрь веера волн разрежения или в один из невозмущенных потоков.

Перейдем к рассмотрению различных случаев. Как известно, изменения давления  $p$  и  $\zeta \equiv \operatorname{tg} \theta = v/u$  в веере волн разрежения связаны дифференциальным соотношением

$$d\zeta \mp \frac{1+\zeta}{\rho q^2} \sqrt{M^2 - 1} dp = 0, \quad (19.1)$$

в котором  $M = q/c$  — число Маха, а верхний (нижний) знак отвечает вееру волн разрежения, образованному характеристиками

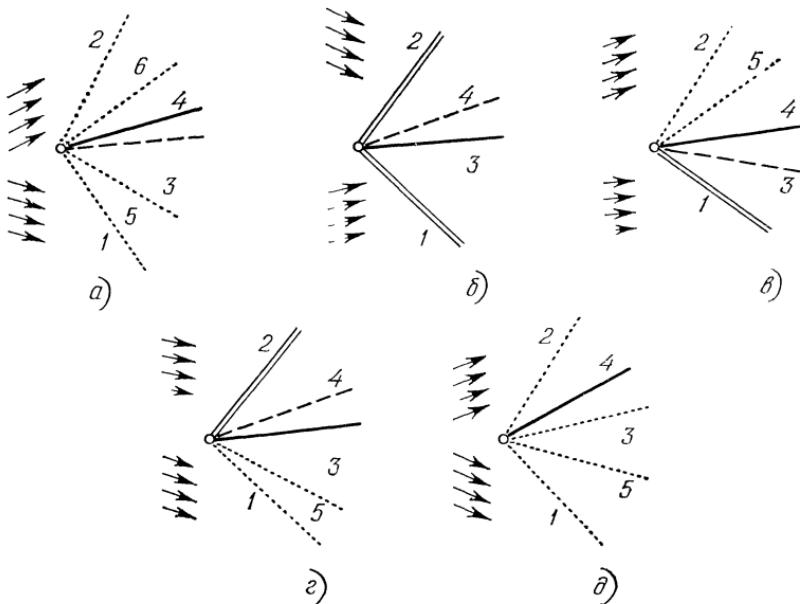


Рис. 19.1.

первого (второго) семейства и ограничивающему область взаимодействия сверху (снизу). В дальнейшем вне зависимости от расположения относительно границы ячейки указанные веера будем именовать «верхним» и «нижним».

Взяв в (19.1) в качестве коэффициента при  $dp$  среднее арифметическое значений во взаимодействующих потоках и произведя затем интегрирование через каждый веер, получим

$$\zeta - \zeta_i \mp m(p - p_i) = 0, \quad (19.2)$$

где верхнему вееру соответствует знак минус и  $i = j + 1/2$ , нижнему — знак плюс и  $i = j - 1/2$ , величины  $\zeta$  и  $p$  — значения после

веера волн разрежения и, наконец,

$$m = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1+\zeta^2}{\rho q^2} V \sqrt{M^2 - 1} \right)_{j-1/2} + \left( \frac{1+\zeta^2}{\rho q^2} V \sqrt{M^2 - 1} \right)_{j+1/2} \right]. \quad (19.3)$$

Учитывая непрерывность давления и направления потоков на тангенциальном разрыве и применяя (19.2) к случаю, изображенному на рис. 19.1, a, получим, что в областях 3 и 4 значения  $p$  и  $\zeta$  определяются формулами

$$\begin{aligned} p &= \frac{p_{j-1/2} + p_{j+1/2}}{2} + \frac{\zeta_{j-1/2} - \zeta_{j+1/2}}{2m}, \\ \zeta &= \zeta_{j-1/2} - m(p - p_{j-1/2}) = \zeta_{j+1/2} + m(p - p_{j+1/2}). \end{aligned} \quad (19.4)$$

После вычисления  $p$  и  $\zeta$  плотность, модуль и компоненты вектора скорости, скорость звука и число Маха находятся по формулам

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_i \left( \frac{p}{p_i} \right)^{1/\kappa}, \quad q = \left[ \frac{\kappa+1}{\kappa-1} - \frac{2\kappa p}{(\kappa-1)\rho} \right]^{1/2}, \\ u &= \frac{q}{\sqrt{1+\zeta^2}}, \quad v = \zeta u, \quad c = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}, \quad M = \frac{q}{c}, \end{aligned} \quad (19.5)$$

где  $i = j - 1/2$  и  $j + 1/2$  при вычислении параметров в областях 3 и 4 соответственно. При получении (19.5) использованы условия постоянства энтропии в каждом веере и постоянства полной энтальпии во всем потоке. При расчете неизоэнергетических течений следует изменить формулу для определения  $q$ , заменив первый член в квадратных скобках на значение удвоенной полной энтальпии  $i$ -го потока.

Если относительные отклонения  $p$  и  $\zeta$ , вычисленных по (19.3) и (19.4), от аналогичных величин с нижними индексами  $j - 1/2$  и  $j + 1/2$  значительны, то следует произвести пересчет найденных величин по итерационным формулам

$$\begin{aligned} p &= \frac{n_{j-1/2}\zeta_{j-1/2} - n_{j+1/2}\zeta_{j+1/2} + m_{j-1/2}p_{j-1/2} + m_{j+1/2}p_{j+1/2}}{m_{j-1/2} + m_{j+1/2}}, \\ \zeta &= n_{j-1/2}\zeta_{j-1/2} - m_{j-1/2}(p - p_{j-1/2}) = \\ &= n_{j+1/2}\zeta_{j+1/2} + m_{j+1/2}(p - p_{j+1/2}), \end{aligned} \quad (19.6)$$

в которых

$$m_i = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1+\zeta^2}{\rho q^2} V \sqrt{M^2 - 1} \right)_i + \left( \frac{1+\zeta^2}{\rho q^2} V \sqrt{M^2 - 1} \right) \right], \quad n_i = 1. \quad (19.7)$$

Второе слагаемое в (19.7) вычисляется по параметрам, найденным в предыдущем приближении. Коэффициенты  $n_i$ , которые в данном случае равны единице, введены в (19.6) для упрощения дальнейшего изложения.

Известно, что для слабых скачков уплотнения связи между приращениями  $p$  и  $\zeta$  с обеих сторон скачка близки к аналогичным связям для простой волны. Поэтому в случае слабых ударных волн  $p$  и  $\zeta$  также определяются по (19.4). В то же время плотность при  $p > p_i$  следует находить не из первого уравнения (19.5), а из аддабаты Гюгонио

$$\rho = \frac{(\kappa - 1) p_i + (\kappa + 1) p}{(\kappa + 1) p_i + (\kappa - 1) p} \rho_i \quad \text{при } p > p_i. \quad (19.8)$$

Здесь  $i = j - 1/2$  при вычислении  $\rho$  в области 3 на рис. 19.1, б и 19.1, в и  $i = j + 1/2$  при вычислении  $\rho$  в области 4 на рис. 19.1, б и 19.1, г. Остальные параметры в указанных областях, как и при течении разрежения, определяются по (19.5). Формулы (19.4), (19.5) и (19.8) в качестве первого приближения используются также и в случае ударных волн произвольной интенсивности. При этом расчет  $p$  и  $\zeta$  в следующих приближениях должен производиться по формулам, которые получаются из соотношений на косом скачке. Пусть, например, имеет место ситуация, изображенная на рис. 19.1, б. Тогда, если  $\delta_i$  — приращение угла наклона скорости в косом скачке ( $\delta_i > 0$ ), то условие совпадения направлений потоков в областях 3 и 4 записывается в виде

$$\tan(\theta_{j-1/2} - \delta_{j-1/2}) = \tan(\theta_{j+1/2} + \delta_{j+1/2})$$

или

$$\frac{\zeta_{j-1/2} - \tan \delta_{j-1/2}}{1 + \zeta_{j-1/2} \tan \delta_{j-1/2}} = \frac{\zeta_{j+1/2} + \tan \delta_{j+1/2}}{1 - \zeta_{j+1/2} \tan \delta_{j+1/2}}. \quad (19.9)$$

С другой стороны, из соотношения на косом скачке получаем

$$\tan \delta_i = g_i(p - p_i), \quad (19.10)$$

где  $i = j \mp 1/2$  и

$$g_i = (\rho_i q_i^2 + p_i - p)^{-1} \left[ \frac{2\kappa M_i^2 p_i}{(\kappa - 1) p_i + (\kappa + 1) p} - 1 \right]^{1/2}. \quad (19.11)$$

Подставив выражение для  $\tan \delta_i$  из (19.10) в числители равенства (19.9) и разрешая полученное уравнение относительно  $p$ , вновь придем к первой формуле (19.6), коэффициенты  $m_i$  и  $n_i$  в которой теперь равны

$$m_i = g_i n_i, \quad n_i = \frac{1}{1 \pm \zeta_i \tan \delta_i}. \quad (19.12)$$

Здесь  $g_i$  и  $\tan \delta_i$  определяются по (19.10) и (19.11); верхний знак отвечает  $i = j - 1/2$ , а нижний  $i = j + 1/2$ ; при вычислении коэффициентов используется значение  $p$ , найденное в предыдущем

приближении. При  $m_i$  и  $n_i$ , введенных в соответствии с (19.12), сохраняется и вторая формула (19.6), определяющая  $\zeta$ . Этот результат вытекает из (19.9) и (19.10), если учесть, что как левая, так и правая части (19.9) равны  $\zeta$ .

Аналогичным образом рассматриваются и другие случаи, изображенные на рис. 19.1. Если реализуется любая из ситуаций, показанных на рис. 19.1, *в* и 19.1, *г*, когда при взаимодействии образуются ударная волна и веер волн разрежения, то формулы (19.6) сохраняются при условии, что  $m_i$  и  $n_i$  в них рассчитываются либо по (19.7), либо по (19.12). Так, в случае рис. 19.1, *в*, когда  $p_{i-1/2} < p < p_{i+1/2}$ , при  $i = j - 1/2$  используются формулы (19.12), а при  $i = j + 1/2$  — формулы (19.7). В случае, изображенном на рис. 19.1, *г*, когда  $p_{j+1/2} < p < p_{j-1/2}$ , положение меняется на обратное. Сказанное следует иметь в виду и при определении  $\rho$  в областях 3 и 4, когда для волны разрежения используется первая формула из (19.5), а для скачка — формула (19.8). Наконец, отметим, что появление области вакуума (рис. 19.1, *д*), как и отсутствие рассмотренных выше автомодельных режимов взаимодействия сверхзвуковых потоков, свидетельствует о слишком большом различии средних параметров на соседних отрезках слоя  $x = x_0$ , т. е. о необходимости увеличения числа расчетных интервалов  $J$ . Поэтому такие ситуации здесь рассматриваться не будут.

«Большие» величины, входящие в разностные уравнения (18.3), берутся равными параметрам на соответствующем луче (границе ячейки) области взаимодействия. Если указанный луч попадает в область веера волн разрежения, то для определения «больших» величин достаточно использовать линейную интерполяцию по угловому коэффициенту данного луча. При этом угловым коэффициентам границ веера (характеристик первого и второго семейства) соответствуют значения параметров либо известных (из областей 1 и 2 на рис. 19.1), либо найденных по приведенным выше формулам.

Особого рассмотрения требуют границы крайних ячеек, совпадающие с границами рассчитываемой области. Пусть, например, указанная граница — твердая стенка (или ось симметрии), уравнение которой, а следовательно, и ее наклон, т. е.  $\zeta = \zeta(x)$ , известны. В этом случае параметры на границе находятся из решения задачи обтекания выпуклой или вогнутой прямолинейной стенки равномерным сверхзвуковым потоком, параметры которого равны малым величинам с нижними индексами  $i = 1/2$  и  $i = J - 1/2$  для нижней и верхней границы соответственно. В итоге для определения давления на стенку получим формулу

$$p = p_i \pm \frac{n_i \zeta_i - \zeta}{m_i}. \quad (19.13)$$

Здесь

$$\zeta \equiv \zeta(x_0 + 0,5h_x) \approx [r^\pm(x_0 + h_x) - r^\pm(x_0)]h_x^{-1}, \quad (19.14)$$

а коэффициенты  $m_i$  и  $n_i$  вычисляются по (19.7), если  $p < p_i$ , и по (19.12), если  $p > p_i$ . При этом верхние знаки в (19.12) — (19.14) и индекс  $i = J - 1/2$  соответствуют верхней границе, а нижние знаки и индекс  $i = 1/2$  — нижней границе. В первом приближении коэффициенты можно вычислять по (19.7) с заменой второго слагаемого первым в выражении для  $m_i$ .

Тем же путем в случае струи, на границе которой задано давление  $p$ , найдем, что

$$\zeta = n_i \xi_i \mp m_i(p - p_i). \quad (19.15)$$

Выбор и определение коэффициентов, знаков и индексов в (19.15) аналогичны (19.13).

Если границей области является ударная волна (или характеристика), перед которой параметры потока известны, то процедура определения «больших» величин на ней полностью совпадает с описанной выше для границ внутренних ячеек.

Конечные формулы (19.2), описывающие центрированные волны и использованные при выводе ряда соотношений данного параграфа, получены приближенным интегрированием (19.1) с заменой коэффициента при  $d\bar{p}$  некоторой средней величиной. В ряде случаев (особенно при больших сверхзвуковых скоростях) сильное изменение плотности и числа Маха делает такую замену весьма грубой. Если, однако, (19.1) переписать с использованием вместо  $p$  новой переменной

$$\bar{p} = p^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}, \quad (19.16)$$

то коэффициент при  $d\bar{p}$  оказывается слабо меняющейся функцией и приближенное интегрирование становится более точным. Отметим, что при численном интегрировании уравнений газовой динамики (а также при построении линейной теории) использование  $\bar{p}$  еще более эффективно для указанных целей, чем замена  $p$  на  $\ln p$ , которая успешно применяется для тех же целей.

Формулы, которые получаются для вычисления  $\bar{p}$  и  $\zeta$ , совпадают с (19.2), (19.4), (19.6), (19.8), (19.10), (19.13) и (19.15), если в последних заменить  $p$  на  $\bar{p}$ , а коэффициенты  $m$ ,  $m_i$  и  $g_i$  — на  $\bar{m}$ ,  $\bar{m}_i$  и  $\bar{g}_i$ , равные

$$\begin{aligned} \bar{m} &= \frac{V_\kappa}{(\kappa-1)} \left\{ \left( \frac{1+\xi^2}{qM} \left[ \frac{p^{1/\kappa}}{\rho} (M^2 - 1) \right]^{1/2} \right)_{j-1/2} + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1+\xi^2}{qM} \left[ \frac{p^{1/\kappa}}{\rho} (M^2 - 1) \right]^{1/2} \right)_{j+1/2} \right\}, \quad \bar{m}_i = \bar{g}_i n_i \quad \text{при } p > p_i, \\ \bar{g}_i &= \frac{p - p_i}{(\bar{p} - \bar{p}_i)(\rho_i q_i^2 + p_i - p)} \left[ \frac{2\kappa M_i^2 p_i}{(\kappa-1)p_i + (\kappa+1)p} - 1 \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

где  $n_i$  определяется по (19.12). При  $p < p_i$  коэффициент  $\bar{m}_i$  находится по формуле для  $m$ , в которой следует опустить индекс  $j + 1/2$ , а  $j - 1/2$  заменить на  $i$ . После определения  $\bar{p}$  давление  $p$  в соответствии с (19.16) находится по формуле

$$p = \bar{p}^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}},$$

а остальные неизвестные, как и прежде,— по соотношениям (19.5) и (19.8).

Многочисленные расчеты подтвердили приведенные выше соображения об эффективности замены (19.16). Поэтому все результаты как двумерных, так и пространственных течений, которые будут приведены в дальнейшем, были получены с использованием такой замены при вычислении «больших» величин.

Кроме значений «больших» величин, из решения задачи о взаимодействии мы должны вычислить угловые коэффициенты ударных волн или крайних характеристик волн разрежения, которые используются при определении допустимого шага по координате  $x$  в формуле (18.15) для обеспечения устойчивости счета.

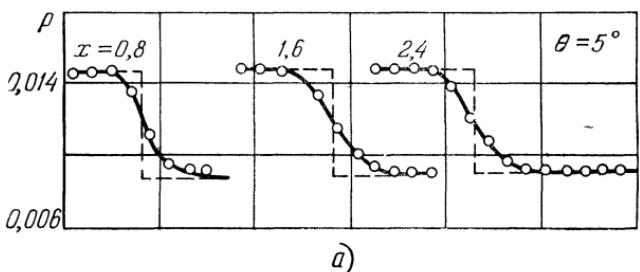
## § 20. Примеры, иллюстрирующие точность стационарной схемы

Расчет косого скачка уплотнения и центрированной волны разрежения. Течение в осесимметричном сопле Лаваля и истечение недорасширенной сверхзвуковой струи в затопленное пространство.

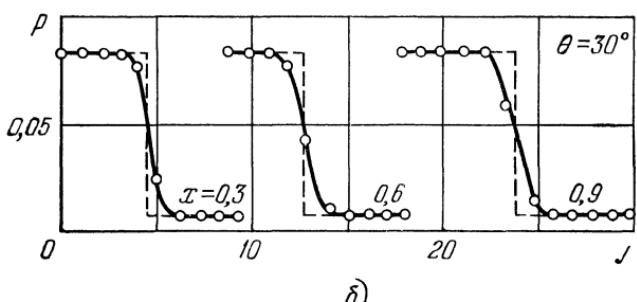
Ниже приведены некоторые численные результаты, полученные при помощи разностной схемы, описанной в §§ 18 и 19. Эти результаты, носящие методический характер, приводятся с целью дать читателю представление о точности метода, степени размазывания скачков уплотнения, возможности сквозного счета центрированных волн разрежения и т. п. Во всех рассмотренных примерах поток в начальном сечении ( $x = 0$ ) был равномерным и параллельным оси  $x$ , а показатель адиабаты газа  $\kappa = 1,4$ .

Первые примеры относятся к расчету течения в плоском канале, высота которого при  $x = 0$  принята за единицу длины. Обе стенки канала прямолинейны, причем верхняя ( $y \equiv 1$ ) параллельна оси канала, а нижняя наклонена к ней под углом  $\theta$ . При  $\theta > 0$  нижняя стенка обтекается с образованием косого скачка уплотнения, а при  $\theta < 0$ —центрированной волны разрежения. Результаты расчета течения со скачками уплотнения, отвечающие углам  $\theta = 5^\circ$  и  $30^\circ$  и набегающему потоку с числом Маха  $M_0 = 4$ , приведены на рис. 20.1, *a*, *b*. На этом рисунке для различных  $x$  в зависимости от номера точки  $j$  показаны распре-

деления давления, отнесенного к  $\rho_* q_*$ , где  $\rho_*$  и  $q_*$  — критические плотность и скорость набегающего потока. Сплошные кривые проведены через точки (кружки), полученные в процессе счета, штриховыми линиями дано точное решение. Видно, что даже скачок сравнительно малой интенсивности ( $\theta = 5^\circ$ ) размазывается не более чем на пять расчетных ячеек. Для скачка большей



a)



б)

Рис. 20.1.

интенсивности ( $\theta = 30^\circ$ ) эффект «размазывания» уменьшается. Наблюдаемый на тех же рисунках сдвиг «средней линии» размазанного скачка относительно его точного положения на величину порядка  $h_r$ , обусловлен погрешностями расчета течения вблизи точки излома стенки и присущ всем методам сквозного счета (независимо от порядка аппроксимации разностной схемы).

Достаточно полное представление о точности счета параметров газа за косым скачком дают таблицы 1 и 2, в которых  $f_k$  — любой из приведенных в первом столбце параметров в соответствующей точке разностной сетки, причем  $k = j$  отвечает точке, расположенной примерно в «середине» размазанного скачка. Индекс 0 приписан параметрам набегающего потока,  $c$  — значениям, получающимся из точного решения задачи об обтекании клина, а  $\Delta f \equiv |f_c - f_{j-2}| / f_c$  — относительная ошибка счета. Таблица 1 соответствует  $M_0 = 3,0$  и  $p_c/p_0 = 6,35$ , таблица 2 —

Таблица 1

 $M_0 = 3,0$ 

$f$	$f_0$	$f_{j-2}$	$f_{j+1}$	$f_j$	$f_{j-1}$	$f_{j-2}$	$f_c$	$\Delta f \cdot 10^4$
$p$	0,0368	0,0372	0,0453	0,1140	0,2244	0,2340	0,2388	7,0
$\rho$	0,1203	0,1212	0,1365	0,2329	0,3697	0,3809	0,3808	4,0
$u$	1,9640	1,9620	1,9149	1,5407	1,1562	1,1290	1,1299	4,0
$v$	0,0000	0,0047	0,0894	0,4464	0,6445	0,6519	0,6519	0,7

Таблица 2

 $M_0 = 9,19$ 

$f$	$f_0$	$f_{j+2}$	$f_{j+1}$	$f_j$	$f_{j-1}$	$f_{j-2}$	$f_c$	$\Delta f \cdot 10^8$
$p \cdot 10^4$	0,5596	0,5596	0,7049	8,9890	20,9800	21,4500	21,4700	0,8
$\rho \cdot 10^2$	0,1167	0,1167	0,1283	0,3395	0,5992	0,6084	0,6082	0,2
$u$	2,3800	2,3800	2,3693	1,9270	1,6384	1,6270	1,6271	0,1
$v$	0,0000	0,000014	0,0418	0,6580	0,9301	0,9405	0,9388	2,0

$M_0 = 9,19$  и  $p_c/p_0 = 38,4$  (в обоих случаях  $\theta = 30^\circ$ ). Видно, что в представленных примерах, которые являются типичными, относительная ошибка по всем величинам не превышает 0,002.

Результаты расчета центрированной волны для  $M_0 = 2,0$  и  $M_0 = 4,0$  при угле поворота потока на угол  $\theta = -30^\circ$  показаны на рис. 20.2, а, б и 20.3, а, б, на которых для двух значений  $x$ , отнесенных к высоте канала, даны распределения  $p$  и  $\rho$  по автомодельной переменной  $r/x$ . Здесь  $r$  отсчитывается от точки излома по нормали к оси  $x$ . Штриховыми линиями на указанных рисунках приведены точные распределения, которые от  $x$  не зависят. Совпадение численных результатов с точным решением улучшается с ростом  $x$ , что в данном случае соответствует увеличению числа ячеек, попадающих в область центрированной волны (общее число ячеек по  $r$  было взято равным 100). Отметим, что возрастание погрешности в определении  $\rho$  вблизи стенки связано с ошибками «сквозного» счета течения в непосредственной близости от излома, когда вся центрированная волна попадает в несколько расчетных ячеек (сначала — в одну). При отказе от подробного рассмотрения течения вблизи особенности (точки излома) указанные ошибки присущи любой разностной схеме, допускающей такой сквозной счет. Важно подчеркнуть, что с ростом  $x$  ошибка в вычислении  $p$  быстро уменьшается, а в определении  $\rho$  остается лишь в нескольких ячейках около стенки. Последнее свидетельствует о том, что вне малой окрестности

излома используемая разностная схема с достаточной точностью обеспечивает сохранение энтропии вдоль линий тока.

С целью оценки точности результатов проводилось также сравнение с результатами, полученными по «обратной» схеме метода характеристик, когда счет также ведется по слоям  $x = \text{const}$ .

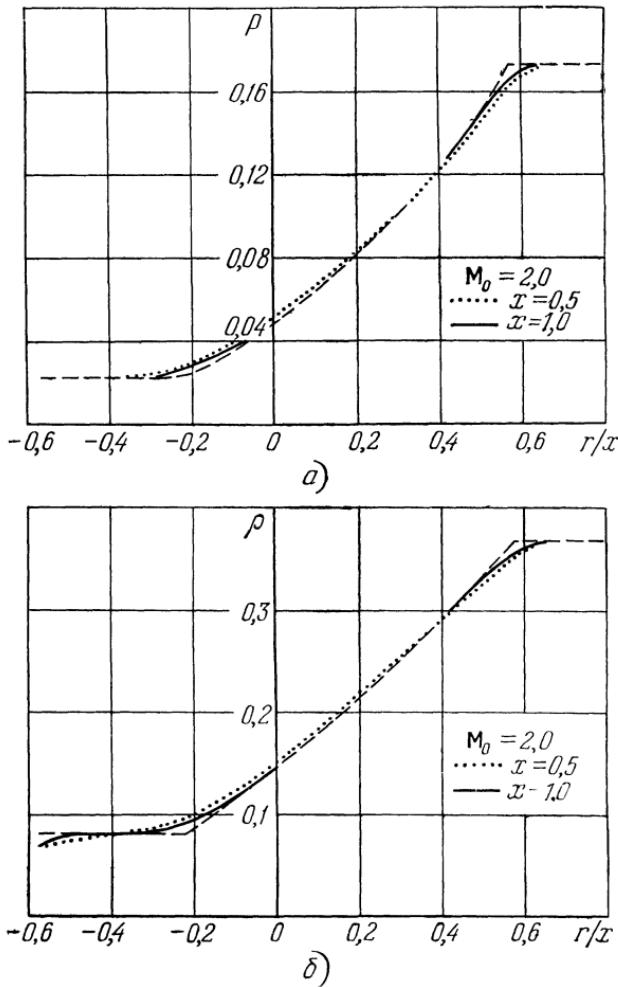
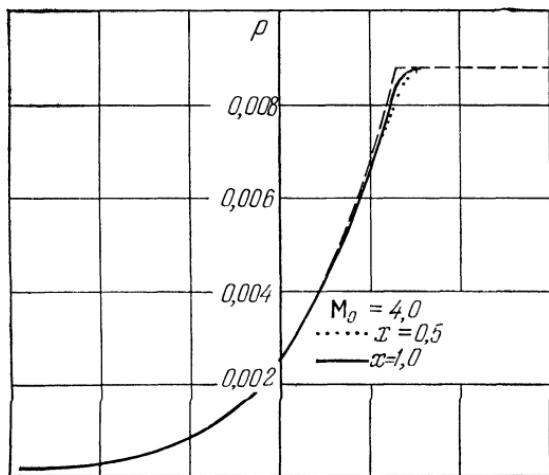


Рис. 20.2.

На рис. 20.4 представлено распределение  $\rho$  в некотором характеристическом сечении осесимметричного сопла Лаваля с конической сверхзвуковой частью (подробное описание формы сопла и ряда других деталей для этого и последующих примеров приведено в [66]). Сплошной кривой изображено распределение, получен-

ное по рассматриваемой разностной схеме, а штриховой — методом характеристик. Видно, что максимальное отличие имеет



a)

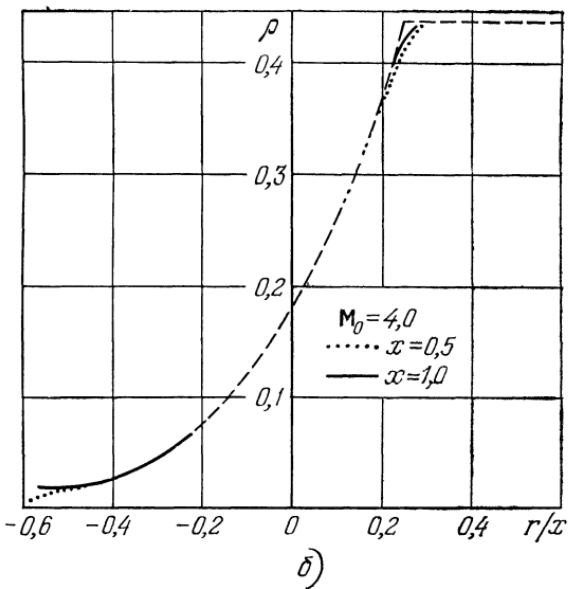


Рис. 20.3.

место "внутри поля течения в области немонотонности кривых. В остальной части потока отличие существенно меньше. В итоге, например, относительная погрешность вычисления интеграла

сил давления, действующих на стенку расширяющегося участка сопла со степенью расширения (по площади) порядка 25, не превышает 0,01.

Последний результат данного параграфа относится к истечению недорасширенной осесимметричной струи в затопленное про-

странство при  $n = p_0/p_e = 20$  и  $M_0 = 3,0$ , где  $p_e$  — давление в затопленном пространстве, а индекс нуль приписан параметрам на срезе сопла. На рис. 20.5 для этого случая показаны границы струи и висячий скачок (двойная линия), а также для нескольких сечений даны эпюры давления. На том же рисунке кружками нанесены точки границы и скачка, взятые из [23], где расчет велся методом характеристик.

Наряду со сравнением результатов, полученных различными методами, для оценки точности счета обычно привлекают-

ся так называемые методы «внутреннего» контроля (счет с разным числом точек, проверка различных интегралов и т. п.). Приведем

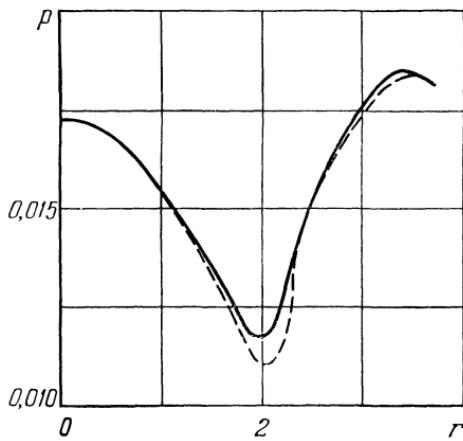


Рис. 20.4.

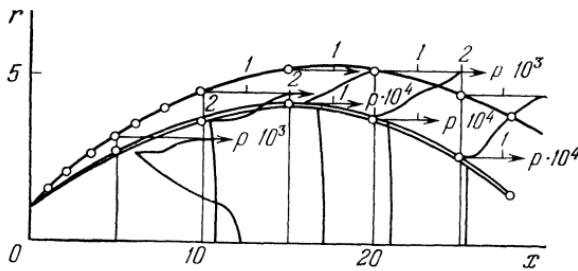


Рис. 20.5.

некоторые сведения такого типа. На рис. 20.6 нанесены кривые распределения  $p$  в поперечных сечениях осесимметричной недорасширенной струи ( $M_0 = 3,0$ ,  $n = 2,0$ ,  $r^0$  — отношение ординаты к ординате границы струи, давление отнесено к критическому скоростному напору, а координата  $x$  — к радиусу сопла), полученные при различном числе расчетных ячеек. Близость сплошных ( $J = 30$ ) и штриховых ( $J = 60$ ) кривых свидетельствует о достаточно высокой точности метода. Проверка выполнения интеграла изэнтропичности ( $p/\rho^x = \text{const}$ ) показала, что при об-

текании достаточно плавных контуров (без точек излома или участков, радиус кривизны которых ненамного больше размера ячейки) соответствующие относительные ошибки в задачах, не содержащих ударных волн, не превышают 2—3%, причем это обусловлено в основном погрешностями в вычислении плотности, а не давления. Заметим, наконец, что исходные уравнения взяты в форме (18.2), которая не является полностью «дивергентной». Это позволяет оценить точность счета, вычисляя невязки в условиях сохранения суммарных потоков массы и импульса. В приведенных выше и в дальнейших примерах (включая расчеты пространственных сверхзвуковых течений) использованное число расчетных ячеек обеспечивало выполнение указанных законов с точностью до 1—2%.

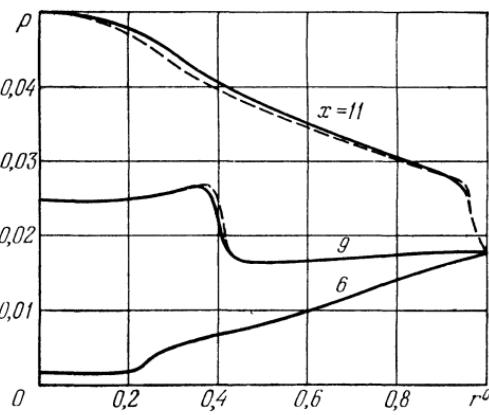


Рис. 20.6.

## § 21. Неявная одномерная схема для квазилинейных задач

Интегральные законы сохранения и квазилинейные уравнения. Общее описание схемы с пересчетом. Система неявных уравнений на промежуточном слое. Реализация граничных условий. Явный счет на границах счетных областей. Учет подвижности сетки.

Как уже неоднократно отмечалось, рассматриваемые нами разностные схемы основываются на интегральных равенствах, выражающих те или иные физические законы. Будем предполагать их заданными в форме

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B}(x, t, \mathbf{u}) dx - \mathbf{C}(x, t, \mathbf{u}) dt = \iint_{\Omega} \mathbf{F}(x, t, \mathbf{u}) dx dt, \quad (21.1)$$

где  $\mathbf{u}$  — искомая вектор-функция размерности  $m^*$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{F}$  — заданные вектор-функции той же размерности, компоненты которых зависят от  $x$ ,  $t$ ,  $\mathbf{u}$ . Подразумевается, что интегрирование в (21.1) осуществляется по произвольной области  $\Omega$  с контуром  $\Gamma$ . Интегральным законам (21.1) соответствует тогда квазилинейная система  $m^*$  уравнений, которой должны удовлетворять гладкие решения

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{F} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x}, \quad (21.2)$$

где  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{u}}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{u}}$  обозначены квадратные матрицы порядка  $m^*$ , элементы которых представляют частные производные компонент  $B_m(x, t, \mathbf{u})$ ,  $C_m(x, t, \mathbf{u})$  вектор-функций  $\mathbf{B}(x, t, \mathbf{u})$ ,  $\mathbf{C}(x, t, \mathbf{u})$  по переменным  $u_n$ , являющимся компонентами искомой вектор-функции  $\mathbf{u}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{u}} = \left\| \frac{\partial B_m}{\partial u_n} \right\|, \quad \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{u}} = \left\| \frac{\partial C_m}{\partial u_n} \right\|, \quad m, n = 1, \dots, m^*.$$

Будем предполагать, что матрица  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{u}}$  не вырождается. Тогда система уравнений (21.2) может быть переписана в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{f}, \quad (21.3)$$

где

$$A = \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{u}} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{u}}, \quad \mathbf{f} = \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{u}} \right)^{-1} \left[ \mathbf{F} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x} \right].$$

Как уже отмечалось в линейном случае, рассмотренном в §§ 9—11, мы предполагаем, что система уравнений (21.3) симметризуется, т. е. умножением на некоторую положительно определенную симметричную матрицу и, может быть, переходом к новым неизвестным функциям приводится к симметрическому виду. Для квазилинейных систем уравнений такая симметризация не всегда проста. Для уравнений газовой динамики, которые в первую очередь являются предметом нашего внимания, вопрос о симметризации будет рассмотрен в § 22 сразу для пространственного случая.

При конструировании неявной разностной схемы для системы уравнений (21.3) конкретное осуществление симметризации нам не потребуется. Мы будем пользоваться лишь следствием из факта гиперболичности системы (21.3), заключающимся в том, что невырожденным преобразованием неизвестных функций  $\mathbf{u} = \Lambda \mathbf{v}$  она может быть приведена к каноническому виду с диагональной матрицей, элементы которой  $\mu_m = \mu_m(x, t, \mathbf{u})$  суть корни характеристического уравнения

$$\det \| A - \mu I \| = 0.$$

Элементы матрицы преобразования  $\Lambda$  также являются функциями  $x, t, \mathbf{u}$ .

Заметим, что фактическое вычисление корней  $\mu_m$  соответствующей матрицы  $\Lambda$ , как мы увидим в дальнейшем, придется производить только в двух точках на границах счетной области. Однако возможность такого преобразования в любой точке  $(x, t, \mathbf{u})$  необходима для корректности постановки задач, численное решение которых мы намерены осуществлять.

Речь идет об отыскании решения (как правило, обобщенного) уравнений (21.2) с начальными данными  $\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x)$ , заданными на отрезке  $x_1 \leq x \leq x_{II}$ , и некоторыми краевыми условиями, которые мы пока не будем конкретизировать, уточнив их вид в процессе описания разностной схемы.

В настоящем параграфе мы рассмотрим изменения технологического характера, которые необходимо внести в неявную схему, описанную в § 11, в связи с квазилинейностью задачи. По возможности мы будем придерживаться прежних обозначений. Напомним, что переход от величин  $\mathbf{u}_{j-1/2}$  на «нижнем» слое  $t = t_0$  к величинам  $\mathbf{u}^{j-1/2}$  на «верхнем» слое осуществляется в три этапа:

1. Расчет вспомогательных величин  $\bar{\mathbf{U}}_j$  на промежуточном слое путем решения неявной системы разностных уравнений.

2. Локальное слаживающее усреднение величин  $\bar{\mathbf{U}}_j$ , в результате которого получаются величины  $\mathbf{U}_j$ .

3. Пересчет, основанный на интегральных законах сохранения.

Сосредоточим пока свое внимание на составлении системы разностных уравнений для величин  $\bar{\mathbf{U}}_j$  на промежуточном слое. Напомним важное обстоятельство, что при этом можно не заботиться о законах сохранения, выполнение которых будет обеспечено пересчетом на третьем этапе. Это позволяет нам на первом этапе опираться на недивергентные уравнения (21.3). Кроме того, мы будем прибегать к линеаризации по  $\mathbf{u}$  уравнений (и граничных условий, если они нелинейны).

При составлении разностных уравнений на промежуточном слое так же, как и в § 11, наряду с величинами  $\bar{\mathbf{U}}_j$  временно введем величины  $\bar{\mathbf{U}}_{j-1/2}$  с полуцелыми индексами. По аналогии с (11.5) и (11.6) записываем для них уравнения, которые в однородном случае ( $\mathbf{f} \equiv 0$ ) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\mathbf{U}}_{j-1/2} - \mathbf{u}_{j-1/2}}{\omega\tau} + A_{j-1/2} \frac{\bar{\mathbf{U}}_j - \bar{\mathbf{U}}_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} &= 0, \\ \frac{\bar{\mathbf{U}}_{j+1/2} - \mathbf{u}_{j+1/2}}{\omega\tau} + A_{j+1/2} \frac{\bar{\mathbf{U}}_{j+1} - \bar{\mathbf{U}}_j}{x_{j+1} - x_j} &= 0 \end{aligned} \quad (21.4)$$

в интервалах  $j - 1/2$  и  $j + 1/2$  соответственно.

Равномерность сетки мы теперь не предполагаем, т. е. узлы  $x_j$  могут быть расположены произвольно. Параметр  $\omega$ , как и раньше в (11.5), (11.6), обозначает «высоту» промежуточного слоя. Условно можно говорить, что промежуточный слой отвечает времени  $t = t_0 + \omega\tau$ . Обычно выбирается  $\omega = 0,5$  или  $\omega = 1$ .

Поскольку матрица  $A$  в (21.3) зависит от  $x$ ,  $t$ ,  $\mathbf{u}$ , матрицы  $A_{j-1/2}$  и  $A_{j+1/2}$  в уравнениях (21.4) вычисляются по правилу

$$A_{j-1/2} = A(x_{j-1/2}, t_0, \mathbf{u}_{j-1/2}), \quad A_{j+1/2} = A(x_{j+1/2}, t_0, \mathbf{u}_{j+1/2}) \quad (21.5)$$

с использованием известных уже величин «нижнего» слоя  $\{\mathbf{u}_{j-1/2}\}$ , отнесенных к точкам  $x_{j-1/2} = \frac{1}{2}(x_j + x_{j-1})$ . Разностное уравнение в узле  $x_j$  получается «интерполяцией» уравнений (21.4):

$$\frac{\bar{\mathbf{U}}_j - \mathbf{u}_j}{\omega\tau} + A_j \frac{\bar{\mathbf{U}}_{j+1/2} - \bar{\mathbf{U}}_{j-1/2}}{\frac{1}{2}(x_{j+1} - x_{j-1})} = 0, \quad (21.6)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_j &= \theta_j \mathbf{u}_{j-1/2} + (1 - \theta_j) \mathbf{u}_{j+1/2}, & \theta_j &= \frac{x_{j+1} - x_j}{x_{j+1} - x_{j-1}}, \\ A_j &= \theta_j A_{j-1/2} + (1 - \theta_j) A_{j+1/2}, \end{aligned}$$

Исключая из (21.6) «полузелые» величины  $\bar{\mathbf{U}}_{j-1/2}$ ,  $\bar{\mathbf{U}}_{j+1/2}$  с помощью уравнений (21.4), получим уравнение, связывающее три соседних вектора  $\bar{\mathbf{U}}_{j-1}$ ,  $\bar{\mathbf{U}}_j$ ,  $\bar{\mathbf{U}}_{j+1}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\mathbf{U}}_j - \mathbf{u}_j}{\omega\tau} + A_j \frac{\mathbf{u}_{j+1/2} - \mathbf{u}_{j-1/2}}{\frac{1}{2}(x_{j+1} - x_{j-1})} \\ - \frac{\omega\tau}{\frac{1}{2}(x_{j+1} - x_{j-1})} A_j \left[ A_{j+1/2} \frac{\bar{\mathbf{U}}_{j+1} - \bar{\mathbf{U}}_j}{x_{j+1} - x_j} - A_{j-1/2} \frac{\bar{\mathbf{U}}_j - \bar{\mathbf{U}}_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \right] = G_j, \end{aligned} \quad (21.7)$$

где для однородного случая  $G_j = \mathbf{f}_j = 0$ . В случае неоднородной системы уравнений (21.3) приписываем в уравнение (21.7) правую часть следующего вида:

$$G_j = H_j \bar{\mathbf{U}}_j + \mathbf{g}_j,$$

где матрица  $H_j$  и вектор  $\mathbf{g}_j$  получаются интерполяцией:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_j &= \theta_j \mathbf{g}_{j-1/2} + (1 - \theta_j) \mathbf{g}_{j+1/2}, \\ H_j &= \theta_j H_{j-1/2} + (1 - \theta_j) H_{j+1/2}, \end{aligned}$$

$H_{j-1/2}$ ,  $\mathbf{g}_{j-1/2}$  вычисляются с помощью известных величин на «нижнем» слое, возникшая в результате линеаризации правой части  $\mathbf{f}(x, t, \mathbf{u})$  уравнения (21.3). Величины  $\bar{\mathbf{U}}_{j-1/2}$  с полуцелыми индексами сыграли свою роль при выводе уравнений (21.7) и далее в расчете не участвуют.

Система уравнений (21.7), выписанных во всех внутренних узлах  $j = 1, \dots, J-1$ , должна быть дополнена уравнениями для левого и правого концов счетной области. Для этой цели система исходных уравнений (21.3) переписывается в каноническом виде («в характеристиках») путем умножения на специальным образом подобранныю матрицу  $\Lambda^*$  (см. § 9):

$$\Lambda^* \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \Lambda^* A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \Lambda^* \mathbf{f}. \quad (21.8)$$

На левом конце  $x_0 = x_1$  по аналогии с линейным случаем, описанным в § 11, выписываются разностные уравнения вида

$$\Lambda_{1/2}^* \frac{\frac{1}{2}(\bar{U}_0 + \bar{U}_1) - u_{1/2}}{\omega t} + \Lambda_{1/2}^* A_{1/2} \frac{\bar{U}_1 - \bar{U}_0}{x_1 - x_0} = \Lambda_{1/2}^* H_{1/2} \frac{\bar{U}_0 + \bar{U}_1}{2} + \Lambda_{1/2}^* g_{1/2}, \quad (21.9)$$

где

$$\Lambda_{1/2}^* = \Lambda^* \left( \frac{x_0 + x_1}{2}, t_0, u_{1/2} \right).$$

Из этих соотношений (21.9) должны быть оставлены только те, для которых наклоны характеристик

$$\mu_m = \mu_m \left( \frac{x_0 + x_1}{2}, t_0, u_{1/2} \right) \leq 0,$$

т. е. соотношения, отвечающие «приходящим» на левую границу характеристикам. Остальные отвечают «уходящим» характеристикам и должны быть заменены граничными условиями. В случае, если граничные условия заданы в нелинейной форме, производится их линеаризация, в результате которой они записываются в виде

$$\Phi_1 \bar{U}_0 = g_1, \quad (21.10)$$

где  $\Phi_1$  — прямоугольная матрица, имеющая  $m^*$  столбцов, а число ее строк  $m_1$  равно числу положительных значений среди собственных чисел матрицы  $\Lambda_{1/2}^*$ ;  $g_1$  — вектор размерности  $m_1$ .

Уравнения на правом конце выписываются совершенно аналогично с привлечением матрицы

$$\Lambda_{J-1/2}^* = \Lambda^* \left( \frac{x_J + x_{J-1}}{2}, t_0, u_{J-1/2} \right).$$

Обращаем внимание на следующее обстоятельство. Поскольку собственные значения  $\mu_m = \mu_m(x, t, u)$  матрицы  $A$  зависят не только от точки  $(x, t)$ , но и от самого решения  $u(x, t)$ , не исключена возможность, что в процессе самого расчета конкретной задачи может возникнуть необходимость изменения числа граничных условий в граничной точке. Само собой разумеется, что задаваемые граничные условия после линеаризации должны быть линейно независимы с соотношениями вида (21.9), которые мы записываем для «приходящих» характеристик.

Все изложенное создает довольно громоздкую и сложную систему умозрительных предпосылок, надежность которых, по-видимому, можно проверить только экспериментальным путем, как правило, путем анализа результатов, получаемых в ходе расчета конкретной задачи. В связи с этим ниже мы рассмотрим несколько

другой подход к решению вопроса о граничных условиях, применительно к уравнениям газовой динамики. А пока вернемся к нашему описанию неявной схемы.

Если все указанные выше предпосылки выполнены, то векторные уравнения (21.7) во внутренних узлах  $j = 1, \dots, J - 1$ , векторное уравнение (21.9), в котором часть соотношений заменена линеаризованными граничными условиями (21.10) на левой границе, и аналогичное векторное уравнение на правой границе образуют замкнутую систему разностных уравнений, по своей структуре совпадающую с системой (11.15) для линейной гиперболической системы уравнений. Ее решение может быть осуществлено прогонкой точно так же, как было описано в § 11.

Как следует из описанной в начале параграфа схемы расчета шага, полученные на промежуточном слое величины  $\bar{U}_j$  подвергаются затем сглаживающему усреднению. По аналогии с формулой (11.3) для линейного случая, будем осуществлять его по формуле

$$U_j = (1 - \alpha) \bar{U}_j + \alpha [\theta_j \bar{U}_{j-1} + (1 - \theta_j) \bar{U}_{j+1}], \quad (21.11)$$

в которой коэффициент  $\theta_j = \frac{x_{j+1} - x_j}{x_{j+1} - x_{j-1}}$  отражает неравномерность расстановки узлов сетки. Числовой параметр  $\alpha$  будем задавать, исходя из ограничений  $0 \leq \alpha \leq 0,5$ , которые были обоснованы в линейном случае. Сглаживающие формулы (21.11) применяются во внутренних узлах сетки  $j = 1, \dots, J - 1$ , а в граничных узлах оставляем полученные  $\bar{U}_j$  без изменений:

$$U_0 = \bar{U}_0, \quad U_J = \bar{U}_J.$$

Расчет шага завершается пересчетом, в результате которого получаются значения  $\mathbf{u}^{j-1/2}$  на верхнем слое. Пересчет осуществляется на основе интегральных законов (21.1), с которых мы начали изложение настоящего параграфа. Применение их к отдельному интервалу сетки  $x_{j-1} < x < x_j$  в течение интервала времени от  $t_0$  до  $t_0 + \tau$  приводит к векторному равенству такого вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x_{j-1/2}, t_0 + \tau, \mathbf{u}^{j-1/2}) = \\ = \mathbf{B}(x_{j-1/2}, t_0, \mathbf{u}_{j-1/2}) - \frac{\tau}{x_j - x_{j-1}} [\mathbf{C}(x_j, t_0, \mathbf{U}_j) - \mathbf{C}(x_{j-1}, t_0, \mathbf{U}_{j-1})] + \\ + \tau \mathbf{F}(x_{j-1/2}, t_0, \mathbf{u}_{j-1/2}). \end{aligned} \quad (21.12)$$

Как обычно, мы отнесли величины  $\mathbf{u}$  при вычислении вектор-функции  $\mathbf{F}$  в уравнении (21.12) к «нижнему» слою для упрощения. Это не обязательно, а в некоторых случаях целесообразно брать  $\mathbf{u}^{j-1/2}$  с «верхнего» слоя или величины  $\frac{1}{2} (\mathbf{u}_{j-1/2} + \mathbf{u}^{j-1/2})$ .

В общем случае (21.12) представляет нелинейную систему из  $m^*$  уравнений относительно величин  $u^{i-1/2}$ , и ее решение, может быть, придется осуществлять каким-нибудь итерационным методом. В случае системы уравнений нестационарной одномерной газовой динамики (12.1), замкнутой уравнением состояния идеального газа, искомая вектор-функция  $\mathbf{u}$  имеет три компоненты  $(\rho, u, p)$ , вектор-функция  $\mathbf{B}$  в законах сохранения имеет компоненты  $\rho$ ,  $\rho u$ ,  $\left(\rho \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\kappa-1}\right)u$ . Это позволяет вычислять величины  $\rho^{i-1/2}$ ,  $u^{i-1/2}$ ,  $p^{i-1/2}$  последовательно без всяких итераций.

В случае стационарных плоских течений, как мы видели в § 18, вектор-функция  $\mathbf{B}$  имеет компоненты  $\rho u$ ,  $p + \rho u^2$ ,  $\rho u v$ ,  $\rho u w$ , что позволяет, исключив величины  $v$ ,  $w$ ,  $p$ ,  $\rho$ , получить квадратное уравнение для  $u$ , а затем вычислить и остальные величины  $v$ ,  $w$ ,  $p$ ,  $\rho$ . Похожие ситуации могут возникать и в других случаях, так что вопрос о решении уравнений (21.12) целесообразно рассматривать, исходя из конкретной системы законов сохранения (21.1).

Изложим еще один подход к учету граничных условий в неявной схеме на промежуточном слое, который представляется нам более простым и не вызывает опасений при его применении, как и показывает практика расчетов. Мы сочли целесообразным для большей наглядности изложить его применительно к уравнениям газовой динамики. Правда, при этом возникает некоторое ограничение на шаг по времени, но и оно, как нам представляется, отвечает существу дела.

Так же, как в § 15 при рассмотрении граничных условий для явной разностной схемы, в граничном узле  $x_0 = x_1$  рассмотрим граничную задачу о распаде разрыва. Она состоит в привлечении граничных условий соответствующего вида и соотношений на волне (ударной или разрежения). В результате решения такой задачи определяется, во-первых, скорость движения левой границы  $W_1^*$  (если она не задана в качестве граничного условия); во-вторых,— все «большие» величины  $\mathbf{U}_0$  в узле  $x_0 = x_1$ . Совершенно аналогично расчетом граничной задачи о распаде разрыва в правом узле  $x_j = x_{j+1}$  определяется скорость правой границы  $W_{j+1}^*$  и все «большие» величины  $\mathbf{U}_j$ .

Подчеркнем очень важное обстоятельство, что задача о граничном распаде разрыва автоматически учитывает поведение характеристик и производит тем самым правильный учет граничных условий (разумеется, в том случае, если задача корректно поставлена). Полученные векторы  $\mathbf{U}_0$  и  $\mathbf{U}_j$  задают простейшие граничные условия для неявной системы разностных уравнений на промежуточном слое, которая, как и ранее, может быть решена матричной прогонкой. Впрочем, заметим, что в некоторых случаях появляется возможность переформулировать уравнения

(21.3) и граничные условия в римановых инвариантах. Для каждого из них можно организовать независимую «скалярную» прогонку, а затем вернуться к исходным величинам. Если этому мешают правые части уравнений (21.8), то их можно, например, полностью относить на «нижний» слой.

Описанный алгоритм использования явного счета границ с последующим неявным счетом промежуточного слоя уже не является схемой, устойчивой при любых шагах по времени. Однако в отличие от явных схем, которые мы описывали ранее, ограничение на шаг определяется не размером ячейки сетки, а, по-видимому, длиной всей счетной области. Мы не проводили аналитического исследования такой задачи, но многие эксперименты и производственные расчеты подтверждают удобство и применимость описанного алгоритма конструирования неявной схемы. В частности, с помощью такого алгоритма значительно упрощается организация расчета задач, состоящих из нескольких счетных областей, поскольку явный счет границ позволяет прогонку в каждой из областей осуществлять независимо. Аналогичные соображения высказывались в работах [55], [120].

Что касается возникающего ограничения на шаг, то следует заметить, что допускаемая с точки зрения устойчивости возможность считать по неявной схеме с произвольным шагом по времени вовсе не означает, что так и следует поступать. Не будем забывать, что существуют ошибки аппроксимации, которые также зависят от величины шага! Так что с этой точки зрения возникающее ограничение на шаг вполне отвечает существу дела. (Заметим кстати, что во многих случаях отвечает существу дела и ограничение, возникающее в явной разностной схеме. Это касается, например, быстро протекающих нестационарных процессов.) Применение неявных схем с явным счетом границ позволяет рассчитать, например, задачу о распаде разрыва с выделением возникающих при этом ударных волн или волн разрежения, которые развиваются «из точки». Для этого необходимо перенести описанный выше алгоритм составления системы разностных уравнений на промежуточном слое на случай подвижных сеток.

Если все узлы сетки перемещаются с постоянной скоростью  $W^*$ , то очевидно, что замена переменной  $\bar{x} = x - W^*t$  сводит задачу к неподвижной сетке. Поскольку в результате такой замены система уравнений  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \bar{x}} = 0$  заменяется на уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (A - W^*I) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \bar{x}} = 0,$$

где  $I$  — единичная матрица, то изменения в описанной выше системе неявных уравнений сводятся к замене матрицы  $A$  на  $A - W^*I$ . В случае, когда каждый узел сетки имеет свою скорость

$W_j^* = \frac{x^j - x_j}{\tau}$ , предлагается в уравнении (21.7) на промежуточном слое заменить матрицы  $A_{j-1/2}$  на

$$A_{j-1/2} - W_{j-1/2}^* I,$$

где

$$W_{j-1/2}^* = \frac{1}{2} (W_{j-1}^* + W_j^*),$$

и, кроме того, использовать вместо координаты  $x_j$  величины  $\bar{x}_j$ , отвечающие моменту  $t = t_0 + \omega\tau$ .

Что касается пересчета, то учет подвижности сетки производится точно так же, как было описано для явной схемы в § 14.

## Г л а в а III

# ПОСТРОЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ

### § 22. Законы сохранения и уравнения газовой динамики

Интегральная форма законов сохранения массы, импульса и энергии в механике сплошной среды. Соответствующие дифференциальные уравнения. Соотношения на разрывах. Различные формы уравнений нестационарной газовой динамики в декартовых и цилиндрических координатах. Симметризация уравнений математической физики и, в частности, уравнений газовой динамики. Дополнительный закон сохранения для симметрических систем уравнений.

Математическое описание состояния движущейся сплошной среды (жидкости или газа) осуществляется с помощью функций, определяющих распределение вектора скорости среды  $\mathbf{q}$  (имеющего в пространственном случае три компоненты) и каких-либо двух термодинамических величин, например давления  $p$  и плотности  $\rho$ . Как мы уже упоминали в § 12, все другие термодинамические величины определяются через эти две с помощью уравнения состояния. Нас в первую очередь будет интересовать внутренняя энергия единицы массы среды  $\epsilon$ . Поэтому уравнение состояния будем предполагать заданным в форме

$$\epsilon = \epsilon(p, \rho). \quad (22.1)$$

Как известно из курсов механики сплошной среды, в основе явлений, математическое изучение которых мы осуществляем, лежат законы сохранения массы, импульса и энергии. Мы не будем приводить их вывода, который читатель может найти, например, в §§ 1—7 известного курса механики сплошной среды [88], а начнем с того, что выпишем их в интегральной форме, не зависящей от выбора геометрической системы координат.

Закон сохранения массы жидкости в произвольном замкнутом объеме пространства  $\Omega$  имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho d\Omega = - \oint_{\Sigma} \rho \mathbf{q} d\Sigma. \quad (22.2)$$

Слева написано изменение количества жидкости в объеме  $\Omega$ , а справа — количество жидкости, вытекающей через поверхность  $\Sigma$  этого объема. После преобразования правого поверхностного интеграла в интеграл по объему, согласно формуле Остроградского—Гаусса, (22.2) записывается в виде

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{q} \right) d\Omega = 0. \quad (22.3)$$

В силу произвольности объема  $\Omega$  отсюда следует так называемое *уравнение неразрывности*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{q} = 0. \quad (22.4)$$

Закон сохранения энергии, заключенной в объеме  $\Omega$ , может быть записан так:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \left( \rho \epsilon + \rho \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} \right) d\Omega = - \oint_{\Sigma} \rho \mathbf{q} \left( \epsilon + \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} \right) d\Sigma - \int_{\Sigma} p \mathbf{q} d\Sigma. \quad (22.5)$$

В этой формуле

$$\rho \epsilon + \rho \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} = e \quad (22.6)$$

— полная энергия (сумма внутренней и кинетической) единицы объема жидкости. Слева в (22.5) написано изменение количества полной энергии, заключенной в объеме  $\Omega$ . Первый член справа — полная энергия, непосредственно переносимая (в единицу времени) проходящей через поверхность  $\Sigma$  массой жидкости. Второй же член представляет работу, производимую силами давления над жидкостью, заключенной внутри поверхности  $\Sigma$ . Преобразуя (22.5) с помощью формулы Остроградского—Гаусса, получим

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div} (e + p) \mathbf{q} \right] d\Omega = 0, \quad (22.7)$$

откуда в силу произвольности объема  $\Omega$  следует уравнение изменения энергии

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div} (e + p) \mathbf{q} = 0. \quad (22.8)$$

Закон сохранения импульса, заключенного в объеме  $\Omega$ , может быть записан в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \mathbf{q} d\Omega = - \oint_{\Sigma} \Pi d\Sigma, \quad (22.9)$$

где  $\Pi$  — симметричный тензор второго ранга, называемый тензором плотности потока импульса. Поток вектора импульса через поверхность, перпендикулярную единичному вектору  $\mathbf{n}$ , задается вектором

$$\rho \mathbf{n} + (\mathbf{q}, \mathbf{n}) \rho \mathbf{q}, \quad (22.10)$$

где  $(\mathbf{q}, \mathbf{n})$  — скалярное произведение векторов  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{n}$ . В частности, если вектор  $\mathbf{n}$  направлен вдоль скорости  $\mathbf{q}$ , то получаем, что плотность потока продольной компоненты импульса равна  $\rho + \rho |\mathbf{q}|^2$ , а в направлении  $\mathbf{n}$ , перпендикулярном скорости  $\mathbf{q}$ , плотность потока поперечной компоненты импульса равна  $\rho$ .

Преобразование в (22.9) поверхностного интеграла в объемный приводит к равенству

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{q} + \operatorname{div} \Pi \right) d\Omega = 0, \quad (22.11)$$

откуда следует уравнение сохранения импульса

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{q} + \operatorname{div} \Pi = 0. \quad (22.12)$$

При выводе этих уравнений не учитываются процессы диссипации энергии, которые могут иметь место в текущей жидкости вследствие внутреннего трения (вязкости) и теплообмена. О движении, в котором отсутствуют эти процессы, говорят как об адиабатическом движении идеальной жидкости.

Математическое выражение адиабатичности движения формулируется в виде «уравнения непрерывности» для энтропии:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho S + \operatorname{div} \rho S \mathbf{q} = 0, \quad (22.13)$$

которое может быть получено как следствие уравнений сохранения массы (22.4), импульса (22.12) и энергии (22.8). Уравнению (22.13) соответствует закон сохранения энтропии

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \rho S d\Omega = - \oint_{\Sigma} \rho S \mathbf{q} d\Sigma, \quad (22.14)$$

который, однако, имеет силу только на гладких решениях. При возникновении разрывов пренебрегать диссипацией уже нельзя, и вместо закона сохранения энтропии следует исходить из того, что при прохождении элемента среды через разрыв его энтропия возрастает.

Выписанные нами уравнения допускают возникновение и существование поверхностей разрыва двух видов: ударных волн и тангенциальных разрывов. На них должны выполняться вполне

определенные соотношения. Для ударной волны в одномерном случае эти соотношения (12.12) уже были выписаны в § 12.

В пространственном случае они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} [\rho] D - [\rho q_n] &= 0, \\ [\rho q_n] D - [p + \rho q_n^2] &= 0, \\ [e] D - [(e + p) q_n] &= 0, \\ [q_t] &= 0. \end{aligned} \quad (22.15)$$

Здесь  $q_n = (\mathbf{q}, \mathbf{n})$  — нормальная компонента скорости  $\mathbf{q}$  по отношению к поверхности разрыва,  $D$  — скорость движения поверхности разрыва в направлении вектора  $\mathbf{n}$  нормали к ней,  $\mathbf{q}_t = \mathbf{q} - q_n \mathbf{n}$  — касательная к поверхности разрыва составляющая вектора скорости.

Для тангенциального разрыва непрерывны нормальная компонента скорости  $q_n$  и давление  $p$ , т. е.  $[q_n] = 0$ ,  $[p] = 0$ , а плотность  $\rho$  и тангенциальная составляющая скорости  $q_t$  могут испытывать произвольный скачок.

Как уже отмечалось в § 12, функции, удовлетворяющие интегральным законам сохранения массы, импульса и энергии и содержащие разрывы, мы будем рассматривать в качестве обобщенных решений уравнений газовой динамики. На разрывах должен быть выполнен закон возрастания энтропии.

В заключение этого параграфа мы для удобства дальнейших ссылок выпишем несколько различных форм уравнений законов сохранения массы (22.4), импульса (22.12), записываемого в виде трех уравнений для его компонент, и энергии (22.8). В декартовой системе координат они имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (p + \rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial \rho uw}{\partial y} + \frac{\partial \rho uw}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho uw}{\partial x} + \frac{\partial (p + \rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial \rho vw}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial \rho uw}{\partial x} + \frac{\partial \rho vw}{\partial y} + \frac{\partial (p + \rho w^2)}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial (e + p) u}{\partial x} + \frac{\partial (e + p) v}{\partial y} + \frac{\partial (e + p) w}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (22.16)$$

где  $u$ ,  $v$ ,  $w$  — составляющие вектора скорости  $\mathbf{q}$ ,

$$q^2 = |\mathbf{q}|^2 = u^2 + v^2 + w^2, \quad e = \rho \left( \epsilon + \frac{q^2}{2} \right).$$

Для более компактной записи системы (22.16) введем вспомогательные векторы-столбцы:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho + \rho u^2 \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (\epsilon + p) u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho + \rho v^2 \\ \rho vw \\ (\epsilon + p) v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho + \rho w^2 \\ (\epsilon + p) w \end{bmatrix}. \quad (22.17)$$

Тогда уравнения (22.16) для декартовых координат записываются так:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial z} = 0. \quad (22.18)$$

Ввиду того, что решение многих задач целесообразно осуществлять в цилиндрических координатах, переход к которым задается формулами

$$x = x, \quad y = r \cos \varphi, \quad z = r \sin \varphi, \quad (22.19)$$

мы приведем также запись нестационарных уравнений газовой динамики для цилиндрических координат:

$$\frac{\partial \sigma r}{\partial t} + \frac{\partial ar}{\partial x} + \frac{\partial br}{\partial r} + \frac{\partial c}{\partial \varphi} = \mathbf{f}. \quad (22.20)$$

Правые части задает вектор-столбец

$$\mathbf{f} = [0, 0, \rho + \rho w^2, -\rho vw, 0]^*; \quad (22.21)$$

$u, v, w$ —составляющие вектора скорости  $\mathbf{q}$ : осевая, радиальная и угловая соответственно; модуль вектора скорости  $q = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ .

Некоторые авторы вместо (22.20) предпочтут использовать другую дивергентную форму уравнений газовой динамики в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial \varphi} = -\frac{1}{r} \mathbf{f}_0, \quad (22.22)$$

в которой правые части задает вектор-столбец

$$\mathbf{f}_0 = [\rho v, \rho uv, \rho(v^2 - w^2), 2\rho vw, (e + p)v]^*. \quad (22.23)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что уравнения (22.20) и (22.22) эквивалентны между собой. Как мы уже отмечали в § 14, предпочтение, которое отдается уравнениям (22.22), мотивируется тем, что разностные уравнения, построенные на их основе, дают более точные результаты в окрестности оси симметрии по сравнению с результатами, получаемыми по разностной схеме, основанной на уравнениях (22.20). Такое утверждение содержится, в частности, в работе [93].

Не возражая против этого утверждения, мы повторим только уже сделанное в § 14 замечание, что при использовании разностной схемы, основанной на уравнениях (22.20), удается в разностной форме обеспечить точное выполнение законов сохранения массы, энергии и компоненты импульса вдоль оси симметрии благодаря однородности соответствующих уравнений, как видно из формулы (22.21) для правой части  $\mathbf{f}$  уравнений (22.20), о которых идет речь. Угловая и радиальная компоненты импульса сохраняются приближенно. В случае же уравнений (22.22) приближенно передаются все законы сохранения. Поэтому вопрос об использовании уравнений в той или иной форме следует решать, исходя из конкретного класса решаемых задач.

Наконец, выпишем наиболее простую форму уравнений нестационарной гидродинамики в цилиндрических координатах, которая уже не является дивергентной:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) &= -\frac{1}{r} \rho v, \\ \frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{w^2}{r}, \\ \frac{dw}{dt} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} &= -\frac{vw}{r}, \\ \frac{dp}{dt} + \rho c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) &= -\rho c^2 \frac{v}{r}. \end{aligned} \quad (22.24)$$

Здесь оператор  $\frac{d}{dt}$  определяется формулой

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

и носит название *субстанциональной производной*,  $c^2$  — квадрат скорости звука. Как мы уже видели в § 13, для идеального газа  $c^2 = \kappa \frac{p}{\rho}$ , а для двучленного уравнения состояния

$$c^2 = \kappa \frac{p + p_0}{\rho} = \frac{\kappa p + \rho c_0^2}{\rho}.$$

Использованные в гл. II уравнения для квазилинейных задач с двумя переменными представляли частные случаи выписанных здесь пространственных уравнений. В частности, уравнения (12.1) одномерной нестационарной газовой динамики получаются из (22.16) в случае, если течение не зависит от переменных  $y$  и  $z$ , т. е. компоненты скорости  $v = w = 0$ . Совершенно аналогично обстоит дело с уравнениями для осесимметричных нестационар-

ных течений, выписанными в § 14. Они представляют частный случай уравнений (22.20) или (22.22), когда течение зависит только от радиальной координаты  $r$  и времени  $t$ , т. е. две компоненты скорости равны нулю:  $u \equiv w \equiv 0$ . Наконец, уравнения для стационарных сверхзвуковых течений, выписанные в § 18, возникают из уравнений (22.22), (22.23), если считать течение установившимся, т. е. не зависящим от времени  $t$ . Разностная схема для таких уравнений будет обсуждаться ниже, в § 26, а в § 18 был рассмотрен частный случай стационарного сверхзвукового течения, не зависящего от угловой координаты  $\varphi$ .

В §§ 39, 43 мы будем рассматривать течения проводящего газа при наличии магнитного поля в предположении, что внешнее электрическое поле отсутствует. Действие магнитного поля приводит к тому, что в газе индуцируются токи, обусловливающие возникновение пондеромоторной силы

$$\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B},$$

где  $\mathbf{j}$  — вектор плотности тока,  $\mathbf{B}$  — вектор напряженности магнитного поля,  $\mathbf{F}$  — их векторное произведение. При отсутствии внешнего электрического поля ( $\mathbf{E} = 0$ , где  $\mathbf{E}$  — вектор напряженности электрического поля) плотность тока  $\mathbf{j}$  определяется законом Ома:

$$\mathbf{j} = \sigma [\mathbf{q} \times \mathbf{B}],$$

где  $\mathbf{q}$  — вектор скорости,  $\sigma$  — удельная электропроводность, которую можно считать известной функцией термодинамических параметров, например давления  $p$  и плотности  $\rho$ .

Вычисляемая таким образом сила  $\mathbf{F}$  должна быть внесена в правую часть уравнений, выражающих закон сохранения импульса. В то же время при  $\mathbf{E} = 0$  отсутствует подвод энергии к газу, в силу чего в уравнении энергии не появляется никаких дополнительных членов.

В случае, когда силовые линии приложенного осесимметричного магнитного поля лежат в меридиональной плоскости, осесимметричный характер течения не нарушается, и поэтому можно пользоваться системой уравнений (22.20) без производных по  $\varphi$  и без четвертого уравнения, поскольку  $w \equiv 0$ . Вектор правых частей вместо (22.21) будет иметь следующие компоненты:

$$\begin{aligned} f_1 &= 0, & f_2 &= -s\sigma B_r (B_r u - B_x v), \\ f_3 &= p - s\sigma B_x (B_r u - B_x v), & f_4 &= 0. \end{aligned}$$

Здесь  $s$  — безразмерная постоянная (параметр магнитогазодинамического воздействия),  $B_x$  и  $B_r$  — проекции напряженности магнитного поля  $\mathbf{B}$  на оси  $x$  и  $r$ , а  $\sigma$  — заданная функция  $p$  и  $\rho$ .

В заключение этого параграфа мы остановимся еще на одном важном вопросе, который уже затрагивался в § 9. Речь пойдет о симметрических гиперболических системах. Таковыми являются многие линейные гиперболические системы уравнений математической физики. В случае, когда рассматриваются нелинейные уравнения, вопрос о том, могут ли они быть записаны в симметрической форме, далеко не прост. В 1961 г. С. К. Годуновым

в работе [31] был выделен некоторый специальный класс систем

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{q_i}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{M}_{q_i}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{M}_{q_i}^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{M}_{q_i}^{(3)}}{\partial z} = 0, \quad (22.25)$$

который, в частности, содержит уравнения газовой динамики и уравнения, получающиеся из вариационных принципов с функционалами типа

$$\iiint F\left(u_1, u_2, \dots, u_n, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}, \frac{\partial u_1}{\partial z}, \dots, \frac{\partial u_n}{\partial z}\right) dx dy dz.$$

Система уравнений (22.25) допускает получение дополнительного закона сохранения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left( \sum_i q_i \mathcal{L}_{q_i} - \mathcal{L} \right)}{\partial t} + \frac{\partial \left( \sum_i q_i \mathcal{M}_{q_i}^{(1)} - \mathcal{M}^{(1)} \right)}{\partial x} + \\ + \frac{\partial \left( \sum_i q_i \mathcal{M}_{q_i}^{(2)} - \mathcal{M}^{(2)} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left( \sum_i q_i \mathcal{M}_{q_i}^{(3)} - \mathcal{M}^{(3)} \right)}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (22.26)$$

Равенство (22.26) можно получить, если  $i$ -е уравнение системы (22.25) умножить на  $q_i$  и после такого умножения все уравнения сложить.

Чтобы записать в форме (22.25) систему нестационарных уравнений газовой динамики (22.16) с тремя пространственными переменными, надо положить

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \frac{p}{T}, \quad \mathcal{M}^{(1)} = \frac{up}{T}, \quad \mathcal{M}^{(2)} = \frac{vp}{T}, \quad \mathcal{M}^{(3)} = \frac{wp}{T}, \\ q_1 = -\frac{u}{T}, \quad q_2 = -\frac{v}{T}, \quad q_3 = -\frac{w}{T}, \\ q_4 = S - \frac{\epsilon + \frac{p}{\rho} - \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}}{T}, \quad q_5 = \frac{1}{T}. \end{aligned} \quad (22.27)$$

Здесь  $T$  — абсолютная температура, связанная с энтропией  $S$  соотношением

$$d\epsilon + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) = T dS.$$

Это термодинамическое тождество как раз и обеспечивает возможность записи уравнений газовой динамики в симметрической форме (22.25).

Закон сохранения (22.26) принимает в этом случае вид

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho u S}{\partial x} + \frac{\partial \rho v S}{\partial y} + \frac{\partial \rho w S}{\partial z} = 0,$$

т. е. является законом сохранения энтропии, а множители  $q_i$  аналогичны интегрирующим множителям второго закона термодинамики. Это соображение облегчает процесс приведения конкретных уравнений к виду (22.25). Уравнения такого вида могут быть записаны еще в следующей форме:

$$\sum_i \mathcal{L}_{q_i q_j} \frac{\partial q_j}{\partial t} + \sum_i \mathcal{M}_{q_i q_j}^{(1)} \frac{\partial q_j}{\partial x} + \sum_i \mathcal{M}_{q_i q_j}^{(2)} \frac{\partial q_j}{\partial y} + \sum_i \mathcal{M}_{q_i q_j}^{(3)} \frac{\partial q_j}{\partial z} = 0,$$

из которой очевидно, что они представляют собой симметрическую гиперболическую систему, если только  $\mathcal{L}$  — выпуклая функция своих аргументов  $q_1, \dots, q_n$ , что обеспечивает положительную определенность матрицы при производных по времени.

В работе [31] среди уравнений математической физики, приводящихся к виду (22.25), наряду с уравнениями газовой динамики были указаны также вариационные уравнения Лагранжа и уравнения кристаллооптики. В работе [35] несколько иным путем, обобщаяющим описанную схему, получена симметрическая форма уравнений магнитной гидродинамики. Системы вида (22.25) и системы уравнений, получающиеся из них добавлением диссипативных вязких членов в правую часть, изучались также в работах [32], [77]. Интерес к системам (22.25) проявили недавно К. О. Фридрихс и П. Д. Лакс, доказав в работе [136], что только эти системы допускают дополнительный закон сохранения.

Использование формы (22.25) позволило построить ряд интересных примеров, проливающих некоторый свет на проблему единственности обобщенного решения. Читатель может ознакомиться с этими примерами, например, по работам [32], [21], [52], [53].

### § 23. Подвижные сетки и простейшие способы их построения

Дискретизация задачи и общая схема расчета. Простейшая сетка с движением границ по неподвижным лучам. Расстановка узлов сетки вдоль лучей. Расчет сетки в области с криволинейными границами по интерполяционным формулам.

Разностная методика, применение которой к гиперболическим квазилинейным задачам с двумя переменными мы изучали в предыдущей главе, допускает естественное обобщение на случай большего числа переменных. Прежде всего обратимся к нестационарным задачам газовой динамики с двумя пространственными переменными (для краткости мы будем называть их «двумерными» задачами). Речь идет в первую очередь о течениях, не зависящих от координат  $z$ , а зависящих только от декартовых координат  $x, y$  и времени  $t$  («плоские» течения), или об осесимметричных течениях, не зависящих от угловой переменной  $\phi$ .

Расчет такой газодинамической задачи проводится в некоторой области на плоскости переменных  $x, y$  или  $x, r$ , на границе которой задаются те или иные граничные условия. Мы будем называть ее счетной областью. Для практической реализации разностной методики искомые  $\rho, u, v, p$ , как функции аргументов  $x, y, t$ , должны быть заменены дискретными наборами чисел. В рассматриваемом нами случае это осуществляется так. Счетная область «разрезается» на конечное число малых подобластей, именуемых ячейками сетки, не налагающих друг на друга и заполняющих всю счетную область без зазоров. С простейшим примером — прямоугольной сеткой на области, представляющей прямуюгольник, — мы уже имели дело в § 7, когда рассматривали уравнения акустики с двумя пространственными переменными.

Форма ячеек сетки, вообще говоря, может быть достаточно произвольной. Наиболее простые расчетные формулы получаются в случае прямоугольной сетки, ориентированной по координатным осям. Этим и вызвано их наиболее широкое распространение. Однако значительные затруднения возникают тогда при проведении расчета в области с криволинейными границами. Этим объясняется появление методик, которые работают с сетками, у которых ячейками являются треугольники, четырехугольники, шестиугольники и т. п. Алгоритм разрезания счетной области на ячейки такого вида, их упорядочение с целью хранения информации о них в памяти ЭВМ и описание взаимодействия в процессе расчета сами по себе представляют независимую интересную задачу.

Путь, по которому пойдем мы, состоит в стремлении к наиболее простой структуре сетки с точки зрения упорядочения ее ячеек. Именно, счетная область двумя семействами линий разрезается на четырехугольные ячейки, создавая конструкцию, похожую на искривленную прямоугольную (или, точнее, параллелограммную) сетку (рис. 23.1). При таком подходе нумерация ячеек становится совсем простой (аналогичной нумерации элементов матрицы по строкам и столбцам), а центр тяжести переносится на задачу расчета координат узлов такой сетки. Об этом мы будем подробно говорить в дальнейшем.

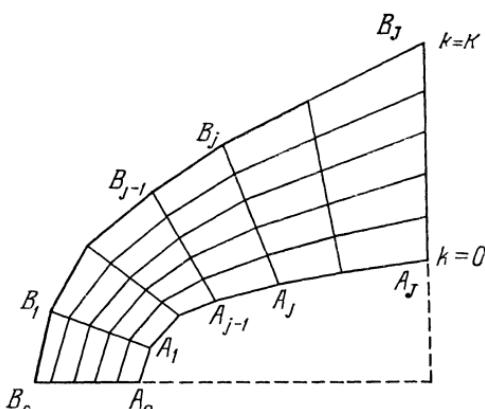


Рис. 23.1.

Внутри каждой ячейки сетки функции  $\rho$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $p$  заменяются некоторыми усредненными постоянными. Совокупность этих значений во всех ячейках сетки мы называем состоянием задачи на момент времени  $t$ . Дискретизация по времени, как и в одномерном случае, достигается тем, что мы переходим от состояния задачи на момент  $t = t_0$  к состоянию на момент  $t = t_0 + \tau$ , называя этот переход расчетом одного шага по времени. После этого расчет повторяется по тому же алгоритму (как правило), и так продолжается до тех пор, пока не будет получена картина течения на представляющем интерес интервале времени.

Одним из несомненных достоинств описываемой методики является возможность использования подвижных сеток, позволяющая к тем преимуществам, которые обеспечивает проведение расчета в эйлеровых координатах, присоединить и некоторые из преимуществ лагранжева подхода.

Если имеется возможность вести расчет в области, в состав границ которой входят подвижные линии, то в качестве таких линий могут быть выбраны, например, ударные волны, контактные разрывы, линии, на которых в качестве граничного условия задано давление, и т. п. Закон их движения может быть известен заранее или определяться самим расчетом. Разностная сетка, используемая в таком расчете, не остается неподвижной, а меняется от одного шага по времени к другому, следуя за изменяющимся положением границ расчетной области. В случае применения подвижной сетки расчет одного шага по времени можно условно разделить на три этапа. На первом этапе рассчитывается движение граничного контура области (точнее, его подвижных частей) на интервале времени от  $t_0$  до  $t_0 + \tau$ . На втором — определяется положение узлов сетки на момент времени  $t_0 + \tau$ , исходя из нового положения границ расчетной области. Наконец, на третьем этапе производится пересчет газодинамических величин во всех ячейках новой сетки на момент  $t_0 + \tau$ , исходя из разностных законов сохранения и нового значения шага по времени, гарантирующего устойчивость счета.

Чтобы упростить изложение технологии использования подвижных сеток, мы рассмотрим сначала случай, когда одно семейство линий сетки представляет систему прямых, остающихся неподвижными в процессе расчета, а подвижность сетки обеспечивается вторым семейством линий (благодаря движению узловых точек на границах расчетной области вдоль упомянутых прямых).

Пусть, например, сетка имеет вид, изображенный на рис. 23.1. Будем считать, что линия  $A_0 A_1 \dots A_J$  остается неподвижной в процессе расчета, представляя контур тела, помещенного в сверхзвуковой поток газа, а линия  $B_0 B_1 \dots B_J$  изображает движущуюся ударную волну, отделяющую набегающий на тело

однородный поток от более сложного течения за фронтом ударной волны.

Будем предполагать, что задание координат граничных узлов на линиях  $A_0A_1\dots A_J$  и  $B_0B_1\dots B_J$  однозначно определяет положение всех остальных узлов сетки. Для этой цели достаточно, например, задать монотонно возрастающую последовательность чисел  $\{s_k; k=0, 1, \dots, K\}$ , которую для краткости будем именовать законом расстановки точек вдоль луча. С ее помощью координаты  $\{(x, y)_j, k\}$  узлов сетки на отрезке  $A_jB_j$  вычисляются по простым формулам:

$$\begin{aligned} x_{j, k} &= x_j^h(1-s_k) + x_j^b s_k, \\ y_{j, k} &= y_j^h(1-s_k) + y_j^b s_k, \end{aligned} \quad (23.1)$$

где  $(x_j^h, y_j^h)$  — координаты точки  $A_j$ ,  $(x_j^b, y_j^b)$  — координаты точки  $B_j$  и предполагается, что  $s_0=0$ ,  $s_K=1$ . Задавая соответствующим образом последовательность  $\{s_k\}$ , можно расставлять узлы равномерно или создавать сгущения в тех местах, где это целесообразно с точки зрения конкретной задачи.

Соединяя соседние по индексу  $j$  узлы сетки (при зафиксированном значении индекса  $k$ ) отрезками прямых, мы получим совокупность ломаных линий, которые для краткости будем называть линиями сетки первого семейства.

Аналогично, соединяя соседние узлы сетки при зафиксированном индексе  $j$ , получим линии второго семейства. Они разрезают счетную область на  $JK$  ячеек, каждая из которых представляет четырехугольник с прямолинейными границами. Таким образом, требуемая разностная сетка построена.

Чтобы задать движение сетки, достаточно задать закон движения ударной волны  $B_0B_1\dots B_J$ . Это задание осуществляется следующим образом. На каждом из звеньев ломаной  $B_{j-1}B_j$  рассматривается задача о распаде разрыва между ячейкой, прилегающей к ударной волне «изнутри» счетной области, и однородным потоком «снаружи». Она решается с помощью алгоритма, описанного в § 13, причем в роли скорости  $u$  выступают нормальные по отношению к отрезку  $B_{j-1}B_j$  составляющие векторов скоростей в ячейке и в однородном потоке. В результате расчета будут получены две волны и контактный разрыв. Выберем из двух волн ту, которая распространяется навстречу набегающему потоку. Мы хотим, чтобы скорость движения отрезка ломаной  $B_{j-1}B_j$  была равна скорости этой волны, которую обозначим  $W_{j-1/2}^*$ . Сдвиг отрезка  $B_{j-1}B_j$  в направлении нормали со скоростью  $W_{j-1/2}^*$  мог бы привести к рассогласованию положения узла  $B_j$  из-за различия величин  $W_{j-1/2}^*$  и  $W_{j+1/2}^*$  (рис. 23.2). Поэтому будем интерполировать скорость движения точки  $B_j$  вдоль прямой  $A_jB_j$  по скоростям движения вдоль этой прямой выбранных волн на

отрезках  $B_{j-1}B_j$  и  $B_jB_{j+1}$ , достигая поставленной цели приближенно. Соответствующие формулы будут выписаны в следующем параграфе. Вычислением скоростей точек  $B_j$  движение границы  $B_0B_1\dots B_J$  полностью определяется. В рассматриваемом примере (с неподвижной границей  $A_0A_1\dots A_J$ ) тем самым определяется и движение всех узлов сетки.

Жесткая система неподвижных лучей, конечно, значительно сужает круг задач, к расчету которых может быть применена описываемая методика. В самом общем случае подвижными могут быть все четыре границы счетной области (для наглядности назовем их левой, правой, нижней и верхней). Для каждого из звеньев ломаных, образующих эти границы, может быть рассчитана скорость движения по нормали исходя из конкретных граничных условий. Как мы видели в § 15, при рассмотрении граничных условий для одномерных задач газовой динамики весьма полезным инструментом оказывается задача о распаде разрыва.

На основе скоростей, полученных для звеньев ломаных, должны быть вычислены скорости движения узловых точек границы. Дополнительная свобода границ, вызванная отсутствием жесткой системы неподвижных лучей, требует более внимательного подхода к этому вопросу. Мы вернемся к нему в § 31, где будут описаны некоторые возможные алгоритмы движения узлов сетки на границах.

А сейчас опишем еще один алгоритм вычисления координат «внутренних» узлов сетки в предположении, что положение всех ее узлов на границах счетной области уже вычислено. Пусть это будут четыре последовательности:

- |  |                                  |
|--|----------------------------------|
| $\{(x, y)_j^h; j = 0, 1, \dots, J\}$             | для нижней границы ( $k = 0$ ),  |
| $\{(x, y)_j^v; j = 0, 1, \dots, J\}$             | для верхней границы ( $k = K$ ), |
| $\{(x, y)_k^{\text{лев}}; k = 0, 1, \dots, K\}$  | для левой границы ( $j = 0$ ),   |
| $\{(x, y)_k^{\text{прав}}; k = 0, 1, \dots, K\}$ | для правой границы ( $j = J$ ).  |
- (23.2)

Естественно, что крайние точки этих последовательностей, задающие положение четырех «углов» области, совпадают:

$$(x, y)_0^h = (x, y)_0^{\text{лев}}, \quad (x, y)_J^h = (x, y)_0^{\text{прав}},$$

$$(x, y)_K^{\text{прав}} = (x, y)_J^v, \quad (x, y)_0^{\text{лев}} = (x, y)_0^v.$$

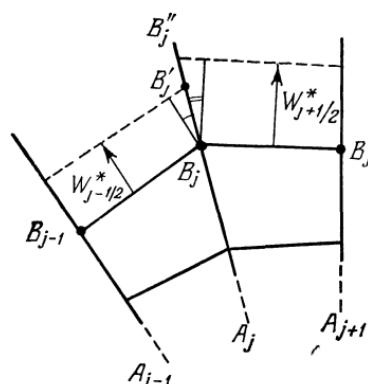


Рис. 23.2.

Расстановка точек на контуре счетной области осуществляется в начальный момент вычислителем исходя из конкретных особенностей задачи и может быть выбрана весьма неравномерной и нерегулярной (то обстоятельство, что описываемая нами разностная схема безболезненно допускает такую возможность, должно быть также отнесено к числу ее несомненных достоинств). В ходе расчета выбранный вначале закон расстановки узлов сетки вдоль границ может либо сохраняться, либо изменяться в желательном направлении.

Технологически это может быть организовано, например, так. По последовательности  $\{(x, y)_n; n = 0, 1, \dots, N\}$ , задающей узлы сетки на границе, рассчитывается вспомогательная последовательность  $\{s_n\}$ , приближенно передающая расстановку узлов по длине дуги. Расчетные формулы таковы:

$$\bar{s}_0 = 0, \quad \bar{s}_n = \bar{s}_{n-1} + \sqrt{(x_n - x_{n-1})^2 + (y_n - y_{n-1})^2} \quad (23.3)$$

для значений индекса  $n = 1, \dots, N$ .

Для дальнейшего удобно нормировать полученные значения:  $s_n = \bar{s}_n / s_N$ . Такой расчет выполняется для всех четырех границ. Полученные четыре последовательности

$$\begin{aligned} &\{s_j^u; j = 0, 1, \dots, J\}, \quad \{s_k^{lev}; k = 0, 1, \dots, K\}, \\ &\{s_j^v; j = 0, 1, \dots, J\}, \quad \{s_k^{pr}; k = 0, 1, \dots, K\}, \end{aligned}$$

которые будут называться *законами расстановки* узлов сетки вдоль границ, в дальнейшем будут участвовать в алгоритмах, определяющих движение узлов сетки на границах.

