И. Ц. ГОХБЕРГ и М. Г. КРЕЙН

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ЛИНЕЙНЫХ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1965

517.2
Г—57
УДК 519.55

АННОТАЦИЯ

Теория несамосопряженных операторов необходима для математического изучения процессов, которые возникают в неконсервативных системах, играющих большую роль в современной физике и механике. Эта молодая, интенсивно развивающаяся ветвь математики, еще не успела получить достаточное освещение в литературе.

В книге впервые дается развернутое изложение ряда методов теории несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве (метод оценок резольвенты, метод определителей возмущения, различные асимптотические методы и др.). Попутно излагаются новые методы получения различных оценок, неравенств и соотношений для собственных и сингулярных чисел вполне непрерывных операторов. С использованием этих методов дается полная теория симметрично нормированных идеалов вполне непрерывных операторов, в частности, таких важных, как ядерные операторы, операторы Гильберта — Шмидта и др. Материал книги может быть использован в университетских курсах линейной алгебры, интегральных уравнений и функционального анализа.

Книга адресована научным работникам, аспирантам и студентам старших курсов — математикам, механикам и физикам-теоретикам.

Израиль Цудикович Гохберг и Марк Григорьевич Крейн
Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов
в гильбертовом пространстве

М., 1965 г., 448 стр.

Редактор *Ф. В. Широков.*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно.* Корректор *О. А. Бутусова.*

Сдано в набор 9/VII 1965 г. Подписано к печати 29/X 1965 г.
Бумага 84×108/32. Физ. печ. л. 14. Условн. печ. л. 23,52. Уч.-изд. л. 20,65.
Тираж 8500 экз. Т-13749. Цена книги 1 р. 23 к. Заказ № 1185.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Московская типография № 16 Главполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров СССР по печати.
Москва, Трехпрудный пер., 9

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

История появления этой книги не совсем обычна. Впрочем, если бы все авторы делились со своими читателями историей возникновения их книг, то, вероятно, нам пришлось бы отказаться от этого заявления.

Весной 1959 года мы решили переработать свою статью [1] по теории дефектных чисел, корневых чисел и индексов линейных операторов, стремясь, главным образом, включить в нее различные результаты из теории возмущений самосопряженных операторов. В частности, решено было пополнить ее теорией определителей возмущения.

К этому моменту было обнаружено, что метод определителей возмущения позволяет получать новые результаты и для несамосопряженных операторов. Решено было изложить и эти результаты, в связи с чем мы стали продумывать, что сделано в этой новой для нас области. Так шаг за шагом мы изменили свой первоначальный план... Примерно через год мы направили в редакцию журнала «Успехи математических наук» обзорную статью (в ней, однако, не нашлось места для определителей возмущения), в которой попытались дать некий «фотоснимок на лету» тогдашнего состояния исследований по теории несамосопряженных операторов. Редакция журнала «отклонила» статью, за что авторы приносят ей свою искреннюю и глубокую благодарность.

Дело в том, что объем этой первоначальной статьи (12 печатных листов) в три раза превышал норму, установленную для обзорных статей, и редакция сочла целесообразным рекомендовать опубликовать статью отдельной монографией в серии «Современные проблемы математики».

Естественно, что это предложение побудило нас несколько расширить статью и, в частности, восстановить в правах теорию определителей возмущения. Нам казалось, что для всего этого потребуется не более двух-трех месяцев. В действительности работа затянулась на три года. Следует сказать, что уже во время работы над статьей мы поддерживали тесный научный контакт с активно работавшими в этой области советскими математиками. Коллеги оказывали нам помощь, информируя о своих результатах (до опубликования), и тем самым оберегали нас от иллюзии завершенности.

Если к этому добавить наше желание отразить в книге и собственные исследования, в которые мы были вовлечены этой работой, то можно понять наше наивное заблуждение относительно сроков.

Надеемся, что нас правильно поняли: у нас нет никаких претензий к лицам, которые предоставляли рукописи своих еще не вышедших из печати статей, сообщали новые, лучшие, варианты доказательств и снабжали нас всякой иной устной или письменной информацией.

Наоборот, мы питаем глубокую благодарность ко всем тем, чья помощь позволила, как мы надеемся, достичь известной стройности в изложении большого круга исследований возникающей на наших глазах новой крупной области функционального анализа — теории линейных несамосопряженных операторов. Из всех помогавших нам коллег особенно приятно назвать М. С. Бродского, С. Г. Крейна, Б. Я. Левина, В. Б. Лидского, Ю. И. Любича, А. С. Маркуса, В. И. Мацаева, Л. А. Сахновича.

Однако все же мы не закончили рассказа о том, как была написана эта книга. Этот рассказ мы надеемся продолжить во введении к нашей монографии по теории абстрактных треугольных представлений линейных операторов и ее приложениям к теории канонических дифференциальных уравнений.

Редактор этой книги Ф. В. Широков не раз «вторгался» со своей критикой в глубины изложения того или иного вопроса. Были случаи, когда после такого вторжения мы начинали лучше понимать даже собственные исследования, и в результате — изложение выигрывало в простоте и ясности.

Авторы приносят глубокую благодарность Ф. В. Широкову за его большой труд и смелое «превышение» своих редакторских полномочий.

Одесса, Аркадия
сентября 1964 года

ВВЕДЕНИЕ

Теория несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве является молодой ветвью функционального анализа. Она привлекает в последнее время все большее внимание математиков и физиков, а иногда и техников. Цель книги — представить ряд достижений в этой области, связанных, главным образом, с теорией вполне непрерывных операторов.

В течение долгого времени наиболее существенной частью этой теории оставались исследования Д. Гильберта и Ф. Рисса, обобщавшие теорию интегральных уравнений Фредгольма.

В отличие от теории самосопряженных операторов, в абстрактной теории несамосопряженных операторов до недавнего времени не было получено никаких спектральных разложений и даже никаких теорем о полноте системы корневых векторов.

Вместе с тем в теории несамосопряженных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений Биркгоф (1908 г.), а затем Я. Д. Тамаркин (1911 г.) достигли крупных успехов. Эти авторы отправлялись от методов Коши и Пуанкаре, основанных на изучении аналитических свойств резольвенты задачи.

Что касается краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных, то в виду сложного строения резольвенты в течение продолжительного времени не удавалось получить ничего аналогичного.

Это положение изменилось лишь в 1951 г. благодаря продвижению в абстрактной теории несамосопряженных операторов. В этом году появилась работа М. В. Келдыша, в которой он установил теоремы о полноте собственных и присоединенных векторов и теоремы об асимптотических свойствах собственных чисел для широкого класса полиномиальных пучков несамосопряженных операторов. Эти теоремы позволили получить важные результаты в краевых задачах для дифференциальных уравнений с частными производными; они привели также к новым сильным результатам для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Одновременно асимптотические теоремы М. В. Келдыша для абстрактных операторов позволили обобщить оригинальные исследования Т. Карлемана по асимптотике собственных значений для краевых задач с эллиптическим дифференциальным оператором второго порядка.

В этот же период (1951—1956 гг.) М. С. Лившиц и группа его сотрудников начали развивать новое глубокое направление в теории несамосопряженных операторов.

Путеводной звездой этих исследований была идея обобщения на абстрактные операторы алгебраического результата И. Шура о приведении матрицы к треугольному виду унитарным преобразованием. Эти исследования привели М. С. Лившица к созданию теории характеристической матрицы-функции и треугольных моделей несамосопряженного оператора. Реализация этой идеи в абстрактной теории операторов в бесконечномерном пространстве была сопряжена со многими трудностями. Существенную роль в преодолении этих трудностей сыграли глубокие работы В. П. Потапова по теории аналитических матриц-функций, которые, в свою очередь, стимулировались исследованиями по несамосопряженным операторам.

Новый сдвиг в теории треугольного представления операторов произошел в последние годы (1958—1962 гг.). Еще в 1954 г. Н. Ароншайн и Р. Смит установили существование нетривиального инвариантного подпространства у всякого вполне непрерывного оператора в банаховом пространстве. Позже, в 1958 г., Л. А. Сахнович впервые вывел из этого геометрического факта существование треугольных моделей для более широкого класса операторов и с помощью этих моделей получил новые аналитические результаты в теории несамосопряженных операторов.

Примерно в этот же период в работах М. С. Бродского появился интеграл, дающий абстрактное треугольное представление несамосопряженного оператора. Естественность и прозрачность этого представления привлекли к нему внимание новой группы математиков. За короткое время теория нового интеграла и его применения получили значительное развитие (М. С. Бродский, И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, В. И. Мацаев). Этот интеграл естественным образом привел к выделению замечательных классов банаховых пространств, сформированных из вполне непрерывных операторов и представляющих собой идеалы кольца ограниченных операторов. Некоторые из этих пространств были ранее введены Дж. Нейманом и Р. Шэттеном, а многие возникли именно в связи с теорией интеграла, дающего треугольное представление операторов.

Отметим, наконец, что «абстрактный треугольный интеграл» позволил решить для широкого класса операторов задачу их «факторизации» (И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн).

Хотя в основе теории абстрактного треугольного интеграла лежат геометрические и алгебраические идеи, решение ряда фундаментальных вопросов этой теории было достигнуто лишь благодаря применению разнообразных (а иногда и новых) средств теории аналитических функций.

Следует вообще подчеркнуть, что с развитием теории линейных операторов все шире привлекается теория функций и, в особенности,— аналитических функций (теория роста и распределения нулей и полюсов целых и мероморфных функций, различные обобщения и уточнения теоремы Фрагмена — Линделефа, как например, теорема Левинсона — Сьеберга, теория субгармонических функций, тауберовы теоремы и пр.).

Основным руслом для использования методов теории функций является естественная и ныне уже классическая традиция исследования спектральных свойств линейного оператора на основе изучения его резольвенты как аналитической оператор-функции. Сравнительно недавно появился еще один канал для использования этих методов; он связан с определителями возмущения линейных операторов (М. Г. Крейн, Б. Я. Левин, В. И. Мацаев).

На основе изучения резольвенты в последние годы удалось получить сильные признаки существования «достаточно полного» набора инвариантных подпространств у (не обязательно ограниченного) оператора (Дж. Уэрмер, Ф. Вольф, Е. Бишоп, В. И. Мацаев и Ю. И. Любич). Это, в свою очередь, позволило развить теорию абстрактных треугольных представлений, распространив ее на широкие классы ограниченных и даже неограниченных операторов (Л. А. Сахнович, М. С. Бродский, И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн).

Изучение резольвенты дало также возможность установить теоремы о формировании базисов из корневых векторов несамосопряженного оператора и теоремы о суммировании разложений по корневым векторам (М. А. Наймарк, В. Б. Лидский, А. С. Маркус). Получено, кроме того, обоснование метода Фурье для эволюционных уравнений с несамосопряженным оператором того или иного класса (В. Б. Лидский).

Отметим, что техника получения оценок для резольвенты несамосопряженного оператора, которую разрабатывали Т. Карлеман, Э. Хилле и Я. Д. Тамаркин, М. В. Келдыш, В. Б. Лидский и др., была существенно усовершенствована в недавних работах В. И. Мацаева.

В этом кратком обзоре, как и в самой книге, мы не касаемся интересного направления в спектральной теории несамосопряженных операторов, разрабатываемого Н. Данфордом [1] и группой его учеников и последователей.

Теория абстрактного треугольного представления операторов и проблема факторизации абстрактных операторов, а также их применения будут изложены в другой монографии авторов. Здесь эти вопросы почти не затрагиваются, хотя в нескольких местах пришлось сослаться на отдельные факты из теории треугольного представления. Дело в том, что законченные результаты достигаются иногда лишь при взаимодействии трех типов методов: методов, основанных на изучении роста резольвенты, методов теории определителей возмущения и, наконец, методов теории треугольного представления оператора.

В последнее время получила заметное развитие теория специальных операторов, которые становятся самосопряженными или унитарными при введении некоторой индефинитной метрики в гильбертовом пространстве. Исследования по этой теории заслуживают изложения в отдельной монографии; в данной книге мы их не затрагивали, если не считать редких случаев соприкосновения с ними (гл. V, § 12).

Переходя к краткой характеристике содержания отдельных глав, отметим, прежде всего, что значительная часть материала впервые излагается с достаточно полными доказательствами. Весь материал в целом впервые систематизируется в монографии.

В первой главе напоминаются известные результаты общей теории ограниченных несамосопряженных операторов. Как правило, эти результаты не специфичны для гильбертова пространства — они могли бы быть сформулированы и для операторов в банаховом пространстве.

В третьей главе излагается теория симметрично-нормированных идеалов кольца ограниченных операторов в гильбертовом пространстве. Эта глава охватывает основное содержание изящной книги Р. Шэттена [2], посвященной теории Неймана — Шэттена «норм-идеалов» и «кросснорм». Наряду с «идеалами-ветеранами» (идеалом ядерных операторов, операторов Гильберта — Шмидта и др.) выделяются и изучаются новые идеалы, играющие важную роль в различных вопросах теории несамосопряженных операторов. Изложение теории симметрично-нормированных идеалов удалось построить на более идейных началах благодаря систематическому использованию теории s-чисел вполне непрерывных операторов, разработанной Г. Вейлем, Фань Цюем, А. Хорном и др. Теория s-чисел составляет основное содержание второй главы. Общие теоремы об s-числах линейных операторов систематически используются также в двух последующих главах.

Четвертая глава посвящена теории определителей возмущения и некоторым ее приложениям. Использование большого аппарата современной теории аналитических функций отличает эту главу от остальных. Этот аппарат рассматривается как вспомогательный, и в большинстве случаев предложения теории функций приводятся без доказательства.

В пятой главе излагаются различные теоремы о полноте систем корневых (собственных и присоединенных) векторов вполне непрерывного оператора (операторного пучка). При отборе материала авторы стремились, с одной стороны привести достаточно оригинальные и сильные результаты и, с другой стороны,— как можно полнее представить разнообразие существующих методов.

Здесь излагаются также различные предложения о росте резольвенты и теоремы об асимптотических свойствах спектра (для операторов того или иного класса).

В этой главе, по-видимому, впервые в достаточно развернутой форме изложены фундаментальные результаты М. В. Келдыша.

Большое внимание уделяется также теоремам о полноте системы корневых векторов диссипативного оператора.

Последний параграф посвящен исследованию спектральных свойств самосопряженного квадратичного пучка. Здесь используются результаты почти всех остальных параграфов этой главы. Однако, как показали недавние исследования (М. Г. Крейн и Г. Лангер), для построения полной теории квадратичных самосопряженных пучков естественно использовать различные теоремы теории операторов в пространствах с индефинитной метрикой. Ввиду этого некоторые предложения приводятся здесь без доказательства.

В дополнение к теоремам о полноте авторы сочли целесообразным изложить в главе VI наиболее простые признаки существования базисов (того или иного типа), составленных из корневых векторов данного линейного оператора (результаты Б. Р. Мукминова, И. М. Глазмана и А. С. Маркуса). Теория базисов гильбертова пространства не изложена в курсах функционального анализа, ввиду этого она также представлена в данной главе.

Изложение в книге выдержано в духе абстрактной теории операторов: оно иллюстрируется отдельными применениями к теории интегральных уравнений.

Читатель, обладающий некоторым опытом в теории краевых задач для дифференциальных уравнений или знакомый с теорией линейных колебаний систем с конечным и бесконечным числом степеней свободы, легко обнаружит, что многие из излагаемых результатов находят непосредственные приложения в каждой из этих областей. Более ясное представление об имеющихся здесь возможностях и перспективах можно получить из содержательного обзорного доклада М. В. Келдыша и В. Б. Лидского [1], а также из доклада М. Г. Крейна и Г. Лангера [2].

ГЛАВА I

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРАХ

Значительная часть излагаемых в этой главе результатов о несамосопряженных операторах ни в какой мере не является характерной для теории операторов в гильбертовом пространстве. Эти предложения могут быть переформулированы и доказаны без существенных изменений для ограниченных (а иногда даже для замкнутых неограниченных) операторов, действующих в произвольных банаховых пространствах.

Хотя излагаемый материал сравнительно давно стал достоянием специалистов, вместе с тем, он еще не нашел отражения ни в курсах по теории операторов в гильбертовом пространстве, ни в курсах по теории операторов в общих банаховых пространствах.

Материал этой главы, изложенный в указанном более общем плане можно найти в статье авторов [1].

§ 1. Обозначения и некоторые известные предложения

В этом параграфе вводятся основные обозначения и напоминаются хорошо известные понятия и предложения теории операторов в гильбертовом пространстве.

В дальнейшем через $\mathfrak{H}$ обозначается сепарабельное гильбертово пространство.

Область определения линейного оператора A, действующего в $\mathfrak{H}$, будет обозначаться через $\mathfrak{D}(A)$, а множество его значений — через $\mathfrak{R}(A)$.

Всюду в этой главе речь будет идти о линейных ограниченных операторах. Для таких операторов A всегда предполагается, что $\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{H}$.

Множество всех линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathfrak{H}$, будем обозначать через $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}(\mathfrak{H})$. *Равномерной нормой* оператора $A \in \mathfrak{R}$ называется число

$$|A| = \sup_{|\varphi|=1} |A\varphi|.$$

При таком определении нормы $\mathfrak{R}$ становится полным нормированным кольцом.

1. Инвариантные подпространства оператора. Подпространство $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{H}$ называется *инвариантным* подпространством оператора $A\,(\in \mathfrak{R})$, если для любого f из $\mathfrak{L}$ вектор Af также принадлежит $\mathfrak{L}$.

Пусть $P\,(\in \mathfrak{R})$ — произвольный проектор $(P^2 = P)$.

Очевидно, подпространство проекций $P(\mathfrak{H})$ будет инвариантным относительно оператора $A\,(\in \mathfrak{R})$ в том и только том случае, когда

$$PAP = AP. \tag{1.1}$$

Если, кроме того, подпространство $Q\mathfrak{H}$ $(Q = I - P)$ является инвариантным для оператора A, то в этом и только этом случае

$$PA = AP. \tag{1.2}$$

Если оператор A самосопряжен, а P — ортопроектор (ортогональный проектор: $P = P^*$), то условия (1.1) и (1.2) эквивалентны.

В дальнейшем неоднократно будет использовано следующее предложение.

1°. *Если подпространство $\mathfrak{L}$ является инвариантным подпространством линейного ограниченного оператора A, то его ортогональное дополнение $\mathfrak{L}^{\perp} = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{L}$ является инвариантным подпространством оператора A^*.*

В самом деле, пусть P — ортопроектор, проектирующий $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{L}$, а $Q = I - P$. Тогда условие (1.1) можно записать в виде

$$QAP = 0.$$

Переходя к сопряженным операторам, получим

$$PA^*Q = 0,$$

откуда следует доказываемое утверждение.