А сейчас мы обратимся к расчету координат

$$\{(x, y)_{j, k}; j = 1, \dots, J-1; k = 1, \dots, K-1\}$$

внутренних узлов сетки. Прибегнем к интерполяции, соединяя отрезками прямых точки с одинаковыми номерами на двух противоположных границах. Для определенности пусть это будут верхняя и нижняя границы. Закон расстановки узлов вдоль двух семейств линий сетки, заключенных внутри области, задается посредством величин  $(\xi, \eta)_{j, k}$ , которые являются координатами точек пересечения для отрезков, соединяющих на «параметрическом» квадрате  $0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1$  соответственные

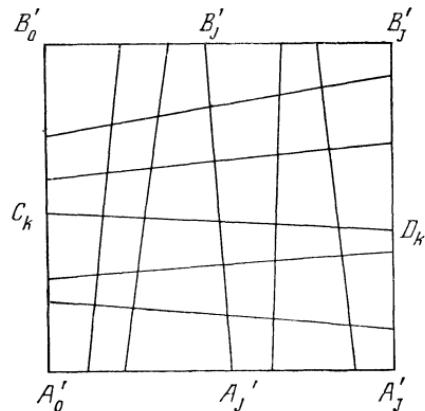


Рис. 23.3.

точки на противоположных сторонах (рис. 23.3), расставленные по сосчитанным законам  $\{s_j^H\}$ ,  $\{s_j^B\}$ ,  $\{s_k^{лев}\}$ ,  $\{s_k^{пр}\}$ . Величины  $(\xi, \eta)_{j,k}$  вычисляются по формулам

$$\xi_{j,k} = \frac{s_j^H + (s_j^B - s_j^H) s_k^{лев}}{1 - (s_j^B - s_j^H) (s_k^{пр} - s_k^{лев})}, \quad (23.4)$$

$$\eta_{j,k} = \frac{s_k^{лев} + (s_k^{пр} - s_k^{лев}) s_j^H}{1 - (s_j^B - s_j^H) (s_k^{пр} - s_k^{лев})}.$$

Интерполяция координат  $x, y$  между нижней и верхней границами осуществляется формулами

$$x_{j,k} = x_j^H (1 - \eta_{j,k}) + x_j^B \eta_{j,k}, \quad (23.5)$$

$$y_{j,k} = y_j^H (1 - \eta_{j,k}) + y_j^B \eta_{j,k}.$$

Если левая и правая границы области являются отрезками прямых, то на этом расчет сетки и кончается. В общем же случае, когда они не являются прямыми, формулы (23.5) нужно подправить.

В качестве поправок можно взять, например, результат интерполяции по индексу  $j$  поправочных векторов для левой и правой границ, соединяющих истинные точки этих границ с вычисленными по формулам (23.5) соответствующими точками отрезков между угловыми точками счетной области (рис. 23.4). Это приводит

к следующим формулам для расчета  $(x, y)_{j,k}$ :

$$x_{j,k} = x_j^H (1 - \eta_{j,k}) + x_j^B \eta_{j,k} + \xi_{j,k} [x_k^{пр} - x_j^H (1 - s_k^{пр}) - x_j^B s_k^{пр}] + \\ + (1 - \xi_{j,k}) [x_k^{лев} + x_0^H (1 - s_k^{лев}) - x_0^B s_k^{лев}], \quad (23.6)$$

$$y_{j,k} = y_j^H (1 - \eta_{j,k}) + y_j^B \eta_{j,k} + \xi_{j,k} [y_k^{пр} - y_j^H (1 - s_k^{пр}) - y_j^B s_k^{пр}] + \\ + (1 - \xi_{j,k}) [y_k^{лев} + y_0^H (1 - s_k^{лев}) - y_0^B s_k^{лев}].$$

При описании процесса интерполяции направления между нижней—верхней и левой—правой границами были неравноправными. Интересно отметить, что если выбрать в качестве направления первой интерполяции левую—правую границы с введением поправок по нижней—верхней границам, то в случае одинаковых законов расстановки на противоположных парах границ результаты точно совпадали бы с описанными выше.

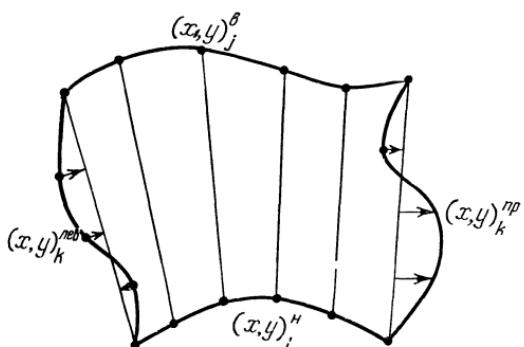


Рис. 23.4.

Для широкого класса областей разностная сетка, построенная по описанным интерполяционным формулам, оказывается пригодной для использования в численных расчетах. Однако бывает и так, что искажение границ счетной области в процессе расчета нестационарной задачи приводит к тому, что этот простой алгоритм дает неудовлетворительный результат (ячейки сетки образуют самопересечения, складки и т. п.). Тогда приходится прибегать к довольно сложным алгоритмам. Некоторые из них мы опишем в следующей главе.

Если речь идет о проведении расчета в некоторой конкретной геометрической области, то иногда можно написать простые формулы для вычисления координат узловых точек или даже, нарисовав сетку «от руки», перенести ее в память ЭВМ. Обсуждая алгоритмы построения сетки, мы имеем в виду более общую ситуацию, когда сетка должна пересчитываться на каждом шаге из-за наличия подвижных границ, деформацию которых иногда бывает трудно или невозможно предвидеть заранее.

В дальнейшем при описании разностных схем будем предполагать, что на каждом шаге расчета разностная сетка тем или иным способом уже построена (по простейшим алгоритмам, описанным в этом параграфе, более сложным, которые будут изложены в §§ 32, 33, или каким-нибудь другим).

В заключение этого параграфа несколько слов о построении сеток для расчета пространственных задач. Среди них, несомненно, следует выделить круг задач, которые можно рассматривать как набор «двумерных сечений», отвечающих фиксированным значениям одной пространственной координаты (ею может быть, например, одна из декартовых координат, угловая координата в цилиндрических задачах и т. п.). Тогда, построив в каждом из сечений разностную сетку одним из упомянутых выше способов, мы получим некоторое решение задачи построения сетки для всей задачи (вообще говоря, оно может оказаться и неудовлетворительным по причинам, аналогичным тем, которые отмечались уже на двумерном уровне). Если расчетная область представляет пространственное тело, ограниченное криволинейными поверхностями, то в ряде случаев построение сетки может быть реализовано с помощью явных формул, обобщающих на трехмерный случай интерполяционные формулы (23.6). Такие формулы могут быть легко выписаны с помощью тех соображений, которые описаны выше для плоского случая, но мы не будем этого делать из-за громоздкости. Что касается более общих алгоритмов построения пространственных сеток, то, как мы увидим из §§ 32, 33, они пока еще достаточно сложны на «двумерном» уровне и для пространственного случая представляют интересную задачу, которая, по-видимому, еще ждет своего решения.

## § 24. Расчетные формулы схемы для нестационарных двумерных задач

Разностные законы сохранения для произвольной сетки. Расчет потоков через боковые грани ячейки. Проведение расчета на внешних границах области. Движение внешних границ. Изменения в схеме для осесимметричных задач.

Рассмотрим случай «плоского» течения, не зависящего от координаты  $z$ , а лишь от декартовых координат  $x$ ,  $y$  и времени  $t$ . Соответствующие уравнения представляют частный случай общих уравнений (22.16) или в векторной форме—(22.17), в которых следует полагать  $\omega \equiv 0$ . Это означает, что в них можно вычеркнуть все производные по  $z$  и убрать четвертое уравнение, превращающееся в тривиальное тождество. Мы позволим себе выписать уравнения, которые при этом получаются, поскольку с ними предстоит работать:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} = 0, \quad (24.1)$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho uv \\ (e + p)u \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho vv \\ (e + p)v \end{bmatrix}. \quad (24.2)$$

Обозначения сохранены прежние. Напомним только, что  $e = \rho \left( \varepsilon + \frac{u^2 + v^2}{2} \right)$ —полная энергия единицы объема,  $\varepsilon = \varepsilon(p, \rho)$ —внутренняя энергия единицы массы, заданная уравнением состояния (12.6) или (12.8).

Общая схема расчета шага, т. е. перехода от состояния задачи на момент времени  $t_0$  к состоянию на момент  $t_0 + \tau$ , была описана в предыдущем параграфе. Под состоянием на момент  $t_0$  мы подразумеваем совокупность величин «нижнего» слоя

$$\{(\rho, u, v, p)_{j-1/2, k-1/2}; j=1, \dots, J; k=1, \dots, K\},$$

представляющих значения плотности, компонент скорости и давления для всех ячеек сетки, на которые разрезается счетная область. Аналогичные величины на момент времени  $t_0 + \tau$  («верхний» слой) будем обозначать

$$\{(\rho, u, v, p)^{j-1/2, k-1/2}\}.$$

Описание расчетных формул мы начнем с третьего этапа (пересчет), предполагая, что границы счетной области сдвинуты в новое положение и, наряду с сеткой  $\{(x, y)_{j, k}\}$  на «нижнем» слое, уже рассчитана сетка  $\{(x, y)^{j, k}\}$  на «верхнем» слое по одному из алгоритмов, упомянутых в предыдущем параграфе.

Пересчет осуществляется на основе интегральных законов сохранения, которые в рассматриваемом случае уравнений (24.1) имеют вид

$$\oint \sigma dx dy + a dy dt + b dt dx = 0. \quad (24.3)$$

Предполагается, что интегрирование может быть выполнено по любой замкнутой поверхности, гомеоморфной сфере в трехмерном пространстве  $x, y, t$ . Интегралы в формуле (24.3) следует понимать как поверхностные интегралы второго типа, т. е. как интегралы по ориентированной поверхности.

Применим (24.3) к отдельной ячейке сетки с номером  $(j-1/2, k-1/2)$  в течение времени от  $t_0$  до  $t_0 + \tau$ , т. е. к поверхности «тела», изображенного на рис. 24.1. Его нижним основанием

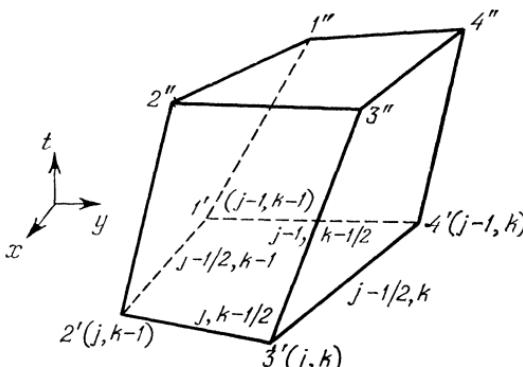


Рис. 24.1.

$1'2'3'4'$  является ячейка сетки на плоскости  $t = t_0$  с вершинами в точках  $(x, y)_{j-1, k-1}$ ,  $(x, y)_{j, k-1}$ ,  $(x, y)_{j, k}$ ,  $(x, y)_{j-1, k}$ . Верхнее основание  $1''2''3''4''$  — ячейка сетки на плоскости  $t = t_0 + \tau$  с вершинами в точках  $(x, y)^{j-1, k-1}$ ,  $(x, y)^{j, k-1}$ ,  $(x, y)^{j, k}$ ,  $(x, y)^{j-1, k}$ . Полагая, что в течение шага вершины движутся с постоянной скоростью, соединим точки  $1', 2', 3', 4'$  с точками  $1'', 2'', 3'', 4''$  отрезками прямых. В качестве боковых граней мыслится некоторые поверхности, натянутые на соответствующие «рамки» из четырех отрезков в пространстве  $x, y, t$  (вообще говоря, боковые грани не плоские, поскольку плоскость определяется тремя точками).

Будем предполагать, что на боковых гранях в течение интервала времени от  $t_0$  до  $t_0 + \tau$  газодинамические величины равны некоторым постоянным значениям («большим» величинам):  $(R, U, V, P)_{j, k-1/2}$  на грани с вершинами  $2', 3', 3'', 2''$ ,  $(R, U, V, P)_{j-1/2, k}$  на грани с вершинами  $3', 4', 4'', 3''$  и т. д. Тогда будут равны соответствующим постоянным значениям и

векторные величины  $\sigma$ ,  $a$ ,  $b$  на боковых гранях, так же как постоянен вектор  $\sigma$  на нижнем и верхнем основаниях.

В результате интегрирования (24.3) по поверхности тела, изображенного на рис. 24.1, мы придем к результату такого вида:

$$\sigma^{j-1/2, k-1/2} \Omega^{j-1/2, k-1/2} = \sigma_{j-1/2, k-1/2} \Omega_{j-1/2, k-1/2} - Q_{j, k-1/2} - Q_{j-1, k-1/2} - Q_{j-1/2, k} - Q_{j-1/2, k-\frac{1}{2}}. \quad (24.4)$$

В этой векторной формуле величины  $\Omega_{j-1/2, k-1/2}$  и  $\Omega^{j-1/2, k-1/2}$  равны площадям нижнего и верхнего оснований. Каждая из четырех векторных величин  $Q_{j, k-1/2}$ ,  $Q_{j-1, k-1/2}$ ,  $Q_{j-1/2, k}$ ,  $Q_{j-1/2, k-\frac{1}{2}}$  представляет потоки массы, импульса и энергии через соответствующую из боковых граней в направлении вектора внешней нормали. Мы рассмотрим их на примере одной из граней, скажем  $(j, k-1/2)$ .

Величина  $Q_{j, k-1/2}$  имеет следующую структуру:

$$Q_{j, k-1/2} = \sigma_{j, k-1/2} \Omega_{j, k-1/2} + a_{j, k-1/2} \Phi_{j, k-1/2} + b_{j, k-1/2} \Psi_{j, k-1/2}, \quad (24.5)$$

$$\Omega_{j, k-1/2} = \iint_{j, k-1/2} dx dy,$$

$$\Phi_{j, k-1/2} = \iint_{j, k-1/2} dy dt, \quad (24.6)$$

$$\Psi_{j, k-1/2} = \iint_{j, k-1/2} dt dx,$$

где подразумевается интегрирование по упомянутой выше умозрительной поверхности, натянутой на рамку из четырех отрезков, соединяющих соседние точки  $2'$ ,  $3'$ ,  $3''$ ,  $2''$ . Чтобы эффективно его выполнить, мы заменим эту поверхность плоским четырехугольником, который образуется при параллельном перемещении отрезка, соединяющего точки  $2$  и  $3$  на серединах ребер  $2'2''$  и  $3'3''$  со скоростью  $W_{j, k-1/2}$ , которую мы подберем таким образом, чтобы площадь, заметаемая этим отрезком в течение времени от  $t_0$  до  $t_0 + \tau$ , совпала с величиной  $\Omega_{j, k-1/2}$ , равной площади проекции грани  $2'3'3''2''$  на плоскость  $x, y$ .

Для упрощения описания расчетных формул временно введем сокращенные обозначения для координат вершин нижнего основания

$$(x'_1, y'_1) = (x', y')_{j-1, k-1}, \quad (x'_3, y'_3) = (x', y')_{j, k}, \\ (x'_2, y'_2) = (x', y')_{j, k-1}, \quad (x'_4, y'_4) = (x', y')_{j-1, k} \quad (24.7)$$

и аналогичные обозначения

$$(x''_1, y''_1) = (x'', y'')_{j-1, k-1}, \quad (x''_3, y''_3) = (x'', y'')_{j, k}, \\ (x''_2, y''_2) = (x'', y'')_{j, k-1}, \quad (x''_4, y''_4) = (x'', y'')_{j-1, k}$$

для координат вершин верхнего основания (рис. 24.1). Величинам, относящимся к грани ( $j, k - 1/2$ ), присвоим индекс 23.

Площадь  $\Omega$  четырехугольника с вершинами в точках  $(x_l, y_l)$ ,  $l = 1, 2, 3, 4$ , занумерованными так, чтобы их обход в плоскости

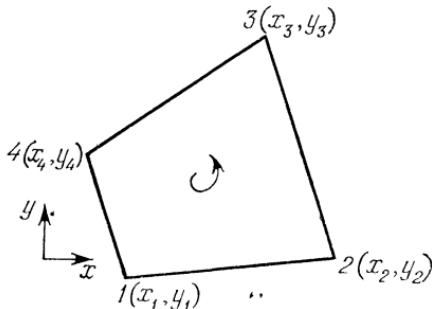


Рис. 24.2.

$x, y$  совершился против часовой стрелки (рис. 24.2), вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}\Omega = \Omega(x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4) = \\ = \frac{1}{2} [(x_3 - x_1)(y_4 - y_2) - (x_4 - x_2)(y_3 - y_1)].\end{aligned}\quad (24.8)$$

Площади оснований  $\Omega_{j-1/2, k-1/2}$  и  $\Omega^{j-1/2, k-1/2}$  вычисляются с помощью формулы (24.8) так:

$$\begin{aligned}\Omega_{j-1/2, k-1/2} &= \Omega(x'_1, y'_1; x'_2, y'_2; x'_3, y'_3; x'_4, y'_4), \\ \Omega^{j-1/2, k-1/2} &= \Omega(x''_1, y''_1; x''_2, y''_2; x''_3, y''_3; x''_4, y''_4).\end{aligned}$$

Аналогично вычисляется величина  $\Omega_{j, k-1/2}$ :

$$\Omega_{j, k-1/2} = \Omega_{23} = \Omega(x'_2, y'_2; x'_3, y'_3; x''_3, y''_3; x''_2, y''_2).$$

Для вычисления величин  $\Phi_{j, k-1/2}$ ,  $\Psi_{j, k-1/2}$  введем точки 2' и 3' на серединах ребер 2'2'' и 3'3''. Их координаты равны соответственно

$$x_2 = \frac{1}{2}(x'_2 + x''_2), \quad y_2 = \frac{1}{2}(y'_2 + y''_2),$$

$$x_3 = \frac{1}{2}(x'_3 + x''_3), \quad y_3 = \frac{1}{2}(y'_3 + y''_3).$$

В соответствии со сказанным выше относительно замены боковой грани ( $j, k - 1/2$ ) плоским четырехугольником получим

$$\Phi_{j, k-1/2} = \Phi_{23} = \tau(y_3 - y_2),$$

$$\Psi_{j, k-1/2} = \Psi_{23} = -\tau(x_3 - x_2),$$

а скорость  $W_{23}^*$  этой грани определяется из равенства

$$\tau l_{23} W_{23}^* = \Omega_{23}, \quad (24.9)$$

где  $l_{23}$  — длина отрезка, соединяющего точки 2 и 3:

$$l_{23} = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}.$$

Таким образом, для вычисления потоков  $\mathbf{Q}_{j, k-1/2} = \mathbf{Q}_{23}$  получаем следующую формулу:

$$\mathbf{Q}_{23} = \sigma_{23} \Omega_{23} + \tau (y_3 - y_2) \mathbf{a}_{23} - \tau (x_3 - x_2) \mathbf{b}_{23}, \quad (24.10)$$

где  $\mathbf{a}_{23}$ ,  $\mathbf{b}_{23}$ ,  $\sigma_{23}$ , определенные в (24.2), вычисляются через «большие» величины  $(P, U, V, R)_{23}$ .

Введя обозначения

$$\alpha_{23} = -\frac{y_3 - y_2}{l_{23}}, \quad \beta_{23} = \frac{x_3 - x_2}{l_{23}}$$

для координат вектора, перпендикулярного отрезку между точками 2 и 3 в плоскости  $t = t_0 + \tau/2$  и направленного в сторону внешней нормали к поверхности ячейки, формулу (24.10) для потоков  $\mathbf{Q}_{23}$  можно переписать так:

$$\mathbf{Q}_{23} = \tau l_{23} (\sigma_{23} W_{23}^* - \mathbf{a}_{23} \alpha_{23} - \mathbf{b}_{23} \beta_{23}).$$

Обращаясь к конкретным выражениям (24.2) для векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\sigma$ , можно записать ее в следующем более наглядном виде:

$$\mathbf{Q}_{23} = \tau l_{23} \begin{bmatrix} R(W^* - N) \\ R(W^* - N)U - \alpha P \\ R(W^* - N)V - \beta P \\ R(W^* - N)E - NP \end{bmatrix}_{23}, \quad (24.11)$$

где  $N_{23} = U_{23} \alpha_{23} + V_{23} \beta_{23}$  представляет нормальную составляющую вектора скорости по отношению к ребру 23,  $W_{23}^*$  — скорость ребра 23 в направлении нормали,  $E$  — полная энергия единицы объема.

Полученные формулы имеют совершенно ясный физический смысл и определяют потоки массы, импульса и энергии через плоскую поверхность, определяемую отрезком 23, перемещающимся со скоростью  $W_{23}^*$ . Вообще говоря, формулы (24.11) можно было выписать сразу из физических соображений, не проводя описанных здесь рассуждений.

Для завершения описания расчетных формул для потоков через боковую грань 2'3'3"2" мы должны дать алгоритм вычисления «больших» величин  $(R, U, V, P)_{23}$ . Это осуществляется с помощью вспомогательной задачи о распаде разрыва. Возьмем два набора газодинамических величин из ячеек, примыкающих к ребру 23, и будем условно называть их левыми и правыми,

ориентируясь на вектор внешней нормали к рассматриваемой боковой грани:

$$\begin{aligned} (\rho, u, v, p)_{j-1/2, k-1/2} &= (\rho, u, v, p)_{23}^I, \\ (\rho, u, v, p)_{j+1/2, k-1/2} &= (\rho, u, v, p)_{23}^{II}. \end{aligned}$$

Векторы скорости  $(u, v)_{j-1/2, k-1/2}$  и  $(u, v)_{j+1/2, k-1/2}$  разложим на нормальную  $N$  и касательную  $T$  составляющие по отношению к ребру 23:

$$\begin{aligned} N_{23}^I &= u_{23}^I \alpha_{23} + v_{23}^I \beta_{23}, & N_{23}^{II} &= u_{23}^{II} \alpha_{23} + v_{23}^{II} \beta_{23}, \\ T_{23}^I &= u_{23}^I \beta_{23} - v_{23}^I \alpha_{23}, & T_{23}^{II} &= u_{23}^{II} \beta_{23} - v_{23}^{II} \alpha_{23}. \end{aligned}$$

Рассмотрим далее задачу о распаде разрыва, описанную в § 13, для которой в качестве параметров  $(u_I, p_I, \rho_I)$  задаются величины  $(N_{23}^I, p_{23}^I, \rho_{23}^I)$ , а в качестве  $(u_{II}, p_{II}, \rho_{II})$  — величины  $(N_{23}^{II}, p_{23}^{II}, \rho_{23}^{II})$  соответственно. Рассчитав с помощью описанного в § 13 алгоритма соответствующую конфигурацию автомодельного решения и учитывая скорость  $W_{23}^*$  движения ребра 23, точно так же, как было описано в § 14 для одномерной схемы, определяем, в какой из областей, полученных в результате распада разрыва, будет находиться ребро 23 в течение рассматриваемого шага по времени. Значения  $U, P, R$  в нужной из областей обозначим  $N_{23}, P_{23}, R_{23}$  соответственно. Присоединим к ним в качестве величины  $T_{23}$  одно из значений  $T_{23}^I$  или  $T_{23}^{II}$ , исходя из сравнения скорости ребра  $W_{23}^*$  и скорости контактного разрыва  $U^*$ , полученной из задачи о распаде разрыва:

$$T_{23} = \begin{cases} T_{23}^I, & \text{если } W_{23}^* < U^*, \\ T_{23}^{II}, & \text{если } W_{23}^* > U^*. \end{cases} \quad (24.12)$$

Рассматривая полученные значения  $N_{23}$  и  $T_{23}$  в качестве нормальной и касательной составляющих вектора скорости по отношению к ребру 23, восстанавливаем ее декартовы составляющие  $(U, V)_{23}$ :

$$\begin{aligned} U_{23} &= N_{23} \alpha_{23} + T_{23} \beta_{23}, \\ V_{23} &= N_{23} \beta_{23} - T_{23} \alpha_{23}. \end{aligned} \quad (24.13)$$

Полученные таким образом значения  $(R, U, V, P)_{23}$  и используются в качестве «больших» величин при вычислении потоков  $\mathbf{Q}_{23}$  в формуле (24.11).

Аналогично тому, как мы уже отмечали в § 7 при конструировании разностной схемы для уравнений акустики с двумя пространственными переменными, мы не будем утверждать, что на ребре 23 в течение промежутка времени от  $t_0$  до  $t_0 + \tau$  будут сохраняться постоянные значения, совпадающие с рассчитанными «большими» величинами. Это не так хотя бы из-за наличия

угловых точек ячейки, в окрестности которых течение носит весьма сложный характер. Однако можно проверить, что описанный алгоритм позволяет в результате сконструировать разностную схему, обеспечивающую первый порядок аппроксимации исходной системы дифференциальных уравнений на гладких решениях. Поэтому, если угодно, все изложенное можно рассматривать в качестве наводящих соображений при конструировании разностной схемы.

Теперь мы полностью описали расчет потоков  $Q_{23} = Q_{j, k-1/2}$  для боковой грани  $(j, k-1/2)$ . Для завершения пересчета нам остается только сказать, как рассчитываются три других слагаемых в формуле (24.4), представляющих потоки через боковые грани  $(j-1, k-1/2)$ ,  $(j-1/2, k)$ ,  $(j-1/2, k-1)$ . Очевидно, что этот расчет аналогичен описанному для грани  $(j, k-1/2)$ , которой мы присвоили сокращенный индекс 23. Более того, все расчетные формулы для остальных граней полностью совпадают с описанными, если заменить в них индекс 23 на следующие: для грани  $(j-1, k-1/2)$  — на индекс 41, для грани  $(j-1/2, k)$  — на индекс 34, для грани  $(j-1/2, k-1)$  — на индекс 12 (см. рис. 24.1) — и использовать при расчете величины в соответствии с введенными обозначениями (24.7). Заметим, что в присвоенном грани индексе существенен порядок номеров, поскольку мы имеем дело с ориентированными поверхностями.

Теперь обратимся к вопросу о проведении вычислений для граней ячеек, примыкающих к внешним границам счетной области. Прежде всего обратим внимание на то, что, как и в одномерном случае, нам фактически нужны не «большие» величины для таких граней, а потоки массы, импульса и энергии, определяемые формулами, аналогичными (24.11). Для их вычисления должны быть привлечены граничные условия. Как правило, границы в задачах с двумя пространственными переменными имеют один из тех физических типов, которые мы рассматривали в § 15 для одномерного случая. Следует только учесть, что вектор скорости теперь имеет две компоненты. Раскладывая его на нормальную и касательную компоненты по отношению к ребру ячейки, как было выше описано для внутренних граней, действуем далее, как в одномерной задаче. К полученным результатам, если это необходимо, присоединяем затем касательную компоненту скорости, определенную по правилу, аналогичному (24.12). Этого должно быть достаточно для вычисления всех нужных величин на рассматриваемом отрезке границы, соединяющем два соседних узла сетки.

В частности, при этом определяется скорость движения этого отрезка в перпендикулярном к нему направлении. На основании этих скоростей производится сдвиг границы в новое положение, отвечающее моменту времени  $t = t_0 + \tau$ . Мы опишем сейчас соот-

ветствующие расчетные формулы для простейшего случая, когда сдвиг граничных узлов производится только вдоль лучей, направления которых остаются неизменными в процессе расчета.

Пусть для определенности речь идет о верхней границе, положение которой в момент времени  $t = t_0$  задается последовательностью  $\{(x_j^B, y_j^B); j = 0, 1, \dots, J\}$ . Направления  $(\xi_j, \eta_j)$  лучей, по которым будут двигаться ее узлы, определяются, если имеется последовательность  $\{(x_j^H, y_j^H); j = 0, 1, \dots, J\}$ , задающая нижнюю границу, формулами

$$\begin{aligned}\xi_j &= \frac{x_j^B - x_j^H}{L_j}, \quad \eta_j = \frac{y_j^B - y_j^H}{L_j}, \\ L_j &= \sqrt{(x_j^B - x_j^H)^2 + (y_j^B - y_j^H)^2}.\end{aligned}\quad (24.14)$$

Пусть  $\{W_{j-1/2}^*; j = 1, \dots, J\}$  — нормальные скорости для интервалов верхней границы, рассчитанные с привлечением граничных условий (или заданные в граничных условиях). Как уже было сказано в предыдущем параграфе, скорость движения узла  $(x_j^B, y_j^B)$  вдоль своего луча  $(\xi_j, \eta_j)$  вычисляется с помощью величин  $W_{j-1/2}^*$ ,  $W_{j+1/2}^*$ . При этом следует учесть, что конец  $B_j$  отрезка  $B_{j-1}B_j$  (см. рис. 23.2) смещается вдоль луча со скоростью  $W_j^*$ :

$$\begin{aligned}W_j^* &= \frac{W_{j-1/2}^*}{\cos \omega_j'}, \\ \cos \omega_j' &= -\xi_j \frac{y_j^B - y_{j-1}^B}{s_{j-1/2}} + \eta_j \frac{x_j^B - x_{j-1}^B}{s_{j-1/2}}, \\ s_{j-1/2} &= \sqrt{(x_j^B - x_{j-1}^B)^2 + (y_j^B - y_{j-1}^B)^2},\end{aligned}\quad (24.15)$$

а конец  $B_j$  отрезка  $B_jB_{j+1}$  — со скоростью  $W_{j+1/2}^*$ :

$$\begin{aligned}W_{j+1/2}^* &= \frac{W_{j+1/2}^*}{\cos \omega_j''}, \\ \cos \omega_j'' &= -\xi_j \frac{y_{j+1}^B - y_j^B}{s_{j+1/2}} + \eta_j \frac{x_{j+1}^B - x_j^B}{s_{j+1/2}}, \\ s_{j+1/2} &= \sqrt{(x_{j+1}^B - x_j^B)^2 + (y_{j+1}^B - y_j^B)^2}.\end{aligned}\quad (24.16)$$

В качестве скорости  $W_j^*$  смещения узла  $(x_j^B, y_j^B)$  вдоль луча мы примем результат интерполяции

$$W_j^* = W_j' \frac{s_{j+1/2}}{s_{j-1/2} + s_{j+1/2}} + W_{j+1/2}' \frac{s_{j-1/2}}{s_{j-1/2} + s_{j+1/2}}. \quad (24.17)$$

После этого новое положение узла  $(x_j^J, y_j^J)$  на момент времени  $t_0 + \tau$  определяется формулами

$$x_j^J = x_j + \tau W_j^* \xi_j, \quad y_j^J = y_j + \tau W_j^* \eta_j.$$

По описанным формулам может быть проведен расчет для значений  $j=1, \dots, J-1$ . Что касается крайних значений  $j=0$  и  $j=J$ , то в рассматриваемой нами ситуации с неподвижными лучами можно поступать так: при  $j=0$  рассчитываем только  $W''_j$ , и полагаем  $W'_j = W''_j$ , а при  $j=J$  полагаем  $W'_j = W''_j$ .

Мы описали движение узлов сетки на границах счетной области для случая, когда подвижными являются только две ее противоположные границы. Когда двигаются оба семейства линий сетки, приходится прибегать к более сложным алгоритмам. Мы вернемся к их описанию в § 31. С одним из таких алгоритмов читатель может ознакомиться по статье [39].

Полученные новые координаты узлов на границах счетной области являются исходными для вычисления новых координат внутренних узлов сетки. Это делается либо по формулам, описанным в предыдущем параграфе, либо с привлечением специальных алгоритмов построения разностных сеток, которые будут описаны в §§ 32, 33 следующей главы.

На этом мы закончим описание разностной схемы для расчета нестационарных двумерных задач газовой динамики. Заметим, что из (24.4) могут быть выписаны явные выражения для всех величин  $(\rho, u, v, p)^{t-1/2, k-1/2}$  на верхнем слое. Таким образом, описанная схема является явной и считать по ней можно только с шагом по времени  $\tau$ , подчиненным некоторому ограничению, обеспечивающему устойчивость. Этот вопрос будет рассмотрен в следующем параграфе.

Возможно, читателю показалось чрезмерно подробным изложение расчетных формул, приведенных в этом параграфе. Цель состояла в том, чтобы дать возможность полностью восстановить вычислительный алгоритм, которым мы пользовались. Это, безусловно, не исключает другой редакции отдельных формул, которая может оказаться более удачной, чем описанная, в конкретных ситуациях.

В заключение кратко остановимся на изменениях, которые нужно внести в описанный алгоритм при расчете осесимметричных газодинамических задач. Если в основу алгоритма положить уравнения в форме (22.22), (22.23) с учетом осевой симметрии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \mathbf{f}_0, \\ \mathbf{f}_0 &= [\rho v, \rho uv, \rho v^2, (e + p)v]^*, \end{aligned} \quad (24.18)$$

то, рассматривая  $x, r$  в качестве декартовых координат в осевом сечении задачи, мы получаем возможность полностью использовать все описанные в этом параграфе формулы, заменив в них величину  $y$  на  $r$  и подразумевая под  $v$  радиальную компоненту скорости. Единственное отличие состоит в наличии правых частей

в уравнениях (24.18). Они должны быть учтены в разностных законах сохранения (24.4) в виде дополнительных слагаемых. При их вычислении, как мы уже неоднократно отмечали, можно пользоваться величинами на «нижнем» слое.

Если вычислительный алгоритм основывается на уравнениях в форме (22.20), (22.21), то, кроме аналогичного изменения, связанного с наличием правой части (у третьего из уравнений), требуется внести еще одно изменение. Оно касается вычисления всех величин  $\Omega$  (с различными индексами), которые ранее определялись формулой (24.8). В разбираемом теперь случае величина  $\Omega$  будет уже не площадью ячейки с вершинами в точках  $(x_l, r_l)$ ,  $l = 1, 2, 3, 4$ , а объемом тела вращения, осевое сечение которого представляет такую ячейку. Поэтому формула (24.8) должна быть заменена следующей:

$$\Omega = \Omega(x_1, r_1; x_2, r_2; x_3, r_3; x_4, r_4) = \\ = \frac{\pi}{3} \{ (r_4 - r_2) [x_3(r_2 + r_4 + r_3) - x_1(r_2 + r_4 + r_1)] - \\ - (r_3 - r_1) [x_4(r_1 + r_3 + r_4) - x_2(r_1 + r_3 + r_2)] \}. \quad (24.19)$$

Этим и исчерпываются все необходимые изменения, которые нужно внести для того, чтобы иметь возможность рассчитывать осесимметричные задачи.

## § 25. Устойчивость и выбор шага по времени

Схема расчета двумерных нестационарных газодинамических задач на прямоугольной сетке. Линеаризованная модель нестационарных уравнений газовой динамики. Критерий устойчивости линеаризованной модели. Использование его в квазилинейных задачах нестационарной двумерной газовой динамики. Линеаризованные модели для стационарной задачи с двумя и тремя переменными. Критерии устойчивости разностных схем для стационарных сверхзвуковых течений.

Описанные в предыдущем параграфе расчетные формулы для нестационарных двумерных задач газовой динамики существенно упрощаются в случае прямоугольной сетки, ориентированной по координатным осям. Мы позволим себе выписать их по двум причинам: во-первых, как уже упоминалось, прямоугольные сетки довольно широко применяются в расчетах, во-вторых, последующее исследование устойчивости описанной схемы основывается на разностных уравнениях для прямоугольной сетки и линеаризованных уравнений газовой динамики.

Итак, пусть разностная сетка будет такой же, как было описано в § 7 или § 10, т. е. образована семействами прямых  $x = x_j$  и прямых  $y = y_k$ , причем шаги  $x_j - x_{j-1} = h_x$ ,  $y_k - y_{k-1} = h_y$  постоянны. Сетка считается неподвижной. Тогда рассмотренная в предыдущем параграфе схема для уравнений (24.1), (24.2)

может быть записана в следующем виде:

$$\sigma^{j-1/2, k-1/2} = \sigma_{j-1/2, k-1/2} - \frac{\tau}{h_x} (\mathbf{A}_{j, k-1/2} - \mathbf{A}_{j-1, k-1/2}) - \\ - \frac{\tau}{h_y} (\mathbf{B}_{j-1/2, k} - \mathbf{B}_{j-1/2, k-1}), \quad (25.1)$$

где

$$\sigma = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} RU \\ P + RU^2 \\ RUV \\ (E + P)U \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} RV \\ RUV \\ P + RV^2 \\ (E + P)V \end{bmatrix}.$$

Векторные величины  $\sigma_{j-1/2, k-1/2}$  и  $\sigma^{j-1/2, k-1/2}$  выражаются через значения «малых» газодинамических величин на нижнем и верхнем слое соответственно, а векторные величины  $\mathbf{A}_{j, k-1/2}$ ,  $\mathbf{A}_{j-1, k-1/2}$ ,  $\mathbf{B}_{j-1/2, k}$ ,  $\mathbf{B}_{j-1/2, k-1}$  — через значения соответствующих «больших» величин. «Большие» величины  $(R, U, P)_{j, k-1/2}$  получаются из решения одномерной задачи о распаде разрыва с начальными данными:

$$\begin{aligned} (\rho, u, p)_I &= (\rho, u, p)_{j-1/2, k-1/2} && \text{при } x < x_j, \\ (\rho, u, p)_{II} &= (\rho, u, p)_{j+1/2, k-1/2} && \text{при } x > x_j. \end{aligned}$$

Ее автомодельное решение, зависящее от переменной  $\xi = \frac{x - x_j}{t - t_0}$ , может быть рассчитано с помощью алгоритма, описанного в § 13. В качестве величин  $(R, U, P)_{j, k-1/2}$  выбираются постоянные значения, которые принимает это решение на разрезе  $x = x_j$ . Величина

$$V_{j, k-1/2} = \begin{cases} v_{j-1/2, k-1/2}, & \text{если } U_{j, k-1/2} > 0, \\ v_{j+1/2, k-1/2}, & \text{если } U_{j, k-1/2} < 0. \end{cases}$$

Совершенно аналогично, «большие» величины  $(R, V, P)_{j-1/2, k}$  определяются как постоянные значения, принимаемые на разрезе  $y = y_k$  автомодельным решением задачи о распаде разрыва с начальными данными:

$$\begin{aligned} (\rho, u, p)_I &= (\rho, v, p)_{j-1/2, k-1/2} && \text{при } y < y_k, \\ (\rho, u, p)_{II} &= (\rho, v, p)_{j-1/2, k+1/2} && \text{при } y > y_k, \end{aligned}$$

зависящим от переменной  $\eta = \frac{y - y_k}{t - t_0}$ . Величина

$$U_{j-1/2, k} = \begin{cases} u_{j-1/2, k-1/2}, & \text{если } V_{j-1/2, k} > 0, \\ u_{j-1/2, k+1/2}, & \text{если } V_{j-1/2, k} < 0. \end{cases}$$

Это краткое описание полностью определяет разностную схему (без граничных условий) для расчета двумерных нестационарных задач газовой динамики на равномерной прямоугольной сетке.

Как и в случае одномерной схемы, рассмотренном в § 16, мы ограничимся исследованием устойчивости линеаризованного аналога построенной разностной схемы. Имея в виду, что в дальнейшем придется рассматривать и трехмерные разностные схемы, мы выпишем сейчас систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которая является линеаризованной моделью для уравнений газовой динамики в пространственном случае. Наиболее просто это достигается, если воспользоваться формой уравнений, аналогичной (22–24), но записанной в декартовых координатах. Тогда линеаризованная система имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} + p_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= 0, \\ \frac{du}{dt} + \frac{1}{p_0} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{dv}{dt} + \frac{1}{p_0} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{dw}{dt} + \frac{1}{p_0} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0, \\ \frac{dp}{dt} + p_0 c_0^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (25.2)$$

где оператор

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} + w_0 \frac{\partial}{\partial z}.$$

Она хорошо описывает процессы в области, где давление, плотность и компоненты скорости достаточно мало отличаются от постоянных значений  $p_0$ ,  $\rho_0$ ,  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ . Функции  $p$ ,  $\rho$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  от  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$  в уравнениях (25.2) представляют малые отклонения от постоянных  $p_0$ ,  $\rho_0$ ,  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$  в невозмущенном состоянии.

Заметим прежде всего, что из первого и последнего уравнений системы (25.2) следует, что

$$\frac{d}{dt} (p - c_0^2 \rho) = 0. \quad (25.3)$$

Это дает нам возможность исключить из рассмотрения величину  $\rho$  и в дальнейшем исследовать только систему четырех уравнений для величин  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p$ . Если ввести вектор-столбец  $\Psi$  неизвестных функций:

$$\Psi = \left\{ u, v, w, \frac{p}{\rho_0 c_0} \right\}^*,$$

то эта система может быть записана в виде

$$I \frac{\partial \Psi}{\partial t} + B \frac{\partial \Psi}{\partial x} + C \frac{\partial \Psi}{\partial y} + D \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0, \quad (25.4)$$

где  $I$  — единичная матрица, а три другие суть

$$B = \begin{vmatrix} u_0 & 0 & 0 & c_0 \\ 0 & u_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_0 & 0 \\ c_0 & 0 & 0 & u_0 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} v_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_0 & 0 & c_0 \\ 0 & 0 & v_0 & 0 \\ 0 & c_0 & 0 & v_0 \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} w_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_0 & c_0 \\ 0 & 0 & c_0 & w_0 \end{vmatrix}. \quad (25.5)$$

Следовательно, линейная система (25.4) уравнений является симметрической. Разностная схема для нее, сконструированная по принципам, изложенным в §§ 9, 10 для произвольной симметрической системы гиперболических уравнений, является моделью разностной схемы для квазилинейной системы уравнений газовой динамики. В одномерном случае такая модель была подробно описана в § 16.

Для формулировки условий устойчивости разностной схемы необходимо отыскать собственные значения характеристических уравнений для «одномерных» систем уравнений, соответствующих (25.4). Рассмотрим одну из таких систем:

$$I \frac{\partial \psi}{\partial t} + B \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0.$$

Легко убедиться, что ее характеристическое уравнение

$$\det \begin{vmatrix} u_0 - \lambda & 0 & 0 & c_0 \\ 0 & u_0 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_0 - \lambda & 0 \\ c_0 & 0 & 0 & u_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (25.6)$$

имеет корни  $\lambda_1 = u_0 + c_0$ ,  $\lambda_2 = u_0 - c_0$ ,  $\lambda_3 = \lambda_4 = u_0$ . Следовательно, если разностная прямоугольная сетка имеет шаг  $h_x$  по переменной  $x$ , то максимальное допустимое значение шага по времени  $\tau_x$  определяется формулой

$$\tau_x = \frac{h_x}{\max(u_0 + c_0, c_0 - u_0)}, \quad (25.7)$$

т. е. совпадает с критерием (16.10).

Точно так же получаются ограничения для значений шагов  $\tau_y$  и  $\tau_z$  по двум другим переменным:

$$\tau_y = \frac{h_y}{\max(v_0 + c_0, c_0 - v_0)}, \quad (25.8)$$

$$\tau_z = \frac{h_z}{\max(w_0 + c_0, c_0 - w_0)}.$$

После этого допустимое значение шага  $\tau$  в разностной схеме для системы уравнений (25.4) определяется формулой (10.35):

$$\tau \left( \frac{1}{\tau_x} + \frac{1}{\tau_y} + \frac{1}{\tau_z} \right) \leq 1. \quad (25.9)$$

В частном случае нестационарных двумерных задач с пространственными переменными  $x$  и  $y$ , не зависящих от переменной  $z$ , система уравнений (25.4)–(25.5) приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \\ \rho_0 c_0 \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} u_0 & 0 & c_0 \\ 0 & u_0 & 0 \\ c_0 & 0 & u_0 \end{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \\ \rho_0 c_0 \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} v_0 & 0 & 0 \\ 0 & v_0 & c_0 \\ 0 & c_0 & v_0 \end{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \\ \rho_0 c_0 \end{bmatrix} = 0, \quad (25.10)$$

а устойчивость разностной схемы для нее на прямоугольной сетке с шагами  $h_x$  и  $h_y$  обеспечивается при ограничении шага  $\tau$  условием

$$\tau \left( \frac{1}{\tau_x} + \frac{1}{\tau_y} \right) \leq 1. \quad (25.11)$$

Линеаризованная разностная схема (без граничных условий) при переходе на следующий шаг по времени, если величина  $\tau$  подчинена такому ограничению, не увеличивает нормы сеточных функций:

$$\| \mathbf{F} \|^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_y \left[ \rho_0 \frac{u_{j-1/2, k-1/2}^2 + v_{j-1/2, k-1/2}^2}{2} + \right. \\ \left. + \frac{p_{j-1/2, k-1/2}^2}{2\rho_0 c_0^2} + k_0 (p_{j-1/2, k-1/2} - c_0^2 \rho_{j-1/2, k-1/2})^2 \right],$$

где  $k_0 > 0$  — произвольный коэффициент,  $\mathbf{F}$  — бесконечномерный вектор, компонентами которого являются значения во всех ячейках сетки всех величин  $\{(\rho, u, v, p)_{j-1/2, k-1/2}\}$ . Предполагается, что норма  $\mathbf{F}$  для начальных данных конечна.

Заметим, что при проведении доказательства устойчивости разностной схемы таким способом, как было выполнено для уравнений акустики в § 8, нам пришлось бы рассмотреть 16 различных вариантов схемы, возникающих при сочетании одного из неравенств

$$u_0 > c_0, \quad 0 < u_0 < c_0, \quad -c_0 < u_0 < 0, \quad u_0 < -c_0$$

с каждым из неравенств

$$v_0 > c_0, \quad 0 < v_0 < c_0, \quad -c_0 < v_0 < 0, \quad v_0 < -c_0.$$

Применение теории симметрических систем и построенных соответствующим образом разностных схем позволяет сразу сделать те выводы, которые мы указали выше.

Критерий выбора шага  $\tau$ , обеспечивающего устойчивость, в § 10 был обобщен на случай параллелограммной сетки. Для уравнений акустики (7.1) оказалось, что при этом в формулах для вычисления «одномерных» шагов  $\tau_x$  и  $\tau_y$  следует в качестве  $h_x$

и  $h_y$  использовать высоты параллелограмма, представляющего ячейку сетки. Поскольку система уравнений (25.10) представляет систему уравнений акустики (7.1) с двумя пространственными переменными, записанную в подвижных координатах (сводясь к ней заменой переменных  $\bar{x} = x - u_0 t$ ,  $\bar{y} = y - v_0 t$ ), очевидно, что критерий (25.11) для шага  $\tau$  с заменой  $h_x$  и  $h_y$  на высоты параллелограмма будет верен для параллелограммной сетки и в случае системы (25.10).

Полученный критерий выбора шага, обоснованный на линеаризованной модельной схеме, используется при реальных расчетах нестационарных двумерных уравнений газовой динамики следующим образом. В каждой ячейке сетки вычисляем допустимое значение шага по времени  $\tau_{j-1/2, k-1/2}^*$ , например, по таким формулам:

$$\begin{aligned}\tau'_{j-1/2, k-1/2} &= \frac{h'_{j-1/2, k-1/2}}{\max(D_{j-1, k-1/2}^{II} - W_{j, k-1/2}^*, -D_{j, k-1/2}^I - W_{j-1, k-1/2}^*)}, \\ \tau''_{j-1/2, k-1/2} &= \frac{h''_{j-1/2, k-1/2}}{\max(D_{j-1/2, k-1/2}^{II} - W_{j-1/2, k}^*, -D_{j-1/2, k}^I - W_{j-1/2, k-1}^*)}, \\ h'_{j-1/2, k-1/2} &= \frac{\Omega_{j-1/2, k-1/2}}{\sqrt{(x_{j-1/2, k} - x_{j-1/2, k-1})^2 + (y_{j-1/2, k} - y_{j-1/2, k-1})^2}}, \\ h''_{j-1/2, k-1/2} &= \frac{\Omega_{j-1/2, k-1/2}}{\sqrt{(x_{j, k-1/2} - x_{j-1, k-1/2})^2 + (y_{j, k-1/2} - y_{j-1, k-1/2})^2}}, \\ \tau_{j-1/2, k-1/2}^* &= \frac{\tau'_{j-1/2, k-1/2} \tau''_{j-1/2, k-1/2}}{\tau'_{j-1/2, k-1/2} + \tau''_{j-1/2, k-1/2}}.\end{aligned}\quad (25.12)$$

В этих формулах  $\tau'$ ,  $\tau''$ —допустимые шаги для одномерных схем. Для их вычисления «усредненные высоты» ячейки  $h'$  и  $h''$  определяются как отношения площади ячейки  $\Omega$  (см. формулу (24.8) в § 24) к длинам отрезков, соединяющих середины противоположных сторон. Далее, величины  $W^*$  представляют скорости перемещения сторон ячейки, и формулы для их вычисления были приведены в предыдущем параграфе (см. формулу (24.9) для ребра 23). Наконец, величины скоростей волн  $D_{j, k-1/2}^I$ ,  $D_{j-1/2, k}^I$ ,  $D_{j-1, k-1/2}^{II}$ ,  $D_{j-1/2, k-1}^{II}$  отыскиваются при расчете соответствующих распадов разрыва на каждом из четырех ребер ячейки. Мы их уже обсуждали в одномерном случае (§ 16) и сейчас останавливаться на них не будем.

В качестве допустимой величины шага по времени  $\tau^*$  следует взять наименьшее из значений  $\tau_{j-1/2, k-1/2}^*$  по всем ячейкам сетки:

$$\tau^* = \min_{j, k} \tau_{j-1/2, k-1/2}^*.$$

В практических расчетах это значение умножается на некоторый коэффициент «запаса», меньший единицы, в силу тех же соображений, которые были изложены в § 16. Величина этого коэффициента определяется теми же формулами (16.13), (16.14).

Многочисленные расчеты, проведенные по описанной схеме, показывают, что найденный критерий обеспечивает устойчивость счета.

Остановимся коротко на случае стационарного сверхзвукового течения, рассмотренном в § 18. Линеаризованная система гиперболических уравнений для него в декартовых координатах представляет частный случай системы (25.4). Рассмотрим стационарную задачу с двумя переменными:

$$\begin{vmatrix} u_0 & 0 & c_0 \\ 0 & u_0 & 0 \\ c_0 & 0 & u_0 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \frac{p}{\rho_0 c_0} \end{bmatrix} \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} v_0 & 0 & 0 \\ 0 & v_0 & c_0 \\ 0 & c_0 & v_0 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \frac{p}{\rho_0 c_0} \end{bmatrix} \end{pmatrix} = 0. \quad (25.13)$$

Симметрическая матрица этой системы при производных по  $x$  является положительно определенной, если  $u_0 > c_0$ , как следует из характеристического уравнения (25.6). Условие  $u_0 > c_0$  представляет аналог требования (18.1), чтобы поток был сверхзвуковым по координате  $x$ .

Характеристическое уравнение системы (25.13)

$$\det \begin{vmatrix} v_0 - u_0 \mu & 0 & -\mu c_0 \\ 0 & v_0 - u_0 \mu & c_0 \\ -\mu c_0 & c_0 & v_0 - u_0 \mu \end{vmatrix} = 0$$

имеет корни

$$\mu_{1,2} = \frac{u_0 v_0 \pm c_0 \sqrt{u_0^2 + v_0^2 - c_0^2}}{u_0^2 - c_0^2}, \quad \mu_3 = \frac{v_0}{u_0}. \quad (25.14)$$

Если выполнено условие  $u_0^2 + v_0^2 > c_0^2$ , то все корни вещественны. Их значения определяют наклоны характеристик гиперболической системы (25.13) на плоскости  $x, y$ . Разностная схема для этой системы, сконструированная по принципам, изложенным в § 9, в которой в роли времени  $t$  выступает переменная  $x$ , будет устойчива, если шаги сетки  $h_x$  и  $h_y$  удовлетворяют ограничению

$$h_x \leq \frac{h_y}{\max(|\mu_1|, |\mu_2|)}, \quad (25.15)$$

где  $\mu_1$  и  $\mu_2$  определяются формулой (25.14).

В § 26 будет рассмотрено стационарное течение с тремя пространственными переменными, сверхзвуковое в направлении координаты  $x$ . Линеаризованная модель для него в декартовых координатах представляет частный случай системы уравнений (25.4),

когда функции не зависят от времени  $t$ , т. е. частные производные по  $t$  можно зачеркнуть. Симметричность этой системы позволяет при конструировании разностной схемы воспользоваться технологией, разработанной в § 10, и получить для нее условие устойчивости:

$$h_x \left[ \frac{\max(|\mu_1|, |\mu_2|)}{h_y} + \frac{\max(|v_1|, |v_2|)}{h_z} \right] \leq 1,$$

$$\mu_{1,2} = \frac{u_0 v_0 \pm c_0 \sqrt{u_0^2 + v_0^2 - c_0^2}}{u_0^2 - c_0^2}, \quad (25.16)$$

$$v_{1,2} = \frac{u_0 w_0 \pm c_0 \sqrt{u_0^2 + w_0^2 - c_0^2}}{u_0^2 - c_0^2}.$$

Полученные условия (25.15), (25.16) устойчивости линеаризованных моделей стационарных сверхзвуковых течений используются при расчете нелинейных задач аналогично тому, как было описано для нестационарных одномерных задач газовой динамики в § 16 и для нестационарных двумерных задач в этом параграфе. Мы не будем останавливаться на этом более подробно.

Заметим в заключение, что полученные ограничения на шаг, по времени диктуются только необходимостью обеспечения устойчивости счета и в ряде случаев не отвечают существу дела, вызывая неоправданные затраты времени ЭВМ. В связи с этим возникает желание освободиться от столь жесткого ограничения временного шага. Оно может быть реализовано путем использования неявных разностных схем. В случае прямоугольной сетки можно использовать конструкцию разностной схемы, описанную в конце § 11, с учетом изложенных в § 21 особенностей, привносимых квазилинейностью задачи.

Более сложная ситуация возникает в случае применения сетки, образованной двумя семействами кривых. Ее мы рассмотрим в следующей главе (§ 35).

## § 26. Схема для стационарных пространственных сверхзвуковых течений

Конструкция разностной сетки. Разностные законы сохранения. Определение «больших» величин из задач о взаимодействии двух потоков. Условие устойчивости схемы.

В настоящем параграфе дается обобщение разностной схемы интегрирования стационарных сверхзвуковых (вернее, « $x$ -сверхзвуковых») течений, описанной в §§ 18, 19, на пространственный случай. Впервые такое обобщение выполнено в работе [64].

Пусть односвязная или двусвязная область  $\Omega$ , которую занимает пересечение потока с плоскостью  $x = \text{const}$ , ограничена

внешним и внутренним контурами  $L_+$  и  $L_-$ , как показано на рис. 26.1,  $a$ ,  $b$ , причем в случае двусвязной области будем считать, что ось  $x$  пересекает указанную плоскость внутри  $L_-$ . Тез же области и границы в плоскости переменных  $r$  и  $\varphi$  изображены на рис. 26.1,  $b$ ,  $c$ . Диапазон изменения  $\varphi$  может быть меньше, чем  $2\pi$ . Так, например, при наличии двух плоскостей симметрии  $\varphi$  меняется от нуля до  $\pi/2$ .

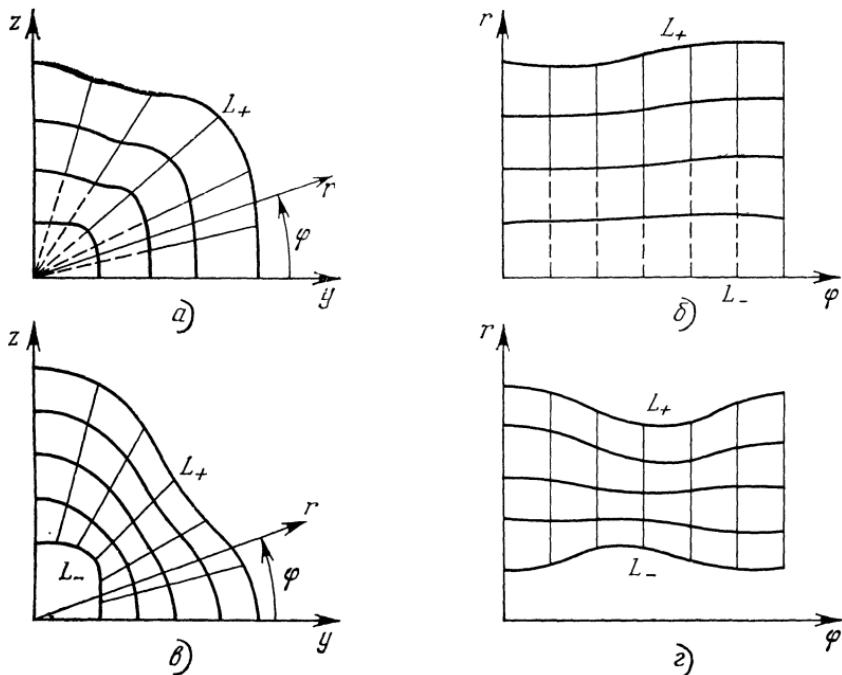


Рис. 26.1.

Описание разбиения области  $\Omega$  на элементарные ячейки дадим для случая односвязной области с двумя плоскостями симметрии. Тогда, если  $r = \mathcal{R}_+(x, \varphi)$  — уравнение границы  $L_+$ , то область  $\Omega$  дается неравенствами

$$0 \leq r \leq \mathcal{R}_+(x, \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

Разбиение проводится в плоскости  $r, \varphi$ , как показано на рис. 26.1,  $b$ ,  $c$ . При этом по  $\varphi$  область  $\Omega$  разбивается на  $K$  вертикальных полос, которым приписываются номера  $k = 1/2, \dots, K - 1/2$ . Границам полос — вертикальным отрезкам, которым в плоскости  $y, z$  отвечают лучи, расходящиеся из начала координат (точки пересечения рассматриваемой плоскости с осью  $x$ ), припишем целые номера  $k = 0, 1, \dots, K$ . Номеру  $k = 0$  соответствует  $\varphi = 0$ , а  $k = K$  — значение  $\varphi = \pi/2$ . Разбиение каждого отрезка

$\varphi = \varphi_k$ , принадлежащего области  $\Omega$ , на  $J$  одинаковых по длине элементарных отрезков и их нумерация выполняются так же, как и в двумерном случае (см. § 18). Точки двух соседних вертикальных прямых  $\varphi = \text{const}$  с одинаковыми номерами  $j$  соединяются (в плоскости  $\varphi, r$ ) прямолинейными отрезками, и получающимся в результате этого элементарным четырехугольным ячейкам присваиваются два полуцелых индекса:  $j - 1/2$  и  $k - 1/2$ , где  $j = 1, \dots, J$  и  $k = 1, \dots, K$ . Средние по ячейке параметры в плоскости  $x = x_0$  называются «малыми» величинами и обозначаются строчными буквами с соответствующими нижними индексами ( $\rho_{j-1/2, k-1/2}, u_{j-1/2, k-1/2}, \dots$ ), а при  $x = x_0 + h_x$  — с верхними индексами ( $\rho^{j-1/2, k-1/2}, u^{j-1/2, k-1/2}, \dots$ ).

Аналогичным образом прямолинейными отрезками соединяются вершины элементарных ячеек, имеющих одинаковые номера и принадлежащих сечениям  $x = x_0$  и  $x = x_0 + h_x$ . В результате весь слой, заключенный между этими сечениями, разбивается на элементарные объемы (шестиугранники), передняя (в направлении оси  $x$ ) и задняя грани которых совпадают с построенными выше элементарными четырехугольниками. Параметры на боковых гранях элементарных объемов припишем в соответствии с нумерацией ячеек и их границ: один целый и один полуцелый индекс (например, на гранях, разделяющих шестиугранники, соседние по  $r$ , первый индекс целый, а второй — полуцелый), а значения, которые получаются осреднением по грани, будем называть «большими» величинами и обозначать прописными буквами с нижними индексами. Отметим, что прямолинейным границам элементарных четырехугольников в плоскости  $r, \varphi$  отвечают криволинейные границы в плоскости  $y, z$ . В случае течений, не очень сильно отличающихся от осесимметричных, это обстоятельство позволяет проводить расчеты при  $K \ll J$  без снижения точности. Заметим также, что боковые грани элементарных шестиугранников в общем случае не являются плоскими. В связи с этим боковым граням поставим в соответствие «боковые» плоскости, каждая из которых проходит через ребро ячейки, лежащей в сечении  $x = x_0$ , и середину противоположного ребра, принадлежащего сечению  $x = x_0 + h_x$ . Введенные таким путем плоскости используются в дальнейшем только при определении «больших» величин.

Если в плоскости  $\varphi, r$  элементарные четырехугольники каждого сечения  $x = \text{const}$  имеют примерно одинаковые размеры (в случае равномерного разбиения по  $\varphi$ ), то в плоскости  $y, z$  при приближении к началу координат ( $r \rightarrow 0$ ) размеры ячеек в окружном направлении быстро уменьшаются. Получающееся в результате этого «сгущение» элементарных ячеек и многогранников, будучи ненужным с точки зрения точности расчета (градиенты параметров при  $r \rightarrow 0$  имеют в общем случае не больший порядок, чем в других областях потока), приводит (в силу усло-

вия устойчивости) к необходимости существенного уменьшения шага интегрирования по  $x$ . Чтобы избежать нежелательных последствий указанного эффекта, при расчете проводится объединение («укрупнение») ячеек (и соответствующих объемов), расположенных у оси  $x$ , путем «выбрасывания» границ, показанных на рис. 26.1,  $a, b$  штриховыми линиями. «Выбрасывание» границ проводится так, чтобы все получившиеся после этого ячейки (со сплошными границами) имели (в плоскости  $y, z$ ) в окружном и радиальном направлениях ребра близких размеров. При построении численного алгоритма в таких случаях удобно тем не менее запоминать и использовать все ячейки (в том числе со штриховыми границами). «Малые» величины в ячейках со штриховыми границами полагаются при этом равными величинам в соответствующей ячейке, полученной в результате объединения ячеек.

Введем ряд обозначений, которые затем будут использованы при построении разностной схемы. Как следует из сказанного ранее, вершины элементарных четырехугольников (в плоскости  $r, \varphi$ ), являющиеся одновременно вершинами элементарных объемов в пространстве  $x, r, \varphi$ , нумеруются целыми числами  $j$  и  $k$ . Аналогичным образом стороны этих четырехугольников (ребра элементарных объемов) отмечаются одним целым и одним полуцелым номерами ( $j-1/2, k$  для вертикальных сторон и  $j, k-1/2$  в противном случае). Пусть  $r_{j, k}, \varphi_{j, k}$  и  $r^{j, k}, \varphi^{j, k}$  — координаты вершин с номерами  $j$  и  $k$  в сечениях  $x=x_0$  и  $x=x_0+h_x$  соответственно, причем в случае разбиения, показанного на рис. 26.1, угловые координаты не зависят от первого индекса, т. е.  $\varphi_{j, k}=\varphi_k$  и  $\varphi^{j, k}=\varphi^k$ .

Для двух расположенных рядом сечений  $x=x_0$  и  $x=x_0+h_x$  определим угловые размеры  $(k-1/2)$ -го вертикального слоя  $(h_\varphi)_{k-1/2}=\varphi_k-\varphi_{k-1}$  и  $(h_\varphi)^{k-1/2}=\varphi^k-\varphi^{k-1}$ , высоты ячейки

$$(h_r)_{j-1/2, i} = r_{j, i} - r_{j-1, i}, \quad (h_r)^{j-1/2, i} = r^{j, i} - r^{j-1, i},$$

отвечающие  $\varphi=\varphi_i$ , где  $i=k-1$  и  $k$ , и средние высоты

$$(h_r)_{j-1/2, k-1/2} = 0,5 [(h_r)_{j-1/2, k-1} + (h_r)_{j-1/2, k}], \\ (h_r)^{j-1/2, k-1/2} = 0,5 [(h_r)^{j-1/2, k-1} + (h_r)^{j-1/2, k}].$$

Кроме того, введем величины

$$(\Delta_1)_{i, k-1/2} = 0,5 (r^{i, k-1} + r^{i, k} - r_{i, k-1} - r_{i, k}),$$

характеризующие приращения средних ординат верхней ( $i=j$ ) и нижней ( $i=j-1$ ) сторон элементарной ячейки при переходе от сечения  $x=x_0$  к сечению  $x=x_0+h_x$ , и величины

$$(\Delta_2)_{i, k-1/2} = 0,5 (r^{i, k} - r^{i, k-1} + r_{i, k} - r_{i, k-1}),$$

которые характеризуют средний наклон в плоскости  $\varphi$ ,  $r$  прямолинейных отрезков, образующих эти стороны.

Ограничимся фиксированной сеткой по угловой координате, когда разбиение по  $\varphi$  не меняется при переходе от сечения  $x=x_0$  к сечению  $x=x_0+h_x$  и, следовательно,  $(h_\varphi)^{k-1/2}=(h_\varphi)_{k-1/2}$ . Для получения разностной схемы проинтегрируем уравнения (18.2) по  $x$  от  $x=x_0$  до  $x=x_0+h$ , взяв в качестве  $S$  построенные выше элементарные ячейки со сплошными границами. Если такая ячейка состоит из  $i-n+1$  ячеек, разделенных по  $\varphi$  штриховыми границами (см. рис. 26.1, а, б), то средним по ячейке параметрам присвоим индексы  $j-1/2$ ,  $l-1/2$ , где  $l=(i+n)/2$ , а  $n-1$  и  $i$  — номера (в порядке возрастания) боковых границ ячейки. При  $i=n=k$  имеем ячейку без внутренних штриховых границ и  $l=k$ . После интегрирования (18.2) с учетом введенных обозначений и определения «больших» величин приедем к системе разностных уравнений

$$\begin{aligned}
 & (ah_r)^{j-1/2, l-1/2} = \\
 & = (ah_r)_{j-1/2, l-1/2} + \sum_{m=n}^i \left[ \left( A\Delta_1 - Bh_x + C\Delta_2 \frac{h_x}{h_\varphi} \right)_{j, m-1/2} - \right. \\
 & \quad \left. - \left( A\Delta_1 - Bh_x + C\Delta_2 \frac{h_x}{h_\varphi} \right)_{j-1, m-1/2} \right] - \left( C \frac{h_x h_r}{h_\varphi} \right)_{j-1/2, i} + \\
 & + \left( C \frac{h_x h_r}{h_\varphi} \right)_{j-1/2, n-1} + \frac{h_x}{2} \sum_{m=n}^i [(f h_r)_{j-1/2, m-1/2} + (f h_r)^{j-1/2, m-1/2}], 
 \end{aligned} \tag{26.1}$$

в которых независимо от индексов  $h_\varphi=(h_\varphi)_{l-1/2}=\varphi_j-\varphi_{n-1}$ , а векторы-столбцы  $a$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $f$  определяются в соответствии с (18.3).

Так как вычисление  $u^{j-1/2, l-1/2}$ ,  $v^{j-1/2, l-1/2}$ , ... при помощи соотношений (26.1) проводится почти так же, как в двумерном случае, то остановимся только на моментах, отличающих эти случаи. Окружная компонента скорости  $w^{j-1/2, l-1/2}$ , в соответствии с определением вектора  $a$ , равна отношению правых частей последнего и первого уравнений системы (26.1). Остальные «малые» величины с верхними полуцелыми индексами находятся по формулам (18.13) с заменой значений, вычисленных по (18.10), аналогичными значениями, определенными по (26.1). При этом изменяется формула (18.14) для  $u$ : в подкоренном выражении должна быть учтена правая часть третьего уравнения движения, которое служит для определения  $\omega$ . «Малые» величины с верхними индексами  $j-1/2$ ,  $k-1/2$  при  $n \leq k \leq i$ , т. е. средние по ячейкам с одной или двумя штриховыми границами, в соответствии со сказанным ранее, полагаются равными величинам с верхними индексами  $j-1/2$ ,  $l-1/2$ .

Для определения «больших» величин (**A**, **B** и **C**), входящих в правые части уравнений (26.1), рассматривается автомодельная задача о взаимодействии двух равномерных полубезграничных сверхзвуковых потоков, линия встречи которых совпадает с соответствующей стороной элементарной ячейки, лежащей в плоскости  $x = x_0$ . Вектор скорости  $\mathbf{q}$  каждого из взаимодействующих потоков можно разложить на три компоненты:  $q^1$ ,  $q^2$  и  $q^3$ , первые две из которых лежат в плоскости, перпендикулярной линии взаимодействия, а третья параллельна этой линии. Так как все линии взаимодействия принадлежат плоскости  $x = x_0$ , то за счет выбора ориентации системы координат, используемой при решении автомодельной задачи о взаимодействии сверхзвуковых потоков, всегда можно положить  $q^1 = u$ . Способ вычисления компонент  $q^2$  и  $q^3$  поясним на примере ребра, которое разделяет две соседние ячейки, заключенные между двумя лучами  $\varphi = \text{const}$ . Приписывая концевым точкам указанного ребра номера  $j$ ,  $k$  и  $j, k - 1$ , введем величины

$$l_r = r_{j, k} - r_{j, k-1}, \quad l_\varphi = 0,5(r_{j, k} + r_{j, k-1})(\varphi_{j, k} - \varphi_{j, k-1}), \\ l = \sqrt{l_r^2 + l_\varphi^2}.$$

Данные величины определяют ориентацию и длину прямолинейного отрезка, изображающего рассматриваемое ребро в плоскости  $\varphi$ ,  $r$ . Согласно определению  $q^2$  и  $q^3$  имеем

$$q^2 = w_{j \pm 1/2, k-1/2}(l_r/l) - v_{j \pm 1/2, k-1/2}(l_\varphi/l), \\ q^3 = w_{j \pm 1/2, k-1/2}(l_\varphi/l) + v_{j \pm 1/2, k-1/2}(l_r/l),$$

где полуцелые индексы, как и ранее, приписаны параметрам во «взаимодействующих» ячейках слоя  $x = x_0$ , а знак плюс (минус) дает значения указанных компонент скорости со стороны ячейки, расположенной дальше (ближе) от оси  $x$ . Аналогичные формулы получаются и для других границ. Так, если рассматриваемая граница — отрезок луча  $\varphi = \text{const}$ , то  $q^2 = w$ ,  $q^3 = v$ , что, кстати, следует и из определения  $q^2$  и  $q^3$ .

После того, как компоненты  $q^i$  с обеих сторон от линии соприкосновения потоков найдены, рассматриваемая задача сводится к задаче взаимодействия двух плоских потоков, каждый из которых при  $u > c$  является сверхзвуковым. При этом компоненты  $q^3$ , касательные к линии соприкосновения, на взаимодействие не влияют и для каждого потока остаются неизменными вплоть до поверхности тангенциального разрыва, начинающейся на линии соприкосновения. Потоки массы, количества движения и энергии через боковые грани элементарных многогранников, входящие в правые части разностных уравнений (26.1), полагаются равными соответствующим величинам в той подобласти области взаимо-

действия, в которую попадает рассматриваемая «боковая» плоскость. Последняя, в согласии со сказанным ранее, проводится (в пространстве  $x, r, \phi$ ) через рассматриваемую сторону элементарной ячейки, лежащей в сечении  $x = x_0$ , т. е. через линию соприкосновения потоков и через середину противоположного ребра элементарного многогранника, принадлежащего плоскости  $x = x_0 + h_x$ . Такие же «боковые» плоскости используются при расчете «больших» величин на тех гранях элементарных многогранников, которые совпадают с твердой стенкой, с границей струи или с головной ударной волной (если она выделяется). В этих случаях рассматриваются автомодельные задачи двумерного обтекания (или истечения), причем составляющая скорости  $q^3$ , параллельная ребру соответствующей элементарной ячейки, принадлежащей плоскости  $x = x_0$ , также не изменяется.

При расчете струи использование «боковых» плоскостей для каждой ячейки, примыкающей к границе струи, позволяет найти радиальную координату только средней точки противоположного ребра, т. е.  $r^{J, k-1/2}$ . Поэтому построению всей разностной сетки в сечении  $x = x_0 + h_x$  предшествует решение задачи определения «больших» величин и одновременно координат  $r^{J, k-1/2}$  средних точек всей границы струи. Радиальные координаты вершин граничных ячеек  $r^{J, k}$  определяются затем по формулам

$$r^{J, k} = 0,5(r^{J, k-1/2} + r^{J, k+1/2}) \quad \text{при } k = 1, \dots, K-1, \quad (26.2)$$

$$r^{J, 0} = r^{J, 1/2}, \quad r^{J, K} = r^{J, K-1/2}.$$

При получении двух последних равенств учтено, что в данном случае лучи с номерами  $k=0$  и  $k=K$  принадлежат плоскостям симметрии. Отметим кстати, что при вычислении «больших» величин на плоскостях симметрии рассматривается задача об обтекании плоской стенки, параллельной оси  $x$ . Расчет внутренней границы кольцевой струи также проводится по формулам (26.2) с заменой индекса  $J$  нулем. Аналогичным образом выполняется построение «выделяемой» головной ударной волны.

Исследование построенной выше разностной схемы аналогично анализу разностных схем для интегрирования уравнений нестационарной газовой динамики, изложенному в гл. II и в предыдущих параграфах данной главы. Как вытекает из такого исследования, при равномерной сетке построенная схема на гладких решениях обеспечивает первый порядок аппроксимации. Для анализа эффектов укрупнения расчетных ячеек в окрестности оси  $x$  и обоснования этого приема были поставлены специальные расчеты, в процессе которых проводилось сравнение результатов, полученных с использованием и без использования такого укрупнения. Исследование устойчивости приводит к ограничению на

шаг интегрирования по  $x$ :

$$h_x \leqslant \frac{H_r H_\varphi}{H_r + H_\varphi}.$$

Здесь  $H_r$  совпадает с величиной  $h_x^*$ , введенной в конце § 18, а  $H_\varphi$ —аналогичная величина для окружного направления. При вычислении  $H_\varphi$ , как и вообще при расчете, не рассматриваются взаимодействия потоков на границах, показанных на рис. 26.1, *a*, *b* штриховыми линиями, а за момент пересечения ударной волны или начальной характеристики веера волн разрежения с противоположной границей принимается момент достижения середины этой границы (последнее существенно для ячеек, примыкающих к оси  $x$ ).

## § 27. Схема для нестационарных пространственных течений

Неподвижная пространственная сетка. Разностная форма законов сохранения. Условие устойчивости схемы.

Ограничимся рассмотрением случая неподвижной сетки. Интегральные законы сохранения, отвечающие уравнениям газовой динамики в цилиндрических координатах (22.20), (22.21), запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \sigma r dx dr d\varphi + \iint_S \mathbf{a} r dr d\varphi + \mathbf{b} r dx d\varphi + \mathbf{c} dx dr = \\ = \iiint_{\Omega} \mathbf{f} dx dr d\varphi, \end{aligned} \quad (27.1)$$

где вектор-функции  $\sigma$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  определены формулами (22.17), а вектор  $\mathbf{f}$ —формулами (22.21). Здесь  $\Omega$ —произвольный фиксированный (не зависящий от времени) объем,  $S$ —ограничивающая его замкнутая поверхность,  $\omega$ —проекция вектора скорости  $\mathbf{q}$  на окружное направление, прочие обозначения совпадают с использованными в § 26, в частности,  $u$  и  $v$ —проекции вектора скорости на оси  $x$  и  $r$ .

Наряду с цилиндрической введем прямоугольную систему координат  $x, y, z$ . Совместим оси  $x$  цилиндрической и прямоугольной систем, а угол  $\varphi$  будем отсчитывать от положительного направления оси  $y$ . В координатах  $x, r, \varphi$  исследуемая область течения  $\Omega$  предполагается следующей:  $x_a \leqslant x \leqslant x_b$ ,  $\mathcal{R}_-(x, \varphi) \leqslant r \leqslant \mathcal{R}_+(x, \varphi)$ ,  $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ , где  $x_a$  и  $x_b$ —заданные константы, а функции  $\mathcal{R}_-$  и  $\mathcal{R}_+$  либо заданы, либо определяются в процессе решения. При  $\mathcal{R}_- = 0$  область  $\Omega$  содержит ось  $x$ . При наличии одной или более плоскостей симметрии интервал изменения  $\varphi$

может быть уменьшен:  $0 \leq \varphi \leq \pi/\alpha$ , где  $\alpha = 1, 2, \dots$  — число таких плоскостей.

Построение разностной сетки, т. е. разбиение  $\Omega$  на элементарные объемы, включает в себя разбиение каждой меридиональной плоскости  $\varphi = \text{const}$  и каждого сечения  $x = \text{const}$  на элементарные (не обязательно четырехугольные) площадки и образование с использованием полученных в результате такого разбиения плоских элементов пространственных элементарных многогранников. В меридиональных плоскостях разбиение выполняется так же, как и в двумерном случае (см. § 18), на  $IJ$  ячеек, где  $I$  — число слоев по  $x$ , а  $J$  — по  $r$ . При этом вертикальные границы слоев образуются в результате пересечения всех меридиональных плоскостей плоскостями  $x = \text{const}$ . Разбиение последних осуществляется аналогично принятому при расчете пространственных сверхзвуковых стационарных течений (см. § 26) и включает  $K$  угловых сегментов равной величины:  $h_\varphi = 2\pi/K$  или  $h_\varphi = \pi/(\alpha K)$ , причем в случае  $\mathcal{R}_- \equiv 0$  в окрестности оси  $x$ , как и в § 26, проводится объединение ячеек. Отметим, что не все грани элементарных многогранников оказываются плоскими даже в пространстве  $x, r, \varphi$  (если систему  $x, r, \varphi$  рассматривать как декартову), хотя ребра всех граней в указанном пространстве — отрезки прямых.

Разностная схема, при помощи которой по величинам на известном временном слое ( $t$ ) определяются параметры потока на следующем слое ( $t + \tau$ ), получается применением проинтегрированных по времени от  $t$  до  $t + \tau$  уравнений (27.1) к построенным выше элементарным многогранникам. Используя, как и в двумерном случае, теорему о среднем при вычислении соответствующих интегралов, придем к разностным соотношениям

$$\begin{aligned} \rho^{i-1/2, j-1/2, k-1/2} &= \rho_{i-1/2, j-1/2, k-1/2} - \\ &- \frac{\tau}{G_{i-1/2, j-1/2, k-1/2}} (A_{i, j-1/2, k-1/2} - A_{i-1, j-1/2, k-1/2} + \\ &+ B_{i-1/2, j, k-1/2} - B_{i-1/2, j-1, k-1/2} + C_{i-1/2, j-1/2, k} - \\ &- C_{i-1/2, j-1/2, k-1}), \quad (27.2_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\rho u)^{i-1/2, j-1/2, k-1/2} &= (\rho u)_{i-1/2, j-1/2, k-1/2} - \\ &- \frac{\tau}{G_{i-1/2, j-1/2, k-1/2}} [(Prh_r h_\varphi + AU)_{i, j-1/2, k-1/2} - \\ &- (Prh_r h_\varphi + AU)_{i-1, j-1, k-1/2} + (Prh_r h_\varphi + BU)_{i-1/2, j, k-1/2} - \\ &- (Prh_r h_\varphi + BU)_{i-1/2, j-1, k-1/2} + (Prh_r h_\varphi + CU)_{i-1/2, j-1/2, k} - \\ &- (Prh_r h_\varphi + CU)_{i-1/2, j-1/2, k-1}], \quad (27.2_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\rho v)^{t-1/2, j-1/2, k-1/2} = & (\rho v)_{t-1/2, j-1/2, k-1/2} - \\
 & - \frac{\tau}{G_{t-1/2, j-1/2, k-1/2}} [(AV)_{t, j-1/2, k-1/2} - (AV)_{t-1, j-1/2, k-1/2} + \\
 & + (Prh_x h_\Phi + BV)_{i-1/2, j, k-1/2} - (Prh_x h_\Phi + BV)_{i-1/2, j-1, k-1/2} + \\
 & + (CW)_{i-1/2, j-1/2, k} - (CW)_{i-1/2, j-1/2, k-1}] + \\
 & + \tau (\rho + \rho w^2)_{i-1/2, j-1/2, k-1/2}, \quad (27.2_3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\rho w)^{t-1/2, j-1/2, k-1/2} = & (\rho w)_{t-1/2, j-1/2, k-1/2} - \\
 & - \frac{\tau}{G_{t-1/2, j-1/2, k-1/2}} [(AW)_{i, j-1/2, k-1/2} - (AW)_{i-1, j-1/2, k-1/2} + \\
 & + (Ph_x h_r^0 + BW)_{i-1/2, j, k-1/2} - (Ph_x h_r^0 + BW)_{i-1/2, j-1, k-1/2} + \\
 & + (Ph_x h_r + CW)_{i-1/2, j-1/2, k} - (Ph_x h_r + CW)_{i-1/2, j-1/2, k-1}] - \\
 & - \tau (\rho w^2)_{i-1/2, j-1/2, k-1/2}, \quad (27.2_4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [\rho (2\varepsilon + q^2)]^{t-1/2, j-1/2, k-1/2} = & [\rho (2\varepsilon + q^2)]_{t-1/2, j-1/2, k-1/2} - \\
 & - \frac{\tau}{G_{t-1/2, j-1/2, k-1/2}} \{ [A(2I + Q^2)]_{i, j-1/2, k-1/2} - \\
 & - [A(2I + Q^2)]_{i-1, j-1/2, k-1/2} + [B(2I + Q^2)]_{i-1/2, j, k-1/2} - \\
 & - [B(2I + Q^2)]_{i-1/2, j-1, k-1/2} + [C(2I + Q^2)]_{i-1/2, j-1/2, k} - \\
 & - [C(2I + Q^2)]_{i-1/2, j-1/2, k-1} \}. \quad (27.2_5)
 \end{aligned}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$A = R U r h_r h_\Phi,$$

$$B = R (U r h_r h_\Phi + V r h_x h_\Phi + W h_x h_r),$$

$$C = R (U r h_r h_\Phi + W h_x h_r),$$

$$r_{i, j-1/2, k-1/2} = (r_{i, j, k} + r_{i, j-1, k} + r_{i, j, k-1} + r_{i, j-1, k-1})/4,$$

$$r_{i-1/2, j, k-1/2} = (r_{i, j, k} + r_{i-1, j, k} + r_{i, j, k-1} + r_{i-1, j, k-1})/4,$$

$$r_{i-1/2, j-1/2, k} = (r_{i, j, k} + r_{i-1, j, k} + r_{i, j-1, k} + r_{i-1, j-1, k})/4,$$

$$(h_r)_{i, j-1/2, k-1/2} = (r_{i, j, k} + r_{i, j, k-1} - r_{i, j-1, k} - r_{i, j-1, k-1})/2,$$

$$(h_r)_{i-1/2, j, k-1/2} = (r_{i-1, j, k} + r_{i-1, j, k-1} - r_{i, j, k} - r_{i, j, k-1})/2,$$

$$(h_r)_{i-1/2, j-1/2, k} = (r_{i, j, k} + r_{i-1, j, k} - r_{i, j-1, k} - r_{i-1, j-1, k})/2,$$

$$(h_r^0)_{i-1/2, j, k-1/2} = (r_{i, j, k-1} + r_{i-1, j, k-1} - r_{i, j, k} - r_{i-1, j, k})/2.$$

Соответствующие величины для других граней элементарного многогранника, которым отвечают тройки чисел  $i-1, j-1/2, k-1/2; i-1/2, j-1, k-1/2$  и  $i-1/2, j-1/2, k-1$ , вводятся аналогичным образом. Прочие переменные в (27.2) имеют такой смысл:  $G_{i-1/2, j-1/2, k-1/2}$  — объем элементарного многогранника; прописными буквами обозначены значения параметров на гранях многогранника; эти значения, как и в двумерном случае,

находятся из решения автомодельной задачи о распаде произвольного разрыва, причем энталпию  $I$  в (27.2<sub>5</sub>) не следует путать с  $I$  — числом слоев по  $x$ ; остальные обозначения в (27.2) совпадают или аналогичны принятым ранее. Система (27.2) записана для случая, когда элементарный объем — восьмигранник. При большем числе граней (это имеет место, например, при объединении многогранников, расположенных у оси  $x$ ) правые части разностных уравнений содержат суммы соответствующих потоков, вычисленных для всех граней.

Решение уравнений (27.1) проводится так же, как в одномерном или двумерном случаях, и позволяет по распределениям параметров на известном временном слое  $t$  определить их распределение на слое  $t + \tau$ . Шаг интегрирования по времени  $\tau$  при этом должен удовлетворять условию устойчивости, которое, как показывает анализ, имеет вид

$$\tau \leq \frac{\tau_x \tau_r \tau_\phi}{\tau_x \tau_r + \tau_x \tau_\phi + \tau_r \tau_\phi}. \quad (27.3)$$

Здесь  $\tau_x$ ,  $\tau_r$  и  $\tau_\phi$  — временные интервалы, за которые волны, образующиеся в задаче о распаде разрыва, достигают противоположной грани многогранника по осям  $x$ ,  $r$  и  $\phi$  соответственно. На гладких решениях и равномерной сетке разностная схема (27.2) аппроксимирует исходную систему (27.1) с первым порядком точности.

## Г л а в а IV

# РЕШЕНИЕ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ПРОИЗВОЛЬНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

## § 28. Формализация способов описания картины рассчитываемого течения

Использование априорной информации о решении при построении вычислительного алгоритма. Связь криволинейной системы координат с конфигурацией особенностей решения. Формализация описания картины течения посредством понятий: счетная область, счетная граница, образ счетной области, образ счетной границы.

При расчете двумерных нестационарных гидродинамических течений в областях со сложной геометрией получить достоверный ответ можно лишь при условии использования алгоритмов, адаптирующихся к картине течения.

При решении задач мы часто располагаем априорной информацией о свойствах искомых решений. Игнорировать такую информацию неразумно, ее надо использовать для повышения качества расчета. С другой стороны, создавать методику для каждой конкретной задачи невозможно, хотелось, чтобы метод годился для возможно более широкого класса задач, а в идеале для расчета произвольного двумерного течения.

Как примирить необходимость индивидуального подхода к расчету конкретной задачи, учитывая ее особенности, с требованием возможно большей универсальности метода — вот в чем один из важных вопросов, который надо решить, чтобы создать хороший алгоритм. Еще раз следует подчеркнуть, что создание вычислительного алгоритма — это не только написание и отработка разностной схемы, аппроксимирующей соответствующую систему дифференциальных уравнений, обеспечивающей устойчивость счета (при определенных ограничениях), но и создание способа учесть конкретные особенности индивидуальной задачи, аккуратно описать существенные детали, пожертвовав второстепенными. Только на таком пути можно надеяться получить удовлетворительную точность, располагая ограниченными ресурсами, а зачастую и вообще провести расчет. Положение ослож-

няется еще и тем, что «существенные детали» могут появляться в процессе самого расчета, а это может привести к необходимости изменения первоначальной тактики расчета. Чтобы создать вычислительный алгоритм, удовлетворяющий описанным выше принципам, надо прежде всего научиться формализовать описание картины течения, или, как мы будем говорить, надо дать формальное описание задачи. Если учесть, что гидродинамическая среда может состоять из разных областей с разными физическими свойствами, то описание картины течения естественно начать с описания геометрии задачи. Аккуратно передать границы областей на протяжении всего расчета можно только при условии их выделения. Это можно сделать, если связать положение границ с криволинейной системой координат, в которой границы были бы координатными линиями. Тогда мы сможем для каждой задачи подобрать индивидуальный подход при описании особенностей ее геометрии.

Этот подход подсказывает и формальный способ описания картины течения.

Криволинейную систему координат, связанную с положением границ, в каждой области легче построить, если область можно представить в виде четырехугольника, стороны которого являются координатными линиями. Тогда в криволинейной системе координат каждая область представляет собой прямоугольник, который мы будем называть ее *образом*. В описанном подходе произвол допустим в представлении всей картины течения посредством набора из областей описанного вида. Если исходная картина течения набором таких областей не может быть представлена, то можно ввести вспомогательные (счетные) границы, чтобы желаемое разбиение осуществить. При таком подходе одна физическая область может состоять из нескольких, как мы будем называть, *счетных областей*. Следовательно, картину течения можно описать заданием образов областей. Описание такого набора прямоугольников и их взаимного расположения мы будем называть *заданием структуры задачи* — так формализуется описание картины течения.

При рассматриваемом нами подходе можно выделять отдельные разрывы (например, ударные волны, детонационные волны, контактные границы), повышая точность расчета.

Кроме того, имеется возможность дополнительно вводить счетные границы для того, чтобы сложные области разделить на простые. В задании структуры должны проявиться искусство и опыт вычислителя так, чтобы для конкретной задачи выбрать наиболее естественную и простую структуру.

Надо иметь в виду еще и то обстоятельство, что чем сложнее конфигурация счетной области, тем более трудоемким будет алгоритм построения для нее криволинейной системы координат.

Еще раз подчеркнем, что счетной областью является топологический четырехугольник, ее образом — прямоугольник.

Для области сложной конфигурации число счетных границ может быть больше четырех. Тогда соответствующие стороны прямоугольника-образа будут состоять из нескольких отрезков — «образов» счетных границ различного типа.

При описании структуры задачи оказалось удобнее ввести двухступенчатое упорядочение.

Первая ступень — *ярус* — это такое объединение счетных областей, когда каждая пара прямоугольников-образов имеет совпадающие границы и вся структура снова образует прямоугольник из прямоугольников.

Вторая ступень — описание взаимного расположения ярусов, что естественно сделать с помощью описания соседства счетных границ, образующих границы яруса.

Напомним, что структура задачи является формальным образом ее быстро меняющейся в процессе движения геометрии. Поэтому, кроме описания данного состояния структуры, мы должны уметь ее перестраивать в процессе расчета. Это делается за счет изменения типов счетных границ, за счет изменения описания соседства. (Это дает возможность, например, образовывать или ликвидировать зазоры между ярусами, что отслеживается автоматически в процессе расчета.) Иллюстрацией к сказанному может служить пример расчета соударения пластин в задаче о сварке взрывом, описанный в § 42.

## § 29. Нестационарная система координат, следящая за движением границ. Выбор переменных

Локальная криволинейная система координат. Выбор неизвестных функций для описания движения и параметров, задающих локальную криволинейную систему координат.

Пусть мы описали структуру задачи и тем самым определили счетные области и их границы, за движением которых мы должны следить. Границы счетной области задают координатный четырехугольник, в котором в каждый момент надо построить оба семейства координатных линий.

Если исходить из классической системы уравнений газовой динамики, записанной в криволинейной системе координат  $\xi, \eta, t$ , то функции  $\xi = f_1(x, y, t)$ ,  $\eta = f_2(x, y, t)$  должны удовлетворять определенным условиям гладкости.

Построить такую глобальную систему координат практически невозможно. Следовательно, мы должны уметь записывать уравнения в локальной системе координат, которую построить значительно проще.

Но тогда встает вопрос о выборе неизвестных функций для описания движения.

Конечно, для скалярных величин локальность системы координат несущественна, но как поступить с компонентами скорости?

Разложение вектора скорости на ковариантные или контравариантные составляющие \*) неприемлемо, так как эти компоненты терпят разрыв при переходе от одной локальной системы координат к другой, если последние строить независимо.

Представить вектор скорости в декартовых компонентах — значит отказаться от достижения одной из основных целей — использования гладкости решения вдоль координатных линий, поскольку последние связываются с особенностями рассчитываемого течения.

Оба упомянутых выше недостатка будут устранены, если вдоль каждой из координатных линий вектор скорости  $\mathbf{q}$  разложить на касательную и ортогональную к ней компоненты. Следовательно, вдоль координатных линий  $\eta = \text{const}$  компонента по касательной  $\mu^k$ , ортогональная ей  $v^n$ , при этом  $(\mu^k)^2 + (v^n)^2 = |\mathbf{q}|^2$ . Аналогично, вдоль координатных линий  $\xi = \text{const}$  компонентами будут  $v^k$  и  $\mu^n$ , где

$$(v^k)^2 + (\mu^n)^2 = |\mathbf{q}|^2.$$

Построим на момент времени  $t$  в произвольной точке плоскости  $x, y$  локальную систему координат. Ее можно определить заданием метрических параметров длины вдоль координатных линий первого и второго семейства и направляющих косинусов касательных к координатным линиям. Пусть координатными линиями первого семейства будут линии  $\eta = f_2(x, y) = \text{const}$ , а второго  $\xi = f_1(x, y) = \text{const}$ .

Линии первого семейства мы для краткости будем называть  $\xi$ -линиями, а второго  $\eta$ -линиями (по «имени» меняющейся координаты).

Метрический параметр и направляющие косинусы с осями  $x$  и  $y$  для  $\xi$ -линий обозначим соответственно  $\sqrt{g_{11}}$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta'$ .

Метрический параметр и направляющие косинусы для  $\eta$ -линий обозначим через  $\sqrt{g_{22}}$ ,  $\alpha''$ ,  $\beta''$ .

Тогда  $\alpha$  — косинус и  $\beta$  — синус угла между координатными линиями первого и второго семейства через направляющие косинусы запишутся так:

$$\alpha = \alpha' \alpha'' + \beta' \beta'', \quad \beta = \alpha' \beta'' - \beta' \alpha''. \quad (29.1)$$

\*) Мы предполагаем, что читатель знаком с понятиями ковариантных и контравариантных составляющих вектора, например, по книге [83].

Мы будем предполагать, что криволинейная система координат невырожденная, т. е. что  $\beta \neq 0$ .

Напомним некоторые известные соотношения, связанные с введением локальной криволинейной системы координат.

Если выбрать локальный базис из векторов касательных к координатным линиям в каждой точке и разложить по ним произвольный вектор  $q$ , то его составляющими будут  $\mu$  (по касательной к  $\xi$ -линии) и  $v$  (по касательной к  $\eta$ -линии).

Их называют *контравариантными компонентами*. Они связаны с декартовыми компонентами  $u$  и  $v$  так:

$$\mu = \frac{1}{\beta} (u\beta'' - v\alpha''), \quad v = \frac{1}{\beta} (v\alpha' - u\beta'). \quad (29.2)$$

Выбранные нами в предыдущем параграфе компоненты скорости  $\mu^k$ ,  $v^n$  вдоль  $\xi$ -линий и  $v^k$ ,  $\mu^n$  вдоль  $\eta$ -линий выражаются через контравариантные составляющие следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu^k &= \mu + \alpha v \quad (\text{направлена по касательной к } \xi\text{-линии}), \\ v^n &= v\beta \quad (\text{направлена ортогонально касательной к } \xi\text{-линии}), \\ v^k &= v + \alpha\mu \quad (\text{направлена по касательной к } \eta\text{-линии}), \\ \mu^n &= \mu\beta \quad (\text{направлена ортогонально касательной к } \eta\text{-линии}). \end{aligned} \quad (29.3)$$

Через декартовы компоненты скорости  $u$ ,  $v$  введенные компоненты выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu^k &= u\alpha' + v\beta', \quad v^n = v\alpha' - u\beta', \\ v^k &= u\alpha'' + v\beta'', \quad \mu^n = u\beta'' - v\alpha''. \end{aligned} \quad (29.4)$$

При переходе к криволинейным координатам

$$\xi = f_1(x, y), \quad \eta = f_2(x, y), \quad t = t$$

направляющие косинусы и метрические параметры связаны с частными производными функций, задающих переход к криволинейным координатам, соотношениями

$$\begin{aligned} \alpha' &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial x}{\partial \xi}, \quad \alpha'' = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial x}{\partial \eta}, \\ \beta' &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \beta'' = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \\ dx &= \alpha' \sqrt{g_{11}} d\xi + \alpha'' \sqrt{g_{22}} d\eta, \\ dy &= \beta' \sqrt{g_{11}} d\xi + \beta'' \sqrt{g_{22}} d\eta. \end{aligned} \quad (29.5)$$

Частные производные произвольной гладкой функции  $F$ , как функции от  $x$ ,  $y$ , связаны с производными по  $\xi$ ,  $\eta$  так:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{1}{\beta} \left[ \frac{\beta''}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial F}{\partial \xi} - \frac{\beta'}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial F}{\partial \eta} \right], \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{1}{\beta} \left[ -\frac{\alpha''}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\alpha'}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial F}{\partial \eta} \right].\end{aligned}\quad (29.6)$$

Якобиан преобразования  $\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = \sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}} \beta \equiv \sqrt{g}$ , следовательно, элемент объема  $dx dy = \sqrt{g} d\xi d\eta$ . Мы напомнили те элементарные сведения из теории векторного исчисления, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Подчеркнем еще раз, что при рассмотрении соотношений, содержащих производные или интегралы, следует учитывать, что базисные векторы в криволинейной системе координат сами являются функциями точки.

Мы построили локальную систему координат, выбрали функции для описания движения и теперь хотим выписать систему уравнений гидродинамики в выбранных переменных и функциях.

Напомним, что нашей конечной задачей является построение конечноразностного алгоритма и мы хотим построить его на основе выполнения законов сохранения. Такой подход, как известно, имеет преимущества при расчете разрывных решений. Поэтому исходной для нас будет интегральная форма уравнений газовой динамики.

### § 30. Уравнения газовой динамики в форме законов сохранения для криволинейной системы координат

Построение интегральной системы уравнений газовой динамики в локальном базисе.

Нашей задачей будет записать систему уравнений газодинамики в интегральной форме для описанной выше локальной системы координат. (Заметим, что это делается неоднозначно!) В качестве исходной выберем систему дифференциальных уравнений газодинамики в декартовых координатах, отвечающую законам сохранения массы, импульса, энергии:

$$\begin{aligned}\frac{\partial [Q(y) \rho]}{\partial t} + \frac{\partial [Q(y) \rho u]}{\partial x} + \frac{\partial [Q(y) \rho v]}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial [Q(y) \rho u]}{\partial t} + \frac{\partial [Q(y) (\rho u^2 + p)]}{\partial x} + \frac{\partial [Q(y) \rho uv]}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial [Q(y) \rho v]}{\partial t} + \frac{\partial [Q(y) \rho uv]}{\partial x} + \frac{\partial [Q(y) (\rho v^2 + p)]}{\partial y} &= p \frac{dQ(y)}{dy}, \\ \frac{\partial [Q(y) e]}{\partial t} + \frac{\partial [Q(y) (e + p) u]}{\partial x} + \frac{\partial [Q(y) (e + p) v]}{\partial y} &= 0,\end{aligned}\quad (30.1)$$

Мы пользуемся общепринятыми обозначениями:  $t$ ,  $x$ ,  $y$ —независимые переменные во времени и в пространстве,  $\rho$ —плотность,  $\epsilon$ —внутренняя энергия единицы массы,  $p$ —давление,  $e = \rho \left( \epsilon + \frac{u^2 + v^2}{2} \right)$ ,  $u$ ,  $v$ —декартовы компоненты вектора скорости  $\mathbf{q}$ . Функция  $Q(y) = y^\delta$ , где  $\delta = 0$  для плоского течения,  $\delta = 1$  для осесимметричного с осью симметрии  $x$ .

К этой системе надо присоединить уравнение состояния, например, в форме  $p = p(\rho, \epsilon)$  (или в какой-либо иной). Этот вопрос мы уже обсуждали в § 12 и сейчас на нем останавливаться не будем.

Для построения интегральной системы уравнений в локальном базисе и выбранных в § 29 компонентах скорости выполним довольно длинную цепочку последовательных преобразований исходной системы (30.1).

Умножим второе уравнение системы на  $\alpha'$ , а третье—на  $\beta'$  и результаты сложим. Полученную комбинацию примем в качестве нового второго уравнения системы. Умножая второе уравнение исходной системы на  $\alpha''$ , а третье—на  $\beta''$  и произведя сложение, получим в результате новое третье уравнение. После описанных преобразований система уравнений газовой динамики примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [Q(y)\rho]}{\partial t} + \frac{\partial [Q(y)\rho u]}{\partial x} + \frac{\partial [Q(y)\rho v]}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial [Q(y)\rho(u\alpha' + v\beta')]}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [Q(y)\rho\alpha' + Q(y)\rho u(u\alpha' + v\beta')] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} [Q(y)p\beta' + Q(y)\rho v(u\alpha' + v\beta')] - \\ &- \rho u Q(y) \left( u \frac{\partial \alpha'}{\partial x} - v \frac{\partial \alpha'}{\partial y} \right) - p \left[ \frac{\partial \alpha' Q(y)}{\partial x} + \frac{\partial \beta' Q(y)}{\partial y} \right] - \\ &- \rho v Q(y) \left( u \frac{\partial \beta'}{\partial x} + v \frac{\partial \beta'}{\partial y} \right) = 0, \quad (30.2) \\ \frac{\partial [\rho Q(y)(u\alpha'' + v\beta'')]}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} Q(y)[p\alpha'' + \rho u(u\alpha'' + v\beta'')] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} Q(y)[p\beta'' + \rho v(u\alpha'' + v\beta'')] - p \left[ \frac{\partial \alpha'' Q(y)}{\partial x} + \frac{\partial \beta'' Q(y)}{\partial y} \right] - \\ &- \rho u Q(y) \left( u \frac{\partial \alpha''}{\partial x} + v \frac{\partial \alpha''}{\partial y} \right) - \rho v Q(y) \left( u \frac{\partial \beta''}{\partial x} + v \frac{\partial \beta''}{\partial y} \right) = 0, \\ \frac{\partial [Q(y)e]}{\partial t} + \frac{\partial [Q(y)(e+p)u]}{\partial x} + \frac{\partial [Q(y)(e+p)v]}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Проинтегрируем каждое из уравнений системы (30.2) по некоторому объему  $V$  в пространстве  $x$ ,  $y$ ,  $t$  с поверхностью  $S$ . Воспользовавшись теоремой Остроградского—Гаусса о преобразовании объемных интегралов в поверхностные и формулами, задающими переход к локальной криволинейной системе координат,

получим следующую интегральную систему:

$$\begin{aligned}
 & \iint_S Q(y) \rho V\sqrt{g} d\xi d\eta - \iint_S Q(y) \rho v^n V\sqrt{g_{11}} d\xi dt + \\
 & \quad + \iint_S Q(y) \rho \mu^n V\sqrt{g_{22}} d\eta dt = 0, \\
 & \iint_S \rho Q(y) \mu^k V\sqrt{g} d\xi d\eta - \iint_S \rho Q(y) \mu^k v^n V\sqrt{g_{11}} d\xi dt + \\
 & \quad + \iint_S \rho Q(y) \beta V\sqrt{g_{22}} d\eta dt + \iint_S \rho Q(y) \mu^k \mu^n V\sqrt{g_{22}} d\eta dt - \\
 & \quad - \iiint_V \left[ p \left( \frac{\partial \alpha' Q(y)}{\partial x} + \frac{\partial \beta' Q(y)}{\partial y} \right) + \rho Q(y) u \left( u \frac{\partial \alpha'}{\partial x} + v \frac{\partial \alpha'}{\partial y} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \rho Q(y) v \left( u \frac{\partial \beta'}{\partial x} + v \frac{\partial \beta'}{\partial y} \right) \right] dV = 0, \\
 & \iint_S \rho Q(y) v^k V\sqrt{g} d\xi d\eta - \iint_S \rho Q(y) v^k v^n V\sqrt{g_{11}} d\xi dt - \tag{30.3} \\
 & \quad - \iint_S \rho Q(y) \beta V\sqrt{g_{11}} d\xi dt + \iint_S \rho Q(y) v^k \mu^n V\sqrt{g_{22}} d\eta dt - \\
 & \quad - \iiint_V \left[ p \left( \frac{\partial \alpha'' Q(y)}{\partial x} + \frac{\partial \beta'' Q(y)}{\partial y} \right) + \rho Q(y) u \left( u \frac{\partial \alpha''}{\partial x} + v \frac{\partial \alpha''}{\partial y} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \rho Q(y) v \left( u \frac{\partial \beta''}{\partial x} + v \frac{\partial \beta''}{\partial y} \right) \right] dV = 0, \\
 & \iint_S Q(y) e V\sqrt{g} d\xi d\eta - \iint_S Q(y) (e + p) v^n V\sqrt{g_{11}} d\xi dt + \\
 & \quad + \iint_S Q(y) (e + p) \mu^n V\sqrt{g_{22}} d\eta dt = 0.
 \end{aligned}$$

Займемся теперь преобразованием выражений, входящих в объемные интегралы.

Если вспомнить, что величины  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\alpha''$ ,  $\beta''$ —направляющие косинусы касательных к  $\xi$ - и  $\eta$ -линиям соответственно, то легко проверить справедливость следующих соотношений:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \alpha'}{\partial x} &= -\beta' \frac{\partial [x, \xi]}{\partial x}, & \frac{\partial \beta'}{\partial x} &= \alpha' \frac{\partial [x, \xi]}{\partial x}, \\
 \frac{\partial \alpha'}{\partial y} &= -\beta' \frac{\partial [x, \xi]}{\partial y}, & \frac{\partial \beta'}{\partial y} &= \alpha' \frac{\partial [x, \xi]}{\partial y}, \\
 \frac{\partial \alpha''}{\partial x} &= -\beta'' \frac{\partial [x, \eta]}{\partial x}, & \frac{\partial \beta''}{\partial x} &= \alpha'' \frac{\partial [x, \eta]}{\partial x}, \\
 \frac{\partial \alpha''}{\partial y} &= -\beta'' \frac{\partial [x, \eta]}{\partial y}, & \frac{\partial \beta''}{\partial y} &= \alpha'' \frac{\partial [x, \eta]}{\partial y},
 \end{aligned} \tag{30.4}$$

где под  $[x, \xi]$ ,  $[x, \eta]$  понимаются соответственно углы между осью  $x$  и касательными к  $\xi$ - и  $\eta$ -линиям. Опираясь на эти соотношения и представления контравариантных компонент вектора через декартовы координаты (29.2), прямыми выкладками можно убедиться, что имеют место соотношения

$$\begin{aligned} u \left( u \frac{\partial \alpha'}{\partial x} + v \frac{\partial \alpha'}{\partial y} \right) + v \left( u \frac{\partial \beta'}{\partial x} + v \frac{\partial \beta'}{\partial y} \right) &= v \beta \left( u \frac{\partial [x, \xi]}{\partial x} + v \frac{\partial [x, \xi]}{\partial y} \right), \\ u \left( u \frac{\partial \alpha''}{\partial x} + v \frac{\partial \alpha''}{\partial y} \right) + v \left( u \frac{\partial \beta''}{\partial x} + v \frac{\partial \beta''}{\partial y} \right) &= -\mu \beta \left( u \frac{\partial [x, \eta]}{\partial x} + v \frac{\partial [x, \eta]}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (30.5)$$

откуда подынтегральные члены в объемных интегралах соответственно для второго и третьего уравнений системы (30.3) примут вид

$$\begin{aligned} \iiint_V \left[ p \left( \frac{\partial \alpha' Q(y)}{\partial x} + \frac{\partial \beta' Q(y)}{\partial y} \right) + \rho u Q(y) \left( u \frac{\partial \alpha'}{\partial x} + v \frac{\partial \alpha'}{\partial y} \right) + \right. \\ \left. + \rho v Q(y) \left( u \frac{\partial \beta'}{\partial x} + v \frac{\partial \beta'}{\partial y} \right) \right] dx dy dt = \iiint_V \left[ p \left( \frac{\partial \alpha' Q(y)}{\partial x} + \frac{\partial \beta' Q(y)}{\partial y} \right) + \right. \\ \left. + \rho Q(y) v \beta \left( u \frac{\partial [x, \xi]}{\partial x} + v \frac{\partial [x, \xi]}{\partial y} \right) \right] dx dy dt, \\ \iiint_V \left[ p \left( \frac{\partial \alpha'' Q(y)}{\partial x} + \frac{\partial \beta'' Q(y)}{\partial y} \right) + \rho u Q(y) \left( u \frac{\partial \alpha''}{\partial x} + v \frac{\partial \alpha''}{\partial y} \right) + \right. \\ \left. + \rho v Q(y) \left( u \frac{\partial \beta''}{\partial x} + v \frac{\partial \beta''}{\partial y} \right) \right] dx dy dt = \iiint_V \left[ p \left( \frac{\partial \alpha'' Q(y)}{\partial x} + \frac{\partial \beta'' Q(y)}{\partial y} \right) - \right. \\ \left. - \rho Q(y) \mu \beta \left( u \frac{\partial [x, \eta]}{\partial x} + v \frac{\partial [x, \eta]}{\partial y} \right) \right] dx dy dt. \end{aligned} \quad (30.6)$$

Теперь в выражениях (30.6) от производных по переменным  $x, y$  перейдем к производным по переменным  $\xi, \eta$ .

Рассмотрим, как при переходе к криволинейным координатам преобразуется выражение вида  $u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y}$ , где  $F$  — произвольная дифференцируемая функция.

Воспользовавшись соотношениями (29.6) и (29.2), легко проверить, что имеет место соотношение

$$u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\mu}{V g_{11}} \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{v}{V g_{22}} \frac{\partial F}{\partial \eta}. \quad (30.7)$$

Аналогично, опираясь на соотношения (29.2) и (29.6), не состав-

ляет труда проверить, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q(y)\alpha'}{\partial x} + \frac{\partial Q(y)\beta'}{\partial y} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\sqrt{g} Q(y)}{\sqrt{g_{11}}} \right), \\ \frac{\partial Q(y)\alpha''}{\partial x} + \frac{\partial Q(y)\beta''}{\partial y} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\sqrt{g} Q(y)}{\sqrt{g_{22}}} \right).\end{aligned}\quad (30.8)$$

Воспользовавшись соотношениями (30.6) — (30.8), преобразуем систему (30.3) к виду

$$\begin{aligned}\iint_S Q(y) \rho \sqrt{g} d\xi d\eta - \iint_S Q(y) \rho v^n \sqrt{g_{11}} d\xi dt + \\ + \iint_S Q(y) \rho \mu^n \sqrt{g_{22}} d\eta dt = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_S \rho Q(y) \mu^k \sqrt{g} d\xi d\eta + \iint_S \rho Q(y) \beta \sqrt{g_{22}} d\eta dt - \\ - \iint_S \rho Q(y) \mu^k v^n \sqrt{g_{11}} d\xi dt + \iint_S \rho Q(y) \mu^k \mu^n \sqrt{g_{22}} d\eta dt - \\ - \iiint_V p \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\sqrt{g} Q(y)}{\sqrt{g_{11}}} \right) d\xi d\eta dt - \\ - \iiint_V \rho Q(y) v \left[ \frac{\mu}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial [x, \xi]}{\partial \xi} + \frac{v}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial [x, \xi]}{\partial \eta} \right] \beta \sqrt{g} d\xi d\eta dt = 0,\end{aligned}\quad (30.9)$$

$$\begin{aligned}\iint_S \rho Q(y) v^k \sqrt{g} d\xi d\eta - \iint_S \rho Q(y) \beta \sqrt{g_{11}} d\xi dt - \\ - \iint_S \rho Q(y) v^k v^n \sqrt{g_{11}} d\xi dt + \iint_S \rho Q(y) v^k \mu^n \sqrt{g_{22}} d\eta dt - \\ - \iiint_V p \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\sqrt{g} Q(y)}{\sqrt{g_{22}}} \right) d\xi d\eta dt + \\ + \iiint_V \rho Q(y) \mu \left[ \frac{\mu}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial [x, \eta]}{\partial \xi} + \frac{v}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial [x, \eta]}{\partial \eta} \right] \beta \sqrt{g} d\xi d\eta dt = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_S Q(y) \rho e \sqrt{g} d\xi d\eta - \iint_S Q(y) (e + p) v^n \sqrt{g_{11}} d\xi dt + \\ + \iint_S Q(y) (e + p) \mu^n \sqrt{g_{22}} d\eta dt = 0.\end{aligned}$$

Можно проверить, что частные производные  $\frac{\partial [x, \xi]}{\partial \xi}$ ,  $\frac{\partial [x, \xi]}{\partial \eta}$ ,  $\frac{\partial [x, \eta]}{\partial \xi}$ ,  $\frac{\partial [x, \eta]}{\partial \eta}$  выражаются через кривизну  $K$  координатных линий и угол  $[\xi, \eta]$  между векторами базисного репера следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [x, \xi]}{\partial \xi} &= K_{\eta=\text{const}} \sqrt{g_{11}}, \\ \frac{\partial [x, \xi]}{\partial \eta} &= K_{\xi=\text{const}} \sqrt{g_{22}} + \frac{\partial [\eta, \xi]}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial [x, \eta]}{\partial \xi} &= K_{\eta=\text{const}} \sqrt{g_{11}} - \frac{\partial [\eta, \xi]}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial [x, \eta]}{\partial \eta} &= K_{\xi=\text{const}} \sqrt{g_{22}}. \end{aligned} \quad (30.10)$$

При построении разностной схемы удобнее вычислить правые части соотношений (30.10), так как они связаны с внутренними характеристиками самих координатных линий. (Например, кривизны вычисляются независимо при восполнении координатных линий по точкам сетки. Угол между координатными линиями есть также характеристика самой системы координат.) Используя равенства (30.10), выпишем окончательный вид системы интегральных уравнений газовой динамики в локальных криволинейных координатах:

$$\begin{aligned} \iint_S \rho Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta - \iint_S \rho v^n Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi dt + \\ + \iint_S \rho \mu^n Q(y) \sqrt{g_{22}} d\eta dt = 0, \end{aligned} \quad (30.11_1)$$

$$\begin{aligned} \iint_S \rho \mu^k Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta - \iint_S \rho \mu^k v^n \sqrt{g_{11}} d\xi dt + \\ + \iint_S [\rho \beta + \rho \mu^k \mu^n] Q(y) \sqrt{g_{22}} d\eta dt - \iiint_V p \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\sqrt{g} Q(y)}{\sqrt{g_{11}}} \right) d\xi d\eta dt - \\ - \iiint_V \rho v \left[ \mu K_{\eta=\text{const}} + v \left( K_{\xi=\text{const}} + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial [\eta, \xi]}{\partial \eta} \right) \right] \times \\ \times \beta Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta dt = 0, \end{aligned} \quad (30.11_2)$$

$$\begin{aligned} \iint_S \rho v^k Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta - \iint_S [p\beta + \rho v^k v^n] Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi dt + \\ + \iint_S \rho v^k \mu^n Q(y) \sqrt{g_{22}} d\eta dt - \iiint_V p \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\sqrt{g} Q(y)}{\sqrt{g_{22}}} \right) d\xi d\eta dt + \\ + \iiint_V \rho \mu \left[ \mu \left( K_{\eta=\text{const}} - \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial |\eta, \xi|}{\partial \xi} \right) + v K_{\xi=\text{const}} \right] \times \\ \times \beta Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta dt = 0, \quad (30.11_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_S Q(y) e \sqrt{g} d\xi d\eta - \iint_S Q(y) (e + p) v^n \sqrt{g_{11}} d\xi dt + \\ + \iint_S Q(y) (e + p) \mu^n \sqrt{g_{22}} d\eta dt = 0. \quad (30.11_4) \end{aligned}$$

### § 31. Вычисление координат граничных точек в процессе движения

Способ задания положения счетных границ и гидродинамических величин, к ним относящихся, на данном временном шаге. Построение алгоритма движения счетных границ и определение их положения на следующий временной шаг.

Как уже говорилось, счетная область представляет собой топологический четырехугольник, попарно противоположные стороны которого мы трактуем как координатные линии первого и второго семейства. Каждая из четырех границ топологического четырехугольника может в свою очередь состоять из нескольких счетных границ. Точки стыка двух и более счетных границ мы будем называть *узлами* и следить за ними в процессе расчета. Как правило, узлы являются точками излома физических границ. Каждый из узлов можно описать заданием номеров входящих в него границ, определив способ вычисления координат их точки пересечения. Выберем одну счетную границу. Она начинается и кончается узлом. Определим вдоль этой границы положительное направление. В нашем расчетном алгоритме счетная граница определяется заданием декартовых координат определенного числа точек, расположенных последовательно вдоль положительного направления. Число точек и способ их расстановки для каждой границы задаются. В этот набор граничных точек узлы входят обязательно. В промежутках между каждой парой соседних граничных точек линия границы восполняется дугой какой-либо гладкой кривой (в простейшем случае — отрезками прямых).

Условимся, что на границах гидродинамические величины — нормальная и касательная компоненты скорости, плотность, дав-

ление — относятся к середине восполняющих дуг. Будем для краткости восполняющую дугу называть «ребром». Очевидно, что если счетная граница определяется заданием  $N$  граничных точек, то она будет состоять из  $N - 1$  «ребер».

Мы постулировали, что счетный алгоритм должен следить за движением выделенных границ. Значит, мы по заданным на данный момент координатам граничных точек и значению перечисленных выше гидродинамических величин на «ребрах» должны найти положения счетных границ на следующий момент времени.

Ниже мы приведем необходимые формулы, а сейчас дадим словесное описание. Если допустить, что на протяжении рассматриваемого временного шага значения гидродинамических величин не меняются, то достаточно определить значение скоростей граничных точек, чтобы получить новое положение их декартовых координат. Величины скоростей граничных точек определяются по значениям заданных гидродинамических величин на «ребрах» и информацией о том, является ли данная счетная граница контактным разрывом, ударной или детонационной волной или границей какого-либо иного вида. Задание этой информации мы будем называть *заданием типа границы*. В случае контактного разрыва скорости граничных точек определяются непосредственно по заданным на ребрах величинам скоростей. Для ударной или детонационной волны скорости границы могут быть досчитаны по заданным на «ребрах» величинам, по известным гидродинамическим соотношениям. В других случаях алгоритм нахождения этих скоростей должен задаваться независимо вместе с заданием типа границы. Итак, мы определили декартовы координаты граничных точек на следующий момент времени.

Теперь надо проверить, не нарушилось ли их последовательное расположение вдоль положительного направления. Иными словами, не имеет ли линия границы на расчетный момент времени (если ее восполнить дугами кривых) точек самопересечения. Если точки самопересечения окажутся, то по некоторому алгоритму производится анализ и исключение из числа рассчитанных некоторых точек так, чтобы построенная по оставшимся точкам кривая не имела самопересечений.

Описанная процедура движения выполняется для всех счетных границ. После этого находим на рассчитываемый момент времени координаты узлов, т. е. точки стыка границ. Узловые точки соответственно добавляются в последовательности граничных точек (в начало и конец границ), после чего еще раз по каждой из границ повторяется процедура проверки упорядоченности последовательности граничных точек вдоль положительного направления и удаления тех точек, которые ее нарушают. Теперь осталось сделать последний шаг: по найденным на каждой счетной границе координатам точек построить восполняющие дуги и

расставить вдоль этой линии новые граничные точки в заданном для данной границы числе и по заданному для нее способу расстановки.

Координаты этих вновь полученных точек и задают положение границы на следующий момент времени. Ситуация с заданием граничных точек, которая была на начальный момент времени, повторилась. Прежде чем выписать необходимые формулы для описанного выше алгоритма движения границ, нам необходимо остановиться на вопросе восполнения кривой по последовательности точек. Не всегда простейший способ — соединение соседних точек отрезками прямых — дает удовлетворительный результат. Однако мы хотим, чтобы способ восполнения был локальным, т. е. строился по фиксированному числу точек. После долгих поисков мы остановились на следующем алгоритме восполнения, который достаточно прост. И он естествен в следующих трех частных случаях:

- а) одномерное плоское течение,
- б) одномерное течение с цилиндрической симметрией,
- в) сферически симметричное течение.

Эта естественность крайне желательна, так как методика, обладающая ею, позволит рассчитывать двумерные течения, мало отличающиеся от одномерных, с небольшим числом счетных точек по той пространственной переменной, от изменения которой течение слабо зависит.

Пусть нам дана последовательность точек  $0, 1, \dots, L$ , декартовы координаты которых  $(x, y)_0, (x, y)_1, \dots, (x, y)_L$ . Выбирая последовательно тройки точек  $(x, y)_{i-1}, (x, y)_i, (x, y)_{i+1}$ , построим по каждой из них окружность, за параметр которой примем угол  $\tilde{\theta}$  с вершиной в точке  $i-1$ , опирающийся на дугу  $i, i+1$ . Его величина

$$\tilde{\theta}_{i+1/2} = \operatorname{arctg} \frac{(x_{i-1}-x_i)(y_{i-1}-y_{i+1}) - (x_{i-1}-x_{i+1})(y_{i-1}-y_i)}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1}) + (y_{i-1}-y_i)(y_{i-1}-y_{i+1})}. \quad (31.1)$$

Повторим описанную выше процедуру, выбирая последовательно от конца тройки точек  $(x, y)_{i+2}, (x, y)_{i+1}, (x, y)_i$ . Величину угла с вершиной в точке  $i+2$ , опирающегося на дугу  $i+1, i$ , обозначим  $\tilde{\theta}_{i+1/2}$ .

Очевидно,

$$\tilde{\theta}_{i+1/2} = \operatorname{arctg} \frac{(x_{i+2}-x_{i+1})(y_{i+2}-y_i) - (x_{i+2}-x_i)(y_{i+2}-y_{i+1})}{(x_{i+2}-x_{i+1})(x_{i+2}-x_i) + (y_{i+2}-y_i)(y_{i+2}-y_{i+1})}. \quad (31.2)$$

За восполняющую кривую примем совокупность дуг окружностей, опирающихся на пары точек  $(0, 1), (1, 2), \dots, (L-1, L)$  и

имеющих центральные углы, половины которых равны

$$\begin{aligned} \theta_{1/2} &= \tilde{\theta}_{1/2}, \quad \theta_{3/2} = \frac{1}{2} (\tilde{\theta}_{3/2} + \tilde{\theta}_{3/2}), \dots \\ \dots, \theta_{L-3/2} &= \frac{1}{2} (\tilde{\theta}_{L-3/2} + \tilde{\theta}_{L-3/2}), \quad \theta_{L-1/2} = \tilde{\theta}_{L-1/2}. \end{aligned} \quad (31.3)$$

Следовательно, для получения выбранного нами восполнения кривой необходимо по последовательности координат  $\{(x, y)_i\}$ ,  $i = 0, 1, \dots, L$ , вычислить последовательность углов  $\{\theta_{i+1/2}\}$ ,  $i = 0, 1, \dots, L-1$ . Через эти последовательности легко вычислить все необходимые метрические параметры восполненной кривой.

Приведем теперь формулы, используемые для построения алгоритма движения границ. Длина границы  $\sigma_L$  определяется суммой длин восполняющих дуг:

$$\begin{aligned} \sigma_L &= \sum_{l=0}^{L-1} s_{l+1/2}, \\ s_{l+1/2} &= \frac{\theta_{l+1/2}}{\sin \theta_{l+1/2}} \sqrt{(x_{l+1}-x_l)^2 + (y_{l+1}-y_l)^2}; \end{aligned} \quad (31.4)$$

$s_{l+1/2}$  — длина восполняемой дуги  $i, i+1$ . Длина  $l$  дуг от начала границы  $\sigma_l = \sum_{i=0}^l s_{l+1/2}$ . Для нахождения координат точек границы на момент времени  $t+\tau$  нормальная  $W_{i+1/2}^n$  и касательная  $W_{i+1/2}^k$  компоненты скорости, отнесенные к серединам восполняющих дуг, переинтерполируются на узлы по формулам

$$\begin{aligned} W_i^n &= \frac{s_{l-1/2} W_{i+1/2}^n + s_{l+1/2} W_{i-1/2}^n}{s_{l-1/2} + s_{l+1/2}}, \\ W_i^k &= \frac{s_{l-1/2} W_{i+1/2}^k + s_{l+1/2} W_{i-1/2}^k}{s_{l-1/2} + s_{l+1/2}}. \end{aligned} \quad (31.5)$$

Положение координат узлов  $x^*, y^*$  на момент времени  $t+\tau$  определяется по формулам

$$\begin{aligned} x_i^* &= x_i + \tau (\alpha'_i W_i^n + \beta'_i \delta W_i^k), \\ y_i^* &= y_i + \tau (\beta'_i W_i^n - \alpha'_i \delta W_i^k) \end{aligned} \quad (31.6)$$

на границах, являющихся  $\xi$ -линиями,

$$\begin{aligned} x_i^* &= x_i + \tau (-\alpha''_i W_i^n + \beta''_i \delta W_i^k), \\ y_i^* &= y_i + \tau (-\beta''_i W_i^n - \alpha''_i \delta W_i^k) \end{aligned} \quad (31.7)$$

на границах, являющихся  $\eta$ -линиями, где  $\tau$  — шаг по времени,  $\delta$  — параметр:  $\delta = 0$  — движение по нормальной компоненте,  $\delta = 1$  — движение по полной скорости.

Напомним, что под нормальной компонентой скорости границы в зависимости от ее типа мы понимаем скорость вещества для контактной границы. Ее точки могут сдвигаться не только по нормальной, но по нормальной и касательной компонентам скорости одновременно. Скорость волны для детонационных и ударных волн в этих случаях перемещения границы определяется нормальной компонентой.

Заметим, что если перепад гидродинамических величин по обе стороны границы мал, а тип ее — ударная волна, то она автоматически будет двигаться как характеристика. Для границ иного типа скорость может задаваться независимо от движения вещества. После определения координат граничных точек на момент  $t + \tau$  нарушение последовательного расположения граничных точек выявляется по нарушению неравенства

$$\frac{(x_{i+1}^* - x_i^*) (x_{i+2}^* - x_{i+1}^*) + (y_{i+1}^* - y_i^*) (y_{i+2}^* - y_{i+1}^*)}{(x_{i+1}^* - x_i^*)^2 + (y_{i+1}^* - y_i^*)^2} > 0. \quad (31.8)$$

Если неравенство не выполнено, то элемент с номером  $i + 1$  в последовательность не заносится и неравенство проверяется для тройки элементов  $i, i + 2, i + 3$ .

Узлы на момент  $t + \tau$  определяются как точки пересечения окружностей, построенных по ближайшим трем точкам каждой границы (эти точки могут быть либо первыми тремя, либо последними тремя граничными точками в зависимости от того, входят границы в узел своим началом или концом). Формулы мы приводить не будем, читатель может их легко получить.

На момент  $t + \tau$  окончательные координаты  $[x]^l, [y]^l$  по заданному на границе способу расстановки точек находим по следующим формулам:

$$\begin{aligned} [x]^l &= x_i^* + \frac{\tilde{a}(x_{i+1}^* - x_i^*) - \tilde{a}\tilde{a}(y_{i+1}^* - y_i^*)}{\tilde{a} + \tilde{a}}, \\ [y]^l &= y_i^* + \frac{\tilde{a}(y_{i+1}^* - y_i^*) + \tilde{a}\tilde{a}(x_{i+1}^* - x_i^*)}{\tilde{a} + \tilde{a}}. \end{aligned} \quad (31.9)$$

Из закона расстановки точек по границе на момент  $t + \tau$  находятся длины дуг  $[s]^{l+1/2}$  и  $[\sigma]^l = \sum_{i=0}^{l-1} [s]^{i+1/2}$ . Дуга  $l, l + 1$  выбирается так, чтобы выполнялось неравенство

$$\sigma_l^* \leq [\sigma]^k \leq \sigma_{l+1}^*;$$

затем вычисляются  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{\bar{a}}$ :

$$\tilde{a} = \operatorname{tg} \left( \frac{\sigma_l^* - [\sigma]^k}{\sigma_{l+1}^* - \sigma_l^*} \theta_{l+1/2}^* \right),$$

$$\tilde{\bar{a}} = \operatorname{tg} \left( \frac{[\sigma]^k - \sigma_l^*}{\sigma_{l+1}^* - \sigma_l^*} \theta_{l+1/2}^* \right).$$

## § 32. Уравнения для построения сеток

Математическая формализация задачи построения разностной сетки. Алгоритм I, использующий «обратные» уравнения Лапласа. Обеспечение его большей гибкости введением переменных параметров. Использование конформных и квазиконформных отображений (алгоритм II). Построение сеток, близких к ортогональным (алгоритм III).

Счетную область  $\Omega$  на плоскости переменных  $x$ ,  $y$  удобно представлять как четырехугольник с криволинейными границами, которые для наглядности назовем нижней, верхней, левой и правой. Каждая из этих четырех границ может состоять из нескольких участков различного физического типа, но для нас это пока несущественно, и мы будем считать, что все узлы на каждой из них занумерованы подряд. Число узлов на противоположных границах одинаково: индекс  $j=0, 1, \dots, J$  — на нижней и верхней,  $k=0, 1, \dots, K$  — на левой и правой.

Будем полагать, далее, что нами уже получено положение узлов на границах области  $\Omega$ :

$$\{(x, y)_j^h\}, \quad \{(x, y)_j^v\}, \quad \{(x, y)_k^{лев}\}, \quad \{(x, y)_k^{прав}\}. \quad (32.1)$$

Угловые точки, разумеется, совпадают:

$$(x, y)_0^h = (x, y)_0^{лев}, \quad (x, y)_J^h = (x, y)_0^{прав},$$

$$(x, y)_0^v = (x, y)_K^{лев}, \quad (x, y)_J^v = (x, y)_K^{прав}.$$

Ставится задача расчета координат «внутренних» узлов

$$\{(x, y)_{j,k}; \quad j = 1, \dots, J-1; \quad k = 1, \dots, K-1\}$$

с тем, чтобы два семейства линий, из которых одно получается соединением соседних узлов по индексу  $j$  при фиксированном значении индекса  $k$  (условно назовем его горизонтальным), а другое — соединением узлов, отвечающих последовательным значениям индекса  $k$  при фиксированном индексе  $j$  (вертикальное семейство линий), разрезали расчетную область на ячейки, которые не должны иметь наложений, самопересечений и выходить за пределы счетной области, заполняя ее без зазоров. Другими словами, линии вертикального и горизонтального семейств,

рассматриваемые как координатные, должны образовывать невырождающуюся систему координат.

Поставленную задачу можно трактовать как разностный аналог задачи об отыскании функций  $x(\xi, \eta)$ ,  $y(\xi, \eta)$ , обеспечивающих однолистное отображение на счетную область  $\Omega$  некоторой параметрической области  $D$  на плоскости  $\xi, \eta$ , например единичного квадрата  $0 \leq \xi \leq 1$ ,  $0 \leq \eta \leq 1$ . Границные значения этих функций суть заданные функции:

$$\begin{aligned} x(\xi, 0) &= x^h(\xi), & y(\xi, 0) &= y^h(\xi), & 0 \leq \xi \leq 1; \\ x(\xi, 1) &= x^p(\xi), & y(\xi, 1) &= y^p(\xi), & 0 \leq \xi \leq 1; \\ x(0, \eta) &= x^{лев}(\eta), & y(0, \eta) &= y^{лев}(\eta), & 0 \leq \eta \leq 1; \\ x(1, \eta) &= x^{прав}(\eta), & y(1, \eta) &= y^{прав}(\eta), & 0 \leq \eta \leq 1, \end{aligned} \quad (32.2)$$

которые представляют непрерывные аналоги дискретных множеств точек (32.1), задающих положение границ области  $\Omega$ :

$$x^h(j/J) = x_j^h, \quad x^{лев}(k/K) = x_k^{лев}, \dots \quad (32.3)$$

Очевидно, что в такой формулировке задача о построении сетки весьма неопределенна и остается широкий простор для различных предположений. Мы начнем с изложения алгоритма, обобщающего предложенный в работе [164]. Назовем его *алгоритмом I* для удобства дальнейших ссылок. Он заключается в том, чтобы два семейства линий сетки отыскивать как линии уровня функций  $\xi(x, y)$ ,  $\eta(x, y)$ , удовлетворяющих уравнениям Лапласа

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = 0, \quad \eta_{xx} + \eta_{yy} = 0 \quad (32.4)$$

с граничными условиями, определяемыми требованием соответствия точек на контуре области  $\Omega$  и контуре параметрической области  $D$ . Уравнения (32.4) можно обратить в уравнения для функций  $x(\xi, \eta)$ ,  $y(\xi, \eta)$ :

$$\begin{aligned} \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} &= 0, \\ \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} &= 0, \end{aligned} \quad (32.5)$$

где

$$\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2, \quad \beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta, \quad \gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2.$$

Заметим, что в такой постановке существование однолистного отображения обеспечено. В самом деле, введем в рассмотрение вспомогательное конформное отображение  $x(p, q)$ ,  $y(p, q)$  на заданную область некоторого прямоугольника  $0 \leq p \leq p^*$ ,  $0 \leq q \leq q^*$ , при котором четырем его углам отвечают четыре «угла» области  $\Omega$ , что возможно при определенном отношении  $p^*/q^*$ . Из инвариантности уравнений (32.4) относительно конформного отображения  $\xi(p, q)$ ,  $\eta(p, q)$  прямоугольника  $\{0 \leq p \leq p^*, 0 \leq q \leq q^*\}$  на

квадрат  $D$  следует, что существует однолистное отображение  $x(\xi, \eta)$ ,  $y(\xi, \eta)$ , удовлетворяющее уравнениям (32.5), и вытекает единственность такого однолистного отображения. Однолистность функций  $\xi(p, q)$ ,  $\eta(p, q)$  без труда доказывается с использованием гармоничности отношения

$$\frac{\xi_p \eta_q - \xi_q \eta_p}{\xi_p^2 + \xi_q^2}.$$

Проведенные численные эксперименты по применению уравнений (32.4) для расчета разностных сеток показали их надежность в том смысле, что даже в случае «очень кривых» границ рассчитанные узлы лежат внутри контура области и ячейки сетки не имеют наложений. Однако в некоторых случаях полученная сетка по тем или иным причинам может быть признана неудачной (например, некоторые из ее линий подходят к границе области под очень малым углом или желательно изменить размеры ячеек сетки в определенных местах области, не изменяя расстановки точек на контуре). Подобные пожелания могут быть удовлетворены путем обеспечения большей «гибкости» отображения за счет введения некоторого числа переменных параметров. С этой целью произведем замену переменных

$$\xi = \xi(\varphi, \psi), \quad \eta = \eta(\varphi, \psi).$$

Тогда вместо (32.5) получим систему уравнений такого вида:

$$\begin{aligned} \alpha x_{\varphi\varphi} - 2\beta x_{\varphi\psi} + \gamma x_{\psi\psi} &= ax_\varphi + bx_\psi, \\ \alpha y_{\varphi\varphi} - 2\beta y_{\varphi\psi} + \gamma y_{\psi\psi} &= ay_\varphi + by_\psi, \end{aligned} \quad (32.6)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= x_\psi^2 + y_\psi^2, \quad \beta = x_\varphi x_\psi + y_\varphi y_\psi, \quad \gamma = x_\varphi^2 + y_\varphi^2, \\ a &= \frac{\alpha \xi_{\varphi\varphi} - 2\beta \xi_{\varphi\psi} + \gamma \xi_{\psi\psi}}{\xi_\varphi \eta_\psi - \xi_\psi \eta_\varphi} \eta_\varphi - \frac{\alpha \eta_{\varphi\varphi} - 2\beta \eta_{\varphi\psi} + \gamma \eta_{\psi\psi}}{\xi_\varphi \eta_\psi - \xi_\psi \eta_\varphi} \xi_\psi, \\ b &= \frac{\alpha \eta_{\varphi\varphi} - 2\beta \eta_{\varphi\psi} + \gamma \eta_{\psi\psi}}{\xi_\varphi \eta_\psi - \xi_\psi \eta_\varphi} \xi_\varphi - \frac{\alpha \xi_{\varphi\varphi} - 2\beta \xi_{\varphi\psi} + \gamma \xi_{\psi\psi}}{\xi_\varphi \eta_\psi - \xi_\psi \eta_\varphi} \eta_\varphi. \end{aligned} \quad (32.7)$$

Полагая функции  $\xi(\varphi, \psi)$ ,  $\eta(\varphi, \psi)$  заданными совокупностью их значений  $\{(\xi, \eta)_{j,k}\}$  в узлах сетки, можно выписать систему разностных уравнений, аппроксимирующих (32.6), (32.7). Решение этой системы дает нам сетку, горизонтальные линии которой, являющиеся образами прямых  $\psi = \psi_k = \text{const}$ , с точки зрения упомянутого выше отображения будут представлять образы линий  $\xi = \xi(\varphi, \psi_k)$ ,  $\eta = \eta(\varphi, \psi_k)$ . Аналогично, вертикальные линии сетки суть образы линий  $\xi = \xi(\varphi_j, \psi)$ ,  $\eta = \eta(\varphi_j, \psi)$ . Следовательно, задаваясь различными функциями  $\xi = \xi(\varphi, \psi)$ ,  $\eta = \eta(\varphi, \psi)$ , мы

получаем широкие возможности «управления» линиями сетки внутри области, не изменяя расстановки точек на ее границах.

Отметим, что высказанные выше соображения о существовании однолистного отображения и его единственности остаются в силе при использовании произвольных функций  $\xi(\varphi, \psi)$ ,  $\eta(\varphi, \psi)$  с якобианом, отличным от нуля на квадрате  $D$ .

С точки зрения практической реализации желательно, чтобы функции  $\xi(\varphi, \psi)$ ,  $\eta(\varphi, \psi)$  определялись небольшим числом параметров. Мы используем в качестве таких параметров четыре последовательности:

$$\{s_j^H\}, \quad \{s_j^B\}, \quad \{s_k^{lev}\}, \quad \{s_k^{upp}\},$$

описанные в § 23, которые передают расстановку узлов сетки вдоль контура границы. По ним вычисляются с помощью формул (23.4) величины  $(\xi, \eta)_{j,k}$ , которые и участвуют в составлении разностных уравнений. В качестве линий сетки при отображении  $x(\xi, \eta)$ ,  $y(\xi, \eta)$  мы будем получать образы прямолинейных отрезков, соединяющих соответственные точки на нижней—верхней и левой—правой границах (см. рис. 23.3).

На вопросе о составлении системы разностных уравнений и ее решении мы сейчас останавливаться не будем, отложив его до следующего параграфа.

Обратимся к изложению еще одного подхода к выбору уравнений для расчета разностных сеток. Он связан с привлечением конформных и квазиконформных отображений. Как мы уже упоминали, счетную область, которую нам удобно представлять как четырехугольник с криволинейными границами, можно конформно отобразить на прямоугольник  $\bar{D}$ :  $\{0 \leq \bar{\xi} \leq p^*, 0 \leq \bar{\eta} \leq q^*\}$  с определенным отношением сторон  $p^*/q^* = l$  так, чтобы при этом четырем углам области  $\Omega$  соответствовали четыре угла  $\bar{D}$ . Пусть отображение описывается функциями  $\bar{x}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ ,  $\bar{y}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ . В дальнейшем нам удобнее рассматривать отображение области  $\Omega$  на единичный квадрат  $D$ :  $\{0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1\}$ , описываемое функциями

$$x(\xi, \eta) = \bar{x}(p^*\xi, q^*\eta), \quad y(\xi, \eta) = \bar{y}(p^*\xi, q^*\eta).$$

Его мы назовем «конформным», отличая кавычками обстоятельство, связанное с «растяжением» координат.

Задачу об отыскании функций  $x(\xi, \eta)$ ,  $y(\xi, \eta)$  и параметра  $l$  можно сформулировать как вариационную задачу о минимизации функционала

$$\Phi = \frac{1}{2} \iint_D \left[ l(x_\xi^2 + y_\xi^2) + \frac{1}{l} (x_\eta^2 + y_\eta^2) \right] d\xi d\eta \quad (32.8)$$

на классе функций, обладающих следующими свойствами:

1)  $x(\xi, \eta)$ ,  $y(\xi, \eta)$  определены на квадрате  $D$ ;

2) на каждой из его сторон они определены так, что устанавливают некоторое взаимно однозначное соответствие между точками стороны квадрата  $D$  и точками соответствующей границы области  $\Omega$ ;

3)  $x(\xi, \eta)$ ,  $y(\xi, \eta)$  продолжаются внутрь квадрата  $D$  произвольным образом, но так, чтобы существовал интеграл (32.8).

Функции  $x(\xi, \eta)$ ,  $y(\xi, \eta)$  из описанного класса и число  $l$ , обеспечивающее минимум функционала  $\Phi$ , дают искомое «конформное» отображение. В самом деле \*),

$$\Phi = \frac{1}{2} \iint_D \left[ \left( \sqrt{l} x_\xi - \frac{1}{\sqrt{l}} y_\eta \right)^2 + \left( \frac{1}{\sqrt{l}} x_\eta + \sqrt{l} y_\xi \right)^2 \right] d\xi d\eta + S, \quad (32.9)$$

где  $S = \iint_D (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) d\xi d\eta$  представляет площадь заданной области  $\Omega$ . Минимальное значение  $\Phi = S$  достигается на функциях  $x(\xi, \eta)$ ,  $y(\xi, \eta)$ , удовлетворяющих уравнениям

$$\begin{cases} \sqrt{l} x_\xi - \frac{1}{\sqrt{l}} y_\eta = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{l}} x_\eta + \sqrt{l} y_\xi = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_{\bar{\xi}} - y_{\bar{\eta}} = 0, \\ x_{\bar{\eta}} + y_{\bar{\xi}} = 0, \end{cases} \quad (32.10)$$

что и доказывает высказанное утверждение.

При «конформном» отображении, описываемом функциями  $x(\xi, \eta)$ ,  $y(\xi, \eta)$ , устанавливается вполне определенное соответствие между точками на границе  $\Gamma$  области  $\Omega$  и точками на сторонах квадрата  $D$ . В частности, заданным точкам  $\{(x, y)_j^n\}$  из последовательностей (32.1) отвечают точки на нижней стороне с координатами  $\{\xi_j^n, 0\}$ , точкам  $\{(x, y)_j^p\}$  — точки на верхней стороне с координатами  $\{\xi_j^v, 1\}$ , точкам  $\{(x, y)_k^{\text{лев}}\}$  — точки на левой стороне с координатами  $\{0, \eta_k^{\text{лев}}\}$ , точкам  $\{(x, y)_k^{\text{прав}}\}$  — точки на правой стороне с координатами  $\{1, \eta_k^{\text{прав}}\}$ . Соединим соответственные точки на противоположных сторонах квадрата  $D$  отрезками прямых. Тогда задача расчета «конформного» отображения при фиксированных узлах на границе области  $\Omega$  сводится к вычислению параметра  $l$ , значений координат  $\{\xi_j^n\}$ ,  $\{\xi_j^v\}$ ,  $\{\eta_k^{\text{лев}}\}$ ,  $\{\eta_k^{\text{прав}}\}$  и координат сетки  $\{(x, y)_{j,k}\}$ , являющихся прообразами точек пересечения вышеупомянутых отрезков на квадрате  $D$ . Алгоритм для численной реализации этой задачи был описан в работе [38]. Он оказался довольно громоздким, особенно в той его части, которая касается отыскания последовательностей  $\{\xi_j^n\}$ ,  $\{\xi_j^v\}$ ,  $\{\eta_k^{\text{лев}}\}$ ,  $\{\eta_k^{\text{прав}}\}$ .

\*) Вариационный принцип такого типа и аналогичное тождество рассматривались еще Риманом.

Можно было бы рассмотреть несколько иную постановку задачи о построении сетки. Именно, зафиксировав положение узлов на параметрическом квадрате  $D$ , разрешить узлам сетки «плавать» по заданному профилю границ области  $\Omega$  до тех пор, пока они не займут положение, отвечающее «конформному» отображению. Такой алгоритм реализуется намного проще (см., например, [97]). Мы, однако, по целому ряду причин отказываемся от такой возможности, настаивая на той постановке, которая описана выше. Одна из причин состоит в том, что в задачах со сложной геометрией «карту» задачи приходится разрезать на несколько областей и в каждой из них сетку рассчитывать независимо. В этом случае возможность предписывать положение узлов сетки на границах позволяет задавать их общими на стыке двух областей, что упрощает расчет, избавляя от необходимости проводить принудительную переинтерполяцию величин вдоль границ. Во-вторых, возможность распорядиться расстановкой точек на границах позволяет вычислителю целесообразно использовать имеющиеся «ресурсы» (как правило, весьма ограниченные), ориентируясь на конкретное содержание задачи.

Возвращаясь к алгоритмам расчета сетки с предписанным положением точек на границах области, заменим в приведенных выше рассуждениях «конформное» отображение с метрикой

$$dx^2 + dy^2 = \frac{1}{l} d\xi^2 + l d\eta^2$$

на квазиконформное отображение, для которого

$$dx^2 + dy^2 = g_{11} d\xi^2 + 2g_{12} d\xi d\eta + g_{22} d\eta^2, \quad (32.11)$$

где  $g_{11}$ ,  $g_{12}$ ,  $g_{22}$  суть функции  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $l$ . Тогда функционал (32.8) приобретает вид

$$\Phi = \frac{1}{2} \iint_D \frac{g_{22}(x_\xi^2 + y_\xi^2) - 2g_{12}(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta) + g_{11}(x_\eta^2 + y_\eta^2)}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} d\xi d\eta. \quad (32.12)$$

Определим величину  $\omega$  ( $0 < \omega < \pi$ ) формулой

$$\cos \omega = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}}}.$$

Как легко убедиться непосредственной проверкой, имеет место тождество

$$\begin{aligned} g_{22}(x_\xi^2 + y_\xi^2) - 2g_{12}(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta) + g_{11}(x_\eta^2 + y_\eta^2) &\equiv \\ &\equiv 2\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) + X^2 + Y^2, \end{aligned}$$

где

$$X = \sqrt{g_{22}} \left( x_\xi \sin \frac{\omega}{2} + y_\xi \cos \frac{\omega}{2} \right) + \sqrt{g_{11}} \left( x_\eta \sin \frac{\omega}{2} - y_\eta \cos \frac{\omega}{2} \right),$$

$$Y = \sqrt{g_{22}} \left( -x_\xi \cos \frac{\omega}{2} + y_\xi \sin \frac{\omega}{2} \right) + \sqrt{g_{11}} \left( x_\eta \cos \frac{\omega}{2} + y_\eta \sin \frac{\omega}{2} \right).$$

Следовательно,

$$\Phi \geq \iint_D (x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta) d\xi d\eta = S.$$

Минимальное значение  $\Phi = S$  будет достигаться, если существуют функции  $x(\xi, \eta)$ ,  $y(\xi, \eta)$ , удовлетворяющие уравнениям  $X = 0$ ,  $Y = 0$ , которые могут быть записаны так:

$$\begin{aligned} \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} x_\xi &= g_{11}y_\eta - g_{12}y_\xi, \\ \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} x_\eta &= g_{12}y_\eta - g_{22}y_\xi, \end{aligned} \quad (32.13)$$

и известны в теории квазиконформных отображений как уравнения Бельтрами.

Нам кажется, что несомненный интерес представляет следующая задача из теории квазиконформных отображений: указать класс функций  $g_{11}$ ,  $g_{12}$ ,  $g_{22}$  от  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $l$  такой, что для любого криволинейного четырехугольника при некотором  $l$  существует единственное квазиконформное отображение на единичный квадрат

$$\{0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1\}.$$

Рассмотренный выше пример «конформных» отображений, для которых  $g_{11} = 1/l$ ,  $g_{12} = 0$ ,  $g_{22} = l$ , показывает, что этот класс не пуст.

Еще один содержательный пример, который может быть положен в основу алгоритма расчета разностных сеток, рассмотрен в работе [9]. Предлагается выделить специальный класс квазиконформных отображений, задав коэффициенты  $g_{11}$ ,  $g_{12}$ ,  $g_{22}$  квадратичной формы (32.11), определяющей метрику отображения, в виде

$$\begin{aligned} g_{11} &= e^{2q(\xi)}, \quad g_{22} = e^{2p(\eta)}, \\ g_{12} &= \sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}} \cos [\beta(\eta) - \alpha(\xi)], \end{aligned} \quad (32.14)$$

содержащем четыре произвольные функции одного аргумента  $\xi$  или  $\eta$ . Эти функции  $q(\xi)$ ,  $p(\eta)$ ,  $\alpha(\xi)$ ,  $\beta(\eta)$  должны быть найдены в процессе минимизации функционала (32.12) на классе функций  $x(\xi, \eta)$ ,  $y(\xi, \eta)$  (аналогичном описанному выше для «конформного» функционала (32.8)), принимающих на границе квадрата  $D$  заданные значения (32.2).

В работе [9] доказано, что минимальное значение  $\Phi = S$  достигается на единственном наборе функций

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta), \quad q = q(\xi), \quad \alpha = \alpha(\xi), \\ y &= y(\xi, \eta), \quad p = p(\eta), \quad \beta = \beta(\eta) \end{aligned}$$

при условии естественной нормировки  $p, q, \alpha, \beta$  и некоторых ограничениях на область  $\Omega$  и расстановку граничных точек, т. е. на параметризацию граничных кривых. (Эти ограничения обеспечивают существование отображений из рассматриваемого класса, для которых экстремальное значение  $\Phi = S$ .) Изложение этого доказательства заняло бы довольно много места, и поэтому мы не будем его приводить. В следующем параграфе мы кратко опишем численную реализацию соответствующего алгоритма построения сеток (для удобства дальнейших ссылок назовем его *алгоритмом II*).

В заключение этого параграфа остановимся еще на одном выборе уравнений для рассматриваемой задачи, предложенном в работе [98]. Обратимся к «конформному» функционалу (32.8) и, исходя из требования его минимизации, подберем  $l$  локально в каждой точке. Очевидно, что это достигается при

$$l = \sqrt{\frac{x_\eta^2 + y_\eta^2}{x_\xi^2 + y_\xi^2}}. \quad (32.15)$$

Подставляя полученное  $l$  в (32.8), приходим к функционалу следующего вида:

$$\Phi = \iint_D V(x_\xi^2 + y_\xi^2)(x_\eta^2 + y_\eta^2) d\xi d\eta. \quad (32.16)$$

В силу очевидного тождества

$$(x_\xi^2 + y_\xi^2)(x_\eta^2 + y_\eta^2) = (x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta)^2 + (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^2$$

функционал (32.16) может быть записан в виде

$$\Phi = \iint_D \frac{(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta)^2}{(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) + \sqrt{(x_\xi^2 + y_\xi^2)(x_\eta^2 + y_\eta^2)}} d\xi d\eta + \iint_D (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) d\xi d\eta.$$

Следовательно, если абсолютный минимум  $\Phi$ , равный  $S$ , достижим, то для функций  $x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)$ , которые его обеспечивают, выполнено равенство

$$x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta = 0, \quad (32.17)$$

которое есть не что иное, как условие ортогональности сетки. К сожалению, функционал (32.16) не является выпуклым, в свя-

зи с чем можно построить примеры неединственности решения соответствующей системы уравнений Эйлера—Лагранжа для этого функционала. Это обстоятельство не препятствует, однако, созданию численного алгоритма расчета сеток на основе функционала (32.16). Для обеспечения его большей гибкости с точки зрения свойств получаемой разностной сетки можно рассматривать и более общий функционал:

$$\Phi = \iint_D \omega \sqrt{(x_\xi^2 + y_\xi^2)(x_\eta^2 + y_\eta^2)} d\xi d\eta, \quad (32.18)$$

где  $\omega > 0$  — некоторая весовая функция. В частности, хорошие разностные сетки получаются при использовании в качестве такой функции

$$\omega = |x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi|. \quad (32.19)$$

Соответствующий алгоритм условно назовем *алгоритмом III*.

На этом мы закончим рассмотрение вопроса о математической формализации задачи построения разностной сетки. Как уже отмечалось в начале параграфа, она весьма неопределенна и допускает широкие возможности для различных решений. Весьма важен и представляет интерес для дальнейших исследований вопрос о требовании оптимальности к тем или иным классам сеток для определенных классов задач.

### § 33. Численная реализация алгоритмов построения сеток

Разностные уравнения, возникающие при численном решении систем уравнений, отвечающих алгоритмам I и II. Простейшие итерационные процессы для их решения. Численная реализация алгоритма III посредством метода переменных направлений. Оптимизация итерационных параметров. Некоторые примеры, иллюстрирующие алгоритмы построения сеток.

Как уже было указано в начале предыдущего параграфа, под словами «построить разностную сетку в счетной области  $\Omega$ » мы подразумеваем расчет координат «внутренних» узлов

$$\{(x, y)_{j, k}; j = 1, \dots, J-1; k = 1, \dots, K-1\}$$

по заданным координатам (32.1) узлов на границах области. Алгоритм их вычисления должен удовлетворять по крайней мере следующим требованиям:

1. Узлы сетки  $\{(x, y)_{j, k}\}$  лежат внутри контура области  $\Omega$ .

2. При малом перемещении границ счетной области координаты узлов сетки меняются мало (т. е. скорости внутренних узлов

сетки должны быть разумно согласованы со скоростями движения границ).

3. Два семейства линий сетки, построенные по ее узлам, как описано в § 32, если трактовать их как координатные, должны образовывать невырождающуюся систему координат.

Для отыскания координат  $\{(x, y)_{j,k}\}$  составляется система разностных уравнений исходя из тех или иных дифференциальных уравнений или вариационных функционалов, примеры которых мы рассматривали в предыдущем параграфе. Уравнения эти довольно сложны, поскольку аппроксимируют систему нелинейных уравнений в частных производных эллиптического типа. Для их решения нужно разрабатывать специальные итерационные алгоритмы, изложение которых могло бы стать предметом специального исследования. Поэтому мы остановимся на описании только самых простых из таких алгоритмов, основанных на явных итерациях. Скорость их сходимости весьма медленная, так что задача разработки быстро сходящихся процессов не снимается. Ситуация облегчается тем, что нас интересует только разностная сетка, а вовсе не решение системы уравнений, которую мы специально придумали, чтобы сетку построить. Поэтому, как правило, итерационный процесс можно обрывать довольно рано, не заботясь о доведении его до сходимости. Следует, однако, заметить, что при расчете нестационарных задач с движущими границами нужно заботиться о том, чтобы такая «недоитерированность» уравнений для сетки не приводила к неправомерному искусственно завышению скоростей ее узлов по сравнению со скоростями границ. В частности, может оказаться целесообразным вести итерационный процесс для скоростей узлов сетки параллельно с вычислением их координат или вместо процесса для координат, вычисляя затем координаты узлов интегрированием скоростей по времени.

При изложении алгоритмов для расчета сеток сразу встает вопрос о начальном приближении. На исходном шаге нестационарной задачи, когда имеются только контуры границ, в качестве начального приближения можно взять сетку, рассчитанную интерполяцией, как было описано в § 23. В дальнейшем, как правило, в качестве начального приближения используется либо сетка предыдущего шага по времени, либо результат экстраполяции по двум предыдущим шагам.

А теперь обратимся к изложению алгоритмов, позволяющих численно реализовать построение разностной сетки. Сначала рассмотрим алгоритм I, основанный на аппроксимации дифференциальных уравнений (32.6), (32.7). В силу их инвариантности относительно растяжения переменных  $\varphi$  и  $\psi$  можно полагать шаги сетки  $\Delta\varphi = \Delta\psi = 1$  и аппроксимацию производных, входящих в эти уравнения, осуществлять посредством простейших

разностных соотношений, например таких:

$$\begin{aligned}x_{\varphi} &\approx [\hat{x}_{\varphi}]_{j,k} = \frac{1}{2}(x_{j+1,k} - x_{j-1,k}), \\x_{\psi} &\approx [\hat{x}_{\psi}]_{j,k} = \frac{1}{2}(x_{j,k+1} - x_{j,k-1}), \\x_{\varphi\varphi} &\approx [\hat{x}_{\varphi\varphi}]_{j,k} = x_{j+1,k} - 2x_{j,k} + x_{j-1,k}, \\x_{\varphi\psi} &\approx [\hat{x}_{\varphi\psi}]_{j,k} = \frac{1}{4}(x_{j+1,k+1} - x_{j-1,k+1} - x_{j+1,k-1} + x_{j-1,k-1}), \\x_{\psi\psi} &\approx [\hat{x}_{\psi\psi}]_{j,k} = x_{j,k+1} - 2x_{j,k} + x_{j,k-1}.\end{aligned}\quad (33.1)$$

Аналогичные соотношения используются и для других функций, входящих в уравнения (32.6), (32.7). Функции  $\xi(\varphi, \psi)$ ,  $\eta(\varphi, \psi)$  при этом либо предполагаются заданными в виде таблицы их значений  $\{\{\xi, \eta\}_{j,k}\}$  в узлах сетки, либо, как уже указывалось в § 32, эти значения рассчитываются по формулам (23.4).

Разностные уравнения записываются в каждом из внутренних узлов  $j=1, \dots, J-1; k=1, \dots, K-1$ . Границные значения  $\{(x, y)_{j,0}\}, \{(x, y)_{j,K}\}, \{(x, y)_{0,k}\}, \{(x, y)_{J,k}\}$  заданы последовательностями (32.1). Для решения полученной системы уравнений применяется простейший явный итерационный процесс:

$$\begin{aligned}x_{j,k}^{(i+1)} &= x_{j,k}^{(i)} + \theta_{j,k}^{(i)} [\hat{\alpha}\hat{x}_{\varphi\varphi} - 2\hat{\beta}\hat{x}_{\varphi\psi} + \hat{\gamma}\hat{x}_{\psi\psi} - \hat{a}\hat{x}_{\varphi} - \hat{b}\hat{x}_{\psi}]_{j,k}^{(i)}, \\y_{j,k}^{(i+1)} &= y_{j,k}^{(i)} + \theta_{j,k}^{(i)} [\hat{\alpha}\hat{y}_{\varphi\varphi} - 2\hat{\beta}\hat{y}_{\varphi\psi} + \hat{\gamma}\hat{y}_{\psi\psi} - \hat{a}\hat{y}_{\varphi} - \hat{b}\hat{y}_{\psi}]_{j,k}^{(i)},\end{aligned}\quad (33.2)$$

где

$$\theta_{j,k}^{(i)} = \frac{\theta}{2(\hat{\alpha}_{j,k} + \hat{\gamma}_{j,k}) + |\hat{\beta}_{j,k}|}.$$

Здесь  $i$  — номер итерации,  $\theta$  — обычный релаксационный параметр, который, вообще говоря, может изменяться в процессе итераций. Рекомендации по его выбору можно найти в работах по разностным методам решения эллиптических уравнений (см., например, [103], [111]). По линейной теории (с «замороженными» коэффициентами уравнений) процесс устойчив, если  $0 < \theta < 2$ . Процесс сходится медленно, но с учетом сделанных выше замечаний вполне пригоден для наших целей.

Обратимся теперь к изложению алгоритма II, основанного на минимизации функционала (32.12), который после подстановки коэффициентов (32.14) приобретает вид

$$\Phi = \iint_0^1 \frac{e^{p-q}(x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2) - 2 \cos(\beta - \alpha)(x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta}) + e^{q-p}(x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2)}{\sin(\beta - \alpha)} d\xi d\eta, \quad (33.3)$$

где функции  $q = q(\xi)$ ,  $p = p(\eta)$ ,  $\alpha = \alpha(\xi)$ ,  $\beta = \beta(\eta)$  должны быть найдены в процессе минимизации, как и функции  $x(\xi, \eta)$ ,  $y(\xi, \eta)$ ,

значения которых в узлах  $(j, k)$  дадут искомую сетку. Предполагается, что

$$0 < \beta(\eta) - \alpha(\xi) < \pi. \quad (33.4)$$

Простейший способ минимизации функционала  $\Phi$  использует явный итерационный процесс для следующих эллиптических уравнений, представляющих вариационные уравнения Эйлера — Лагранжа для функционала  $\Phi$ , минимизируемого только по  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} C \frac{\partial x}{\partial \eta} + \left( \frac{\partial}{\partial \xi} B \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} B \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) &= 0, \\ -\frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} C \frac{\partial y}{\partial \eta} + \left( \frac{\partial}{\partial \xi} B \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} B \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (33.5)$$

где

$$A = \frac{e^p(\eta) - q(\xi)}{\sin [\beta(\eta) - \alpha(\xi)]}, \quad C = \frac{e^q(\xi) - p(\eta)}{\sin [\beta(\eta) - \alpha(\xi)]}, \quad B = \operatorname{ctg} [\beta(\eta) - \alpha(\xi)]. \quad (33.6)$$

Легко проверить, что в стационарной точке функционала должны быть выполнены равенства

$$\begin{aligned} p(\eta) - q(\xi) &= \ln \sqrt{\frac{x_\eta^2 + y_\eta^2}{x_\xi^2 + y_\xi^2}} \equiv \lambda(\xi, \eta), \\ \beta(\eta) - \alpha(\xi) &= \arccos \frac{x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta}{\sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2} \sqrt{x_\eta^2 + y_\eta^2}} \equiv \omega(\xi, \eta). \end{aligned} \quad (33.7)$$

При вычислении значений функций  $x(\xi, \eta)$ ,  $y(\xi, \eta)$  на следующей итерации функции  $p$ ,  $q$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  рассматриваются как параметры, входящие в коэффициенты уравнений (33.5), и вычисляются по текущим значениям  $x(\xi, \eta)$ ,  $y(\xi, \eta)$  с помощью следующих формул, вытекающих из (33.7):

$$\begin{aligned} p(\eta) &= \int_0^1 \lambda(\xi, \eta) d\xi - \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \lambda(\xi, \eta) d\xi d\eta, \\ q(\xi) &= - \int_0^1 \lambda(\xi, \eta) d\eta + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \lambda(\xi, \eta) d\xi d\eta, \\ \beta(\eta) &= \int_0^1 \omega(\xi, \eta) d\xi - \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \omega(\xi, \eta) d\xi d\eta, \\ \alpha(\xi) &= - \int_0^1 \omega(\xi, \eta) d\eta + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \omega(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (33.8)$$

При разностной записи производных в уравнениях (33.5) используются простейшие разностные операторы. Выражение  $-\frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial x}{\partial \xi}$

в разностной записи имеет вид

$$-\frac{1}{2} (A_{j+1/2, k+1/2} + A_{j+1/2, k-1/2}) (x_{j+1, k} - x_{j, k}) + \\ + \frac{1}{2} (A_{j-1/2, k+1/2} + A_{j-1/2, k-1/2}) (x_{j, k} - x_{j, k-1}), \quad (33.9)$$

в котором полуцелые индексы обозначают, что, например, величина  $A_{j-1/2, k-1/2}$  отнесена к ячейке с номером  $(j-1/2, k-1/2)$  и вычисляется по формуле (33.13), которая будет приведена ниже. Выражение  $-\frac{\partial}{\partial \eta} C \frac{\partial x}{\partial \eta}$  заменяется аналогичной формой:

$$-\frac{1}{2} (C_{j+1/2, k+1/2} + C_{j-1/2, k+1/2}) (x_{j, k+1} - x_{j, k}) + \\ + \frac{1}{2} (C_{j+1/2, k-1/2} + C_{j-1/2, k-1/2}) (x_{j, k} - x_{j, k-1}). \quad (33.10)$$

Немного сложнее расписывается сумма смешанных производных  $\frac{\partial}{\partial \xi} B \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} B \frac{\partial x}{\partial \xi}$ :

$$\frac{1}{2} B_{j+1/2, k+1/2} (x_{j+1, k+1} - x_{j, k}) - \frac{1}{2} B_{j-1/2, k+1/2} (x_{j-1, k+1} - x_{j, k}) - \\ - \frac{1}{2} B_{j+1/2, k-1/2} (x_{j+1, k-1} - x_{j, k}) + \frac{1}{2} B_{j-1/2, k-1/2} (x_{j-1, k-1} - x_{j, k}). \quad (33.11)$$

Соответствующие выражения для второго из уравнений (33.5) получаются из (33.9) — (33.11) заменой  $x$  на  $y$ .

Разностные формулы для функций  $p(\eta)$ ,  $q(\xi)$ ,  $\beta(\eta)$ ,  $\alpha(\xi)$ , которые определяются значениями в «полуцелых» точках:  $\{p_{k-1/2}\}$ ,  $\{q_{j-1/2}\}$ ,  $\{\beta_{k-1/2}\}$ ,  $\{\alpha_{j-1/2}\}$ , получаются из (33.8) после замены интегралов соответствующими суммами:

$$p_{k-1/2} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \lambda_{j-1/2, k-1/2} - \lambda^*, \\ q_{j-1/2} = -\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \lambda_{j-1/2, k-1/2} + \lambda^*, \\ \beta_{k-1/2} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \omega_{j-1/2, k-1/2} - \omega^*, \\ \alpha_{j-1/2} = -\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \omega_{j-1/2, k-1/2} + \omega^*, \quad (33.12)$$

где

$$\lambda^* = \frac{1}{2JK} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \lambda_{j-1/2, k-1/2},$$

$$\omega^* = \frac{1}{2JK} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \omega_{j-1/2, k-1/2}.$$

При вычислении входящих в (33.12) величин  $\lambda_{j-1/2, k-1/2}$ ,  $\omega_{j-1/2, k-1/2}$  используются формулы (33.7) для функций  $\lambda(\xi, \eta)$ ,  $\omega(\xi, \eta)$ , для которых производные  $x_\xi, x_\eta, y_\xi, y_\eta$  заменяются в ячейке  $(j-1/2, k-1/2)$  разностными выражениями

$$(x_\xi)_{j-1/2, k-1/2} = \frac{1}{2} (x_{j, k} - x_{j-1, k} + x_{j, k-1} - x_{j-1, k-1}),$$

$$(x_\eta)_{j-1/2, k-1/2} = \frac{1}{2} (x_{j, k} - x_{j, k-1} + x_{j-1, k} - x_{j-1, k-1}),$$

$(y_\xi)_{j-1/2, k-1/2}, (y_\eta)_{j-1/2, k-1/2}$  получаются заменой  $x$  на  $y$ . Наконец, формулы для коэффициентов  $(A, B, C)_{j-1/2, k-1/2}$ , входящих в (33.9)–(33.11), основываются на (33.6):

$$A_{j-1/2, k-1/2} = \frac{e^{p_{k-1/2} - q_{j-1/2}}}{\sin \omega_{j-1/2, k-1/2}},$$

$$B_{j-1/2, k-1/2} = \operatorname{ctg} \omega_{j-1/2, k-1/2}, \quad (33.13)$$

$$C_{j-1/2, k-1/2} = \frac{e^{q_{j-1/2} - p_{k-1/2}}}{\sin \omega_{j-1/2, k-1/2}}.$$

Итерационный процесс определяется равенствами

$$x_{j, k}^{(l+1)} = x_{j, k}^{(l)} + \theta_{j, k}^{(l)} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial x}{\partial \xi} \right]_{j, k} + \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} C \frac{\partial x}{\partial \eta} \right]_{j, k} - \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} B \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} B \frac{\partial x}{\partial \xi} \right]_{j, k} \right\}, \quad (33.14)$$

$$y_{j, k}^{(l+1)} = y_{j, k}^{(l)} + \theta_{j, k}^{(l)} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial y}{\partial \xi} \right]_{j, k} + \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} C \frac{\partial y}{\partial \eta} \right]_{j, k} - \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} B \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} B \frac{\partial y}{\partial \xi} \right]_{j, k} \right\},$$

где в квадратные скобки заключены разностные выражения, определенные выше формулами (33.9)–(33.11).

Величина  $\theta_{j, k}^{(l)}$  задается формулами

$$\theta_{j, k}^{(l)} = \min \{ \theta_{j-1/2, k-1/2}, \theta_{j-1/2, k+1/2}, \theta_{j+1/2, k-1/2}, \theta_{j+1/2, k+1/2} \},$$

$$\theta_{j-1/2, k-1/2} = \frac{\theta}{2(A_{j-1/2, k-1/2} + C_{j-1/2, k-1/2}) + |B_{j-1/2, k-1/2}|}.$$

Здесь  $\theta$  — такой же релаксационный параметр, как и в формулах (33.2). Из соображений устойчивости, исследуемой при «замороженных» коэффициентах уравнений, следует подчинить его условию  $0 < \theta < 2$ .

На этом мы закончим описание реализации численных алгоритмов I и II для построения разностных сеток. Подчеркнем еще раз в заключение, что медленная сходимость явных итераций для сложных нелинейных уравнений, привлекаемых для этой цели, должна стимулировать развитие более совершенных методов их решения. Обзор разнообразных методов для решения разностных уравнений, возникающих в задачах эллиптического типа, можно найти в упоминавшихся уже работах [103], [111].

В качестве примера мы рассмотрим применение метода переменных направлений к задаче построения разностных сеток по алгоритму III, основанному на использовании вариационного функционала (32.18) с весовой функцией, определенной формулой (32.19). Уравнения для искомых функций  $x(\xi, \eta)$ ,  $y(\xi, \eta)$  возьмем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} C \frac{\partial x}{\partial \eta} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} C \frac{\partial y}{\partial \eta} &= 0, \end{aligned} \quad (33.15)$$

где

$$\begin{aligned} A = \omega l &= \sqrt{\frac{x_\eta^2 + y_\eta^2}{x_\xi^2 + y_\xi^2}} |x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta|, \\ C = \frac{\omega}{l} &= \sqrt{\frac{x_\xi^2 + y_\xi^2}{x_\eta^2 + y_\eta^2}} |x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta|. \end{aligned} \quad (33.16)$$

Фактически эти уравнения являются уравнениями Эйлера — Лагранжа для вариационного функционала в предположении, что  $l$  и  $\omega$ , определенные формулами (32.15) и (32.19) и, следовательно, зависящие от искомых функций  $x$  и  $y$ , не варьируются, но мы будем пользоваться ими, чтобы не усложнять алгоритма расчета.

При составлении разностных уравнений для системы (33.15) используются разностные операторы (33.9) и (33.10). Коэффициенты  $A_{j-1/2, k-1/2}$  и  $C_{j-1/2, k-1/2}$  вычисляются на основании формул (33.16), в которых производные  $x_\xi$ ,  $x_\eta$ ,  $y_\xi$ ,  $y_\eta$  можно вычислять с помощью простейших разностных выражений, аналогичных (33.1), или воспользоваться разностными аппроксимациями

следующего вида:

$$\begin{aligned} x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2 &\approx \frac{1}{2} [(x_{j,k} - x_{j-1,k})^2 + (y_{j,k} - y_{j-1,k})^2 + \\ &\quad + (x_{j,k-1} - x_{j-1,k-1})^2 + (y_{j,k-1} - y_{j-1,k-1})^2], \\ x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 &\approx \frac{1}{2} [(x_{j,k} - x_{j,k-1})^2 + (y_{j,k} - y_{j,k-1})^2 + \\ &\quad + (x_{j-1,k} - x_{j-1,k-1})^2 + (y_{j-1,k} - y_{j-1,k-1})^2], \\ x_{\xi} y_{\eta} - y_{\xi} x_{\eta} &\approx \frac{1}{2} [(x_{j,k} - x_{j-1,k-1})(y_{j-1,k} - y_{j,k-1}) - \\ &\quad - (x_{j-1,k} - x_{j,k-1})(y_{j,k} - y_{j-1,k-1})]. \end{aligned}$$

При вычислении коэффициентов  $A_{j-1/2, k-1/2}$ ,  $C_{j-1/2, k-1/2}$  задаются некоторые ограничения, препятствующие появлению слишком малых или больших их значений. Соответствующие подробности по этому и другим вопросам можно найти в работе [98].

Итерационный процесс для решения полученной системы разностных уравнений состоит в последовательном выполнении нескольких циклов, каждый из которых состоит из двух этапов. На первом этапе по имеющейся сетке  $\{(x, y)_{j,k}\}$ , полученной на предыдущем цикле, вычисляются коэффициенты разностных уравнений  $\{A_{j-1/2, k-1/2}\}$  и  $\{C_{j-1/2, k-1/2}\}$ , а также значения двух итерационных параметров  $d'$ ,  $d''$ , роль которых будет описана ниже. На втором этапе при фиксированных значениях коэффициентов  $A_{j-1/2, k-1/2}$ ,  $C_{j-1/2, k-1/2}$  выполняется несколько итераций по пересчету сетки. Каждая из итераций организована следующим образом.

Сначала при фиксированном индексе  $k$  решаются системы «трехточечных» уравнений по индексу  $j$  для величин  $\bar{x}_{j,k}$ ,  $\bar{y}_{j,k}$  ( $j = 1, 2, \dots, J-1$ ):

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi} \right]_{j,k} + \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} C \frac{\partial \bar{x}}{\partial \eta} \right]_{j,k} &= d' (\bar{x}_{j,k} - x_{j,k}), \\ \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi} \right]_{j,k} + \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} C \frac{\partial \bar{y}}{\partial \eta} \right]_{j,k} &= d' (\bar{y}_{j,k} - y_{j,k}), \end{aligned} \quad (33.17)$$

с заданными граничными значениями

$$\begin{aligned} \bar{x}_{0,k} &= x_k^{\text{лев}}, & \bar{x}_{J,k} &= x_k^{\text{пр}}, \\ \bar{y}_{0,k} &= y_k^{\text{лев}}, & \bar{y}_{J,k} &= y_k^{\text{пр}}, \end{aligned}$$

определяющими положение граничных узлов сетки. Выражения в (33.17), заключенные в квадратные скобки, обозначают соответствующие разностные аппроксимации, описанные выше. Такие системы уравнений решаются последовательно для значений индекса  $k = 1, 2, \dots, K-1$  с помощью прогонки, описанной,

например, в § 5 книги [40]. Назовем ее условно горизонтальной прогонкой.

После этого при фиксированном индексе  $j$  решаются системы «трехточечных» уравнений по индексу  $k$  для величин  $\bar{\bar{x}}_{j,k}$ ,  $\bar{\bar{y}}_{j,k}$  ( $k = 1, 2, \dots, K-1$ ):

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi} \right]_{j,k} + \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} C \frac{\partial \bar{x}}{\partial \eta} \right]_{j,k} = d'' (\bar{\bar{x}}_{j,k} - \bar{x}_{j,k}),$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi} \right]_{j,k} + \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} C \frac{\partial \bar{y}}{\partial \eta} \right]_{j,k} = d'' (\bar{\bar{y}}_{j,k} - \bar{y}_{j,k}),$$

с заданными граничными значениями

$$\bar{\bar{x}}_{j,0} = x_j^h, \quad \bar{\bar{x}}_{j,K} = x_j^b,$$

$$\bar{\bar{y}}_{j,0} = y_j^h, \quad \bar{\bar{y}}_{j,K} = y_j^b.$$

Такие системы уравнений решаются последовательно для значений индекса  $j = 1, 2, \dots, J-1$ . Назовем их вертикальными прогонками. Полученная сетка  $\{(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})_{j,k}\}$  является исходной для следующей итерации.

На скорость сходимости применяемого итерационного процесса очень сильное влияние оказывает выбор итерационных параметров  $d'$ ,  $d''$ . К сожалению, теория выбора этих параметров разработана только для простейших случаев, когда одномерные операторы, на которые осуществляется расщепление в ходе выполнения итерации, перестановочны. В этом случае, используя довольно громоздкую технику, можно вычислять последовательности итерационных параметров  $d'_i$ ,  $d''_i$ , которые обеспечивают высокую скорость сходимости.

В процессе экспериментальной работы мы пытались использовать такого рода алгоритм расчета итерационных параметров  $d'_i$ ,  $d''_i$ , заменив коэффициенты разностных уравнений  $A_{j-1/2, k-1/2}$ ,  $C_{j-1/2, k-1/2}$  каким-нибудь способом усредненными значениями. Однако из-за сильной переменности коэффициентов, вызванной нелинейным характером уравнений (33.15), (33.16), эти попытки в общем случае оказывались неудачными.

В конечном счете мы остановились на варианте с использованием на всех итерациях одного цикла постоянных значений параметров  $d'$ ,  $d''$ , выбранных оптимальным образом по теории, рекомендованной в [103] для случая неперестановочных операторов расщепления, реализуемых при горизонтальных и вертикальных прогонках. Для применения упомянутой теории необходимо знать границы спектра для этих одномерных самосопряженных операторов. Обозначим эти границы  $[\delta', \Delta']$  для оператора

горизонтальных прогонок,  $[\delta'', \Delta'']$  для оператора вертикальных прогонок.