2°. *Пусть $\mathfrak{L}$ — инвариантное подпространство оператора $A \in \mathfrak{R}$ и P — ортопроектор, проектирующий $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{L}$. Если какие-либо два из операторов*

$$A, \quad PAP+Q, \quad P+QAQ, \tag{1.3}$$

где $Q=I-P$, обратимы, то обратим и третий, и обратные к ним связаны соотношениями

$$(PAP+Q)^{-1}=PA^{-1}P+Q, \tag{1.4}$$

$$(QAQ+P)^{-1}=QA^{-1}Q+P. \tag{1.5}$$

В самом деле, так как $QAP=0$, то оператор $A=(P+Q)A(P+Q)$ представим в виде

$$PAP+PAQ+QAQ.$$

Отсюда следует, что

$$A=(QAQ+P)(I+PAQ)(Q+PAP). \tag{1.6}$$

Квадрат оператора PAQ равен нулю, а следовательно, оператор $I+PAQ$ обратим и

$$(I+PAQ)^{-1}=I-PAQ.$$

Отсюда и из (1.6) непосредственно следует, что если два оператора из (1.3) обратимы, то обратим и третий. Если все три оператора (1.3) обратимы, то

$$A^{-1}=(Q+PAP)^{-1}(I-PAQ)(QAQ+P)^{-1}.$$

Из последнего равенства без труда заключаем, что

$$PA^{-1}P=P(Q+PAP)^{-1}P \quad \text{и} \quad QA^{-1}Q=Q(QAQ+P)^{-1}Q. \tag{1.7}$$

Так как

$$P(Q+PAP)^{-1}P=(Q+PAP)^{-1}-Q$$

и

$$Q(QAQ+P)^{-1}Q=(QAQ+P)^{-1}-P,$$

то из (1.7) вытекает (1.4) и (1.5).

2. Резольвента и спектр оператора. Точка λ комплексной плоскости называется *регулярной точкой* оператора $A\,(\in \mathfrak{R})$, если оператор $A-\lambda I$ обратим, т. е. существует ограниченный оператор $R(\lambda)=R(\lambda, A)=(A-\lambda I)^{-1}$

(называемый *резольвентой*) такой, что

$$R(\lambda)(A-\lambda I)=(A-\lambda I)R(\lambda)=I.$$

Множество $\varrho(A)$ всех регулярных точек оператора A, называемое *резольвентным множеством* оператора A, всегда открыто*). В самом деле, если $\lambda_0\in\varrho(A)$, то из представления

$$A-\lambda I=A-\lambda_0 I+(\lambda_0-\lambda)I=(A-\lambda_0 I)(I+(\lambda_0-\lambda)R(\lambda_0))$$

следует, что в круге

$$|\lambda-\lambda_0|<|R(\lambda_0)|^{-1}$$

существует резольвента, получаемая по формуле

$$R(\lambda)=(I-(\lambda-\lambda_0)R(\lambda_0))^{-1}R(\lambda_0)=\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^k R^{k+1}(\lambda_0). \tag{1.8}$$

Одновременно убеждаемся в том, что в области $\varrho(A)$ резольвента $R(\lambda)$ является голоморфной оператор-функцией**).

Для любых двух точек $\lambda, \mu\in\varrho(A)$ непосредственно проверяется тождество Гильберта:

$$R(\lambda)-R(\mu)=(\lambda-\mu)R(\lambda)R(\mu).$$

Для близких λ и μ это тождество следует также из (1.8).

Имеет место следующее предложение.

3°. *Пусть A — произвольный оператор из $\mathfrak{R}$ и F — произвольное замкнутое множество точек комплексной плоскости.*

Если $F\subset\varrho(A)$, то найдется $\delta>0$ такое, что для всех операторов $B\in\mathfrak{R}$, удовлетворяющих условию $|B|<\delta$, множество $F\subset\varrho(A+B)$.

Это свойство можно понимать как «непрерывную зависимость» резольвентного множества $\varrho(A)$ от оператора A. Докажем предложение 3°: из голоморфности оператор-

---

*) К $\varrho(A)$ для $A\in\mathfrak{R}$ причисляется всегда и бесконечно удаленная точка $\lambda=\infty$.

**) Оператор-функция $A(\lambda)$ $(\lambda\in G)$ называется *голоморфной* оператор-функцией в области G, если для любого $\lambda\in G$ оператор $A(\lambda)\in\mathfrak{R}$ и в окрестности каждой точки $\lambda_0\in G$ функция $A(\lambda)$

функции $R(\lambda)=R(\lambda, A)$ в $\varrho(A)$ и замкнутости F вытекает, что

$$\max_{\lambda\in F}|R(\lambda)|=\frac{1}{\delta}>0,$$

(даже если множество F неограничено).

Для любого оператора B с нормой $|B|<\delta$ и любого $\lambda\in F$ имеем

$$|BR(\lambda)|<1,$$

а следовательно, оператор $A+B-\lambda I$ обратим:

$$(A+B-\lambda I)^{-1}=R(\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}(-BR(\lambda))^k.$$

Таким образом, $F\subset\varrho(A+B)$.

Спектром $\sigma(A)$ оператора A называется дополнение множества $\varrho(A)$ до всей комплексной плоскости. Таким образом, спектр оператора всегда замкнутое множество.

Отметим, что спектры $\sigma(A)$ и $\sigma(A^*)$ расположены зеркально относительно вещественной оси.

Спектру $\sigma(A)$ принадлежат все *собственные числа* оператора A, т. е. те числа λ, для которых уравнение $(A-\lambda I)\varphi=0$ имеет по крайней мере одно ненулевое решение $\varphi\in\mathfrak{H}$ (*собственный вектор*).

Вектор $\varphi\in\mathfrak{H}$ ($\varphi\neq 0$) называется *корневым вектором* оператора $A\in\mathfrak{R}$, отвечающим собственному числу λ_0, если $(A-\lambda_0 I)^n\varphi=0$ при некотором натуральном n.

Множество всех корневых векторов оператора A, отвечающих одному и тому же собственному числу λ_0, вместе с вектором $\varphi=0$ образуют линеал *) $\mathfrak{L}_{\lambda_0}$, который называется *корневым линеалом*. Размерность $\nu_{\lambda_0}=\nu_{\lambda_0}(A)$ линеала $\mathfrak{L}_{\lambda_0}$ называется *алгебраической кратностью* собственного числа λ_0. Если $\nu_{\lambda_0}<\infty$, то линеал $\mathfrak{L}_{\lambda_0}$ оказывается, естественно, замкнутым; в этом случае мы говорим о *корневом подпространстве*.

Очевидно, *собственное подпространство* $\mathfrak{Z}_{\lambda_0}$ (т. е. множество, состоящее из нуль-вектора и всех собствен-

---

допускает разложение в сходящийся по равномерной норме ряд $A(\lambda)=A(\lambda_0)+\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^jC_j$, где $C_j\in\mathfrak{R}$ ($j=1, 2, \ldots$).

*) Т. е. линейное многообразие, вообще говоря, не замкнутое.

ных векторов оператора A, отвечающих числу λ_0) является частью $\mathfrak{L}_{\lambda_0}$ ($\mathfrak{Z}_{\lambda_0} \subset \mathfrak{L}_{\lambda_0}$). Размерность $\alpha(\lambda_0)$ подпространства $\mathfrak{Z}_{\lambda_0}$ называется *собственной кратностью* числа λ_0. Таким образом, собственная кратность любого собственного числа не превосходит его алгебраической кратности.

3. Интеграл Ф. Рисса. Пусть Γ — спрямляемый простой или сложный контур, ограничивающий некоторую область G_Γ и целиком лежащий внутри резольвентного множества $\varrho(A)$ ($\Gamma \subset \varrho(A)$) оператора $A \in \mathfrak{R}$. Тогда $R(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$ будет аналитической регулярной оператор-функцией на Γ. Предполагая, что контур Γ имеет положительную ориентацию относительно области G_Γ, образуем интеграл

$$P_\Gamma = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R(\lambda)\, d\lambda.$$

Имеют место следующие предложения Ф. Рисса (см. Ф. Рисс и Б. С.-Надь [1]).

4°. *Оператор P_Γ является проектором, перестановочным с A, и следовательно, в разложении*

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{L}_\Gamma + \mathfrak{N}_\Gamma, \quad \text{где } \mathfrak{L}_\Gamma = P_\Gamma \mathfrak{H},\ \mathfrak{N}_\Gamma = (I - P_\Gamma)\mathfrak{H},$$

оба слагаемых $\mathfrak{L}_\Gamma$ и $\mathfrak{N}_\Gamma$ являются инвариантными подпространствами оператора A. Кроме того,

а) *спектр сужения оператора A на подпространство $\mathfrak{L}_\Gamma$ содержится в области G_Γ;*

б) *спектр сужения оператора A на подпространство $\mathfrak{N}_\Gamma$ находится вне замыкания G_Γ.*

5°. *Если Γ_1 и Γ_2 — два различных контура, обладающих указанными выше свойствами, причем области G_{Γ_1} и G_{Γ_2} не имеют общих точек, то соответствующие им проекторы ортогональны друг к другу, т. е.*

$$P_{\Gamma_1} P_{\Gamma_2} = P_{\Gamma_2} P_{\Gamma_1} = 0.$$

Из предложений 4° и 5° следует, что если в области G_Γ находится конечное число точек спектра оператора A: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, то

$$P_\Gamma = \sum_{j=1}^{n} P_{\lambda_j}, \quad P_{\lambda_j} P_{\lambda_k} = 0 \quad (j \neq k), \tag{1.9}$$

где P_{λ_j} $(j=1, 2, \ldots, n)$ суть проекторы, проектирующие $\mathfrak{H}$ на инвариантные относительно A подпространства $P_{\lambda_j}\mathfrak{H}$, в каждом из которых весь спектр оператора A состоит из одного числа λ_j.

В самом деле, пусть γ_j—непересекающиеся окружности с центрами λ_j, целиком содержащиеся в G_Γ; тогда

$$P_\Gamma = -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} R(\lambda)\, d\lambda = \sum_{j=1}^{n} P_{\gamma_j}.$$

Так как с уменьшением радиуса окружности γ_j проектор P_{γ_j} не изменяется, то P_{γ_j} вполне определяется точкой λ_j $(P_{\gamma_j} = P_{\lambda_j})$ и обладает указанным выше свойством.

4. Полярное представление ограниченного оператора. Для $A \in \mathfrak{R}$ символом $\mathfrak{Z}(A)$ обозначается подпространство нулей оператора A, т. е. подпространство всех решений φ уравнения $A\varphi = 0$. Хорошо известно, что

$$\mathfrak{H} = \overline{\mathfrak{R}(A)} \oplus \mathfrak{Z}(A^*) = \overline{\mathfrak{R}(A^*)} \oplus \mathfrak{Z}(A),$$

где черта обозначает замыкание соответствующего линеала.

Оператор $U \in \mathfrak{R}$ называется *частично изометрическим*, если он изометрически отображает подпространство $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{Z}(U)$ на $\mathfrak{R}(U)$. Для частично изометрического оператора U линеал $\mathfrak{R}(U)$ является замкнутым подпространством.

Легко видеть, что если U—частично изометрический оператор, то таковым является и оператор U^*. Оператор U производит изометрическое отображение подпространства $\mathfrak{R}(U^*)$ на $\mathfrak{R}(U)$, а оператор U^* производит обратное отображение $\mathfrak{R}(U)$ на $\mathfrak{R}(U^*)$, так что

$$U^*U = P_1 \text{ и } UU^* = P_2,$$

где P_1, P_2—ортопроекторы, проектирующие $\mathfrak{H}$ соответственно на подпространства $\mathfrak{R}(U^*)$ и $\mathfrak{R}(U)$.

Пусть A—произвольный оператор из $\mathfrak{R}$.

Тогда, как известно, существует единственный неотрицательный оператор H такой, что $H^2 = A^*A$ $(H =$

$=(A^*A)^{1/2}$). Для этого оператора будем иметь

$$|Af|^2=(Af,\ Af)=(A^*Af,\ f)=(Hf,\ Hf)=|Hf|^2 \quad (f\in\mathfrak{H}).$$

Оператор U, сопоставляющий вектору Hf вектор Af, изометрично отображает $\mathfrak{R}(H)$ на $\mathfrak{R}(A)$. Доопределяя оператор U на всем $\overline{\mathfrak{R}(H)}$ по непрерывности и полагая $U\varphi=0$ при $\varphi\in\mathfrak{Z}(H)$, получаем частично изометрический оператор.

Легко видеть, что

$$\overline{\mathfrak{R}(H)}=\overline{\mathfrak{R}(H^2)}=\overline{\mathfrak{R}(A^*A)}=\overline{\mathfrak{R}(A^*)}.$$

Таким образом, всякий линейный ограниченный оператор A допускает представление в виде

$$A=UH, \tag{1.10}$$

где $H=(A^*A)^{1/2}$, а U — частично изометрический оператор, отображающий изометрично подпространство $\overline{\mathfrak{R}(A^*)}$ на $\overline{\mathfrak{R}(A)}$.

Представление (1.10) называется *полярным представлением* оператора A.

Без труда доказываются следующие свойства операторов, входящих в полярное представление оператора A:

1) $U^*A=H$;
2) $H_1=UHU^*$, $\quad H=U^*H_1U$, где $H_1=(AA^*)^{1/2}$;
3) $A=H_1U$, $\quad H_1=AU^*$.

5. Размерность оператора. Конечномерные операторы. *Размерностью оператора* A называется число $r(A)$ $(\leqslant\infty)$, равное размерности подпространства $\overline{\mathfrak{R}(A)}$.

Легко видеть, что

$$r(A)=r((A^*A)^{1/2})=r((AA^*)^{1/2})=r(A^*).$$

Оператор $A\in\mathfrak{R}$ называется *конечномерным*, если $r(A)<\infty$. Очевидно, всякий оператор K, определенный равенством

$$Kf=\sum_{j=1}^{n}(f,\ \varphi_j)\,\psi_j \quad (f\in\mathfrak{H}), \tag{1.11}$$

где $\{\varphi_j\}_1^n$ и $\{\psi_j\}_1^n$ — некоторые системы векторов из $\mathfrak{H}$, является коне номерным оператором, причем $r(K)\leqslant n$.

Легко обнаруживается, что

$$r(K) = \min(\dim \mathfrak{L}_1, \ \dim \mathfrak{L}_2),$$

где $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ — линейные оболочки соответственно систем $\{\varphi_j\}_1^n$ и $\{\psi_j\}_1^n$.

Всякий конечномерный оператор K можно представить в виде (1.11) с $n = r(K)$. В самом деле, пусть $\{\psi_j\}_1^n$ (где $n = r(K)$) — произвольный базис подпространства $\mathfrak{R}(K)$. Тогда для каждого вектора $f \in \mathfrak{H}$

$$Kf = \sum_{j=1}^{n} c_j \psi_j, \tag{1.12}$$

где $\{c_j\}_1^n$ — комплексные числа, зависящие от f. Пусть $\{\chi_j\}_1^n$ — произвольная система векторов, биортогональная системе $\{\psi_j\}_1^n$, т. е.

$$(\psi_j, \ \chi_k) = \delta_{jk} \qquad (j, \ k = 1, \ 2, \ \ldots, \ n).$$

Тогда

$$c_j = (Kf, \ \chi_j),$$

или

$$c_j = (f, \ \varphi_j) \qquad (j = 1, \ 2, \ \ldots, \ n), \tag{1.13}$$

где $\varphi_j = K^* \chi_j$. Подставляя (1.13) в (1.12), получим (1.11).

В дальнейшем оператор K, заданный равенством (1.11) будем записывать в виде

$$K = \sum_{j=1}^{n} (\cdot, \ \varphi_j) \, \psi_j.$$

§ 2. Нормальные точки ограниченного оператора

1. Собственное число λ_0 оператора $A \, (\in \mathfrak{R})$ назовем *нормальным собственным числом* *) оператора A, если

1) алгебраическая кратность числа λ_0 конечна и

2) все пространство $\mathfrak{H}$ распадается в прямую сумму подпространств

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{L}_{\lambda_0} \dot{+} \mathfrak{N}_{\lambda_0}, \tag{2.1}$$

*) В статье авторов [1] вместо термина «нормальное собственное число» употреблялось выражение «числу отвечает нормально отщепляющееся конечномерное корневое подпространство».

где $\mathfrak{L}_{\lambda_0}$ — корневое подпространство оператора A, отвечающее λ_0, а $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ — инвариантное подпространство оператора A, в котором оператор $A-\lambda_0 I$ обратим.

Разложение (2.1) пространства $\mathfrak{H}$ является единственным.

Действительно, если ν — алгебраическая кратность λ_0 (т. е. $\nu=\dim \mathfrak{L}_{\lambda_0}$), то

$$(A-\lambda_0 I)^\nu \mathfrak{L}_{\lambda_0}=0.$$

Учитывая, далее, что оператор $A-\lambda_0 I$ обратим в $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$, получаем

$$(A-\lambda_0 I)^\nu \mathfrak{H}=(A-\lambda_0 I)^\nu \mathfrak{L}_{\lambda_0} \dotplus (A-\lambda_0 I)^\nu \mathfrak{N}_{\lambda_0}=\mathfrak{N}_{\lambda_0}.$$

Таким образом, $\mathfrak{N}_{\lambda_0}=(A-\lambda_0 I)^\nu \mathfrak{H}$.

Имеет место следующая теорема:

Теорема 2.1. *Для того чтобы точка спектра λ_0 оператора $A \in \mathfrak{R}$ была нормальным собственным числом, необходимо и достаточно, чтобы она была изолированной точкой спектра оператора A и отвечающий ей проектор*

$$P_{\lambda_0}=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda-\lambda_0|=\delta} R(\lambda)\,d\lambda \qquad (2.2)$$

был конечномерным.

Если λ_0 — нормальное собственное число, то P_{λ_0} проектирует все $\mathfrak{H}$ на корневое подпространство $\mathfrak{L}_{\lambda_0}$.

Доказательство. Предположим, что λ_0 является нормальным собственным числом оператора A. Обозначим через A_1 и A_2 сужения оператора A соответственно на подпространства $\mathfrak{L}_{\lambda_0}$ и $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$. Как только что отмечалось, оператор $A_1-\lambda_0 I$ является нульстепенным: $(A_1-\lambda_0 I)^\nu=0$.