Тогда, согласно рекомендациям [103], оптимальные значения параметров  $d'$ ,  $d''$  определяются формулами

$$d' = \alpha - \beta, \quad d'' = \alpha + \beta,$$

$$\beta = \frac{\delta' \Delta' - \delta'' \Delta''}{\delta' + \Delta' + \delta'' + \Delta''},$$

$$\alpha = \sqrt{(\delta' - \beta)(\Delta' - \beta)} = \sqrt{(\delta'' - \beta)(\Delta'' - \beta)},$$

гарантируя скорость сходимости не медленнее, чем по экспоненте с показателем

$$\gamma = \ln \frac{(\Delta' - d'') (\Delta'' - d'')}{(\Delta' - d') (\Delta'' + d')}$$

в некоторой специальной сеточной норме, которую мы здесь приводить не будем.

Вернемся к вопросу о границах спектра одномерных операторов, реализуемых при прогонках. Для получения величин  $\delta'$ ,  $\Delta'$ , задающих границы спектра оператора горизонтальных прогонок, нужно для каждого из значений индекса  $k = 1, \dots, K-1$  вычислить наименьшее  $\delta'_k$  и наибольшее  $\Delta'_k$  собственные значения трехдиагональных симметрических матриц порядка  $J-1$ , отвечающих разностному оператору  $-\frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial}{\partial \xi}$ , определенному формулой (33.9). После этого полагаем

$$\delta' = \min_{1 \leq k \leq K-1} \delta'_k, \quad \Delta' = \max_{1 \leq k \leq K-1} \Delta'_k.$$

Для получения величин  $\delta''$ ,  $\Delta''$ , задающих границы спектра оператора вертикальных прогонок, нужно для каждого из значений индекса  $j = 1, \dots, J-1$  вычислить наименьшее  $\delta''_j$  и наибольшее  $\Delta''_j$  собственные значения трехдиагональных симметрических матриц порядка  $K-1$ , отвечающих разностному оператору  $-\frac{\partial}{\partial \eta} C \frac{\partial}{\partial \eta}$ , определенному формулой (33.10). После этого полагаем

$$\delta'' = \min_{1 \leq j \leq J-1} \delta''_j, \quad \Delta'' = \max_{1 \leq j \leq J-1} \Delta''_j.$$

Вычисление собственных значений трехдиагональной симметрической матрицы просто и надежно осуществляется способом, описанным в работе [126].

Применение метода переменных направлений и проведенная оптимизация подбора итерационных параметров позволяют значительно ускорить сходимость итерационного процесса для алгоритма III построения разностных сеток. На этом мы закончим

его описание. В экспериментальной отработке этого алгоритма существенное участие принимала Р. Н. Антонова.

В последнее время вопрос построения сеток широко обсуждается в журнальной литературе, однако окончательная постановка

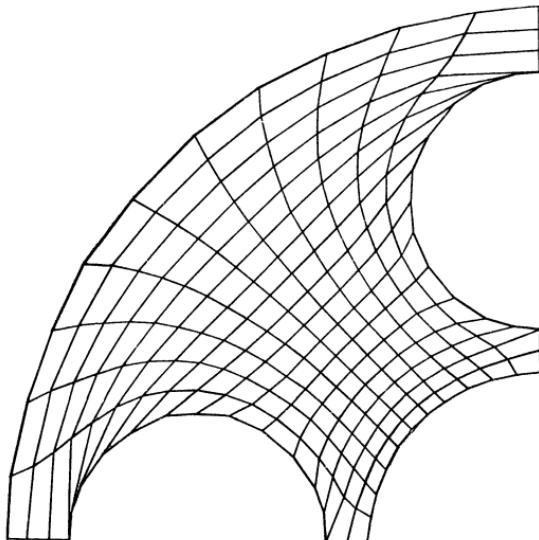


Рис. 33.1.

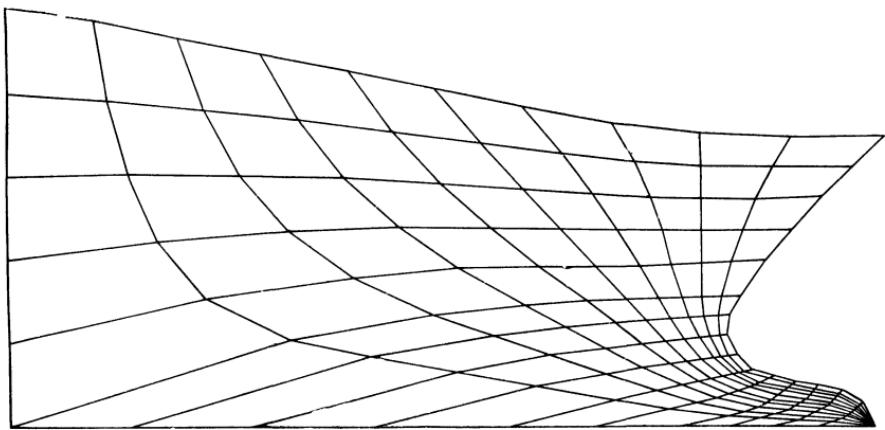


Рис. 33.2.

задачи, которую надо решать при построении сетки, еще четко не определилась. Вот ряд работ, посвященных этому вопросу: [152], [123]—[125].

Именно это обстоятельство вынудило нас изложить в § 32 несколько видов уравнений, которые могут быть использованы при

построении разностных сеток, а в настоящем параграфе ограничиться только простейшими численными алгоритмами для их реализации. Сейчас мы приведем несколько примеров сеток, построенных с помощью таких алгоритмов. Все эти примеры имеют чисто иллюстративный характер и в первую очередь имеют целью обратить внимание на недостатки, которые обнаруживаются при их применении. При описании этих иллюстраций мы будем лишь упоминать алгоритм, по которому они получены, опуская все технические подробности.

На рис. 33.1 и 33.2 приведены сетки, рассчитанные посредством алгоритма I. При некоторых недостатках, которые в них

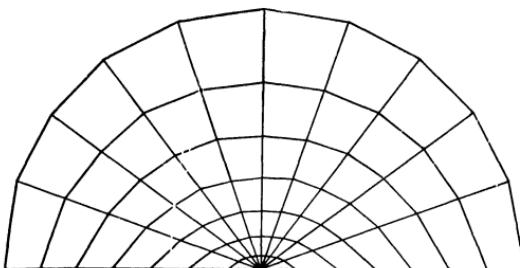


Рис. 33.3.

усмотрит придирчивый читатель, эти сетки пригодны для расчета задач.

К сожалению, уравнения (32.5), лежащие в основе алгоритма I, не содержат среди своих решений полярной сетки, описываемой функциями

$$x = e^{\xi} \cos \eta, \quad y = e^{\xi} \sin \eta.$$

Это приводит к тому, что при расчете сетки на полукруге по алгоритму, основанному на уравнениях (32.5), получается картина примерно такого характера, как изображенная на рис. 33.3. Стягивание линий сетки к диаметру полукруга можно предотвратить, если соответствующим образом ввести вспомогательные переменные и воспользоваться более гибкими уравнениями (32.6). При введении таких переменных можно руководствоваться тем обстоятельством, что функции

$$x = e^{\xi} \cos \eta, \quad y = e^{\xi} \sin \eta$$

уравнениям (32.5) удовлетворяют. В более сложной ситуации, изображенной на рис. 33.4, придумать такие параметры уже труднее. Сетка на рис. 33.4 также получена по алгоритму I. Попытка заставить линии сетки изменить поведение в центральной части путем введения вспомогательных параметров, имеющих

целью «притянуть» сетку к соответствующей границе, может приводить, например, к таким неудачным результатам, как изображенный на рис. 33.5.

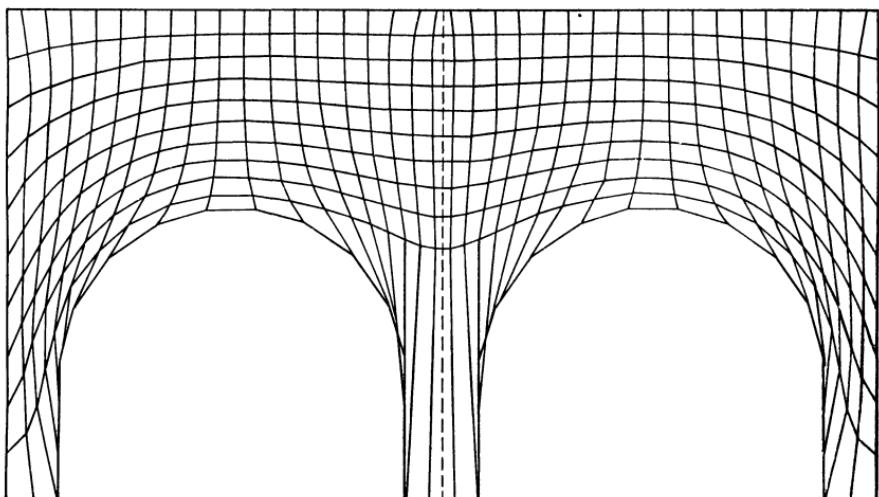


Рис. 33.4.

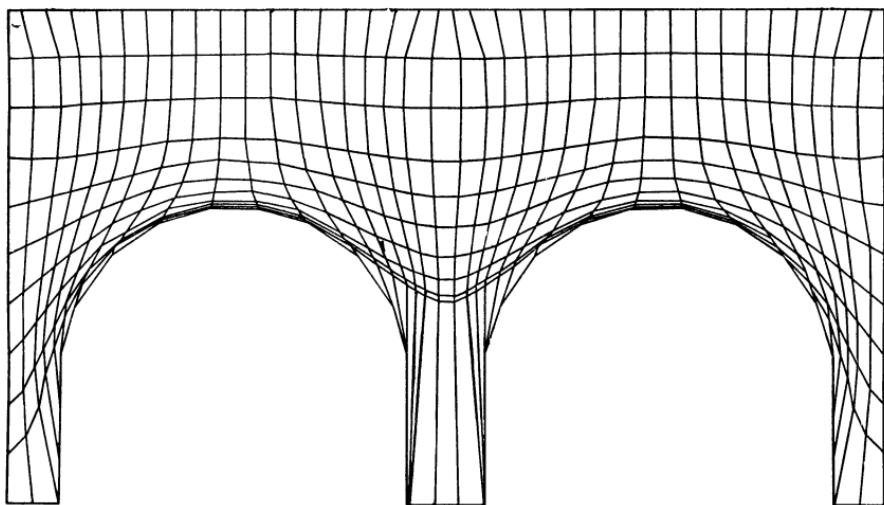


Рис. 33.5.

На рис. 33.6 приведена сетка для этой области, сосчитанная по алгоритму II, использующему квазиконформные отображения. Еще одна сетка, сосчитанная по алгоритму II, изображена на

рис. 33.7. Заметим, что при этом на начальной стадии расчета нам приходится работать с сеткой, которая содержит самопересякающиеся ячейки, образующие складки и выходящие за пределы контура области (рис. 33.8). Это довольно общая ситуация при расчете сеток в сложных областях, и вычислительные алгоритмы должны быть достаточно тщательно отработаны, чтобы,

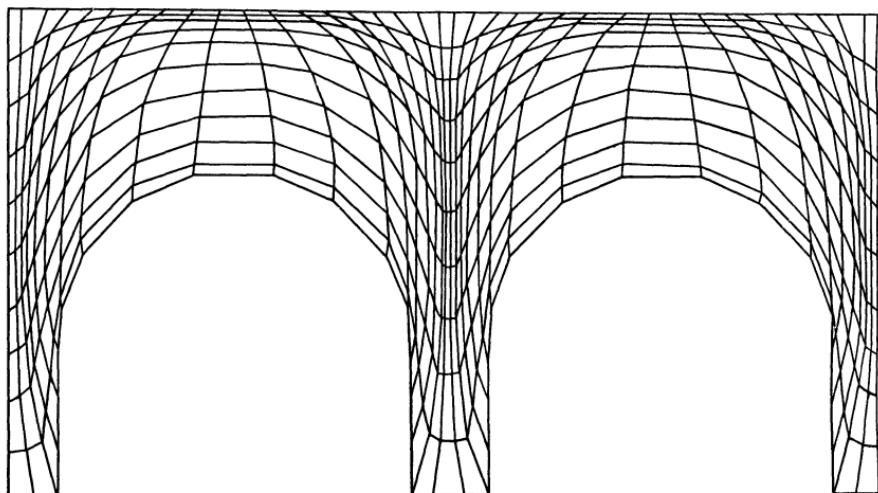


Рис. 33.6.

оперируя с начальными приближениями такого характера, не выдавать «аваст» при проведении расчета на ЭВМ.

На рис. 33.9, 33.10 приведены два примера расчета сеток, выполненного с помощью алгоритма III, в котором весовая функция  $\omega$  определялась формулой (32.19).

В заключение отметим еще два обстоятельства. Мы описывали алгоритмы расчета сеток, сопоставляя счетной области прямоугольник на вспомогательной параметрической плоскости. В сложных задачах, как правило, удается «раскроить» всю область расчета на отдельные подобласти, в каждой из которых можно применить либо простейшие интерполяционные способы, изложенные в § 23, либо один из описанных алгоритмов. В тех случаях, когда по каким-либо причинам это делать нецелесообразно, можно воспользоваться, например, такой возможностью. Путем незначительных изменений в алгоритме можно в процессе расчета фиксировать положение отдельных внутренних узлов сетки по усмотрению вычислителя. В качестве иллюстрации приводим рис. 33.11, на котором в процессе расчета оставались неподвижными узлы, расположенные на трех дугах окружностей внутри счетной области, а остальные определялись алгоритмом III.

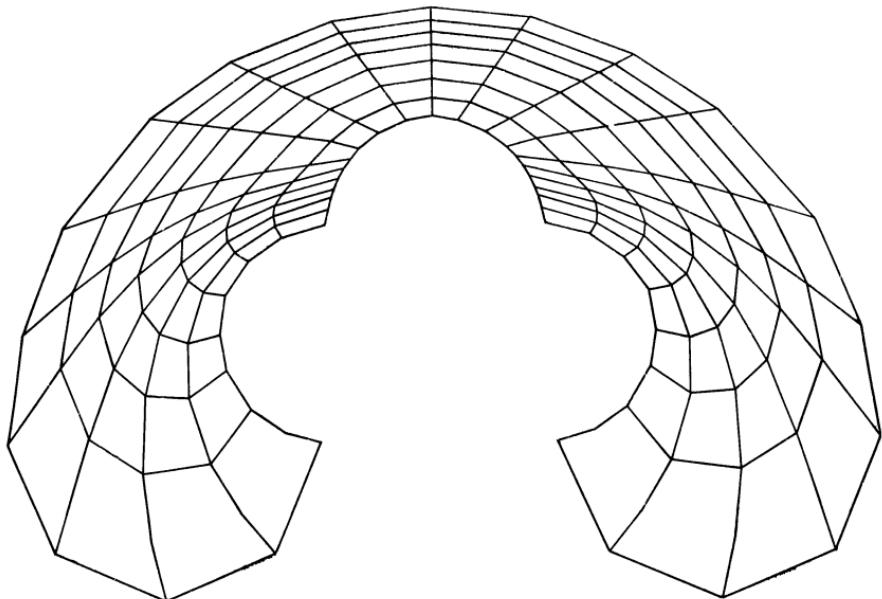


Рис. 33.7.

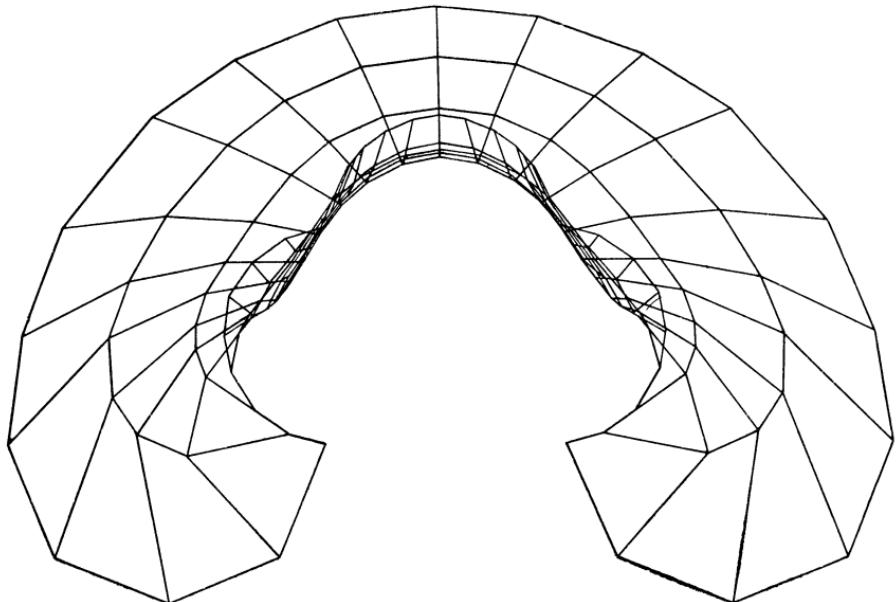


Рис. 33.8.

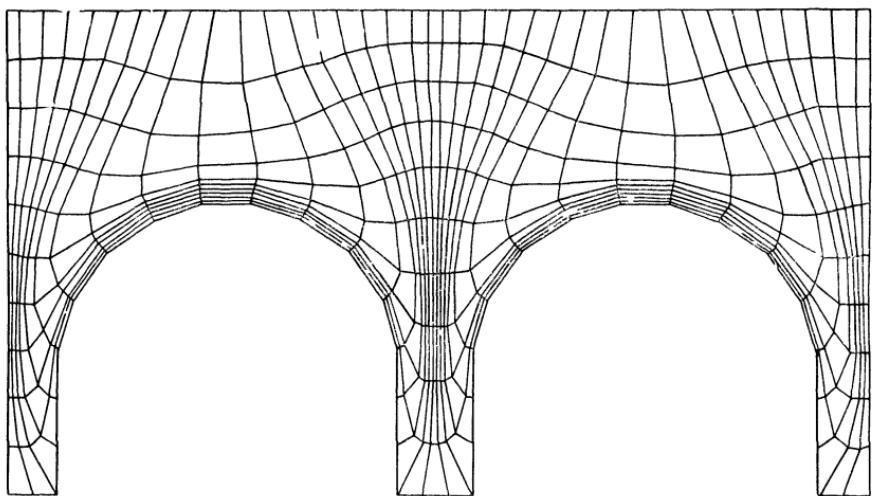


Рис. 33.9.

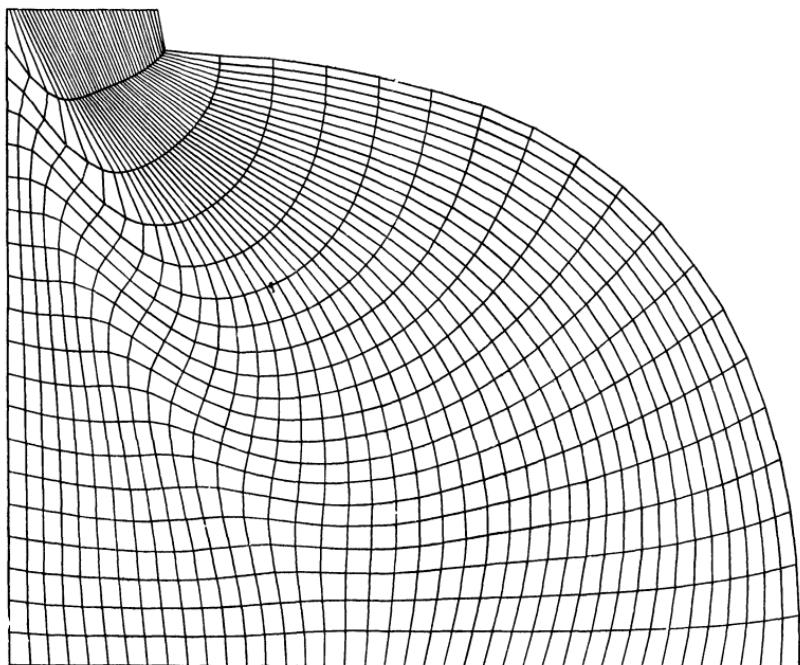


Рис. 33.10.

Второе замечание касается принципа фиксирования положения узлов сетки на контуре границы счетной области, которого мы старались строго придерживаться по причинам, уже обсуждавшимся выше. В некоторых случаях, как, например, при изображенном на рис. 33.12 соответствии точек на противоположных

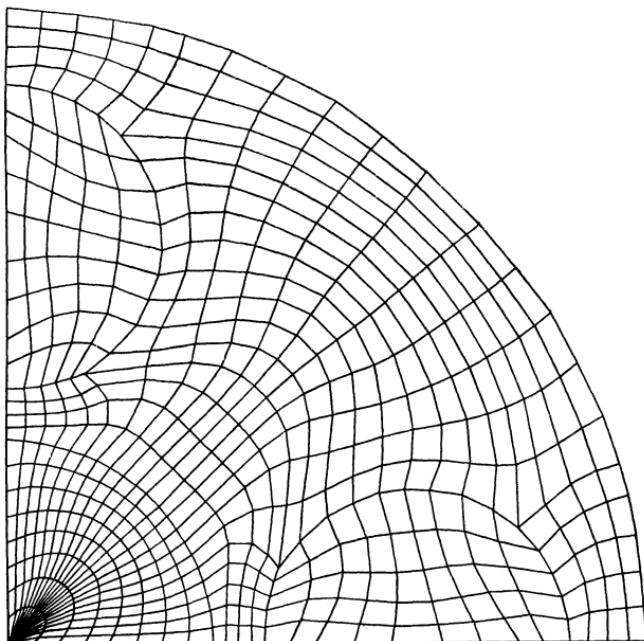


Рис. 33.11.

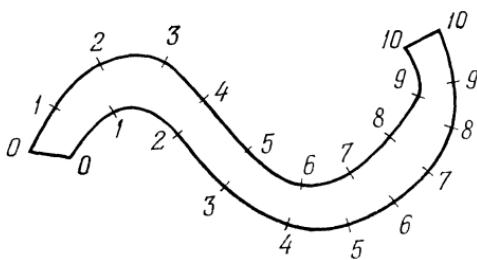


Рис. 33.12.

границах «длинной» и «тонкой» области, вряд ли можно рассчитывать на удовлетворительную сетку (при небольшом числе точек по поперечному направлению). Поэтому нужно специально заботиться о том, чтобы препятствовать возникновению подобных ситуаций. Заметим, что, как мы уже указывали в § 32 при опи-

сании алгоритма II, подробное изложение которого можно найти в работе [9], некоторое ограничение на расстановку граничных точек возникает как необходимое условие для существования квазиконформного отображения из рассматриваемого класса.

### § 34. Система разностных уравнений для нестационарных задач газовой динамики в локальной криволинейной системе координат

Построение в пространстве  $x, y, t$  элементарного объема  $V$ . Замена в интегральной системе уравнений газовой динамики, записанной в локальном базисе, произвольной области интегрирования на элементарный объем  $V$ . Дискретизация полученных интегральных соотношений и построение системы разностных уравнений.

Содержанием настоящего параграфа будет вывод системы разностных уравнений, с помощью которых производится вычисление гидродинамических величин на следующий временной шаг, отвечающий моменту  $t + \tau$ . Как уже было описано выше, мы можем построить по положению границ на момент времени  $t$  счетную сетку и два семейства координатных линий. Координатные линии разбивают всю нашу счетную область на совокупность криволинейных четырехугольников. Назовем их ячейками счетной сетки. Точки сетки мы условились нумеровать двойным индексом. Рассмотрим какую-нибудь ячейку сетки с номерами счетных узлов  $(j, k), (j+1, k), (j+1, k+1), (j, k+1)$ . Условимся приписывать ей номер  $(j+1/2, k+1/2)$ .

Мы будем считать, что на момент времени  $t$  гидродинамические величины — вектор скорости, плотность, энергия, давление — относятся к ее средней точке и имеют индекс  $(j+1/2, k+1/2)$ .

В конце параграфа мы приведем формулы для нахождения координат этой точки, но сейчас на этом останавливаться не будем.

Вспомним, что в § 31 мы нашли значения координат граничных точек на момент времени  $t + \tau$ . Зная положения границ на следующем временном шаге, мы по ним можем построить счетную сетку. По координатам точек сетки на момент  $t + \tau$  построим оба семейства координатных линий, которые разобьют счетную область на совокупность ячеек. (Подчеркнем, что совокупность ячеек сетки, построенной на момент  $t + \tau$  на плоскости  $x, y$ , также выстилает всю область, очерченную положением границ на момент  $t + \tau$ .) Рассмотрим в пространстве  $x, y, t$  положение ячейки сетки с номером  $(j+1/2, k+1/2)$  на момент  $t + \tau$  и положение ячейки с тем же номером на момент  $t$ .

Для простоты изложения условимся о некоторой терминологии: точки сетки, по которым строилась данная ячейка, назовем ее *вершинами*, восполняющие дуги, соединяющие соседние вершины, — *ребрами*, отрезки прямых, соединяющие одноименные

вершины на плоскостях  $t$  и  $t + \tau$ , — *боковыми ребрами*. Для построенных на каждый из моментов времени сеток в каждой вершине  $(j, k)$  касательные к линиям первого и второго семейств образуют невырожденный координатный репер. Используя это свойство и метрические параметры сетки, можно трактовать ребра ячейки как координатные линии локальной криволинейной системы координат. Тогда ребра сетки на плоскости  $t = \text{const}$  будут линиями либо  $\xi = \text{const}$ , либо  $\eta = \text{const}$ . (Напомним, что в § 29 функциями  $\xi = \xi(x, y)$ ,  $\eta = \eta(x, y)$  мы определили задание перехода к криволинейной системе координат.) На момент времени  $t + \tau$  ребра ячейки с тем же номером будут также координатными линиями, но, вообще говоря, другой координатной системы, построенной на момент  $t + \tau$ .

Следуя нашему способу описывать гидродинамическое течение в локальной подвижной системе координат, мы должны были бы строить зависимости  $\xi = \xi(x, y, t)$ ,  $\eta = \eta(x, y, t)$ , т. е. учитывать и изменения координатной системы во времени. Но тогда формулы перехода к такой системе координат будут значительно сложнее. Чтобы избежать неоправданного усложнения формул, подвижность системы координат с нужной точностью учтем другим способом.

Напомним, что мы строим схему первого порядка точности по  $\sqrt{g_{11}} \Delta \xi$ ,  $\sqrt{g_{22}} \Delta \eta$ , поэтому и при построении системы координат мы имеем право строить ее приближенно с нужным порядком точности. Зависимость от времени локальной системы координат мы учтем, написав соотношения, связывающие две локальные координатные системы, построенные для ячеек с одним и тем же номером на моменты  $t$  и  $t + \tau$ .

Наша ближайшая цель — суметь связать эти две координатные системы. Выберем две ячейки сетки с одинаковым номером на плоскостях  $t_0$  и  $t_0 + \tau$ .

Построим в пространстве  $x, y, t$  какую-нибудь поверхность, проходящую через два одноименных ребра и два боковых ребра, соединяющие вершины для выбранных ячеек сетки. Назовем ее *боковой гранью*. Пусть уравнение боковой грани  $F(\xi, \eta, t) = 0$ , где  $\xi, \eta$  — криволинейные координаты локальной системы координат в плоскости  $t = t_0$ ,  $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$ . Используя условие, что при малом перемещении границ счетной области координаты точек сетки меняются мало, будем считать, что функция  $F(\xi, \eta, t)$  гладкая. Разложим ее в ряд Тейлора:

$$F(\xi, \eta, t) = a_0 + a_1(\xi - \xi_0) + a_2(\eta - \eta_0) + a_3(t - t_0) + \dots = 0. \quad (34.1)$$

Если считать, что в пределах ячейки сетки  $\xi, \eta$  меняются мало, то, ограничившись членами первого порядка, получим

$$a_0 + a_1(\xi - \xi_0) + a_2(\eta - \eta_0) + a_3(t - t_0) = 0. \quad (34.2)$$

На ребре  $\xi = \xi_0$  в плоскости нижнего основания  $t = t_0$  мы из выражения (34.2) должны получить тождественный нуль. Следовательно, с точностью до членов первого порядка малости уравнение боковой грани, проходящей через ребро  $\xi = \xi_0$ , будет

$$\xi = \xi_0 + \frac{\mu^*}{\sqrt{g_{11}}} (t - t_0). \quad (34.3)$$

Аналогично, уравнение боковой грани, проходящей через ребро  $\eta = \eta_0$  на плоскости  $t = t_0$ , примет вид

$$\eta = \eta_0 + \frac{v^*}{\sqrt{g_{22}}} (t - t_0), \quad (34.4)$$

где  $\mu^*$ ,  $v^*$ — некоторые постоянные. Следовательно, каждая из координатных линий локальной системы координат на момент  $t + \tau$  записывается в локальной системе координат, построенной на момент  $t$ , с точностью до членов первого порядка в виде

$$\xi = \xi_0 + \frac{\mu^*}{\sqrt{g_{11}}} \tau, \quad \eta = \eta_0 + \frac{v^*}{\sqrt{g_{22}}} \tau. \quad (34.5)$$

После всего сказанного займемся построением разностной системы уравнений, записанной в локальной подвижной системе координат. Исходной нам будет служить система (30.11). Вместо произвольного объема  $V$  в пространстве  $x, y, t$  выберем объем криволинейной фигуры, у которой за нижнее основание взята ячейка сетки  $(j + 1/2, k + 1/2)$  на момент  $t$ , за верхнее основание—ячейка с тем же номером на момент  $t + \tau$ , а боковые грани задаются соотношениями (34.3) или (34.4) для каждого из ребер нижнего основания. Введем для удобства изложения следующие обозначения. Занумеруем индексами 1, 2, 3, 4 вершины нижнего основания, отвечающие номерам счетных узлов  $(j, k)$ ,  $(j + 1, k)$ ,  $(j + 1, k + 1)$ ,  $(j, k + 1)$ . Соответственно занумеруем индексами  $1', 2', 3', 4'$  одноименные вершины верхнего основания. Нижние и верхние основания и боковые грани будем отмечать индексами тех четырех вершин, которые им принадлежат. При интегрировании по описанной выше криволинейной фигуре предметом особого внимания будут первые слагаемые во втором и третьем уравнениях системы (30.11). Выпишем их:

$$\iint_S \rho Q(y) \mu^k \sqrt{g} d\xi d\eta, \quad \iint_S \rho Q(y) v^k \sqrt{g} d\xi d\eta. \quad (34.6)$$

В число интегралов по поверхности будут входить интегралы по верхнему основанию. Согласно принятым нами обозначениям они запишутся в виде

$$\iint_{S_{1'2'3'4'}} \rho Q(y) \mu^k \sqrt{g} d\xi d\eta, \quad \iint_{S_{1'2'3'4'}} \rho Q(y) v^k \sqrt{g} d\xi d\eta. \quad (34.7)$$

Подынтегральные выражения в них записаны в локальной криволинейной системе координат, построенной по ячейке нижнего основания. Естественнее было бы выразить их через криволинейную систему координат верхнего основания, тогда пределы интегрирования были бы просты, но пришлось бы для  $t$  и  $t + \tau$  иметь две координатные системы. Такой переход для скалярных величин трудностей не представляет. Некоторые осложнения вызывают только преобразования интегралов (34.7), так как в подынтегральные выражения входят компоненты вектора, записанные в локальной системе координат нижнего основания. Вспомним о соотношениях (34.5), которые говорят о том, что координатные линии локальной системы координат верхнего основания в точке  $(\xi, \eta)$  соответствуют координатным линиям системы координат нижнего основания в точке  $(\xi_0, \eta_0)$ , а связь между координатами этих точек задается соотношениями (34.5).

Систему координат мы задаем направляющими косинусами касательных к координатным линиям. А для близких точек, с точностью до членов более высокого порядка малости относительно разности координат, имеют место соотношения

$$\begin{aligned}\alpha' &= \alpha'_0 - \left[ \frac{\partial [x, \xi]}{\partial \xi} \Big|_0 \frac{\mu^*}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{\partial [x, \xi]}{\partial \eta} \Big|_0 \frac{v^*}{\sqrt{g_{22}}} \right] \beta'_0 \tau + \dots, \\ \beta' &= \beta'_0 + \left[ \frac{\partial [x, \xi]}{\partial \xi} \Big|_0 \frac{\mu^*}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{\partial [x, \xi]}{\partial \eta} \Big|_0 \frac{v^*}{\sqrt{g_{22}}} \right] \alpha'_0 \tau + \dots, \\ \alpha'' &= \alpha''_0 - \left[ \frac{\partial [x, \eta]}{\partial \xi} \Big|_0 \frac{\mu^*}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{\partial [x, \eta]}{\partial \eta} \Big|_0 \frac{v^*}{\sqrt{g_{22}}} \right] \beta''_0 \tau + \dots, \\ \beta'' &= \beta''_0 + \left[ \frac{\partial [x, \eta]}{\partial \xi} \Big|_0 \frac{\mu^*}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{\partial [x, \eta]}{\partial \eta} \Big|_0 \frac{v^*}{\sqrt{g_{22}}} \right] \alpha''_0 \tau + \dots\end{aligned}\tag{34.8}$$

Они получаются из разложения в ряд Тейлора по  $\xi$  и  $\eta$  функций  $\alpha'(\xi, \eta)$ ,  $\beta'(\xi, \eta)$ ,  $\alpha''(\xi, \eta)$ ,  $\beta''(\xi, \eta)$  с использованием соотношений (34.5) и (30.4).

Выразим компоненты вектора скорости  $(\mu^*)_0$ ,  $(v^*)_0$ , записанные в локальной системе координат, построенной по ячейке верхнего основания, через компоненты скорости  $(\mu^k)_0$ ,  $(v^k)_0$  в локальной системе координат, построенной по ячейке нижнего основания. Действительно,

$$\begin{aligned}(\mu^k)_0 &= u(\alpha')_0 + v(\beta')_0, \\ (v^k)_0 &= u(\alpha'')_0 + v(\beta'')_0.\end{aligned}$$

Используя соотношения (34.8), в которых под  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\alpha''$ ,  $\beta''$  будем понимать направляющие косинусы в точке верхнего

основания, получим

$$\begin{aligned} (\mu^k)^0 &= u(\alpha')^0 + v(\beta')^0 = \\ &= u\alpha'_0 + v\beta'_0 + \left[ \frac{\partial [x, \xi]}{\partial \xi} \frac{\mu^*}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{\partial [x, \xi]}{\partial \eta} \frac{v^*}{\sqrt{g_{22}}} \right] [v\alpha'_0 - u\beta'_0] \tau + \dots, \\ (v^k)^0 &= u(\alpha'')^0 + v(\beta'')^0 = \\ &= u\alpha''_0 + v\beta''_0 - \left[ \frac{\partial [x, \eta]}{\partial \xi} \frac{\mu^*}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{\partial [x, \eta]}{\partial \eta} \frac{v^*}{\sqrt{g_{22}}} \right] [u\beta''_0 - v\alpha''_0] \tau + \dots, \end{aligned} \quad (34.9)$$

откуда искомое разложение имеет вид

$$\begin{aligned} (\mu^k)^0 &= (\mu^k)_0 + \left[ \frac{\partial [x, \xi]}{\partial \xi} \frac{\mu^*}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{\partial [x, \xi]}{\partial \eta} \frac{v^*}{\sqrt{g_{22}}} \right]_0 v_0 \beta_0 \tau + o(\dots), \\ (v^k)^0 &= (v^k)_0 - \left[ \frac{\partial [x, \eta]}{\partial \xi} \frac{\mu^*}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{\partial [x, \eta]}{\partial \eta} \frac{v^*}{\sqrt{g_{22}}} \right]_0 \mu_0 \beta_0 \tau + o(\dots) \end{aligned} \quad (34.10)$$

или, если воспользоваться (30.10), то

$$\begin{aligned} (\mu^k)^0 &= (\mu^k)_0 + \\ &+ \left[ K_{\eta=\text{const}} \mu^* + \left( K_{\xi=\text{const}} + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial [\eta, \xi]}{\partial \eta} \right) v^* \right]_0 v_0 \beta_0 \tau + o(\dots), \\ (v^k)^0 &= (v^k)_0 - \\ &- \left[ \left( K_{\eta=\text{const}} - \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial [\eta, \xi]}{\partial \xi} \right) \mu^* + K_{\xi=\text{const}} v^* \right]_0 \mu_0 \beta_0 \tau + o(\dots). \end{aligned} \quad (34.11)$$

Здесь и в дальнейшем мы будем пренебрегать членами более высокого порядка малости, поскольку нашей задачей является построение разностной схемы первого порядка точности. Кроме того, в дальнейшем (для краткости записи) там, где это не вызывает разнотечения, нижний индекс 0 мы будем опускать. Обратимся к системе (30.11) и выполним интегрирование по описанной криволинейной фигуре. В представлении поверхностных интегралов, содержащих компоненты скорости и относящихся к верхнему основанию, воспользуемся (34.11). Получим

$$\begin{aligned} &\iint_{S_{1'2'3'4'}} \rho Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta + \iint_{S_{1432}} \rho Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta + \\ &+ \iint_{S_{\text{бок}}} \rho Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta - \iint_{S_{\text{бок}}} \rho Q(y) v^n \sqrt{g_{11}} d\xi dt + \\ &+ \iint_{S_{\text{бок}}} \rho Q(y) \mu^n \sqrt{g_{22}} d\eta dt = 0, \quad (34.12_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \iint_{S_{1'2'3'4'}} \rho \left\{ (\mu^k) + \right. \\
& \quad \left. + \left[ K_{\eta=\text{const}} \mu^* + \left( K_{\xi=\text{const}} + \frac{1}{V g_{22}} \frac{\partial[\eta, \xi]}{\partial \eta} \right) v^* \right] v \beta \tau \right\} \times \\
& \quad \times Q(y) V \bar{g} d\xi d\eta + \iint_{S_{1432}} \rho \mu^k Q(y) V \bar{g} d\xi d\eta + \\
& \quad + \iint_{S_{\text{бок}}} \rho \mu^k Q(y) V \bar{g} d\xi d\eta - \iint_{S_{\text{бок}}} \rho \mu^k v^n Q(y) V \bar{g_{11}} d\xi dt + \\
& + \iint_{S_{\text{бок}}} [p\beta + \rho \mu^k \mu^n] Q(y) V \bar{g_{22}} d\eta dt - \iiint_V p \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{V \bar{g} Q(y)}{V g_{11}} \right) d\xi d\eta dt - \\
& \quad - \iiint_V \rho \left[ K_{\eta=\text{const}} \mu + \right. \\
& \quad \left. + \left( K_{\xi=\text{const}} + \frac{1}{V g_{22}} \frac{\partial[\eta, \xi]}{\partial \eta} \right) v \right] v \beta Q(y) V \bar{g} d\xi d\eta dt + o(\dots) = 0, \\
& \tag{34.12_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \iint_{S_{1'2'3'4'}} \rho \left\{ (v^k) - \left[ \left( K_{\eta=\text{const}} - \frac{1}{V g_{11}} \frac{\partial[\eta, \xi]}{\partial \xi} \right) \mu^* + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + K_{\xi=\text{const}} v^* \right] \mu \beta \tau \right\} Q(y) V \bar{g} d\xi d\eta + \\
& \quad + \iint_{S_{1432}} \rho v^k Q(y) V \bar{g} d\xi d\eta + \iint_{S_{\text{бок}}} \rho v^k Q(y) V \bar{g} d\xi d\eta - \\
& - \iint_{S_{\text{бок}}} [p\beta + \rho v^k v^n] Q(y) V \bar{g_{11}} d\xi dt + \iint_{S_{\text{бок}}} \rho v^k \mu^n Q(y) V \bar{g_{22}} d\eta dt - \\
& \quad - \iiint_V p \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V \bar{g} Q(y)}{V g_{22}} \right) d\xi d\eta dt + \\
& \quad + \iiint_V \rho \mu \left[ \left( K_{\eta=\text{const}} - \frac{1}{V g_{11}} \frac{\partial[\eta, \xi]}{\partial \xi} \right) \mu + \right. \\
& \quad \left. + K_{\xi=\text{const}} v \right] \beta Q(y) V \bar{g} d\xi d\eta dt + o(\dots) = 0, \\
& \tag{34.12_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \iint_{S_{1'2'3'4'}} \rho \left[ \varepsilon + \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} \right] Q(y) V \bar{g} d\xi d\eta + \\
& \quad + \iint_{S_{1432}} \rho \left[ \varepsilon + \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} \right] Q(y) V \bar{g} d\xi d\eta +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \iint_{S_{\text{бок}}} \rho \left[ \epsilon + \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} \right] Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta - \\
 & - \iint_{S_{\text{бок}}} \rho \left[ \epsilon + \frac{\mu}{\rho} + \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} \right] v^n Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi dt + \\
 & + \iint_{S_{\text{бок}}} \rho \left[ \epsilon + \frac{\mu}{\rho} + \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} \right] \mu^n Q(y) \sqrt{g_{22}} d\eta dt = 0, \quad (34.12_4)
 \end{aligned}$$

где  $S_{\text{бок}}$  — поверхность, образованная боковыми гранями фигуры, выбранной за элементарный объем.

Теперь для вывода разностных соотношений, отвечающих системе интегральных уравнений (30.11), остается сделать последний шаг, состоящий в формулировке условий об усреднении гидродинамических величин.

Мы предположим, что значения гидродинамических величин постоянны на каждой из боковых граней, на верхнем и нижнем основании. Способ усреднения состоит в том, что значения, которые принимают гидродинамические величины в средних точках соответствующих геометрических элементов, распространяются на весь элемент. (В конце параграфа мы приведем формулы вычисления координат средних точек для геометрических элементов, по которым выполняется усреднение.)

Сделаем еще замечание о том, какие именно компоненты скорости мы будем считать постоянными по каждому из геометрических элементов:

по нижнему основанию — контравариантные компоненты  $\mu$ ,  $v$ ;  
по верхнему основанию — компоненты  $\mu^k$ ,  $v^k$ ;

по боковым граням — компоненты  $\mu^k$ ,  $v^n$  для каждой из граней, порожденной ребром  $\eta = \text{const}$  ( $\xi$ -линией), и компоненты  $v^k$ ,  $\mu^n$  для каждой из граней, порожденной ребром  $\xi = \text{const}$  ( $\eta$ -линией).

Все иные компоненты скорости должны быть выражены в средних точках соответствующих геометрических элементов с помощью соотношений (29.3).

Условимся об обозначениях.

Гидродинамические величины, которые относятся к средней точке ячейки верхнего основания, отмечаются индексом  $[ ]^0$ ; к средней точке ячейки нижнего основания — индексом  $[ ]_0$ . Величины, относящиеся к боковой грани  $ijj'i'$ , отмечаются двойным индексом  $[ ]_{ij}$  или  $[ ]_{ji}$  (в зависимости от направления отсчета, принятого по этому ребру).

Следовательно, величины, отмеченные верхним индексом, относятся к моменту  $t + \tau$ , двойным индексом — к моменту  $t + \tau/2$  и нижним индексом — к моменту  $t$ .

Из (34.12), учитывая правила усреднения гидродинамических величин получим

$$\begin{aligned}
 & [\rho]^0 \iint_{S_{1'2'3'4'}} Q(y) V\bar{g} d\xi d\eta + [\rho]_0 \iint_{S_{1432}} Q(y) V\bar{g} d\xi d\eta + \\
 & + [\rho]_{12} \iint_{S_{122'1'}} Q(y) V\bar{g} d\xi d\eta + [\rho]_{23} \iint_{S_{233'2'}} Q(y) V\bar{g} d\xi d\eta + \\
 & + [\rho]_{43} \iint_{S_{344'3'}} Q(y) V\bar{g} d\xi d\eta + [\rho]_{14} \iint_{S_{411'4'}} Q(y) V\bar{g} d\xi d\eta - \\
 & - [\rho v^n]_{12} \iint_{S_{122'1'}} Q(y) V\bar{g_{11}} d\xi dt - [\rho v^n]_{43} \iint_{S_{344'3'}} Q(y) V\bar{g_{11}} d\xi d\eta + \\
 & + [\rho \mu^n]_{23} \iint_{S_{233'2'}} Q(y) V\bar{g_{22}} d\eta dt + [\rho \mu^n]_{14} \iint_{S_{411'4'}} Q(y) V\bar{g_{22}} d\eta dt + \\
 & + o(\dots) = 0, \quad (34.13_1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & [\rho \mu^k]^0 \iint_{S_{1'2'3'4'}} Q(y) V\bar{g} d\xi d\eta + [\rho \mu]_0 \iint_{S_{1432}} Q(y) V\bar{g} d\xi d\eta + \\
 & + [\rho v]_0 \iint_{S_{1432}} \alpha Q(y) V\bar{g} d\xi d\eta + [\rho v]_0 \tau \iint_{S_{1'2'3'4'}} \left[ K_{\eta=\text{const}} \mu^* + \right. \\
 & \left. + \left( K_{\xi=\text{const}} + \frac{1}{V\bar{g_{22}}} \frac{\partial [\eta, \xi]}{\partial \eta} \right) v^* \right] \beta Q(y) V\bar{g} d\xi d\eta + \\
 & + [\rho \mu^k]_{12} \iint_{S_{122'1'}} Q(y) V\bar{g} d\xi d\eta + [\rho]_{23} \left\{ [\mu^n]_{23} \iint_{S_{233'2'}} \beta Q(y) V\bar{g} d\xi d\eta + \right. \\
 & \left. + [v^k]_{23} \iint_{S_{233'2'}} \alpha Q(y) V\bar{g} d\xi d\eta \right\} + [\rho \mu^k]_{43} \iint_{S_{344'3'}} Q(y) V\bar{g} d\xi d\eta + \\
 & + [\rho]_{14} \left\{ [\mu^n]_{14} \iint_{S_{411'4'}} \beta Q(y) V\bar{g} d\xi d\eta + [v^k]_{14} \iint_{S_{411'4'}} \alpha Q(y) V\bar{g} d\xi d\eta \right\} + \\
 & + [p]_{23} \iint_{S_{233'2'}} \beta Q(y) V\bar{g_{22}} d\eta dt + [p]_{14} \iint_{S_{411'4'}} \beta Q(y) V\bar{g_{22}} d\eta dt - \\
 & - [\rho \mu^k v^n]_{12} \iint_{S_{122'1'}} Q(y) V\bar{g_{11}} d\xi dt - [\rho \mu^k v^n]_{43} \iint_{S_{344'3'}} Q(y) V\bar{g_{11}} d\xi dt + \\
 & + [\rho \mu^n]_{23} \left\{ [\mu^n]_{23} \iint_{S_{233'2'}} \beta Q(y) V\bar{g_{22}} d\eta dt + \right. \\
 & \left. + [v^k]_{23} \iint_{S_{233'2'}} \alpha Q(y) V\bar{g_{22}} d\eta dt \right\} + \\
 & + [\rho \mu^n]_{14} \left\{ [\mu^n]_{14} \iint_{S_{411'4'}} \beta Q(y) V\bar{g_{22}} d\eta dt + \right. \\
 & \left. + [v^k]_{14} \iint_{S_{411'4'}} \alpha Q(y) V\bar{g_{22}} d\eta dt \right\} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \iiint_V p \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\sqrt{g} Q(y)}{\sqrt{g_{11}}} \right) d\xi d\eta dt - \iiint_V \rho v \left[ K_{\eta=\text{const}} \mu + \right. \\
& + \left( K_{\xi=\text{const}} + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial [\eta, \xi]}{\partial \eta} v \right) \left. \right] Q(y) \beta \sqrt{g} d\xi d\eta dt + o(\dots) = 0, \quad (34.13_2) \\
& [\rho v^k]_0 \iint_{S_{1'2'3'4'}} Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta + [\rho v]_0 \iint_{S_{1432}} Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta + \\
& + [\rho \mu]_0 \iint_{S_{1432}} \alpha Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta - [\rho \mu]_0 \tau \iint_{S_{1'2'3'4'}} \left[ K_{\eta=\text{const}} - \right. \\
& - \left. \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial [\eta, \xi]}{\partial \xi} \mu^* + K_{\xi=\text{const}} v^* \right] \beta Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta + \\
& + [\rho]_{12} \left\{ [v^n]_{12} \iint_{S_{122'1'}} \beta Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta + \right. \\
& + [\mu^k]_{12} \iint_{S_{122'1'}} \alpha Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta \left. \right\} + [\rho v^k]_{23} \iint_{S_{233'2'}} Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta + \\
& + [\rho]_{43} \left\{ [v^n]_{43} \iint_{S_{344'3'}} \beta Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta + [\mu^k]_{43} \iint_{S_{344'3'}} \alpha Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta \right\} + \\
& + [\rho v^k]_{14} \iint_{S_{411'4'}} Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta - [p]_{12} \iint_{S_{122'1'}} \beta Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi dt - \\
& - [p]_{43} \iint_{S_{344'3'}} \beta Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi dt - \\
& - [\rho v^n]_{12} \left\{ [v^n]_{12} \iint_{S_{122'1'}} \beta Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi dt + \right. \\
& + [\mu^k]_{12} \iint_{S_{122'1'}} \alpha Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi dt \left. \right\} - \\
& - [\rho v^n]_{43} \left\{ [v^n]_{43} \iint_{S_{344'3'}} \beta Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi dt + \right. \\
& + [\mu^k]_{43} \iint_{S_{344'3'}} \alpha Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi dt \left. \right\} + \\
& + [\mu^k]_{43} \iint_{S_{344'3'}} \alpha Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi dt + [\rho v^k \mu^n]_{23} \iint_{S_{233'2'}} Q(y) \sqrt{g_{22}} d\eta dt + \\
& + [\rho v^k \mu^n]_{14} \iint_{S_{411'4'}} Q(y) \sqrt{g_{22}} d\eta dt - \iiint_V p \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\sqrt{g} Q(y)}{\sqrt{g_{22}}} \right) d\xi d\eta dt + \\
& + \iiint_V \rho \mu \left[ \left( K_{\eta=\text{const}} - \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial [\eta, \xi]}{\partial \xi} \right) \mu + \right. \\
& \left. + K_{\xi=\text{const}} v \right] Q(y) \beta \sqrt{g} d\xi d\eta dt + o(\dots) = 0, \quad (34.13_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ \rho \left( \varepsilon + \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} \right) \right]_0^0 \iint_{S_{1'2'3'4'}} Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta + \\
 & + \left[ \rho \left( \varepsilon + \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} \right) \right]_0 \iint_{S_{1432}} Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta + \\
 & + \left[ \rho \left( \varepsilon + \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} \right) \right]_{12} \iint_{S_{122'1'}} Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta + \\
 & + \left[ \rho \left( \varepsilon + \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} \right) \right]_{23} \iint_{S_{233'2'}} Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta + \\
 & + \left[ \rho \left( \varepsilon + \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} \right) \right]_{43} \iint_{S_{344'3'}} Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta + \\
 & + \left[ \rho \left( \varepsilon + \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} \right) \right]_{14} \iint_{S_{411'4'}} Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta - \\
 & - \left[ \rho \left( \varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} \right) v^n \right]_{12} \iint_{S_{122'1'}} Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi dt - \\
 & - \left[ \rho \left( \varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} \right) v^n \right]_{43} \iint_{S_{344'3'}} Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi dt + \\
 & + \left[ \rho \left( \varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} \right) \mu^n \right]_{23} \iint_{S_{233'2'}} Q(y) \sqrt{g_{22}} d\eta dt + \\
 & + \left[ \rho \left( \varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} \right) \mu^n \right]_{14} \iint_{S_{411'4'}} Q(y) \sqrt{g_{22}} d\eta dt + o(\dots) = 0. \quad (34.13_4)
 \end{aligned}$$

Напомним, что уравнения боковых граней, проходящих через ребра  $\xi = \text{const}$  или  $\eta = \text{const}$ , имеют вид (34.5), т. е. на гранях 1, 2, 2', 1'; 3, 4, 4', 3' имеют место соотношения

$$d\eta = \frac{\nu_{12}^*}{\sqrt{g_{22}}} dt, \quad d\eta = \frac{\nu_{43}^*}{\sqrt{g_{22}}} dt. \quad (34.14)$$

Аналогично на гранях 2, 3, 3', 2'; 4, 1, 1', 4'

$$d\xi = \frac{\mu_{23}^*}{\sqrt{g_{11}}} dt, \quad d\xi = \frac{\mu_{14}^*}{\sqrt{g_{11}}} dt.$$

Следовательно, воспользовавшись (34.14), в системе (34.13) интегралы по боковым граням можно преобразовать к следующему

виду:

$$\begin{aligned} \iint_{S_{122'1'}} \gamma Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta &= v_{12}^* \iint_{S_{122'1'}} \gamma Q(y) \beta \sqrt{g_{11}} d\xi dt, \\ \iint_{S_{344'3'}} \gamma Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta &= v_{43}^* \iint_{S_{344'3'}} \gamma Q(y) \beta \sqrt{g_{11}} d\xi dt, \\ \iint_{S_{233'2'}} \gamma Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta &= \mu_{23}^* \iint_{S_{233'2'}} \gamma Q(y) \beta \sqrt{g_{22}} dt d\eta, \\ \iint_{S_{411'4'}} \gamma Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta &= \mu_{14}^* \iint_{S_{411'4'}} \gamma Q(y) \beta \sqrt{g_{22}} dt d\eta. \end{aligned} \quad (34.15)$$

Под  $\gamma$ , для краткости записи, мы будем понимать либо 1, либо  $\alpha$ , либо  $\beta$ . Но все интегралы по боковым граням в системе (34.13) записаны в локальной системе координат нижнего основания и, следовательно, элементы, ее определяющие, не зависят от времени.

Поэтому интегрирование по времени можно выполнить независимо от интегрирования по пространству. (При этом надо только не ошибиться и правильно расставить пределы интегрирования, помня о том, что все поверхностные интегралы в (34.13) берутся по внешней стороне поверхности.)

С учетом сделанных выше замечаний преобразуем интегралы, входящие в (34.13):

$$\begin{aligned} \iint_{S_{122'1'}} \gamma Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta &= v_{12}^* \tau \int_1^2 \gamma Q(y) \sqrt{g_{11}} \beta d\xi, \\ \iint_{S_{344'3'}} \gamma Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta &= -v_{43}^* \tau \int_4^3 \gamma Q(y) \sqrt{g_{11}} \beta d\xi, \\ \iint_{S_{233'2'}} \gamma Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta &= -\mu_{23}^* \tau \int_2^3 \gamma Q(y) \sqrt{g_{22}} \beta d\eta, \end{aligned} \quad (34.16)$$

$$\begin{aligned} \iint_{S_{411'4'}} \gamma Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta &= \mu_{14}^* \tau \int_1^4 \gamma Q(y) \sqrt{g_{22}} \beta d\eta; \\ \iint_{S_{122'1'}} \gamma Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi dt &= \tau \int_1^2 \gamma Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi, \\ \iint_{S_{344'3'}} \gamma Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi dt &= -\tau \int_4^3 \gamma Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi, \end{aligned} \quad (34.17)$$

$$\begin{aligned} \iint_{S_{233'2'}} \gamma Q(y) V\bar{g}_{22} d\eta dt &= \tau \int_2^3 \gamma Q(y) V\bar{g}_{22} d\eta, \\ \iint_{S_{411'4'}} \gamma Q(y) V\bar{g}_{22} d\eta dt &= -\tau \int_1^4 \gamma Q(y) V\bar{g}_{22} d\eta. \end{aligned} \quad (34.17)$$

Рассмотрим теперь объемные интегралы, входящие в (34.13), а именно:

$$\begin{aligned} \iiint_V \rho \left[ K_{\eta=\text{const}} \mu + \left( K_{\xi=\text{const}} + \frac{1}{V\bar{g}_{22}} \frac{\partial[\eta, \xi]}{\partial\eta} \right) v \right] v Q(y) \beta V\bar{g} d\xi d\eta dt, \\ \iiint_V \rho \left[ \left( K_{\eta=\text{const}} - \frac{1}{V\bar{g}_{11}} \frac{\partial[\eta, \xi]}{\partial\xi} \right) \mu + K_{\xi=\text{const}} v \right] \mu Q(y) \beta V\bar{g} d\xi d\eta dt, \\ \iiint_V p \frac{\partial}{\partial\xi} \left( \frac{V\bar{g} Q(y)}{V\bar{g}_{11}} \right) d\xi d\eta dt, \quad \iiint_V p \frac{\partial}{\partial\eta} \left( \frac{V\bar{g} Q(y)}{V\bar{g}_{22}} \right) d\xi d\eta dt. \end{aligned} \quad (34.18)$$

Будем считать (это справедливо с тем порядком точности, с которым строится разностная схема), что гидродинамические величины, входящие в (34.18), постоянны и равны усредненным значениям по ячейке нижнего основания \*). Тогда интегралы (34.18) можно преобразовать к следующему виду, используя замечание о независимости от времени элементов, определяющих локальную систему координат:

$$\begin{aligned} \iiint_V \rho v Q(y) \left[ K_{\eta=\text{const}} \mu + \left( K_{\xi=\text{const}} + \frac{1}{V\bar{g}_{22}} \frac{\partial[\eta, \xi]}{\partial\eta} \right) v \right] \beta V\bar{g} d\xi d\eta dt = \\ = \tau(\rho v) \left[ \mu \iint_{S_{1234}} Q(y) \beta K_{\eta=\text{const}} V\bar{g} d\xi d\eta + \right. \\ \left. + v \iint_{S_{1234}} Q(y) \beta \left( K_{\xi=\text{const}} + \frac{1}{V\bar{g}_{22}} \frac{\partial[\eta, \xi]}{\partial\eta} \right) V\bar{g} d\xi d\eta \right] + o(\dots) \\ \iiint_V \rho \mu Q(y) \left[ \left( K_{\eta=\text{const}} - \frac{1}{V\bar{g}_{11}} \frac{\partial[\eta, \xi]}{\partial\xi} \right) \mu + K_{\xi=\text{const}} v \right] \beta V\bar{g} d\xi d\eta dt = \\ = \tau(\rho \mu) \left[ \mu \iint_{S_{1234}} Q(y) \left( K_{\eta=\text{const}} - \frac{1}{V\bar{g}_{11}} \frac{\partial[\eta, \xi]}{\partial\xi} \right) \beta V\bar{g} d\xi d\eta + \right. \\ \left. + v \iint_{S_{1234}} Q(y) K_{\xi=\text{const}} \beta V\bar{g} d\xi d\eta \right] + o(\dots), \end{aligned}$$

\*) При желании можно было бы их взять, например, как полусумму значений на верхнем и нижнем основаниях.

$$\begin{aligned} \iiint_V p \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\sqrt{g} Q(y)}{\sqrt{g_{11}}} \right) d\xi d\eta dt = \\ = p\tau \left[ \int_2^3 \beta Q(y) \sqrt{g_{22}} d\eta - \int_1^4 \beta Q(y) \sqrt{g_{22}} d\eta \right] + o(\dots), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_V p \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\sqrt{g} Q(y)}{\sqrt{g_{22}}} \right) d\xi d\eta dt = \\ = -p\tau \left[ \int_1^2 Q(y) \beta \sqrt{g_{11}} d\xi - \int_4^3 Q(y) \beta \sqrt{g_{11}} d\xi \right] + o(\dots). \end{aligned}$$

Запишем систему (34.13), воспользовавшись полученными представлениями для объемных интегралов и интегралов по боковым поверхностям:

$$\begin{aligned} [\rho]^0 \iint_{S_{1'2'3'4'}} Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta + [\rho]_0 \iint_{S_{1432}} Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta - \\ - \tau [\rho]_{12} \left\{ [v^n]_{12} \int_1^2 Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi - [v^*]_{12} \int_1^2 \beta Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi \right\} + \\ + \tau [\rho]_{43} \left\{ [v^n]_{43} \int_4^3 Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi - [v^*]_{43} \int_4^3 \beta Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi \right\} + \\ + \tau [\rho]_{23} \left\{ [\mu^n]_{23} \int_2^3 Q(y) \sqrt{g_{22}} d\eta - [\mu^*]_{23} \int_2^3 \beta Q(y) \sqrt{g_{22}} d\eta \right\} - \\ - \tau [\rho]_{14} \left\{ [\mu^n]_{14} \int_1^4 Q(y) \sqrt{g_{22}} d\eta - [\mu^*]_{14} \int_1^4 \beta Q(y) \sqrt{g_{22}} d\eta \right\} = 0, \end{aligned} \quad (34.19_1)$$

$$\begin{aligned} [\rho\mu^k]^0 \iint_{S_{1'2'3'4'}} Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta + \\ + [\rho\mu]_0 \iint_{S_{1432}} Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta + [\rho v]_0 \iint_{S_{1432}} \alpha Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta - \\ - \tau [\rho\mu^k]_{12} \left\{ [v^n]_{12} \int_1^2 Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi - [v^*]_{12} \int_1^2 \beta Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi \right\} + \\ + \tau [\rho\mu^k]_{43} \left\{ [v^n]_{43} \int_4^3 Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi - [v^*]_{43} \int_4^3 \beta Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi \right\} + \\ + \tau [\rho\mu^n]_{23} \left\{ [\mu^n]_{23} \int_2^3 \beta Q(y) \sqrt{g_{22}} d\eta - [\mu^*]_{23} \int_2^3 \beta^2 Q(y) \sqrt{g_{22}} d\eta \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \tau [\rho v^k]_{23} \left\{ [\mu^n]_{23} \int_2^3 \alpha Q(y) \sqrt{g_{22}} d\eta - [\mu^*]_{23} \int_2^3 \alpha \beta Q(y) \sqrt{g_{22}} d\eta \right\} - \\
& - \tau [\rho v^n]_{14} \left\{ [\mu^n]_{14} \int_1^4 \beta Q(y) \sqrt{g_{22}} d\eta - [\mu^*]_{14} \int_1^4 \beta^2 Q(y) \sqrt{g_{22}} d\eta \right\} - \\
& - \tau [\rho v^k]_{14} \left\{ [\mu^n]_{14} \int_1^4 \alpha Q(y) \sqrt{g_{22}} d\eta - [\mu^*]_{14} \int_1^4 \alpha \beta Q(y) \sqrt{g_{22}} d\eta \right\} - \\
& - \tau \{[p]_0 - [p]_{23}\} \int_2^3 \beta Q \sqrt{g_{22}} d\eta + \tau \{[p]_0 - [p]_{14}\} \int_1^4 \beta Q \sqrt{g_{22}} d\eta - \\
& - \tau [\rho v]_0 \left\{ [\mu]_0 \iint_{S_{1234}} \beta K_{\eta=\text{const}} Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta + \right. \\
& \left. + [v]_0 \iint_{S_{1234}} \beta \left[ K_{\xi=\text{const}} + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial [\eta, \xi]}{\partial \eta} \right] Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta \right\} + \\
& + \tau [\rho v]_0 \left\{ [\mu^*]_0 \iint_{S_{1'2'3'4'}} \beta K_{\eta=\text{const}} Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta + \right. \\
& \left. + [\nu^*]_0 \iint_{S_{1'2'3'4'}} \beta \left[ K_{\xi=\text{const}} + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial [\eta, \xi]}{\partial \eta} \right] Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta \right\} + o(\dots) = 0,
\end{aligned} \tag{34.19<sub>2</sub>}$$

$$\begin{aligned}
& [\rho v^k]^0 \iint_{S_{1'2'3'4'}} Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta + [\rho v]_0 \iint_{S_{1432}} Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta + \\
& + [\rho \mu]_0 \iint_{S_{1432}} \alpha Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta - \\
& - \tau [\rho v^n]_{12} \left\{ [v^n]_{12} \int_1^2 \beta Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi - [v^*]_{12} \int_1^2 \beta^2 Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi \right\} - \\
& - \tau [\rho \mu^k]_{12} \left\{ [v^n]_{12} \int_1^2 \alpha Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi - [v^*]_{12} \int_1^2 \alpha \beta Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi \right\} + \\
& + \tau [\rho v^n]_{43} \left\{ [v^n]_{43} \int_4^3 \beta Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi - [v^*]_{43} \int_4^3 \beta^2 Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi \right\} + \\
& + \tau [\rho \mu^k]_{43} \left\{ [v^n]_{43} \int_4^3 \alpha Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi - [v^*]_{43} \int_4^3 \alpha \beta Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi \right\} + \\
& + \tau [\rho v^k]_{23} \left\{ [\mu^n]_{23} \int_2^3 Q(y) \sqrt{g_{22}} d\eta - [\mu^*]_{23} \int_2^3 \beta Q(y) \sqrt{g_{22}} d\eta \right\} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\tau [\rho v^k]_{14} \left\{ [\mu^n]_{14} \int_1^4 Q(y) \sqrt{g_{22}} d\eta - [\mu^*]_{14} \int_1^4 \beta Q(y) \sqrt{g_{22}} d\eta \right\} - \\
& -\tau \left\{ -[p]_0 + [p]_{12} \right\} \int_1^2 \beta Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi + \\
& + \tau \left\{ -[p_0] + [p]_{43} \right\} \int_1^3 \beta Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi + \\
& + \tau [\rho \mu]_0 \left\{ [\mu]_0 \iint_{S_{1234}} \beta Q(y) \left[ K_{\eta=\text{const}} - \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial[\eta, \xi]}{\partial \xi} \right] \sqrt{g} d\xi d\eta + \right. \\
& \quad \left. + [v]_0 \iint_{S_{1234}} \beta Q(y) K_{\xi=\text{const}} \sqrt{g} d\xi d\eta \right\} - \\
& -\tau [\rho \mu]_0 \left\{ [\mu^*]_0 \iint_{S_{1'2'3'4'}} \beta Q(y) \left[ K_{\eta=\text{const}} - \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial[\eta, \xi]}{\partial \xi} \right] \sqrt{g} d\xi d\eta + \right. \\
& \quad \left. + [v^*]_0 \iint_{S_{1'2'3'4'}} \beta Q(y) K_{\xi=\text{const}} \sqrt{g} d\xi d\eta \right\} + o(\dots) = 0, \quad (34.19_3) \\
& \left[ \rho \left( \varepsilon + \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} \right) \right]_0^0 \iint_{S_{1'2'3'4'}} Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta + \\
& + \left[ \rho \left( \varepsilon + \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} \right) \right]_0 \iint_{S_{1432}} Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta - \\
& - \tau \left[ \rho \left( \varepsilon + \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} \right) \right]_{12} \left\{ [\nu^n]_{12} \int_1^2 Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi - \right. \\
& \quad \left. - [\nu^*]_{12} \int_1^2 \beta Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi \right\} - \tau [p \nu^n]_{12} \int_1^2 Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi + \\
& + \tau \left[ \rho \left( \varepsilon + \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} \right) \right]_{43} \left\{ [\nu^n]_{43} \int_1^3 Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi - \right. \\
& \quad \left. - [\nu^*]_{43} \int_1^3 \beta Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi \right\} + \tau [p \nu^n]_{43} \int_1^3 Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi + \\
& + \tau \left[ \rho \left( \varepsilon + \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} \right) \right]_{23} \left\{ [\mu^n]_{23} \int_2^3 Q(y) \sqrt{g_{22}} d\eta - \right. \\
& \quad \left. - [\mu^*]_{23} \int_2^3 \beta Q(y) \sqrt{g_{22}} d\eta \right\} + \tau [p \mu^n]_{23} \int_2^3 Q(y) \sqrt{g_{22}} d\eta -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\tau \left[ \rho \left( \varepsilon + \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} \right) \right]_{14} \left\{ \left[ \mu^n \right]_{14} \int_1^4 Q(y) \sqrt{g_{22}} d\eta - \right. \\
 & \left. - [\mu^*]_{14} \int_1^4 \beta Q(y) \sqrt{g_{22}} d\eta \right\} - \tau [p\mu^n]_{14} \int_1^4 Q(y) \sqrt{g_{22}} d\eta + o(\dots) = 0. \tag{34.19}_4
 \end{aligned}$$

В систему соотношений (34.19) входит значительное число интегралов. Нашей ближайшей задачей будет выяснить их геометрический смысл и свести к минимуму число различных типов интегралов, оставаясь в пределах выбранного порядка точности написания системы разностных уравнений.

Рассмотрим выражение  $\iint_{S_{1'2'3'4'}} Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta$ ; при  $Q(y) \equiv 1$

это площадь ячейки верхнего основания; при  $Q(y) = y$  это объем фигуры, образованной вращением ячейки верхнего основания вокруг оси  $x$ . Аналогично  $\iint_{S_{1234}} Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta$  при  $Q(y) \equiv 1$  представляет площадь ячейки нижнего основания, а при  $Q(y) = y$  — объем фигуры, образованной вращением ячейки нижнего основания вокруг оси  $x$ . Интегралы  $\int_i^j Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi$  и  $\int_i^j Q(y) \sqrt{g_{22}} d\eta$

при  $Q(y) \equiv 1$  соответственно равны длинам ребер ячейки нижнего основания, образованных дугой  $ij$   $\xi$ -линий и дугой  $ij$   $\eta$ -линий. При  $Q(y) = y$  это площади поверхности фигур, образованных вращением этих дуг вокруг оси  $x$ . При построении локальной системы координат мы вправе полагать, что

$$\alpha, \beta, K_{\xi=\text{const}}, K_{\eta=\text{const}}, \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial[\eta, \xi]}{\partial \xi}, \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial[\eta, \xi]}{\partial \eta}$$

являются гладкими функциями.

Вычислим их значения в средней точке нижнего основания. Выписанные ниже выражения эквивалентны, если ограничиться порядком точности, выбранным для построения разностной схемы:

$$\begin{aligned}
 & \iint_{S_{1234}} \beta K_{\eta=\text{const}} Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta = [\beta K_{\eta=\text{const}}]_0 \iint_{S_{1234}} Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta, \\
 & \iint_{S_{1234}} \beta \left( K_{\xi=\text{const}} + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial[\eta, \xi]}{\partial \eta} \right) Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta = \\
 & = \left[ \beta \left( K_{\xi=\text{const}} + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial[\eta, \xi]}{\partial \eta} \right) \right]_0 \iint_{S_{1234}} Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta, \tag{34.20}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{S_{1234}} \beta \left( K_{\eta=\text{const}} - \frac{1}{Vg_{11}} \frac{\partial [\eta, \xi]}{\partial \xi} \right) Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta = \\ = \left[ \beta \left( K_{\eta=\text{const}} - \frac{1}{Vg_{11}} \frac{\partial [\eta, \xi]}{\partial \xi} \right) \right]_0 \iint_{S_{1234}} Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta, \\ \iint_{S_{1234}} \beta (K_{\xi=\text{const}}) Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta = [\beta K_{\xi=\text{const}}]_0 \iint_{S_{1234}} Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Аналогично поступим с интегралами по ребрам нижнего основания, выбрав значения соответствующих подынтегральных функций в средних точках.

Такие эквивалентные преобразования позволяют свести число различных типов интегралов всего к двум, что существенно сокращает объем вычислений. Введем для сокращения записи следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \iint_{S_{1'2'3'4'}} Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta &= \mathcal{I}^0, \\ \iint_{S_{1234}} Q(y) \sqrt{g} d\xi d\eta &= \mathcal{I}_0, \\ \int_1^2 Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi &= \mathcal{I}_{12}, \\ \int_4^3 Q(y) \sqrt{g_{11}} d\xi &= \mathcal{I}_{43}, \\ \int_2^3 Q(y) \sqrt{g_{22}} d\eta &= \mathcal{I}_{23}, \\ \int_1^4 Q(y) \sqrt{g_{22}} d\eta &= \mathcal{I}_{14}. \end{aligned} \tag{34.21}$$

Исходя из (34.20) и учитывая сказанное выше, выпишем окончательный вид системы разностных уравнений для нестационарных уравнений газовой динамики в локальной криволинейной системе координат:

$$\begin{aligned} [\rho]^0 \mathcal{I}^0 - [\rho]_0 \mathcal{I}_0 - \tau [\rho]_{12} \{ [v^n]_{12} - [\beta v^*]_{12} \} \mathcal{I}_{12} + \\ + \tau [\rho]_{43} \{ [v^n]_{43} - [\beta v^*]_{43} \} \mathcal{I}_{43} + \tau [\rho]_{23} \{ [\mu^n]_{23} - [\beta \mu^*]_{23} \} \mathcal{I}_{23} - \\ - \tau [\rho]_{14} \{ [\mu^n]_{14} - [\beta \mu^*]_{14} \} \mathcal{I}_{14} = 0, \\ [\rho \mu^k]^0 \mathcal{I}^0 - [\rho (\mu + \alpha v)]_0 \mathcal{I}_0 - \tau [\rho \mu^k]_{12} \{ [v^n]_{12} - [\beta v^*]_{12} \} \mathcal{I}_{12} + \\ + \tau [\rho \mu^k]_{43} \{ [v^n]_{43} - [\beta v^*]_{43} \} \mathcal{I}_{43} + \\ + \tau [\rho (\beta \mu^n + \alpha v^k)]_{23} \{ [\mu^n]_{23} - [\beta \mu^*]_{23} \} \mathcal{I}_{23} - \\ - \tau [\rho (\beta \mu^n + \alpha v^k)]_{14} \{ [\mu^n]_{14} - [\beta \mu^*]_{14} \} \mathcal{I}_{14} = \end{aligned} \tag{34.22}$$

$$\begin{aligned}
 & -\tau \{[p]_0 - [p]_{23}\} \beta_{23} \mathcal{I}_{23} + \tau \{[p]_0 - [p]_{14}\} \beta_{14} \mathcal{I}_{14} - \\
 & - \tau [\rho v]_0 \left\{ ([\mu]_0 - [\mu^*]_0) [K_{\eta=\text{const}}]_0 + \right. \\
 & \left. + ([v]_0 - [v^*]_0) \left[ K_{\xi=\text{const}} + \frac{1}{V g_{22}} \frac{\partial [\eta, \xi]}{\partial \eta} \right]_0 \right\} \beta_0 \mathcal{I}_0 = 0, \quad (34.22_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & [\rho v^k]^0 \mathcal{I}^0 - [\rho (v + \alpha \mu)]_0 \mathcal{I}_0 - \tau [\rho (\beta v^n + \alpha \mu^k)]_{12} \{[v^n]_{12} - [\beta v^*]_{12}\} \mathcal{I}_{12} + \\
 & + \tau [\rho (\beta v^n + \alpha \mu^k)]_{43} \{[v^n]_{43} - [\beta v^*]_{43}\} \mathcal{I}_{43} + \\
 & + \tau [\rho v^k]_{23} \{[\mu^n]_{23} - [\beta \mu^*]_{23}\} \mathcal{I}_{23} - \tau [\rho v^k]_{14} \{[\mu^n]_{14} - [\beta \mu^*]_{14}\} \mathcal{I}_{14} + \\
 & + \tau \{[p]_0 - [p]_{12}\} \beta_{12} \mathcal{I}_{12} - \tau \{[p]_0 - [p]_{43}\} \beta_{43} \mathcal{I}_{43} + \\
 & + \tau [\rho \mu]_0 \left\{ ([\mu]_0 - [\mu^*]_0) \left[ K_{\eta=\text{const}} - \frac{1}{V g_{11}} \frac{\partial [\eta, \xi]}{\partial \xi} \right]_0 + \right. \\
 & \left. + ([v]_0 - [v^*]_0) [K_{\xi=\text{const}}]_0 \right\} \beta_0 \mathcal{I}_0 = 0, \quad (34.22_3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ \rho \left( \epsilon + \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} \right) \right]^0 \mathcal{I}^0 - \left[ \rho \left( \epsilon + \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} \right) \right]_0 \mathcal{I}_0 - \\
 & - \tau \left\{ \left[ \rho \left( \epsilon + \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} \right) \right]_{12} \{[v^n]_{12} - [\beta v^*]_{12}\} + [p v^n]_{12} \right\} \mathcal{I}_{12} + \\
 & + \tau \left\{ \left[ \rho \left( \epsilon + \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} \right) \right]_{43} \{[v^n]_{43} - [\beta v^*]_{43}\} + [p v^n]_{43} \right\} \mathcal{I}_{43} + \\
 & + \tau \left\{ \left[ \rho \left( \epsilon + \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} \right) \right]_{23} \{[\mu^n]_{23} - [\beta \mu^*]_{23}\} + [p \mu^n]_{23} \right\} \mathcal{I}_{23} - \\
 & - \tau \left\{ \left[ \rho \left( \epsilon + \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} \right) \right]_{14} \{[\mu^n]_{14} - [\beta \mu^*]_{14}\} + [p \mu^n]_{14} \right\} \mathcal{I}_{14} = 0. \quad (34.22_4)
 \end{aligned}$$

Если допустить, что гидродинамические величины, относящиеся к боковым граням, отмеченные двойным индексом, принадлежат промежуточному слою и вычисляются по величинам, относящимся к моменту времени  $t$ , по самостоятельным формулам, то система соотношений (34.22) является собой семейство трехслойных разностных схем, построенных в локальной криволинейной системе координат на основе законов сохранения. Вычислив из (34.22) значения гидродинамических величин  $[\rho]^0$ ,  $[\mu^k]^0$ ,  $[v^k]^0$ ,  $[\epsilon]^0$ , мы в центре ячейки верхнего основания найдем затем декартовы компоненты скорости  $[u]^0$ ,  $[v]^0$  и тем самым, выполнив один временной шаг, придем к исходному состоянию для следующего шага.

Нам осталось привести формулы для определения средней точки ячейки и для вычисления  $\mu^*$ ,  $v^*$ .

Если аппроксимировать ребра ячейки дугами окружностей (или отрезками прямых), то за среднюю точку ячейки примем такую точку, в которой дуги окружности (отрезки прямых), проведенные через середины противоположных ребер, пересекаясь, делятся пополам.

Координаты этой точки  $x_0, y_0$  определяются по формулам

$$\begin{aligned} x_0 = & -\frac{1}{2\Delta} \{ [x_{23}^2 - x_{14}^2 + y_{23}^2 - y_{14}^2] (y_{12} - y_{43}) - \\ & - [x_{43}^2 - x_{12}^2 + y_{43}^2 - y_{12}^2] (y_{14} - y_{23}) \}, \\ y_0 = & -\frac{1}{2\Delta} \{ [x_{43}^2 - x_{12}^2 + y_{43}^2 - y_{12}^2] (x_{14} - x_{23}) - \\ & - [x_{23}^2 - x_{14}^2 + y_{23}^2 - y_{14}^2] (x_{12} - x_{43}) \}, \end{aligned} \quad (34.23)$$

где

$$\Delta = (x_{14} - x_{23})(y_{12} - y_{43}) - (x_{12} - x_{43})(y_{14} - y_{23}),$$

а индексом  $ij$  обозначена середина ребра  $[ij]$ . Выясним смысл величин  $\mu^*, v^*$  и приведем формулы для их вычисления. Напомним, что

$$\frac{\Delta\xi}{\Delta t} = \frac{\mu^*}{\sqrt{g_{11}}}, \quad \frac{\Delta\eta}{\Delta t} = \frac{v^*}{\sqrt{g_{22}}}.$$

Воспользовавшись (29.5), получим

$$\begin{aligned} \mu^* &= \left( \beta' \frac{\Delta x}{\Delta t} - \alpha' \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) \frac{1}{\beta}, \\ v^* &= \left( \beta' \frac{\Delta x}{\Delta t} - \alpha' \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) \frac{1}{\beta}, \end{aligned} \quad (34.24)$$

где  $\Delta x, \Delta y$  — разности координат соответствующих точек верхнего и нижнего оснований. Если (34.24) сравнить с (29.2), то легко видеть, что  $\mu^*, v^*$  суть контравариантные компоненты скорости движения сетки.

Закончим параграф формулами для вычисления интегралов (34.21). Если восполнение линий сетки осуществляется, как описано, дугами окружностей, то интегралы, входящие в систему разностных соотношений (34.19), вычисляются по следующим точным формулам.

На ребре  $[ij]$

$$J_{ij} = \frac{Q(y_i) + Q(y_j)}{2} s_{ij} - \alpha \frac{l_{ij}(x_j - x_i)}{2} \left[ \frac{\theta \cos \theta - \sin \theta}{\sin^2 \theta} \right]_{ij}, \quad (34.25)$$

где  $\theta_{ij}$  — угол, равный половине дуги

$$l_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2},$$

$s_{ij}$  — длина ребра.

Для нижнего и верхнего оснований

$$\begin{aligned} J_0 &= 0,5 (Z_{12} + Z_{23} - Z_{43} - Z_{14}), \\ J^0 &= 0,5 (Z^{12} + Z^{23} - Z^{43} - Z^{14}), \end{aligned} \quad (34.26)$$

где

$$Z_{ij} = - (x_j - x_i) \frac{(y_i + y_j)[Q(y_i) + Q(y_j)] - \alpha y_i y_j}{2 + \alpha} + \\ + \frac{Q(y_i) + Q(y_j)}{4} l_{ij}^2 \left[ \frac{\sin \theta \cos \theta - \theta}{\sin^2 \theta} \right]_{ij} + \alpha l_{ij}^2 \frac{(x_j - x_i)}{4} \left[ \frac{1}{3} + \frac{\theta \cos \theta - \sin \theta}{\sin^3 \theta} \right]_{ij}.$$

Аналогично вычисляются  $Z^{ij}$ .

### § 35. Расчет гидродинамических величин на промежуточном слое

Получение явной и неявной схем в зависимости от способа вычисления гидродинамических величин на промежуточном слое. Интерпретация плоского распада разрыва в случае, когда два состояния газа разделены криволинейной границей. Неявная схема. Построение на основе системы уравнений, записанной в локальных криволинейных координатах, двух систем, каждая из которых зависит от одной пространственной переменной. Линеаризация этих систем и построение на их основе неявной разностной схемы.

В этом параграфе мы займемся вычислением гидродинамических величин, которые в предыдущем параграфе были условно отнесены к боковым граням на промежуточном шаге по времени. Читатель, конечно, поймет, что это аналог «больших» величин, описанных в § 7. Поэтому и здесь мы будем использовать этот термин. Эти величины можно вычислять разными способами. Мы остановимся на двух.

Способ первый. Расчет «больших» величин из плоского распада разрыва. Если принять величины на момент  $t_0$  в двух соседних ячейках за правые и левые относительно жесткой перегородки, проходящей по их общему ребру, то по аналогии с § 7 можно рассмотреть задачу о распаде разрыва.

Исходными данными для этой задачи будут значения гидродинамических величин из рассматриваемых ячеек, скалярные величины выбираются равными значениям в средних точках ячеек. Значения нормальных и касательных компонент подлежат уточнению.

Рассмотрим две ячейки с номерами  $(i-1/2, j-1/2)$  и  $(i-1/2, j+1/2)$ , которые граничат по ребру, являющемуся  $\xi$ -линией. Согласно принятым обозначениям, у ячейки с номером  $(i-1/2, j+1/2)$  это ребро с индексом 12, у ячейки  $(i-1/2, j-1/2)$  — ребро с индексом 43. Соответственно нормальная и касательная компоненты скорости относительно общего ребра будут:

по ячейке  $(i-1/2, j+1/2)$

$$[v_{i-1/2, j+1/2}^n]_{12} = [\alpha'' u + \beta'' v]_{i-1/2, j+1/2} \beta_{12} + [\alpha'' v - \beta'' u]_{i-1/2, j+1/2} \alpha_{12}, \\ [\mu_{i-1/2, j+1/2}^k]_{12} = [\beta'' u - \alpha'' v]_{i-1/2, j+1/2} \beta_{12} + [\alpha'' u - \beta'' v]_{i-1/2, j+1/2} \alpha_{12}; \quad (35.1)$$

по ячейке ( $i - 1/2, j - 1/2$ )

$$[\nu_{i-1/2, j-1/2}^n]_{43} = [\alpha''u + \beta''v]_{i-1/2, j-1/2} \beta_{43} + [\alpha''v - \beta''u]_{i-1/2, j-1/2} \alpha_{43},$$

$$[\mu_{i-1/2, j-1/2}^k]_{43} = [\beta''u - \alpha''v]_{i-1/2, j-1/2} \beta_{43} + [\alpha''u - \beta''v]_{i-1/2, j-1/2} \alpha_{43},$$

где  $\beta_{12}$ ,  $\alpha_{12}$  — синус и косинус угла между координатными линиями в середине ребра 12, а  $\beta_{43}$ ,  $\alpha_{43}$  — те же величины в середине ребра 43. Зная значения гидродинамических величин по обе стороны ребра, можно рассчитать плоский распад разрыва. Сравнивая скорости разрывов и скорости сетки, отбираем значения величин на боковой грани, проходящей через рассматриваемое ребро. Полученные значения («большие» величины по нашей терминологии) войдут как окончательные значения в соответствующие слагаемые системы (34.22).

Аналогично определяются «большие» величины на ребрах, являющихся  $\eta$ -линиями. Отличие только в формулах расчета исходных значений нормальной и касательной скоростей в соседних ячейках по обе стороны ребра, совпадающего с  $\eta$ -линией. Приведем их.

По ячейке ( $i - 1/2, j - 1/2$ )

$$[\mu_{i-1/2, j-1/2}^n]_{23} = \beta_{23} [u\alpha' + v\beta']_{i-1/2, j-1/2} - \alpha_{23} [-u\beta' + v\alpha']_{i-1/2, j-1/2},$$

$$[\nu_{i-1/2, j-1/2}^k]_{23} = \alpha_{23} [u\alpha' + v\beta']_{i-1/2, j-1/2} + \beta_{23} [-u\beta' + v\alpha']_{i-1/2, j-1/2}; \quad (35.2)$$

по ячейке ( $i + 1/2, j - 1/2$ )

$$[\mu_{i+1/2, j-1/2}^n]_{14} = \beta_{14} [u\alpha' + v\beta']_{i+1/2, j-1/2} - \alpha_{14} [-u\beta' + v\alpha']_{i+1/2, j-1/2},$$

$$[\nu_{i+1/2, j-1/2}^k]_{14} = \alpha_{14} [u\alpha' + v\beta']_{i+1/2, j-1/2} + \beta_{14} [-u\beta' + v\alpha']_{i+1/2, j-1/2}.$$

Описанный способ расчета гидродинамических величин на промежуточном слое в совокупности с системой соотношений (34.22) дает явную разностную схему, по принципам построения восходящую к идеологии, описанной в гл. I.

Способ второй. Однако в процессе расчета бывает целесообразно применять неявные разностные схемы. Ниже мы опишем способ вычисления «больших» величин, который в совокупности с (34.22) дает неявную разностную схему. Описанная ниже, она является обобщением на случай криволинейной системы координат неявной схемы, построенной в §§ 11, 21.

Запишем в криволинейной системе координат  $(\xi, \eta, l)$  и в компонентах скорости, введенных в § 29, систему уравнений

гидродинамики. (Систему мы приводить не будем. Читатель при необходимости может ее восстановить.) Эту исходную систему разделим на две (путем поочередного вычеркивания части членов) так, что каждая из них будет представлять систему уравнений с одной пространственной переменной.

Пусть первая из них представляет систему от переменных  $\xi$ ,  $t$ , вторая — от переменных  $\eta$ ,  $t$  (первая получается вычеркиванием всех членов, содержащих производные по  $\eta$ , вторая — производные по  $\xi$ ). Разделение слагаемых, не содержащих производные от гидродинамических величин, выполняется так, чтобы каждая из систем, в случае одномерного течения, давала одномерную систему уравнений гидродинамики. Выпишем обе системы, получающиеся путем описанных операций из основной системы.