Обозначим через n наименьшее целое число такое, что $(A_1-\lambda_0 I)^n=0$. Тогда, полагая $B_1=A_1-\lambda_0 I$, будем иметь:

$$-(\lambda-\lambda_0)^n I=B_1^n-(\lambda-\lambda_0)^n I=$$
$$=(A_1-\lambda I)\,[(\lambda-\lambda_0)^{n-1}I+(\lambda-\lambda_0)^{n-2}B_1+\ldots+B_1^{n-1}].$$

Отсюда

$$-(A_1-\lambda I)^{-1}=(\lambda-\lambda_0)^{-1}I+\sum_{j=1}^{n-1}(\lambda-\lambda_0)^{-j-1}B_1^j.$$

С другой стороны, оператор $A_2-\lambda_0 I$ обратим в подпространстве $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$. Следовательно, для всех чисел λ из круга $|\lambda-\lambda_0|<1/|(A_2-\lambda_0 I)^{-1}|$ существует резольвента

$$(A_2-\lambda I)^{-1}=R_0+(\lambda-\lambda_0)R_0^2+\ldots+(\lambda-\lambda_0)^n R_0^n+\ldots,$$

где $R_0=(A_2-\lambda_0 I)^{-1}$. Отсюда вытекает, что все точки λ, удовлетворяющие неравенствам $0<|\lambda-\lambda_0|<|R_0|^{-1}$, являются регулярными точками оператора A, причем резольвента $R(\lambda)$ для этих точек выражается следующей формулой:

$$R(\lambda)=(A-\lambda I)^{-1}=((\lambda-\lambda_0)^{-n}B_1^{n-1}+\ldots+(\lambda-\lambda_0)^{-2}B_1+$$
$$+(\lambda-\lambda_0)^{-1}I)P+\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^k R_0^{k-1}(I-P), \quad (2.3)$$

где P — проектор, проектирующий все пространство $\mathfrak{H}$ на подпространство $\mathfrak{L}_{\lambda_0}$ параллельно $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ ($P\mathfrak{H}=\mathfrak{L}_{\lambda_0}$, $P\mathfrak{N}_{\lambda_0}=0$).

Проинтегрировав обе части равенства (2.3) по достаточно малой окружности с центром в точке λ_0, найдем, что

$$P=P_{\lambda_0}=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda-\lambda_0|=\delta}R(\lambda)\,d\lambda.$$

Таким образом, необходимость условий теоремы доказана. Докажем их достаточность.

Пусть λ_0 — изолированная точка спектра A и проектор (2.2) конечномерен. Тогда пространство $\mathfrak{H}$ можно разложить в прямую сумму подпространств $\mathfrak{M}_{\lambda_0}=P_{\lambda_0}\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{N}_{\lambda_0}=(I-P_{\lambda_0})\mathfrak{H}$, инвариантных относительно оператора A. Сужение оператора A на подпространство $\mathfrak{M}_{\lambda_0}$ имеет единственную точку спектра $\lambda=\lambda_0$. Следовательно,

$$(A-\lambda_0 I)^{\nu}\mathfrak{M}_{\lambda_0}=0 \quad (\nu=\dim\mathfrak{M}_{\lambda_0}). \quad (2.4)$$

Для сужения оператора A на подпространство $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ точка λ_0 является регулярной точкой. Отсюда и из (2.4) следует, что $\mathfrak{M}_{\lambda_0}$ является корневым подпространством оператора A, отвечающим числу λ_0. Так как $\mathfrak{M}_{\lambda_0} \dot{+} \mathfrak{N}_{\lambda_0} = \mathfrak{H}$, то λ_0—нормальное собственное число. Теорема доказана.

Для полноты приведем без доказательства еще одно предложение о нормальных собственных числах оператора, которое далее не используется (см. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн [1]).

Для того чтобы λ_0 *было нормальным собственным числом оператора* $A \in \mathfrak{R}$, *необходимо и достаточно, чтобы:* а) λ_0 *было изолированной точкой спектра* A, б) *алгебраическая кратность* λ_0 *была конечной и* в) *множество значений* $(A-\lambda_0 I)\mathfrak{H}$ *оператора* $A-\lambda_0 I$ *было замкнутым.*

2. Отметим три предложения, вытекающих из теоремы 2.1.

1°. *Если* λ_0—*нормальное собственное число оператора* A *некоторой алгебраической кратности, то* $\overline{\lambda_0}$ *будет нормальным собственным числом оператора* A^* *той же алгебраической кратности.*

В самом деле, спектры $\sigma(A)$ и $\sigma(A^*)$ расположены зеркально относительно вещественной оси, и следовательно, точка $\overline{\lambda_0}$ является изолированной точкой $\sigma(A^*)$.

С другой стороны, если λ_0 и $\overline{\lambda_0}$ суть изолированные точки соответственно спектров $\sigma(A)$ и $\sigma(A^*)$, то всегда

$$P_{\overline{\lambda_0}}(A^*) = [P_{\lambda_0}(A)]^*. \tag{2.5}$$

2°. *Пусть* λ_0—*нормальное собственное число оператора* $A\,(\in \mathfrak{R})$ *и пусть ему отвечает разложение*

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{L}_{\lambda_0} \dot{+} \mathfrak{N}_{\lambda_0};$$

тогда нормальному собственному числу $\overline{\lambda_0}$ *оператора* A^* *отвечает разложение*

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{L}^*_{\overline{\lambda_0}} \dot{+} \mathfrak{N}^*_{\overline{\lambda_0}},$$

где

$$\mathfrak{L}^*_{\overline{\lambda_0}} = \mathfrak{N}^{\perp}_{\lambda_0} \quad \text{и} \quad \mathfrak{N}^*_{\overline{\lambda_0}} = \mathfrak{L}^{\perp}_{\lambda_0}.$$

Это предложение является простым следствием равенства (2.5).

3°. *Если λ_0 — нормальное собственное число оператора A, то уравнения*

$$(A-\lambda_0 I)\varphi=0 \quad \text{и} \quad (A^*-\overline{\lambda}_0 I)\psi=0$$

имеют одинаковые числа линейно независимых решений.

В самом деле, число решений уравнения $(A^*-\overline{\lambda}_0 I)\psi=0$ равно размерности подпространства $\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{R}(A-\lambda_0 I)$. Так как сужение оператора $A-\lambda_0 I$ на подпространство $\mathfrak{N}_{\lambda_0}=(I-P_{\lambda_0})\mathfrak{H}$ является обратимым оператором, то

$$\dim(\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{R}(A-\lambda_0 I))=\dim(\mathfrak{L}_{\lambda_0}\ominus(A-\lambda_0 I)\mathfrak{L}_{\lambda_0})=$$
$$=\dim(\mathfrak{L}_{\lambda_0}\ominus\mathfrak{R}(A_1-\lambda_0 I_1)),$$

где $\mathfrak{L}_{\lambda_0}=P_{\lambda_0}\mathfrak{H}$, а A_1 и I_1 — сужения операторов A и I на $\mathfrak{L}_{\lambda_0}$.

Подпространство $\mathfrak{L}_{\lambda_0}$ является конечномерным, а следовательно, размерность подпространства решений уравнения $(A_1-\lambda_0 I_1)\varphi=0$ совпадает с размерностью подпространства $\mathfrak{L}_{\lambda_0}\ominus\mathfrak{R}(A_1-\lambda_0 I_1)$. Наконец, уравнения

$$(A_1-\lambda_0 I_1)\varphi=0 \quad \text{и} \quad (A-\lambda_0 I)\varphi=0$$

имеют одни и те же решения. Предложение доказано.

3. Точку комплексной плоскости λ_0 назовем *нормальной точкой* оператора A, если она является либо регулярной точкой A, либо нормальным собственным числом A. Так как $\varrho(A)$ — открытое множество и всякое нормальное собственное число оператора A является изолированной точкой спектра A, то множество $\tilde{\varrho}(A)\,(\supset\varrho(A))$ всех нормальных точек оператора A всегда открыто.

Имеет место следующая теорема:

Теорема 2.2. *Пусть Γ — спрямляемый контур, ограничивающий некоторую область G_Γ и состоящий из регулярных точек оператора $A\ (\in\mathfrak{R})$. Область G_Γ состоит из нормальных точек оператора A в том и только том случае, когда проектор*

$$P_\Gamma=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (A-\lambda I)^{-1}\,d\lambda$$

конечномерен.

При выполнении этого условия G_Γ либо не содержит точек спектра оператора A, либо спектр A в G_Γ состоит *из конечного числа нормальных собственных чисел. В последнем случае подпространство $P_\Gamma\mathfrak{H}$ будет прямой суммой всех корневых подпространств оператора A, соответствующих собственным числам из G_Γ.*

Доказательство. Пусть весь спектр оператора A, содержащийся в G_Γ, состоит из конечного числа нормальных точек $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Тогда в силу соотношения (1.9)

$$P_\Gamma = P_{\lambda_1} + P_{\lambda_2} + \ldots + P_{\lambda_n} \quad (P_{\lambda_j}P_{\lambda_k} = 0 \text{ при } j \neq k), \qquad (2.6)$$

где проектор P_{λ_j} $(j = 1, 2, \ldots, n)$ проектирует все пространство $\mathfrak{H}$ на конечномерное корневое подпространство $\mathfrak{L}_{\lambda_j}$ оператора A, соответствующее собственному числу λ_j. Следовательно, проектор P_Γ конечномерен и

$$\mathfrak{L}_\Gamma = P_\Gamma\mathfrak{H} = \sum_{j=1}^{n} P_{\lambda_j}\mathfrak{H} = \mathfrak{L}_{\lambda_1} \dotplus \mathfrak{L}_{\lambda_2} \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{L}_{\lambda_n}.$$

Обратно, пусть проектор P_Γ конечномерен.

Тогда пространство $\mathfrak{H}$ можно разложить в прямую сумму подпространств $\mathfrak{L}_\Gamma$ и $\mathfrak{N}_\Gamma = (I - P_\Gamma)\mathfrak{H}$, инвариантных относительно оператора A.

Обозначим через A_1 и A_2 сужения оператора A соответственно на подпространства $\mathfrak{L}_\Gamma$ и $\mathfrak{N}_\Gamma$. Подпространство $\mathfrak{L}_\Gamma$ конечномерно; следовательно, спектр оператора A_1 состоит из конечного числа собственных значений λ_j $(j = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda_j \in G_\Gamma)$. Согласно известным положениям теории конечных матриц, подпространство $\mathfrak{L}_\Gamma$ можно разложить в прямую сумму подпространств $\mathfrak{L}_j$, инвариантных относительно A_1 и таких, что оператор $A_1 - \lambda_j I$ является нульстепенным в соответствующем подпространстве $\mathfrak{L}_j$. Очевидно, оператор $A_1 - \lambda_j I$ будет обратим во всех подпространствах $\mathfrak{L}_k$ с $k \neq j$.

Оператор $A_2 - \lambda I$ обратим для всех $\lambda \in G_\Gamma$; следовательно, спектр оператора A в области G_Γ совпадает со спектром оператора A_1. Таким образом, внутри G_Γ оператор A имеет конечное число собственных значений λ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, которым отвечают конечномерные корневые подпространства $\mathfrak{L}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Точки λ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ являются нормальными, ибо пространство $\mathfrak{H}$ можно разложить в прямую сумму инвариантных относительно A подпространств:

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{L}_j \dotplus \mathfrak{N}_j \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

причем оператор $A-\lambda_j I$ обратим в подпространстве

$$\mathfrak{N}_j=\mathfrak{N}_\Gamma \dotplus \sum_{k\neq j} \mathfrak{L}_k \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Теорема доказана.

§ 3. Устойчивость корневых кратностей оператора

Пусть $A\in\mathfrak{R}$ и пусть Γ — произвольный спрямляемый контур, который ограничивает область G_Γ и обладает следующими свойствами:

а) весь спектр оператора A внутри G_Γ состоит из конечного числа нормальных точек $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ оператора A;

б) контур Γ состоит из регулярных точек оператора A.

Корневой кратностью *) оператора A, отвечающей контуру Γ, назовем сумму алгебраических кратностей всех собственных чисел $\lambda_j\ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ оператора A, попадающих в область G_Γ, т. е. число

$$\nu_\Gamma(A)=\sum_{j=1}^{n}\nu_{\lambda_j}(A).$$

Согласно формуле (2.6)

$$\nu_\Gamma(A)=\dim P_\Gamma\mathfrak{H},$$

где

$$P_\Gamma=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (A-\lambda I)^{-1}\,d\lambda.$$

Теореме 3.1 об устойчивости корневых кратностей оператора при возмущении его малым слагаемым предпошлем одну лемму.

Лемма 3.1 (Б. С.-Надь [1, 2]). *Пусть P и Q — два проектора. Если $|P-Q|<1$, то подпространства $P\mathfrak{H}$*

---

*) В статье авторов [1] вместо термина «корневая кратность» употреблялся термин «корневое число».

и $Q\mathfrak{H}$ *имеют равные размерности*

$$\dim P\mathfrak{H} = \dim Q\mathfrak{H}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Если $|P-Q|<1$, то оператор $I-(P-Q)$ обратим:

$$(I-P+Q)^{-1} = I + \sum_{j=1}^{\infty} (P-Q)^j,$$

и следовательно, $(I-P+Q)\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$. Отсюда

$$P(I-P+Q)\mathfrak{H} = P\mathfrak{H},$$

а так как $P^2=P$, то

$$PQ\mathfrak{H} = P\mathfrak{H} \quad \text{или} \quad P\mathfrak{R}(Q) = \mathfrak{R}(P).$$

Таким образом, оператор P отображает подпространство $Q\mathfrak{H}$ на все подпространство $P\mathfrak{H}$. Более того, для любого $f \in Q\mathfrak{H}$

$$|Pf| = |f+(P-Q)f| \geqslant (1-|P-Q|)\cdot|f|,$$

откуда следует, что оператор P отображает $Q\mathfrak{H}$ на $P\mathfrak{H}$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно. Отсюда и следует равенство (3.1). Лемма доказана.

Теорема 3.1. *Пусть* Γ — *спрямляемый замкнутый контур, ограничивающий некоторую область* G_Γ *и обладающий относительно оператора* $A \in \mathfrak{R}$ *свойствами* а), б). *Тогда существует такое* $\varrho>0$, *что для всех операторов* $B \in \mathfrak{R}$, *удовлетворяющих условию* $|B-A|<\varrho$, *контур* Γ *обладает свойствами* а), б) *также относительно оператора* B, *причем* $\nu_\Gamma(A) = \nu_\Gamma(B)$.

Доказательство. Обозначая по-прежнему через $R(\lambda)$ резольвенту оператора A, положим

$$\delta = \frac{1}{\max\limits_{\lambda\in\Gamma} |R(\lambda)|}.$$

Тогда

$$\varrho = \delta^2 \Big/ \left(\delta + \frac{l}{2\pi}\right) \; (<\delta),$$

где l — длина контура Γ, и будет числом, существование которого утверждается в теореме.

Действительно, пусть B — любой оператор из $\mathfrak{R}$, удовлетворяющий неравенству

$$|A-B|<\varrho. \tag{3.2}$$

Все точки $\lambda\in\Gamma$ являются регулярными точками оператора B, ибо при $\lambda\in\Gamma$ существует

$$(B-\lambda I)^{-1}=R(\lambda)\left(I+\sum_{j=1}^{\infty}[(A-B)R(\lambda)]^j\right). \tag{3.3}$$

Сходимость ряда в правой части равенства (3.3) обеспечивается в силу (3.2) оценкой

$$|(B-A)R(\lambda)|\leqslant|B-A||R(\lambda)|<1 \quad (\lambda\in\Gamma).$$

Введем теперь проектор

$$\widetilde{P}_\Gamma=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(B-\lambda I)^{-1}d\lambda.$$

Из (3.2) и (3.3) следует, что

$$|\widetilde{P}_\Gamma-P_\Gamma|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_\Gamma R(\lambda)\sum_{j=1}^{\infty}[(A-B)R(\lambda)]^j\,d\lambda\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{l}{2\pi}\max_{\lambda\in\Gamma}\frac{|A-B||R(\lambda)|^2}{1-|A-B||R(\lambda)|}.$$

Воспользовавшись неравенствами

$$|A-B|<\varrho=2\pi\delta^2(l+2\pi\delta)^{-1}, \quad |R(\lambda)|<\delta^{-1} \quad (\lambda\in\Gamma),$$

получаем:

$$|\widetilde{P}_\Gamma-P_\Gamma|<1.$$

Отсюда согласно лемме 3.1

$$\dim\widetilde{P}_\Gamma\mathfrak{H}=\dim P_\Gamma\mathfrak{H}, \tag{3.4}$$

и следовательно, вместе с P_Γ конечномерен и проектор $\widetilde{P}_\Gamma$.

Но тогда, в силу теоремы 2.2, контур Γ будет обладать также и относительно оператора B свойствами а), б). Кроме того, равенство (3.4) означает, что

$$\nu_\Gamma(A)=\nu_\Gamma(B).$$

§ 4. Некоторые спектральные свойства вполне непрерывных операторов

Множество всех линейных вполне непрерывных операторов, действующих в $\mathfrak{H}$, обозначим через $\mathfrak{S}_\infty$. Как известно, $\mathfrak{S}_\infty$ является *двусторонним идеалом* кольца $\mathfrak{R}$, притом *самосопряженным* (или *симметрическим*) и *замкнутым*. Это означает, что $\mathfrak{S}_\infty$ обладает следующими свойствами:

1) $\mathfrak{S}_\infty$ — линейное множество, причем если $X \in \mathfrak{R}$, а $Y \in \mathfrak{S}_\infty$, то $XY \in \mathfrak{S}_\infty$ и $YX \in \mathfrak{S}_\infty$.

2) Если $X \in \mathfrak{S}_\infty$, то $X^* \in \mathfrak{S}_\infty$.

3) $\mathfrak{S}_\infty$ замкнуто в $\mathfrak{R}$ ($\mathfrak{S}_\infty = \overline{\mathfrak{S}}_\infty$).

По соображениям, которые выяснятся позже, равномерная норма $|X|$ для $X \in \mathfrak{S}_\infty$ будет иногда обозначаться через $|X|_\infty$.

1. Корневые подпространства вполне непрерывного оператора. По известной теореме Гильберта (см. Ф. Рисс и Б. С.-Надь [1]) всякая ненулевая точка спектра вполне непрерывного оператора A является его нормальной точкой. Следовательно, у такого оператора не более счетного числа точек спектра, которые могут иметь своим пределом только точку $\lambda = 0$. Последняя всегда (при $\dim \mathfrak{H} = \infty$) принадлежит спектру A ($\in \mathfrak{S}_\infty$).

Сумму алгебраических кратностей всех ненулевых собственных чисел оператора A ($\in \mathfrak{S}_\infty$) обозначим через $\nu(A)$ ($\leqslant \infty$).

Размерность $r(A)$ оператора A ($\in \mathfrak{S}_\infty$) связана с $\nu(A)$ неравенством

$$\nu(A) \leqslant r(A). \tag{4.1}$$

Если $r(A) = \infty$, то неравенство (4.1) тривиально. В случае же $r(A) < \infty$ доказательство этого неравенства сводится к доказательству его для оператора, действующего в конечномерном пространстве.

Если оператор A вполне непрерывен, то (согласно предложению 1° § 2) $\nu(A) = \nu(A^*)$.