Первая система:

$$\frac{\partial \mu^n}{\partial t} + \frac{\mu - \mu^*}{V g_{11}} \frac{\partial \mu^n}{\partial \xi} + \frac{V g_{22}}{V g} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} = \\ = [(\mu - \mu^*) \alpha + (v - v^*)] \frac{v^k}{V g} \frac{\partial V g_{22}}{\partial \xi}, \quad (35.3_1)$$

$$\frac{\partial v^k}{\partial t} + \frac{\mu - \mu^*}{V g_{11}} \frac{\partial v^k}{\partial \xi} = - [(\mu - \mu^*) \alpha + (v - v^*)] \frac{\mu^n}{V g} \frac{\partial V g_{22}}{\partial \xi}, \quad (35.3_2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\mu - \mu^*}{V g_{11}} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\rho}{\beta V g_{11}} \frac{\partial \mu^n}{\partial \xi} = \\ = - \frac{\rho}{2 V g V g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial \xi} \mu^n - \frac{dQ}{dy} \frac{\rho}{y} \frac{\sin [\xi, x]}{\beta} \mu^n, \quad (35.3_3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\mu - \mu^*}{V g_{11}} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\rho c^2}{\beta V g_{11}} \frac{\partial \mu^n}{\partial \xi} = \\ = - \frac{\rho c^2}{2 V g V g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial \xi} \mu^n - \frac{dQ}{dy} \frac{\rho c^2 \sin [\xi, x]}{y \beta} \mu^n. \quad (35.3_4)$$

Вторая система:

$$\frac{\partial v^n}{\partial t} + \frac{v - v^*}{V g_{22}} \frac{\partial v^n}{\partial \eta} + \frac{V g_{11}}{V g} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} = \\ = [(v - v^*) \alpha + (\mu - \mu^*)] \frac{\mu^k}{V g} \frac{\partial V g_{11}}{\partial \eta}, \quad (35.4_1)$$

$$\frac{\partial \mu^k}{\partial t} + \frac{v - v^*}{V g_{22}} \frac{\partial \mu^k}{\partial \eta} = - [(v - v^*) \alpha + (\mu - \mu^*)] \frac{v^n}{V g} \frac{\partial V g_{11}}{\partial \eta}, \quad (35.4_2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{v - v^*}{V g_{22}} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + \frac{\rho}{\beta V g_{22}} \frac{\partial v^n}{\partial \eta} = - \frac{\rho}{2 V g V g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial \eta} v^n - \frac{dQ}{dy} \frac{\rho}{y} \frac{\sin [\eta, x]}{\beta} v^n, \quad (35.4_3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{v - v^*}{V g_{22}} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\rho c^2}{\beta V g_{22}} \frac{\partial v^n}{\partial \eta} = - \frac{\rho c^2}{2 V g V g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial \eta} v^n - \frac{dQ}{dy} \frac{\rho c^2}{y} \frac{\sin [\eta, x]}{\beta} v^n, \quad (35.4_4)$$

где  $c$  — скорость звука в веществе (обозначения остальных величин встречались ранее).

Следующим шагом будет построение неявных схем для каждой из систем (35.3), (35.4).

Для компактного изложения воспользуемся векторной формой записи соответственно для систем (35.3), (35.4):

$$\frac{\partial \Psi'}{\partial t} + A'(\Psi', \xi, \eta, t) \frac{\partial \Psi'}{\partial \xi} + H'(\Psi', \xi, \eta, t) \Psi' = 0, \quad (35.5)$$

$$\Psi' = \begin{bmatrix} \mu^n \\ v^k \\ \rho \\ p \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial \Psi''}{\partial t} + A''(\Psi'', \xi, \eta, t) \frac{\partial \Psi''}{\partial \eta} + H''(\Psi'', \xi, \eta, t) \Psi'' = 0, \quad (35.6)$$

$$\Psi'' = \begin{bmatrix} v^n \\ \mu^k \\ \rho \\ p \end{bmatrix}.$$

Пока в этом не будет необходимости, мы не будем приводить конкретный вид этих матриц. Для построения неявной разностной схемы нам необходимо линеаризовать системы (35.5), (35.6).

Будем считать, что векторы  $\Psi'$  и  $\Psi''$ , входящие в матрицы  $A$  и  $H$ , известны, и вместо исходных систем рассмотрим линейную систему вида

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + A(\Psi_0, z, t) \frac{\partial \Psi}{\partial z} + H(\Psi_0, z, t) \Psi = 0, \quad (35.7)$$

где  $\Psi$  — искомый вектор,  $z, t$  — независимые переменные,  $A, H$  — известные матрицы, вычисляемые с помощью вектора  $\Psi_0$  представляющего величины на момент времени  $t$ .

Напомним, что в §§ 11, 21 мы описали и построили неявную разностную схему, которой здесь и воспользуемся. Это трехточечная схема вида

$$B_k^{\text{лев}}[\Psi]^{k-1} - B_k[\Psi]^k + B_k^{\text{прав}}[\Psi]^{k+1} + G_k = 0. \quad (35.8)$$

Верхний индекс [вектора  $\Psi$ ] означает, что компоненты взяты в соответствующей точке на момент времени  $t + \tau$ .

Матрицы  $B_k^{\text{лев}}$ ,  $B_k$ ,  $B_k^{\text{пр}}$  и вектор  $G_k$  определяются из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} B_k^{\text{лев}} &= A_k A_{k-1/2}, \\ B_k^{\text{пр}} &= A_k A_{k+1/2}, \end{aligned} \quad (35.9)$$

$$B_k = I + B_k^{\text{лев}} + B_k^{\text{пр}} - H_k,$$

$$G_k = \frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1} - z_{k-1}} [\Psi]_{k-1/2} + \frac{z_k - z_{k-1}}{z_{k+1} - z_{k-1}} [\Psi]_{k+1/2} - A_k ([\Psi]_{k+1/2} - [\Psi]_{k-1/2}),$$

$$A_k = \frac{2(z_k - z_{k-1})(z_{k+1} - z_k)}{(z_{k+1} - z_{k-1})^2} (A_{k-1/2} + A_{k+1/2}),$$

$$H_k = \frac{z_k - z_{k-1}}{z_{k+1} - z_{k-1}} H_{k+1/2} + \frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1} - z_{k-1}} H_{k-1/2}.$$

Напомним, что  $[\Psi]_{k-1/2}$ ,  $[\Psi]_{k+1/2}$  — значения вектора в соответствующих ячейках на исходный момент времени.

Границные условия для этой системы находятся по второму способу, описанному в § 21, т. е. заданием векторов  $[\Psi]^0$ ,  $[\Psi]^K$  на обеих границах на искомый момент времени.

Решение системы (35.9) осуществляется прогонкой, как это было описано в § 21.

Для реализации применительно к системам (35.3), (35.4) описанного способа построения разностной схемы остается выписать формулы вычисления элементов матриц  $A'$ ,  $H'$ ,  $A''$ ,  $H''$ .

Для системы (35.5) (мы придерживаемся принятых в предыдущем параграфе обозначений) матрицы  $A'$  и  $H'$  имеют вид

$$\begin{aligned} A'_{i-1/2, j-1/2} &= \frac{\tau}{S'_{n-1/2, m-1/2}} \left| \begin{array}{cccc} \mu - \mu^* & 0 & 0 & \frac{1}{\beta\rho} \\ 0 & \mu - \mu^* & 0 & 0 \\ \frac{\rho}{\beta} & 0 & \mu - \mu^* & 0 \\ \frac{\rho c^2}{\beta} & 0 & 0 & \mu - \mu^* \end{array} \right|_{i-1/2, j-1/2}, \\ H'_{i-1/2, j-1/2} &= \\ &= \frac{\tau}{2} \left| \begin{array}{cccc} 0 & [(\mu - \mu^*)\alpha + (v - v^*)] \frac{\delta'}{\beta} & 0 & 0 \\ -[(\mu - \mu^*)\alpha + (v - v^*)] \frac{\delta'}{\beta} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\rho}{\beta} \left[ \delta' + \frac{\beta'}{y} \frac{dQ(y)}{dy} \right] & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\rho c^2}{\beta} \left[ \delta' + \frac{\beta'}{y} \frac{dQ(y)}{dy} \right] & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|_{i-1/2, j-1/2}. \end{aligned} \quad (35.10)$$

Если для краткости среднюю точку ячейки ( $i - 1/2, j - 1/2$ ) обозначим через 0, а вершины, как и в предыдущем параграфе, символами 1, 2, 3, 4, то

$$\delta'_{i-1/2, j-1/2} \equiv \delta'_0 = \frac{S''_{23} - S''_{14}}{S'_0 S''_0};$$

$S'$ ,  $S''$ —соответствующие длины дуг  $\xi$ - и  $\eta$ -линий,  $[\mu, v]_0$ —контравариантные составляющие скорости вещества,  $\rho$ ,  $p$ ,  $c$ —плотность, давление, скорость звука в ячейке на исходный момент времени,  $[\mu^*, v^*]_0$ —контравариантные составляющие скорости сетки (средней точки ячейки),  $\alpha$ ,  $\beta$ —косинус и синус угла между координатными линиями.

Рассматривая цепочку ячеек с фиксированным значением индекса  $j$  и переменным значением  $i$  ( $i = 1, \dots, I - 1$ ), мы получим систему разностных уравнений, связывающих значения гидродинамических величин в ячейках вдоль фиксированной  $\xi$ -линии. Зная значения векторов

$$\Psi'_{0, j-1/2} = \begin{bmatrix} \mu^n \\ v^k \\ \rho \\ p \end{bmatrix}^{0, i-1/2}, \quad \Psi'_{I, j-1/2} = \begin{bmatrix} \mu^n \\ v^k \\ \rho \\ p \end{bmatrix}^{I, j-1/2}$$

на левой и правой границах области на момент  $t + \tau$ , мы можем решить эту цепочку уравнений и найти значения векторов  $\Psi'$  на ребрах 23 и 14 всех ячеек этой цепочки.

Поступая описанным способом для каждой из цепочек, найдем значения величин  $\mu^n$ ,  $v^k$ ,  $\rho$ ,  $p$  на момент времени  $t + \tau$  на ребрах с индексами 23, 14 для всех ячеек области. (Напомним, что согласно нашей схеме расчета мы в первую очередь отыскиваем значения величин на границах области.)

Аналогично поступим с системой (35.4), рассматривая ее для каждой цепочки ячеек вдоль  $\eta$ -линии от нижней до верхней границы области.

Для системы (35.6) матрицы  $A'', H''$  имеют вид

$$A''_{i-1/2, j-1/2} = \frac{\tau}{S''_{i-1/2, j-1/2}} \begin{vmatrix} v - v^* & 0 & 0 & \frac{1}{\beta\rho} \\ 0 & v - v^* & 0 & 0 \\ \frac{\rho}{\beta} & 0 & v - v^* & 0 \\ \frac{\rho c^2}{\beta} & 0 & 0 & v - v^* \end{vmatrix}_{i-1/2, j-1/2},$$

$$H''_{i-1/2, j-1/2} =$$

$$= \frac{\tau}{2} \begin{vmatrix} 0 & [(v - v^*)\alpha + (\mu - \mu^*)] \frac{\delta_0''}{\beta} & 0 & 0 \\ -[(v - v^*)\alpha + (\mu - \mu^*)] \frac{\delta''}{\beta} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\rho}{\beta} \left[ \delta_0'' + \frac{\beta''}{y} \frac{dQ(y)}{dy} \right] & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\rho c^2}{\beta} \left[ \delta_0'' + \frac{\beta''}{y} \frac{dQ(y)}{dy} \right] & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}_{i-1/2, j-1/2},$$

где

$$\delta_0'' = \frac{S'_{43} - S'_{12}}{S'_0 S''_0}.$$

Результатом решения выписанной системы разностных уравнений для цепочки ячеек вдоль  $\eta$ -линии от нижней границы до верхней, где значения векторов

$$\Psi''_{i-1/2, 0} = \begin{bmatrix} v^n \\ \mu^k \\ \rho \\ p \end{bmatrix}^{i-1/2, 0} \quad \text{и} \quad \Psi''_{i-1/2, J} = \begin{bmatrix} v^n \\ \mu^k \\ \rho \\ p \end{bmatrix}^{i-1/2, J}$$

известны из граничных условий, будут значения величин  $v^n, \mu^k, \rho, p$  на ребрах с индексами 12, 43 на момент  $t + \tau$ .

Поступая описанным образом для каждой из цепочек ячеек вдоль  $\eta$ -линии, найдем значения векторов  $\Psi''$  на всех ребрах 12, 43 области.

На этом счет гидродинамических величин на момент времени  $t + \tau$  на всех ребрах ячеек области по описанной неявной схеме завершается.

### § 36. Некоторые замечания о принципах конструирования методики

Требования к разностному алгоритму, сложившиеся на основе опыта эксплуатации методики. Подходы и тактика решения задач.

Идеи и принципы, которые мы попытались изложить в этой книге, формировались и проверялись в течение почти двадцати лет. За эти годы было создано большое количество программных комплексов, первый из которых заработал еще в 1956—1957 гг. Логическое задание для него было разработано В. В. Луциковичем, а программирование выполнено Г. Н. Новожиловой. С тех пор авторами, а также другими исследователями решено много сложных задач. По мере накопления и обобщения опыта совершенствова-

лись алгоритмы, расширялись их возможности, создавались новые программные реализации. В этой связи отметим, что один из последних программных комплексов для расчета сложных течений, построенный на принципах гл. IV, создан Г. Б. Ала-лыкиным, Г. Н. Новожиловой, Л. А. Плинер, В. Ю. Мельцасом, А. Ф. Никулиной. Вклад других сотрудников, вместе с которыми работали авторы монографии, в создание численных алгоритмов и в выполнение необходимых расчетных исследований отражен в параграфах, посвященных изложению соответствующих результатов.

Опыт авторов и их коллег показывает, что сложность задач механики сплошной среды, выдвигаемых практикой, такова, что в настоящее время опережает прогресс в вычислительной технике. Поэтому их решение оказывается возможным только при наличии эффективных численных алгоритмов. При этом важно подчеркнуть, что успех в выборе и построении указанных алгоритмов не в последнюю очередь определяется общими принципами и идеями, которыми руководствуется вычислитель при создании численного метода. Данный вопрос, по мнению и опыту авторов, является чрезвычайно важным и заслуживает специального рассмотрения. Поэтому сформулируем требования к численным методам и разностным схемам, выполнение которых если не необходимо, то во всяком случае крайне полезно для успеха дела.

Одним из существенных требований, предъявляемых к современным численным методам, является адаптируемость алгоритмов к особенностям рассчитываемых течений. В частности, очень существенным обстоятельством является правильный учет областей влияния. Свойство адекватной передачи разностной схемой областей влияния исходных дифференциальных уравнений в частных производных не сводится только к возможности выбора минимальной счетной области, а позволяет естественно решать вопрос о граничных условиях. Схемы, обладающие таким свойством, как правило, не нуждаются в каких-либо дополнительных граничных условиях, кроме тех, которых требует точная постановка задачи. Этот фактор зачастую является определяющим при отыскании решений достаточно сложной структуры.

Сложность областей, в которых приходится вести расчет, зачастую вынуждает исследователя применять широкий набор весьма разнообразных (криволинейных, подвижных и т. п.) разностных сеток, выделение поверхностей разрыва, особенностей типа точек излома границ и т. п.

Необходимость широкого набора типов граничных условий, легкость их смены однозначно приводит к явному алгоритму расчета границ. Желание вложить в методику расчет задач со

сложной геометрией естественным образом приводит к разделению счета по областям.

В процессе решения задачи, в зависимости от конкретных обстоятельств, разумно выбирать тактику счета, допускающую использование не только явных, но, в некоторых случаях, и неявных схем. При этом наряду с естественным требованием логической простоты, в силу которого более предпочтительны явные схемы, необходимо принимать в расчет следующие соображения. Для уравнений газовой динамики характерные интервалы изменения различных параметров, грубо говоря, почти всюду определяются акустическими характеристиками или характеристическими конусами. Они же, в силу условий устойчивости явных разностных схем, определяют соответствующие шаги интегрирования. Отсюда ясно, что при решении подобных задач отсутствие ограничений на шаг интегрирования по одной из переменных, которое обеспечивает неявные схемы, не может быть реализовано по соображениям точности счета. Эти соображения лимитируют шаг интегрирования практически тем же условием Куранта—Фридрихса—Леви, что и для явных разностных схем. В противоположных случаях (например, при расчете так называемых энтропийных слоев), когда условие устойчивости налагает слишком обременительные ограничения на временной шаг, при интегрировании гладких решений естественно использование неявных схем. В то же время при расчете подобластей течения, содержащих невыделенные сильные разрывы, как правило, более предпочтительными оказываются явные разностные схемы.

Следующие соображения связаны с тем, что для большинства течений, встречающихся в практических приложениях, характерно присутствие различных поверхностей разрыва, конфигурация и даже ориентировочное положение которых подчас заранее неизвестны. Данное обстоятельство крайне затрудняет использование методов, предусматривающих обязательное выделение всех поверхностей разрыва, создавая предпочтение методам, которые допускают так называемый «сквозной» счет. В последних вместо поверхностей разрыва образуются области с большими градиентами газодинамических параметров. Методы сквозного счета сами должны удовлетворять ряду дополнительных требований. В частности, следует стремиться к тому, чтобы размазывание разрывов ограничивалось как можно меньшим числом ячеек разностной сетки.

Далее, крайне желательно, чтобы разностная схема без введения достаточно сложных дополнительных алгоритмов позволяла выделять те поверхности разрыва, структура которых либо известна заранее (головная ударная волна, граница раздела струй), либо выясняется в процессе расчета.

Говоря о тактике выделения в процессе расчета особенностей, следует обратить внимание на такой прием. Выделяя фронт волны, нет нужды следить за ним непрерывно от начала до конца. На короткие промежутки времени или в малых областях пространства его можно «терять», а затем «отыскивать» заново. Поясним сказанное примером. Пусть надо проследить за прохождением ударной волны через два вещества (две физические области), разделенные контактным разрывом сложной формы. Хотя полный расчет процесса взаимодействия падающей волны с таким контактным разрывом представляет собой весьма сложную задачу, само прохождение волны можно рассчитать, не вдаваясь во все детали взаимодействия. Для этого поступим следующим образом. В качестве первой счетной области возьмем часть физической области за фронтом падающей волны. Во второй физической области выделим в качестве счетной границы некую поверхность, близкую к контактному разрыву. Пусть эта поверхность будет волновым фронтом. Очевидно, что, пока на нее не выйдет возмущение, это будет характеристическая поверхность. Часть второй физической области, заключенная между контактным разрывом и характеристической поверхностью, будет второй счетной областью. Дальнейшая тактика расчета такова.

Как только на каком-либо участке падающая ударная волна выйдет на контактную границу, на этом участке она меняет свой тип, становясь контактным разрывом. После этого внутрь второй области начинает распространяться «размазанная» ударная волна. Там, где размазанная волна выходит на характеристическую поверхность, последняя превращается в участок ударного фронта. Таким образом, только в малой окрестности контактного разрыва счет осуществляется без выделения точного ударного фронта, причем шаг по пространству здесь мал.

Схема должна быть «гибкой» в том смысле, чтобы допускать возможность расчета при малом шаге по времени (или переменной, играющей аналогичную роль), т. е. при числах Куранта, значительно меньших единицы. Последнее требование возникает в связи с тем, что из-за неоднородности течения максимально допустимый шаг интегрирования может весьма сильно отличаться в разных точках рассматриваемой области.

Наконец, еще одним свойством, которое, не будучи обязательным, тем не менее, по мнению авторов, представляется весьма желательным, является монотонность разностной схемы, т. е. способность схемы переводить монотонные распределения параметров (вернее, их комбинаций — римановых инвариантов соответствующих линеаризованных уравнений) в монотонные. Немонотонность схемы при расчете течений с достаточно сильными разрывами может приводить к аварийным ситуациям (например,

к получению отрицательных плотностей или температур). Для немонотонных схем последнее, во избежание неприятностей, должно заранее предусматриваться при построении алгоритмов.

Метод, лежащий в основе настоящей монографии, не только удовлетворяет перечисленным выше требованиям, но и позволяет обеспечить их выполнение подчас в большей степени, чем другие методы. Так, например, он, как показали многочисленные сравнения, размазывает скачки уплотнения в задачах газовой динамики не более, чем любой другой метод сквозного счета.

Необходимо отметить, что, несмотря на формально первый порядок аппроксимации, данный метод позволяет решать широкий круг задач с удовлетворительной для практики точностью по следующей причине. Если использовать то обстоятельство, что решения уравнений газовой динамики по структуре представляют собой чередование областей гладкости (где гидродинамические функции постоянны или близки к линейным), разделенных разрывами, и выделить в расчете основные из них, то это фактически приводит к более существенному повышению точности, чем использование схем высокого порядка, но без выделения разрывов.

В заключение подчеркнем еще раз некоторые из особенностей, которыми обладает методика интегрирования многомерных задач газовой динамики, построенная на изложенных принципах.

а) Она пригодна для широкого класса задач сложной структуры с широким набором типов границ.

б) Описание и решение каждой отдельной задачи возможно выполнить в системе координат, наиболее приспособленной к особенностям задачи.

в) Выполнение законов сохранения обеспечивает удовлетворительный счет разрывных решений и без выделения разрыва.

г) Комбинация явной и неявной схем для счета промежуточного слоя позволяет выбрать оптимальную тактику счета.

д) Разностная схема приспособлена для широкого использования ее вместе с разнообразными подвижными сетками.

е) Свойство адекватной передачи областей влияния позволяет выбирать минимальные счетные области и, как правило, использовать такое число граничных условий, которого требует точная постановка задачи.

Эффективность принципов и идей, сформулированных выше и положенных в основу построения соответствующих численных алгоритмов, подтверждается не только большим числом разнообразных задач, решенных к настоящему времени описанным методом, но и тем, что многие из этих задач не были решены никакими другими методами, несмотря на большие усилия, затраченные на это. Изложению некоторых из этих задач посвящена вторая часть книги.

Прогресс, достигнутый при использовании рассматриваемого метода в газовой динамике и в аэродинамике, указывает на перспективность его применения для численного решения других задач, описываемых квазилинейными системами гиперболического типа. При этом важно помнить, что выводы о преимуществах и достоинствах данного метода нельзя рассматривать в отрыве от целей, стоявших перед авторами, а также без учета вычислительной техники, прогресса в автоматизации программирования и успехов в совершенствовании других численных методов и алгоритмов \*).

---

\* ) Авторы признательны Н. Н. Анучиной, прочитавшей рукопись первой части и сделавшей ряд полезных замечаний.

## Часть вторая

# ИЛЛЮСТРАЦИЯ ВОЗМОЖНОСТЕЙ МЕТОДА

---

Ниже представлены результаты численного решения достаточно широкого круга задач газовой динамики, которые иллюстрируют возможности схем, описанных в первой части монографии. Значительная часть приводимых материалов ранее публиковалась в периодической печати авторами монографии, их сотрудниками и другими исследователями. В силу этого, а также с учетом иллюстративных целей представленных результатов везде, где это было найдено возможным, опущено подробное описание технических деталей (формул, дающих поверхности обтекаемых тел, характеристик разностных сеток, типа используемых ЭВМ и трансляторов, времени счета и т. п.), которые, однако, при необходимости могут быть найдены в первоисточниках. Исключение составляет информация о постановке начальных и граничных условий и о точности метода. Наличие такой информации позволяет читателю более правильно ориентироваться при решении встающих перед ним задач. Все приводимые ниже примеры, если это не оговорено особо, относятся к течению совершенного газа с показателем адиабаты  $\kappa = 1,4$ .

## Г л а в а V

### ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

В данной главе представлены решения ряда нестационарных задач, иллюстрирующие возможности конечноразностных схем, описанных в первой части монографии. При этом наряду с результатами, которые были получены авторами или при участии авторов, приводятся результаты А. С. Фонарева и В. П. Колгана (§ 37), А. С. Фонарева и В. В. Подлубного (§ 38), Л. В. Шуршалова (§ 39) и Н. П. Исаковой (§ 41).

#### § 37. Дифракция ударной волны на двумерных телах

Дифракция плоской ударной волны (с равномерным сверхзвуковым и дозвуковым потоком за ней) на ромбовидном профиле, цилиндре, поставленном перпендикулярно плоскости течения, и на сфере. Развитие течения во времени и установление стационарной картины обтекания.

Рассмотрение результатов численного решения нестационарных задач газовой динамики начнем с задачи о дифракции ударной волны на плоских или осесимметричных телах. Указанная задача формулируется следующим образом.

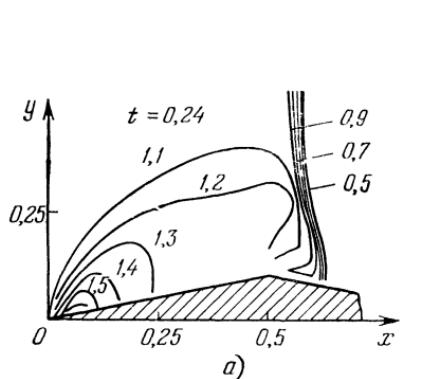
Пусть на симметричный плоский профиль или на тело вращения набегает плоская ударная волна с постоянными (до начала взаимодействия с телом) параметрами за ее фронтом. Решение задачи проводится в декартовой ( $x, y, z$ ) или цилиндрической ( $x, r, \phi$ ) системах координат, причем ось  $x$  совмещается с осью симметрии или лежит в плоскости симметрии тела. Начало координат поместим в переднюю точку тела. Ограничимся случаями, для которых фронт волны до взаимодействия с телом перпендикулярен оси  $x$ , а газ перед фронтом поконится и является однородным. При выполнении перечисленных условий двумерность течения не нарушается и после начала взаимодействия ударной волны (и потока за ней) с обтекаемым телом. Момент начала взаимодействия, совпадающий с моментом достижения волной передней точки тела ( $x = 0$ ), примем за начало отсчета времени  $t$ . В соответствии с этим начальные условия задачи состоят в задании кусочно-постоянных распределений параметров газа при  $t=0$ :

$$\begin{aligned} u = u_1 &= 0, \quad v = v_1 = 0, \quad p = p_1, \quad \rho = \rho_1 \quad \text{при } x > 0, \\ u = u_2 &> 0, \quad v = v_2 = 0, \quad p = p_2, \quad \rho = \rho_2 \quad \text{при } x < 0. \end{aligned}$$

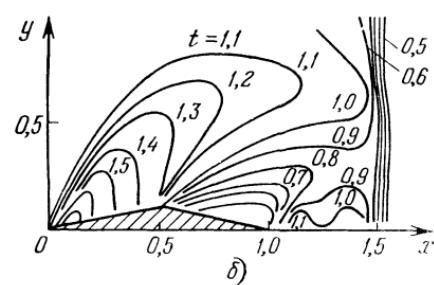
Здесь индекс 1 (2) приписан параметрам до (после) скачка. Указанные параметры, т. е.  $p_1, \rho_1, \dots$  суть заданные константы, удовлетворяющие соотношениям на скачке, в которые, кроме того, входит скорость скачка  $D_0$ .

Границыми условиями задачи служат: условие непротекания на поверхности тела, аналогичное условие на плоскости или на оси симметрии, а также равенство параметров потока своим начальным значениям  $u_1, u_2, \dots$  на достаточноном удалении от тела. При этом на «боковых» границах рассчитываемой области соответствующие величины должны браться с учетом перемещения ударной волны, которая вдали от тела движется по закону  $x = D_0 t$ . Рассчитываемая область должна быть достаточно большой с тем, чтобы возмущения, идущие от тела, не успевали для рассматриваемых моментов времени исказить «невозмущенный» поток. В действительности в приводимых ниже примерах, взятых из [80], [112], это условие выполнялось не всегда, а наряду с точными граничными условиями выставлялись некоторые приближенные (достаточно «мягкие») условия, которые без внесения заметных ошибок в результаты, по-видимому, позволяют получать требуемую информацию о развитии течения при использовании расчетных областей существенно меньших размеров. Не останавливаясь на дальнейших деталях, которые читатель может

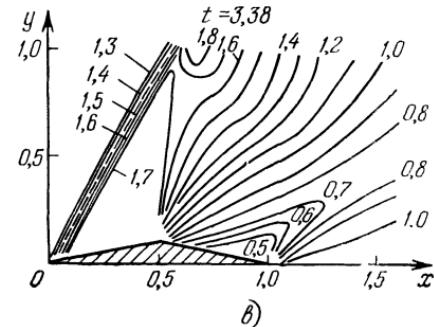
найти в [80], [112], перейдем к изложению некоторых результатов, полученных в этой работе при помощи разностной схемы § 24.



a)

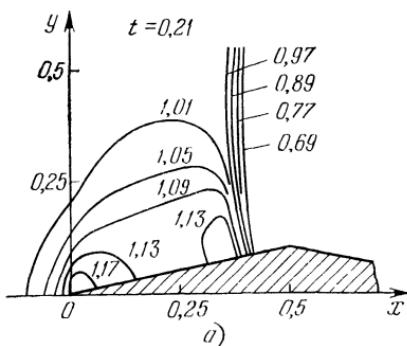


б)

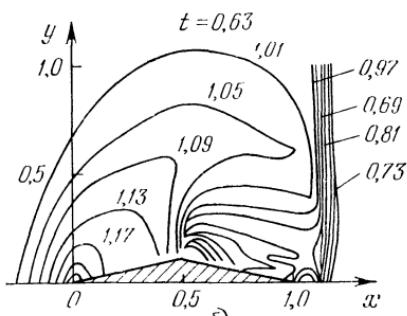


б)

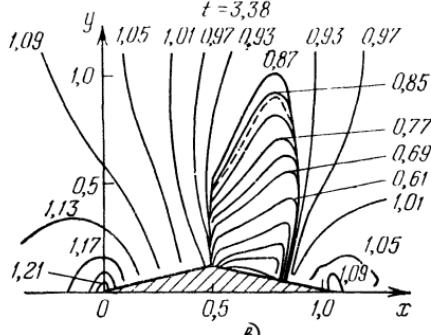
Рис. 37.1.



а)



б)



б)

Рис. 37.2.

Первые два рисунка относятся к задаче о дифракции ударной волны на симметричном ромбовидном профиле. На рис. 37.1, а—*в* представлены линии постоянства давления для трех моментов времени в случае, когда число Маха  $M_0$  потока за фронтом невозмущенной ударной волны равно 1,5. Цифры около изобар —

значения давления, отнесенного к  $p_2$ , за масштаб времени принята величина  $l/c_2$ , где  $l$ —длина хорды профиля, а  $c_2$ —скорость звука за ударной волной (в «невозмущенном набегающем потоке»). Расчет проводился на фиксированной сетке, поэтому ударные волны представляются как линии сгущения изобар. Для оценки

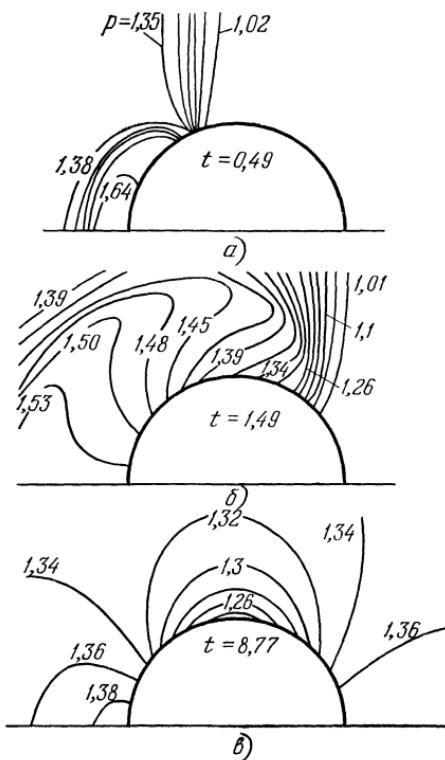


Рис. 37.3.

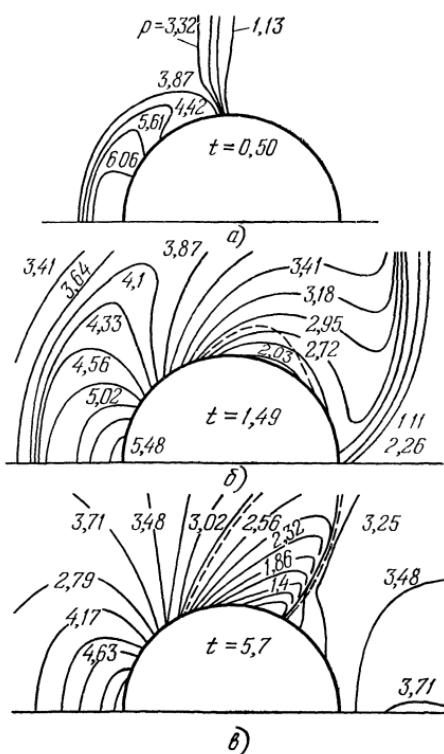


Рис. 37.4.

точности на рис. 37.1,  $\sigma$  штриховой линией нанесена ударная волна, получающаяся из стационарного решения. Сравнение значений параметров на поверхности профиля, которые вырабатывались в рассмотренной задаче в процессе установления, с точными стационарными величинами показало, что ошибки в определении давления не превышают 2%, а в определении плотности лежат в пределах 4%, достигая максимальных значений в угловых точках профиля.

Нестационарная эволюция картины обтекания того же профиля в случае  $M_\infty = 0.8$  приведена на рис. 37.2,  $a$ — $\sigma$ . Видно, как после прохождения ударной волны над телом в потоке возникают области дозвуковых и сверхзвуковых скоростей (штриховая кри-

вая — звуковая линия) и скачок уплотнения, замыкающий местную сверхзвуковую зону.

Остальные примеры относятся к дифракции ударной волны на цилиндре, расположенному перпендикулярно плоскости течения, и на сфере. На рис. 37.3, *a*—*в* для нескольких моментов времени даны картины изобар при дифракции волны на цилиндре в случае, когда  $M_0 = 0,21$ . На этом и на последующих рисунках давление отнесено не к  $p_2$ , как ранее, а к  $p_1$ , за масштаб времени взято отношение  $R/a_1$ , где  $R$  — радиус цилиндра или сферы и  $a_1$  — скорость звука в покоящемся газе. В рассмотренном случае в процессе установления вырабатывается стационарное обтекание цилиндра дозвуковым потоком.

На рис. 37.4, *a*—*в* представлены результаты, иллюстрирующие развитие течения около сферы в случае числа Маха  $M_0 = 0,8$ , которое при стационарном обтекании превышает соответствующую критическую величину. В силу последнего обстоятельства около сферы возникает местная сверхзвуковая зона, граница которой нанесена на рис. 37.4 штриховой линией (указанная граница включает звуковую линию и размазанный скачок уплотнения).

С увеличением числа Маха потока за набегающей ударной волной и с переходом к сверхзвуковому режиму ( $M_0 > 1$ ) около обтекаемых тел в результате дифракции формируется течение с отошедшей ударной волной, как это следует из рассмотрения рис. 37.5, *a*—*в*, соответствующего обтеканию сферы при  $M_0 = 1,5$ . Штриховой линией перед телом на рисунке показана звуковая линия. Отметим, что в рассматриваемом случае установление потока за телом происходит значительно медленнее, чем в остальных областях. Кроме того, в результате расчета здесь получается зона возвратного течения, природу которого в рамках используемой невязкой модели может быть связана с погрешностями вычислений и поэтому требует дополнительных исследований.

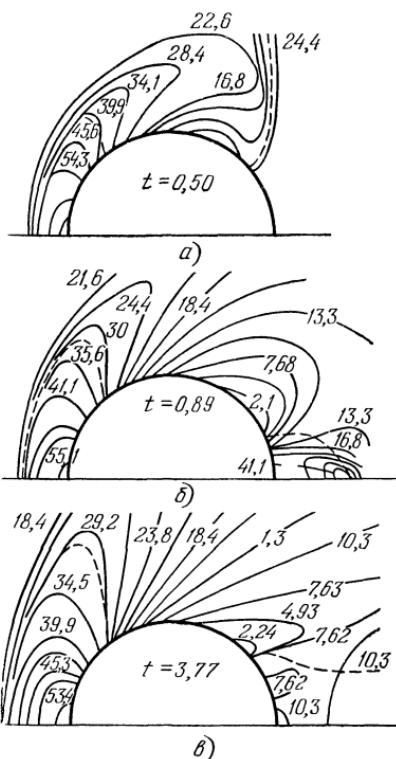


Рис. 37.5.

### § 38. Взаимодействие сферического взрыва с плоской поверхностью

Возникновение пространственного течения в результате взаимодействия сферически симметричного потока, образовавшегося при точечном взрыве, с плоскостью. Эволюция отражения ударной волны от регулярного к нерегулярному («маховскому»).

Рассмотрим задачу о взаимодействии потока, возникшего в результате взрыва сферического заряда, который будем считать точечным, с плоской поверхностью, расположенной на конечном расстоянии  $X$  от эпицентра взрыва. Схема взаимодействия изображена на рис. 38.1, где  $x$ ,  $r$  — оси цилиндрической системы координат, за единицу длины принято расстояние от центра взрыва до плоскости, а время  $t$  отсчитывается от момента касания плоскости сферической ударной волной, возникшей при взрыве.

При  $t < 0$  распределения параметров удовлетворяют решению одномерной (сферически симметричной) нестационарной задачи о точечном взрыве в однородной среде с давлением  $p_1$  и плотностью  $\rho_1$ . Описание постановки и методов решения этой задачи, а также необходимые результаты читатель может найти в работе [96]. В результате взаимодействия сферически симметричного течения (с центром симметрии в точке  $x = 1$ ,  $r = 0$ ) с плоскостью поток в области взаимодействия становится двумерным,

сохраняя, однако, осевую симметрию. В меридиональной плоскости  $x$ ,  $r$  область двумерного течения ограничена осью симметрии  $x$ , осью  $r$ , дающей плоскость взаимодействия, и ударной волной, которая движется вверх и вправо. Сначала ударная волна состоит из одного гладкого участка, как это показано на рис. 38.1 для момента времени  $t = t_1$ . С течением времени регулярное отражение скачка, возникшего при взрыве, становится невозможным, и возникает так называемое *нерегулярное* (или «маховское») отражение, отвечающее на рис. 38.1 моменту времени  $t = t_2$ . При этом ударная волна, ограничивающая область двумерного потока, состоит из двух гладких участков: почти прямого скачка, движущегося вправо («ножки Маха»), и гладкого скачка, распространяющегося вверх в область сферически симметричного потока. Второй скачок со временем догоняет фронт сферической ударной волны на всем ее протяжении, в том числе и в направлении оси  $x$ . После этого все поле течения разделяется на две области: область двумерного (осесимметричного) нестационарного потока

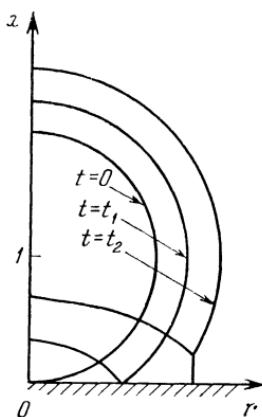


Рис. 38.1.

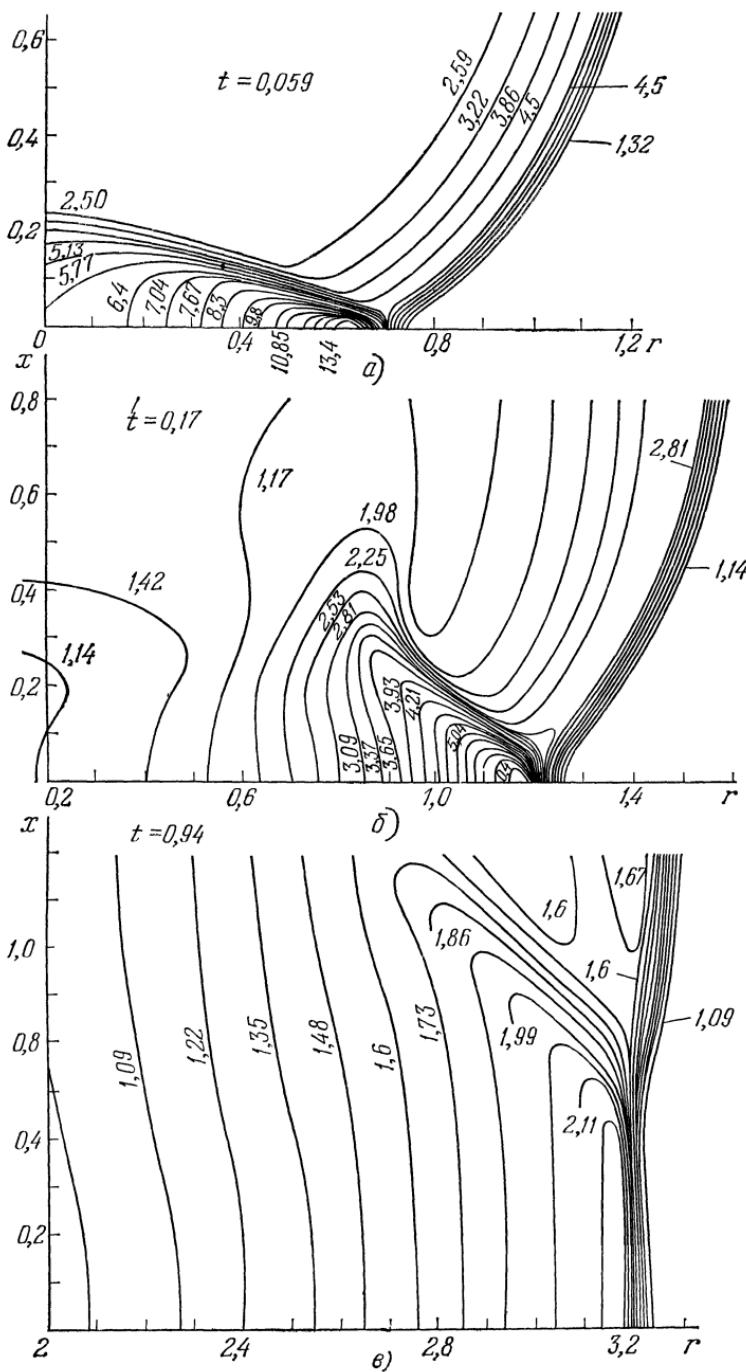


Рис. 38.2.

и область покоя вне ее. До указанного момента все три волны («ножка Маха», фронт сферического скачка и волна, движущаяся вверх), пересекаясь, образуют конфигурацию, получившую название «тройной точки».

При достаточно большой расчетной области граничные условия задачи состоят в задании невозмущенных параметров  $p = p_1$ ,

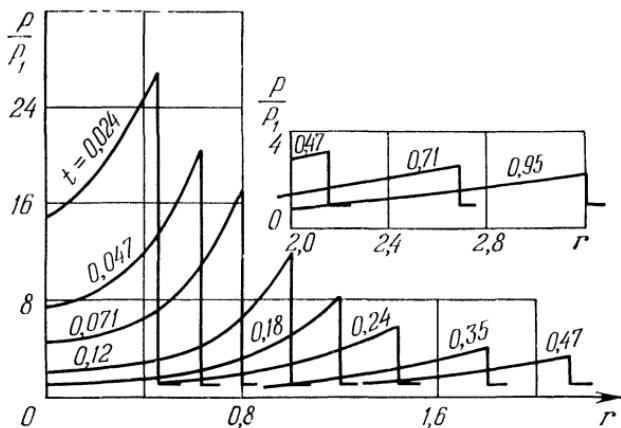


Рис. 38.3.

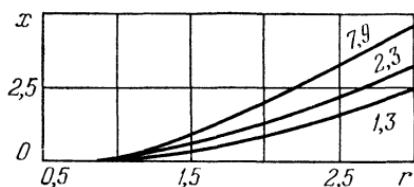


Рис. 38.4.

$\rho = \rho_1$ ,  $u = v = 0$  на ее правой и верхней границах, а также в равенствах  $v = 0$  при  $r = 0$  и  $u = 0$  при  $x = 0$ , где  $u$  и  $v$  представляют компоненты вектора скорости газа по  $x$  и  $r$ . Не останавливаясь на деталях, связанных с заменой точных граничных условий приближенными (последнее может быть обусловлено ограничениями размеров рассматриваемой области, которые связаны с возможностями используемой ЭВМ), перейдем к описанию некоторых результатов расчета, полученных в работе [96]. Указанные результаты были получены при помощи разностной схемы, описанной в § 24.

На рис. 38.2,  $a$ — $c$  для трех моментов времени показаны изобары, дающие достаточно четкое представление об эволюции течения. Цифры около изобар — значения давления, отнесенного к  $p_1$ , время  $t$  отнесено к  $X/c_1$ , где  $c_1$  — скорость звука в покоя-

щемся газе. Рассмотренный случай характеризуется начальным (при  $t = 0$ ) перепадом давления на фронте сферического скачка  $\Delta p_0 = 7,9p_1$ . При фиксированных значениях  $X$  и параметрах покоящегося газа последняя величина однозначно связана с энергией, выделившейся при точечном взрыве. На рис. 38.3 для различных моментов времени приведены кривые распределения давления по стенке. Эти кривые отвечают тому же случаю ( $\Delta p_0 = 7,9p_1$ ) и получены с использованием специальной процедуры перехода от размазанного скачка к разрыву бесконечной толщины (подробности см. в [96]). Наконец, на рис. 38.4 для трех значений  $\Delta p_0/p_1$ , указанных цифрами около кривых, приведены траектории тройной точки. Так как расчеты в [96] велись без выделения поверхностей разрыва, то точность, с которой определены указанные траектории, по-видимому, невелика.

## § 39. Взрыв несферического заряда

Идеализация задачи, заменяющая область выделения энергии при взрыве областью покоящегося газа с повышенным давлением. Использование по-движной разностной сетки, выделяющей головную ударную волну и контактную поверхность. Образование вторичной ударной волны. Влияние формы заряда.

В предыдущем параграфе двумерный характер течения был обусловлен взаимодействием с плоской преградой сферически симметричного потока, образовавшегося при точечном взрыве. Ниже рассматривается также двумерная (осесимметричная) нестационарная задача, связанная с взрывом, однако теперь отличие течения от сферически симметричного определяется формой заряда и поэтому имеется с самого начала. Как уже указывалось, в данном параграфе использованы результаты работы [121], в которой для решения соответствующей задачи был применен вариант метода, описанного в § 24. Прежде чем переходить к изложению результатов, дадим краткое описание постановки задачи, моделирующей взрыв осесимметричного заряда в однородном покоящемся газе.

Рассмотрим течение, которое возникает при взрыве осесимметричного заряда, имеющего дополнительную плоскость симметрии, перпендикулярную его оси. Анализ будем вести в цилиндрической системе координат  $x, r, \varphi$  с осью  $x$ , направленной по оси симметрии заряда. Начало координат поместим на упомянутую выше дополнительную плоскость симметрии. В силу имеющей место симметрии и выбора координат достаточно ограничиться рассмотрением лишь той части меридиональной плоскости  $x, r$ , для которой  $x > 0, r > 0$ . За начало отсчета времени  $t = 0$  примем момент, к которому полностью закончилось сгорание заряда, причем область, занятую его газообразными продуктами, заменим зоной повышенного давления  $p \equiv p_2 > p_1$  и постоянной плотности  $\rho \equiv \rho_2 \neq \rho_1$ .

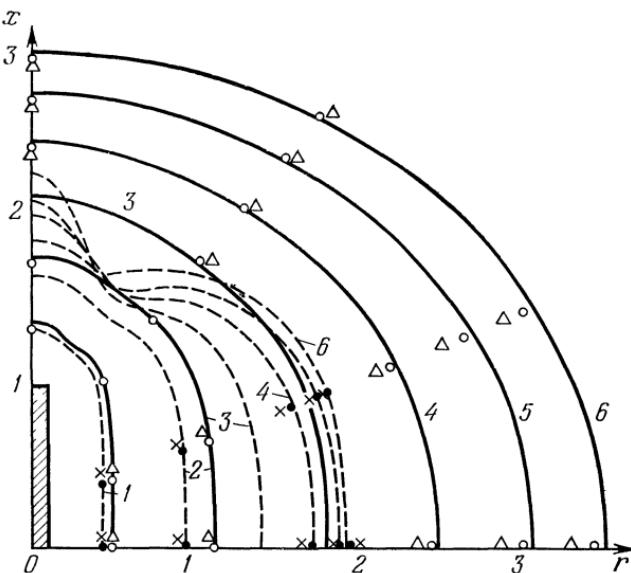


Рис. 39.1.

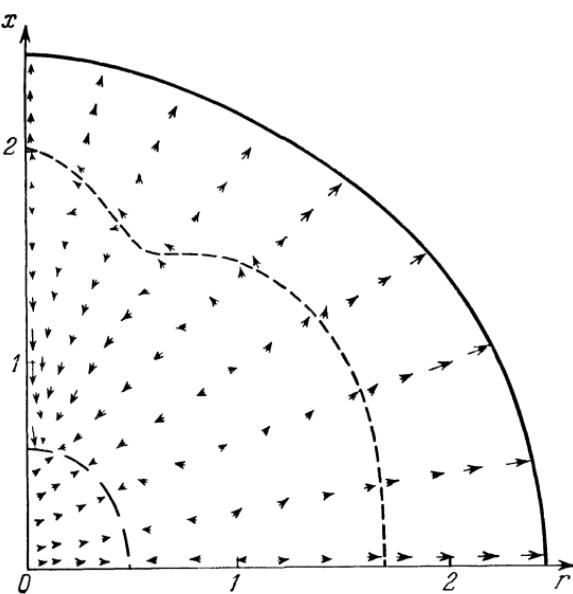


Рис. 39.2.

Здесь  $p_1$  и  $\rho_1$ —давление и плотность окружающей среды, а  $p_2$  и  $\rho_2$ —заданные константы. Пусть, кроме того, при  $t=0$  газ в указанной области неподвижен. В дальнейшем при  $t > 0$  из-за перепада давления область повышенного давления начинает расширяться, вне ее возникает ударная волна, внутрь первоначально

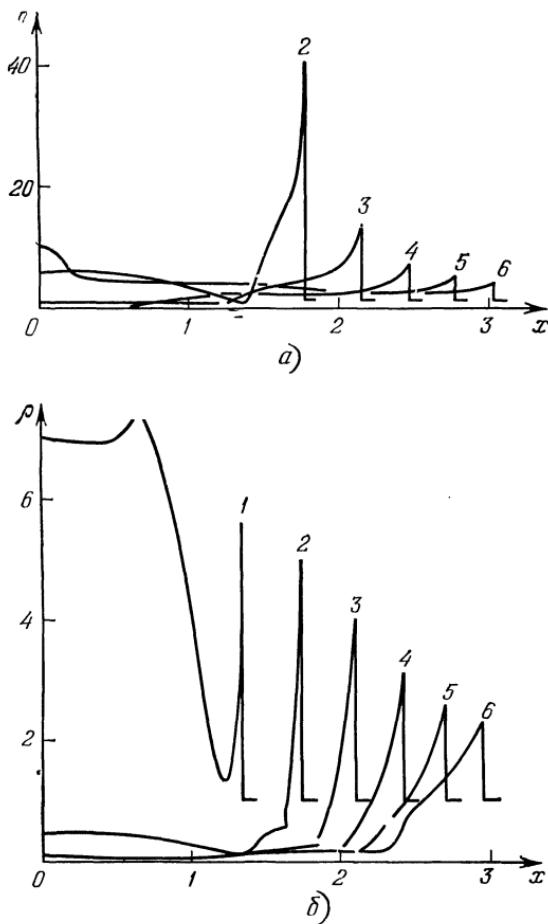


Рис. 39.3.

распространяются волны разрежения, а продукты сгорания заряда отделены от остального газа контактной поверхностью. Расчеты, результаты которых приводятся ниже, проводились с применением подвижной разностной сетки, включавшей в качестве границ ячеек ударную волну и контактную поверхность. Константы, характеризующие термодинамические свойства обоих газов, в частности их показатели адиабаты, считались одинаковыми. Не вда-

ваясь в дальнейшие детали построения численного решения, которые читатель может найти в [121], перейдем к описанию некоторых результатов расчета.

Рис. 39.1—39.3, *a, b* относятся к взрыву цилиндрического заряда, который характеризовался следующими параметрами:  $p_2/p_1 = 10^4$ ,  $\rho_2/\rho_1 = 10^2$  и  $d/l = 0,1$ , где  $d$  и  $l$  — диаметр и длина цилиндра, занятого продуктами сгорания заряда в момент  $t = 0$ . На рис. 39.1 сплошными линиями для шести моментов времени  $t \approx 0,024; 0,07; 0,15; 0,27; 0,40; 0,53$  изображена головная ударная волна, а штриховыми линиями — контактная поверхность. Область, занятая при  $t = 0$  сжатым газом, на рисунке заштрихована. Здесь и далее за характерный линейный размер взято  $l/2$ , время отнесено к  $l/(2c_1)$ , где  $c_1$  — скорость звука в покоящемся газе, а кривые, отвечающие перечисленным выше моментам времени, отмечены цифрами 1—6. Некоторое представление о точности счета дают треугольнички, кружочки и крестики, показывающие результаты расчетов, которые были выполнены при меньшем числе расчетных ячеек: светлые и темные кружочки — при вдвое, а треугольнички и крестики — при вчетверо меньшем числе ячеек,

контактная поверхность — кон-  
тактная поверхность. Область, занятая при  
 $t = 0$  сжатым газом, на рисунке заштрихова-  
на. Здесь и далее за характерный ли-  
нейный размер взято  $l/2$ , время отнесено к  
 $l/(2c_1)$ , где  $c_1$  — скорость звука в покоящемся  
газе, а кривые, отвечающие перечисленным  
выше моментам времени, отмечены цифрами  
1—6. Некоторое представление о точности  
счета дают треугольнички, кружочки и кре-  
стики, показывающие результаты расчетов,  
которые были выполнены при меньшем чис-  
ле расчетных ячеек: светлые и темные кру-  
жочки — при вдвое, а треугольнички и кре-  
стики — при вчетверо меньшем числе ячеек,

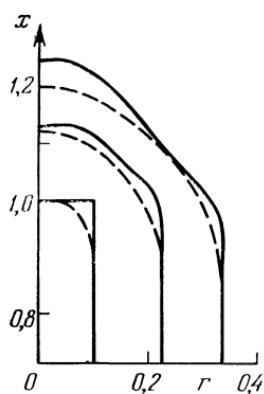


Рис. 39.4.

чем в основном варианте. Наблюдающийся на рис. 39.1 прогиб контактной поверхности связан с воздействием вторичной ударной волны, возникающей в продуктах сгорания заряда. Эта волна, двигаясь к началу координат, не только затормаживает расширяющийся поток газа, но даже изменяет направление его движения. Последнее хорошо видно из рис. 39.2, на котором изображено поле вектора скорости для момента времени  $t = 0,27$ , а вторичная ударная волна нарисована штрих-пунктиром. Отметим, что прогиб контактной поверхности наблюдается вблизи того места, где вторичная ударная волна возникает раньше всего и имеет наибольшую интенсивность. После отражения вторичной волны от окрестности начала координат газ опять начинает расширяться. Достаточно четкое представление о распределении параметров внутри возмущенной области читатель может получить из рис. 39.3, *a, b*, относящегося к тому же случаю. На этом рисунке дано распределение по оси  $x$  давления и плотности, отнесенных соответственно к  $p_1$  и  $\rho_1$ .

Чтобы проиллюстрировать влияние на картину течения формы заряда, на рис. 39.4 для тех же определяющих параметров, что и в примере, описанном выше, дано сравнение головных ударных волн при  $t = 0,006$  и  $t = 0,012$ . При этом сплошные линии соответствуют основному варианту («цилиндрический заряд»), а штри-

ховые — случаю, когда концевая часть «заряда» имеет форму полусферы.

Заканчивая изложение результатов по взрыву несферического заряда, отметим, что в настоящее время отсутствуют публикации, в которых аналогичная задача была бы решена с использованием других разностных схем. Дальнейшим развитием работы [121], цитированной в данном параграфе, явилось исследование [82]. В последнем та же разностная схема была использована для приближенного решения задачи, моделирующей взрыв крупного метеорита вблизи данной поверхности.

## § 40. Некоторые задачи динамики нестационарных течений в каналах

Течение в ударной трубе переменного сечения. Развитие течения в канале воздухозаборника со сверхзвуковым потоком на входе, «замыкающим» скачком уплотнения вблизи сечения минимальной площади и дозвуковым потоком на выходе при изменении параметров в сечении входа или выхода. Динамические процессы в каналах, частично разделенных продольными перегородками. Отражение плоских волн от дозвуковой и трансзвуковой части сопла Лаваля.

В данном параграфе собраны результаты, которые иллюстрируют возможности, открывающиеся при применении разностной схемы § 24 для исследования широкого круга нестационарных течений в каналах (ударных трубах, воздухозаборниках воздушно-реактивных двигателей и соплах). Всюду используется двумерное (как правило, осесимметричное) приближение. Для оценки эффектов двумерности в некоторых случаях проводится сравнение с результатами, полученными в случае, когда по сечению канала (т. е. в направлении оси  $r$ ) бралась одна ячейка. Последний подход представляется тем не менее более полным, чем традиционное одномерное («гидравлическое») приближение, поскольку и в этом случае расчет ведется по двумерной схеме и, в частности, учитывается вертикальная составляющая скорости газа.

Примеры, приводимые ниже, первоначально были получены в работах [42]—[44], [58], [84]. Не останавливаясь на многочисленных деталях, которые читатель может найти в первоисточниках, перейдем к краткому описанию постановок соответствующих задач и к последующему изложению полученных при их численном решении результатов.

Рассмотрение примеров начнем с задачи о нестационарном течении газа в ударной трубе переменного сечения. Указанная задача формулируется следующим образом. Пусть имеется осесимметричная ударная труба конечной длины, состоящая из цилиндрической части и сужающегося-расширяющегося сопла. Цилиндрическая часть разделена перегородкой («мембраной»)

с которой совместим начало цилиндрической системы координат  $x, r, \varphi$ . При  $t \leq 0$  газ во всей трубе покойится, причем  $p_2 > p_1$ ,  $\rho_2 > \rho_1$ , где индексы 1 и 2 приписаны параметрам справа и слева от мембраны, т. е. при  $x > 0$  и при  $x < 0$  соответственно. В согласии с этим после «разрыва» мембранны при  $t = 0$  вправо от нее начнет распространяться ударная волна и поверхность контактного разрыва, а влево — волна разрежения. Дальнейшее развитие течения определяется взаимодействием движущегося газа со стенками сопла и с левым торцом трубы.

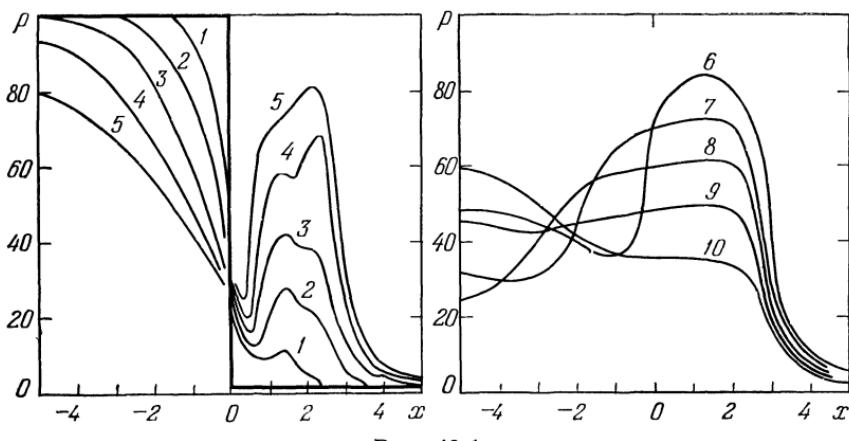


Рис. 40.1.

Ниже приведены некоторые результаты расчета течения в ударной трубе при  $p_2/p_1 = \rho_2/\rho_1 = 100$ . Расчет велся на неподвижной сетке, за характерный линейный размер взят радиус минимального сечения сопла  $r_*$ , а за характерное время  $r_*/c_1$ , где  $c_1$  — скорость звука. На рис. 40.1 для десяти моментов времени  $t \approx 1,4; 2,6; 4,4; 7,2; 9,7; 14,6; 19,7; 23,4; 27,2; 32,3$  приведены кривые распределения давления, отнесенного к  $p_1$ , по стенке трубы (соответствующие кривые отмечены цифрами 1—10 в порядке возрастания  $t$ , ступенька — начальное распределение  $p$ ). Представленные на рисунке результаты получены при использовании четырех ячеек по радиусу трубы. Для оценки влияния двумерности расчет того же варианта был проведен с использованием одной ячейки по радиусу (данное приближение будем называть «квазиодномерным»). На рис. 40.2 для одного из моментов времени изображены кривые распределения давления, полученные из двумерного и квазиодномерного приближений. Сплошная и штрих-пунктирная линии — распределения  $p$  по стенке и оси трубы, найденные из двумерного расчета, штриховая кривая — распределение, полученное в квазиодномерном приближении. В нижней части рисунка жирной сплошной линией проведен контур удар-

ной трубы. Важно отметить, что в отличие от локальных величин интегральные характеристики течения, определенные в двумерном и в квазиодномерном приближениях, различаются в меньшей степени. Иллюстрацией этого может служить рис. 40.3, на котором изображено изменение по времени массы  $m$  газа, находящегося в трубе ( $t$  отнесено к своему начальному значению, сплошная кривая — результат двумерного, а штриховая — одномерного приближения).

Следующие примеры относятся к исследованию динамики течения в каналах воздухозаборников воздушно-реактивных двигателей.

При этом рассматривались каналы двух типов: кольцевые, не разделенные продольными перегородками, и плоские или осесимметричные, имеющие два выхода при одном входе (эта

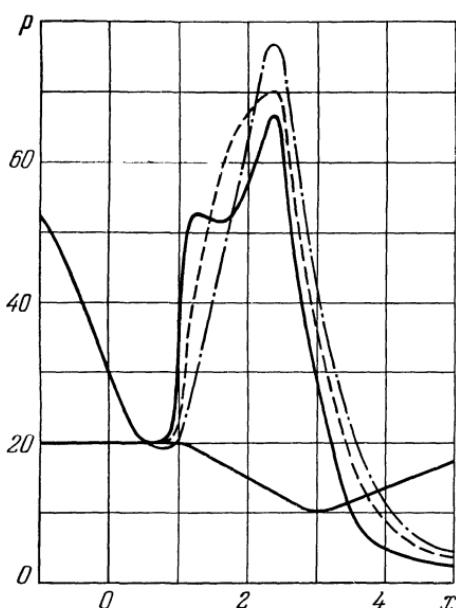


Рис. 40.2.

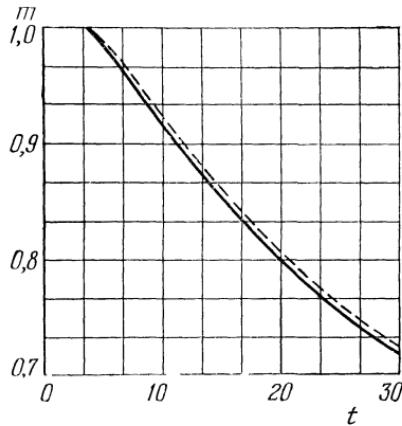


Рис. 40.3.

ситуация имеет место в случае одного воздухозаборника, который работает на два двигателя) и наоборот. Во всех рассматриваемых случаях поток на входе в канал на стационарном режиме предполагается сверхзвуковым. Так как канал воздухозаборника в направлении течения сначала сужается, а затем расширяется, то сверхзвуковой поток на начальном (сужающемся) участке несколько тормозится. Сужение канала подбирается таким, чтобы в сечении минимальной площади поток оставался сверхзвуковым. Поэтому справа от минимального сечения газ вновь начинает разгоняться. Условия на выходе из воздухозаборника не допускают, однако, реализации полностью сверхзвукового течения, что приводит к образованию так называемого «замыкающего» скачка, локализованного в расширяющейся части канала (тече-

ние с замыкающим скачком в сужающемся канале в большинстве случаев неустойчиво [45]). На стационарном режиме локализация скачка происходит таким образом, что дальнейшее торможение дозвукового потока в расширяющемся канале обеспечивает повышение давления в сечении выхода до заданной величины.

В дальнейшем рассматриваются динамические процессы, возникающие из-за изменения условий на входе (при  $x=0$ ) или на

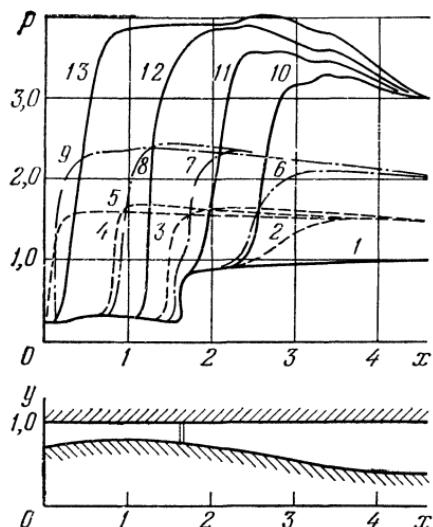


Рис. 40.4.

если рост давления приводит к образованию «обратного тока», то кроме функции  $p_L(t)$  в сечении выхода из канала необходимо задавать также изменение плотности (или температуры) и вертикальной компоненты скорости. Не останавливаясь на дальнейших деталях, которые читатель может найти в работах [42]—[44], перейдем к изложению некоторых результатов расчета.

Рассмотрение примеров начнем с описания нестационарной картины течения в осесимметричном воздухозаборнике с центральным телом при внезапном изменении давления на его выходе на величину  $\Delta p_L$ . Меридиональное сечение канала воздухозаборника изображено в нижней части рис. 40.4, в верхней части которого представлены кривые, дающие распределения давления по координате  $x$  в различные моменты времени для разных значений  $\Delta p_L$ . При этом за масштаб длины взят радиус внешней стенки канала  $r_*$ , давление отнесено к  $\rho_* q_*^2$ , а время — к  $r_*/q_*$ , где  $\rho_*$  и  $q_*$  — критические плотность и скорость на входе в канал (стационарное положение замыкающего скачка здесь и далее дано двойной линией). Кривая 1 отвечает стационарному распределению давления.

На исследуемых режимах последние могут состоять либо в изменении по заданному закону всех параметров в сечении  $x=0$  (предполагается, что в течение соответствующего интервала времени поток на входе остается сверхзвуковым), либо в задании переменного (во времени) давления, а при определенных условиях и других параметров при  $x=L$ . При задании давления  $p=p_L(t)$  на выходе из канала надо иметь в виду два обстоятельства. Во-первых, понижение давления не может превышать (по модулю) величины, соответствующей нестационарному разгону потока до скорости звука. Во-вторых,

если рост давления приводит к образованию «обратного тока», то

Остальные сплошные линии соответствуют  $\Delta p_L = 2$ , штрих-пунктирные —  $\Delta p_L = 1$  и штриховые —  $\Delta p_L = 0,5$ . Во всех рассмотренных случаях в сечении выхода возникал обратный ток. При этом вертикальная компонента скорости  $v_L$  задавалась равной нулю, а температура  $T_L$  полагалась равной  $5/3$  от своего стационарного значения. Кривые 2—13 соответствуют следующим моментам времени (последнее отсчитывалось от момента повышения давления в сечении выхода): 2(1, 7), 3(3, 4), 4(4, 7), 5(6, 0), 6(1, 7), 7(2, 6), 8(3, 4), 9(4, 3), 10(1, 3), 11(1, 7), 12(2, 2), 13(2, 7).

На рис. 40.5 приведены кривые распределения  $p$ , отвечающие закрытию выходного сечения при  $t = 0$  и его последующему открытию при  $t = \Delta t$ . В момент времени  $t = \Delta t$  канал открывается,

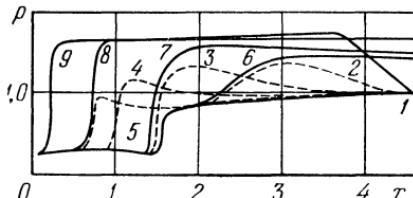


Рис. 40.5.

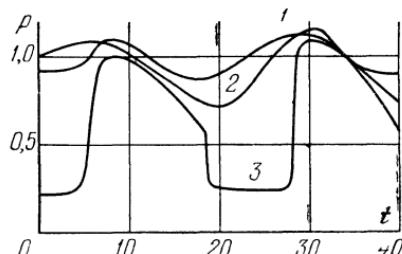


Рис. 40.6.

а давление  $p_L$  полагалось равным своему стационарному значению. Как и в случае рис. 40.4, кривая 1 дает стационарное распределение давления. Прочие сплошные кривые отвечают  $\Delta t = 5$ , а штриховые —  $\Delta t = 1$ . Кривые 2—9 соответствуют следующим моментам времени: 2(2, 1), 3(3, 4), 4(5, 1), 5(6, 4), 6(2, 1), 7(3, 4), 8(5, 1), 9(6, 4).

На рис. 40.6 приведены «осциллограммы» изменения давления в трех сечениях, помеченных на рис. 40.4 теми же цифрами, в случае «гармонического» изменения давления на выходе из канала:  $p_L(t) = 1 + \Delta p_L \sin 2\pi t$  при  $\Delta p_L = 0,1$  и  $\omega = 1/22$ . Интересно отметить весьма быстрое установление периодичности в законе изменения давления по времени (как и в предыдущих случаях, давление в сечении выхода начинает изменяться в момент  $t = 0$ ). Интенсивное изменение  $p$  в сечении 3, которое дает кривая 3, обусловлено колебанием замыкающего скачка уплотнения.

Следующие примеры иллюстрируют возможности метода при расчете нестационарных течений в каналах с продольной перегородкой на концевом или на начальном участке. На рис. 40.7 для нескольких моментов времени (цифры около кривых) показаны кривые распределения давления по координате  $x$ . Исследуемый канал получался из рассмотренного в предыдущем примере добавлением перегородки длины  $l$ , как это показано в нижней

части рисунка. Начало отсчета времени совпадало с моментом внезапного изменения давления в сечении выхода нижнего канала на величину  $\Delta p$ . При  $0 < t < \Delta t$  давление в указанном сечении поддерживалось постоянным, а затем также внезапно падало до своей первоначальной величины. В выходном сечении верхнего

канала давление при  $t > 0$  определялось из условия постоянства среднего по сечению числа Маха. Заметим, что хотя в данных примерах указанное условие всегда удавалось выполнить, однако возможны ситуации, для которых изменение давления в выходном сечении не позволяет сохранить среднее число Маха постоянным.

Кривые  $p = p(x, t)$ , представленные в верхней части рис. 40.7, отвечают  $\Delta p = 1$ ,  $\Delta t = 3$  и двум значениям длины разделяющей перегородки. Сплошные и штриховые линии соответствуют  $l = 2$ , а пунктирная —  $l = 0,5$ . Из них пунктирная и сплошные кривые дают распределение  $p$  у нижней, а штриховые — у верхней стенки. Для

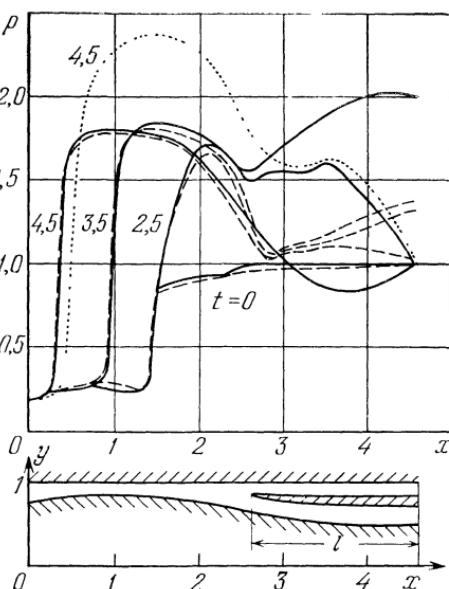


Рис. 40.7.

оценки точности расчет тех же вариантов был выполнен с четырехкратным уменьшением общего числа ячеек (в два раза по каждой из переменных  $x$  и  $r$ ). Различие полученных результатов таково, что погрешности в определении зависимостей, изображенных на рис. 40.7, лежат в пределах точности их графического представления.

Следующие два рисунка относятся к течению в симметричном плоском воздухозаборнике, начальный участок которого разделен центральным телом. Рассматриваемый канал показан на рис. 40.8, где, кроме того, двойными линиями изображены замыкающие скачки на стационарном режиме. На стационарном режиме  $x$ -компоненты скорости во входных сечениях обоих каналов  $u(0, y) \approx \approx 1,6q_*$ , а давление в плоскости выхода  $p(L, y) = 0,86p_*q_*^2$ , где  $p_*$  и  $q_*$  определены так же, как и в предыдущих примерах. За характерный линейный размер взята половина высоты канала в сечении выхода  $H$ , а за характерное время  $H/q_*$ .

В момент времени  $t = 0$  в начальном сечении (т. е. при  $x = 0$ ) нижнего канала задавалось внезапное повышение давления. Приращения других параметров в этом сечении находились по соот-

ношениям на ударной волне, движущейся вправо и перпендикулярной оси  $x$ . Действие такого постоянного возмущения ограничивалось временем  $t \leq \Delta t$ . При  $t = \Delta t$  все параметры в сечении  $x = 0$  скачком возвращались к своим исходным (стационарным) значениям и далее поддерживались постоянными. Граничное условие в сечении  $x = L$  бралось таким же, как на выходе из верхнего канала в предыдущем примере, т. е. фиксировалось среднее по сечению число Маха.

На рис. 40.9 сплошными кривыми даны траектории замыкающих скачков в нижнем (кривая 1) и в верхнем (кривая 2) каналах

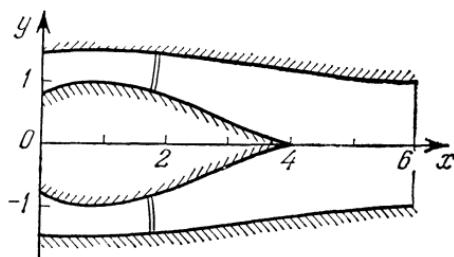


Рис. 40.8.

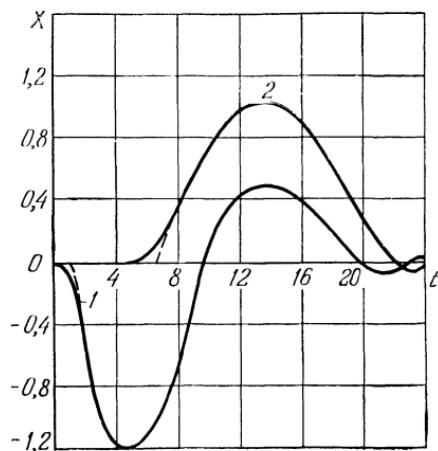


Рис. 40.9.

при наличии возмущения на входе в нижний канал (увеличения давления в 1,7 раза при  $\Delta t = 2$ ). По оси ординат отложено смещение скачка  $X = x_{se} - x_s$ , где  $x_s$  и  $x_{se}$  — текущая и стационарная абсциссы средней точки замыкающего скачка. Следует помнить, что из-за эффекта «размазывания» разрывов моменты начала взаимодействия возмущений с замыкающими скачками оказываются несколько более ранними, чем в действительности (близкое к правильному поведение начальных участков соответствующих кривых дано на рисунке штриховыми линиями).

Для объяснения поведения кривых, изображенных на рис. 40.9, существенно, что замыкающие скачки движутся относительно газа влево. Напротив, ударная волна, пришедшая на вход в канал, движется по газу вправо, приводя к увеличению скорости (и числа Маха) течения за ней. В результате замыкающий скачок также начинает сноситься вправо (этому отвечает участок отрицательных, растущих по модулю значений  $X$  на кривой 1). Ударная волна, идущая по нижнему каналу вправо быстрее, чем замыкающий скачок, в результате дифракции на кромке центрального тела ослабляется, порождая волну разрежения в нижнем канале и ударную волну — в верхнем, которые распространяются вверх по потоку. При  $t \approx 6$  ударная волна взаимодействует

с замыкающим скачком в верхнем канале, вызывая его движение к сечению входа в канал.

Волны разрежения, распространяющиеся в нижнем канале от кромки центрального тела, а также от сечения входа, где они появляются в момент  $t = \Delta t = 2$ , замедляют движение замыкающего скачка в нижнем канале, а затем меняют его направление. В результате этого при  $11 < t < 18$  этот скачок оказывается ближе к сечению входа, чем в стационарном положении. После взаимодействия с нижним замыкающим скачком и последующей дифракции на кромке волна разрежения, пришедшая от входа нижнего канала, попадает в верхний канал, изменяя и здесь направление движения замыкающего скачка. Начиная

$t \approx 20$  оба замыкающих скачка, совершая небольшие колебания, достаточно быстро релаксируют к своему начальному стационарному положению. Подчеркнем, что время  $t \approx 20$ , в течение которого в канале наблюдаются значительные возмущения параметров, на порядок превышает не только время действия ( $\Delta t = 2$ )

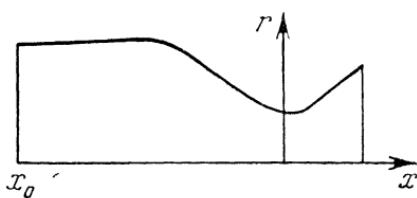


Рис. 40.10.

несимметричного внешнего возмущения при  $x = 0$ , но и время  $t \approx 3$ , которое необходимо возмущению, чтобы достигнуть выходного сечения.

В качестве последнего примера приведем некоторые результаты решения задачи об отражении плоской «синусоидальной» волны Римана от дозвуковой и трансзвуковой частей сопла Лаваля [84]. Указанная задача формулируется следующим образом. Рассмотрим осесимметричное сопло Лаваля, которое плавно примыкает к цилиндрической трубе, как это показано на рис. 40.10. Со стороны трубы к соплу могут приходить нестационарные возмущения. Эти возмущения, частично отражаясь от дозвуковой и трансзвуковой частей сопла, будут распространяться вверх по потоку. Ограничимся случаем, когда возмущения, приходящие к соплу слева (газ, как и ранее, течет слева направо), — продольные волны. Параметры, характеризующие эти волны, будем считать известными функциями времени в некотором сечении «входа в сопло»  $x = x_0 < 0$ . Последнее выберем на достаточном удалении от начала сужающегося участка так, чтобы в этом сечении отраженные волны были близки к плоским (т. е. при  $x = x_0$  параметры в отраженной волне зависели бы, как и в приходящей, только от времени и практически не зависели от координаты  $r$ ). Параметрам потока в сечении входа будем приписывать нижний индекс нуль. В силу выбора входного сечения и вида приходящих возмущений последние полностью определяются заданием двух функ-

ций: правого инварианта Римана

$$\mathcal{I}_0^+ = \mathcal{I}_0^+(t), \quad \text{где} \quad \mathcal{I}^+ = u + 2c/(x-1),$$

и энтропии, или отношения

$$(p/\rho^\infty)_0 = S_0(t).$$

Параметрам невозмущенного (стационарного) потока при  $x = x_0$  припишем нижний индекс  $\infty$ . В дальнейшем энтропийные волны рассматриваться не будут. Поэтому  $S_0(t) \equiv S_\infty$ , где  $S_\infty$  — известная константа, величина которой определяется принятым способом обезразмеривания переменных.

Наряду с  $\mathcal{I}^+$  рассмотрим левый инвариант Римана

$$\mathcal{I}^- = u - 2c/(x-1),$$

который на достаточном удалении от сопла полностью характеризует отраженную волну, распространяющуюся влево. Задача отражения состоит в том, чтобы определить, как приходящее слева возмущение правого инварианта Римана отражается от сопла в виде возмущения левого инварианта.

В дальнейшем рассмотрим случай, когда  $\mathcal{I}_0^+(t)$  при  $t \geq 0$  изменяется по «синусоидальному» закону, т. е.

$$\mathcal{I}_0^+(t) = \mathcal{I}_\infty^+ + \Delta \mathcal{I}_0^+ \sin \omega t,$$

где  $\mathcal{I}_\infty^+$  — константа, определяемая по стационарным значениям параметров,  $\Delta \mathcal{I}_0^+$  — амплитуда и  $\omega$  — частота приходящего возмущения. Некоторые результаты расчета, выполненного для такого закона изменения  $\mathcal{I}_0^+(t)$  при  $\Delta \mathcal{I}_0^+/\mathcal{I}_\infty^+ = 0,03$ , приведены на двух последних рисунках. Эти результаты относятся к соплу, контур которого был образован отрезками прямых и дуг окружностей и обеспечивал четырехкратное уменьшение площади поперечного сечения (подробности см. в [84]). Отметим, что принятой амплитуде колебания  $\mathcal{I}_0^+$  соответствуют колебания скорости в сечении  $x = x_0 = -4$ , достигающие 70%, и колебания давления, достигающие 10—20%. Здесь и далее за характерный размер принят радиус минимального сечения сопла.

На рис. 40.11, *a*, *b* для данного сопла и двух частот (частота отнесена к  $q_*/r_*$ , а время — к  $r_*/q_*$ ) приведены осциллограммы колебания возмущения левого инварианта Римана  $\Delta \mathcal{I}_0^- = \mathcal{I}_0^-(t) - \mathcal{I}_\infty^-$

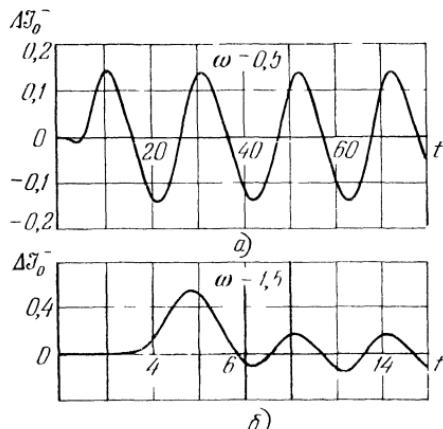


Рис. 40.11.

в сечении  $x = x_0$ . Величина  $\Delta \mathcal{I}_0^-$  отнесена к  $q_*$ . Видно, что выход на «установившийся» колебательный режим происходит после некоторого переходного процесса, продолжительность которого (отнесенная к периоду колебания  $2\pi/\omega$ ) растет с увеличением частоты. В случае сравнительно низкой частоты ( $\omega = 0,5$ ) уже первое отраженное колебание близко к установившемуся. С ростом  $\omega$  отличие формы первой отраженной волны от формы, характерной для установившегося режима, усиливается, причем первое отражение оказывается значительно более интенсивным.

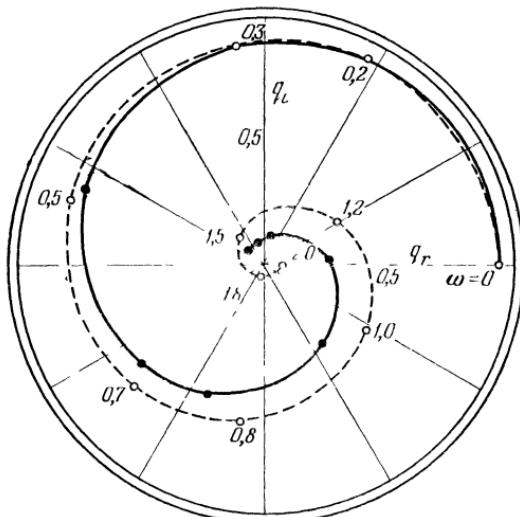


Рис. 40.12.

На установившемся режиме отражение возмущений принято описывать коэффициентом отражения  $q = (\Delta \mathcal{I}^- / \Delta \mathcal{I}^+)_0$ . Так как  $\Delta \mathcal{I}^-$  отличается от  $\Delta \mathcal{I}^+$  не только по амплитуде, но и по фазе, то удобно считать  $q$  комплексным числом:  $q = q_r + iq_i$ , действительная и мнимая части которого характеризуют оба указанных эффекта. В соответствующей комплексной плоскости результаты выполненных расчетов представлены на рис. 40.12 сплошной кривой и темными кружочками. Штриховой линией и светлыми кружочками для сравнения приведены результаты одномерной линейной теории, развитой в работе [86]. Цифры около светлых кружков — значения  $\omega$ . Темные кружки на сплошной кривой отвечают тем же частотам, причем для  $\omega = 0$  и  $\omega = 0,2$  темные и светлые кружки практически совпадают. Видно, что отличие результатов численного интегрирования двумерных квазилинейных уравнений от результатов одномерной линейной теории с ростом частоты увеличивается.

Заканчивая рассмотрение задач, связанных с исследованием динамики течения в каналах, отметим следующее. К настоящему времени разностная схема § 24 нашла чрезвычайно широкое распространение при решении весьма разнообразных задач подобного типа. С другой стороны, аналогичные результаты, полученные другими методами, крайне немногочисленны (как один из примеров таких исследований укажем на работу [147], в которой динамика течения в воздухозаборнике в одномерном приближении исследовалась по схеме П. Лакса). Такое положение лишний раз свидетельствует о достоинствах использованной выше разностной схемы.

### § 41. Распространение ударной волны по проводящему газу в круглой трубе при наличии меридионального магнитного поля

Использование подвижной сетки, связанной с ударной волной. Эффект ускорения ударной волны, обусловленный двумерным характером течения. Сопоставление с выводами одномерного приближения.

Ниже приведены некоторые результаты расчета двумерного нестационарного течения проводящего газа в круглой трубе при наличии приложенного извне меридионального магнитного поля. Последнее создается токовым витком радиуса  $R > 1$ , соосным с осью трубы (здесь за характерный линейный размер принят радиус трубы  $r_*$ ). Магнитные числа Рейнольдса предполагаются малыми, что позволяет пренебречь индуцированным полем. В силу этого магнитное поле совпадает с полем токового витка и, следовательно, может считаться заданным. Так как магнитное поле токового витка весьма быстро затухает при удалении от плоскости витка  $x = 0$ , то будем считать, что оно отлично от нуля лишь на участке канала  $-X < x < X$ , где  $X$  — заданное положительное число. Рассматриваемая задача формулируется следующим образом.

Пусть по трубе движется ударная волна, справа от которой газ покоятся, а слева имеет постоянные (до взаимодействия с магнитным полем) параметры. В момент времени  $t = 0$  ударная волна достигает сечения  $x = -X$ , после чего начинается взаимодействие движущегося за ударной волной потока с магнитным полем. Можно показать, что в осесимметричном течении, находящемся в меридиональном магнитном поле, при отсутствии эффекта Холла возникают замкнутые электрические токи, соосные оси трубы. При этом плотность электрического тока, как функция  $x, r, t$ , полностью определяется локальными параметрами, которые характеризуют течение и магнитное поле в рассматриваемой точке плоскости  $x, r$  в данный момент времени (в рассматриваемом приближении принимается, что установление электрических па-

раметров происходит мгновенно). Взаимодействие указанных токов с компонентами  $B_x$  и  $B_r$  вектора напряженности магнитного поля  $\mathbf{B}$  приводит к появлению силы  $\mathbf{F}$ , действующей на газ. Последняя, как и  $\mathbf{B}$ , лежит в меридиональной плоскости  $x, r$ . Кроме прямого силового воздействия поля на поток имеет место эффект «джоулевой диссипации энергии», приводящей к росту внутренней энергии газа за счет кинетической или, что то же,—к увеличению его энтропии.