В дальнейшем через $\{\lambda_j(A)\}_1^{\nu(A)}$ будем обозначать последовательность, состоящую из всех ненулевых собственных чисел оператора A, занумерованных как-либо в порядке убывания модулей, причем при этой нумерации каждое собственное число считается столько раз, какова его алгебраическая кратность*).

Оператор A называется *вольтерровым*, если он вполне непрерывен и не имеет отличных от нуля собственных чисел $(\nu(A)=0)$.

Из равенства $\nu(A)=\nu(A^*)$ для вполне непрерывных операторов вытекает, что если оператор A вольтерров, то и оператор A^* вольтерров.

Обозначим через $\mathfrak{E}_A$ линейную замкнутую оболочку всех корневых подпространств $\mathfrak{L}_{\lambda_j}$ $(\lambda_j=\lambda_j(A))$ вполне непрерывного оператора A. Очевидно, подпространство $\mathfrak{E}_A$ является инвариантным относительно оператора A, причем $\nu(A)=\dim\mathfrak{E}_A$.

Лемма 4.1 (лемма Шура). *Пусть $\hat{A}$ — оператор, индуцированный вполне непрерывным оператором A в $\mathfrak{E}_A$. Тогда найдется ортонормированный базис $\{\omega_j\}_1^{\nu(A)}$ подпространства $\mathfrak{E}_A$, в котором матрица оператора $\hat{A}$ имеет треугольный вид, так что*

$$A\omega_j=a_{j1}\omega_1+a_{j2}\omega_2+\ldots+a_{jj}\omega_j \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu(A)), \tag{4.2}$$

причем

$$a_{jj}=(A\omega_j,\ \omega_j)=\lambda_j(A) \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu(A)). \tag{4.3}$$

Доказательство. Выберем в каждом корневом подпространстве $\mathfrak{L}_j$ $(=\mathfrak{L}_{\lambda_j(A)})$ $(j=1, 2, \ldots, \nu(A))$ жорданов базис и последовательно перенумеруем векторы этих базисов.

Тогда получим последовательность $\{\varphi_j\}_1^{\nu(A)}$, для каждого вектора которой выполняется одно из двух равенств $A\varphi_j=\lambda_j\varphi_j$ или $A\varphi_j=\lambda_j\varphi_j+\varphi_{j+1}$ $(\lambda_j=\lambda_j(A))$.

*) Вообще запись $j=1, 2, \ldots, \nu(A)$ будет означать перечисление по всем собственным числам, занумерованным в порядке убывания модулей. То же замечание относится и к записи сумм $\sum\limits_{j=1}^{\nu(A)}$ и произведений $\prod\limits_{j=1}^{\nu(A)}$.

Легко видеть, что ортонормированный базис $\{\omega_j\}_1^{\nu(A)}$ подпространства $\mathfrak{E}_A$ (*система Шура* оператора A), получающийся из системы $\{\varphi_j\}$ путем последовательной ортогонализации, будет обладать свойствами (4.2) и (4.3).

Замечание 4.1. Лемме 4.1 можно придать значительно более общую форму.

Пусть $A \in \mathfrak{R}$ и пусть $\{\lambda_j(A)\}$ — некоторое множество его нормальных собственных чисел, а $\mathfrak{E}$ — линейная замкнутая оболочка всех корневых векторов, отвечающих этим числам.

Тогда в $\mathfrak{E}$ всегда можно выбрать ортонормированный базис $\{\omega_j\}$, для которого выполняются соотношения (4.2) *и* (4.3).

Лемма 4.2. *Пусть A — вполне непрерывный оператор, для которого $\mathfrak{E}_A \neq \mathfrak{H}$, а Q_A — ортопроектор, проектирующий $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{E}_A^{\perp}$. Тогда $Q_A A Q_A$ — вольтерров оператор.*

Доказательство. Обозначим через

$$\mathfrak{N}_j^* \left(= \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}_j}(A^*)\right) \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu(A))$$

дополнительные подпространства к корневым линеалам $\mathfrak{L}_{\bar{\lambda}_j}(A^*)$ оператора A^* и через $\mathfrak{M}$ — пересечение всех подпространств $\mathfrak{N}_j^*$. В силу предложения 2° § 2 вектор $f\,(\in \mathfrak{H})$ принадлежит подпространству $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда он ортогонален всем линеалам $\mathfrak{L}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu(A))$. Следовательно, подпространства $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{E}_A$ ортогональны и

$$\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{E}_A = \mathfrak{H}.$$

Из предложения 1° § 1 следует, что подпространство $\mathfrak{M}$ является инвариантным относительно A^* и оператор $\hat{A}^*$, индуцированный оператором A^* в $\mathfrak{M}$, вольтерров. Стало быть, вольтерровым будет оператор $Q_A A^* Q_A$ и сопряженный к нему оператор $Q_A A Q_A$.

Замечание 4.2. Лемме 4.2 так же, как это было с леммой 4.1, можно придать более общую форму.

Пусть $A \in \mathfrak{R}$ и пусть $\mathscr{E} = \{\lambda_j(A)\}$ — некоторое множество его нормальных собственных чисел и Q — ортопроектор, проектирующий $\mathfrak{H}$ на ортогональное допол-

нение к линейной оболочке всех корневых векторов A, отвечающих этим числам.

Тогда спектр оператора QAQ состоит из нуля, всех точек $\lambda \in (\sigma(A) \setminus \overline{\mathfrak{E}})$ и, быть может, некоторых точек $\lambda \in (\overline{\mathfrak{E}} \setminus \mathfrak{E})$ (т. е. предельных точек для $\mathfrak{E}$).

В частности, если множество $\mathfrak{E} = \{\lambda_j(A)\}$ охватывает весь ненулевой спектр оператора A, то спектр оператора QAQ состоит только из нуля.

2. Предел последовательности вполне непрерывных операторов. Начнем со следующего простого предложения.

Теорема 4.1. *Предел по равномерной норме последовательности вольтерровых операторов является вольтерровым оператором.*

Доказательство. Пусть A_n $(n=1, 2, \ldots)$ — последовательность вольтерровых операторов и A — ее предел по равномерной норме (в силу замкнутости $\mathfrak{S}_\infty$ оператор A автоматически принадлежит $\mathfrak{S}_\infty$). Допустим, что оператор A имеет хотя бы одно собственное число $\lambda_0 \neq 0$. Тогда согласно теореме 3.1 каждый оператор A_n с достаточно большим номером имеет по крайней мере одно собственное число в круге $|\lambda - \lambda_0| < |\lambda_0|/2$. Последнее противоречит вольтерровости всех операторов A_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Теорема доказана.

Несколько сложнее доказывается следующая более общая теорема:

Теорема 4.2. *Пусть последовательность операторов A_n $(n=1, 2, \ldots)$ из $\mathfrak{S}_\infty$ стремится по равномерной норме к оператору A $(\in \mathfrak{S}_\infty)$.*

Если $\nu(A) = \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = \infty$$

и при соответствующей нумерации собственных чисел операторов A_n $(n = 1, 2, \ldots)$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_j(A_n) = \lambda_j(A) \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Если же $\nu(A) < \infty$, то каждому достаточно малому $\varepsilon > 0$ отвечает такой номер n_ε, что при $n > n_\varepsilon$ за пределами круга $|\lambda| \leqslant \varepsilon$ лежит точно $\nu(A)$ собственных *чисел оператора A, для которых при соответствующей нумерации*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_j(A_n) = \lambda_j(A) \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ \nu(A)).$$

Доказательство. Пусть γ_j — последовательность непересекающихся кругов с центрами во всех различных собственных значениях оператора A. Если $\nu(A) < \infty$, построим также круг γ_0 с центром в точке $\lambda = 0$ и достаточно малым радиусом.

Согласно теореме 3.1 найдется натуральное число N_1 такое, что для всех $n > N_1$ в круг γ_1 попадет ровно столько собственных чисел оператора A_n (с учетом их алгебраических кратностей), какова кратность $\varkappa_1$ (алгебраическая) первого собственного числа оператора A, являющегося центром круга γ_1. Указанные собственные числа оператора A_n занумеруем номерами от 1 до $\varkappa_1$.

В силу той же теоремы

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_j(A_n) = \lambda_j(A) \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ \varkappa_1).$$

Продолжим этот процесс. Найдем число $N_2 (\geqslant N_1)$ такое, что для всех $n > N_2$ в круг γ_2 попадет ровно $\varkappa_2$ собственных чисел оператора A_n, где $\varkappa_2$ — кратность собственного числа оператора A, являющегося центром круга γ_2. Этим собственным числам оператора A_n присвоим номера от $\varkappa_1 + 1$ до $\varkappa_1 + \varkappa_2$. Снова будут иметь место равенства

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_j(A_n) = \lambda_j(A) \qquad (j = \varkappa_1 + 1,\ \ldots,\ \varkappa_1 + \varkappa_2).$$

Для завершения доказательства теоремы в случае $\nu(A) = \infty$ остается продолжить этот процесс до бесконечности и присвоить собственным числам любого оператора A_n, оставшимся незанумерованными, любые «свободные» номера.

В случае $\nu(A) < \infty$ в дополнение к сказанному следует отметить, что из теоремы 3.1 и предложения 3° § 1 вытекает, что для номеров n, достаточно больших, все собственные числа оператора A_n, кроме первых $\nu(A)$, попадут в круг γ_0.

Теорема доказана.

§ 5. Теорема о голоморфной оператор-функции и ее следствия

Начнем с предложения, выясняющего структуру спектра голоморфной оператор-функции, все значения которой являются вполне непрерывными операторами.

Лемма 5.1. *Пусть $A(\lambda)$ — оператор-функция, голоморфная в окрестности U_{λ_0} точки λ_0, и пусть все значения $A(\lambda)$ являются вполне непрерывными операторами.*

Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всех чисел из проколотого круга

$$0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$$

уравнение

$$(I - A(\lambda))\,\varphi = 0 \tag{5.1}$$

имеет одно и то же число линейно независимых решений.

Доказательство. Обозначим через $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ортонормированный базис подпространства всех решений уравнения $(I - A(\lambda_0))\,\varphi = 0$ и через $g_1, g_2, \ldots, g_n$ — ортонормированный базис подпространства $[\mathfrak{R}(I - A(\lambda_0))]^{\perp}$. Образуем оператор $B(\lambda)$, полагая

$$B(\lambda) = I - A(\lambda) + \sum_{j=1}^{n} (\cdot, e_j)\, g_j \qquad (\lambda \in U_{\lambda_0}).$$

Легко видеть, что оператор $B(\lambda_0)$ не аннулирует ни одного вектора, а его область значений совпадает со всем пространством $\mathfrak{H}$. Следовательно, оператор $B(\lambda)$ обратим при $\lambda = \lambda_0$. Но тогда найдется достаточно малое число $\varrho\,(> 0)$ такое, что для всех точек λ из круга $|\lambda - \lambda_0| < \varrho$ оператор $B(\lambda)$ также обратим

$$\begin{aligned} B^{-1}(\lambda) &= (B(\lambda_0) + (B(\lambda) - B(\lambda_0)))^{-1} = \\ &= B^{-1}(\lambda_0)\,(I + (B(\lambda) - B(\lambda_0))\,B^{-1}(\lambda_0))^{-1} = \\ &= B^{-1}(\lambda_0)\left(I + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(B(\lambda_0) - B(\lambda))\,B^{-1}(\lambda_0)\right]^k\right). \end{aligned}$$

Уравнение $(I - A(\lambda))\,\varphi = 0$, очевидно, эквивалентно уравнению

$$B(\lambda)\,\varphi = \sum_{j=1}^{n} (\varphi, e_j)\, g_j$$

или системе уравнений

$$\varphi=\sum_{j=1}^{n} \xi_j B^{-1}(\lambda)\, g_j \qquad (|\lambda-\lambda_0|<\varrho) \tag{5.2}$$

$$\xi_k=(\varphi,\ e_k) \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{5.3}$$

Внося в равенство (5.3) выражение для φ из (5.2), получим для определения чисел ξ_j $(j=1, 2, \ldots, n)$ однородную систему из n линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^{n} [\delta_{jk}-(B^{-1}(\lambda)\, g_j,\ e_k)]\, \xi_j=0 \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{5.4}$$

При $|\lambda-\lambda_0|<\varrho$ число линейно независимых решений уравнения (5.1) совпадает с числом линейно независимых решений системы (5.4).

Все элементы определителя $\Delta(\lambda)$ системы (5.4) являются аналитическими функциями параметра λ в круге $|\lambda-\lambda_0|<\varrho$. Если все они тождественно равны нулю, то система (5.4) имеет для всех λ из круга $|\lambda-\lambda_0|<\varrho$ точно n линейно независимых решений, а следовательно, в этом случае лемма доказана.

Пусть хотя бы один элемент определителя $\Delta(\lambda)$ отличен от нуля в какой-либо точке круга $|\lambda-\lambda_0|<\varrho$. Обозначим через $\Delta_p(\lambda)$ какой-нибудь минор наибольшего порядка среди миноров определителя $\Delta(\lambda)$, отличных от нуля хотя бы в одной точке круга $|\lambda-\lambda_0|<\varrho$; индекс p указывает порядок этого минора. В силу аналитичности $\Delta_p(\lambda)$ для всех λ из рассматриваемого круга, за исключением, быть может, некоторых изолированных точек, будем иметь $\Delta_p(\lambda)\neq 0$. Во всех точках λ, в которых не обращается в нуль определитель $\Delta_p(\lambda)$, система (5.4) имеет $n-p$ линейно независимых решений.

Найдется наибольший круг $|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon$, во всех точках которого, за исключением, быть может, $\lambda=\lambda_0$, будет $\Delta_p(\lambda)\neq 0$. Для всех λ, удовлетворяющих неравенству $0<|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon$, система (5.4) будет иметь ровно $n-p$ линейно независимых решений.

Лемма доказана.

Теорема 5.1 (И. Ц. Гохберг [1]). *Пусть* $A(\lambda)$ — *голоморфная на связном открытом множестве* G *оператор-функция со значениями из* $\mathfrak{S}_\infty$. *Тогда для всех точек* $\lambda \in G$, *за исключением, быть может, некоторых изолированных точек, число* $\alpha(\lambda)$ *линейно независимых решений уравнения*

$$\varphi - A(\lambda)\varphi = 0$$

имеет постоянное значение:

$$\alpha(\lambda) = n;$$

в упомянутых изолированных точках

$$\alpha(\lambda) > n.$$

В частности, если хотя бы в одной точке $\alpha(\lambda) = 0$, *то для всех* $\lambda \in G$, *за исключением, быть может, некоторых изолированных точек, оператор* $I - A(\lambda)$ *имеет ограниченный обратный.*

Доказательство. Пусть $n = \min \alpha(\lambda)$ $(\lambda \in G)$ и пусть в точке $\lambda = \lambda_0$ этот минимум достигается, т. е. $\alpha(\lambda_0) = n$.

Обозначим через λ_1 любую точку из G, для которой $\alpha(\lambda_1) > n$. Покажем, что λ_1 является изолированной точкой, т. е. что найдется $\varepsilon_1 > 0$ такое, что для всех λ в проколотом круге $0 < |\lambda - \lambda_1| < \varepsilon_1$ будет $\alpha(\lambda) = n$. Для этого соединим точки λ_0 и λ_1 кривой Γ, целиком лежащей в G. Применяя лемму 5.1 к оператору $A(\lambda)$, получим, что каждой точке λ кривой Γ соответствует число $\varepsilon_\lambda > 0$ такое, что для всех $\widetilde{\lambda}$, удовлетворяющих неравенству $0 < |\widetilde{\lambda} - \lambda| < \varepsilon$, функция $\alpha(\widetilde{\lambda})$ сохраняет постоянное значение. Построив такую окрестность U_λ для каждой точки $\lambda \in \Gamma$, получим некоторое покрытие Γ. Выделим из него конечное покрытие $U_1, U_2, \ldots, U_N$ $(\lambda_0 \in U_1;$ $\lambda_1 \in U_N)$.

Замечая, что соседние окрестности этого покрытия пересекаются, заключаем, что во всех точках окрестностей U_j $(j = 1, 2, \ldots, N)$, за исключением, быть может, их центров, функция $\alpha(\lambda)$ сохраняет одно и то же значение. А так как в окрестности U_1, содержащей точку λ_0, функция $\alpha(\lambda) = n$, то и во всей окрестности U_N точки λ_1, за исключением, возможно, самой точки λ_1, будем иметь $\alpha(\lambda)=n$.

Первое утверждение теоремы доказано.

Второе утверждение непосредственно следует из первого, если принять во внимание, что во всех точках λ области G, для которых $\alpha(\lambda)=0$, оператор $I-A(\lambda)$ имеет ограниченный обратный.

Теорема доказана.

Нам понадобится еще одна лемма:

Лемма 5.2. *Пусть $A\in\mathfrak{R}$, а G — произвольная связная компонента множества $\tilde{\varrho}(A)$ всех нормальных точек оператора A.*

Если $B\in\mathfrak{S}_\infty$ и если оператор $A+B$ имеет в G хотя бы одну регулярную точку, то G является связной компонентой $\tilde{\varrho}(A+B)$.

В частности, каковы бы ни были $A\in\mathfrak{R}$ и $B\in\mathfrak{S}_\infty$, у A и $A+B$ совпадают неограниченные компоненты $\tilde{\varrho}(A)$ и $\tilde{\varrho}(A+B)$.

Доказательство. Для любого $\lambda\in\varrho(A)\cap G$

$$A+B-\lambda I=(I+B(A-\lambda I)^{-1})(A-\lambda I).$$

Оператор-функция $B(A-\lambda I)^{-1}$ голоморфна в области $\varrho(A)\cap G$ и принимает значения из $\mathfrak{S}_\infty$. Так как оператор $A+B-\lambda I$ обратим в какой-либо точке G, то в этой точке обратим и оператор $I+B(A-\lambda I)^{-1}$. Отсюда в силу теоремы 5.1 получаем, что оператор $I+B(A-\lambda I)^{-1}$ обратим всюду в $\varrho(A)\cap G$, за исключением, быть может, конечного или счетного множества изолированных точек. Так как, кроме того, спектр A в G состоит из изолированных точек, то и спектр $A+B$ в G также состоит из изолированных точек.

Обозначим через Γ произвольный спрямляемый простой замкнутый контур, состоящий из регулярных точек обоих операторов A и $A+B$ и окружающий некоторую область, целиком погруженную в G.

Имеет место равенство

$$(A+B-\lambda I)^{-1}=$$
$$=(A-\lambda I)^{-1}-(A+B-\lambda I)^{-1}B(A-\lambda I)^{-1}\qquad(\lambda\in G),$$

а следовательно,

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(A+B-\lambda I)^{-1}\,d\lambda=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(A-\lambda I)^{-1}\,d\lambda+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(A+B-\lambda I)^{-1}B(A-\lambda I)^{-1}\,d\lambda. \tag{5.5}$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства по теореме 2.2 является конечномерным проектором, а второе — вполне непрерывным оператором, так как $B\in\mathfrak{S}_\infty$.

Отсюда следует, что проектор, представляемый левой частью равенства (5.5), вполне непрерывен. Последнее возможно в том и только том случае, когда он конечномерен. Но тогда в силу теоремы 2.2 все точки спектра оператора $A+B$, окруженные контуром Γ, являются нормальными собственными числами этого оператора.

Для завершения доказательства леммы остается заметить, что операторы A и $A+B$ можно поменять ролями и что пересечение $\tilde\varrho(A)$ и $\tilde\varrho(A+B)$ всегда содержит неограниченную область $|\lambda|>\max(|A|,\ |A+B|)$.

В качестве простого следствия из доказанной леммы получаем следующее предложение.

Теорема 5.2. *Пусть H — самосопряженный оператор из $\mathfrak{R}$ и B — произвольный оператор из $\mathfrak{S}_\infty$. Тогда множества нормальных точек операторов H и $H+B$ совпадают. Следовательно, всякое невещественное число λ является для $H+B$ либо регулярным, либо нормальным собственным числом* *).

Доказательство. Как известно, область $\varrho(H)$ содержит все невещественные точки и вещественные точки λ, для которых $|\lambda|>|H|$, а следовательно, связна. Поэтому теорема 5.2 следует из леммы 5.2.

Теми же средствами может быть доказана теорема о возмущениях унитарного оператора.

Теорема 5.3. *Пусть $A=U+B$, где U — унитарный оператор, а $B\in\mathfrak{S}_\infty$. Тогда, если у оператора A имеется*

---

*) Теорема 5.2 допускает обобщение на случай, когда H и B являются неограниченными операторами (см. лемму V.10.1).

хотя бы одна регулярная точка λ в круге $|\lambda|<1$, то множества нормальных точек операторов A и U совпадают.

Следовательно, любая точка λ с $|\lambda|\neq 1$ является для оператора A либо регулярной точкой, либо нормальным собственным числом.

Из доказанной теоремы 5.2 вытекает важное предложение.

Теорема 5.4. *Пусть спектр оператора $A \in \mathfrak{R}$ состоит из единственной точки $\lambda=0$.*

Если одна из эрмитовых компонент оператора A:

$$A_{\mathcal{R}}=\frac{1}{2}(A+A^*) \quad \text{или} \quad A_{\mathcal{J}}=\frac{1}{2i}(A-A^*)$$

вполне непрерывна, то вполне непрерывна и вторая, а следовательно, оператор A вольтерров.

Доказательство. Для определенности положим, что оператор $A_{\mathcal{J}} \in \mathfrak{S}_\infty$.

Согласно теореме 5.2 все ненулевые точки спектра оператора

$$A_{\mathcal{R}}=A-iA_{\mathcal{J}}$$

являются его нормальными точками. Так как оператор $A_{\mathcal{R}}$, кроме того, является самосопряженным, то (см. Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман [1]) он вполне непрерывен.

Теорема доказана.

ГЛАВА II

s-ЧИСЛА ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

По-видимому, впервые s-числа были введены Э. Шмидтом при изучении интегральных уравнений с несимметрическими (неэрмитовыми) ядрами. Но прошло более чем три десятилетия, прежде чем были установлены важные свойства s-чисел матриц и вполне непрерывных операторов, выражающиеся в виде тех или иных неравенств. А еще позже было обнаружено, что эти свойства s-чисел играют важную роль в построении общей теории симметрично-нормированных идеалов вполне непрерывных операторов (см. гл. III), а также при исследовании асимптотических свойств спектров и в других вопросах.

Эта глава содержит сравнительно полное изложение основных свойств s-чисел операторов. Ряд результатов об s-числах, возможно, излагается впервые.

§ 1. Минимаксимальные свойства собственных чисел самосопряженных вполне непрерывных операторов

При изучении s-чисел вполне непрерывных операторов неоднократно используются хорошо известные минимаксимальные свойства собственных чисел вполне непрерывных операторов.

Для удобства читателей в этом параграфе приводится без доказательства теорема, дающая описание этих свойств, и отмечаются некоторые следствия из нее.

Пусть A — произвольный линейный самосопряженный вполне непрерывный оператор. Тогда, как известно, все его собственные числа вещественны, и всякий корневой вектор оператора A является его собственным вектором. Оператор A допускает равномерно сходящееся представление

$$A = \sum_{j=1}^{\nu(A)} \lambda_j(A)(\cdot, \varphi_j)\varphi_j, \tag{1.1}$$

где φ_j $(j=1, 2, \ldots, \nu(A))$ — ортонормированная система собственных векторов оператора A, полная в $\mathfrak{R}(A)$, так что

$$A\varphi_j = \lambda_j(A)\varphi_j \qquad (j=1, 2, \ldots, \nu(A)).$$

Линейный ограниченный оператор называют *неотрицательным* и пишут $A \geqslant 0$, если для любого $f \in \mathfrak{H}$

$$(Af, f) \geqslant 0.$$

Как известно, всякий неотрицательный оператор является самосопряженным.

Самосопряженный вполне непрерывный оператор будет неотрицательным тогда и только тогда, когда все его собственные числа неотрицательны.

Имеет место следующее предложение (см. Ф. Рисс и Б. С.-Надь [1] § 95).

Теорема (о минимаксимальных свойствах собственных чисел).*) *Пусть $A\,(\neq 0)$ — неотрицательный вполне непрерывный оператор и φ_j $(j=1, 2, \ldots)$ — полная в $\mathfrak{R}(A)$ ортонормированная система его собственных векторов, так что*

$$A\varphi_j = \lambda_j(A)\varphi_j \qquad (j=1, 2, \ldots),$$

причем $\lambda_1(A) \geqslant \lambda_2(A) \geqslant \ldots$

Тогда его собственные числа обладают следующими минимаксимальными свойствами:

1)
$$\lambda_1(A) = \max_{\varphi \in \mathfrak{H}} \frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)}, \tag{1.2}$$

причем максимум (1.2) *достигается только на собственных векторах оператора A, отвечающих $\lambda_1(A)$.*

2)
$$\lambda_{j+1}(A) = \min_{\mathfrak{L} \in \mathfrak{R}_j} \max_{\varphi \in \mathfrak{L}^\perp} \frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)} \quad (j=1, 2, \ldots), \tag{1.3}$$

---

*) Как известно, это предложение распространяется на положительные собственные числа $\lambda_1^+(A) \geqslant \lambda_2^+(A) \geqslant \ldots$ любого вполне непрерывного самосопряженного оператора.

где $\mathfrak{R}_j$ $(1 \leqslant j < \nu(A))$ — *множество всех* j-*мерных линеалов пространства* $\mathfrak{H}$, *причем минимум* (1.3) *достигается, когда* $\mathfrak{L}$ *совпадает с линейной оболочкой* $\mathfrak{L}_j$ *собственных векторов* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_j$, *так что*

$$\lambda_{j+1}(A) = \max_{\varphi \in \mathfrak{L}_j^{\perp}} \frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)}. \tag{1.4}$$

Отметим, что даже в том случае, когда $\lambda_{j+1} < \lambda_j$, минимум (1.3) достигается не только на $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_j$ (см. М. Д. Дольберг [2]).

Из утверждения 1) легко следует, что в (1.4) максимум достигается только на собственных векторах оператора A, отвечающих собственному числу $\lambda_{j+1}(A)$.

С помощью соотношений (1.2), (1.3) и (1.4) без труда доказывается следующая лемма:

Лемма 1.1. *Пусть* $A, B \in \mathfrak{S}_\infty$ *и* $0 \leqslant A \leqslant B$ *); *тогда*

$$\lambda_j(A) \leqslant \lambda_j(B) \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Для того чтобы во всех этих соотношениях одновременно имел место знак равенства, необходимо и достаточно, чтобы $A = B$.

Из леммы 1.1 очевидным образом следует, что $\nu(A) \leqslant \nu(B)$, если $0 \leqslant A \leqslant B$.

Пусть A — вполне непрерывный самосопряженный оператор со спектральным разложением (1.1). Образуем неотрицательные операторы

$$A_+ = \sum_{\lambda_j > 0} \lambda_j(A)(\cdot, \varphi_j)\varphi_j; \quad A_- = -\sum_{\lambda_j < 0} \lambda_j(A)(\cdot, \varphi_j)\varphi_j.$$

Очевидно, $A = A_+ - A_-$.

Лемма 1.2. *Пусть самосопряженный оператор* $A \in \mathfrak{S}_\infty$ *представлен в виде разности*

$$A = H_1 - H_2$$

неотрицательных операторов H_1, $H_2 \in \mathfrak{S}_\infty$.

Тогда

$$\lambda_j(A_+) \leqslant \lambda_j(H_1) \quad \text{и} \quad \lambda_j(A_-) \leqslant \lambda_j(H_2) \quad (j = 1, 2, \ldots). \tag{1.5}$$

---

*) Неравенство $A \leqslant B$ означает, что оператор $B - A$ неотрицателен.

Доказательство. В самом деле, имеем

$$(H_1f, f) = (Af, f) + (H_2f, f) \geqslant (Af, f) \qquad (f \in \mathfrak{H})$$

и

$$(H_2f, f) \geqslant -(Af, f) \qquad (f \in \mathfrak{H}).$$

Соотношения (1.5) непосредственно следуют отсюда на основании минимаксимальных свойств собственных чисел (см. сноску к теореме о минимаксимальных свойствах собственных чисел).

§ 2. s-числа вполне непрерывных операторов и их простейшие свойства

1. s-числа вполне непрерывного оператора. Пусть $A \in \mathfrak{S}_\infty$, тогда и $H = (A^*A)^{1/2} \in \mathfrak{S}_\infty$. В качестве первого определения s-чисел примем следующее:

Собственные числа оператора H называются *s-числами* оператора A.

Ненулевые s-числа будем нумеровать в порядке их убывания с учетом их кратности, так что

$$s_j(A) = \lambda_j(H) \qquad (j = 1, 2, \ldots, r(H))\,^{*)}.$$

Если $r(H) < \infty$, то полагаем

$$s_j(A) = 0 \quad \text{при} \quad j = r(H) + 1, \ldots$$

Отметим, что

$$s_1(A) = |A|.$$

Если оператор A ($\in \mathfrak{S}_\infty$) самосопряжен или хотя бы нормален (т. е. если A и A^* коммутируют), то

$$s_j(A) = |\lambda_j(A)| \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

Очевидно также, что для любого скаляра c

$$s_j(cA) = |c|\, s_j(A) \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Несколько менее тривиальны следующие два важных свойства s-чисел вполне непрерывного оператора

I) $$s_j(A) = s_j(A^*) \qquad (j = 1, 2, \ldots) \qquad (2.1)$$

---

*) Напомним, что $r(H) = \dim \mathfrak{R}(H)$.

II) *Каков бы ни был ограниченный оператор* B, *всегда*

$$s_j(BA) \leqslant |B|\, s_j(A) \qquad (j=1, 2, \ldots), \tag{2.2}$$

$$s_j(AB) \leqslant |B|\, s_j(A) \qquad (j=1, 2, \ldots). \tag{2.3}$$

Первое свойство будет попутно получено в п. 2.

Докажем второе. По определению

$$s_j^2(BA) = \lambda_j(A^*B^*BA), \qquad s_j^2(A) = \lambda_j(A^*A) \qquad (j=1, 2, \ldots).$$

С другой стороны:

$$(A^*B^*BAf, f) = |BAf|^2 \leqslant |B|^2\, |Af|^2 \leqslant |B|^2 (A^*Af, f) \quad (f \in \mathfrak{H})$$

так что $A^*B^*BA \leqslant |B|^2 A^*A$, откуда на основании леммы 1.1 получаются соотношения (2.2).

Так как в силу (2.1) $s_j(AB) = s_j(B^*A^*)$, а согласно только что доказанному: $s_j(B^*A^*) \leqslant |B^*|\, s_j(A^*) = |B|\, s_j(A)$, то соотношения (2.3) также установлены.

Опираясь на лемму 1.1, нетрудно показать, что знак равенства в (2.2) (соответственно в (2.3)) имеет место одновременно при всех $j=1, 2, \ldots$ в том и только том случае, когда оператор B (соответственно B^*) изометричен на множестве $\mathfrak{R}(A)$ (соответственно $\mathfrak{R}(A^*)$).

2. Разложение Шмидта для вполне непрерывного оператора. Пусть A — вполне непрерывный оператор и $A=UH$ — его полярное представление.

Обозначим через φ_j $(j=1, 2, \ldots, r(H))$ ортонормированную систему собственных векторов оператора H, полную в $\mathfrak{R}(H)$. Тогда

$$H = \sum_{j=1}^{r(H)} s_j(A)(\cdot, \varphi_j)\varphi_j, \tag{2.4}$$

где ряд в правой части сходится по равномерной норме операторов. Применяя к обеим частям равенства (2.4) оператор U, получаем

$$A = \sum_{j=1}^{r(A)} s_j(A)(\cdot, \varphi_j)U\varphi_j.$$

Так как $\varphi_j \in \mathfrak{R}(H)$, то система $U\varphi_j$ $(j=1, 2, \ldots, r(A))$ является ортонормированной.

Таким образом, всякий линейный вполне непрерывный оператор A допускает разложение Шмидта

$$A=\sum_{j=1}^{r(A)} s_j(A)(\cdot, \varphi_j)\psi_j, \tag{2.5}$$

где $\{\varphi_j\}$ и $\{\psi_j\}$ — некоторые ортонормированные системы, а ряд, как и ряд в (2.4), сходится по равномерной норме.

Из (2.5) следует, что

$$A^*=\sum_{j=1}^{r(A)} s_j(A)(\cdot, \psi_j)\varphi_j. \tag{2.6}$$

Согласно (2.5) и (2.6) получаем

$$A^*A\varphi_j=s_j^2(A)\varphi_j \text{ и } AA^*\psi_j=s_j^2(A)\psi_j \quad (j=1, 2, \ldots, r(A)).$$

Отсюда заключаем, что

$$s_j(A)=s_j(A^*) \qquad (j=1, 2, \ldots),$$

т. е. имеют место соотношения (2.1).

3. Аппроксимационное свойство s-чисел и вытекающие из него неравенства. В дальнейшем через $\mathfrak{K}_n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ обозначается совокупность всех конечномерных операторов размерности $\leqslant n$.

Теорема 2.1. (Дж. Э. Аллахвердиев [2]). *Пусть A — линейный вполне непрерывный оператор, тогда для любого* $n=0, 1, 2, \ldots$

$$s_{n+1}(A)=\min_{K\in\mathfrak{K}_n} |A-K|. \tag{2.7}$$

Доказательство. Пусть K — линейный n-мерный оператор. Очевидно, подпространство $\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{Z}(K)$ является n-мерным; следовательно, в силу минимаксимальных свойств собственных чисел

$$s_{n+1}(A)\leqslant \max_{\varphi\in\mathfrak{Z}(K)} \frac{|A\varphi|}{|\varphi|}.$$

Так как для всех $\varphi \in \mathfrak{Z}(K)$

$$|A\varphi| = |(A-K)\varphi| \leqslant |A-K|\,|\varphi|,$$

то

$$s_{n+1}(A) \leqslant |A-K|.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что

$$|A-K_n| = s_{n+1}(A),$$

где

$$K_n = \sum_{j=1}^{n} s_j(A)(\cdot, \varphi_j)\psi_j \tag{2.8}$$

есть n-й отрезок разложения Шмидта (2.5) оператора A.

Формула (2.7) означает, что $s_{n+1}(A)$ является расстоянием оператора A до множества $\mathfrak{K}_n$. Формулу (2.7) можно принять за новое, эквивалентное, определение s-чисел. Во многих вопросах это определение оказывается более удобным, чем первоначальное.

Следствие 2.1. *Пусть оператор $A \in \mathfrak{S}_\infty$ и T — произвольный r-мерный оператор. Тогда*

$$s_{n+r}(A) \leqslant s_n(A+T) \leqslant s_{n-r}(A). \tag{2.9}$$

В самом деле, пусть K_n — оператор, определенный равенством (2.8), тогда в силу теоремы 2.1

$$s_{n+1}(A) = |(A+T)-(T+K_n)| \geqslant s_{n+r+1}(A+T) \qquad (n=0, 1, \ldots). \tag{2.10}$$

Поменяв ролями операторы A и $A+T$, получим

$$s_{n+1}(A+T) \geqslant s_{n+r+1}(A) \qquad (n=0, 1, \ldots). \tag{2.11}$$

Из (2.10) и (2.11) следует (2.9).

Следствие 2.2 (Фань Цзюй [3]). *Если операторы A и $B \in \mathfrak{S}_\infty$, то*

$$s_{m+n-1}(A+B) \leqslant s_m(A) + s_n(B) \qquad (m, n = 1, 2, \ldots) \tag{2.12}$$

и

$$s_{m+n-1}(AB) \leqslant s_m(A)\,s_n(B) \qquad (m, n = 1, 2, \ldots). \tag{2.13}$$

В самом деле, пусть $m-1$-мерный оператор K_1 и $n-1$-мерный оператор K_2 таковы, что

$$s_m(A)=|A-K_1| \quad \text{и} \quad s_n(B)=|B-K_2|.$$

Тогда

$$s_{m+n-1}(A+B)\leqslant|A+B-(K_1+K_2)|\leqslant \leqslant|A-K_1|+|B-K_2|\leqslant s_m(A)+s_n(B).$$

Кроме того, так как размерность оператора AK_2+ $+K_1(B-K_2)$ не превосходит $m+n-2$ и $(A-K_1)(B-K_2)=$ $=AB-AK_2-K_1(B-K_2)$, то

$$s_{m+n-1}(AB)\leqslant|A-K_1||B-K_2|,$$

откуда следует (2.13). Частным случаем соотношений (2.12) и (2.13) являются известные неравенства Г. Вейля для неотрицательных вполне непрерывных операторов H_1 и H_2:

$$\lambda_{n+m-1}(H_1+H_2)\leqslant\lambda_n(H_1)+\lambda_m(H_2).$$

Эти неравенства обобщаются на случай любых самосопряженных операторов из $\mathfrak{S}_\infty$ (см. Ф. Рисс и Б. С.-Надь [1] § 95).

Следствие 2.3. *Для любых операторов* A, $B\in\mathfrak{S}_\infty$

$$|s_n(A)-s_n(B)|\leqslant|A-B| \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

В самом деле,

$$s_{n+1}(A)=\min_{K\in\mathfrak{K}_n}|A-K|=\min_{K\in\mathfrak{K}_n}|B-K+A-B|\leqslant \leqslant \min_{K\in\mathfrak{K}_n}|B-K|+|A-B|=s_{n+1}(B)+|A-B|.$$

Поменяв операторы A и B ролями, получим

$$s_{n+1}(B)\leqslant s_{n+1}(A)+|A-B|,$$

откуда вытекает устанавливаемое соотношение.