Взаимодействие потока с магнитным полем ведет к эволюции течения, вызывая деформацию головной ударной волны, появление вертикальной компоненты скорости, и к изменению прочих параметров газа. Степень воздействия поля на поток определяется параметром магнитогидродинамического взаимодействия  $S = \sigma_* B_*^2 r_* \times \times (\kappa - 1) / (\rho_1 (\kappa + 1) D_*)$ , где  $\sigma_*$  и  $B_*$ —характерные величины с размерностью удельной электропроводности и напряженности магнитного поля,  $D_*$ —невозмущенная скорость ударной волны, а  $\rho_1$ —плотность покоящегося газа. Область возмущенного течения ограничена как слева, так и справа. Правой ее границей всегда является ударная волна, которую будем называть головной. Что будет ее левой границей, зависит от числа Маха невозмущенного потока  $M_0$  за головной волной. При  $M_0 > 1$  область возмущенного течения ограничена слева либо сечением  $x = -X$ , либо ударной волной, распространяющейся вверх по потоку. Последняя, возникнув в области взаимодействия, в некоторый момент времени  $t > 0$  может пересечь сечение  $x = -X$ , как это описано, например, в [158]. При  $M_0 < 1$  левой границей в течение некоторого времени после начала взаимодействия будет характеристика второго семейства (звуковая волна, распространяющаяся по газу влево). Впоследствии и в этом случае левой границей может стать ударная волна, возникшая внутри или на границе возмущенной области [75], [158].

Некоторые дополнительные детали постановки рассматриваемой задачи читатель может найти в статье [20], в которой, кроме того, проведен анализ, основанный на линеаризации по параметру  $S$ , осреднении по площади поперечного сечения канала и на последующем интегрировании одномерных нестационарных уравнений методом характеристик. Не останавливаясь на указанных деталях, перейдем к описанию результатов, которые овещают течению газа с постоянной электропроводностью  $\sigma = \sigma_*$ . Соответствующие результаты Н. П. Исаковой были получены при помощи варианта разностной схемы § 24 для подвижной расчетной сетки. Продольные (прямолинейные) границы сетки были фиксированы и делили канал на полосы равной высоты. В каждый момент времени поперечные границы разностной сетки (в том числе ее левая граница, которая располагалась вне возмущенной области) брались конгруэнтными головной ударной волне

и деформировались одинаковым образом, как это показано на рис. 41.1. В начальный момент времени ( $t = 0$ ) вся разностная сетка располагалась слева от сечения  $x = -X$  и состояла из одинаковых прямоугольных ячеек. В силу выбора закона движения продольных границ площадь ячеек оставалась неизменной и в дальнейшем.

Некоторые результаты расчетов приведены на рис. 41.2—41.4, которые отвечают  $S = 10$ ,  $R = 2$ ,  $X = 5$ ,  $D_*/c_1 = 10$  и  $M_0 = 1,83$ .

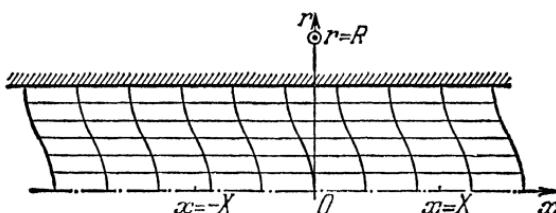


Рис. 41.1.

В представленных примерах в качестве  $B_*$  при вычислении  $S$  бралось значение осевой компоненты магнитного поля в центре токового витка ( $x = r = 0$ ). На рис. 41.2 сплошными линиями приведены меридиональные сечения головной ударной волны через равные промежутки времени  $\Delta t = 1$ , начиная с момента  $t = 0$ , причем за единицу времени взято  $t_* = r_*/D_*$ . На том же рисунке штриховыми прямолинейными отрезками даны «средние» скачки, т. е. неисправленные скачки, абсциссы которых получались для тех же  $t$  осреднением по площади канала. Видно, что на значительном участке трубы профиль головной волны заметно отличается от плоского, по крайней мере в области ненулевого магнитного поля.

Искривление волн обусловлено отличием скоростей различных ее участков. Это демонстрирует рис. 41.3, на котором для нескольких моментов времени (цифры около кривых) приведено распределение по  $r$  скорости  $D_*$  перемещения фронта головной ударной волны в направлении оси  $x$ . Представленные результаты свидетельствуют о существенно двумерном характере течения. Отмеченное выше влияние двумерности приводит к интересному качественному эффекту, который не предсказывает одномерное приближение, основанное на осреднении по площади поперечного сечения канала. В согласии с этим приближением [20] распространение по трубе ударной волны сопровождается ее непрерывным торможением. В двумерном приближении этот вывод оказывается несправедливым. Последнее видно из рис. 41.4, где сплошной кривой дано изменение  $\langle D_* \rangle$  по времени (здесь, как и в [20], знаком  $\langle \rangle$  обозначена функция, полученная осред-

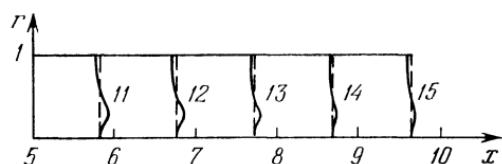
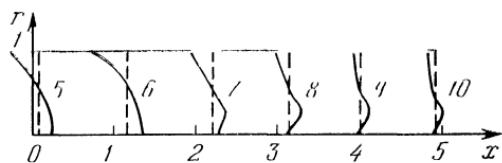
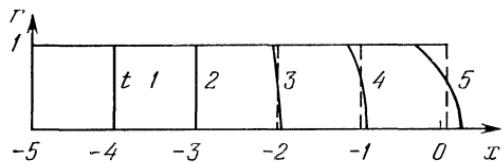


Рис. 41.2.

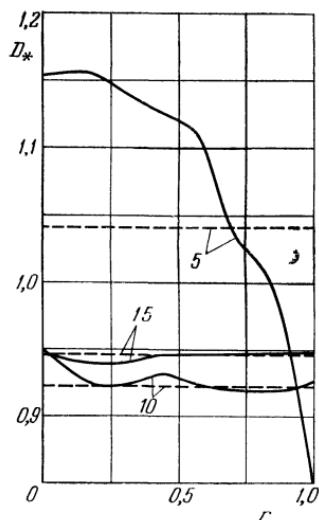


Рис. 41.3.

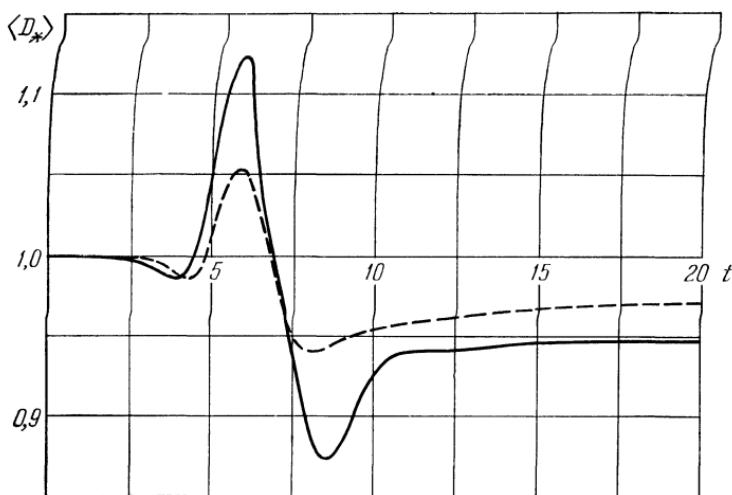


Рис. 41.4.

нением результатов двумерного расчета по площади поперечного сечения канала). Тот же эффект сохраняется и для меньших  $S$ . Для  $S=5$  и неизменных прочих параметров соответствующая кривая дана на рис. 41.4 штрихами.

## § 42. Расчет соударения металлических пластин (сварка взрывом)

Постановка задачи. Выбор тактики расчета. Анализ полученных результатов.

Остановимся на некоторых аспектах интересной задачи о сварке металлов посредством взрыва [49]. Мы расскажем о расчетах, выполненных для выяснения ряда обстоятельств, связанных с процессом соударения пластин, и на этом примере с помощью средств, описанных в гл. IV, рассмотрим вопросы учета априорной информации, построения формализованного описания картины течения, выбора тактики расчета.

Словом, основным в нашем изложении будут не сами результаты расчетов, которых мы только коротко коснемся, а то, как они получены. Толкование последних, сопоставление их с экспериментальными данными и аналитическими рассмотрениями линеаризованной задачи приведено в работе [138].

При метании металлических образцов друг на друга, последние разгоняются в процессе детонации взрывчатых веществ (ВВ), и скорости их к моменту сближения достигают величин до 0,5 км/сек и выше. Возникающее при соударении давление значительно превышает динамические пределы прочности соударяющихся материалов. Поэтому в первом приближении можно пользоваться гидродинамической моделью, в которой давление  $p$ , внутренняя энергия  $\epsilon$  и плотность  $\rho$  связаны соотношением вида

$$p = (\kappa - 1) \rho \epsilon + (\rho - \rho_0) c_0^2,$$

где  $\rho_0$ ,  $c_0$  — плотность и скорость звука в «холодном» веществе. В нашем случае такими веществами были медь ( $\rho_0 = 8,93 \text{ г}/\text{см}^3$ ,  $c_0 = 3,97 \text{ км}/\text{сек}$ ) и железо ( $\rho_0 = 7,87 \text{ г}/\text{см}^3$ ,  $c_0 = 5,0 \text{ км}/\text{сек}$ ). В постановке конкретных расчетов мы старались придерживаться тех условий и значений параметров, при которых проводились эксперименты. Были рассчитаны два варианта. Первый — в условиях, когда в реальном эксперименте сварка не осуществилась. Во втором — металлы после соударения оказались сваренными.

Обе задачи рассматривались в плоском приближении.

В сечении на плоскости пространственных переменных  $x$ ,  $y$  каждый из образцов представлял собой прямоугольник. Медный — был довольно тонкой пластинкой, которая под некоторым углом  $\gamma$  металась на неподвижный образец — мишень

(рис. 42.1). Здесь мы не будем касаться процесса разгона посредством детонации ВВ, а будем считать, что в начальный момент распределения гидродинамических величин в метаемой пластине и форма ее заданы.

Одним из необходимых условий сварки, полученных экспериментально, является осуществление такого режима, когда геометрическая точка контакта соударяющихся образцов перемещается со скоростью, меньшей по сравнению со скоростями звука в них. Осуществлять дозвуковой или сверхзвуковой режимы движения точки контакта можно, варьируя скорость  $W_0$  и угол метания  $\gamma$ . Во время расчета сверхзвукового случая было установлено, что возникающие при соударении ударные волны, отражаясь от внешних границ пластин, превращаются в волны разрежения, которые, выходя на контакт металлов, вызывают в нем разрывающие усилия, препятствующие сварке. Это явление, по-видимому, и объясняет отсутствие сварки при сверхзвуковой скорости точки контакта.

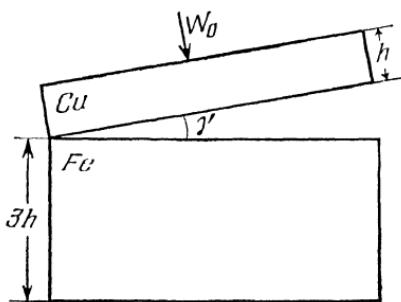


Рис. 42.1.

Наиболее интересным оказался результат анализа расчета дозвукового соударения, который подробно изложен в упомянутой работе [138].

Одним из наиболее важных выводов этого анализа оказался ме-

ханизм образования затопленной струи на поверхности контакта. Дело в том, что, обычно при гидродинамических столкновениях образуются кумулятивные струи, интегральные характеристики которых определяются законом сохранения импульса. При взрывной сварке такие струи наблюдаются далеко не всегда, что обычно объяснялось их неустойчивостью. Наличие же струй сомнению не подвергалось, так как без них, казалось, нельзя удовлетворить закону сохранения импульса.

В процессе расчетов грубость разностной сетки не позволяла выделить и рассчитать струи, даже если бы они и существовали. Но, несмотря на это, конструкция описанной выше разностной схемы автоматически обеспечивает сохранение массы, импульса и энергии. Анализ того, как обеспечивается сохранение импульса при отсутствии струй в расчете привел авторов [138] к заключению, что «разностная вязкость», обусловленная погрешностью аппроксимации схемы, вызывает эффект замедления узкого слоя металла, примыкающего к контактному разрыву. Этот эффект получил название затопленной струи. Еще раз подчеркнем, что в расчете течения по модели идеальной жидкости он был вызван

чисто вычислительными причинами — погрешностью аппроксимации.

Несмотря на это, обсуждение вопроса о затопленной струе привело к мысли, что она существует и в реальных процессах сварки. В этом случае она должна быть обязана своим существованием реальной вязкости металлов. Специально поставленные эксперименты подтвердили вывод о наличии затопленной струи. В дальнейшем на основании закона сохранения импульса и теории этой струи был разработан метод измерения вязкости металлов при скоростных соударениях. Подробнее с описанным явлением можно ознакомиться также по книге [87].

Ограничиваюсь здесь приведенной краткой информацией о выводах, которые были сделаны из расчета, опишем некоторые важные на наш взгляд элементы тактики его организации.

Требование адаптируемости численного алгоритма к особенностям решения, особенно при наличии различных физических веществ, приводит к необходимости учитывать в расчете детали геометрии. Так мы и поступили, связав в каждый момент времени конфигурацию границ соударяющихся пластин с координатными линиями криволинейной системы координат.

Некоторое время (до тех пор, пока метаемая пластина не достигнет мишени) они между собой не взаимодействуют. Но как только начинается процесс соударения, произойдет перестройка картины движения.

Следовательно, вычислительный метод должен обладать возможностями перестройки, заложенной в начальных данных структуры решения. В данном случае удобно использовать механизм смены граничных условий, используя возможности, о которых было упомянуто в § 28.

Учитывая сказанное, структуру рассматриваемой задачи следует описать таким образом.

Метаемая пластина (рис. 42.2) объявляется ярусом I, неподвижная — ярусом II. За левую, правую, нижнюю и верхнюю границы каждого из ярусов принимаются соответствующие стороны пластин. Нижняя граница верхнего яруса I и верхняя граница яруса II описываются как соседние. Это значит, что в процессе движения они могут взаимодействовать. В зависимости от того, находятся ли участки этих границ в соприкосновении или нет, вид граничного условия будет меняться. Это либо контактная, либо свободная поверхность. Именно этот факт и будет отражен при задании типа границ. (Фактически, это использо-

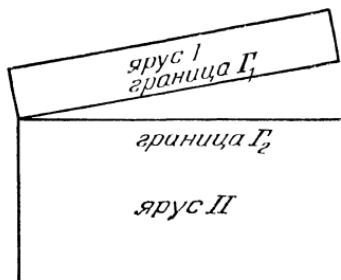


Рис. 42.2.

вание той априорной информации, которой в данном случае располагаем.) Рассмотрим, как в нашем вычислительном методе осуществляется в подобных случаях отбор того или другого граничного условия.

Согласно описанию структуры задачи, каждая из счетных границ должна характеризоваться своим номером, числом счетных точек, законом их расстановки и типом.

Пусть нижняя граница первого яруса имеет номер  $\Gamma_1$ , а верхняя граница второго яруса — номер  $\Gamma_2$ . В описании структуры также указывается, что соседней к границе  $\Gamma_1$  будет граница  $\Gamma_2$ , и наоборот. Это означает, что эти, и только эти, границы могут взаимодействовать друг с другом.

Алгоритм расчета взаимодействующих границ функционирует следующим образом.

По всем счетным границам, в том числе и по взаимодействующим, заданы на момент  $n$ -го временного шага координаты точек, определяющих положение границ и значения гидродинамических величин на каждом ребре счетной границы.

Пусть нам предстоит рассчитать положение границы  $\Gamma_1$  и относящиеся к ней значения гидродинамических величин на следующий временной шаг  $n+1$ . Выбирая поочередно ребра границы  $\Gamma_1$  на временном шаге  $n$ , осуществляем для каждого из них следующую процедуру.

Проведем через середину ребра внешнюю нормаль и проверим, не пересекает ли она какого-либо из ребер границы  $\Gamma_2$ . Если нет, то рассматриваемое ребро границы  $\Gamma_1$  с границей  $\Gamma_2$  не испытывает взаимодействия, и значения гидродинамических величин, относящихся к нему, на следующий временной шаг определяются из граничного условия: давление равно нулю («свободная граница»), с привлечением гидродинамических величин из счетной ячейки яруса  $I$ , примыкающей к этому ребру. Если пересечение с неким ребром границы  $\Gamma_2$  произошло, то определяем расстояние от точки пересечения до основания внешней нормали. Если оно больше заданного числа  $\Delta$ , то полагаем, так же как и в первом случае, что на данном шаге рассматриваемое ребро с границей  $\Gamma_2$  не взаимодействует.

При обратном знаке неравенства полагаем, что взаимодействие происходит. В этом случае для определения граничных величин мы используем соотношения на контактном разрыве. Акт соударения при этом рассчитывается с учетом взаимного расположения взаимодействующих ребер по значениям гидродинамических величин из двух счетных ячеек, каждая из которых примыкает к соответствующему ребру. Полученные значения гидродинамических величин относятся к середине рассматриваемого ребра границы и полагаются постоянными на протяжении одного временного шага.

Аналогично описанному поступаем с каждым ребром границы  $\Gamma_2$ . Определив значения гидродинамических величин по каждому из ребер границ  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , мы, пользуясь, например, значениями компонент нормальной скорости вещества, вычислим по каждой из границ положение координат граничных точек на следующий момент времени. При этом, вместо единой контактной поверхности, мы получим две линии, каждая из которых является частью счетной границы своего яруса. Однако, соударяющиеся участки границ  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  будут находиться друг от друга на расстоянии порядка  $\Delta$ . Подбирая  $\Delta$  сообразуясь с шагами разностной сетки, мы не нарушим первого порядка аппроксимации.

Описанный прием переносится на случай расчета взаимодействия ударной волны с контактным разрывом, двух ударных волн и т. д. При этом счетный алгоритм будет отличаться только формулами, а вся логика вычислений остается неизменной.

В заключение мы отметим, что описанные расчеты выполнялись по варианту, когда гидродинамические величины на промежуточном слое («большие» величины) вычислялись по неявной схеме, описанной в § 35. Число счетных ячеек в ярусе I было 10 (по вертикальному направлению) и 60 (по горизонтальному). Соответственно, в ярусе II — 15 × 60. Во втором ярусе сетка измельчалась в направлении к верхней границе. На рис. 42.3 изображено положение пластин на один из текущих моментов расчета (вариант дозвукового режима движения точки контакта).

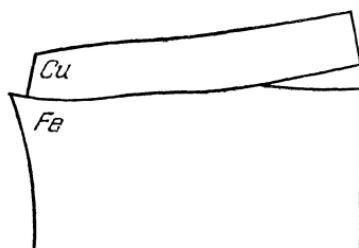


Рис. 42.3.

## Г л а в а VI

### **РАСЧЕТ СМЕШАННЫХ ТЕЧЕНИЙ МЕТОДОМ УСТАНОВЛЕНИЯ**

Во многих задачах стационарной газовой динамики течение является «смешанным» в том смысле, что в потоке имеются области как дозвуковых, так и сверхзвуковых скоростей. Данное обстоятельство существенно усложняет расчет, во-первых, в силу принципиального различия методов численного интегрирования систем гиперболического и эллиптического типов и, во-вторых, из-за того, что границы указанных областей заранее не известны и должны находиться в процессе расчета. Один из возможных способов решения смешанных задач состоит в рассмотрении их как нестационарных и использовании процесса установления по времени. При этом чрезвычайно сложные эллиптико-гиперболические краевые задачи заменяются смешанными задачами для гиперболической системы уравнений нестационарной газовой динамики. Последние, несмотря на увеличение (за счет введения времени) числа независимых переменных во многих случаях оказываются более простыми (с точки зрения построения численного алгоритма), чем исходные стационарные задачи. Данное обстоятельство привело к тому, что процесс установления нашел весьма широкое распространение при решении смешанных стационарных задач. Важным упрощающим моментом решения задач на установление является то, что здесь требуется не картина эволюции течения во времени (заметим кстати, что задание начальных распределений, как правило, бывает при этом весьма произвольным), а лишь окончательные, т. е. стационарные, поля параметров. Это позволяет применять такие ускоряющие расчет приемы, как использование своего (в каждой точке потока) шага по времени. Данный прием, особенно эффективный в тех случаях, когда для решения приходится применять существенно неравномерную разностную сетку, сближает метод установления с релаксационными методами, которые в последнее время также все шире применяются при расчете смешанных течений. Некоторые результаты расчета смешанных течений с использованием процесса установления и разностных схем гл. II и III приведены в настоящей главе.

Отметим, что предложение о целесообразности использования процесса установления для расчета стационарных задач, описываемых уравнениями смешанного типа, было высказано И. Г. Петровским. Его численная реализация на примере расчета обтекания сферы сверхзвуковым потоком, по-видимому, впервые была осуществлена в работе [37]. К настоящему времени использование такого приема стало уже классическим. На примере уравнения Лапласа и уравнения теплопроводности связь между стационарной и нестационарной задачами исследовалась в 30-х годах А. Н. Тихоновым.

### § 43. Прямая задача теории двумерных сопел Лаваля

Постановка задачи в случае сопла, примыкающего к полубесконечной цилиндрической трубе, и для сопла с «замкнутым» контуром. Течение в соплах различных типов (классическом сопле Лаваля и в сопле с центральным телом). Расчет закрученного и неизэнтропического потока в соплах и влияние эффектов закрутки и переменности энтропии на форму звуковой линии. Решение прямой задачи о течении проводящего газа в осесимметричном сопле Лаваля при наличии меридионального магнитного поля.

В качестве первой иллюстрации использования процесса установления для расчета смешанных течений газа рассмотрим прямую задачу теории сопла Лаваля. В указанной задаче требуется построить течение в плоском или осесимметричном сопле фиксированной формы при заданных распределениях энтропии и полной энтальпии на его входе (теоретически при  $x = -\infty$ ) и известном давлении  $p_e$  среды, в которую происходит истечение газа. Основной интерес представляют режимы течения с переходом в окрестности минимального сечения сопла ( $x = 0$ ) через скорость звука. Для этих режимов расход газа, а также распределения параметров, по крайней мере в некоторой окрестности минимального сечения сопла, не зависят от  $p_e$ . Приводимые ниже результаты были получены с использованием разностной схемы, описанной в § 24, в работах [62], [63] и являлись либо первыми, либо одними из первых решений соответствующих задач.

Итак, пусть идеальный газ течет в плоском или осесимметричном сопле, контур которого изображен на рис. 43.1 жирной линией. В соответствии со сказанным выше, уравнения образующей, удаленной от оси симметрии:  $r = r_+(x)$ , и образующей центрального тела:  $r = r_-(x)$  — считаются заданными (для классического сопла Лаваля  $r_-(x) \equiv 0$ ). Контуры дозвуковых частей сопел либо разомкнуты (сопло примыкает к полубесконечной цилиндрической трубе), либо замкнуты. В первом случае энтальпия торможения  $i_0$  и энтропия  $S$  (или некоторая ее функция) считаются при  $x \rightarrow -\infty$  известными функциями  $r$ . При этом на стационарном режиме при больших отрицательных  $x$  реализуется слоистое

течение. В последнем параметры зависят только от  $r$ , давление  $p \equiv p_0 = \text{const}$ , а вертикальная компонента скорости отсутствует ( $v \equiv v_0 = 0$ ). Во втором случае (для сопла с замкнутым контуром) течение осуществляется за счет объемных источников массы и энергии, которые вводятся в некоторой фиксированной области дозвуковой части сопла и имитируют процесс испарения и последующего горения топлива, подаваемого в камеру сгорания реактивного двигателя. При сверхкритических перепадах давления в сопле расход газа в первом случае или давление в камере во втором определяются течением в окрестности минимального сечения сопла и находятся в процессе решения задачи.

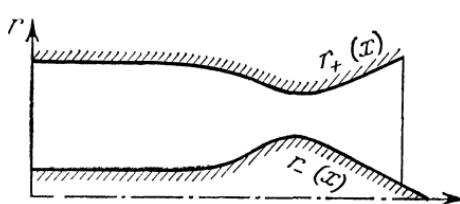


Рис. 43.1.

Если перепад ниже критического (в данном случае под критическим понимается перепад, при котором сопло «запирается»), то указанные параметры оказываются зависящими от  $p_e$ , хотя в потоке могут появляться местные сверхзвуковые зоны.

Прежде чем переходить к изложению результатов, остановимся на вопросе о граничных условиях, которые в данном случае должны ставиться на стенках сопла, в некотором сечении  $x = -L_-$  цилиндрической трубы и, вообще говоря, на выходе из сопла (при  $x = L_+$ ).

Как показывает анализ, при определении количества и вида условий, которые требуется ставить на поверхности  $\Gamma$ , ограничивающей рассматриваемую область течения  $\Omega$ , можно руководствоваться следующим правилом. В окрестности бесконечно малого элемента поверхности  $\Gamma$  с внешней к  $\Omega$  нормалью  $n$  рассматривается одномерное нестационарное течение с плоскими волнами. Параметры такого течения, как известно, зависят только от времени  $t$  и от координаты, отсчитываемой вдоль  $n$ . Если  $q_n$  — проекция вектора скорости на  $n$ , то произвольное слабовозмущенное течение указанного типа есть комбинация трех волн, распространяющихся со скоростями  $q_n$  и  $q_n \pm c$ , где  $c$  — скорость звука. Первая волна, скорость движения которой совпадает с проекцией скорости газа на  $n$ , полностью определяется тремя величинами — энтропией и касательными к рассматриваемому элементу  $\Gamma$  компонентами вектора скорости газа. Каждая из двух волн, распространяющихся относительно газа со скоростью звука, характеризуется распределением одного параметра, например давления или соответствующего инварианта Римана.

Число условий, выставляемых на плоском элементе поверхности  $\Gamma$ , равно числу параметров (вернее, их распределений), определяющих те одномерные плоские волны, которые распро-

страняются от данного участка границы внутрь  $\Omega$ . Так, от непроницаемой стенки, на которой  $q_n = 0$ , внутрь  $\Omega$  может распространяться только одна волна, движущаяся со скоростью  $q_n - c \equiv -c$ , и, следовательно, требуется одно граничное условие. Если  $q_n$  отрицательна и  $|q_n| < c$ , что в данном случае имеет место в сечении  $x = -L_-$ , куда при расчете переносятся условия из  $-\infty$ , то число граничных условий в таком сечении равно четырем. Здесь можно задавать энтропию, полную энтальпию,

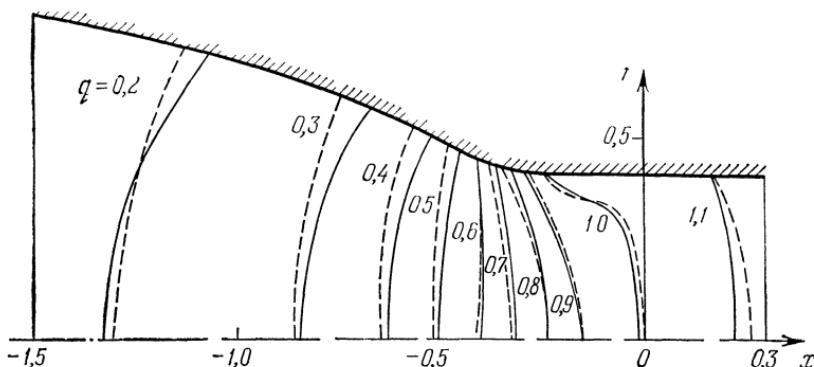


Рис. 43.2.

а также вертикальную  $v$  и окружную  $w$  компоненты скорости. Аналогично на правой границе исследуемой области (на выходе из сопла  $x = L_+$ ) при  $0 < q_n < c$  требуется одно условие (например,  $p = p_e$ ), а при сверхзвуковом истечении ( $q_n > c$ ) — ни одного. Кроме того, следует иметь в виду, что в число задаваемых величин не могут входить параметры, которые определяют волны, не приходящие в  $\Omega$ . На непроницаемых стенках такими величинами являются энтропия, касательные к стенке компоненты вектора скорости и инвариант Римана, который характеризует волну, распространяющуюся в направлении  $n$ , а также любые функции перечисленных величин.

Перейдем к изложению некоторых результатов решения прямой задачи теории сопла Лаваля, полученных для течений совершенного газа. Первые примеры относятся к незакрученным течениям в осесимметричных соплах. Для таких течений, в согласии со сказанным выше, в сечении  $x = -L$  в дополнение к энтропии, полной энтальпии и вертикальной компоненте скорости ( $v = 0$ ) задавалась нулевая окружная компонента вектора скорости, т. е.  $w \equiv 0$ . На рис. 43.2 нанесены линии  $q = \text{const}$  в дозвуковой и трансзвуковой частях классического сопла Лаваля с сильно выгнутой областью минимального сечения (слева сопло

асимптотически приближалось к цилиндрической трубе \*). Штрихами на рис. 43.2 для сравнения нанесены результаты, полученные также методом установления при помощи разностной схемы второго порядка точности [79].

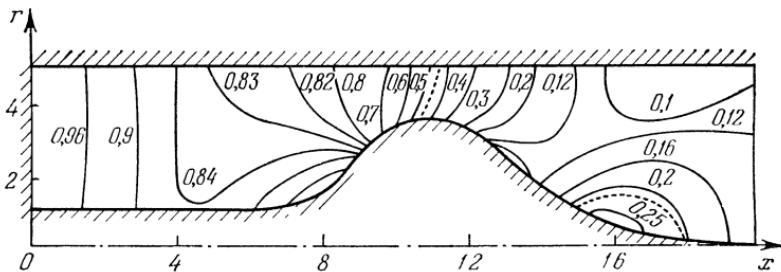


Рис. 43.3.

На рис. 43.3 показаны линии  $p/p_{\max} = \text{const}$  для сопла с центральным телом и цилиндрической обечайкой. Сопло имеет замкнутый контур, криволинейная часть центрального тела образована дугами окружностей, а течение осуществляется благодаря присутствию источников массы и энергии в дозвуковой части сопла

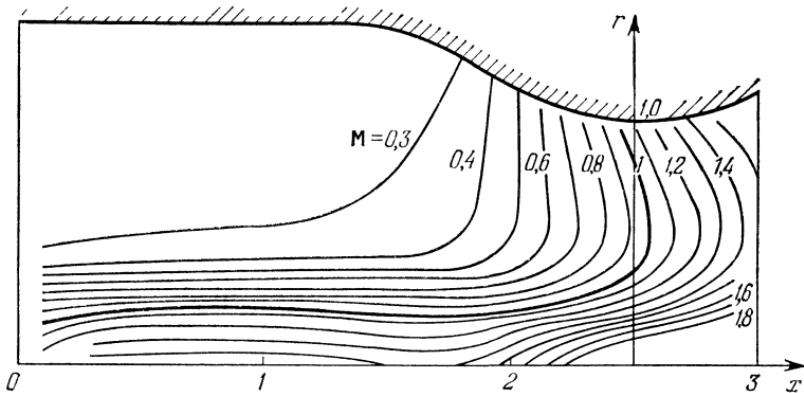


Рис. 43.4.

(см. [62], [63]). Интересная особенность данного течения состоит в образовании на центральном теле местной дозвуковой зоны (звуковые линии отмечены пунктиром). Торможение газа в этом случае вызвано двумя причинами: поворотом потока против часовой стрелки и уменьшением площади поперечного сечения кольцевых струек тока. В пределах точности счета торможение газа

\* ) Результаты расчета течения в данном сопле были получены Е. Я. Черняк.

в указанной зоне осуществляется без образования скачков уплотнения.

Рис. 43.4 иллюстрирует влияние предварительной закрутки потока на течение в осесимметричных соплах Лаваля [106]. Изображены линии  $M = \text{const}$ , где число Маха  $M$  определено по «меридиональной» компоненте вектора скорости. В представленном случае из-за интенсивного вращения потока вблизи оси симметрии образуется зона пониженного давления. В результате этого звуковая линия ( $M = 1$ ) втягивается внутрь сопла и становится параллельной оси  $x$ .

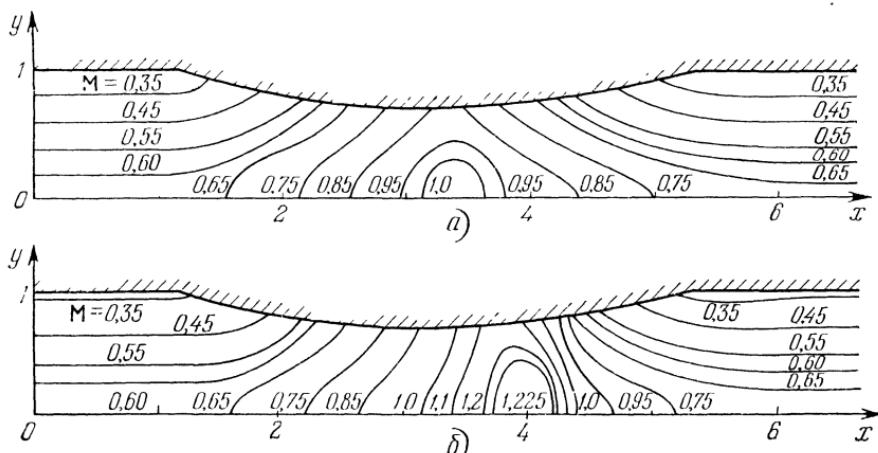


Рис. 43.5.

В предыдущих примерах течение изэнтропично или почти изэнтропично (для сопел с «замкнутым» профилем). На рис. 43.5, *a*, *b* изображены линии  $M = \text{const}$  для течения в плоском сопле Лаваля неизэнтропического потока [56] такого, что при  $x \rightarrow -\infty$  отношение  $p/\rho^\alpha$  меняется по высоте канала в согласии с законом

$$p/\rho^\alpha = A - B \cos(\pi y).$$

Здесь  $y$  отсчитывается от плоскости симметрии и отнесено к полувысоте канала при  $x \rightarrow -\infty$ , плотность и давление отнесены к  $\rho_*$  и  $\rho_* q_*^2$ , где  $\rho_*$  и  $q_*$  — критические плотность и скорость на линии тока, отвечающей  $p/\rho^\alpha = A$ , константы  $A = 0,714$  и  $B = 0,27$ . В силу принятого распределения  $p/\rho^\alpha$  энтропия минимальна на оси  $x$  и максимальна на стенках канала. Вне участка переменной высоты контур канала образован прямыми  $y = \pm 1$ , простирающимися в бесконечность не только влево, но и вправо (на самом деле, исследуемая конфигурация представляет собой элемент бесконечной решетки одинаковых профилей, обтекаемых под нулевым углом атаки [56]). Рис. 43.5, *a* и рис. 43.5, *b* отве-

чают двум значениям противодавления:  $p_+ = 1,085; 0,95$ , которое считается заданным при  $x = +\infty$ . В обоих случаях сверхзвуковые скорости имеют место только в небольшой окрестности минимального сечения сопла. Интересно отметить, что при рассмотренном распределении энтропии область местных сверхзвуковых скоростей первоначально появляется не у стенок сопла, как в однородном (по энтропии и полной энталпии) потоке, а внутри поля течения.

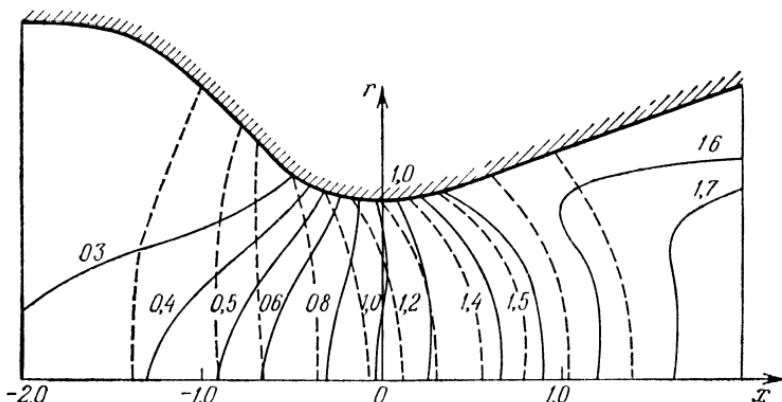


Рис. 43.6.

Последующие иллюстрации относятся к течению в классическом сопле Лаваля проводящего газа при наличии магнитного поля, постоянного во всей рассматриваемой области и направленного по оси сопла [74]. Электропроводность газа считается постоянной, магнитные числа Рейнольдса предполагаются малыми. Из-за взаимодействия поля с движущимся газом в нем возникают кольцевые электрические токи ( $j_x = j_r = 0, j_\phi \neq 0$ , где  $j_x, j_r$  и  $j_\phi$  — компоненты вектора плотности тока  $\mathbf{j}$ ). Это ведет к появлению пондеромоторной силы, действующей на газ, и джоулевой диссипации, причем, как можно показать, эти эффекты не изменяют полной энталпии потока. Влияние магнитного поля в данном случае характеризуется одним дополнительным безразмерным параметром  $S$ , который носит название *параметра магнитогидродинамического взаимодействия* и определяет интенсивность воздействия поля на поток. На рис. 43.6 приведены контур сопла и линии  $M = \text{const}$  в нем для двух  $S$ : сплошные кривые отвечают  $S = 4$ , а штриховые  $S = 0$ . Видно, что магнитное поле весьма сильно изменяет всю картину течения. Суммарное воздействие хорошо прослеживается по влиянию  $S$  на расход газа см. рис. 43.7, на котором  $\mu$  — отношение расхода через сопло при данном  $S$  к расходу при  $S = 0$ .

Заканчивая изложение материалов по прямой задаче теории двумерного сопла Лаваля, отметим, что приведенные выше примеры далеко не исчерпывают всего многообразия решенных

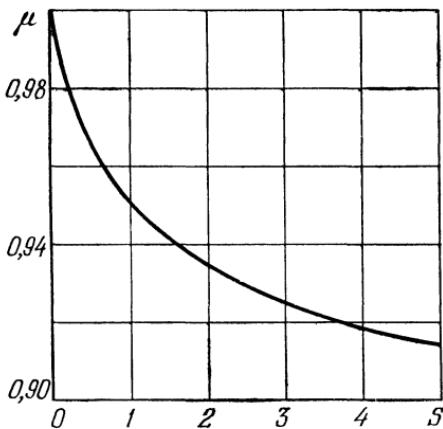


Рис. 43.7.

к настоящему времени задач. Кроме того, достаточно большой объем исследований выполнен рядом авторов при помощи других разностных схем, правда, в основном для классического сопла Лаваля (см. [16], [18], [51], [79], [92], [130], [132], [149], [157], [162]).

#### § 44. Смешанные течения в плоских решетках

Установление стационарной картины течения со сходом потока с задней кромки без использования в процессе расчета условия Чаплыгина—Жуковского. Применение криволинейных сеток.

Весьма важна для приложений задача о расчете течения газа в бесконечной решетке профилей на сверхкритических режимах. Последние характеризуются образованием местных сверхзвуковых зон, что, как и в прямой задаче теории сопла Лаваля, сильно усложняет решение. Естественным путем преодоления возникающих трудностей представляется использование процесса установления по времени, что и было сделано в ряде исследований (см. [14], [56], [129], [139], [140], [148]).

При применении процесса установления к расчету течения в решетках возникает принципиальный вопрос о значении и месте условия Чаплыгина—Жуковского, которое, как известно [105], [107], необходимо при решении соответствующих стационарных задач (напомним, что указанное условие служит для отбора из

однопараметрического семейства решений, справедливых в рамках идеальной жидкости, того, которое реализуется в действительности). Для ответа на этот вопрос было выполнено специальное исследование [14], в котором выбор разностной сетки проводился как с учетом, так и без учета условия Чаплыгина — Жуковского. В первом случае сетка за решеткой профилей была подвижной и содержала линии тока, сходящие в соответствии с принятым алгоритмом с задней кромки. Во втором случае расчет велся с использованием неподвижной сетки, построенной достаточно произвольным образом и поэтому не обеспечивающей схода струек тока с остроконечных кромок профилей. И в том и в другом случаях в процессе установления вырабатывались некоторые не зависящие от времени распределения параметров, удовлетворяющие уравнениям и условиям стационарной задачи (вернее, их конечноразностным аналогам). Сравнение полученных распределений показало, что их различие лежит в пределах точности вычислений, причем результаты расчета достаточно хорошо согласуются с имеющимися экспериментальными данными. Сказанное позволяет надеяться, что решение, вырабатываемое в процессе установления в случае решеток профилей со слегка скругленными задними кромками, также близко к реализующемуся в действительности (речь идет о профилях и режимах обтекания, для которых отрыв потока локализуется в малой окрестности задней кромки). Отметим кстати, что и при решении стационарной задачи положение точки схода потока на скругленной кромке задается достаточно произвольно. На самом деле в этом случае вблизи скругления обычно наблюдается отрыв пограничного слоя, что, строго говоря, делает необоснованным рассмотрение течения в непосредственной окрестности задней кромки в рамках идеального газа. Сказанное следует иметь в виду и в других случаях: при расчете обтекания единичного профиля и при расчете течения в лопаточном венце, которое носит пространственный характер. Таким образом, в дополнение к упрощениям, связанным с переходом от эллиптико-гиперболической системы к гиперболической, процесс установления снимает необходимость использования условия Чаплыгина — Жуковского и как следствие этого делает ненужным применение специальных подвижных сеток.

Перейдем к примерам расчетов, которые были выполнены при помощи разностной схемы § 24 в согласии с соображениями, изложенными выше.

Рассматривается следующая задача. Плоская решетка, составленная из одинаковых профилей, обтекается равномерным потоком идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа. Ось  $x$  направим нормально к фронту решетки, с которым совместим ось  $y$ , а за характерную длину выберем ширину решетки (расстояние между передним и задним фронтами). В стационарной

задаче на тех режимах течения, на которых решетка «не заперта», обычно задаются все параметры набегающего потока (при  $x = -\infty$ ). Если последним приписать индекс 0, то их задание эквивалентно заданию удельных энтропии  $S_0$  и полной энтальпии  $I_0$ , модуля скорости  $q_0$  и угла  $\theta_0$ , образуемого вектором скорости  $q_0$  с осью  $x$ . Вместо  $q_0$  можно задавать давление  $p_+$  в некотором сечении  $x = L_+ > 1$  справа от решетки (подчеркнем еще раз, что речь идет о «незапертых» режимах). При решении нестационарной задачи перенос одного условия на правую границу рассчитываемой области всегда предпочтительнее (в согласии с соображениями о постановке граничных условий, изложенными в предыдущем параграфе). При этом, если нормальная к правой границе компонента вектора скорости сверхзвуковая, то соответствующее условие просто не требуется. Если указанная компонента дозвуковая, а решетка заперта, то давление  $p_+$  не влияет на течение слева от дозвуковой линии и в зоне сверхзвуковых скоростей, а следовательно, и на величину модуля скорости  $q_0$ , которая на запертых режимах находится в процессе решения.

Достаточно полное представление о расположении профилей бесконечной решетки и осей координат, а также о форме рассчитываемой области и о структуре использовавшихся разностных сеток дает рис. 44.1, *a*, *b*. Граница  $\Gamma$  рассчитываемой области  $\Omega$  состоит из отрезков  $bc$  и  $b^0c^0$  верхней и нижней образующих двух соседних профилей, участков  $ab$ ,  $a^0b^0$ ,  $cd$  и  $c^0d^0$  параллельных прямых, приходящих в передние и задние точки профилей, и отрезков  $aa^0$  и  $dd^0$  вертикальных прямых  $x = -L_-$  и  $x = L_+$  соответственно.

Благодаря периодичности течения по  $y$  параметры газа над  $a^0b^0$  не отличаются от параметров над  $ab$ . Поэтому отрезок  $a^0b^0$  и по аналогичной причине отрезки  $ab$ ,  $cd$  и  $c^0d^0$ , по существу, являются внутренними, что делает ненужным постановку на них каких-либо граничных условий (при расчете к области  $\Omega$  присоединяются дополнительные ячейки, как это показано на рис 44.1; параметры газа в них полагаются равными параметрам газа в соответствующих ячейках области  $\Omega$ ). На остальных участках границы рассчитывавшейся области ставились следующие условия:

$$v/u = \operatorname{tg} \theta_0, \quad 2i(p, \rho) + q^2 = 2I_0, \quad S(p, \rho) = S_0 \text{ на } aa^0, \\ q_n = 0 \text{ на } bc \text{ и } b^0c^0, \quad p = p_+ \text{ на } dd^0,$$

где  $q_n$  — нормальная к стенке компонента вектора скорости, а  $\theta_0$ ,  $I_0$ ,  $S_0$  и  $p_+$  — заданные константы. Последнее условие, в согласии со сказанным ранее, выставляется только для « $x$ -дозвукового» течения на  $dd^0$ . Прочие подробности о построении разностной сетки, счете параметров в треугольных ячейках, которые в случае сетки, изображенной на рис. 44.1, *b*, примыкают к отрезку  $dd^0$ , и о других деталях можно найти в работе [14].

Некоторые результаты расчетов изображены на рис. 44.2, где приведены профили, составляющие решетку, и изобары. Все три картинки относятся к запертым режимам и отвечают углам атаки  $\theta_0 = -10^\circ, 0^\circ, 10^\circ$ . Давление отнесено к  $\rho_* q_*^2$ , где  $\rho_*$  и

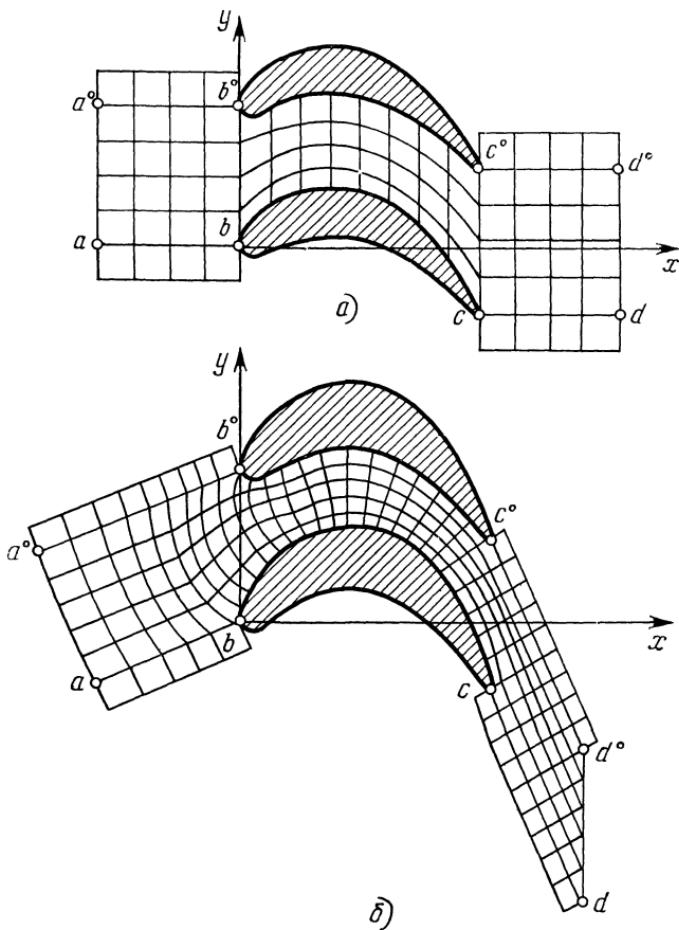
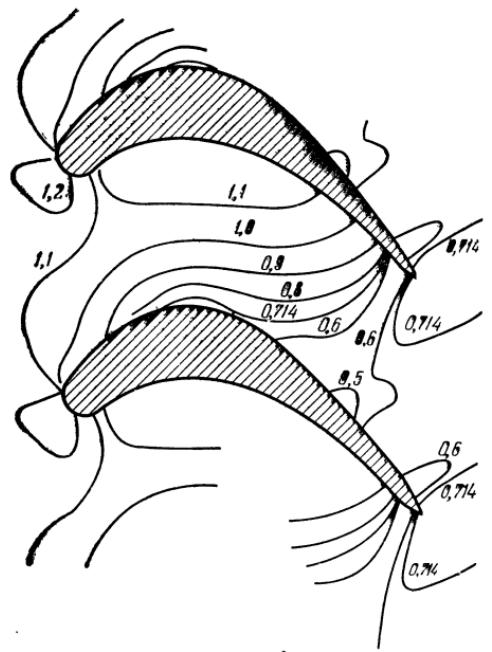


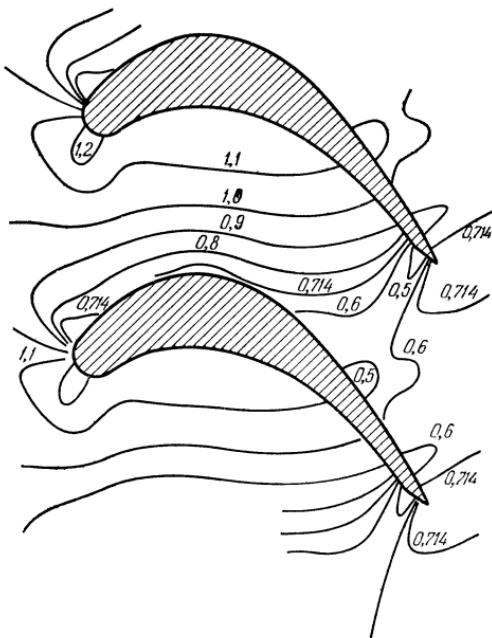
Рис. 44.1.

$q_*$  — критические плотность и скорость набегающего потока. В согласии с этим звуковая линия совпадает с изобарой  $p = 0,714$ .

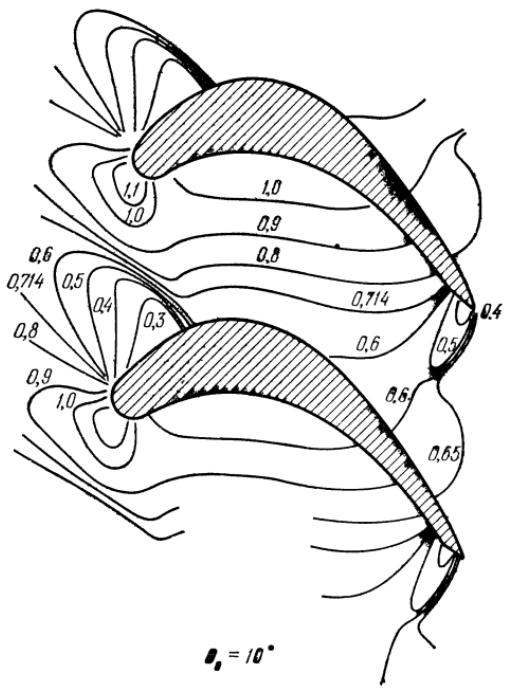
Представляет интерес выяснение причин, в силу которых в процессе установления реализуется решение, удовлетворяющее (во всяком случае, в пределах точности вычислений) условию схода с задней кромки. Не исключено, что определенную ясность в этот вопрос могло бы внести исследование устойчивости соответствующего стационарного течения. Возможно, что такое



$\theta_\phi = -10^\circ$   
a)



$\theta_\phi = 0^\circ$   
б)



в)

Рис. 44.2.

исследование следует выполнять с учетом диссипативных механизмов, которые, отсутствуя в исходных уравнениях течения невязкого и нетеплопроводного газа, неизбежно появляются в их разностных аналогах. О том, что указанные механизмы играют весьма важную роль, говорит независимость стационарных распределений параметров от начальных данных (с этой целью ставились специальные численные эксперименты). Отметим, что для отбора требуемого решения, по-видимому, важен не конкретный вид «диссипативных» членов, появляющихся в разностных уравнениях и зависящих от выбранной разностной схемы, а само наличие «механизма диссипации».

### § 45. Истечение перерасширенной струи в затопленное пространство

Случай нерегулярного отражения скачка, идущего от кромки сопла, с образованием «диска Маха». Применение «полуподвижной» разностной сетки. Сравнение результатов, полученных при различном числе расчетных ячеек, сопоставление с результатами эксперимента.

Задача об истечении перерасширенной сверхзвуковой струи с давлением на кромке сопла  $p_0$  в затопленное пространство с давлением  $p_e > p_0$  также принадлежит к задачам, в которых сверхзвуковое поле течения может

при определенных условиях [содержать местную дозвуковую зону. Общая схема течения, реализующегося при этом, показана на рис. 45.1. Двойные линии на рисунке— ударные волны,  $OCF$ — граница струи,  $DCE$ — пучок волн разрежения и  $ADE$ — тангенциальный разрыв— линия тока, начинающаяся в тройной точке  $A$ . Местная дозвуковая зона в исследуемом случае ограничена почти прямым скачком уплотнения  $AB$ , который носит название «диска Маха», тангенциальным разрывом  $ADE$  и звуковой линией, показанной на рис. 45.1 штриховой линией. Разгон дозвукового потока обусловлен волнами разрежения, приходящими на его границу, и происходит так же, как в осесимметричных соплах Лаваля.

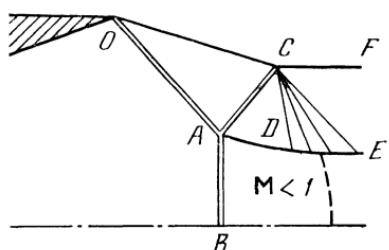


Рис. 45.1.

Рассчитываемая область течения ограничена плоскостью среза сопла  $x=0$ , осью симметрии  $r=0$ , границей струи  $r=r_+(x, t)$  и сечением  $x=L$ . Последнее выбирается правее звуковой линии так, что поток в этом сечении всюду « $x$ -сверхзвуковой». В качестве начальных условий при  $t=0$  брались параметры стацио-

нарного течения (в том числе граница струи), отвечающие «расчетному» истечению, т. е.  $p_e = p_0$ . Поскольку в действительности  $p_e > p_0$ , то при  $t > 0$  в струе развивается нестационарный процесс, в результате которого поток релаксирует к другому стационарному состоянию, удовлетворяющему заданной степени нерасчетности  $n = p_0/p_e \neq 1$  и условию непрерывности давления на границе струи.

При расчете использовалась «полуподвижная» разностная сетка, вертикальные границы которой были фиксированы, а продольные деформировались в согласии с движением границы струи.

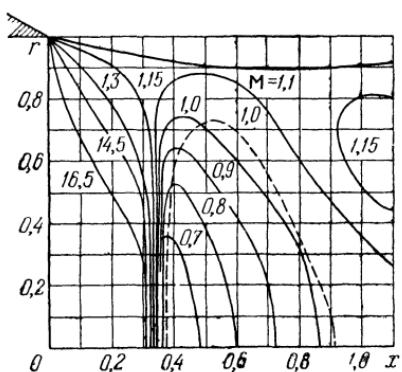


Рис. 45.2.

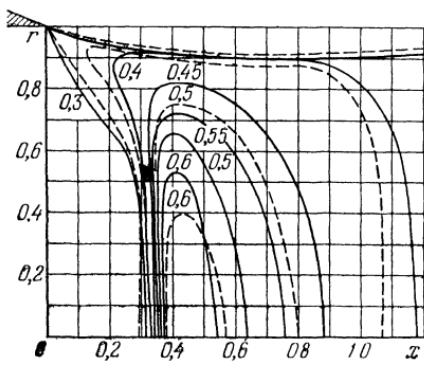


Рис. 45.3.

Нормальная скорость элементарных отрезков границы в каждый момент времени определялась из решения задачи о распаде разрыва. Давление на контактной поверхности, которая получается в результате распада и отождествляется с элементом границы струи, полагалось при этом совпадающим с давлением в затопленном пространстве  $p_e$ . Прочие подробности, связанные с построением разностной сетки, читатель может найти в [68].

Перейдем к изложению результатов расчета. Поток на срезе осесимметричного сопла предполагался параллельным оси  $x$  и равномерным и имел число Маха  $M_0 = 1,7$ . За характерный линейный размер был принят радиус выходного сечения сопла.

Первые три рисунка отвечают степени нерасчетности  $n = 0,5$ . На рис. 45.2 приведены граница струи и линии постоянства числа Маха (цифры над кривыми). Срезу сопла отвечает отрезок  $0 \leq r \leq 1$  оси ординат. Основные расчеты были выполнены при 400 расчетных ячейках. Для оценки точности на рис. 45.2 штрихами нанесена линия  $M = 1,0$ , полученная при четырехкратном уменьшении числа ячеек. Линии постоянства давления изображены на рис. 45.3, на котором, кроме того, штриховыми

линиями представлены результаты работы [17], полученные по расчетной схеме [94] при 1600 расчетных точках. Цифры около изобар — отношение давления к давлению заторможенного потока. Согласование результатов различных численных методов представляется вполне удовлетворительным.

Распределение параметров по оси симметрии струи в окрестности диска Маха показано на рис. 45.4, где ступенчатая линия дает некоторое представление о точном решении (на самом деле, «точной» является лишь величина, характеризующая интенсивность скачка, а не его положение). Сплошная и штриховая

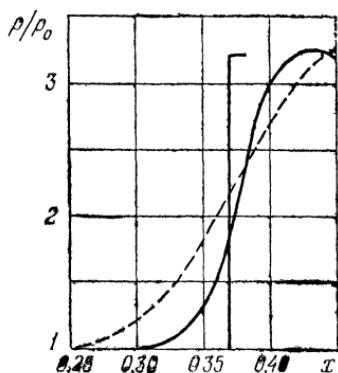


Рис. 45.4.

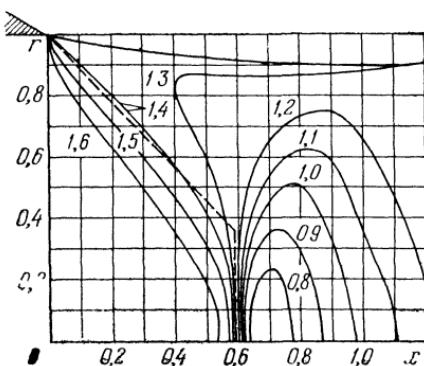


Рис. 45.5.

кривые взяты из работ [68] и [17] соответственно. Видно, что, несмотря на меньшее количество расчетных ячеек, разностная схема § 24 обеспечивает меньшее размазывание скачка, чем схема [94], использующая для сквозного счета ударных волн искусственную вязкость.

Линии  $M = \text{const}$  в меридиональном сечении той же струи при  $n = 0,6$  приведены на рис. 45.5. Штриховыми линиями на этом рисунке показаны косой скачок и диск Маха, построенные по экспериментальным данным работы [145].

Как показал опыт расчетов, выполненных в [68], установление стационарного течения, содержащего физически неустойчивые поверхности тангенциального разрыва, при использовании разностной схемы § 24 обеспечивается без привлечения каких-либо специальных механизмов демпфирования, несмотря на то что один из этих разрывов (граница струи) не размазывался.

Заметим, однако, что бывают ситуации, когда неустойчивость тангенциального разрыва проявляется. Такое явление обнаружено при численном моделировании процессов, происходящих при детонации цилиндрических зарядов взрывчатых веществ с коаксиальной полостью, заполненной металлом или водой [90].

### § 46. «Нормальное» соударение сверхзвуковой струи со стенкой

Различные схемы течения. Подвижная сетка, выделяющая границу струи. Примеры расчета

Применение процесса установления по времени позволило решить и другую струйную задачу—рассчитать «нормальное» соударение осесимметричной сверхзвуковой струи со стенкой. В данном параграфе приводятся некоторые результаты решения

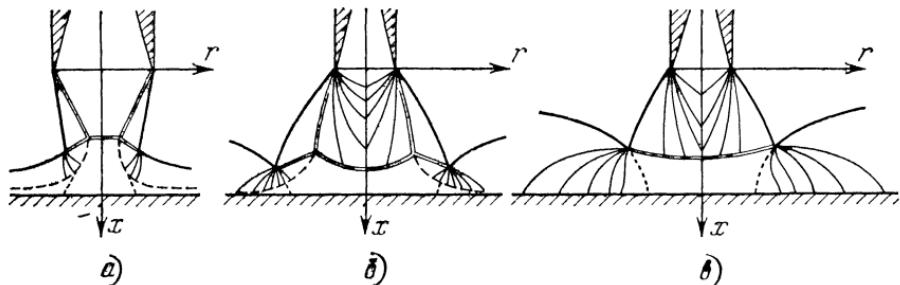


Рис. 46.1.

этой задачи, полученные авторами работы [50] при помощи разностной схемы § 24.

Возможные схемы течения представлены на рис. 46.1, *a*—*в*, на котором двойными линиями даны ударные волны, жирной сплошной кривой—граница струи, тонкими линиями—характеристики, штриховой линией—тангенциальный разрыв и пунктиром—звуковая линия. Рис. 46.1, *a* отвечает перерасширенным струям, т. е.  $n \equiv p_0/p_e < 1$ , где, как и ранее, индексы 0 и *e* приписаны параметрам струи на кромке сопла и давлению в затопленном пространстве. Рис. 46.1, *б*, *в* соответствуют недорасширенным струям ( $n > 1$ ) с висячим скачком (рис. 46.1, *б*) и без него (рис. 46.1, *в*).

Как и в случае, рассмотренном в предыдущем параграфе, решение задачи о нормальном соударении струи целесообразно проводить с выделением ее границы, что делает необходимым использование подвижных разностных сеток. Разностная сетка, применявшаяся при расчетах, схематически изображена на рис. 46.2 и состояла из трех характерных подобластей: *ABCD*,

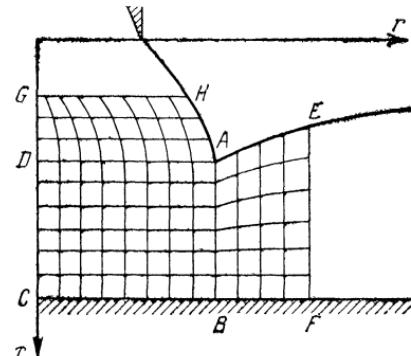


Рис. 46.2.

$ADGH$  и  $ABFE$ . В каждой подобласти в процессе установления перемещались как продольные, так и поперечные границы ячеек. Движение сетки в прямоугольнике  $ABCD$  обусловлено перемещением точки  $A$ , а в криволинейных четырехугольниках  $ADGH$  и

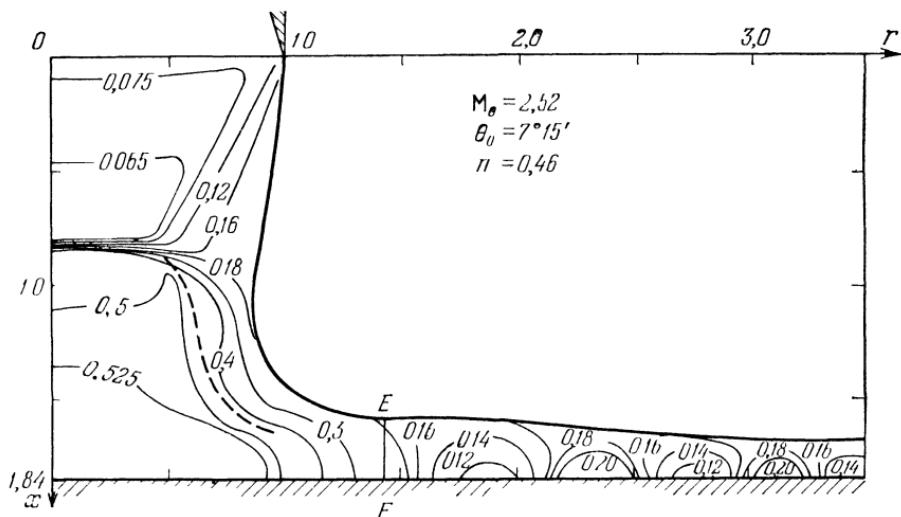


Рис. 46.3.

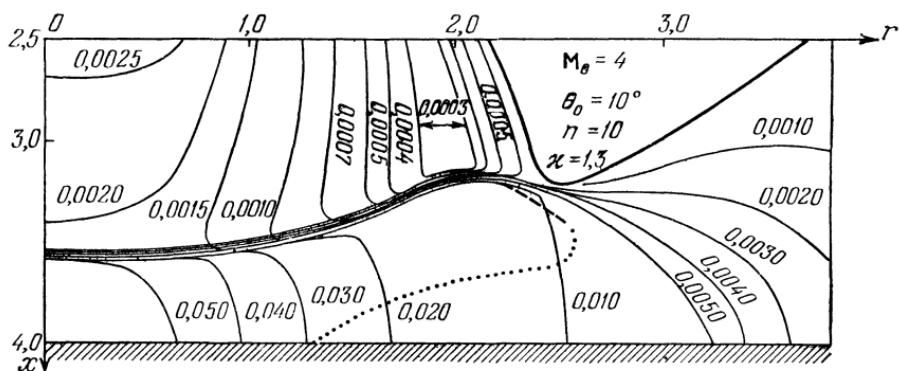


Рис. 46.4.

$ABFE$  — ограждений  $AH$  и  $AE$  границы струи. Отрезки  $GH$  и  $FE$  границы рассчитываемой области выбирались так, что поток на них был соответственно  $x$ - и  $r$ -сверхзвуковым. Параметры на  $GH$  получились в результате предварительного расчета осесимметричной сверхзвуковой струи и в процессе установления оставались фиксированными. Расчет течения в веерной сверхзвуковой струе (справа от  $FE$ ) выполнялся после завершения процесса установ-

ления. В примерах, которые приводятся ниже, течение над  $GH$  и справа от  $FE$  рассчитывалось при помощи метода § 18 (см. также § 50). Так как поток в области взаимодействия заранее неизвестен, то границы  $GH$  и  $FE$  задавались с запасом с учетом опыта, накопленного при расчете близких вариантов. Естественно, что с точки зрения экономии времени счета, повышения точности и т. п. запас в выборе указанных границ должен быть небольшим.

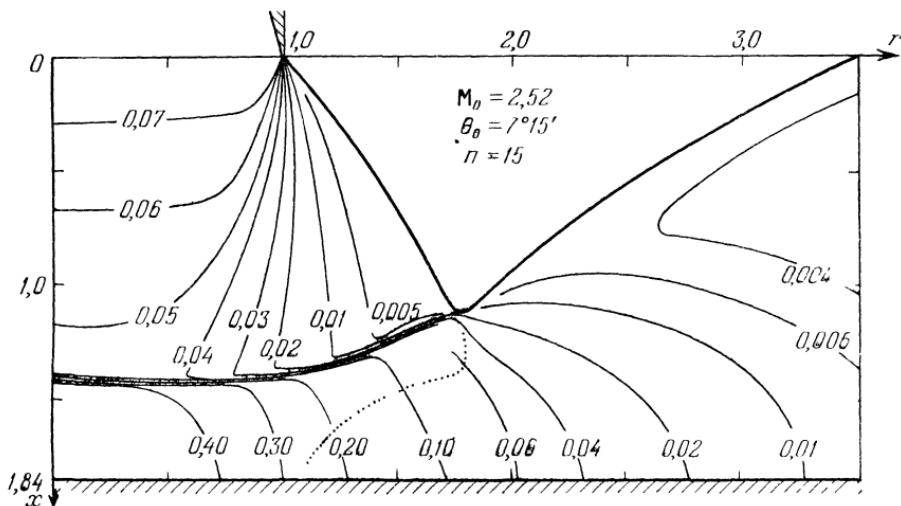


Рис. 46.5.

Некоторые результаты расчетов приведены на рис. 46.3—46.5, причем на двух последних рисунках установлением по времени была получена вся изображенная область течения, а в случае рис. 46.3—область, лежащая слева от прямой  $FE$ .

На всех рисунках показаны ось симметрии, плоскость, с которой соударяется струя, граница струи и изобары. Координата  $x$  отсчитывается от среза сопла, радиус которого принят за единицу длины. Цифры около изобар—значения давления, отнесенного к  $\rho_* q_*^2$ , где, как обычно,  $\rho_*$  и  $q_*$ —критические плотность и скорость на срезе сопла. Кроме того, на рис. 46.4 и рис. 46.5, которые соответствуют режимам течения, изображенными на рис. 46.1, б, в, пунктиром показаны звуковые линии. На рис. 46.3, отвечающем схеме течения, которая изображена на рис. 46.1, а, звуковая линия не приводится по той причине, что по результатам расчета ее трудно отличить от линии  $M=1$  в размазанном тангенциальном разрыве. Во всех представленных случаях осесимметричные сверхзвуковые струи вытекали из конических сопел с полууглом раскрытия  $\theta_0$ . Значения  $\theta_0$ , числа Маха на кромке сопла  $M_\theta$  и степени нерасчетности  $n$

приведены на рисунках. Предполагалось, что распределения параметров на срезе сопел описываются формулами течения от сверхзвукового сферического источника.

В заключение отметим, что к настоящему времени отсутствуют исследования, авторам которых удалось бы с использованием каких-либо других разностных схем получить результаты, подобные представленным выше.

### § 47. Обтекание плоских и осесимметричных тел

Обтекание кругового цилиндра, помещенного нормально плоскости течения, и комбинации конус—цилиндр равномерным сверхзвуковым потоком с образованием местных дозвуковых зон. Течение около плоских профилей при сверхкритической скорости набегающего потока. Некоторые результаты расчета звукового обтекания тел. Расчет околозвукового обтекания осесимметричных тел типа мотогондолы воздушно-реактивного двигателя.

К настоящему времени опубликовано большое количество работ (см., например, [56], [59], [80], [85], [93], [108]—[110], [112], [113], [160], [161]), в которых разностная схема § 24 и процесс установления нашли применение для решения широкого круга задач стационарного обтекания тел с местными дозвуковыми или сверхзвуковыми зонами. В данном параграфе приводятся некоторые из таких результатов, полученных для плоских и осесимметричных течений авторами работ [59], [109], [113]. Все рассматриваемые далее примеры можно разделить на две группы. Первая группа примеров относится к обтеканию тел (кругового цилиндра, помещенного нормально плоскости течения, комбинации конус—цилиндр и т. п.) равномерным сверхзвуковым потоком с местными дозвуковыми зонами. Напротив, результаты второй группы охватывают течения, в которых набегающий поток дозвуковой, а вблизи обтекаемых тел образуются местные сверхзвуковые зоны. Случай звукового набегающего потока можно рассматривать как предельный для течений как первой, так и второй группы. Переходим к рассмотрению результатов.

На рис. 47.1 сплошными линиями приведены ударные волны и звуковые линии, полученные при решении задачи «нормального» обтекания кругового цилиндра сверхзвуковым потоком. Цифры около кривых—числа Маха набегающего потока  $M_0$ . Расчеты проводились без выделения ударной волны, которая затем строилась как линия максимальных градиентов давления. На этом же рисунке штриховыми линиями даны результаты расчета, выполненного в [156], кружками—экспериментальные данные, цитируемые в той же работе, треугольниками—результаты, полученные в [27] методом прямых, и штрих-пунктиром—результаты расчета методом интегральных соотношений [10].

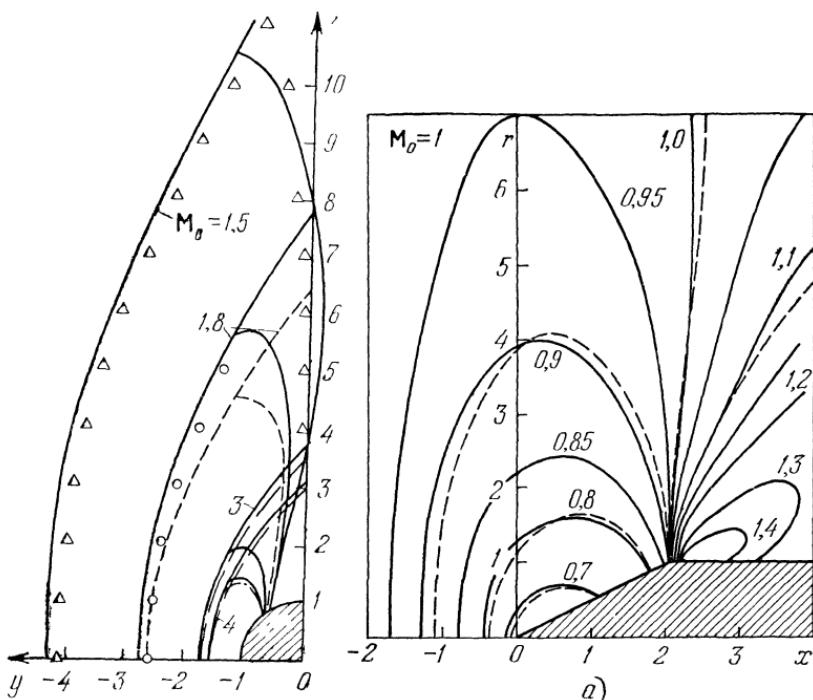


Рис. 47.1.

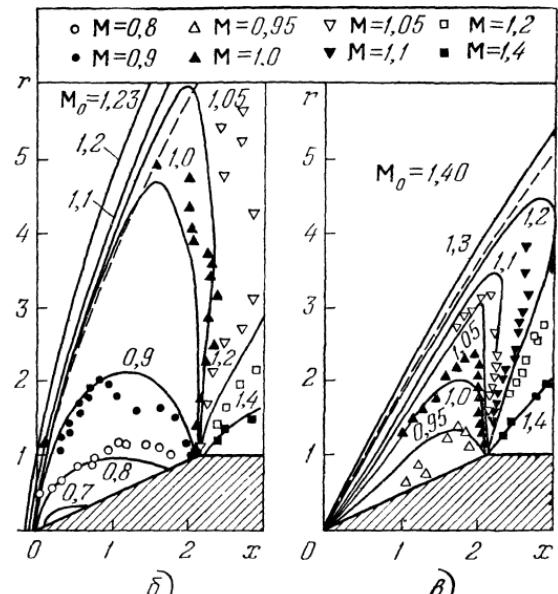


Рис. 47.2.

Рис. 47.2, а—в относятся к обтеканию конуса—цилиндр потоком с  $M_0 = 1; 1,23; 1,40$  соответственно. Показаны линии постоянства числа Маха, причем на рис. 47.2, а для оценки точности штрихами приведены аналогичные линии, полученные при числе ячеек разностной сетки, которое было в четыре раза меньше, чем в основном варианте. Цифры около кривых — значения чисел Маха. На рис. 47.2, б и рис. 47.2, в штриховой линией показана головная ударная волна, а «точками» —

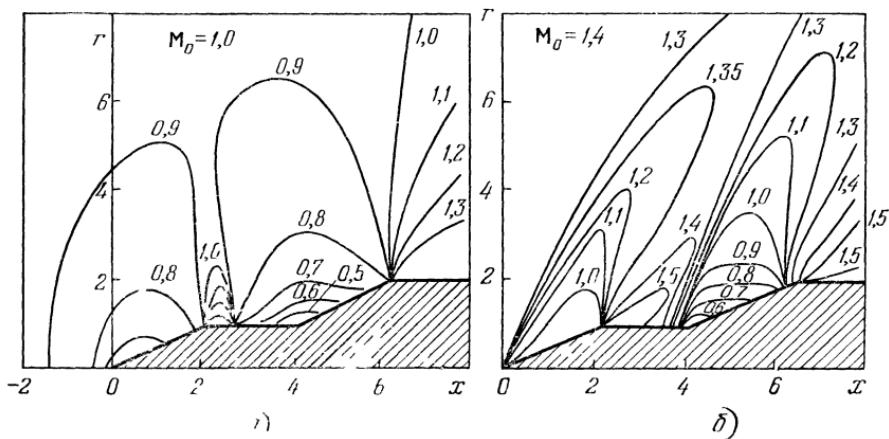


Рис. 47.3.

линии  $M = \text{const}$ , которые были получены экспериментально в работе [133]. Результаты расчета обтекания более сложного тела, образующая которого состоит из двух цилиндрических и двух конических участков, потоком с  $M_0 = 1,0; 1,4$  приведены рис. 47.3, а, б. На указанном рисунке, как и в предыдущем случае, нанесены линии  $M = \text{const}$ .

Линии постоянства числа Маха в меридиональной плоскости течения, которое реализуется при звуковом ( $M_0 = 1$ ) обтекании полубесконечного кругового цилиндра, помещенного торцом к потоку, изображены на рис. 47.4. Для сравнения на том же рисунке штрихами даны линии  $M = \text{const}$ , полученные в [11] методом «крупных частиц». Результаты, представленные на рис. 47.1—47.4 сплошными кривыми, взяты из работы [59], причем расчет во всех случаях велся без выделения головной ударной волны.

Два следующих примера, взятые из [113], иллюстрируют обтекание плоских крыльевых профилей. Рис. 47.5 относится к обтеканию профиля, изображенного в его верхней части, дозвуковым потоком с  $M_0 = 0,72$ . Кроме самого профиля на рисунке приведены изобары (цифры около кривых — значения коэф-

фициента давления  $\bar{p} = 2(p - p_0)/(kp_0M_0^2)$ , а также звуковая линия, нарисованная штрихами. Видно, что на нижней поверхности профиля реализуется сжатие потока, а на верхней — сильное разрежение с образованием местной сверхзвуковой зоны. Сверхзвуковая зона замыкается как область сгущения изобар. Распределения давления на нижней и верхней поверхностях профиля, полученные в [113] с использованием разностной схемы

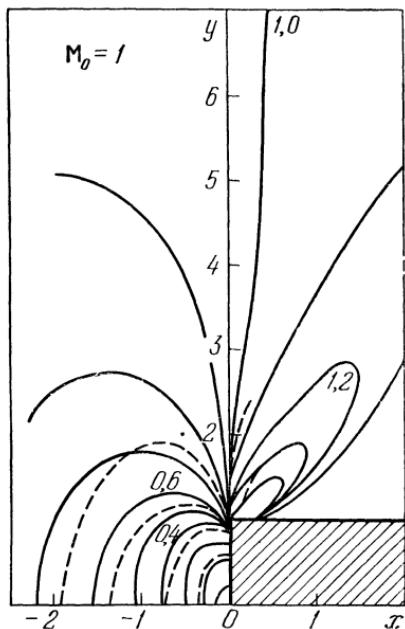


Рис. 47.4.

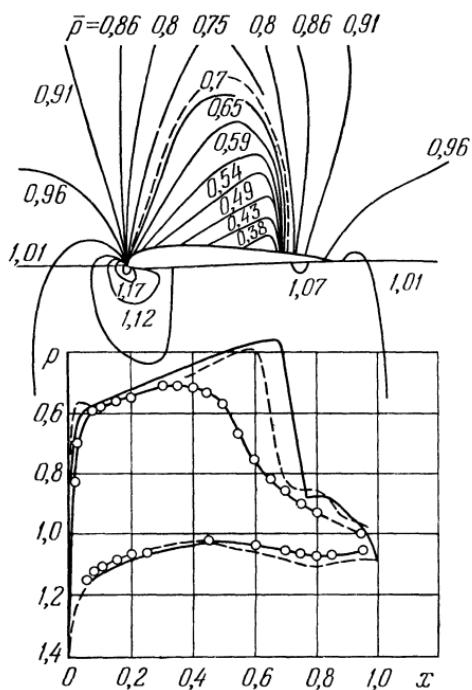


Рис. 47.5.

§ 24, показаны в нижней части рис. 47.5 сплошными кривыми. Там же штрихами приведены численные результаты работы [146], а кружками — экспериментальные данные [159].

Распределения, соответствующие нижней поверхности профиля, хорошо согласуются друг с другом. Заметное различие расчетных и экспериментальных результатов для верхней стороны профиля, по-видимому, связано с влиянием эффектов вязкости в области взаимодействия скачка уплотнения с пограничным слоем.

На рис. 47.6 приведены линии  $M = \text{const}$  поля течения, реализующегося в случае обтекания симметричного «пикообразного» профиля звуковым потоком при угле атаки  $\alpha = 2^\circ$ . Видно, что разгон потока при удалении от передней критической точки

происходит весьма интенсивно, вследствие чего звуковые линии, показанные штрихами, располагаются вблизи передней кромки. В силу симметрии профиля и малости угла атаки поток разгоняется на обеих его сторонах. Скачок уплотнения, замыкающий сверхзвуковую зону на верхней и нижней поверхностях, располагается на задней кромке, что согласуется с имеющимися экспериментальными данными. Отметим, что, как и в случае решетки профилей (см. § 44), применение процесса установления позволяет вести расчет без использования условия Чаплыгина—Жуковского, которое необходимо при рассмотрении тех же задач как стационарных.

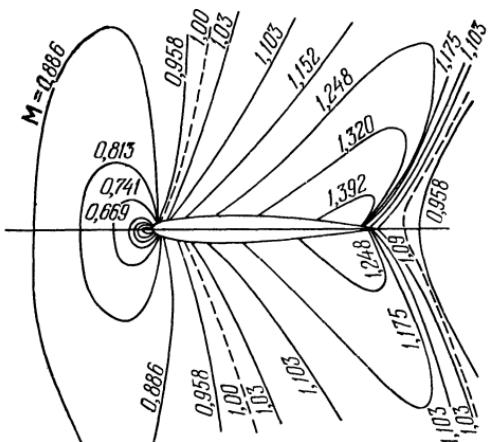


Рис. 47.6.

Последние два рисунка данного параграфа, иллюстрирующие применение процесса установления к расчету околозвукового обтекания удлиненных осесимметричных тел, относятся к циклу исследований, выполненных в [108]—[110]. На рис. 47.7 представлена картина линий  $M = \text{const}$ , реализующаяся при обтекании звуковым потоком ( $M_0 = 1$ ) тонкого остроконечного тела вращения, укрепленного на полубесконечной цилиндрической державке. Видно, что возникающая в этом случае сверхзвуковая зона занимает почти всю длину тела, а в поперечном направлении простирается далеко в глубь потока. Снизу по течению зона сверхзвуковых скоростей ограничена скачком уплотнения (на рисунке—сгущением линий уровня числа Маха). На рис. 47.8 показаны линии уровня числа Маха в случае обтекания (при  $M_0 = 0,85$ ) осесимметричной конфигурации типа мотогондолы воздушно-реактивного двигателя. При этом струя, входящая в двигатель, заменялась круговым цилиндром, а струя, исте-

кающая из реактивного сопла, рассчитывалась по разностной схеме § 18. На тангенциальном разрыве — границе струи и внешнего потока — выполнялись условия непрерывности давления и угла наклона вектора скорости газа.

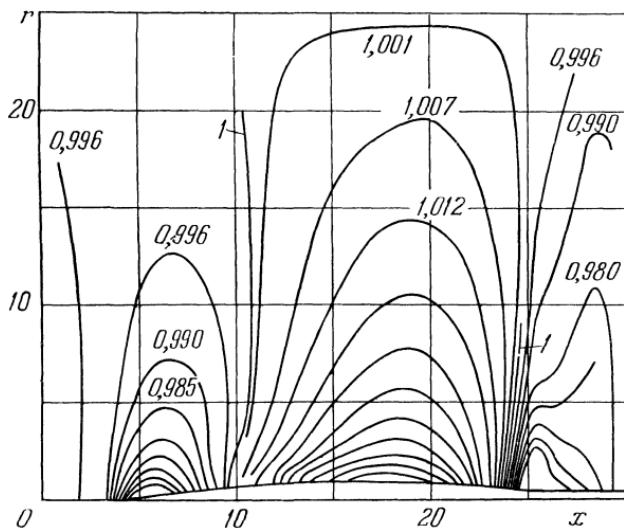


Рис. 47.7.

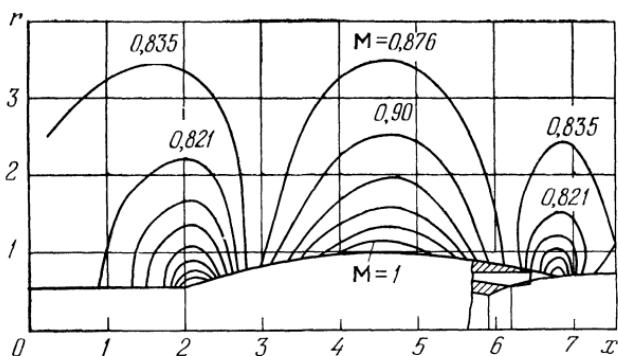


Рис. 47.8.

Дальнейшие примеры расчета двумерных стационарных течений при помощи разностной схемы § 24 и процесса установления читатель может найти в уже цитировавшихся работах, а также в работах [57], [60], [81].

## § 48. Пространственное обтекание тел околозвуковым потоком

Остроконечное тело с эллиптическим поперечным сечением, обтекаемое звуковым потоком под углом атаки. Околозвуковое и звуковое течения около комбинации конус—цилиндр, помещенной в поток под углом атаки.

Расчет околозвукового обтекания пространственных тел (или тел вращения под углами атаки) сопряжен с еще большими трудностями, чем решение аналогичных двумерных задач. Здесь, как и в двумерном случае, весьма перспективным представляется

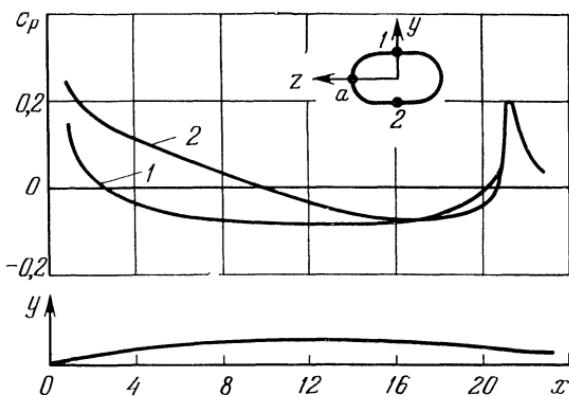


Рис. 48.1.

использование процесса установления по времени, которое, однако, теперь связано с переходом не к трехмерной, а к четырехмерной задаче. В силу последнего обстоятельства при решении пространственных задач данный подход пока еще не получил широкого распространения. Тем не менее в настоящее время не видно альтернативных подходов, которые позволили бы решать достаточно широкий круг задач околозвукового пространственного обтекания. Примеры, приводимые ниже, получены в [59] при помощи разностной схемы § 27 и, по-видимому, являются первыми (если не единственными) результатами подобного типа.

Первый пример (рис. 48.1) относится к обтеканию звуковым потоком остроконечного тела с эллиптическим поперечным сечением (отношение полуосей эллипса  $a/b = 2$ ) под углом атаки  $\alpha = 6^\circ$ . Вектор скорости набегающего потока лежит в плоскости малой оси эллипса (плоскости  $x, y$ ). На рисунке показано распределение коэффициента давления  $c_p$  по наветренной (кривая 1) и подветренной (кривая 2) образующим тела. Отметим, что отличие значений  $c_p$  на указанных образующих, будучи существенным на передней части тела, быстро уменьшается при приближении к полубесконечной цилиндрической державке.

На следующих двух рисунках (рис. 48.2 и 48.3) представлены результаты расчета обтекания конфигурации конус—цилиндр под углом атаки  $\alpha = 10^\circ$  потоком с  $M_0 = 1$  и  $M_0 = 1,4$  соответственно. На рисунках показаны линии  $M = \text{const}$  в плоскости  $x, y$ , содержащей вектор скорости набегающего потока

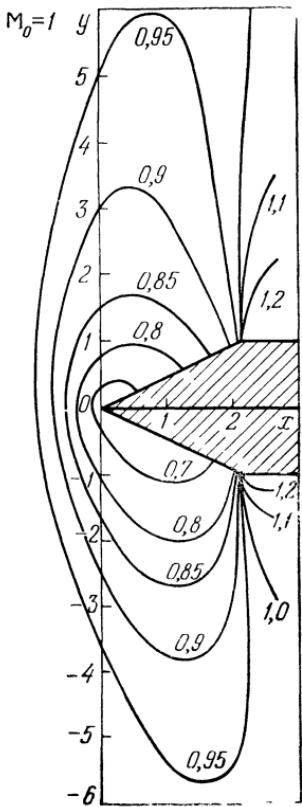


Рис. 48.2.

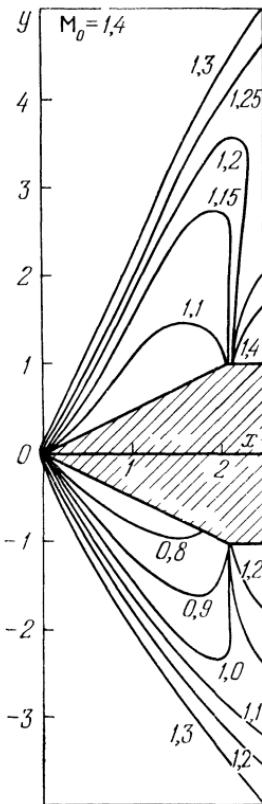


Рис. 48.3.

и являющейся в силу этого плоскостью симметрии. Интересная особенность течения при  $M_0 = 1,4$  состоит в образовании на наветренной стороне конуса местной дозвуковой зоны, что делает невозможным использование для расчета «чисто сверхзвуковых» методов.

### § 49. Прямая задача теории пространственного сопла Лаваля

Пространственные сопла с одной и с двумя плоскостями симметрии. Сравнение результатов расчета трансзвукового течения в соплах с поперечным сечением в форме эллипса при различном отношении длин полуосей. Несимметрия потока, вызванная несимметрией формой сопла.

В § 43 были приведены некоторые результаты, иллюстрирующие применение процесса установления по времени и конечноразностной схемы § 24 к решению прямой задачи теории двухмерных сопел Лаваля. Установление по времени и описанный в § 27 пространственный аналог соответствующей разностной схемы оказались весьма эффективными и при решении аналогичных пространственных задач. Сказанное подтверждают многочисленные результаты, полученные авторами работ [46], [47], [72], [73]. Часть этих результатов приводится в данном параграфе. Прежде чем переходить к их изложению, опишем вкратце

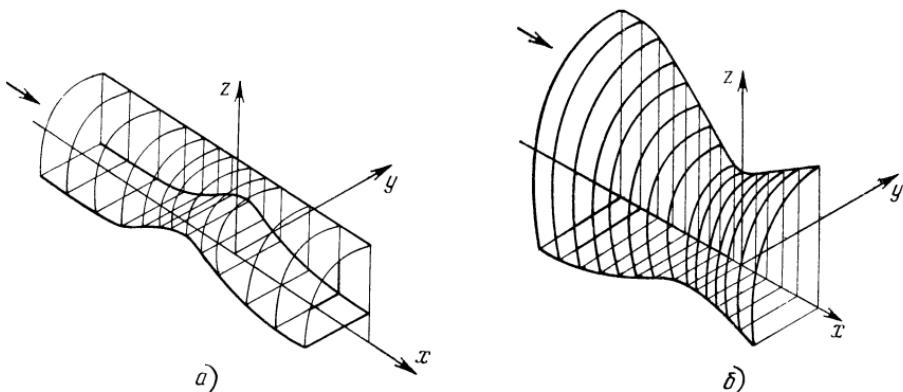


Рис. 49.1.

те особенности постановки пространственной задачи, которые отличают ее от задач, рассмотренных в § 43. При этом ограничимся случаями, когда исследуемые сопла имеют одну (рис. 49.1, а) или две (рис. 49.1, б) плоскости симметрии (на рис. 49.1, а, б представлены соответственно половина и четвертая часть области течения).

Оси прямоугольной системы координат  $x, y, z$  расположим так, чтобы плоскость  $x, z$  совпадала с одной из плоскостей симметрии, а плоскость  $x, y$  — с другой (если такая имеется, как в случае рис. 49.1, б). Плоскость  $y, z$  совместим с плоскостью минимального сечения сопла. Газ течет в положительном направлении оси  $x$ . Если сопло имеет одну плоскость симметрии, то его поверхность будем задавать следующим образом. Введем четыре функции  $z^+(x)$ ,  $z^-(x)$ ,  $y(x)$  и  $z(x)$ , первые две из которых дают линии пересечения «верхней» и «нижней» поверхностей, составляющих сопло, с плоскостью симметрии  $x, z$ , а третья и четвертая, т. е.  $y(x)$  и  $z(x)$ , — друг с другом. В дополнение к этому примем, что линия пересечения «верхней» («нижней») поверхности с любой плоскостью  $x = \text{const}$  есть часть прямой, эллипса или какой-либо другой двупараметрической кривой.

Сопла с двумя плоскостями симметрии будем задавать аналогичным образом, однако здесь вместо четырех функций достаточно двух:  $z(x)$  и  $y(x)$ , дающих линии пересечения поверхности сопла с плоскостями симметрии. Как и в двумерном случае, будем считать, что сопло примыкает к полубесконечной цилиндрической трубе, образующие которой параллельны оси  $x$ . Ограничимся случаем, когда заданные энталпия торможения и энтропия

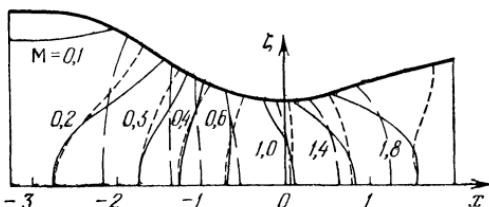


Рис. 49.2.

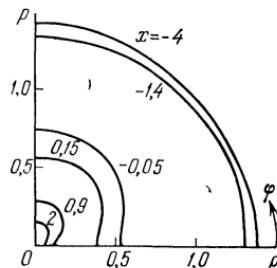


Рис. 49.3.

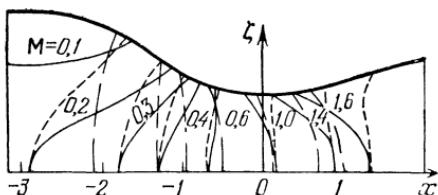


Рис. 49.4.

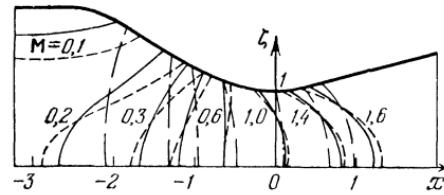


Рис. 49.5.

газа при  $x \rightarrow -\infty$  постоянны по сечению. В этом случае на стационарном режиме при  $x \rightarrow -\infty$  реализуется равномерный поступательный поток ( $v = w = 0$ ), давление, плотность и  $x$ -компоненты скорости которого, а следовательно, и расход газа через сопло заранее неизвестны и находятся в процессе решения (в дальнейшем речь идет о режимах, при которых в расширяющейся части сопла поток сверхзвуковой). Не останавливаясь на деталях, связанных с выбором разностной сетки (по этому поводу см. [47], [72]) и с постановкой граничных условий, которые для пространственного сопла ставятся так же, как для двумерного случая (см. § 43), перейдем к описанию некоторых результатов расчета.

Первые иллюстрации относятся к течению в соплах с двумя плоскостями симметрии. Рис. 49.2—49.5 соответствуют течению в соплах, поперечное сечение которых представляло собой эллипс с фиксированным отношением полуосей  $a/b$ . У всех таких сопел отношение площади поперечного сечения при  $x = 0$  было одинаковым. Поэтому результаты, получающиеся в одномерном приближении,

не зависят от величины  $a/b$ . Ось  $z$  направим по малой полуоси эллипса.

На рис. 49.2 для сопла с  $a/b = 2$  приведены линии постоянства числа Маха (цифры около кривых) в двух плоскостях симметрии. Плоскости  $x, y$  соответствуют сплошные линии и под  $\zeta$  понимается отношение  $y/y_+(0)$ , а плоскости  $x, z$  — штриховые линии и  $\zeta = z/z_+(0) = z$ . Здесь  $z_+(0)$  и  $y_+(0)$  — длины полуосей эллипса в минимальном сечении сопла, причем первая длина бралась в качестве характерного размера задачи. Для сравнения на том же рисунке штрих-пунктиром нанесены линии  $M = \text{const}$  для осесимметричного сопла с тем же распределением площади поперечного сечения по  $x$ . Сравнение сплошных, штриховых и штрих-пунктирных линий свидетельствует о существенно пространственном характере течения. На это же указывают «поляры» распределения давления по стенке, представленные на рис. 49.3 для различных сечений сопла (здесь и далее давление отнесено к  $\rho_* q_*^2$ , где  $\rho_*$  и  $q_*$  — критические плотность и скорость, а  $\varphi = 0, \pi/2$  соответствуют плоскостям большой и малой полуосей эллипса).

На рис. 49.4, аналогичном рис. 49.2, изображены линии  $M = \text{const}$  для «эллиптического» сопла с  $a/b = 3$ . Увеличение отношения  $a/b$  ведет к росту неравномерности в распределении параметров. Последнее видно как из сравнения рис. 49.2 и 49.4, так и из рис. 49.5, на котором сплошными, штриховыми и штрих-пунктирными кривыми приведены линии постоянства числа Маха в плоскости  $x, y$  для эллиптических сопел с  $a/b = 3; 2; 1$  соответственно.

Последующие рисунки относятся к соплам с одной плоскостью симметрии. Первые два из них отвечают соплам, форма которых отлична от осесимметричной лишь на конечном интервале оси  $x$ . На этом интервале пространственное сопло состоит из двух половинок: осесимметричной нижней (лежащей под плоскостью  $x, z$ , т. е. при  $y < 0$ ) и эллиптической верхней. Эллиптичность последней понимается в том смысле, что ее сечения плоскостями  $x = \text{const}$  суть половинки эллипсов с отношением полуосей — заданной функцией  $x$ . В рассмотренных случаях  $z(x) \equiv 0$ , а  $z_+(x) \neq z_-(x)$  на некотором конечном интервале оси  $x$ .

На рис. 49.6 приведены результаты расчета течения в двух соплах описанного выше типа. Образующие этих сопел в плоскости симметрии, т. е. функции  $z_-(x)$  и  $z_+(x)$ , даны в верхнем левом углу рисунка, причем сплошные кривые — образующие верхней (эллиптической) половины соответствующего сопла, а штриховая — образующая нижней (осесимметричной) половины. В основной части рисунка сплошными кривыми 1 и 2 нанесены значения разности  $\Delta p = p_- - p_+$  давления по указанным образующим соответствующих сопел ( $p_-$  и  $p_+$  — значения  $p$  на нижней

и на верхней образующих), а штрих-пунктиром — значение  $\Delta M$  для первого сопла, определенное аналогичным образом. В нижнем левом углу рис. 49.6 представлены распределения  $p$  по стенке в двух сечениях  $x = \text{const}$ , причем  $\varphi = 0, \pi$  отвечают соответственно нижней и верхней образующим. Результаты расчета течения

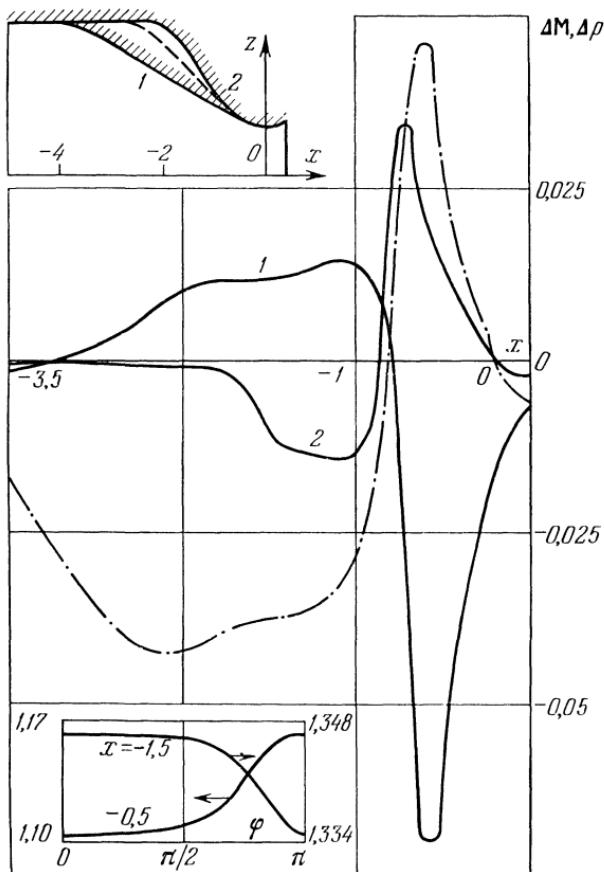


Рис. 49.6.

в дозвуковой и трансзвуковой частях трех пространственных сопел более сложной формы приведены на рис. 49.7. Указанные сопла отличаются углом наклона верхней образующей (или разностью  $\Delta\theta$  углов наклона нижней и верхней образующих) сужающегося участка. Отметим почти линейную связь, которая при всех  $x$  имеет место между  $\Delta p$  и  $\Delta\theta$ . Такая же линейная связь справедлива для боковой силы и момента, обусловленных отличием формы сопла от осесимметричной.

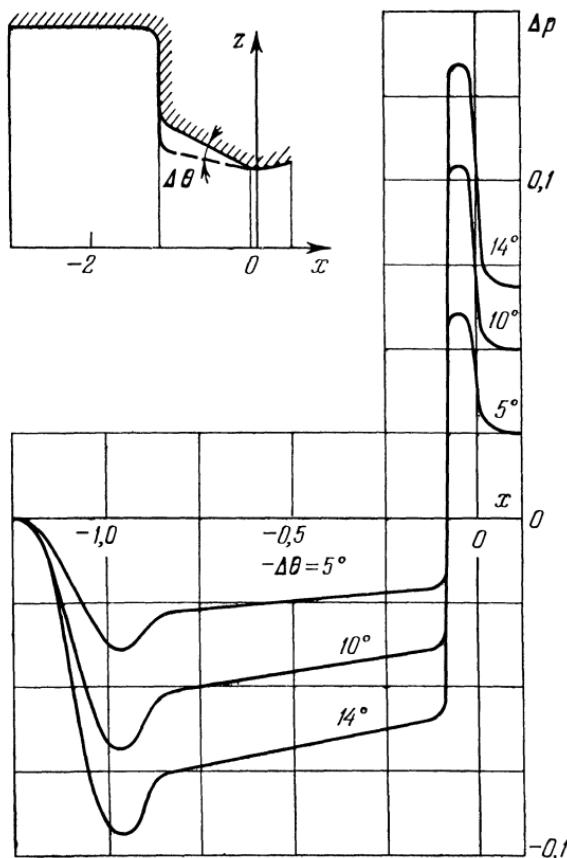


Рис. 49.7.

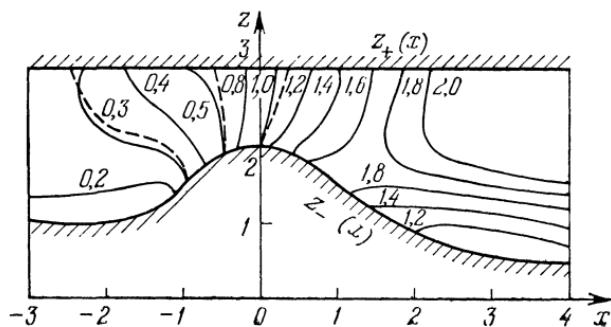


Рис. 49.8.

Последний рисунок (рис. 49.8) относится к пространственному соплу типа сопла, изображенного на рис. 49.1,*a*. Его нижняя стенка представляет собой полоску цилиндрической поверхности, параллельной оси  $y$ . Сечения верхней стенки плоскостями  $x = \text{const}$  суть половины эллипсов, каждый из которых проходит через точку  $y=0, z=3$ . На рис. 49.8 изображены линии пересечения стенок сопла и поверхностей  $M = \text{const}$  с плоскостью симметрии течения  $x, z$ . Для оценки точности вычислений штрихи на рисунке приведены три линии постоянства числа Маха, полученные при восьмикратном уменьшении количества расчетных ячеек (основные расчеты были выполнены при 3200 ячейках).

В заключение отметим, что результаты, приведенные в настоящем параграфе, составляют лишь незначительную часть обширных исследований течения в пространственных соплах. Эти исследования, опирающиеся на разностную схему § 27, позволили, в частности, определить боковые усилия, которые возникают в неосесимметричных соплах. С другой стороны, к настоящему времени не опубликовано ни одной работы, в которой решение прямой задачи теории пространственного сопла Лаваля удалось бы получить при помощи других разностных схем.

## Г л а в а VII

### СТАЦИОНАРНЫЕ СВЕРХЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ

В настоящей главе собраны примеры, которые иллюстрируют возможности метода расчета стационарных сверхзвуковых течений, изложенного для двумерного случая в §§ 18—20, а для пространственного — в § 26. То обстоятельство, что многие из рассмотренных задач впервые были решены при помощи именно этого метода, лишний раз свидетельствует о его эффективности и сравнительной простоте.

#### § 50. Плоские и осесимметричные течения идеального газа

Недорасширенные струи, истекающие в затопленное пространство при больших степенях нерасчетности, когда часть струи, разворачиваясь около кромки сопла, течет в направлении, почти обратном первоначальному. Кольцевые и веерные струи. Примеры расчета течения в плоских воздухозаборниках.

В данном параграфе собраны примеры расчета двумерных (плоских и осесимметричных) сверхзвуковых течений, полученные при помощи разностной схемы § 18. При отборе этих примеров авторы руководствовались следующими соображениями. К настоящему времени разработаны достаточно эффективные и точные разностные схемы для решения двумерных задач (например, прямые и обратные схемы метода характеристик, различные варианты разностной схемы К. И. Бабенко [3] и т. д.). Хотя задачи, решенные и решаемые при помощи этих схем, весьма разнообразны, однако, как показал многолетний опыт многих исследователей, составление и отладка соответствующих алгоритмов и программ для ЭВМ обычно сопряжены с интенсивной и продолжительной работой сравнительно больших коллективов высококвалифицированных специалистов. В противоположность этому алгоритмы и программы, опирающиеся на разностную схему § 18, оказались существенно более простыми и универсальными. В пользу данного утверждения говорит, в частности, то, что с помощью этих

алгоритмов и программ за сравнительно короткий отрезок времени не только удалось решить большинство задач, решавшихся ранее другими методами (течения в соплах Лаваля, истечение сверхзвуковых осесимметричных струй в затопленное пространство и в спутный сверхзвуковой поток, обтекание остроконечных тел вращения), но и задач, алгоритмы решения которых до последнего времени отсутствовали. Именно к этой группе задач относится большинство приводимых ниже примеров. Такой выбор примеров представляется целесообразным еще и потому, что определенная информация о возможностях метода при решении задач первой группы содержится в § 20.

Приводимые ниже примеры включают: недорасширенные осесимметричные струи, вытекающие в затопленное пространство при очень больших степенях нерасчетности (в частности, в случае, когда часть струи, разворачиваясь около кромки сопла, течет в направлении, почти обратном первоначальному); нерасчетное истечение струй из кольцевого сопла и из сопла с центральным телом; веерные струи, образующиеся при истечении равномерного потока из кольцевой щели или в результате «нормального» соударения сверхзвуковой струи с плоскостью, а также течения в разного рода входных устройствах самолетов (в «воздухозаборниках»). В той или иной степени результаты, предлагаемые вниманию читателя, ранее были опубликованы в работах [12], [22], [50], [61], [66]. Разностные схемы, использованные в этих работах, не обязательно в точности совпадают с разностной схемой § 18, поскольку в последней поток предполагается «*x*-сверхзвуковым». Указанные отличия, однако, связаны в основном с ориентацией элементов разностной сетки и не носят принципиального характера. По этой причине было признано целесообразным ограничиваться во всех подобных случаях краткой информацией об используемой разностной сетке и ссылками на соответствующий первоисточник, содержащий детали, важные при проведении расчетов. Переходим к рассмотрению примеров.

Первые примеры относятся к истечению осесимметричных недорасширенных струй в затопленное пространство и приводятся с тем, чтобы продемонстрировать возможности метода в широком диапазоне степеней нерасчетности  $n = p_0/p_e$ . Здесь и далее индексы 0 и  $e$  приписываются параметрам в сечении среза сопла на его кромке ( $x = 0$ ) и в затопленном пространстве,  $p$  — давление, отнесенное к  $\rho_* q_*^2$ , где  $\rho_*$  и  $q_*$  — критические плотность и скорость струи в некотором «начальном» сечении.

На рис. 50.1, *a*, *b* изображены граница струи и изобары в случае, когда  $n = 2$ ,  $M_0 = 3$ , а поток в сечении среза сопла параллелен оси  $x$ . Показаны две первые (рис. 50.1, *a*) и пятая (рис. 50.1, *b*) «бочки», причем масштабы по осям  $x$  и  $r$  разные, а линии  $p = \text{const}$  даны через  $\Delta p = 0,004$ . Известно, что вблизи конца каждой «бочки»

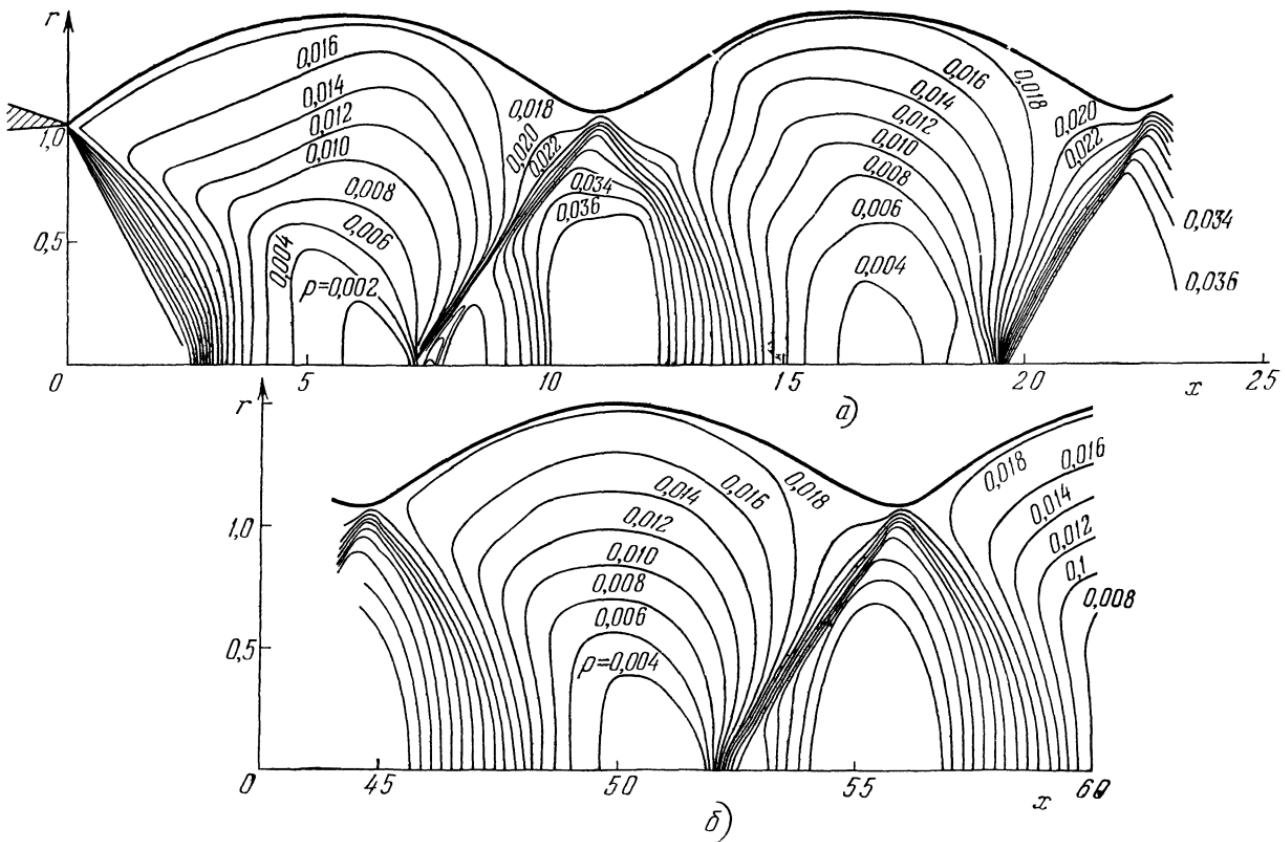


Рис. 50.1.

в результате нерегулярного («маховского») отражения висячего скачка от оси симметрии образуется интенсивная (почти прямая) ударная волна («диск Маха»), поток за которой дозвуковой. Для  $n$ , не слишком превышающих единицу, размер «диска Маха» настолько мал, что по параметрам, найденным осреднением по всем элементарным отрезкам (в том числе у оси симметрии), поток остается « $x$ -сверхзвуковым». Данное обстоятельство делает возможным применение метода § 18 для расчета «слабо недорасширенных» струй без ограничения по  $x$ . При этом неправильное представление полей параметров<sup>\*</sup> в малых дозвуковых зонах за «дисками Маха» практически не оказывается на точности счета в большей части струи.

С ростом  $n$  размер «диска Маха» увеличивается так, что при  $n \gg 1$  возможности применения метода ограничены концом первой «бочки», длина которой, однако, весьма быстро растет, достигая при больших  $n$  сотен и тысяч радиусов среза сопла. Последнее хорошо видно из рассмотрения границ струи (сплошные линии) и скачков уплотнения (штриховые линии) на рис. 50.2, *a*, отвечающем истечению осесимметричной струи из конического сопла ( $M_0 = 2$ ,  $\theta_0 = 10^\circ$ , где  $\theta_0$  — полуугол раскрытия сопла) при  $n = 10^4$  и  $10^6$ . Известно [1], что если  $n \gg 1$ , то размеры струи растут, как  $\sqrt{n}$ . Эта закономерность хорошо подтверждается рис. 50.2, *b*, на котором границы струй для трех значений  $n$  перестроены в координатах  $x^\circ = x/\sqrt{n}$  и  $r^\circ = r/\sqrt{n}$ . Отметим, что в рассмотренных примерах при  $n = 10^4$  и  $n = 10^6$  границы струи вблизи кромки сопла идут почти вертикально. В соответствии с этим на начальном участке поток не всюду является « $x$ -сверхзвуковым», что необходимо для применения варианта метода, описанного в § 18. Представленные выше результаты получены с использованием криволинейной сетки (подробности см. в [61]), снимающей указанное ограничение. Аналогичным образом рассчитывались струи ( $M_0 = 1,05$ ,  $\theta_0 = 0$ ), границы начальных участков которых изображены на рис. 50.3. Данные примеры интересны тем, что в случае больших  $n$  поток у границы струи течет [в направлении, почти обратном первоначальному].

Следующие два примера относятся к истечению струй из кольцевого сопла [66] и из сопла с центральным телом. На рис. 50.4 приведены результаты расчета истечения кольцевой струи в затопленное пространство, давление в котором предполагается заданным и равным давлению в области, примыкающей к оси симметрии ( $M_0 = 3$ ,  $\theta_0 = 0$ ,  $n = 2$ ). Нарисованы границы струи и изобары. Масштабы по осям координат разные. На рис. 50.5 изображено течение внутри и вне сопла с цилиндрической обечайкой и остроконечным центральным телом<sup>\*\*</sup>). Поток в начальном сечении

<sup>\*</sup>) Данные результаты получены В. И. Дугановым.

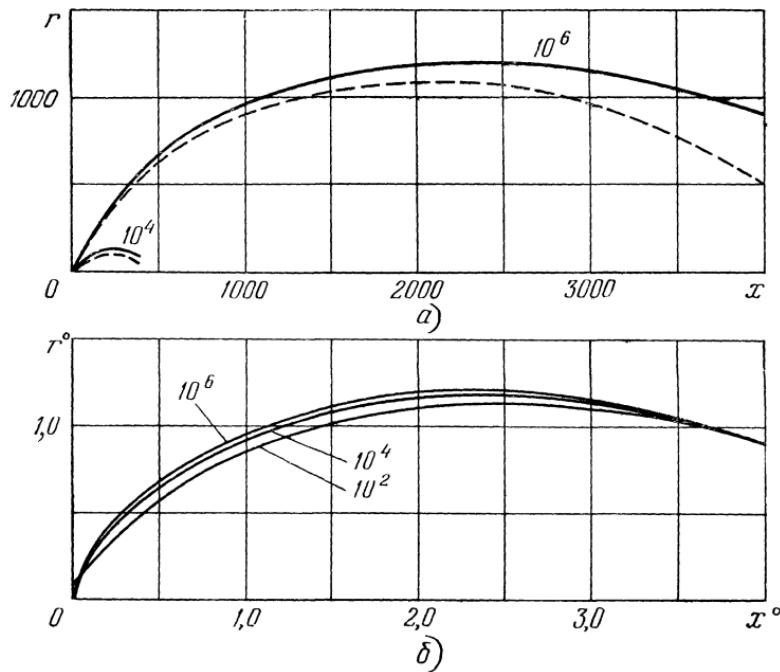


Рис. 50.2.

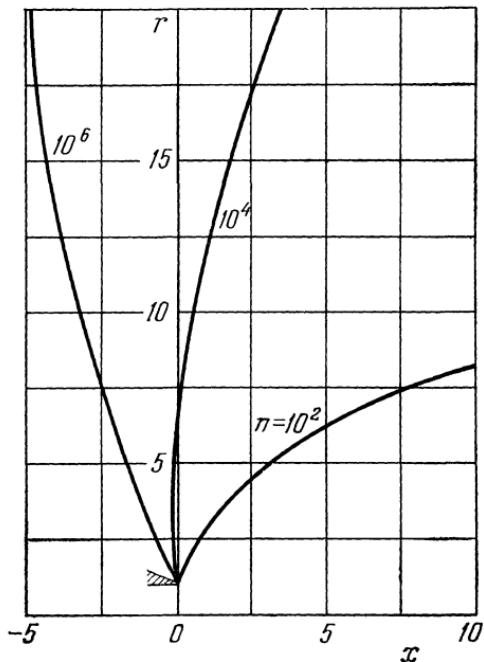


Рис. 50.3.

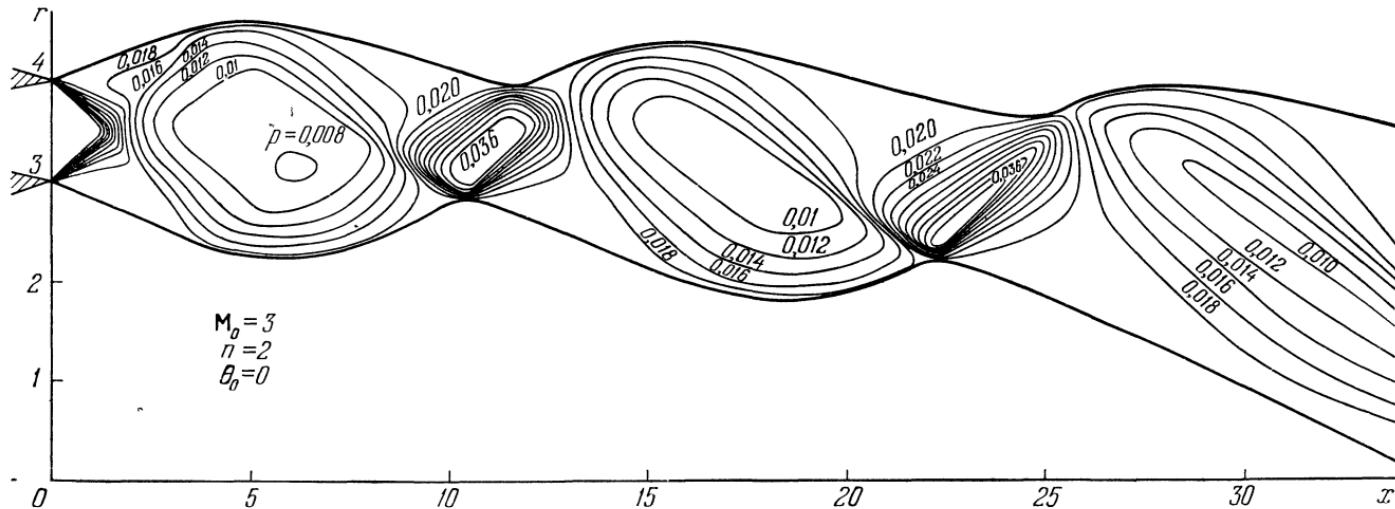


Рис. 50.4.

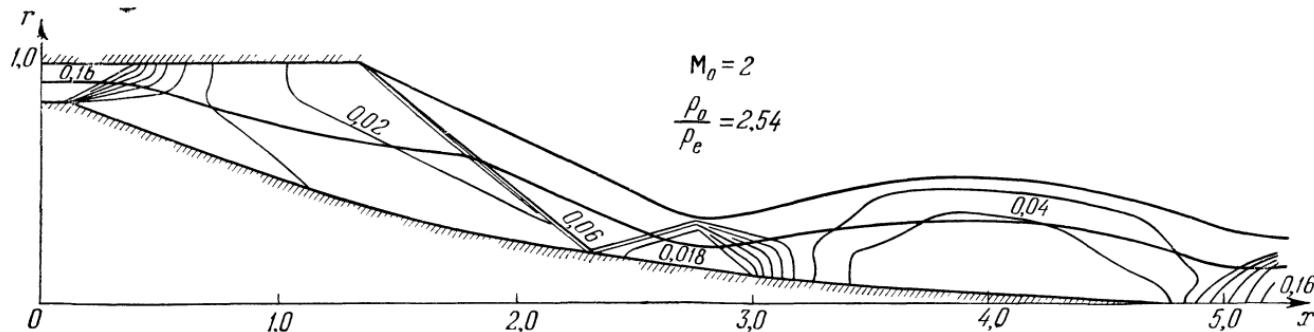


Рис. 50.5.

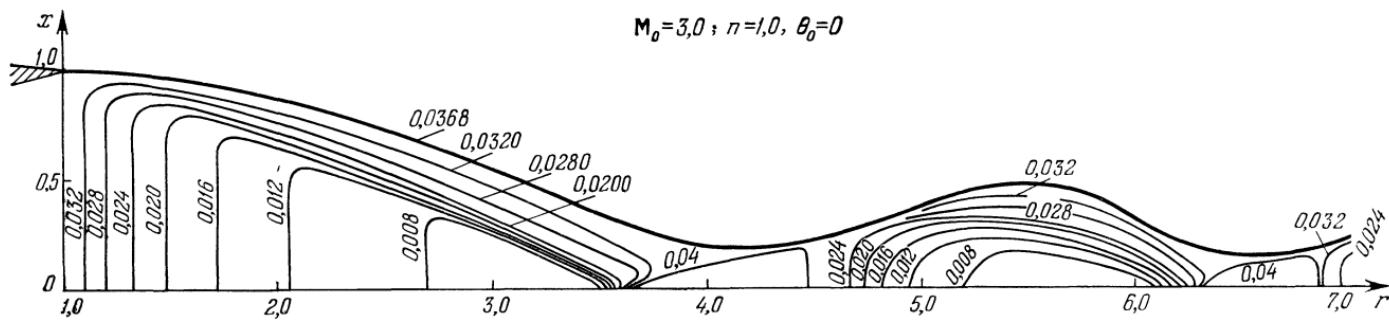


Рис. 50.6.

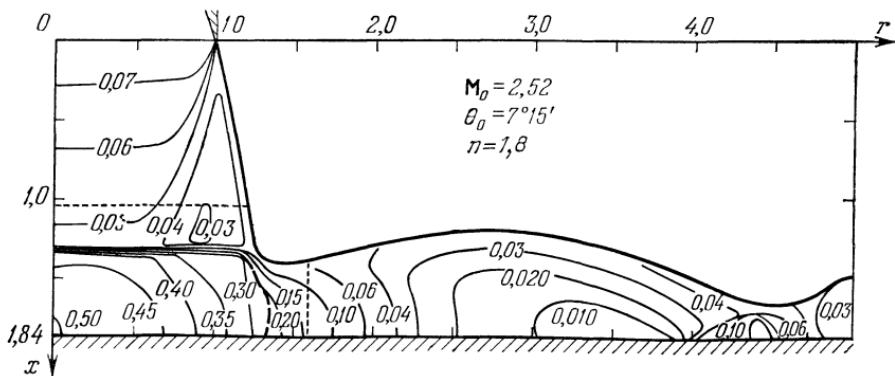


Рис. 50.7.

(при  $x=0$ ) равномерен и параллелен оси  $x$ . Прочие параметры задачи следующие:  $M_0 = 2$ ,  $p_0 = 0,173$  и  $p_e = 0,068$ , где, в отличие от предыдущего, индекс 0 приписан параметрам потока не на кромке сопла, а в начальном сечении. Кроме обечайки и центрального тела (заштрихованные сплошные линии) на рисунке изображены граница струи, «средняя» линия тока и линии  $p = \text{const}$  через постоянный интервал  $\Delta p = 0,02$ .

На рис. 50.6 и 50.7 приведены примеры расчета веерных сверхзвуковых струй. Они были получены при помощи разностной схемы для « $r$ -сверхзвуковых» течений ( $v > c$ ), описанной в [12]. Указанная схема аналогична схеме § 18, причем счет ведется по слоям  $r = \text{const}$ . Рис. 50.6 отвечает истечению струи из кольцевой щели:  $r \equiv 1$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , в которой поток равномерен, нормален к оси симметрии и имеет число Маха  $M_0 \equiv v_0/c_0 = 3$ . Истечение расчетное, т. е.  $n = 1$ . На рисунке показана граница струи и изобары (цифры около кривых—значения  $p \cdot 10^3$ ). Интересно отметить, что, несмотря на расчетный режим истечения ( $n = 1$ ), веерная струя в отличие от струи, истекающей из круглого сопла (при равномерных параметрах на его срезе,  $\theta_0 \equiv 0$  и  $n = 1$ ), имеет «бочкообразную» структуру. Последняя обусловлена перерасширением, которое связано с изменением площади струек тока при растекании газа от оси симметрии. Подобную же структуру имеет веерная струя, которая образуется при растекании газа в случае «нормального» соударения струи, вытекающей из круглого сопла. Здесь, однако, наряду с растеканием от оси симметрии работает эффект нерасчетности, возникающей из-за повышения давления в скачке, который образуется в соударяющейся со стенкой сверхзвуковой струе. Соответствующая этому случаю картина течения изображена на рис. 50.7, на котором нанесены кромка сопла ( $M_0 = 2,52$ ;  $\theta_0 = 7^\circ 15'$ ), плоскость соударения, границы струи, изобары и звуковая линия (последняя дана штрихами). Пунктиром на рисунке ограничена та область течения, параметры газа в которой находились установлением по времени, как это описано в § 46. Над горизонтальной пунктирной прямой, где поток « $x$ -сверхзвуковой», расчет велся по схеме § 18, а справа от вертикальной—по той же схеме, что и в случае рис. 50.6.

Последние иллюстрации относятся к течению на входе и внутри плоского воздухозаборника. Рис. 50.8а отвечает случаю, когда число Маха набегающего потока  $M_0 = 4$ . Форма воздухозаборника дана в левом нижнем углу рисунка. Там же штриховой линией обведен четырехугольник, поток в котором дан в основной части рисунка. На рис. 50.8а наряду с обводами воздухозаборника (заштрихованные сплошные линии) нанесены изобары (цифры—значения  $p \cdot 10^2$ ), сгущения которых дают достаточно полное представление об ориентации скачков уплотнения.

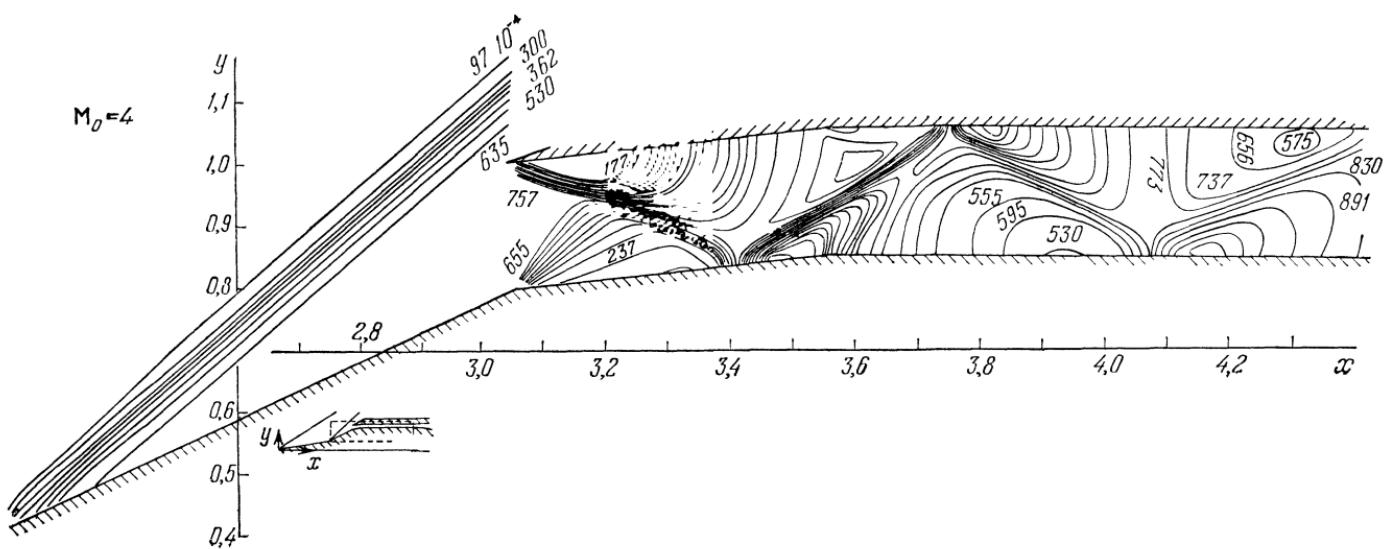


Рис. 50.8а.

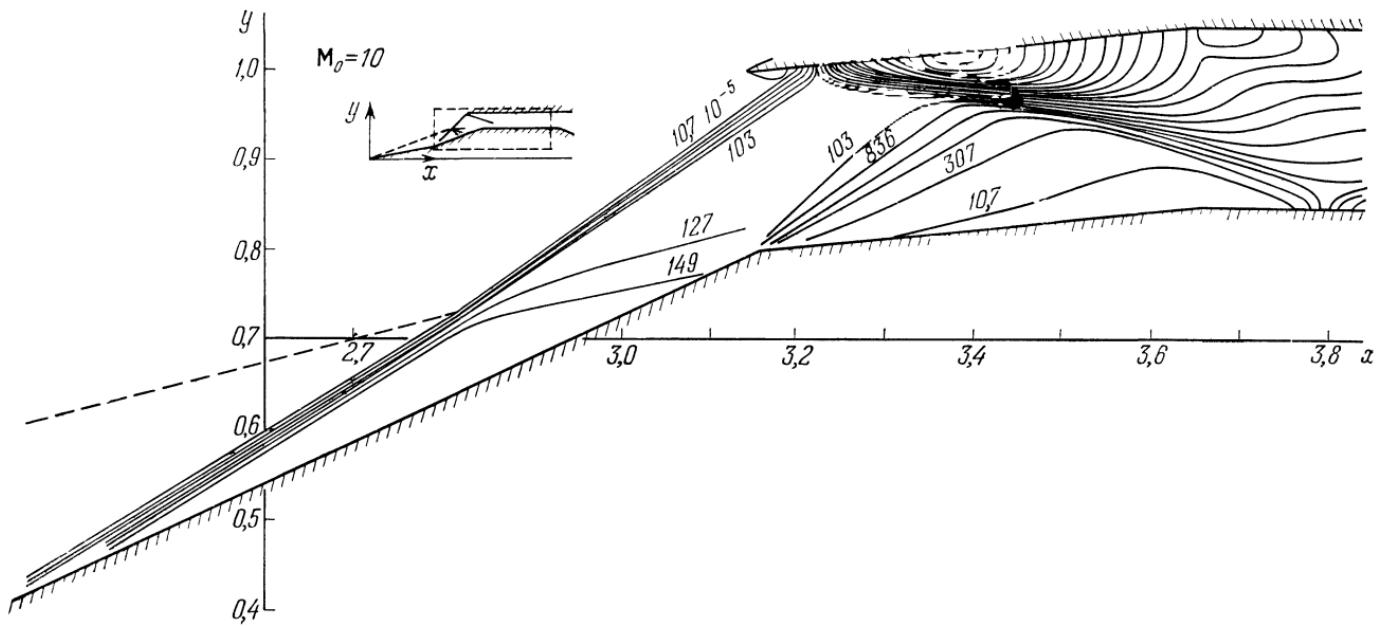


Рис. 50.86.

Аналогичным образом построен рис. 50.8б, который отвечает тому же воздухозаборнику при  $M_0 = 10$ . Дальнейшие детали по расчету течений в воздухозаборниках читатель может найти в работе [22].

### § 51. Течение в расширяющейся части пространственных сопел

Течение в расширяющейся части сопел с эллиптическим и с почти квадратным поперечным сечением. Пространственное течение в расширяющейся части осесимметричного сопла, обусловленное несимметрией течения в начальном сечении.

В качестве первых примеров, иллюстрирующих возможности и эффективность разностной схемы для пространственных сверхзвуковых течений (§ 26), рассмотрим результаты решения задач

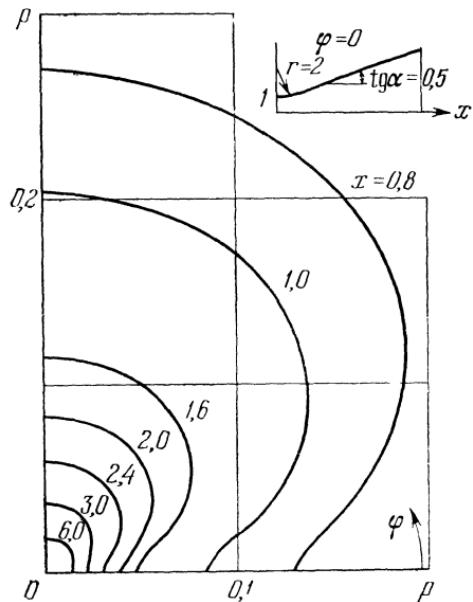


Рис. 51.1.

также использовали прямой [15] и обратный [78], [154] варианты метода характеристик. Переходим к рассмотрению примеров.

На рис. 51.1 представлены результаты расчета течения в эллиптическом сопле, поверхность которого задавалась уравнением

$$(y/a)^2 + (z/b)^2 = 1, \quad a/b = 2.$$

Здесь оси  $y$  и  $z$  декартовой системы координат  $x, y, z$  лежат в плоскостях симметрии течения, отвечающих  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi/2$ , где  $\varphi$  — угол, определяющий положение меридиональной плоскости

о пространственном течении в расширяющейся части сопла. Пространственный характер течения в этих примерах обусловлен либо конфигурацией сопла (отличием формы поперечных сечений от круговой), либо неосесимметричностью потока в начальном сечении. Представленные ниже результаты первоначально были частично опубликованы в работах [48], [64]. Отметим, что, хотя рассмотренные задачи представляют большой интерес для ряда приложений, имеющиеся публикации по данному вопросу крайне немногочисленны. Кроме перечисленных выше работ, известны исследования [15], [78], [154], авторы которых при проведении расчетов

цилиндрической системы координат  $x, r, \varphi$ . Функция  $a = a(x)$  такова, что пересечение контура сопла с плоскостью  $z = \varphi = 0$  образует кривую, показанную в верхней части рис. 51.1, для которой, в частности,  $y = 1$  при  $x = z = 0$ . Во входном сечении (при  $x = 0$ ) поток равномерен и параллелен оси  $x$ , а  $u \equiv 1,1$ . Здесь и далее скорости относятся к  $q_*$ , а давление — к  $\rho_* q_*^2$ , где  $q_*$  и  $\rho_*$  — критические скорость и плотность потока. На рис. 51.1 изображены поляры распределения давления по стенке, т. е. зависимости  $p = p(\varphi)$  для различных  $x$ . Видна существенная неравномерность давления по  $\varphi$ , причем минимальное давление для каждого  $x$  наблюдается в точках пересечения стенки с большой осью эллипса, т. е. при  $\varphi = 0$ . Для оценки точности расчеты были выполнены с двукратным и четырехкратным уменьшением количества расчетных ячеек в каждом сечении  $x = \text{const}$  (основные расчеты проводились при  $J \times K = 22 \times 16 = 352$  ячейках).

Полученные результаты оказались весьма близкими и быстро сходящимися. Например, интегралы сил давления, действующих на стенку сопла до сечения  $x = 10$ , которому отвечает увеличение площади поперечного сечения сопла примерно в 25 раз, для трех рассчитанных случаев оказались равными 0,705; 0,708 и 0,714 соответственно.

На рис. 51.2 изображены поляры  $p = p(\varphi)$  для сопла переменной эллиптичности. Его форма определялась тем же уравнением, что и в предыдущем случае, если в последнем положить  $b \equiv 1$ , а функцию  $a = a(x)$ , определяющую контур сопла в плоскости  $z = 0$ , задавать путем плавного сопряжения параболы  $y = \sqrt{x}$  и окружности с центром на оси  $y$ . В согласии с этим форма поперечных сечений такого сопла меняется от окружности ( $a/b = 1$ ) при  $x = 0$  до эллипса с отношением полусея  $a/b = \sqrt{5}$  при  $x = 5$ , причем размер малой оси эллипса во всех сечениях постоянен. Данное сопло близко к соплу, течение в котором было рассчитано в [154] методом характеристик. На входе в сопло поток в отличие от [154], где использовалось течение от источника, считался равномерным ( $u \equiv 1,1$ ). Тем не менее, несмотря

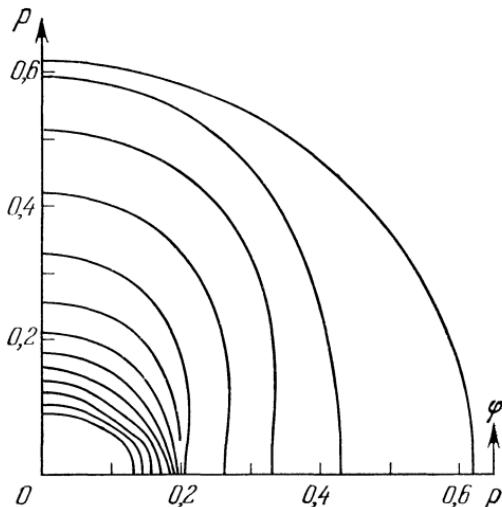


Рис. 51.2.

на такое различие, поляры на рис. 51.2 и на соответствующем рисунке указанной работы [154] обнаруживают качественное согласие (поляры на рис. 51.2 отвечают  $x=0$ ; 0,6 и далее до  $x=5$  примерно через 0,4).

Несколько следующих рисунков относятся к «суперэллиптическим» соплам, поверхность которых задавалась уравнением

$$y^\omega + z^\omega = [a(x)]^\omega \quad (\omega > 2),$$

где функция  $a(x)$  такая же, как в случае эллиптического сопла, рассмотренного в начале параграфа. Исследуемые сопла имеют

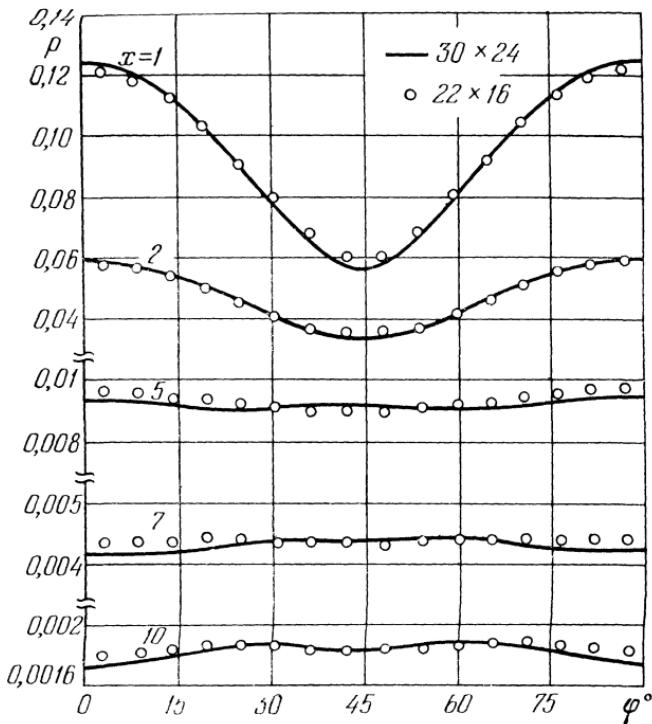


Рис. 51.3.

четыре плоскости симметрии ( $\phi=0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$ ), причем при  $\omega \gg 2$  их поперечные сечения близки к квадрату с плавно скругленными углами. Расчеты выполнялись для  $\omega=5$  и  $\omega=10$ . Параметры в сечении входа задавались, как и в предыдущих случаях, т. е.  $u=1,1$ .

Распределения  $\rho$  по  $\phi$  для сопла с  $\omega=5$ , эквивалентные полярам, изображенным на предыдущих рисунках, даны на рис. 51.3 кружочками. Максимальное разрежение реализуется в «уголках»

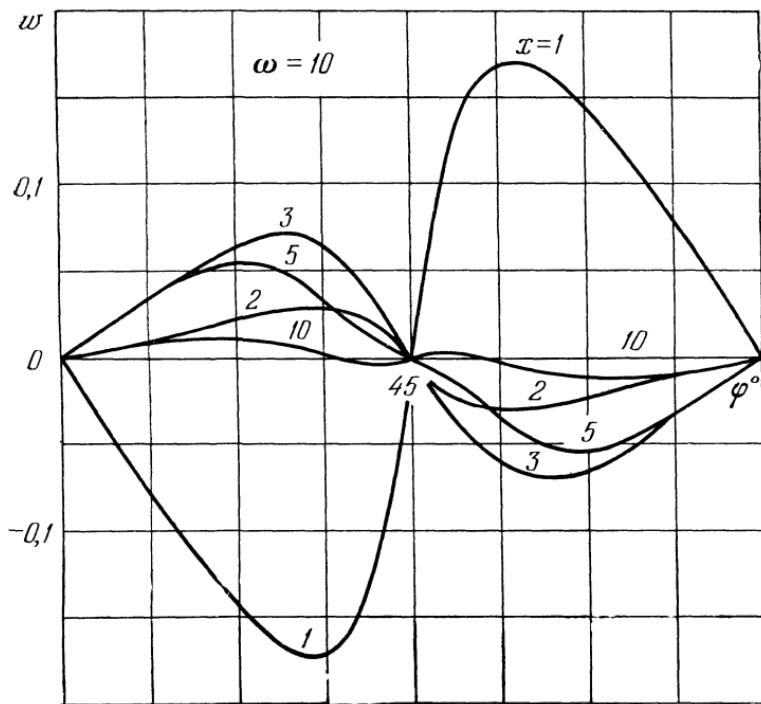


Рис. 51.4.

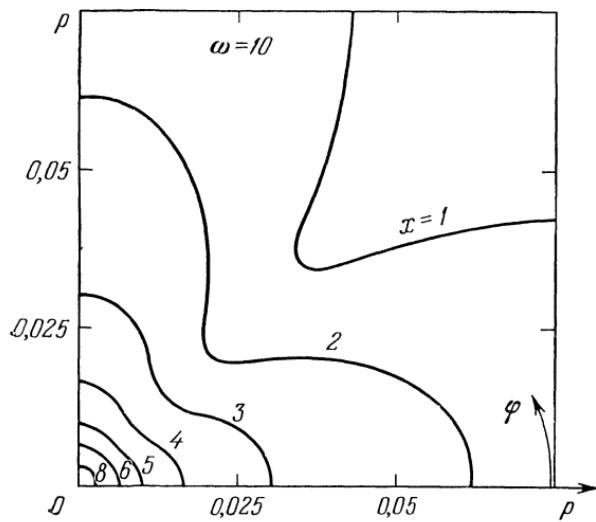


Рис. 51.5.

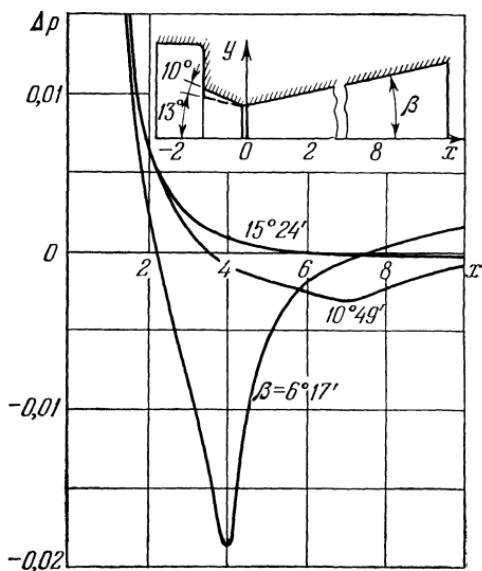


Рис. 51.6.

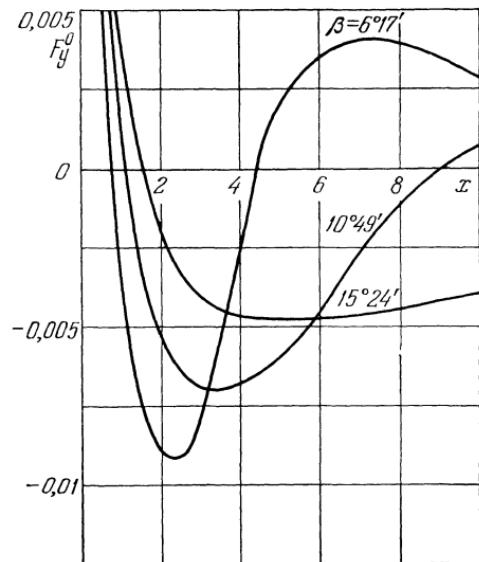


Рис. 51.7.

(при  $\varphi = \pi/4$ ). Результаты, представленные кружочками, были получены при  $J \times K = 22 \times 16 = 352$  ячейках. Для оценки точности на том же рисунке сплошными линиями представлены результаты расчета, выполненного с  $J \times K = 30 \times 24 = 720$  ячейками.

На следующих двух рисунках приведены некоторые результаты, полученные для «суперэллиптического» сопла с  $\omega = 10$ . На рис. 51.4 в зависимости от  $\varphi$  показаны распределения окружной составляющей скорости ( $w$ ) по стенке сопла для различных  $x$ . На рис. 51.5 для того же сопла изображены поляры давления  $p = p(\varphi)$ .

В предыдущих примерах поток на входе в рассматриваемую часть сопла был равномерным и параллельным оси  $x$ , а пространственность течения обусловлена пространственной формой сопла. На рис. 51.6 приведены результаты расчета пространственного течения в соплах с осесимметричной расширяющейся частью (конической). Поток на входе в нее (при  $x = 0$ ) задавался пространственным, причем неосесимметричность течения вызвана неосесимметричностью дозвуковой части сопла. Исследуемое сопло имеет одну плоскость симметрии ( $z = 0$ ). Сечения поверхности сопла с этой плоскостью даны в верхней части рис. 51.6, где  $\varphi = 0$  отвечает сплошная кривая, а  $\varphi = \pi$  — штриховая. Различие сплошной и штриховой кривых при  $x < 0$  отражает несимметрию дозвуковой части сопла (здесь в каждой плоскости  $x = \text{const}$  контур сопла при  $y < 0$  — окружность, а при  $y > 0$  — эллипс). Поля течения в дозвуковой и трансзвуковой частях сопла получались в процессе установления по времени с использованием разностной схемы § 27 (см. также § 49). На рис. 51.6 для трех полууглов расширяющейся части сопла  $\beta$  нанесена разность  $\Delta p$  значений  $p$  на нижней ( $\varphi = \pi$ ) и на верхней ( $\varphi = 0$ ) образующих. Несимметрия дозвуковой части ведет к появлению «боковой» силы  $F_y$ , лежащей в плоскости симметрии сопла. Кривые распределения  $F_y^0$  по  $x$  для трех значений  $\beta$  нанесены на рис. 51.7, где  $F_y^0$  — отношение  $F_y$  к  $x$ -компоненте полного импульса потока, а  $F_y$  включает силу, действующую на сужающуюся часть сопла. Представленные на рис. 51.6, 51.7 результаты составляют лишь фрагмент обширного исследования, выполненного в [46]—[48].

## § 52. Истечение недорасширенных струй из сопел с некруговым выходным сечением

Истечение сверхзвуковой струи из сопел с эллиптическим и с почти квадратным выходным сечением. Эффект изменения ориентации «большой оси» поперечного сечения струи при удалении от среза сопла.

Решение задачи об истечении недорасширенной сверхзвуковой струи идеального газа из сопла с некруговым выходным сечением, выполненное в работе [67] при помощи метода, описанного в § 26,

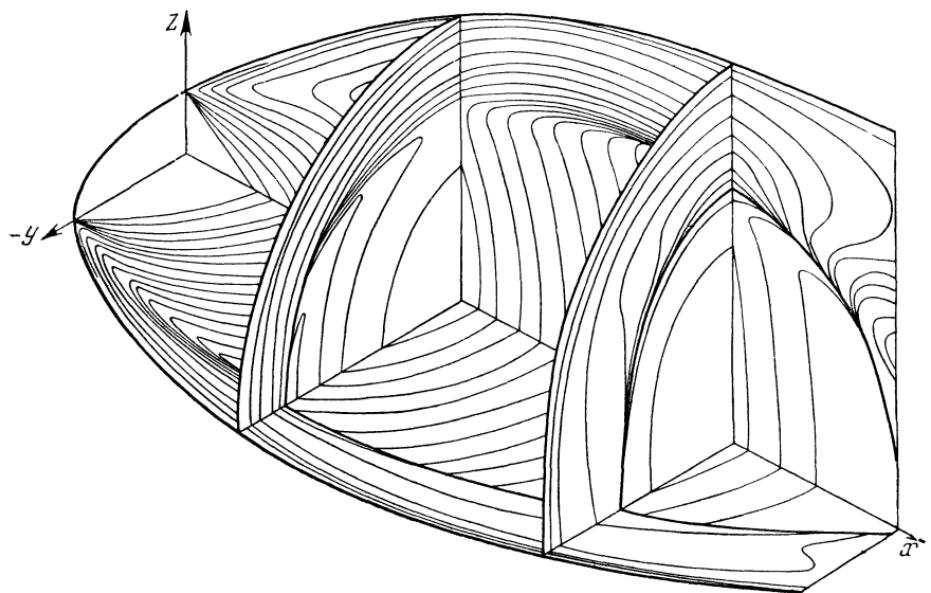


Рис. 52.1.

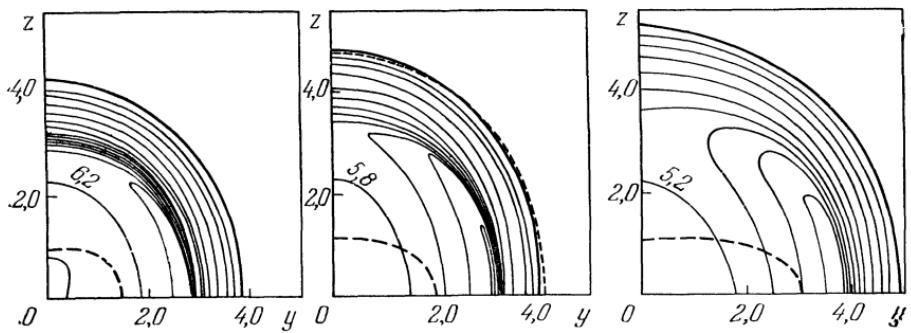


Рис. 52.2.

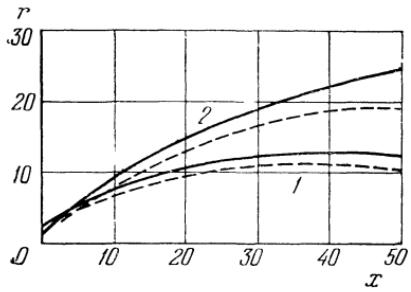


Рис. 52.3.

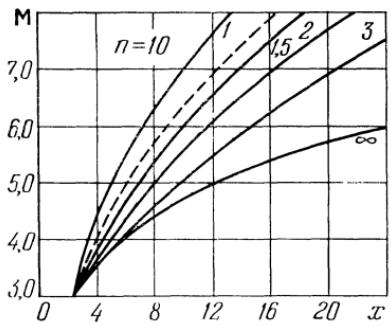


Рис. 52.4.

позволило обнаружить ряд неизвестных до этого качественных особенностей. Ниже приведены некоторые результаты этой работы, которые показывают возможности предложенного метода при решении весьма сложной задачи, включающей сквозной счет пространственного висячего скачка и центрированной волны, образующейся при обтекании кромки сопла. Прежде чем переходить к изложению результатов, отметим, что авторам неизвестны работы, в которых подобного типа задача была бы решена другими численными методами.

На рис. 52.1—52.7 приведены результаты расчета недорасширенных сверхзвуковых струй, истекающих из сопел с эллиптическим и «почти прямоугольным» сечением в плоскости среза ( $x=0$ ) в покоящуюся среду с внешним противодавлением  $p_e < p_0$ , где нижний индекс 0 приписывается параметрам струи на срезе сопла. Поток на выходе из сопла принимался равномерным и параллельным оси  $x$ , а его число Маха  $M_0 = 3,0$ .

Первые три рисунка относятся к струям, вытекающим из сопел при степени нерасчетности  $n = p_0/p_e = 10$ . На рис. 52.1 для эллиптического сопла с отношением полусей  $a/b = 2,0$  изображены сечение среза сопла, а также линии пересечения границы струи и поверхностей постоянства числа Маха с плоскостями  $y=0$ ,  $z=0$ ,  $x/b=10$ ,  $x/b=20$ . Масштаб по оси  $x$  взят вдвое меньшим, чем по осям  $y$  и  $z$ . Линии  $M=\text{const}$  нанесены через равные интервалы ( $\Delta M = 0,2$ ), причем крайние левые отвечают  $M = M_0 = 3,0$ . Сгущение поверхностей  $M=\text{const}$  дает висячий скачок, линии пересечения которого с соответствующими плоскостями показаны на рисунке жирными линиями, как и линии пересечения тех же плоскостей с границей струи. Для оценки погрешностей счета тот же случай был рассчитан при удвоенном числе ячеек в каждой плоскости  $x=\text{const}$  (число ячеек в исходном варианте равнялось 1280). Результаты, полученные при этом, оказались весьма близкими к изображенными. Так, например, границы струи в масштабе фигуры практически не различаются.

Как видно из рис. 52.1, рассчитанное течение имеет достаточно сложную пространственную структуру. В частности, образование висячего скачка в плоскости, проходящей через малую ось эллипса, происходит при больших  $x$ , чем в плоскости его большой полуоси. Другая весьма интересная особенность состоит в том, что более интенсивно газ расширяется в направлении оси  $z$ . В результате струя, вытекающая из сопла, сечение которого вытянуто в направлении оси  $y$ , начиная с некоторых  $x$ , оказывается вытянутой в направлении оси  $z$ , т. е. в перпендикулярном направлении. Усиление отмеченного эффекта с ростом эллиптичности выходного сечения сопла (отношения полуосей  $a/b$ ) хорошо видно из рис. 52.2, на котором в сечении  $x/b=10$

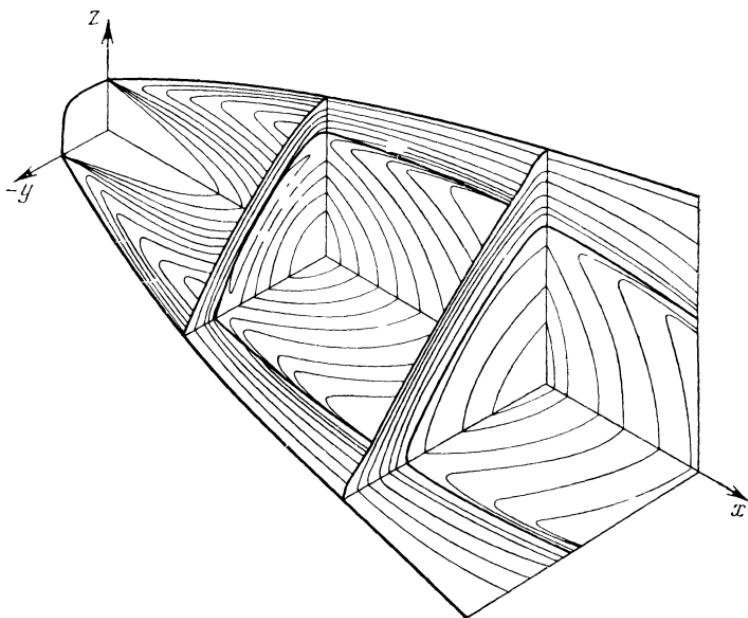


Рис. 52.5.

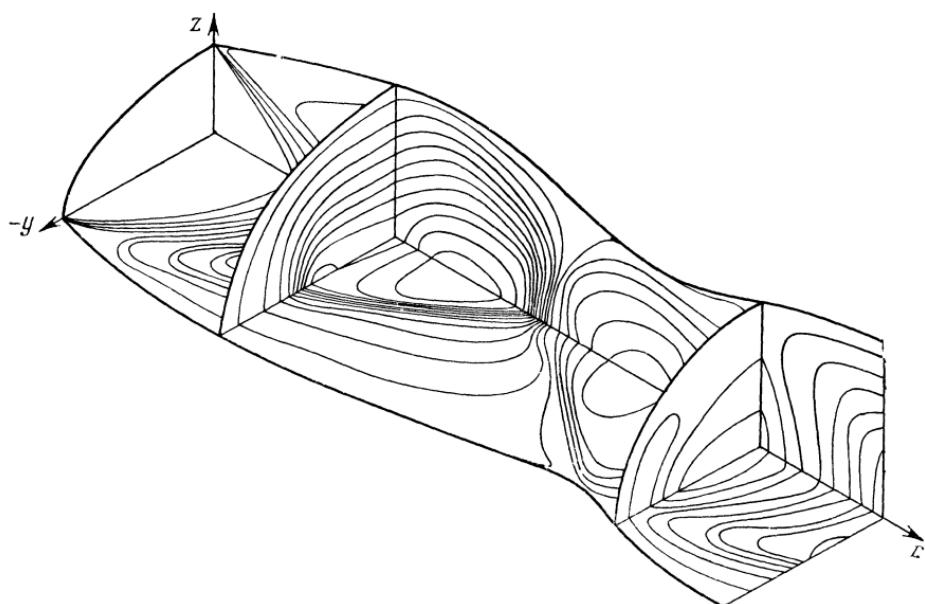


Рис. 52.6.

показаны линии  $M = \text{const}$ , граница струи, висячий скачок и проекция кромки сопла (штриховые линии) для трех значений  $a/b = 1,5; 2,0; 3,0$ . На рис. 52.2 в каждом случае для одной из линий  $M = \text{const}$  указано соответствующее значение числа Маха, прочие кривые проведены через  $\Delta M = 0,2$ , а  $y$  и  $z$  отнесены к  $b$ .

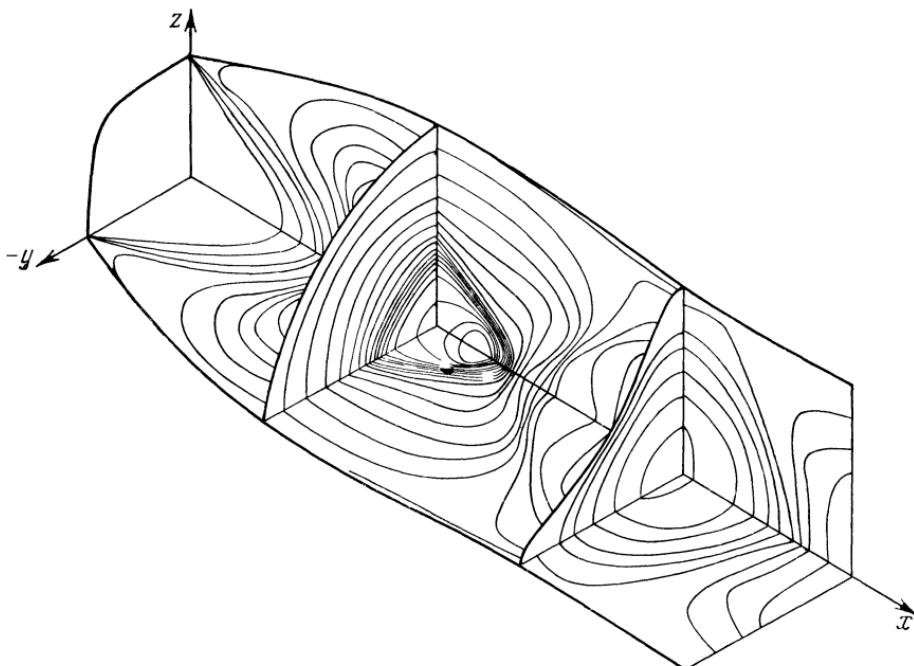


Рис. 52.7.

Для оценки точности при  $a/b = 2,0$  был выполнен дополнительный расчет с использованием вчетверо меньшего числа точек в каждой плоскости  $x = \text{const}$ . Граница струи, полученная в результате такого расчета, нанесена на рис. 52.2 пунктиром. Описанный выше эффект изменения ориентации большой оси попечерного сечения струи с ростом степени нерасчетности усиливается, как это следует из рис. 52.3, отвечающего  $n = 100$  и  $a/b = 2$ . Сплошные линии на рисунке дают границу струи, а штриховые — висячий скачок в плоскостях симметрии струи. Кривые, отмеченные цифрой 1, соответствуют плоскости большой оси эллипса, а цифрой 2 — его малой оси,  $r$  — расстояние до оси  $x$ , линейные размеры отнесены к  $b$ .

Влияние формы выходного сечения сопла на распределение числа Маха вдоль оси  $x$  хорошо видно из рис. 52.4, отвечающего  $n = 10$ . Сплошные кривые на рисунке относятся к эллиптическим

соплам (цифры над кривыми—значения  $a/b$ ), причем  $a/b = 1$  соответствует осесимметричной струе, а  $a/b = \infty$ —плоской, штрихами дано аналогичное распределение, имеющее место для сопла с «почти квадратным» сечением среза (уравнение кромки сопла:  $y^6 + z^6 = 1$ ). Во всех случаях расстояние вдоль оси  $x$  отнесено к минимальному размеру поперечного сечения сопла. Представление о геометрии струи и висячего скачка в случае «почти квадратного» сопла при  $n = 10$  дает рис. 52.5, построенный по тому же принципу, что и рис. 52.1, с тем отличием, что здесь масштабы по всем осям одинаковые. Струя, вытекающая из такого сопла, наиболее интенсивно расширяется в направлении осей  $y$  и  $z$ . В результате поперечное сечение струи приобретает форму, близкую к квадрату, повернутому относительно выходного сечения сопла на  $\pi/4$ .

На последних двух рисунках тем же способом, что и в предыдущих случаях, представлены результаты расчетов струй, вытекающих из эллиптического (рис. 52.6) и «почти квадратного» (рис. 52.7) сопел при  $n = 2,0$ . Линии  $M = \text{const}$  на этих рисунках проведены через  $\Delta M = 0,1$ , масштаб по оси  $x$  в 2,5 раза меньше, чем по осям  $y$  и  $z$ .

### § 53. Боковое взаимодействие сверхзвуковых осесимметричных струй друг с другом и с твердыми поверхностями

Взаимодействие недорасширенных осесимметричных струй с плоскостями, параллельными и не параллельными оси сопла. Взаимодействие между одинаковыми «параллельными» струями, истекающими из сопел, оси которых лежат в одной плоскости. Боковое взаимодействие струи с цилиндрической поверхностью, параллельной оси сопла.

В данном параграфе приводятся результаты численного решения задач о «боковом» взаимодействии сверхзвуковых осесимметричных струй друг с другом и с твердыми поверхностями. Представленные результаты получены, как и все результаты данной главы, методом § 26. Ранее большая часть их была опубликована в работах [69], [70], содержащих, кроме того, описание дополнительных деталей численного алгоритма, которые обусловлены особенностями рассматриваемых задач. Приводимые иллюстрации ограничены « $x$ -сверхзвуковыми» течениями, а следовательно, лишь вполне определенным диапазоном степеней нерасчетности, углов встречи струй и т. п. Тем не менее рассмотрение соответствующих результатов целесообразно хотя бы потому, что имеющиеся примеры решения подобных задач другими методами единичны, несмотря на большой интерес к этим задачам со стороны аэродинамиков и на весьма интенсивные усилия, предпринимавшиеся для их решения. В связи со сказанным отметим, что, наряду с цитиро-

ванными выше работами, авторам известны лишь две работы, в которых решались задачи данного типа. В [131] при помощи трехмерного метода характеристик рассчитана начальная область взаимодействия двух сверхзвуковых осесимметричных струй, оси которых лежат в одной плоскости и пересекаются под углом в  $60^\circ$ . В [134] решение задачи об интерференции пяти струй, вытекающих из связки сопел, получено методом типа Лакса—Вендрова без выделения поверхностей разрыва. Малое количество работ,

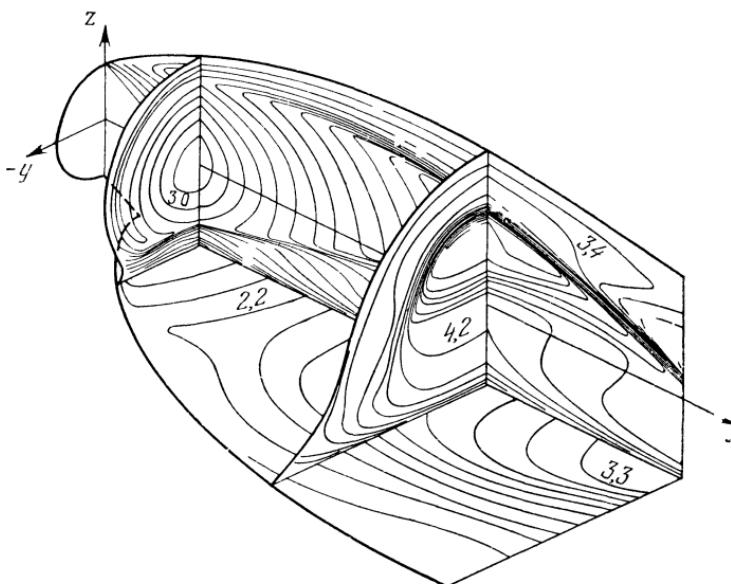


Рис. 53.1.

содержащих численное решение задач о взаимодействии сверхзвуковых струй, объясняется двумя причинами: пространственностью течения и наличием в потоке поверхностей разрыва не менее сложных, чем в случае течения в пространственных струях, рассмотренном в предыдущем параграфе. Все это сильно усложняет составление и отладку программ для ЭВМ и проведение расчетов. Как будет видно из приводимых ниже примеров, метод § 26 позволяет успешно преодолевать указанные трудности. Переходим к рассмотрению результатов.

На рис. 53.1—53.10 представлены результаты расчета взаимодействия струи, которая истекает из конического сопла, с плоскостью «соударения», параллельной оси сопла. Предполагается, что на выходе из сопла реализуется течение от источника. При этом поток в сечении выхода определяется параметрами на кромке сопла (этим параметрам будем приписывать нижний индекс 0):

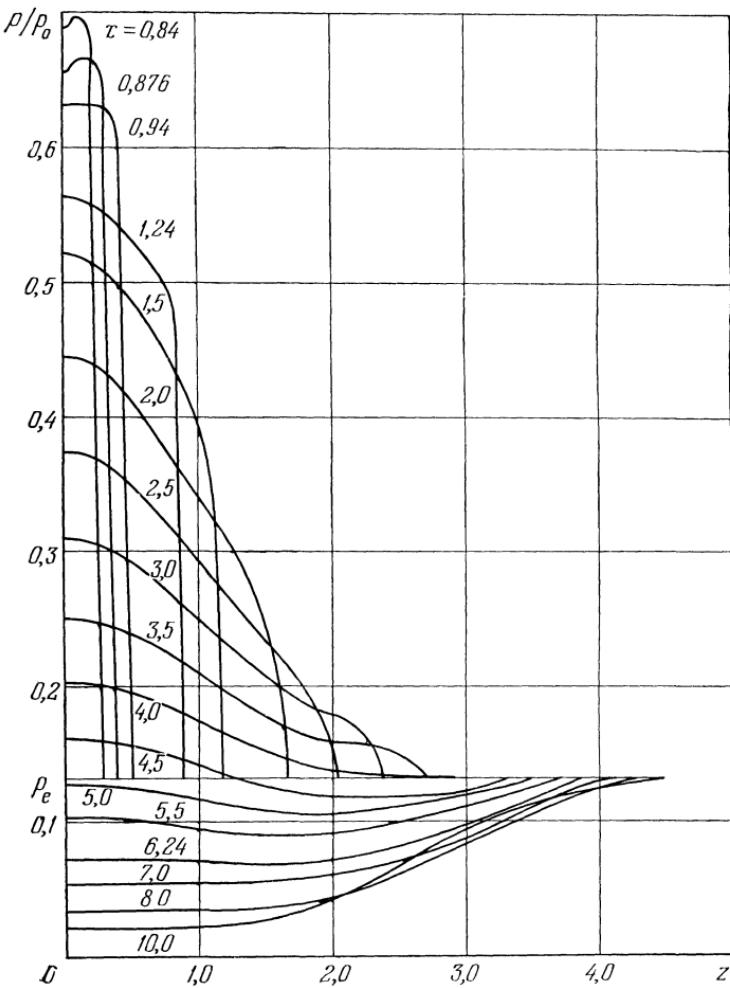


Рис. 53.2.

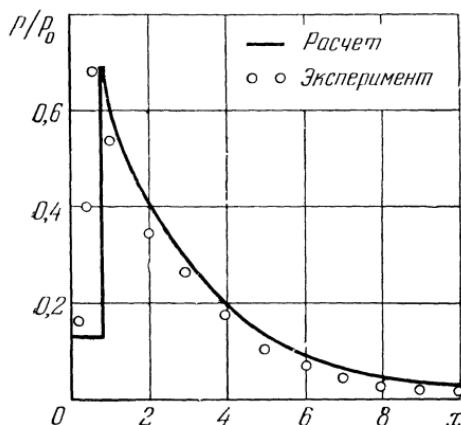


Рис. 53.3.

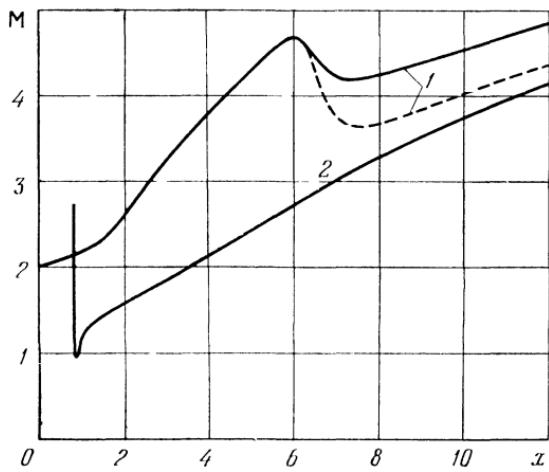


Рис. 53.4.

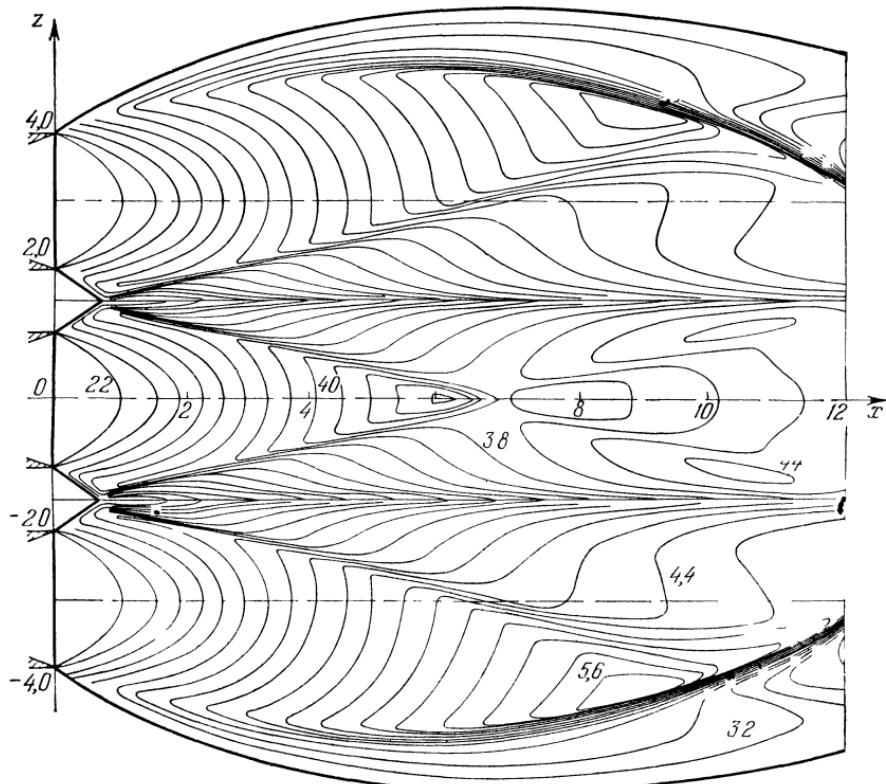


Рис. 53.5.

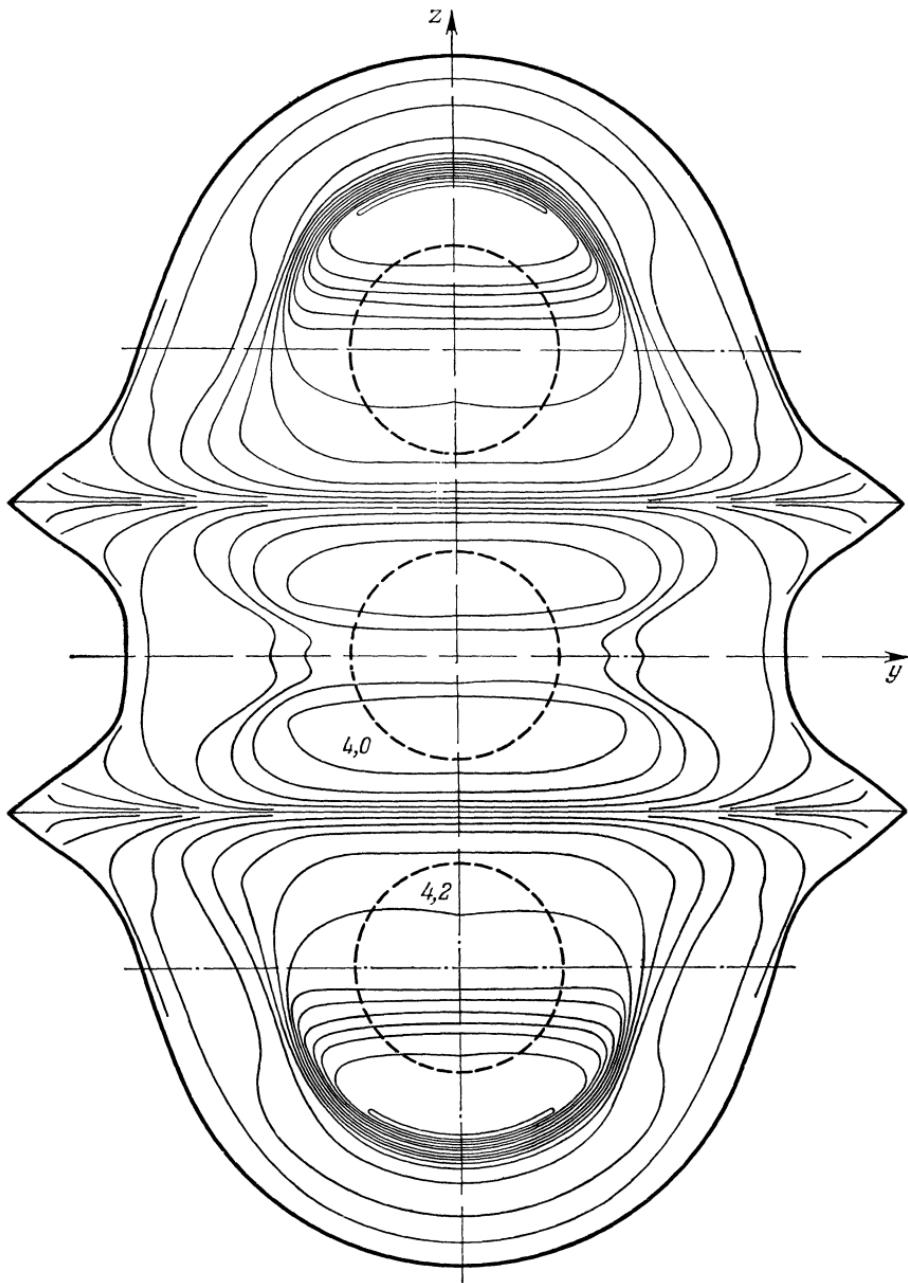


Рис. 53.6.