4. **Геометрическая интерпретация s-чисел.** С аппроксимационной теоремой 2.1 тесно связана теорема, дающая геометрическую аппроксимационную интерпретацию

s-числам оператора $A \in \mathfrak{S}_\infty$. В этой интерпретации используется понятие n-го поперечника множества, которое А. Н. Колмогоров [1] (см. также В. М. Тихомиров [1]) определил для любого множества $\mathfrak{E}$, принадлежащего какому-либо линейному метрическому пространству M. Мы приведем определение этого понятия для интересующего нас случая, когда пространством M является гильбертово пространство $\mathfrak{H}$, а $\mathfrak{E}$ — некоторое центрально-симметрическое множество ($\mathfrak{E} = -\mathfrak{E}$, т. е. если $x \in \mathfrak{E}$, то и $-x \in \mathfrak{E}$).

Обозначим через $\mathfrak{P}_n$ совокупность всех n-мерных ортопроекторов P, действующих в $\mathfrak{H}$. Тогда *n-м поперечником* ($n = 1, 2, \ldots$) множества $\mathfrak{E}$ называется число $d_n(\mathfrak{E})$ ($\leqslant \infty$), определяемое равенством:

$$d_n(\mathfrak{E}) = \inf_{P \in \mathfrak{P}_n} \sup_{x \in \mathfrak{E}} |x - Px|.$$

Всякий ортопроектор $P \in \mathfrak{P}_n$ вполне определяется n-мерным линеалом $\mathfrak{L}_n$, на который он проектирует $\mathfrak{H}$; величина $|x - Px|$ дает расстояние точки x до $\mathfrak{L}_n$, а

$$\delta(\mathfrak{E}, \mathfrak{L}_n) = \sup_{x \in \mathfrak{E}} |x - Px|$$

дает отклонение $\mathfrak{E}$ от $\mathfrak{L}_n$. Таким образом, поперечник $d_n(\mathfrak{E})$ дает нижнюю грань отклонений множества $\mathfrak{E}$ от всевозможных n-мерных линеалов в $\mathfrak{H}$. В тех случаях, когда эта грань достигается, будет существовать n-мерный линеал $\mathfrak{L}_n^{(0)}$, наименее отклоняющийся от $\mathfrak{E}$, а число $d_n(\mathfrak{E})$ будет отклонением $\mathfrak{E}$ от $\mathfrak{L}_n^{(0)}$.

Имеет место теорема:

Теорема 2.2. *Пусть A — какой-либо вполне непрерывный оператор. Тогда $s_{n+1}(A)$ ($n = 1, 2, \ldots$) совпадает с n-м поперечником множества $\mathfrak{E} = A\mathfrak{S}$, на которое оператор A отображает единичный шар $\mathfrak{S}$ ($|x| \leqslant 1$) в $\mathfrak{H}$.*

Эта теорема позволяет дать третье, эквивалентное первым двум, определение s-чисел.

Доказательство. Если $P \in \mathfrak{P}_n$, то $PA \in \mathfrak{K}_n$. Поэтому для любого $P \in \mathfrak{P}_n$ и $K = PA$ будем иметь

$$\sup_{x \in \mathfrak{E}} |x - Px| = \sup_{|y| \leqslant 1} |Ay - PAy| = |A - K| \geqslant s_{n+1}(A),$$

откуда $d_n(\mathfrak{E}) \geqslant s_{n+1}(A)$.

Так как, с другой стороны, при

$$P=\sum_{k=1}^{n}(\cdot,\ \psi_k)\,\psi_k,$$

где ψ_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ взяты из разложения Шмидта (2.5) оператора A, оператор $K=PA$ имеет вид (2.8) причем $|A-K|=s_{n+1}(A)$, то $d_n(\mathfrak{E})=s_{n+1}(A)$.

Теорема доказана.

Одновременно мы показали, что линеал $\mathfrak{L}_n$, натянутый на векторы $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ $(n=1, 2, \ldots)$, является наименее отклоняющимся n-мерным линеалом от множества $\mathfrak{E}=A\mathfrak{S}$.

5. Одна асимптотическая теорема о s-числах. Имеет место следующая теорема:

Теорема 2.3. (Фань Цюй [3]). *Пусть операторы A и $B\in\mathfrak{S}_\infty$ и пусть при некотором $r>0$*

$$\lim_{n\to\infty} n^r s_n(A)=a \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} n^r s_n(B)=0. \tag{2.14}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} n^r s_n(A+B)=a. \tag{2.15}$$

Доказательство. Из (2.12) вытекает

$$s_{(k+1)m+j}(A+B)\leqslant s_{km+j}(A)+s_{m+1}(B)$$
$$(m=1, 2, \ldots;\ j=0, 1, \ldots, k).$$

Так как любое целое n допускает представление: $n=(k+1)m+j$, то

$$\overline{\lim}\, n^r s_n(A+B)\leqslant\left(\frac{k+1}{k}\right)^r a$$

и, стало быть, в силу произвольности k

$$\overline{\lim}\, n^r s_n(A+B)\leqslant a. \tag{2.16}$$

С другой стороны, $A=(A+B)-B$ и, следовательно,

$$s_{(k+1)m+j}(A)\leqslant s_{km+j}(A+B)+s_{m+1}(B),$$

или

$$s_{km+j}(A+B)\geqslant s_{(k+1)m+j}(A)-s_{m+1}(B)$$

Полагая $n=km+j$ и устремляя n к бесконечности, получаем

$$\underline{\lim}\, n^r s_n(A+B) \geqslant \left(\frac{k}{k+1}\right)^r a,$$

или, в силу произвольности k,

$$\underline{\lim}\, n^r s_n(A+B) \geqslant a. \tag{2.17}$$

Из (2.16) и (2.17) вытекает (2.15).

Теорема доказана.

Эта теорема может быть непосредственно обобщена на случай, когда в (2.14) и (2.15) функция n^r заменена функцией $\varphi_r(n)=n^r L(n)$, где $L(\nu)$ — произвольная положительная функция, обладающая свойством:

$$\lim \frac{L(\nu_2)}{L(\nu_1)}=1,$$

при предельном переходе $\nu_1 \to \infty$, $\nu_2 \to \infty$ и $\nu_2/\nu_1 \to b$, каково бы ни было $b\,(0<b<\infty)$. Это замечание понадобится в дальнейшем.

§ 3. Неравенства, связывающие s-числа, собственные числа и диагональные элементы вполне непрерывных операторов

1. В этом параграфе будут изложены с некоторыми отклонениями в доказательствах результаты Г. Вейля из его краткого оригинального сообщения [2].

Лемма 3.1 (Г. Вейль [2], А. Хорн [1]). *Пусть A — линейный вполне непрерывный оператор и $s_j=s_j(A)$ $(j=1, 2, \ldots)$. Тогда для любой системы векторов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ имеет место соотношение*

$$\det \|(A\varphi_j, A\varphi_k)\|_1^n \leqslant s_1^2 s_2^2 \ldots s_n^2 \det \|(\varphi_j, \varphi_k)\|_1^n. \tag{3.1}$$

Доказательство. Обозначим через $e_j\,(j=1, 2,\ldots)$ полную ортонормированную систему собственных векторов оператора A^*A.

Тогда

$$(A\varphi_j, A\varphi_k)=(A^*A\varphi_j, \varphi_k)=\sum_{l=1}^{\infty} s_l^2(\varphi_j, e_l)(e_l, \varphi_k).$$

Стало быть, квадратная матрица $\mathscr{A} = \| (A\varphi_j, A\varphi_k) \|_1^n$ представима в виде $\mathscr{A} = \mathscr{B}\mathscr{B}^*$, где $\mathscr{B}$ — прямоугольная матрица:

$$\mathscr{B} = \| s_r (\varphi_j, e_r) \|_{\substack{j=1, 2, \ldots, n \\ r=1, 2, \ldots}}.$$

Согласно теореме Бине—Коши из теории определителей:

$$\det \mathscr{A} = \sum_{1 \leqslant r_1 < r_2 < \ldots < r_n < \infty} \mathscr{B} \begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots n \\ r_1 & r_2 \ldots r_n \end{pmatrix} \mathscr{B}^* \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \ldots r_n \\ 1 & 2 \ldots n \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

где через

$$\mathscr{B} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_n \end{pmatrix}$$

обозначен минор матрицы $\mathscr{B}$, стоящий на пересечении строк с номерами $1, 2, \ldots, n$ и столбцов с номерами $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

Обозначим через $\mathscr{C}$ матрицу $\| (\varphi_j, e_r) \|_{\substack{j=1, 2, \ldots, n \\ r=1, 2, \ldots}}$.

Очевидно,

$$\mathscr{B} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_n \end{pmatrix} = s_{r_1} s_{r_2} \ldots s_{r_n} \mathscr{C} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_n \end{pmatrix}$$

и, следовательно, согласно (3.2)

$$\det \mathscr{A} \leqslant s_1^2 s_2^2 \ldots s_n^2 \sum_{r_1, r_2, \ldots, r_n} \mathscr{C} \begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots n \\ r_1 & r_2 \ldots r_n \end{pmatrix} \mathscr{C}^* \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \ldots r_n \\ 1 & 2 \ldots n \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\sum_{r_1, r_2, \ldots, r_n} \mathscr{C} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_n \end{pmatrix} \mathscr{C}^* \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \ldots & r_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix} =$$

$$= \det \left\| \sum_{r=1}^{\infty} (\varphi_j, e_r)(e_r, \varphi_k) \right\|_1^n = \det \| (\varphi_j, \varphi_k) \|_1^n,$$

то убеждаемся в справедливости (3.1).

Лемма 3.2. *Пусть A — произвольный линейный вполне непрерывный оператор и φ_j $(j = 1, 2, \ldots, r(A))$ —*

некоторая ортонормированная система. Если выполняются равенства

$$|(A\varphi_j, \varphi_j)| = s_j(A) \qquad (j = 1, 2, \ldots, r(A)), \tag{3.3}$$

то оператор A нормален, а φ_j $(j = 1, 2, \ldots, r(A))$ образуют полную систему его собственных векторов в $\overline{\mathfrak{R}(A)}$.

Доказательство. В самом деле, так как

$$s_1^2(A) = |(A\varphi_1, \varphi_1)|^2 \leqslant |A\varphi_1|^2 = (A^*A\varphi_1, \varphi_1)$$

и

$$s_1^2(A) = \max_{|\varphi|=1} (A^*A\varphi, \varphi),$$

то

$$s_1^2(A) = (A^*A\varphi_1, \varphi_1).$$

В силу минимаксимальных свойств собственных чисел, последнее означает, что

$$A^*A\varphi_1 = s_1^2(A)\varphi_1.$$

Из соотношений

$$s_2^2(A) = |(A\varphi_2, \varphi_2)|^2 \leqslant |A\varphi_2|^2 = (A^*A\varphi_2, \varphi_2)$$

и

$$s_2^2(A) = \max_{|\varphi|=1,\ (\varphi, \varphi_1)=0} (A^*A\varphi, \varphi)$$

получаем

$$A^*A\varphi_2 = s_2^2(A)\varphi_2.$$

Продолжая эти рассуждения таким же образом далее, получим:

$$A^*A\varphi_j = s_j^2(A)\varphi_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, r(A));$$

следовательно, φ_j $(j = 1, 2, \ldots, r(A))$ образуют полную систему собственных векторов оператора A^*A, соответствующих его ненулевым собственным числам. Отсюда следует, что оператор A^*A, а вместе с ним и оператор A обращаются в тождественный нуль на подпространстве $\mathfrak{L}$, ортогональном ко всем векторам φ_j $(j = 1, 2, \ldots, r(A))$.

Такими же рассуждениями устанавливается, что также и оператор A^* обращается тождественно в нуль на подпространстве $\mathfrak{L}$. Отсюда следует, что любой вектор $f \in \overline{\mathfrak{R}(A)}$ представим в виде

$$f = \sum_{j=1}^{r(A)} (f, \varphi_j)\, \varphi_j;$$

в частности,

$$A\varphi_j = \sum_{k=1}^{r(A)} (A\varphi_j, \varphi_k)\, \varphi_k. \tag{3.4}$$

Следовательно,

$$(A\varphi_j, A\varphi_j) = \sum_{k=1}^{r(A)} |(A\varphi_j, \varphi_k)|^2. \tag{3.5}$$

Поскольку

$$|(A\varphi_j, \varphi_j)|^2 = s_j^2(A) = (A\varphi_j, A\varphi_j),$$

то из (3.5) следует, что

$$(A\varphi_j, \varphi_k) = 0 \qquad (j \neq k).$$

Таким образом, в силу (3.4)

$$A\varphi_j = (A\varphi_j, \varphi_j)\, \varphi_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, r(A)),$$

и, стало быть, оператор A представляется в виде

$$A = \sum_{j=1}^{r(A)} (A\varphi_j, \varphi_j)\, (\cdot, \varphi_j)\, \varphi_j.$$

Отсюда уже непосредственно вытекают утверждаемые свойства оператора A.

Лемма 3.3 (Г. Вейль [2]). *Пусть A — произвольный линейный вполне непрерывный оператор. Тогда*

$$|\lambda_1(A)\lambda_2(A) \ldots \lambda_n(A)| \leqslant s_1(A) s_2(A) \ldots s_n(A) \qquad (n = 1, 2, \ldots, \nu(A)). \tag{3.6}$$

Если $\nu(A) = r(A)$ $(\leqslant \infty)$, то знак равенства будет иметь место одновременно во всех соотношениях (3.6) *в том и только том случае, когда оператор A нормален.*

Доказательство. Выберем согласно лемме 1.4 ортонормированную систему Шура $\{\omega_j\}_1^{\nu(A)}$ так, что

$$A\omega_j = a_{j1}\omega_1 + a_{j2}\omega_2 + \ldots + a_{jj}\omega_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu(A)),$$

причем

$$a_{jj} = (A\omega_j, \omega_j) = \lambda_j(A) \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu(A)). \tag{3.7}$$

В силу леммы 3.1

$$\det \| (A\omega_j, A\omega_k) \|_1^n \leqslant s_1^2(A) s_2^2(A) \ldots s_n^2(A) \quad (n \leqslant \nu(A)). \tag{3.8}$$

Так как

$$(A\omega_j, A\omega_k) = \sum_{q=1}^{\min(j,k)} (A\omega_j, \omega_q) \overline{(A\omega_k, \omega_q)},$$

то

$$\det \| (A\omega_j, A\omega_k) \|_1^n = \det \| (A\omega_j, \omega_k) \|_1^n \det \| \overline{(A\omega_j, \omega_k)} \|_1^n = \\ = |\det \| (A\omega_j, \omega_k) \|_1^n |^2.$$

Учитывая, что

$$\det \| (A\omega_j, \omega_k) \|_1^n = \lambda_1(A) \lambda_2(A) \ldots \lambda_n(A),$$

получаем

$$\det \| (A\omega_j, A\omega_k) \|_1^n = |\lambda_1(A)|^2 |\lambda_2(A)|^2 \ldots |\lambda_n(A)|^2. \tag{3.9}$$

Сопоставляя (3.8) и (3.9), приходим к соотношениям (3.6).

Рассмотрим теперь случай, когда $\nu(A) = r(A)$ и во всех соотношениях (3.6) имеет место знак равенства. Тогда

$$|\lambda_j(A)| = s_j(A) \qquad (j = 1, 2, \ldots, r(A)).$$

Из (3.7) следует, что

$$|(A\omega_j, \omega_j)| = s_j(A) \qquad (j = 1, 2, \ldots, r(A)),$$

откуда в силу леммы 3.2 оператор A нормален.

Лемма доказана.

Замечание 3.1. Очевидно, что для любого конечномерного оператора A в последнем из соотношений (3.6), т. е. при $n = \nu(A)$ будет иметь место знак равенства.

А. Хорн [2] показал, что соотношения (3.6) при условии, что в последнем из них знак неравенства заменен знаком равенства, точным образом характеризуют взаимосвязь между s-числами и собственными числами конечномерного оператора.

Это означает, что для любых комплексных чисел $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n$ и любых неотрицательных чисел $s_1, s_2, \ldots, s_n$, удовлетворяющих условиям

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|; \quad s_1 \geqslant s_2 \geqslant \ldots \geqslant s_n;$$
$$|\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k| \leqslant s_1 s_2 \ldots s_k \qquad (k=1, 2, \ldots, n-1),$$
$$|\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n| = s_1 s_2 \ldots s_n$$

найдется оператор A, действующий в n-мерном пространстве, такой, что

$$\lambda_j(A) = \lambda_j \quad \text{и} \quad s_j(A) = s_j \quad (j=1, 2, \ldots, n).$$

2. Лемма 3.4 (Вейль [2], Харди, Литлвуд, Пойа [1]). *Пусть $\Phi(x)$ $(-\infty \leqslant x < \infty)$ — выпуклая функция, обращающаяся в нуль при $x = -\infty$ ($\Phi(-\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} \Phi(x) = 0$), а $\{a_j\}_1^\omega$ и $\{b_j\}_1^\omega$ $(\omega \leqslant \infty)$ — невозрастающие последовательности действительных чисел такие, что*

$$\sum_{j=1}^{k} a_j \leqslant \sum_{j=1}^{k} b_j \qquad (k = 1, 2, \ldots, \omega).$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{k} \Phi(a_j) \leqslant \sum_{j=1}^{k} \Phi(b_j) \qquad (k = 1, 2, \ldots, \omega). \tag{3.10}$$

(*В частности, если* $\omega = \infty$, *то* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \Phi(a_j) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{\infty} \Phi(b_j)$.)

Если вдобавок функция $\Phi(x)$ строго выпукла, то равенство

$$\sum_{j=1}^{\omega} \Phi(a_j) = \sum_{j=1}^{\omega} \Phi(b_j) \tag{3.11}$$

будет иметь место в том и только том случае, когда

$$a_j = b_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, \omega).$$

Доказательство. Обозначим через $\Phi'(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ левую производную выпуклой функции $\Phi(x)$, которая, как известно, всюду существует и является неотрицательной неубывающей функцией.

Докажем, что функция $\Phi(x)$ допускает представление

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-u)_+ \, d\Phi'(u), \tag{3.12}$$

где $y_+ = \max(y, 0)$.

В самом деле,

$$\int_{-N}^{\infty}(x-u)_+\,d\Phi'(u)=\int_{-N}^{x}(x-u)\,d\Phi'(u)=$$
$$=\int_{-N}^{x}\Phi'(u)\,du-(x+N)\,\Phi'(-N)\qquad(\geqslant 0),\tag{3.13}$$

где N — произвольное положительное число. Из положительности левой части равенства (3.13) следует, что

$$(x+N)\,\Phi'(-N)\leqslant\int_{-N}^{x}\Phi'(u)\,du=$$
$$=\Phi(x)-\Phi(-N)\leqslant\Phi(x)\qquad(x>-N),\tag{3.14}$$

откуда

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\,N\Phi'(-N)<\infty,\quad \lim_{N\to\infty}\Phi'(-N)=0.\tag{3.15}$$

Так как по условию $\Phi(x)\to 0$ при $x\to-\infty$, то из (3.14) и (3.15) заключаем, что

$$\lim_{N\to\infty}(x+N)\,\Phi'(-N)=\lim_{N\to\infty}N\Phi'(-N)=0.$$

После этого для получения представления (3.12) функции $\Phi(x)$ остается перейти в (3.13) к пределу при $N\to\infty$.

Из представления (3.12) следует

$$\sum_{j=1}^{k}\Phi(a_j)=\int_{-\infty}^{\infty}A_k(x)\,d\Phi'(x),\tag{3.16}$$

где

$$A_k(x)=\sum_{j=1}^{k}(a_j-x)_+.$$

Аналогично

$$\sum_{j=1}^{k}\Phi(b_j)=\int_{-\infty}^{\infty}B_k(x)\,d\Phi'(x),\tag{3.16'}$$

$$B_k(x)=\sum_{j=1}^{k}(b_j-x)_+.$$

Функции $A_k(x)$ и $B_k(x)$ связаны между собой соотношением

$$A_k(x) \leqslant B_k(x) \qquad (-\infty < x < \infty;\ k = 1, 2, \ldots). \tag{3.17}$$

Действительно, для всех x, удовлетворяющих какому-либо из неравенств

$$x \leqslant \min(a_k, b_k), \quad x \geqslant b_1,$$

соотношение (3.17) очевидно. Пусть теперь

$$a_{q+1} \leqslant x < a_q \quad \text{и} \quad b_{p+1} \leqslant x < b_p \qquad (p, q \leqslant k);$$

тогда при $p \geqslant q$

$$A_k(x) = \sum_{j=1}^{q} a_j - qx \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{q} b_j - qx + (b_{q+1} - x) + \ldots + (b_p - x) = B_k(x)$$

и при $p < q$

$$A_k(x) = \sum_{j=1}^{q} a_j - qx \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{q} a_j - qx - (b_{p+1} - x) - \ldots - (b_q - x) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{p} b_j - px = B_k(x).$$

Из неравенств (3.17) и представлений (3.16), (3.16′) непосредственно вытекает справедливость неравенств (3.10).

При выяснении того, когда в (3.11) имеет место знак равенства, рассмотрим для определенности более трудный случай $\omega = \infty$.

В этом случае из (3.17) следует:

$$A(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (a_j - x)_+ \leqslant B(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - x)_+ \qquad (-\infty < x < \infty).$$

Из (3.10) вытекает, что коль скоро ряд $\sum_j \Phi(b_j)$ сходится, то сходится также ряд $\sum_j \Phi(a_j)$; кроме того, в силу (3.17)

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Phi(a_j) = \int_{-\infty}^{\infty} A(u)\, d\Phi'(u) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} B(u)\, d\Phi'(u) = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi(b_j).$$

В последнем соотношении знак равенства будет иметь место тогда и только тогда, когда $A(x) = B(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, что в свою очередь возможно лишь, если $a_j = b_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$.

3. Приведенные предложения позволяют установить ряд важных результатов о s-числах вполне непрерывных операторов.

Теорема 3.1 (Мажорантная теорема Г. Вейля, см. Г. Вейль [2]). *Пусть A — некоторый вполне непрерывный оператор, а $f(x)$ $(0 \leqslant x < \infty;\ f(0) = 0)$ — функция, которая становится выпуклой после подстановки $x = e^t$ $(-\infty < t < \infty)$. Тогда*

$$\sum_{j=1}^{k} f(|\lambda_j|) \leqslant \sum_{j=1}^{k} f(s_j) \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu(A)), \tag{3.18}$$

где

$$\lambda_j = \lambda_j(A), \quad s_j = s_j(A) \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu(A)).$$

В частности, если $\nu(A) = \infty$, то

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(|\lambda_j|) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} f(s_j). \tag{3.19}$$

Если функция $\Phi(t) = f(e^t)$ строго выпукла, то равенство

$$\sum_{j=1}^{\nu(A)} f(|\lambda_j|) = \sum_{j=1}^{\infty} f(s_j) \qquad (<\infty)\,^{*)} \tag{3.20}$$

---

*) Напомним, что даже для конечномерного оператора A s-числа составляют бесконечную последовательность, см. § 2 п. 1. Напомним также, что собственные числа λ_j нумеруются по убыванию модулей с учетом алгебраических кратностей, и поэтому верхний предел $\nu(A)$ в сумме $\sum_{j=1}^{\nu(A)}$ указывает на то, что каждое число λ_j фигурирует в этой сумме столько раз, какова его кратность.

при условии конечности правой части имеет место в том и только том случае, когда оператор A нормален.

Доказательство. Эта теорема является простой комбинацией функционально-аналитической леммы 3.3 и чисто теоретико-функциональной леммы 3.4. В самом деле, в силу леммы 3.3, к числам

$$a_j = \ln|\lambda_j|, \quad b_j = \ln s_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu(A))$$

и функции $\Phi(t) = f(e^t)$ применима лемма 3.4. Отсюда получаются соотношения (3.18) и (3.19).

Рассмотрим теперь тот случай, когда функция $\Phi(t)$ строго выпукла и выполняется (3.20). Если $\nu(A)$ конечно, то, полагая в (3.18) $k = \nu(A)$ и сопоставляя с (3.20), получаем:

$$\sum_{j=1}^{\nu(A)} f(|\lambda_j|) = \sum_{j=1}^{\nu(A)} f(s_j); \quad s_j(A) = 0 \text{ при } j > \nu(A).$$

Здесь учтено, что $f(x) > 0$ при $x > 0$. Таким образом, в рассматриваемом случае $r(A) = \nu(A)$ и, кроме того, в силу леммы 3.4

$$|\lambda_j(A)| = s_j(A) \qquad (j = 1, 2, \ldots, r(A)). \tag{3.21}$$

В силу той же леммы 3.4 при $\nu(A) = \infty$ из равенства (3.20) будут следовать равенства (3.21) для всех $j = 1, 2, \ldots$

Вспоминая лемму 3.3, заключаем, что в каждом из двух случаев ($\nu(A) < \infty$; $\nu(A) = \infty$) равенство (3.21) влечет нормальность оператора A.

Так как и обратно — для нормальных операторов A: $\nu(A) = r(A)$ и имеют место равенства (3.21), а с ними и равенство (3.20), — то теорема доказана.

Следствие 3.1. *Для любого $A \in \mathfrak{S}_\infty$ имеют место соотношения*

$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j(A)|^p \leqslant \sum_{j=1}^{n} s_j^p(A) \qquad (p > 0;\ n = 1, 2, \ldots, \nu(A)), \tag{3.22}$$

а также соотношения

$$\prod_{j=1}^{n}(1+r\,|\lambda_j(A)|)\leqslant\prod_{j=1}^{n}(1+rs_j(A))\qquad(n=1,\,2,\,\ldots,\,\nu(A)),\tag{3.23}$$

где r *— любое положительное число.*

В самом деле, соотношения (3.22) и (3.23) являются частными случаями соотношений (3.18), получающимися, соответственно, при $f(x)=x^p$ и $f(x)=\ln(1+rx)$. Легко проверить, что эти функции становятся выпуклыми после подстановки $x=e^t$.

Следствие 3.2. *Пусть* $A\in\mathfrak{S}_\infty$ *и при некотором* $\varrho>0$

$$s_n(A)=O(n^{-1/\rho})\qquad(n\to\infty)\tag{3.24}$$

или

$$s_n(A)=o(n^{-1/\rho})\qquad(n\to\infty).\tag{3.25}$$

Тогда если оператор A *имеет бесконечное число собственных чисел, то в случае* (3.24)

$$\lambda_n(A)=O(n^{-1/\rho})\qquad(n\to\infty)\tag{3.26}$$

и в случае (3.25)

$$\lambda_n(A)=o(n^{-1/\rho})\qquad(n\to\infty).\tag{3.27}$$

В самом деле, предположим сначала, что $\varrho<1$, тогда целая функция

$$f_s(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+s_n(A)\,z)$$

согласно известным теоремам теории функции (см. Б. Я. Левин [1]) будет целой функцией порядка ϱ и притом нормального типа в случае (3.24):

$$\ln f_s(r)=O(r^\rho)\qquad(r\uparrow\infty)$$

и минимального типа в случае (3.25):

$$\ln f_s(r)=o(r^\rho)\qquad(r\uparrow\infty).$$

Но тогда те же утверждения справедливы и для функции

$$f_\lambda(z)=\prod_{j=1}^{\infty}(1+\lambda_j(A)\,z),$$

ибо в силу (3.23)

$$\max_{|z|\leqslant r} |f_\lambda(z)| \leqslant f_s(r).$$

Поэтому согласно обратным теоремам теории целых функций о связи порядка их роста с порядком роста нулей будем иметь, соответственно, (3.26) и (3.27).

Рассмотрим теперь случай, когда $\varrho > 1$.

Выбрав целое $\nu > \varrho$, образуем числа $\lambda_n^\nu(A)$ и $s_n^\nu(A)$, для которых снова будем иметь

$$\left| \prod_{j=1}^{\infty} (1 + \lambda_j^\nu(A) z) \right| \leqslant \prod_{j=1}^{\infty} (1 + s_j^\nu(A) |z|).$$

Отсюда снова можно будет заключить, что числа $\lambda_n^\nu(A)$ будут иметь тот же порядок убывания, что и числа $s_n^\nu(A)$.

Утверждение доказано.

Замечание 3.2. Следствие 3.2 сохранит силу, если в его формулировке заменить $n^{-1/\rho}$ на $n^{-1/\rho}L(n)$, где $L(r)$ $(0 < r < \infty)$ — медленно изменяющаяся функция (см. о них п. 4 § 14 главы III). При этом вместо теорем о целых функциях порядка ϱ придется использовать теоремы теории функций об уточненном порядке роста (см. Б. Я. Левин [1], гл. I, § 13).

4. В теореме 3.1 речь идет о неравенствах вида

$$\Phi(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_n|) \leqslant \Phi(s_1, s_2, \ldots, s_n),$$

где функция Φ имеет аддитивную структуру, а именно:

$$\Phi(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \sum_{j=1}^{n} \Phi(t_j). \tag{3.28}$$

Как показал А. Островский [1] (для случая конечномерных операторов), результат Вейля допускает обобщение на случай широкого класса функций Φ, не подчиняющихся ограничению (3.28).

Лемма 3.5 *). *Пусть функция* $\Phi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ *определена в области* D_n

$$-\infty < t_n \leqslant t_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant t_2 \leqslant t_1 < \infty$$

*) Эта лемма представляет из себя простую модификацию одного предложения А. Островского [1]. На лемму 3.5, замечание 3.3 и возможность вывода из этой леммы теоремы 3.2 обратил наше внимание Ю. А. Палант.

и имеет там непрерывные частные производные, удовлетворяющие условиям

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t_1} > \frac{\partial\Phi}{\partial t_2} > \ldots > \frac{\partial\Phi}{\partial t_n} > 0 \text{ при } t_1 > t_2 > \ldots > t_n. \qquad (3.29)$$

Тогда для любых двух невозрастающих последовательностей действительных чисел $\{a_j\}_1^n$ *и* $\{b_j\}_1^n$, *удовлетворяющих условиям*

$$\sum_{j=1}^{k} a_j \leqslant \sum_{j=1}^{k} b_j \qquad (k=1, 2, \ldots, n), \qquad (3.30)$$

выполняется неравенство

$$\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leqslant \Phi(b_1, b_2, \ldots, b_n), \qquad (3.31)$$

в котором знак равенства имеет место только при $a_j = b_j$ $(j=1, 2, \ldots, n)$.

Доказательство. Рассмотрим преобразование

$$s_k = \sum_{j=1}^{k} t_j \qquad (k=1, 2, \ldots, n), \qquad (3.32)$$

отображающее область D_n в область Ω_n всех точек $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, для которых

$$s_k - s_{k-1} \geqslant s_{k+1} - s_k \qquad (k=1, 2, \ldots, n-1;\ s_0 = 0).$$

При этом функция Φ переходит в некоторую функцию Ψ:

$$\Psi(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \Phi(t_1, t_2, \ldots, t_n),$$

определенную в Ω_n и удовлетворяющую там условиям

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\Psi}{\partial s_k} = \frac{\partial\Phi}{\partial t_k} - \frac{\partial\Phi}{\partial t_{k+1}} > 0 \qquad (k=1, 2, \ldots, n-1), \\ &\frac{\partial\Psi}{\partial s_n} = \frac{\partial\Phi}{\partial t_n} > 0. \end{aligned}\right. \qquad (3.33)$$

При отображении (3.32) отрезок

$$t_k = (1-\lambda)\, a_k + \lambda b_k \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1;\ k=1, 2, \ldots, n)$$

переходит в отрезок S:

$$s_k = (1-\lambda)\, \alpha_k + \lambda \beta_k \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1;\ k=1, 2, \ldots, n),$$

где по условию

$$\alpha_k = \sum_{j=1}^{k} a_j \leqslant \beta_k = \sum_{j=1}^{k} b_j \qquad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Если отрезок S не вырождается в точку, т. е. $\alpha_k < \beta_k$ хотя бы при одном $k\,(=1, 2, \ldots, n)$, то функция Ψ на отрезке S

является возрастающей функцией аргумента λ, ибо согласно (3.33)

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\Psi}{\partial s_j}(\beta_j-\alpha_j)>0.$$

Отсюда

$$\Psi|_{\lambda=1}=\Phi(b_1, b_2, \ldots, b_n)>\Psi|_{\lambda=0}=\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

что и требовалось доказать.

Замечание 3.3. Легко видеть, что неравенство (3.31) будет выполняться также и в том случае, когда условия (3.29) заменены ослабленными условиями

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t_1}\geqslant\frac{\partial\Phi}{\partial t_2}\geqslant\ldots\geqslant\frac{\partial\Phi}{\partial t_n}\geqslant 0. \tag{3.34}$$

С другой стороны, если выпуклая функция $\Phi(t)$ $(-\infty\leqslant t<\infty)$ непрерывно дифференцируема, то функция $\Phi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ вида (3.28) будет удовлетворять условиям (3.34), а также условиям (3.29), если функция $\Phi(t)$ строго выпукла.

Таким образом, для непрерывно дифференцируемых функций $\Phi(t)$ лемма 3.4 для конечных последовательностей $\{a_j\}_1^n$ и $\{b_j\}_1^n$ является следствием леммы 3.5.

В качестве следствия лемм 3.3 и 3.5 получается теорема, принадлежащая, в основном, А. Островскому [1].

Теорема 3.2. *Пусть A — некоторый вполне непрерывный оператор, а $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(0<x_n\leqslant x_{n-1}\leqslant\ldots\leqslant x_1<\infty;$ $n\leqslant\nu(A))$ — функция, которая имеет непрерывные частные производные, удовлетворяющие условиям:*

I) $$\frac{\partial F}{\partial x_k}>0 \qquad (k=1, 2, \ldots, n);$$

II) $$x_{k+1}\frac{\partial F}{\partial x_{k+1}}<x_k\frac{\partial F}{\partial x_k} \text{ при } x_{k+1}<x_k \qquad (k=1, 2, \ldots, n-1).$$

Тогда

$$F(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_n|)\leqslant F(s_1, s_2, \ldots, s_n), \tag{3.35}$$

где $\lambda_j=\lambda_j(A)$, $s_j=s_j(A)$ $(j=1, 2, \ldots, n)$, причем знак равенства имеет здесь место в том и только том случае, когда $|\lambda_j|=s_j$ $(j=1, 2, \ldots, n)$.

Доказательство. В самом деле, если функция F удовлетворяет условиям теоремы, то функция

$$\Phi(t_1, t_2, \ldots, t_n)=F(e^{t_1}, e^{t_2}, \ldots, e^{t_n})$$
$$(-\infty<t_n\leqslant t_{n-1}\leqslant\ldots\leqslant t_1<\infty)$$

удовлетворяет условиям леммы 3.5.

С другой стороны, согласно лемме 3.3, числа $a_j = \ln|\lambda_j|$, $b_j = \ln s_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) удовлетворяют условиям (3.30), а поэтому для них имеет место (3.31), что при указанном выборе функции Φ и дает соотношение (3.35).

Теорема доказана.

Нетрудно убедиться, что для элементарных симметрических функций

$$\Sigma_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_n \leqslant k} x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_n}$$

выполняются условия I) и II) теоремы 3.2 и поэтому имеет место

Следствие 3.3. *Для любого вполне непрерывного оператора A:*

$$\Sigma_n(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_k|) \leqslant \Sigma_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$$
$$(1 \leqslant n \leqslant k \leqslant \nu(A)), \tag{3.36}$$

где $\lambda_j = \lambda_j(A)$, $s_j = s_j(A)$ ($j = 1, 2, \ldots, k$).

Замечание 3.4. При $n = k$ неравенство (3.36) означает то же, что и неравенство (3.6). Г. Вейль получил последнее неравенство рассуждением, отличным от изложенного; рассуждение Вейля интересно тем, что оно приводит ко многим новым неравенствам, не укладывающимся в схему теоремы Островского (теоремы 3.2).

Приведем рассуждение Вейля. Образуем для этого, задавшись натуральным k, всевозможные произведения вида:

$$\Lambda^{(k)}(A) = \lambda_{j_1}(A)\lambda_{j_2}(A) \ldots \lambda_{j_k}(A) \qquad (j_1 < j_2 < \ldots < j_k)$$

и перенумеруем их как-либо в порядке убывания модулей. Полученные таким образом числа обозначим через $\Lambda_1^{(k)}, \Lambda_2^{(k)}, \ldots$ Очевидно,

$$\Lambda_1^{(k)} = \lambda_1(A)\lambda_2(A) \ldots \lambda_k(A).$$

Поступая аналогично с числами $s_j(A)$, построим последовательность чисел $S_j^{(k)}$ ($j = 1, 2, \ldots$); в частности,

$$S_1^{(k)} = s_1(A)s_2(A) \ldots s_k(A).$$

Подобно тому как это имеет место для матриц (Г. Вейль, между прочим, проводил свои рассуждения для матриц), числа

$$\Lambda_j^{(k)} (j = 1, 2, \ldots, N;\ N = C^k_{\nu(A)}) \text{ и } S_j^{(k)} \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

суть соответственно собственные числа и s-числа некоторого оператора $\mathfrak{A} = A^{(k)}$, называемого *k-м ассоциированным оператором* по отношению к A и действующим в некотором новом гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}^{(k)}$ (см. Ф. Р. Гантмахер и М. Г. Крейн [1]).