числом Маха  $M_0$ , углом наклона вектора скорости к оси сопла (полууглом его раскрытия)  $\theta_0$  и степенью нерасчетности  $n = p_0/p_e$ , где  $p_e$  — давление в «затопленном» пространстве. Совместим ось  $x$  декартовой системы координат  $x, y, z$  с осью сопла, плоскость

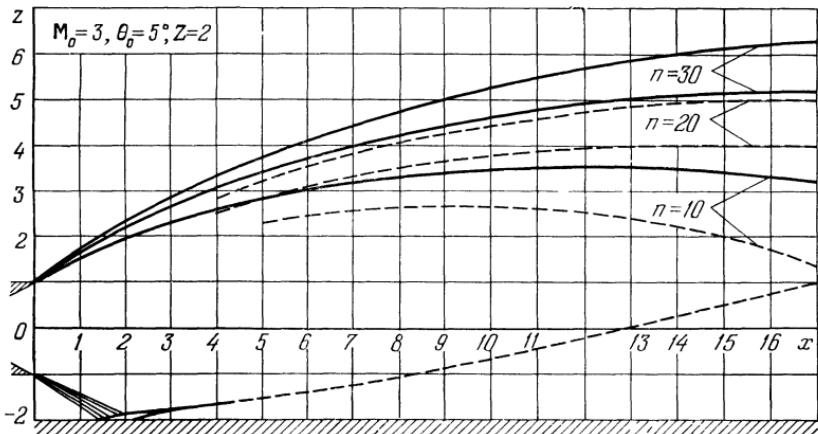


Рис. 53.7.

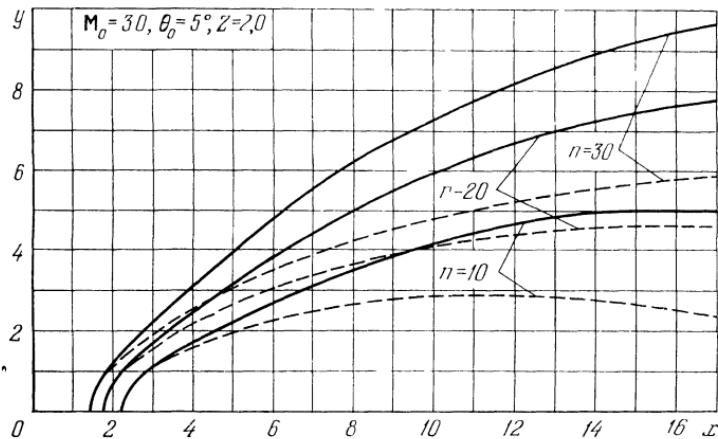
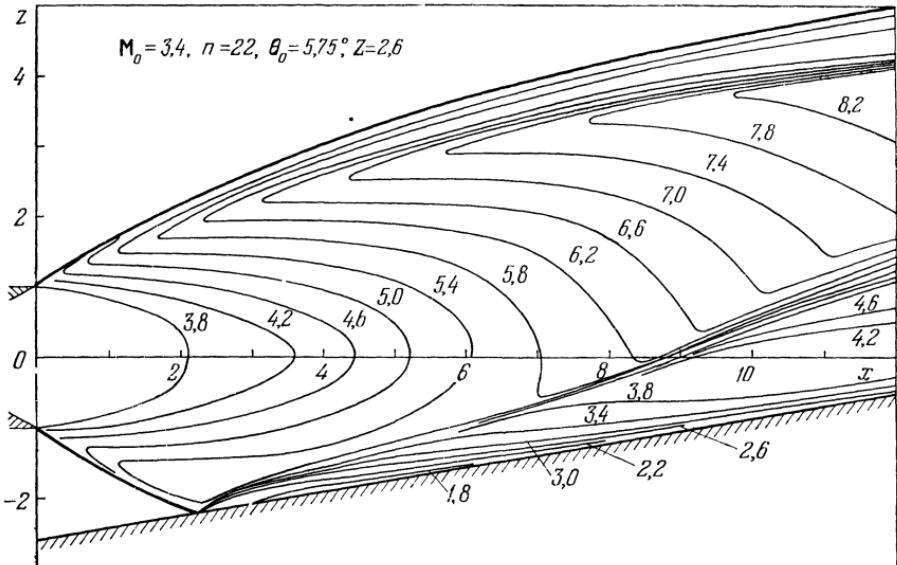


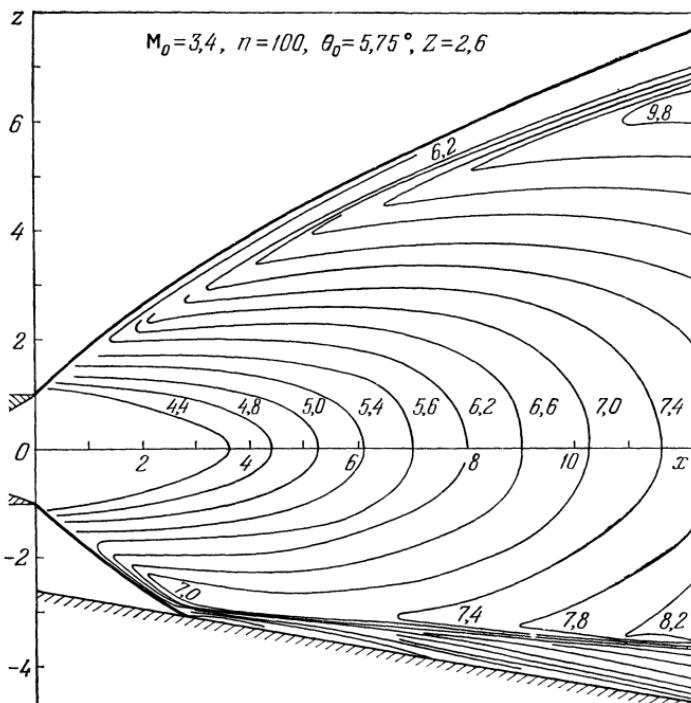
Рис. 53.8.

$x, y$  расположим параллельно плоскости соударения, а за характерный линейный размер возьмем радиус выходного сечения сопла. В соответствии с этим плоскость соударения дается уравнением  $z = -Z$ , где  $Z$  — заданное число, большее единицы.

Первые три рисунка отвечают следующему набору определяющих параметров:  $M_0 = 2$ ,  $\theta_0 = 5$ ,  $n = 7,6$  и  $Z = 1,48$ . Рис. 53.1 дает достаточно полное представление о пространственной



a)



б)

Рис. 53.9.

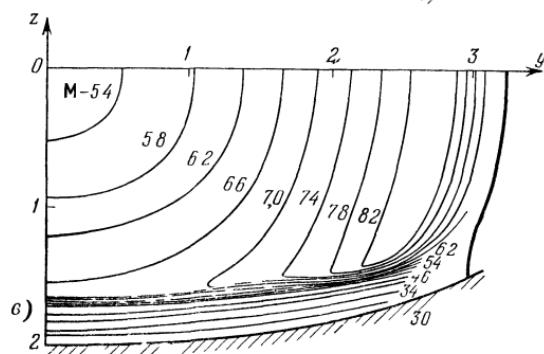
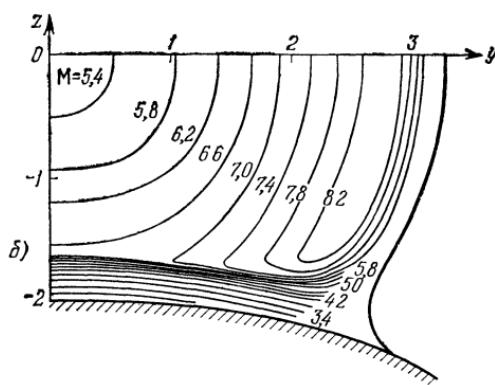
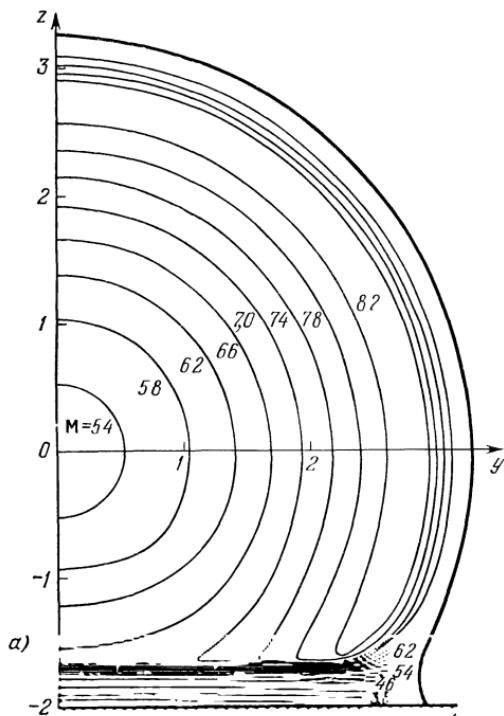


Рис 53.10.

структуре течения. На нем изображены сечение среза сопла, а также линии  $M = \text{const}$  через  $\Delta M = 0,2$  и граница струи в плоскостях  $y = 0$ ,  $z = -Z = -1,48$ ,  $x = 2$  и  $x = 8$ . На рис. 53.2 для различных сечений  $x = \text{const}$  даны распределения давления поперек плоскости соударения. Видно, что в согласии с картиной течения, изображенной на рис. 53.1, с удалением от среза сопла область повышенного давления сменяется областью разрежения. Тот же эффект наблюдается и на рис. 53.3, где показано распределение давления вдоль линии пересечения плоскостей  $z = -Z$  и  $y = 0$ , а кружками изображены экспериментальные данные, приведенные в [69]. На рис. 53.4 показано изменение числа Маха вдоль оси  $x$  (кривые 1) для двух случаев: рассмотренного выше взаимодействия струи с одной плоскостью соударения (сплошная кривая) и для струи, заключенной между двумя такими же плоскостями ( $z = -Z$  и  $z = Z$ ). В последнем случае (штриховая линия) торможение газа вдоль оси  $x$  вызвано скачками, приходящими от обеих плоскостей, и поэтому более интенсивно. Кривые 2 на том же рисунке дают распределения числа Маха на линии пересечения плоскости соударения и плоскости симметрии ( $y = 0$ ). Эти распределения для обоих случаев совпадают до сечения ( $x \approx 11$ ), в котором скачки, образующиеся при соударении струи с плоскостями  $z = -Z$  и  $z = Z$ , достигают противоположной плоскости.

В согласии со сказанным, проведенные расчеты позволяют строить картину течения на начальном участке ( $x \leq 11$ ) взаимодействия произвольного количества одинаковых струй, вытекающих из сопел, оси симметрии которых расположены в одной плоскости на расстоянии  $2Z$  друг от друга. Достаточно полное представление о структуре таких течений дают рис. 53.5 и 53.6, на которых границы струй и линии  $M = \text{const}$  при  $\Delta M = 0,2$  изображены в плоскости симметрии ( $y = 0$ ) и в плоскости  $x = 8$ . Окружности, нарисованные штрихами на рис. 53.6,— проекции кромок сопел.

Как показали расчеты, при взаимодействии струи с одной плоскостью с ростом степени нерасчетности устанавливается автомодельность по  $n$ . Последняя состоит в том, что в некоторой области вблизи плоскости соударения течение перестает зависеть от давления внешней среды. Указанное свойство достаточно четко прослеживается на рис. 53.7, на котором для случая  $M_0 = 3,0$ ,  $\theta_0 = 5^\circ$ ,  $Z = 2,0$  и трех значений  $n$  изображены сечения границы струи и скачков уплотнения плоскостью симметрии. Естественно, что автомодельность нарушается при приближении к границам струи, поскольку форма границ зависит от  $n$  весьма сильно, как это видно из рис. 53.8. На указанном рисунке для тех же случаев сплошными кривыми показаны следы границ струи на плоскости соударения. Для сравнения на этом же рисунке штри-

хами нанесены линии пересечения соответствующих осесимметричных струй плоскостью  $z = -Z$ . Отличие сплошных и штриховых линий демонстрирует эффект растекания газа по плоскости соударения.

Все предыдущие результаты были получены для плоскости соударения, параллельной оси  $x$ . На двух следующих рисунках показаны линии  $M = \text{const}$  (через  $\Delta M = 0,4$ ) в плоскости симметрии течения для плоскостей соударения, наклоненных к оси  $x$  под углом  $\alpha$ , при  $M_0 = 3,4$ ,  $\theta_0 = 5,75^\circ$  и  $Z = 2,6$ . Рис. 53.9а соответствует  $n = 22$  и  $\alpha = 10^\circ$ , а рис. 53.9б — значениям  $n = 100$  и  $\alpha = -10^\circ$ .

Заканчивая изложение результатов по боковому взаимодействию струй с твердыми стенками, приведем примеры расчета взаимодействия с поверхностями, отличными от плоских. На рис. 53.10, а, б, в показаны линии  $M = \text{const}$  (через  $\Delta M = 0,4$ ) в плоскости  $x = 4$  для трех поверхностей при  $M_0 = 4,11$ ,  $\theta_0 = 8,67^\circ$ ,  $n = 45$  и  $Z = 2$ . Рис. 53.10, а отвечает плоской поверхности, а рис. 53.10, б, в — цилиндрическим поверхностям, оси которых параллельны оси  $x$ . Части струй, отвечающие  $z > 0$ , на рис. 53.10, б, в не показаны, так как они тождественны изображенной на рис. 53.10, а. Как уже указывалось, более подробное изложение результатов по боковому взаимодействию сверхзвуковых струй друг с другом и с препятствиями можно найти в работах [69], [70].

## § 54. Обтекание конических тел

Использование процесса установления по переменной  $r$  сферической системы координат Примеры расчета обтекания кругового, эллиптического и почти пирамидального кочусов, треугольного и V-образного крыла и комбинации кругового конуса с треугольным крылом.

В настоящем параграфе представлены результаты расчета обтекания конических тел, которые получены при помощи разностной схемы для пространственных сверхзвуковых течений, описанной в § 26, и процесса установления по радиальной координате сферической системы координат. Рассмотрение этих результатов интересно по ряду причин. Действительно, задачи сверхзвукового обтекания конических тел всегда привлекали внимание аэродинамиков как в силу большого значения, которое круговой конус, треугольное крыло и другие конические конфигурации имеют в приложениях, так и из-за возможности сведения исходных пространственных задач к двумерным. Отмеченные обстоятельства привели к тому, что были разработаны весьма точные и эффективные численные методы решения многих задач, одно перечисление которых могло бы служить дополнительным свидетельством важности и актуальности рассматриваемой проблемы. Читателю, знакомому с указанными методами и решениями, по-видимому,

интересно сопоставить с ними результаты, полученные при помощи метода, описанного в данной монографии. Отметим, что такое сопоставление дает дополнительную информацию по эффективности и точности последнего при расчете сверхзвукового обтекания не только конических, но и пространственных тел. Прежде чем переходить к изложению результатов, сделаем ряд замечаний общего характера, которые, как нам представляется, могут быть полезны для более широкого круга читателей, незнакомых с соответствующей литературой.

При численном решении задач сверхзвукового обтекания конических тел, отличных от кругового конуса, помещенного в поток под иенуловым углом атаки, используются два подхода. При первом подходе интегрируются уравнения конического течения, при получении которых учитывается независимость параметров потока от радиальной координаты, отсчитываемой от вершины обтекаемого тела. Последнее обстоятельство, снижая число независимых переменных до двух, позволяет применять такие весьма эффективные методы, как метод интегральных соотношений, метод прямых, метод характеристик и т. д. Следует иметь в виду, что уравнения конического течения в ударном слое, заключенном между поверхностью тела и головной ударной волной, имеют эллиптический (как в случае кругового конуса при сравнительно малых углах атаки) или смешанный (эллиптико-гиперболический) тип. В последнем случае в области течения может иметься не одна, а несколько подобластей эллиптичности уравнений, причем форма границ различных подобластей заранее неизвестна. Более того, подобласти гиперболичности, как правило, замыкаются скачками уплотнения, что в рамках двумерной задачи существенно затрудняет использование перечисленных выше методов. Вследствие этого данный подход нашел широкое применение либо в случаях, когда в ударном слое заведомо отсутствуют внутренние скачки уплотнения, либо при расчете потока не во всем, а в части ударного слоя. Так, например, в [6] течение на наветренной стороне конусов, обтекаемых под большими углами атаки, рассчитывалось методом прямых, а на боковых сторонах — методом характеристик. В верхней эллиптической области, которая примыкает к подветренной стороне конуса, течение таким путем рассчитать нельзя.

Другой подход, применение которого для расчета конических течений становится все более широким, основывается на интегрировании не двумерных, а трехмерных уравнений и на использовании процесса установления по третьей переменной (по радиальной координате или по времени). Установление по радиальной координате, будучи впервые предложено К. И. Бабенко и Г. П. Воскресенским [3], получило дальнейшее развитие в ряде исследований (например, в [4], [89], [127], [141], [150]). Если,

как это имеет место во многих практически интересных случаях, радиальная составляющая скорости газа (в сферических координатах) превосходит скорость звука, то система используемых при расчете уравнений пространственного течения во всем ударном слое является гиперболической, что, несмотря на повышение размерности задачи, существенно упрощает решение. Аналогичное положение имеет место и при установлении по времени, которое использовалось, например, в работе [8]. Уравнения, интегрируемые в последнем случае, получаются либо формальным добавлением в уравнения конического течения производных от искомых параметров по времени, либо также формальным отбрасыванием в уравнениях пространственного нестационарного течения производных по радиальной координате сферической системы координат и поэтому не описывают никакого реального нестационарного потока. Тем не менее распределения, вырабатывающиеся в силу этих уравнений в процессе установления, удовлетворяют уравнениям конического течения, причем соответствующая система гиперболична вне зависимости от величины радиальной компоненты вектора скорости газа.

Если процесс установления основывается на применении разностных схем, предусматривающих выделение различных поверхностей разрыва, то наличие в потоке достаточно сложных конфигураций внутренних скачков уплотнения и при таком подходе существенно затрудняет построение численных алгоритмов, а следовательно, составление и отладку программ для ЭВМ. В связи с этим при расчете обтекания конических тел с использованием процесса установления все большее распространение находят конечноразностные схемы, допускающие сквозной счет, при котором поверхности разрыва заранее не выделяются, а получаются в процессе счета как области резкого изменения параметров. Приводимые ниже результаты, полученные при помощи разностной схемы именно такого типа (применялся записанный в сферических координатах конечноразностный вариант схемы, описанной в § 26) в сочетании с установлением по радиальной координате, достаточно наглядно демонстрируют возможности второго подхода. Опуская непринципиальные подробности, которые можно найти в первоначальной публикации [65], отметим, что так как одним из элементов примененной схемы является решение задачи о взаимодействии двух равномерных сверхзвуковых потоков, то при ее применении выделение головной ударной волны проводится без введения каких-либо дополнительных алгоритмов. Данное обстоятельство, которое следует отнести к достоинствам схемы, использовалось во всех рассчитанных примерах. Эффективность схемы иллюстрируется результатами расчетов обтекания кругового, эллиптического и близкого к пирамидальному конусов, треугольного и V-образного крыльев и комбинации кругового

конуса с треугольным крылом. Само перечисление рассчитанных конфигураций, а также то, что большая часть расчетов выполнялась по единой программе на ЭВМ типа М-220 (без использования внешней памяти), говорит о простоте и универсальности используемого метода. Естественно, что этот метод, будучи методом первого порядка, при разумном числе расчетных ячеек не претендует на особо высокую точность (представление о точности дают приводимые ниже сопоставления с результатами различных авторов). В то же время, уступая по точности методам ряда других работ, он позволяет получать более полную информацию о течении тогда, когда более точные методы просто не работают, как в случае обтекания тел под сравнительно большими углами атаки. В этой связи напомним, что одни из первых результатов по течению на подветренной стороне конусов, обтекаемых в указанном диапазоне углов атаки, были получены в [65] именно этим методом. Еще в большей степени возможности метода и его сравнительная простота проявляются при расчете пространственных конфигураций (см. следующий параграф). В то же время недостаточная точность метода (первый порядок аппроксимации), как и любого другого метода «сквозного счета», не позволяет (при разумном числе расчетных ячеек) исследовать детали течения в тонких энтропийных слоях, а также вблизи особых точек, знание которых в ряде случаев представляет определенный интерес.

Перейдем к примерам расчета.

При рассмотрении обтекания произвольного конического тела под углом атаки  $\alpha$  будем считать, что вектор скорости набегающего потока, параметрам которого припишем индекс 0, лежит в плоскости  $x, y$  декартовой системы координат  $x, y, z$ . Ось  $x$  указанной системы связем с телом и совместим с какой-либо из его характерных осей (например с осью симметрии и т. п.). Начало отсчета и полюс сферической системы  $r, \theta, \varphi$  поместим в вершину тела, угол  $\theta$  будем отсчитывать от оси  $x$  и угол  $\varphi$  — от плоскости  $x, y$  так, чтобы  $\varphi = 0$  отвечало отрицательному, а  $\varphi = \pi$  — положительному лучам оси  $y$ . При представлении результатов используются «конические» переменные  $\eta = y/x$  и  $\zeta = -z/x$ , а также нормализованное расстояние от тела  $\xi$ , введенное так, что  $\xi = 0$  на поверхности тела и  $\xi = 1$  на ударной волне.

Рис. 54.1,  $a, b$  — 54.3  $a — e$  относятся к обтеканию круговых конусов под ненулевым углом атаки. На рис. 54.1,  $a, b$  представлены расчеты обтекания конуса с полууглом при вершине  $\theta_k = 20^\circ$  сверхзвуковым потоком с числом Маха  $M_0 = 7$  в случае двух углов атаки:  $\alpha = 15^\circ$  и  $\alpha = 30^\circ$  соответственно. На рисунках показаны в переменных  $\eta, \zeta$  поперечное сечение конуса, ударная волна (двойная линия) и линии постоянства числа Маха  $M_r$ , подсчитанного по составляющей вектора скорости, касательной к сфере  $r = \text{const}$ . Значения  $M_r$  указаны цифрами около некоторых

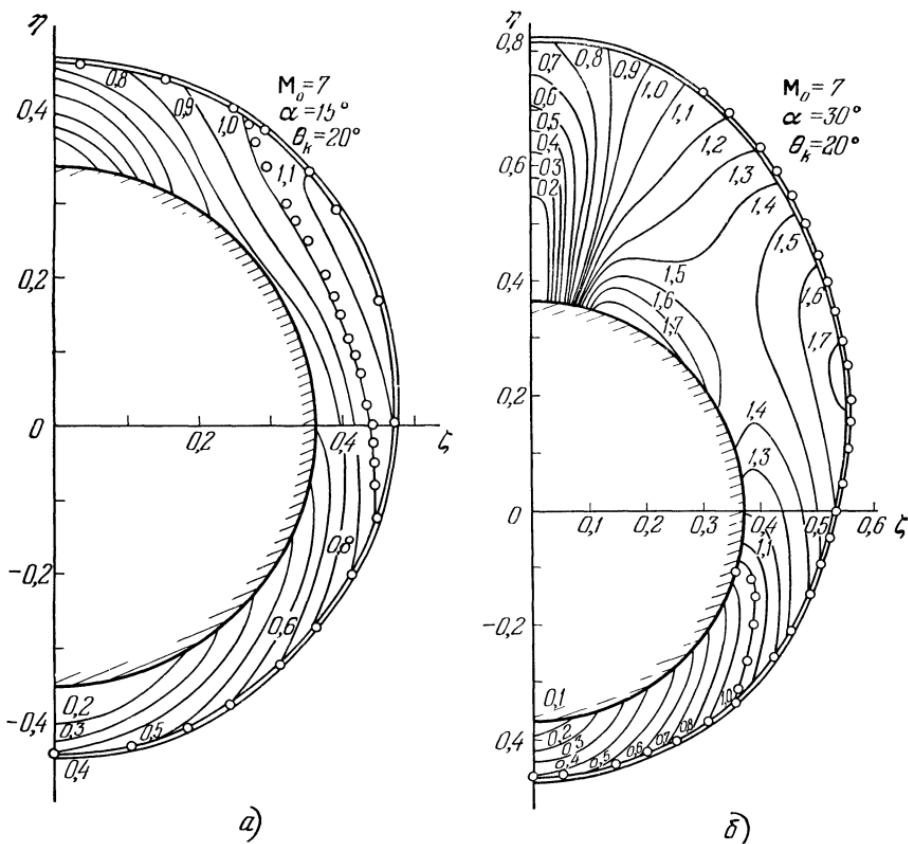


Рис. 54.1.

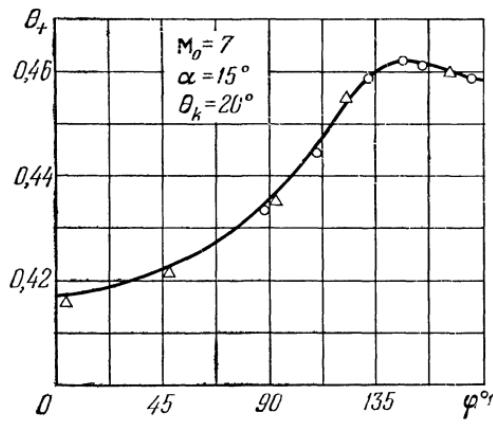


Рис. 54.2.

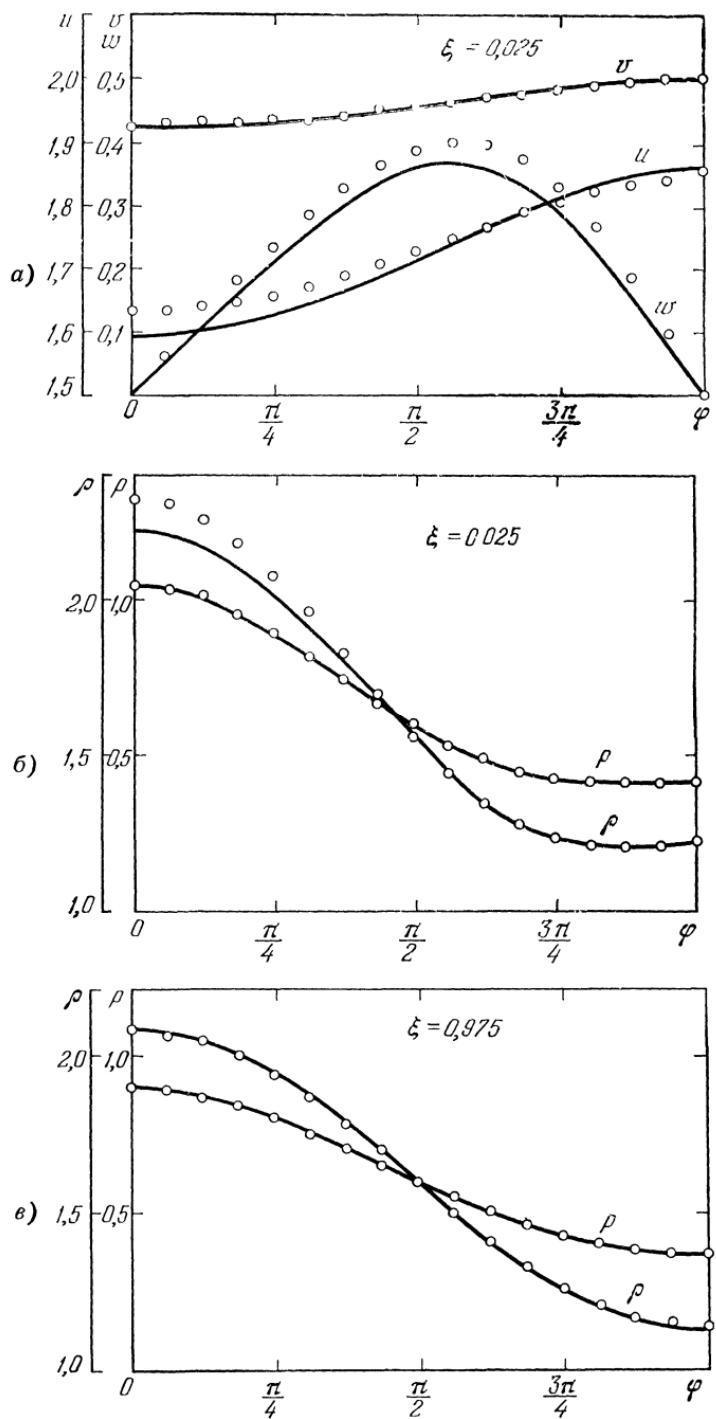


Рис. 54.3.

из линий  $M_t = \text{const}$ , остальные линии постоянства  $M_t$  построены через интервал  $\Delta M_t = 0,1$ . Известно, что число Маха  $M_t$  определяет тип системы уравнений конического течения. При  $M_t < 1$  указанная система эллиптична, а при  $M_t > 1$  — гиперболична. В соответствии с этим в случае рис. 54.1, *a* эллиптическая область занимает большую часть ударного слоя. При увеличении угла атаки область гипербolicности растет и доходит до поверхности конуса (рис. 54.1, *b*), разделяя область эллиптичности на две подобласти — нижнюю и верхнюю. Нижняя эллиптическая подобласть примыкает к наветренной стороне конуса и имеет структуру, аналогичную структуре дозвуковой зоны перед затупленным телом. Образование верхней эллиптической подобласти связано с возникновением вблизи плоскости симметрии внутренних ударных волн, которым на рисунке отвечает сгущение линий  $M_t = \text{const}$ .

Для сравнения на рис. 54.1, *a* кружочками нанесены точки ударной волны и линии  $M_t = 1$ , взятые из [4], а на рис. 54.1, *b* — аналогичные данные, полученные в [6] (верхняя область эллиптичности в [6] не рассчитывалась). Более аккуратное сравнение формы ударной волны, которая в переменных  $\varphi, \theta$  дается кривой  $\theta = \theta_+(\varphi)$  для случая, отвечающего рис. 54.1, *a*, проведено на рис. 54.2, где кружочки — результаты работы [4] и треугольнички — работы [119]. Здесь и далее сплошные кривые получены с использованием разностной схемы данной работы, плотность и компоненты скорости отнесены к  $\rho_*$  и  $q_*$  — критическим значениям плотности и скорости набегающего потока, а давление — к  $\rho_* q_*^2$ .

Сравнение с данными работы [4], которые, по-видимому, следует рассматривать в качестве эталона, было выполнено почти во всем диапазоне параметров, исследованном в [4]. Это сравнение показало, что заметное различие функций, отличных от давления, имеет место только в чрезвычайно тонком энтропийном слое у поверхности конуса при  $\xi < 0,025$ . В остальной части ударного слоя согласие результатов, полученных при одинаковом числе расчетных точек, более чем удовлетворительное. Типичный пример подобного сравнения ( $\theta_k = 15^\circ, M_0 = 3, \alpha = 10^\circ$ ) приведен на рис. 54.3а, 54.3б, 54.3в, на котором кружки — данные [4], *u*, *v*, *w* — проекции вектора скорости на оси *r*,  $\theta$ ,  $\varphi$ , а  $\xi = 0,025$  и  $\xi = 0,975$  отвечают точкам ударного слоя у поверхности конуса и около ударной волны. С ростом  $M_0$  погрешности счета (отличие от результатов [4]) падают, а с уменьшением  $M_0$  несколько возрастают, оставаясь тем не менее в пределах, допустимых в большинстве приложений.

На рис. 54.4, относящемся к обтеканию кругового конуса, показаны распределения давления по стенке при  $\theta_k = 10^\circ, M_0 = 5$  и двух углах атаки. Видно, что при  $\alpha = 20^\circ$  на подветренной

стороне конуса (в окрестности оси  $\eta$ , отвечающей  $\varphi = \pi$ ) имеются узкие области резкого возрастания  $p$ , которые соответствуют скачкам уплотнения, ограничивающим сверху область гиперболичности уравнений конического течения. Штрихами на том же рисунке дано распределение  $p$ , полученное для  $\alpha = 10^\circ$  в [141] при несколько большем (в полтора раза) количестве расчетных точек, а пунктиром — величина  $p$  для  $\alpha = 0$ . При рассмотрении рис. 54.1 и далее следует иметь в виду, что вблизи поверхности

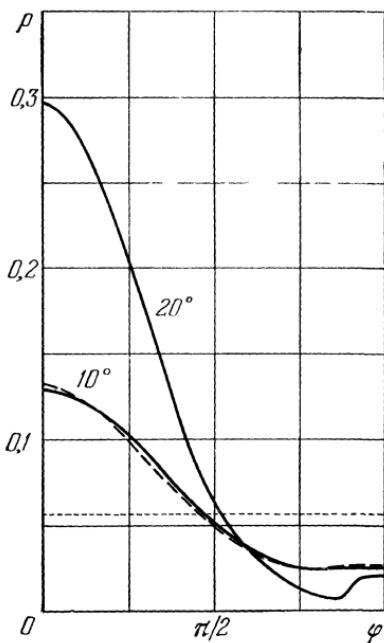


Рис. 54.4.

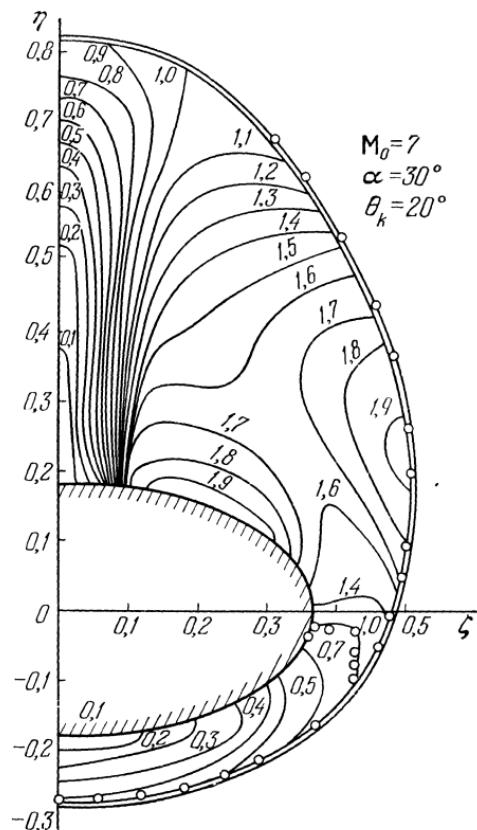


Рис. 54.5.

конуса имеется тонкий вихревой слой, в котором наблюдается резкое изменение параметров газа, отличных от давления. Поэтому, в согласии со сказанным ранее, линии типа  $M_\tau = \text{const}$  на соответствующих рисунках в непосредственной близости от тела могут недостаточно правильно отражать действительное распределение параметров.

Следующие два рисунка относятся к обтеканию эллиптического конуса с отношением полуосей  $2:1$ , причем при  $\varphi = \pi/2$  (в направлении большой полуоси)  $\theta = 20^\circ$ . На рис. 54.5 изображены поперечное сечение конуса, головная ударная волна и ли-

нии  $M_t = \text{const}$  в случае  $M_0 = 7$  и  $\alpha = 30^\circ$ . Линии постоянства  $M_t$  везде, кроме окрестности нижней звуковой линии ( $M_t = 1$ ), построены через  $\Delta M_t = 0,1$ . Кружками даны точки ударной волны и звуковой линии из [6]. Видно, что внутренний скачок уплотнения, возникающий на теневой стороне конуса, в данном случае интенсивнее, чем при обтекании под тем же углом атаки кругового конуса. Последнее связано с большим разгоном потока, текущего вдоль поверхности конуса снизу вверх против часовой стрелки.

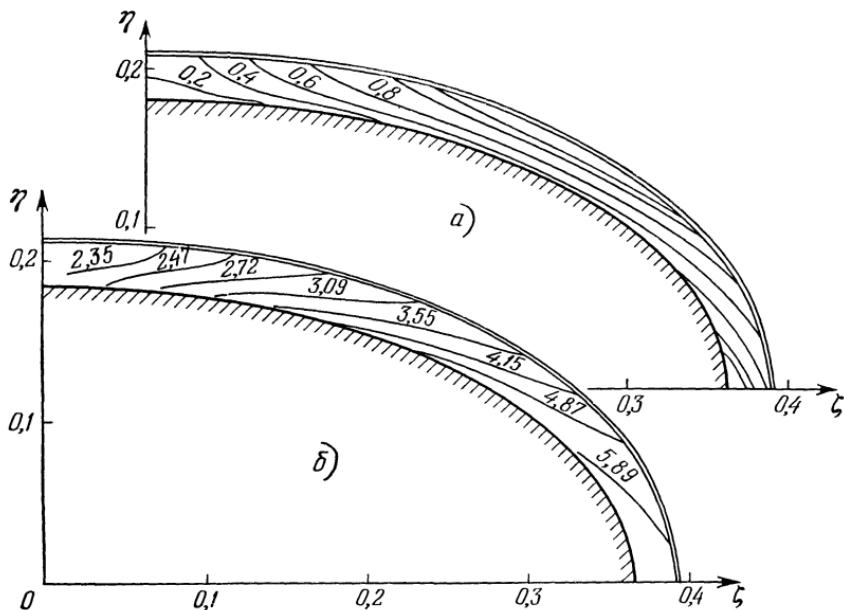


Рис. 54.6.

Для того же эллиптического конуса картина течения достаточно интересна и при  $\alpha = 0$ . Для  $M_0 = 25,3$  соответствующие результаты представлены на рис. 54.6, а, где показаны линии  $M_t = \text{const}$ , и на рис. 54.6, б, на котором изображены проекции поверхностей тока (цифры над кривыми — значения  $p/\rho^*$ , в набегающем потоке здесь и далее  $p_0/\rho_0^* = 0,714$ ). Видно, что при обтекании эллиптического конуса под нулевым углом атаки точки поверхности, лежащие на оси  $\eta$ , являются особыми точками типа узла («точками Ферри»), а на оси  $\zeta$  — особыми точками типа седла.

Еще более интересно течение, реализующееся при обтекании конуса, близкого к пирамидальному (рис. 54.7, а, б). В переменных  $\eta$ ,  $\zeta$  поверхность такого конуса задавалась уравнением  $\eta^6 + \zeta^6 = \operatorname{tg}^6 20^\circ$ , из которого, кстати, следует, что полуугол при

его вершине в плоскостях  $x$ ,  $y$  и  $x$ ,  $z$  равен  $20^\circ$ . Данный конус (а также картина течения при  $\alpha = 0$ ) имеет четыре плоскости симметрии, что находит свое отражение и в конфигурации линий  $M_t = \text{const}$  и  $p/\rho^\infty = \text{const}$ . На рис. 54.7,  $a$ ,  $b$  соответствующие

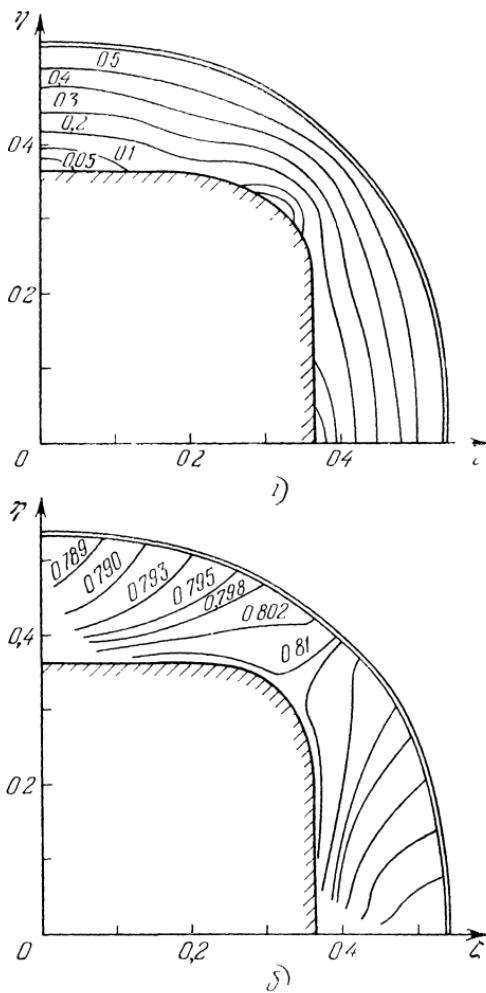


Рис. 54.7.

кривые вместе с поперечными сечениями тела и ударной волны построены для случая  $M_0 = 4$  и  $\alpha = 0$ .

На рис. 54.8 и 54.9 представлены результаты расчета обтекания треугольных крыльев нулевой толщины со сверхзвуковыми кромками. В рассмотренных случаях верхняя и нижняя поверхности крыла обтекаются независимо, причем ударный слой, обра-

зующийся при положительных углах атаки у нижней поверхности, ограничен присоединенным к передним кромкам головным скачком уплотнения. Со стороны верхней поверхности каждая из передних кромок обтекается с образованием косой центрированной

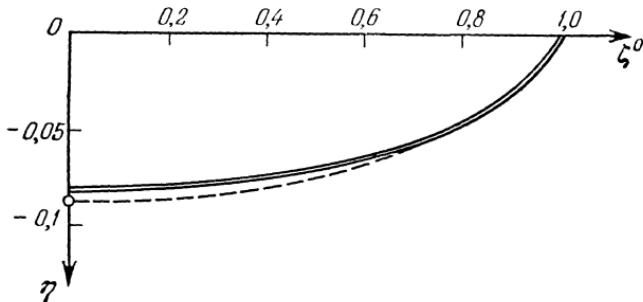


Рис. 54.8.

волны Прандтля—Майера. Головная ударная волна, возникающая около нижней поверхности крыла с углом стреловидности  $\Lambda = 75^\circ$  при  $M_0 = 6,8$  и  $\alpha = 13^\circ$ , показана на рис. 54.8 двойной

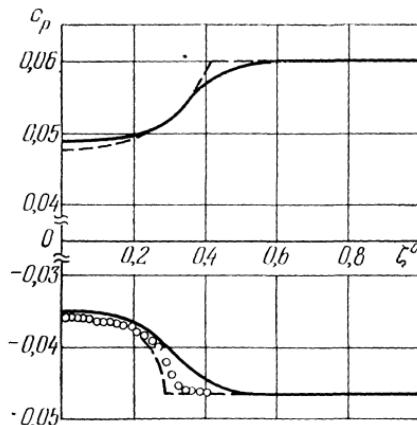


Рис. 54.9.

линией ( $\zeta^0$  — значение  $\zeta$ , отнесенное к величине, которая соответствует передней кромке). На том же рисунке штрихами и кружком нанесены экспериментальные данные [155], полученные разными методами.

Распределение коэффициента давления  $c_p \equiv 2(p - p_0)/(\rho_0 q_0^2)$  по размаху треугольного крыла в случае  $\Lambda = 45^\circ$ ,  $M_0 = 3$  и  $\alpha = 4^\circ$  показано на рис. 54.9. Верхней (нижней) поверхности крыла на рисунке отвечают нижние (верхние) кривые, штрихами для сравнения приведены результаты, полученные в [127] методом

характеристик, а кружочками — результаты расчета, выполненного в [141]. В [127] и [141] также использовалось установление по  $r$ . Число расчетных точек в [141] более чем в 2,5 раза превышало количество ячеек, взятое при получении сплошных кривых.

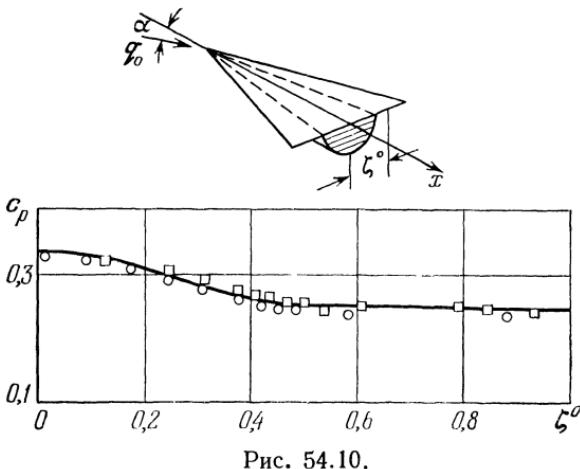


Рис. 54.10.

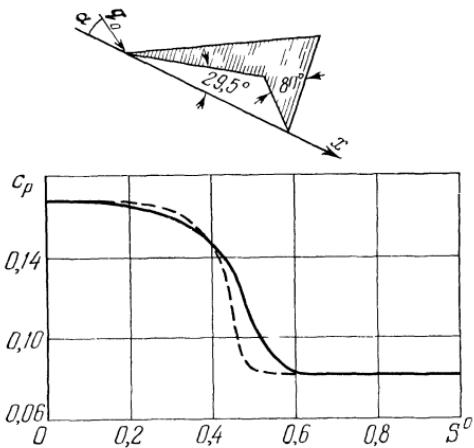


Рис. 54.11.

Распределение  $c_p$  вдоль нижней поверхности комбинации треугольного крыла с  $\Lambda = 65^\circ$  и кругового конуса с  $\theta_k = 12,5^\circ$  при  $M_0 = 5,08$  и  $\alpha = 11^\circ$  приведено на рис. 54.11. Кружочками показаны результаты [141], полученные при том же числе расчетных точек, а квадратиками — экспериментальные данные, цитированные в той же работе.

Последний рисунок (рис. 54.11) относится к обтеканию потоком с  $M_\infty = 3,95$  V-образного крыла. Угол между ребром крыла и вектором скорости набегающего потока — угол атаки  $\alpha = -10^\circ$ , угол стреловидности каждой половинки крыла  $\Lambda = 60,5^\circ$ , а угол «V-образности» равен  $80^\circ$ . На рисунке дано распределение  $c_p$  по внутренней поверхности крыла ( $S^0$  введено аналогично  $\xi^0$  и отсчитывается от ребра к кромке). Штрихами на рис. 54.11 нанесены результаты работы [89], в которой расчет был выполнен при значительно большем (в четыре раза) числе расчетных точек.

## § 55. Сверхзвуковое обтекание остроконечных пространственных конфигураций

Сравнение обтекания эквивалентных (в смысле распределения площади поперечного сечения) пространственных тел. Обтекание тела типа летательного аппарата.

Естественно, что разностная схема § 26 может быть применена для расчета обтекания произвольных пространственных тел, если во всей рассчитываемой области поток «*x*-сверхзвуковой». Для иллюстрации сказанного приведем несколько примеров расчета сверхзвукового обтекания пространственных остроконечных тел.

Первые примеры относятся к обтеканию трех пространственных тел, помещенных в равномерный сверхзвуковой поток с  $M_\infty = 5$ . Рассмотренные тела имеют две или три плоскости симметрии, линию пересечения которых примем за ось *x* цилиндрической системы координат *x*, *r*,  $\varphi$  с началом в передней точке тела.

Набегающий поток параллелен оси *x*. Каждое тело имеет поперечное сечение фиксированной формы: эллиптическое с отношением полуосей  $a/b = 2$ , близкое к квадратному и близкое к треугольному (см. [48]). Закон изменения по *x* площади поперечного сечения указанных тел был взят таким же, как у тела вращения, образованного круговым конусом с полууглом при вершине  $\theta_k = 20^\circ$  и оживалом, которое плавно сопрягается с конусом при  $x = 0,1$  (за единицу длины взята полная длина тела). Некоторые результаты расчетов приведены на рис. 55.1, *a*—*e*, на котором  $p^0$  — отношение давления к давлению на «эквивалентном» (по площади поперечного сечения) теле вращения при том же *x*. Рис. 55.1, *a* отвечает телу с эллиптическим, рис. 55.1, *b* — с почти квадратным и рис. 55.1, *e* — с близким к равностороннему треугольнику поперечными сечениями. На каждом рисунке штриховой и штрих-пунктирной линиями нанесены распределения  $p^0$  по образующим тел, лежащим в плоскостях симметрии, которые проходят через большую и малую ось (или «полуось») —

для треугольника) поперечного сечения. Сплошными кривыми даны распределения по  $x$  соответствующих величин, полученных осреднением по  $\varphi$ . Интересно отметить, что коэффициенты волнового сопротивления трех пространственных тел и тела вращения весьма близки между собой.

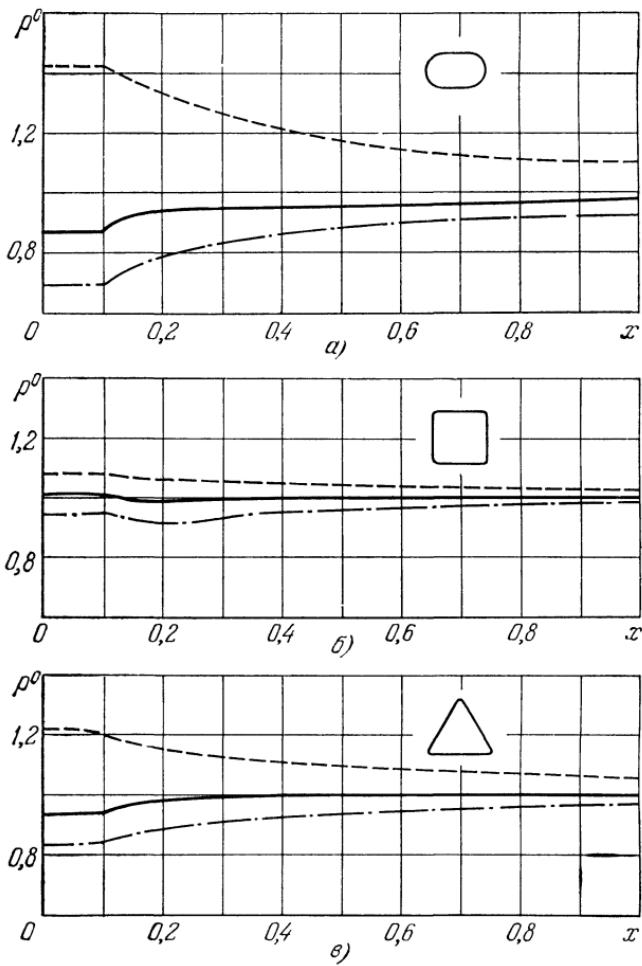


Рис. 55.1.

Пример расчета более сложной конфигурации (тела типа летательного аппарата [71]) представлен на рис. 55.2. Исследуемая конфигурация обтекалась сверхзвуковым потоком с  $M_0 = 5$  под углом атаки  $\alpha = 5^\circ$ . На рис. 55.2 показано пересечение поверхностей модели и головного скачка (при расчете головной скачок выделялся, т. е. не размазывался), а также изобар (поверхно-

стей  $p/p_0 = \text{const}$ ) с плоскостью симметрии тела ( $y=0$ ) и с плоскостями  $x=0,2; 0,6; 1$ . Кроме того, нанесена линия пересечения поверхности тела с плоскостью  $z=0$ . Цифры около изобар — значения  $p/p_0$ .

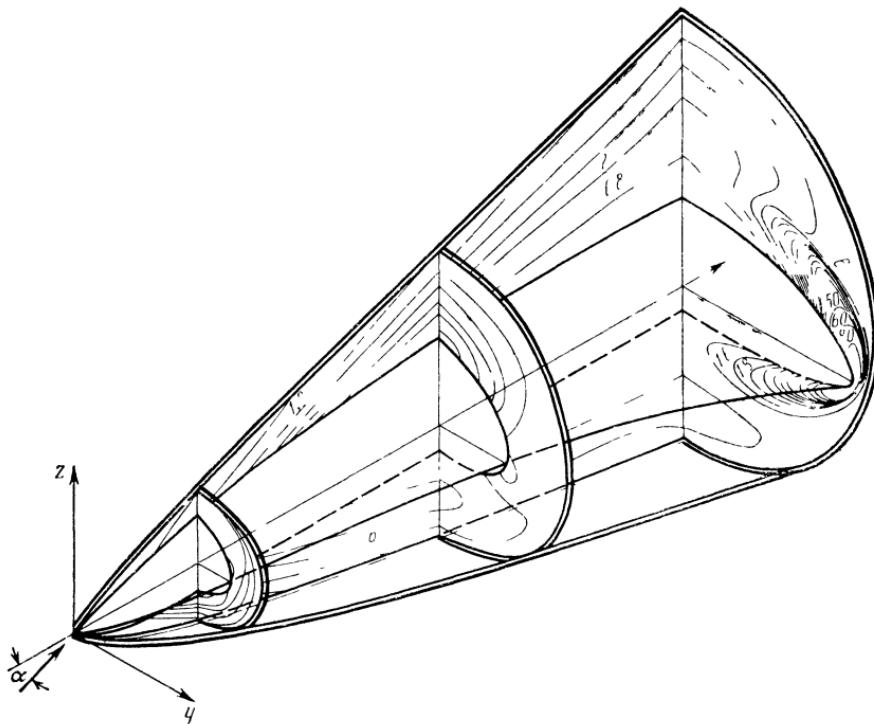


Рис. 55.2.

В заключение этого параграфа отметим, что при расчетах обтекания головных частей летательных аппаратов, которые проводились с использованием разностной схемы § 26, наиболее трудоемким элементом исследования (при наличии отлаженных программ для ЭВМ) становится ввод в машину необходимой информации о форме обтекаемых поверхностей.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Мы изложили принципы, лежащие в основе метода, и проиллюстрировали его возможности на примерах расчета ряда разнообразных задач. В заключении мы постараемся оттенить те общие вопросы, которые возникают при создании любого современного метода решения задач математической физики. Прежде всего следует отметить, что в технически интересных задачах далеко не всегда существует строго математически обоснованная постановка задачи, и соответствующие теоремы существования и единственности. Именно таково положение в большинстве задач аэродинамики, решение которых описывалось в последних главах. Поэтому весьма важен вопрос о степени достоверности результатов, получаемых с помощью численных расчетов. К сожалению, пока не существует возможности отвечать на этот вопрос алгоритмическим нахождением погрешности. Самый простой и, казалось бы, естественный способ — проверить внутреннюю сходимость (путем уменьшения шага разностной сетки) — практически почти всегда недоступен. Из-за ограниченной мощности современных вычислительных машин и большой сложности практически интересных задач расчеты в большинстве случаев ведутся на пределе возможностей вычислительной техники. Поэтому в практической работе приходится использовать различные косвенные приемы для проверки качества расчета. Среди них мы отметим следующие.

Проверка метода сравнением результатов расчета с точными решениями известных задач или на задачах, решения которых не обязательно известны, но известны некоторые их свойства, например групповые. Проведение в рамках выбранного численного метода расчетов одной и той же задачи в различных постановках. При ограниченных ресурсах вычислительных машин этим преследуется цель повысить точность расчета главных деталей в картине течения за счет загрубления второстепенных. Если при этом нет достаточной априорной информации о решении, необходимо вначале сделать грубый расчет. Получив из него качественную информацию о решении и проанализировав ее, следует постараться учесть особенности задачи в повторных расчетах. Так, постепенно накапливая информацию о решении и выбирая, исходя из его особенностей, тактику счета, можно

надеяться получить достоверный ответ. Кроме того, тот факт, что различные тактики расчета приводят к близким результатам, указывает на определенную устойчивость последних. Сравнение результатов, полученных разными методами. Естественно, что никакая математическая аргументация в этой ситуации неприменима. Однако совпадение результатов, как правило, свидетельствует в пользу их достоверности. Использование экспериментальных данных для отработки методики дает наиболее объективный критерий качества вычислений, включающий также и проверку адекватности явления его математическому описанию. К сожалению, такой метод оценки не всегда оказывается доступным из-за ограниченности возможностей постановки физического эксперимента.

Из сказанного вытекает, что результаты численного эксперимента с неизбежностью носят отпечаток субъективного подхода. Поэтому опыт и умение вычислителя имеют большое значение для конечного успеха. Квалифицированный вычислитель одновременно должен быть и грамотным специалистом в той области науки, где он ведет расчеты. Знание предмета исследований зачастую помогает отличить физическое явление от счетного феномена. Кроме того, любая счетная методика должна отрабатываться на модельных задачах, где знания о решении гораздо богаче, чем в реальных задачах. Формулировка модельных задач требует умения выделять существо явления, жертвуя второстепенным.

Безусловно, качество полученных результатов зависит и от порядка аппроксимации разностной схемы, которая лежит в основе численного метода. Вопрос о выборе оптимального порядка аппроксимации весьма не прост. Прежде всего следует отметить, что его следует выбирать в соответствии с гладкостью решения. Вряд ли целесообразно использовать высокий порядок аппроксимации для вычисления решения, которое соответствующей гладкостью не обладает. Заметим, что хорошие схемы первого и более высокого порядков размазывают ударные волны практически одинаковым образом. Размазывание тангенциальных (или в нестационарном случае — контактных) разрывов тем сильнее, чем ниже порядок схемы, причем при движении вдоль разрыва (или его траектории) указанное размазывание увеличивается, как некоторая степень расстояния (чем выше порядок схемы, тем меньше показатель степени). Поэтому в случаях, когда на структуру течения сильно влияют имеющиеся (или возникающие) в потоке тангенциальные разрывы, выделение которых затруднительно, схемы более высокого порядка работают лучше схем первого порядка. Для обоснования применения указанных схем к тем задачам, в которых тангенциальные разрывы либо отсутствуют, либо несущественны, необходимо знать, насколько применение таких схем повышает порядок конечноразностной аппроксимации всей задачи. Последний, как известно, определяется порядком аппроксимации не только дифференциальных

уравнений течения, но и граничных условий, в число которых входят условия на ударных волнах. Можно показать, что если в точном решении параметры перед или за ударной волной меняются, то погрешность аппроксимации условий на скачках имеет порядок  $h \max |\operatorname{grad} \varphi|$ , где  $\varphi$  — произвольный параметр течения, а  $h$  — шаг разностной сетки. Подчеркнем, что здесь речь идет не о погрешности в распределении параметров внутри «зоны размазывания», которая для всех схем сквозного счета — величина порядка единицы, а о погрешностях аппроксимации именно граничных условий, приводящих к погрешностям того же порядка всюду в области влияния соответствующих разрывов. Таким образом, наличие сильных разрывов (при их сквозном счете) снижает порядок аппроксимации всей задачи до первого. Исключение составляют автомодельные задачи, для которых  $\operatorname{grad} \varphi \equiv 0$  и поэтому указанный эффект не имеет места (заметим, что все численные примеры, иллюстрирующие преимущества схем высокого порядка расчета разрывных решений, относятся только к таким задачам). В силу сказанного, если говорить о решениях уравнений газовой динамики, которые по своей структуре представляют чередование областей гладкости, разделенных разрывами, то в такой ситуации построение счетных алгоритмов невысокого порядка аппроксимации, но с выделением счета основных разрывов приводит фактически к более существенному повышению точности, чем использование при сквозном счете схем высокого порядка аппроксимации.

При создании любого численного метода как один из важных факторов должна оцениваться трудоемкость его программной реализации. Если учесть тенденции развития современных ЭВМ, у которых рост быстродействия и объема памяти опережает прогресс в автоматизации программирования, то становится ясно, что в ближайшей перспективе предпочтение при решении достаточно сложных практических задач, по-видимому, будет отдаваться методам более простым в логическом отношении. В соответствии с этим для решения указанных задач более привлекательными представляются явные разностные схемы. Во избежание недоразумений подчеркнем, что при оценке различных методов и разностных схем мы исходим из вполне определенной цели: мобильного решения постоянно возникающих прикладных задач, которые описываются системами гиперболического типа и характеризуются большим числом переменных, сложностью рассчитываемых областей и наличием поверхностей разрыва (прежде всего — ударных волн). Естественно, что для других целей перспективными могут оказаться более трудоемкие, но одновременно и более точные методы.

Несмотря на большой прогресс в численных методах и в вычислительной технике (а может быть, именно поэтому), сложность задач, выдвигаемых практикой, такова, что их решение в значительной степени является искусством.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Аверенкова Г. Н., Ашратов Э. А., Волконская Т. Г. и др., Сверхзвуковые струи идеального газа, ч. 1, М., ВЦ МГУ, 1970.
2. Алалыкин Г. Б., Годунов С. К., Киреева И. Л., Плинер Л. А., Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках, М., «Наука», 1970.
3. Бабенко К. И., Воскресенский Г. П., Численный метод расчета пространственного обтекания тел сверхзвуковым потоком газа, ЖВМ и МФ, 1961, 1, № 6, 1051—1060.
4. Бабенко К. И., Воскресенский Г. П., Любимов А. М., Русланов В. В., Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом, М., «Наука», 1964.
5. Багриновский К. А., Годунов С. К., Разностные схемы для многомерных задач, ДАН СССР, 1957, 115, № 3, 431—433.
6. Базжин А. П., Трусова О. М., Чельшева И. Ф., Расчет течений совершенного газа около эллиптических конусов при больших углах атаки, Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа (МЖГ), 1968, № 4, 45—51.
7. Баталова М. В., Бахрах С. М., Загускин В. Л. и др., Комплекс «Сигма» для расчета задач двумерной газодинамики, Труды Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости, Новосибирск, «Наука», 1969.
8. Бачманова М. С., Лапыгин В. И., Липницкий Ю. М., Исследование сверхзвукового обтекания круговых конусов на больших углах атаки, Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 6, 79—84.
9. Белинский П. П., Годунов С. К., Иванов Ю. Б., Яненко И. К., Применение одного класса квазиконформных отображений для построения разностных сеток в областях с криволинейными границами, ЖВМ и МФ, 1975, 15, № 6, 1499—1511.
10. Белоцерковский О. М., Расчет обтекания кругового цилиндра, Сб. «Вычислительная математика», 1958, № 3, ВЦ АН СССР, 149—185.
11. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М., Нестационарный метод «крупных частиц» для газодинамических расчетов, ЖВМ и МФ, 1971, 11, № 1, 182—207.
12. Благосклонов В. И., Иванов М. Я., Истечение в затопленное пространство сверхзвуковой веерной струи идеального газа с равномерным заданием параметров в начальном сечении, Уч. зап. ЦАГИ, 1974, 5, № 1, 91—96.
13. Благосклонов В. И., Хомутов В. А., Внезапное расширение сверхзвуковой струи в цилиндрическом канале, Уч. зап. ЦАГИ, 1975, 6, № 3, 18—24.
14. Богод А. Б., Замфорт Б. С., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Об использовании процесса установления по времени при решении задач стационарного обтекания газом решеток профилей, Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 4, 118—124.

15. Борисов В. М., Михайлов И. Е., Об установившихся трехмерных безвихревых движениях газа со сверхзвуковой скоростью, *ЖВМ и МФ*, 1970, **10**, № 4, 1006—1015.
16. Васенин И. М., Рычков А. Д., Применение метода установления к решению одной внутренней задачи газовой динамики, Сб. «Аэродинамика», Труды первой сибирской конференции по аэродинамике, Новосибирск, «Наука», 1969, 196—199.
17. Васенин И. М., Рычков А. Д., Численный расчет осесимметричной сверхзвуковой перерасширенной струи идеального газа, Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 5, 197—250.
18. Васенин И. М., Рычков А. Д., Численное решение задачи о смешанном осесимметричном течении газа в некоторых криволинейных областях методом установления, Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 1, 155—159.
19. Васильев О. Ф., Годунов С. К., Киреева И. Л. и др., Численный метод расчета распространения волн в открытых руслах и приложение его к задаче о паводке, ДАН СССР, 1963, **151**, № 3, 525—527.
20. Ватажин А. Б., Распространение ударной волны в канале при взаимодействии скжатого в ней газа с неоднородным магнитным полем, ПММ, 1970, **34**, вып. 4, 672—684.
21. Введенская Н. Д., Пример неединственности обобщенного решения квазилинейной системы уравнений, ДАН СССР, 1961, **136**, № 3, 532—533.
22. Виноградов В. А., Захаров Н. Н., Иванов М. Я., К расчету торможения двумерного сверхзвукового потока невязкого газа в канале и возможность реализации такого течения, Уч. зап. ЦАГИ, 1975, **6**, № 2, 161—166.
23. Волконская Т. Г., Расчет сверхзвуковых осесимметричных струй, Сб. «Численные методы в газовой динамике». Вып. II, ВЦ МГУ, 1963, 76—83.
24. Вычислительные методы в гидродинамике, Сб. статей под ред. Олдера, Фернбаха, Ротенберга, М., «Мир», 1967.
25. Галин Г. Я., Об ударных волнах в средах с произвольным уравнением состояния, ДАН СССР, 1958, **119**, № 6, 1106—1109.
26. Галин Г. Я., К теории ударных волн, ДАН СССР, 1959, **127**, № 1, 55—58.
27. Гилинский С. М., Лебедев М. Г., Исследование обтекания плоских осесимметричных тел с отошедшей ударной волной потоком с малой сверхзвуковой скоростью, Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 1, 17—23.
28. Глаголова Ю. П., Жогов Б. М., Софронов И. Д. и др., Основы методики «Медуза» численного расчета двумерных нестационарных задач газодинамики, Сб. «Численные методы механики сплошной среды», Новосибирск, 1972, 3, № 2, 18—55.
29. Годунов С. К., Разностный метод расчета ударных волн, УМН, 1957, **12**, вып. 1, 176—177.
30. Годунов С. К., Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики, Матем. сб., 1959, **47**, вып. 3, 271—306.
31. Годунов С. К., Интересный класс квазилинейных систем, ДАН СССР, 1961, **139**, № 3, 521—523.
32. Годунов С. К., Проблемы обобщенного решения в теории квазилинейных уравнений и в газовой динамике, УМН, 1962, **17**, вып. 3 (105), 147—158.
33. Годунов С. К., Разностные методы решения уравнений газовой динамики. Лекции для студентов НГУ, Новосибирск, 1962.
34. Годунов С. К., Уравнения математической физики, М., «Наука», 1971.
35. Годунов С. К., Симметричная форма уравнений магнитной гидродинамики, Сб. «Численные методы механики сплошной среды», Новосибирск, 1972, 3, № 1, 26—34.

36. Годунов С. К., Забродин А. В., О разностных схемах второго порядка точности для многомерных задач, *ЖВМ и МФ*, 1962, 2, № 4, 706—708.
37. Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П., Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной, *ЖВМ и МФ*, 1961, 1, № 6, 1020—1050.
38. Годунов С. К., Прокопов Г. П., О расчетах конформных отображений и построении разностных сеток, *ЖВМ и МФ*, 1967, 7, № 5, 1031—1059.
39. Годунов С. К., Прокопов Г. П., Об использовании подвижных сеток в газодинамических расчетах, *ЖВМ и МФ*, 1972, 12, № 2, 429—440.
40. Годунов С. К., Рябенский В. С., Разностные схемы, М., «Наука», 1973.
41. Годунов С. К., Семенджев К. А., Разностные методы численного решения задач газовой динамики, *ЖВМ и МФ*, 1962, 2, № 1, 3—14.
42. Гринь В. Т., Иванов М. Я., К исследованию нестационарного течения в канале при внезапном изменении условий в выходном сечении, *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1971, № 4, 167—169.
43. Гринь В. Т., Иванов М. Я., Князева Н. Н., Корзун А. П., Крайко А. Н., К исследованию динамики течения торможения сверхзвукового потока идеального газа в канале с продольными перегородками, Уч. зап. ЦАГИ, 1971, 2, № 4, 108—112.
44. Гринь В. Т., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Исследование динамики течения торможения идеального газа с замыкающим скачком уплотнения, *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1970, № 4, 23—32.
45. Гринь В. Т., Крайко А. Н., Тилляева Н. И., Исследование устойчивости течения идеального газа в квазилиндрическом канале, *ПММ*, 1975, 39, вып. 3, 473—484.
46. Дворецкий В. М., К исследованию пространственных смешанных течений в соплах с несимметричным входом, *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1975, № 2, 189—191.
47. Дворецкий В. М., Иванов М. Я., К расчету смешанного течения в соплах с несимметричной дозвуковой частью, Уч. зап. ЦАГИ, 1974, 5, № 5, 39—45.
48. Дворецкий В. М., Иванов М. Я., Коняев Б. А., Крайко А. Н., О правиле «эквивалентности» для течений идеального газа, *ПММ*, 1974, 38, вып. 6, 1004—1014.
49. Дерибас А. А., Физика упрочнения и сварка взрывом, Новосибирск, «Наука», 1972.
50. Дубинская Н. В., Иванов М. Я., К расчету взаимодействия сверхзвуковой струи идеального газа с плоской преградой, перпендикулярной ее оси, Уч. зап. ЦАГИ, 1975, 6, № 5, 38—44.
51. Дьяконов Ю. Н., Пчелкина Л. В., О прямой задаче для сопла Лаваля, *ДАН СССР*, 1970, 191, № 2, 301—304.
52. Дьяченко В. Ф., О задаче Коши для квазилинейных систем, *ДАН СССР*, 1961, 136, № 1, 16—17.
53. Дьяченко В. Ф., О численном счете разрывных решений квазилинейных систем, *ЖВМ и МФ*, 1961, 1, № 6, 1127—1129.
54. Дьяченко В. Ф., Об одном новом методе численного решения нестационарных задач газовой динамики с двумя пространственными переменными, *ЖВМ и МФ*, 1965, 5, № 4, 680—688.
55. Загускин В. Л., Кондратов В. Е., О счете уравнений теплопроводности и газовой динамики прогонкой по отдельным областям, *ДАН СССР*, 1965, 163, № 5, 1107—1109.
56. Замфорт Б. С., Иванов М. Я., Обтекание решетки симметричных профилей околозвуковым неизэнтропическим потоком, Уч. зап. ЦАГИ, 1972, 3, № 6, 107—111.

57. Иванов М. Я., Применение метода установления к анализу нерасчетных режимов течения в осесимметричных соплах, Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 6, 137—139.
58. Иванов М. Я., К расчету течения газа в ударной трубе переменного сечения, Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 3, 162—166.
59. Иванов М. Я., К решению двумерных и пространственных задач обтекания тел околозвуковым потоком, ЖВМ и МФ, 1975, 15, № 5, 1222—1240.
60. Иванов М. Я., Кимасов Ю. И., Численное решение прямой задачи определения осредненного осесимметричного потока идеального газа в ступени турбомашины, Уч. зап. ЦАГИ, 1975, 6, № 4, 12—20.
61. Иванов М. Я., Киреев В. И., К расчету распространения сверхзвуковой недорасширенной струи в затопленном пространстве при больших степенях нерасчетности, ЖВМ и МФ, 1976, 16, № 3.
62. Иванов М. Я., Крайко А. Н., Численное решение прямой задачи о смешанном течении в соплах, Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5, 77—83.
63. Иванов М. Я., Крайко А. Н., Расчет смешанного течения газа в соплах, Труды секции по численным методам в газовой динамике 2-го Международного коллоквиума по газодинамике взрыва и реагирующих систем, Новосибирск, 1969, т. 2, М., ВЦ АН СССР, 1971, 3—26.
64. Иванов М. Я., Крайко А. Н., Метод сквозного счета для двумерных и пространственных сверхзвуковых течений, II, ЖВМ и МФ, 1972, 12, № 3, 805—813.
65. Иванов М. Я., Крайко А. Н., К расчету сверхзвукового обтекания конических тел, ЖВМ и МФ, 1973, 13, № 6, 1557—1572.
66. Иванов М. Я., Крайко А. Н., Михайлов Н. В., Метод сквозного счета двумерных и пространственных сверхзвуковых течений, I, ЖВМ и МФ, 1972, 12, № 2, 441—463.
67. Иванов М. Я., Крайко А. Н., Назаров В. П., Некоторые результаты численного исследования нерасчетных пространственных струй идеального газа, Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 4, 102—109.
68. Иванов М. Я., Ланюк А. Н., К расчету сверхзвуковой перерасширенной струи идеального газа при наличии в потоке диска Маха, Уч. зап. ЦАГИ, 1973, 4, № 4, 21—26.
69. Иванов М. Я., Назаров В. П., Исследование «бокового» взаимодействия сверхзвуковой недорасширенной струи идеального газа с поверхностями различной формы, Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 6, 3—8.
70. Иванов М. Я., Назаров В. П., Численное решение задачи о «боковом» взаимодействии нерасчетных сверхзвуковых струй идеального газа с плоскостью и друг с другом, ЖВМ и МФ, 1974, 14, № 1, 179—187.
71. Иванов М. Я., Никитина Т. В., К расчету пространственного обтекания сверхзвуковым потоком тел сложной формы, Уч. зап. ЦАГИ, 1973, 4, № 4, 7—13.
72. Иванов М. Я., Рылько О. А., Расчет трансзвукового течения в пространственных соплах, ЖВМ и МФ, 1972, 12, № 5, 1280—1291.
73. Иванов М. Я., Рылько О. А., К анализу трансзвукового течения в эллиптических соплах, Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 3, 161—163.
74. Исакова Н. П., Решение прямой задачи о смешанном течении проводящего газа в сопле Лаваля при наличии меридионального магнитного поля, Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 5, 14—20.
75. Исакова Н. П., Об образовании ударных волн при внезапном «включении» внешних воздействий, Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 5, 136—144.
76. Исакович М. А., Общая акустика, М., «Наука», 1973.
77. Канель Я. И., О некоторых модельных системах уравнений газовой динамики, Диф. уравнения, 1965, V, вып. 5, 922—934.

78. Кацкова О. Н., Чушкин П. И., Пространственные сверхзвуковые течения газа с неравновесными процессами, ЖВМ и МФ, 1968, 8, № 6, 1049—1062.
79. Киреев В. И., Лифшиц Ю. Б., Михайлов Ю. Я., О решении прямой задачи сопла Лаваля, Уч. зап. ЦАГИ, 1970, 1, № 1, 8—13.
80. Колган В. П., Фонарев А. С., Установление обтекания при падении ударной волны на цилиндр и сферу, Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 5, 97—103.
81. Копченов В. И., Крайко А. Н., Решение в рамках двухжидкостной модели прямой задачи о двухфазном течении в сопле Лаваля, Научные труды НИИ механики МГУ, 1974, вып. 32, 96—108.
82. Коробейников В. П., Чушкин П. И., Шуршалов Л. В., О зоне наземных разрушений при воздушном взрыве крупного метеорита, Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 3, 94—100.
83. Кочин Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, М., «Наука», 1965.
84. Крайко А. Н., Осипов А. А., Исследование отражения возмущений от дозвуковой части сопла Лаваля, Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 1, 84—93.
85. Крайко А. Н., Тагиров Р. К., К околозвуковому обтеканию тел вращения с протоком при наличии истекающей из протока струи, Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 6, 73—80.
86. Крокко Л., Чене С., Теория неустойчивости горения в жидкостных ракетных двигателях, М., ИЛ, 1958.
87. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Проблемы гидродинамики и их математические модели, М., «Наука», 1973.
88. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1954.
89. Лапагин В. И., Расчет сверхзвукового обтекания V-образных крыльев методом установления, Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 3, 180—185.
90. Лобанов В. Ф., Численное моделирование течения при сжатии цилиндрических образцов скользящей детонационной волной, ЖПМТФ, 1975, № 5(93), 145—149.
91. Любимов А. Н., Рusanov B. B., Течения газа около тупых тел, М., «Наука», 1970.
92. Магомедов К. М., Сеточно-характеристический метод для численного решения задач газовой динамики, Труды секции по численным методам в газовой динамике 2-го международного коллоквиума по газодинамике взрыва и реагирующих систем, Новосибирск, 1968, 1, М., ВЦ АН СССР, 1971, 328—356.
93. Мэссон Б. С., Тэйлор Т. Д., Фостер Р. М., Применение метода Годунова для расчета обтекания затупленных тел, Ракетная техника и космонавтика, 1969, 7, № 4, 148—155.
94. Нох В. Ф., СЭЛ—совместный эйлерово-лагранжевый метод для расчета нестационарных двумерных задач, Сб. «Вычислительные методы в гидродинамике», М., «Мир», 1967, 128—184.
95. Огнева В. В., Метод «прогонки» для решения разностных уравнений, ЖВМ и МФ, 1967, 7, № 4, 803—812.
96. Подлубный В. В., Фонарев А. С., Отражение сферической волны от плоской поверхности, Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 6, 66—72.
97. Прокопов Г. П., Построение ортогональных разностных сеток посредством расчета конформных отображений, Препринт ИПМ АН СССР, 1970, № 45.
98. Прокопов Г. П., О расчете разностных сеток, близких к ортогональным, в областях с криволинейными границами, Препринт ИПМ АН СССР, 1974, № 17.

99. Прокопов Г. П., Степанова М. В., Расчет осесимметричного взаимодействия ударной волны с затупленным телом, движущимся со сверхзвуковой скоростью, Препринт ИПМ АН СССР, 1974, № 72.
100. Рихтмайер Р., Мортон К., Разностные методы решения краевых задач, М., «Мир», 1972.
101. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н., Системы квазилинейных уравнений, М., «Наука», 1968.
102. Рябенький В. С., Филиппов А. Ф., Об устойчивости разностных уравнений, М., Гостехиздат, 1956.
103. Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем, М., «Наука», 1971.
104. Самарский А. А., Попов Ю. П., Разностные схемы газовой динамики, М., «Наука», 1975.
105. Седов Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэrodинамики, М., «Наука», 1966.
106. Славянов Н. Н., Теоретическое исследование закрученных течений идеального газа в сопле Лаваля, Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 6, 85—92.
107. Степанов Г. Ю., Гидродинамика решеток турбомашин, М., Физматгиз, 1962.
108. Тагиров Р. К., Расчет обтекания кормовых частей тел вращения до-звуковым и трансзвуковым потоком, Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 6, 162—168.
109. Тагиров Р. К., Трансзвуковое обтекание тела вращения при истечении реактивной струи из его кормовой части, Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 2, 97—104.
110. Тагиров Р. К., Усовершенствование метода расчета трансзвукового обтекания тел вращения, Уч. зап. ЦАГИ, 1975, 6, № 6, 1—11.
111. Федоренко Р. П., Итерационные методы решения разностных эллиптических уравнений, УМН, 1973, 28, вып. 2 (170), 121—182.
112. Фонарев А. С., Расчет дифракции ударной волны на профиле с последующим установлением стационарного сверхзвукового и трансзвукового обтекания, Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 4, 34—40.
113. Фонарев А. С., Расчет обтекания осесимметричных тел и несущих крыловых профилей трансзвуковым потоком газа, Уч. зап. ЦАГИ, 1973, 4, № 3, 1—10.
114. Харкевич А. А., Теория электроакустических преобразователей. Волновые процессы. Избранные труды в 3 томах, М., «Наука», 1973.
115. Чебан В. Г., Навал И. К., Керчман В. И., Руссу И. В., Об одном численном методе решения связанный задачи термоупругости, Труды III Всесоюзной конференции по численным методам решения задач теории упругости и пластичности, Новосибирск, «Наука», 1974.
116. Чебан В. Г., Руссу И. В., Численное решение осесимметричной задачи о распространении упругих волн в цилиндре конечной длины, Труды III Всесоюзной конференции по численным методам решения задач теории упругости и пластичности, Новосибирск, «Наука», 1974.
117. Черный Г. Г., Левин В. А., Медведев С. А. и др., Некоторые задачи газовой динамики, связанные с распространением детонационных волн, горением в сверхзвуковых потоках и генерацией лазерного излучения, Отчет № 1488, Институт механики МГУ, 1974.
118. Численное исследование современных задач газовой динамики, под ред. О. М. Белоцерковского, М., «Наука», ВЦ АН СССР, 1974.
119. Чушкин П. И., Обтекание конуса со сверхзвуковой скоростью под углом атаки, Сборник теоретических работ по гидромеханике, М., ВЦ АН СССР, 1970, 30—53.
120. Шугрин С. М., О неоднородных разностных схемах, ЖВМ и МФ, 1966, 6, № 1, 184—185.

121. Шуршалов Л. В., Численное исследование задачи о взрыве цилиндрического заряда конечной длины, ЖВМ и МФ, 1973, **13**, № 4, 971—983.
122. Яненко Н. Н., Фролов В. Д., Неуważаев В. Е., О применении метода расщепления для численного расчета движений теплопроводного газа в криволинейных координатах, Изв. СО АН СССР, сер. техн. наук, 1967, № 8, вып. 2, 1—30.
123. Amesden A. A., Hirt C. W., A simple scheme for generating general curvilinear grids, J. Comp. Phys., 1973, **11**, № 3, 348—359.
124. Barfield W. D., Numerical method for generating orthogonal curvilinear meshes, J. Comp. Phys., 1970, **5**, № 1, 23—33.
125. Barfield W. D., An optimal mesh generator for Lagrangian hydrodynamic calculations in two space dimensions, J. Comp. Phys., 1970, **6**, № 1, 417.
126. Barth W., Martin R. S., Wilkinson J. H., Calculation of the eigenvalues of a symmetric tridiagonal matrix by the method bisection, Numer. Math., 1967, **9**, № 5, 386—393.
127. Beeman E. R., Powers S. A., A method for determining the complete flow field around conical wings at supersonic hypersonic speeds, AIAA Paper № 69-646, 1969 (русский перевод: «Экспресс-информация», Астронавтика и ракетодинамика, ВИНИТИ, 1970, № 6, 1—14).
128. Bohachevsky I. O., Rubin E. L., Mates R. E., A direct method for computation of nonequilibrium flows with detached shock waves, AIAA Paper № 65-24, 1965.
129. Bowley W. W., Prince S. F., Finite element analysis of general fluid flow problem, AIAA Paper № 71-602, 1971.
130. Brown E. F., Ozcan H. M., A time-dependent solution of mixed flow through convergent nozzles, AIAA Paper № 72-680, 1972.
131. Chu C. W., Niemann A. E., Powers S. A., Calculation of multiple rocket engine exhaust plumes by the method of characteristics. Part I, AIAA Paper № 66-651, 1966.
132. Cline M. C., Computation of steady nozzle flow by a time-dependent method, AIAA Journal, 1974, **12**, № 4, 419—420.
133. Cole J. A., Solomon G. E., Willmarth W. W., Transonic flow past simple bodies, IAS, 1953, **20**, № 9, 627—634 (русский перевод: сб. «Механика», 1954, № 6, 56—68).
134. D'Attorre L., Nowak G., Thommen H. V., An inviscid analysis of the plume created by multiple rocket engines and a comparison with available schlieren data. Part II: A finite difference method, AIAA Paper № 66-651, 1966, 26—44.
135. Friedrichs K. O., Symmetric hyperbolic linear differential equations, Comm. Pure Appl. Math., 1954, **7**, № 2, 345—392.
136. Friedrichs K. O., Lax P. D., Systems of conservation equations with a convex extension, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1971, **68**, № 8, 1686—1688.
137. Godunov S. K., Sur la construction des reseaux dans les domaines compliques d'une façon automatique pour les équations aux différences finies, Actes Congress intern. math., 1970, **3**, 99—104.
138. Godunov S. K., Deribas A. A., Zabrodin A. V., Kozin N. S., Hydrodynamic effects in colliding solids, J. Comp. Phys., 1970, **5**, № 3, 517—539.
139. Gopalakrishnan S., Bozzola R., Numerical technique for the calculation of transonic flow in turbomachinery, Paper ASME № 71-GT-42, 1971.
140. Gopalakrishnan S., Bozzola R., Computation of shocked flow in compressor cascades, Paper ASME № 72-GT-31, 1972.
141. Kutler P., Lomax H., Shock-capturing, finite-difference approach to supersonic flows, Journal Spacecraft and Rockets, 1971, **8**, № 12, 1175—1182.

142. Lax P. D., Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1954, **7**, № 1, 159—193.
143. Lax P. D., Wendroff B., Systems of conservation laws, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1960, **13**, № 2, 217—237.
144. Leer van B., Stabilization of difference scheme for the equations of inviscid compressible flow by artificial diffusion, *J. Comp. Phys.*, 1969, **3**, № 4, 473—485.
145. Love E. S. and other, Experimental and theoretical studies of axisymmetric free jet, *NASA Technical Report R-6*, 1959.
146. Magnus R., Yoshihara H., Inviscid transonic flow over airfoils, *AIAA Paper № 70-47*, 1970.
147. Mays R. A., Inlet dynamics and compressor surge, *AIAA Paper № 69-484*, 1969.
148. McDonald P. W., The computation of transonic flow, *Paper ASME № 71-GT-89*, 1971.
149. Migdal D., Klein K., Moretti G., Time-dependent calculations for transonic nozzle flow, *AIAA Journal*, 1969, **7**, № 2, 372—374.
150. Moretti G., Inviscid flowfield about a pointed cone at an angle of attack, *AIAA Journal*, 1967, **5**, № 4, 789—791.
151. Neumann J., Richtmyer R., A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks, *J. Appl. Phys.*, 1950, **21**, № 3, 232—237.
152. Potter D. E., Tuttle G. H., The construction of discrete orthogonal coordinates, *J. Comp. Phys.*, 1973, **13**, № 4, 483—501.
153. Rakich S. V., Kutler P., Comparison of characteristics and shock-capturing methods with application to the space shuttle vehicle, *AIAA Paper № 72-191*, 1972.
154. Ranson V. H., Thompson H. D., Hoffmann I. D., Three-dimensional supersonic nozzle flowfield calculations, *Journal Spacecraft and Rockets*, 1970, **7**, № 4, 458—462.
155. Rao D. M., Delta wing shock shape at hypersonic speed, *AIAA Journal*, 1971, **9**, № 10, 2093—2094.
156. Rizzi A. W., Inouye M., A time-split finite volume technique for three-dimensional blunt-body flow, *AIAA Paper № 73-133*, 1973.
157. Serra R. A., Determination of internal gas flows by a transient numerical technique, *AIAA Journal*, 1972, **10**, № 5, 603—610.
158. Steinolfson R. S., Shock formation by a moving force field, *AIAA Journal*, 1973, **11**, № 8, 1201—1203.
159. Stivers L. S., Effect of subsonic Mach number on the forces and pressure distributions on four NACA 64A-Series airfoil sections at angles of attack as high as  $28^\circ$ , *NACA TN 3162*, 1954.
160. Taylor T. D., Masson B. S., Supersonic flow past blunt bodies with large surface injection. Propulsion reentry physics. Ed. Lunc. M. Pergamon Press, PWW-Polish scientific publishers, 1970, p. 399—411, 9 fig., XIXth International Astronautical congress, New York, 1968, Proceedings **31**.
161. Taylor T. D., Masson B. S., Application of the unsteady numerical method of Godunov to computation of supersonic flow past bell shaped bodies, *J. Comp. Phys.*, 1970, **5**, № 3, 443—454.
162. Wehofer S., Moger W. C., Transonic flow in conical convergent and convergent-divergent nozzles with non-uniform inlet conditions, *AIAA Paper № 70-635*, 1970.
163. Weyl H., Shock waves in arbitrary fluids, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1949, **2**, № 2-3, 103—122.
164. Winslow A. M., Numerical solution of the quasilinear Poisson equation in a non-uniform triangle mesh, *J. Comp. Phys.*, 1966, **1**, № 2, 149—172.

АДАЧ  
ИЖКИ

# ЧИСЛЕННОЕ