Если $A\varphi_1=\lambda_1(A)\varphi_1$, то

$$|\lambda_1(A)|=\frac{|A\varphi_1|}{|\varphi_1|}\leqslant\max_{\varphi\in\mathfrak{H}}\frac{|A\varphi|}{|\varphi|}=s_1(A).$$

Таким образом, неравенство $|\lambda_1(A)|\leqslant s_1(A)$ устанавливается непосредственно. С другой стороны, применение этого неравенства к оператору $\mathfrak{A}=A^{(k)}$ дает $|\Lambda_1^{(k)}|\leqslant S_1^{(k)}$, что равносильно (3.6).

Любопытно отметить, что на основании последнего неравенства была получена теорема 3.1, которая в применении к оператору $\mathfrak{A}$ позволяет утверждать, что для всякой функции $f(x)$, удовлетворяющей условию теоремы 3.1, при любом натуральном $k\ (\leqslant\nu(A))$

$$\sum_{j=1}^{\varkappa} f(|\Lambda_j^{(k)}|)\leqslant\sum_{j=1}^{\varkappa} f(S_j^{(k)})\qquad(\varkappa=1,\,2,\,\ldots).$$

В частности, для $f(x)=x$ получаем:

$$\sum_{j=1}^{\varkappa}|\Lambda_j^{(k)}|\leqslant\sum_{j=1}^{\varkappa}S_j^{(k)}\qquad(\varkappa=1,\,2,\,\ldots).\tag{3.37}$$

Подчеркнем, что неравенства (3.37), вообще говоря, носят иной характер, нежели неравенства (3.36), хотя в некоторых случаях для отдельных значений $n\leqslant k$ неравенство (3.37) может означать то же, что и неравенство (3.36) с тем же k и $\varkappa$, равным C_k^n — числу сочетаний из k по n.

Соотношения (3.37) в свою очередь позволяют на основании теоремы 3.2 утверждать, что для чисел $\Lambda_j^{(k)}$ и $S_j^{(k)}$ $(j=1,2,\ldots)$ имеют место неравенства типа (3.36).

§ 4. Неравенства для s-чисел суммы и произведения вполне непрерывных операторов

В этом параграфе излагаются с рядом дополнений результаты Фань Цзюя [3] и А. Хорна [1], тесно примыкающие к исследованиям Г. Вейля.

1. Весьма полезна простая лемма:

Лемма 4.1 (Фань Цзюй [3]). *Пусть $A\in\mathfrak{S}_\infty$. Тогда для любого натурального n*

$$\max\left|\sum_{j=1}^{n}(UA\varphi_j,\,\varphi_j)\right|=\sum_{j=1}^{n}s_j(A),\tag{4.1}$$

где максимум берется по всевозможным унитарным операторам U и ортонормированным системам $\{\varphi_j\}_1^n$.

В частности,

$$\sum_{j=1}^{n} |(A\varphi_j, \varphi_j)| \leqslant \sum_{j=1}^{n} s_j(A). \tag{4.2}$$

Доказательство. Обозначим через P ортогональный проектор на подпространство с базисом φ_j $(j=1, 2, \ldots, n)$.

Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} (UA\varphi_j, \varphi_j) = \sum_{j=1}^{n} (A_1\varphi_j, \varphi_j),$$

где $A_1 = PUAP$. Согласно известному положению линейной алгебры

$$\operatorname{sp} A_1 = \sum_{j=1}^{n} (A_1\varphi_j, \varphi_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(A_1).$$

В силу следствия 3.1

$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j(A_1)| \leqslant \sum_{j=1}^{n} s_j(A_1).$$

С другой стороны, согласно оценкам (2.2) и (2.3)

$$s_j(A_1) = s_j(PUAP) \leqslant s_j(A) \qquad (j=1, 2, \ldots, n).$$

Стало быть,

$$\left|\sum_{j=1}^{n} (UA\varphi_j, \varphi_j)\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} s_j(A).$$

Покажем, что знак равенства здесь достигается. Представим для этого оператор A в полярной форме $A = VH$ и обозначим через e_j $(j=1, 2, \ldots)$ полную ортонормированную систему собственных векторов оператора H.

Очевидно, найдется унитарный оператор U такой, что

$$UAe_j = V^*Ae_j\ (=He_j) \qquad (j=1, 2, \ldots, n).$$

Для этого оператора будем иметь:

$$\sum_{j=1}^{n} (UAe_j, e_j) = \sum_{j=1}^{n} (He_j, e_j) = \sum_{j=1}^{n} s_j(A).$$

Итак, соотношение (4.1) установлено. Из него немедленно следует соотношение (4.2). Действительно, пусть

U_0 — какой-либо унитарный оператор, обладающий свойством

$$U_0^*\varphi_j = e^{i\theta_j}\varphi_j, \quad \theta_j = \arg(A\varphi_j, \varphi_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} |(A\varphi_j, \varphi_j)| = \sum_{j=1}^{n} (U_0 A\varphi_j, \varphi_j) \leqslant \sum_{j=1}^{n} s_j(A).$$

Лемма 4.1 доказана.

Теперь без труда устанавливается лемма.

Лемма 4.2 (А. Хорн [1], Фань Цюй [3]). *Для любых операторов* A, $B \in \mathfrak{S}_\infty$ *выполняются соотношения*

$$\prod_{j=1}^{n} s_j(AB) \leqslant \prod_{j=1}^{n} s_j(A) \prod_{j=1}^{n} s_j(B) \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{4.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} s_j(A+B) \leqslant \sum_{j=1}^{n} s_j(A) + \sum_{j=1}^{n} s_j(B) \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4.4}$$

Доказательство. Для произвольной полной ортонормированной системы векторов e_j $(j = 1, 2, \ldots)$ согласно лемме 3.1 справедливо неравенство

$$\det \| (ABe_j, ABe_k) \|_1^n \leqslant \prod_{j=1}^{n} s_j^2(A) \cdot \det \| (Be_j, Be_k) \|_1^n \leqslant$$
$$\leqslant \prod_{j=1}^{n} s_j^2(A) \prod_{j=1}^{n} s_j^2(B). \tag{4.5}$$

Выбирая в качестве e_j систему собственных векторов оператора B^*A^*AB, будем иметь

$$\det \| (ABe_j, ABe_k) \|_1^n = \prod_{j=1}^{n} s_j^2(AB);$$

тогда из (4.5) вытекает (4.3).

Согласно лемме 4.1 можно выбрать ортонормированную систему векторов φ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ и унитарный оператор U так, чтобы

$$\left| \sum_{j=1}^{n} (U(A+B)\varphi_j, \varphi_j) \right| = \sum_{j=1}^{n} s_j(A+B). \tag{4.6}$$

Отсюда, на основании той же леммы 4.1, получаем:

$$\sum_{j=1}^{n} s_j(A+B) \leqslant \left| \sum_{j=1}^{n} (UA\varphi_j, \varphi_j) \right| + \left| \sum_{j=1}^{n} (UB\varphi_j, \varphi_j) \right| \leqslant \leqslant \sum_{j=1}^{n} s_j(A) + \sum_{j=1}^{n} s_j(B).$$

Лемма 4.2 доказана.

Неравенство (4.3) было указано А. Хорном [1], а неравенство (4.4)—Фань Цюем [3].

2. С помощью доказанных лемм немедленно устанавливаются следующие предположения:

Теорема 4.1 (Фань Цюй [3]). *Пусть A и B — линейные операторы, а $f(x)$ $(0 \leqslant x < \infty)$ — неубывающая выпуклая функция, обращающаяся в нуль при $x=0$. Тогда*

$$\sum_{j=1}^{k} f(s_j(A+B)) \leqslant \sum_{j=1}^{k} f(s_j(A)+s_j(B)) \quad (k=1, 2, \ldots,), \tag{4.7}$$

а следовательно,

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(s_j(A+B)) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} f(s_j(A)+s_j(B)). \tag{4.8}$$

Доказательство. В самом деле, соотношения (4.7) и (4.8) непосредственно следуют из лемм 4.2 и 3.4, если в лемме 3.4 положить: $a_j = s_j(A+B)$,

$$b_j = s_j(A) + s_j(B) \text{ и } \Phi(x) = \begin{cases} f(x) & (0 \leqslant x < \infty) \\ 0 & (-\infty \leqslant x < 0). \end{cases}$$

Теорема 4.2 (А. Хорн [1]). *Если функция $f(x)$ $(0 \leqslant x < \infty;\ f(0)=0)$ после подстановки $x = e^t$ $(-\infty \leqslant t < \infty)$ становится выпуклой, то для любых линейных вполне непрерывных операторов A и B*

$$\sum_{j=1}^{k} f(s_j(AB)) \leqslant \sum_{j=1}^{k} f(s_j(A)\, s_j(B)) \quad (k=1, 2, \ldots), \tag{4.9}$$

а следовательно,

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(s_j(AB)) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} f(s_j(A)\, s_j(B)). \tag{4.10}$$

Доказательство. В самом деле, в силу лемм 4.2 и 3.4 соотношения (4.9) и (4.10) непосредственно следуют из соотношений (3.10) и (3.11), если в них положить

$$a_j = s_j(AB) \text{ и } b_j = s_j(A)\, s_j(B).$$

Следствие 4.1. *Для любых линейных вполне непрерывных операторов A и B имеют место соотношения*

$$\sum_{j=1}^{k} s_j(AB) \leqslant \sum_{j=1}^{k} s_j(A)\, s_j(B) \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{4.11}$$

В самом деле, соотношения (4.11) получаются из (4.9) при $f(t) = t$.

Неравенства (4.7)—(4.11) естественно обобщаются на случай n операторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Следствие 4.2. *Для любого линейного вполне непрерывного оператора A и любых чисел $n = 1, 2, \ldots$; $p > 0$ имеют место соотношения*

$$\sum_{j=1}^{k} s_j^{p/n}(A^n) \leqslant \sum_{j=1}^{n} s_j^p(A) \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{4.12}$$

Соотношения (4.12) вытекают из соотношений (4.9), записанных для n операторов $A_j = A$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ и функции $f(t) = t^{p/n}$.

3. Если $A \in \mathfrak{S}_\infty$, а $\{\varphi_j\}_1^\omega$ $(\omega \leqslant \infty)$ — некоторая ортонормированная система, то согласно (4.2)

$$\sum_{j=1}^{k} |(A\varphi_j, \varphi_j)| \leqslant \sum_{j=1}^{k} s_j(A) \qquad (k = 1, 2, \ldots, \omega).$$

На основании леммы 3.4 для любой неубывающей выпуклой функции $f(x)$ $(0 \leqslant x < \infty;\ f(0) = 0)$ можно утверждать, что

$$\sum_{j=1}^{k} f(t_j) \leqslant \sum_{j=1}^{k} f(s_j) \qquad (k = 1, 2, \ldots, \omega), \tag{4.13}$$

где

$$t_j = |(A\varphi_j, \varphi_j)|, \quad s_j = s_j(A) \quad (j = 1, 2, \ldots, \omega).$$

В частности, если $\omega=\infty$, то

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(t_j) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} f(s_j). \tag{4.14}$$

Покажем, что если функция $f(x)$ строго выпукла и правая часть соотношения (4.14) конечна, то знак равенства будет иметь место в том и только том случае, когда

$$A=\sum_{j=1}^{\omega} t_j(\cdot, \varphi_j)\varphi_j. \tag{4.15}$$

Без ограничения общности можно считать, что все $t_j>0$ и что $t_1 \geqslant t_2 \geqslant \ldots$, иначе мы перенумеровали бы систему $\{\varphi_j\}_1^{\omega}$, предварительно выбросив из нее те φ_j, для которых $(A\varphi_j, \varphi_j)=0$. Приняв это, можно утверждать на основании леммы 3.4, что знак равенства в (4.14) будет иметь место в том и только том случае, когда

$$|(A\varphi_j, \varphi_j)|=s_j(A) \qquad (j=1, 2, \ldots, \omega).$$

На основании леммы 3.2 заключаем, что оператор A нормален, а $\{\varphi_j\}_1^{\omega}$ — полная в $\overline{\Re(A)}$ система его собственных векторов, что равносильно (4.15).

§ 5. Некоторые обобщения предыдущих неравенств

Соотношения (4.13) и (4.14) допускают ряд обобщений. Прежде чем их сформулировать, сделаем несколько замечаний.

Пусть $\{P_k\}_1^{\omega}$ $(\omega \leqslant \infty)$ — некоторая система взаимно ортогональных ортопроекторов, так что

$$P_jP_k=0 \qquad (j \neq k;\ j, k=1, 2, \ldots, \omega).$$

Тогда каждому $A \in \Re$ можно сопоставить «диагонально-клеточный» оператор

$$\hat{A}=\sum_{j=1}^{\omega} P_jAP_j, \tag{5.1}$$

который снова принадлежит $\Re$. Пояснения требует только случай $\omega=\infty$. В этом случае равенство (5.1) понимается в смысле сильной сходимости операторов, т. е. в том смысле, что для любого $f \in \mathfrak{H}$

$$\hat{A}f = \sum_{j=1}^{\infty} P_j A P_j f.$$

Сходимость ряда в правой части при любом $f \in \mathfrak{H}$ следует из того, что элементы $g_k = P_k A P_k f$ образуют ортогональную систему и

$$|g_k| \leqslant |A|\,|P_k f|,$$

так что

$$\Big|\sum_{j=m}^{n} g_j\Big|^2 = \sum_{j=m}^{n} |g_j|^2 \leqslant |A|^2 \sum_{j=m}^{n} |P_k f|^2.$$

Если A — вполне непрерывный оператор, то таковым же будет оператор $\hat{A}$, причем когда $\omega = \infty$, ряд (5.1) будет сходиться в смысле сходимости по равномерной норме.

В самом деле, если ввести в этом случае линеал

$$\mathfrak{L}_n = \mathfrak{R}(P_1 + \ldots + P_n) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N = N_\varepsilon$ такое, что*)

$$|Af| \leqslant \varepsilon |f| \quad \text{при} \quad f \in \mathfrak{L}_N^{\perp};$$

стало быть,

$$|P_k A P_k f| \leqslant \varepsilon |P_k f| \quad \text{при} \quad k > N.$$

Поэтому при $m, n > N$

$$\Big|\sum_{j=m}^{n} P_k A P_k f\Big| = \Big(\sum_{j=m}^{n} |g_k|^2\Big)^{1/2} \leqslant \varepsilon \Big(\sum_{j=m}^{n} |P_k f|^2\Big)^{1/2} \leqslant \varepsilon |f|,$$

что и доказывает равномерную сходимость ряда (5.1) и одновременно с этим полную непрерывность оператора $\hat{A}$.

Отметим, что для размерностей $r(A)$ и $r(\hat{A})$ операторов A и $\hat{A}$ возможны все три случая:

$$1) \quad r(\hat{A}) = r(A) \ (\leqslant \infty), \quad 2) \ r(\hat{A}) < r(A) \ (\leqslant \infty),$$
$$3) \ r(A) < r(\hat{A}) \ (\leqslant \infty).$$

Легко, например, сконструировать такие операторы, для которых $r(A) = 1$, а $r(\hat{A}) = \infty$.

Теорема 5.1. *Пусть A — некоторый оператор из $\mathfrak{S}_\infty$, $\{P_k\}_1^\omega$ $(\omega \leqslant \infty)$ — система взаимно ортогональных ортопроекторов, а $\hat{A}$ — оператор, определяемый равенством* (5.1).

---

*) Это вытекает из теоремы III.6.3.

Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} s_j(\hat{A}) \leqslant \sum_{j=1}^{n} s_j(A) \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{5.2}$$

Для того чтобы

$$s_j(\hat{A}) = s_j(A) \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots), \tag{5.3}$$

необходимо и достаточно, чтобы $A=\hat{A}$.

Доказательство. Положим

$$A_k = P_k A P_k, \qquad r_k = r(A_k) \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ \omega).$$

Согласно лемме 4.1 для каждого $k=1,\ 2,\ \ldots,\ \omega$ и натурального $n_k \leqslant r_k$ найдется унитарный оператор U_k, действующий в подпространстве $\mathfrak{R}(P_k)$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ \omega)$, и система ортов $\varphi_j^{(k)}$ $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n_k)$ такая, что

$$\sum_{j=1}^{n_k} (U_k A_k \varphi_j^{(k)},\ \varphi_j^{(k)}) = \sum_{j=1}^{n_k} s_j(A_k).$$

Пусть U — унитарный оператор, определяемый во всем пространстве $\mathfrak{H}$ равенством

$$Uf = \sum_{k=1}^{\omega} U_k P_k f + Qf \qquad (f \in \mathfrak{H}),$$

где $Q = I - \sum_{k=1}^{\omega} P_k$.

Тогда, как легко видеть,

$$(U_k A_k \varphi_j^{(k)},\ \varphi_j^{(k)}) = (UA\varphi_j^{(k)},\ \varphi_j^{(k)}) \quad (j=1,2,\ \ldots,n_k;\ k=1,2,\ \ldots,\ \omega),$$

а следовательно,

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_k} s_j(A_k) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_k} (UA\varphi_j^{(k)},\ \varphi_j^{(k)}) \qquad (m=1,\ 2,\ \ldots).$$

Отсюда на основании леммы 4.1 заключаем, что

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_k} s_j(A_k) \leqslant \sum_{j=1}^{N} s_j(A). \tag{5.4}$$

Подчеркнем, что в этом соотношении m — любое натуральное число $\leqslant \omega$, n_k — произвольные неотрицательные целые числа $\leqslant r_k$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ и $N = \sum_{j=1}^{m} n_j$.

Заметив, что последовательность $\{s_j(\hat{A})\}_1^{r(\hat{A})}$ представляет из себя совокупность занумерованных по убыванию чисел

$$s_j(A_k) \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ r_k;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ \omega),$$

убеждаемся, что неравенства (5.2) следуют из неравенств (5.4) (как, впрочем, и обратно).

Покажем теперь, что из неравенств (5.3) следует, что $\hat{A}=A$. Положим для этого

$$C=A^*A, \quad \hat{C}=\sum_{k=1}^{\omega} P_k C P_k.$$

Так как

$$P_k A^* P_k A P_k \leqslant P_k A^* A P_k \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ \omega), \tag{5.5}$$

то

$$\hat{A}^*\hat{A}=\sum_{k=1}^{\omega} P_k A^* P_k A P_k \leqslant \sum_{k=1}^{\omega} P_k A^* A P_k = \hat{C}, \tag{5.6}$$

и следовательно,

$$s_j^2(\hat{A})=\lambda_j(\hat{A}^*\hat{A}) \leqslant \lambda_j(\hat{C}) \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots).$$

С другой стороны, применение к C и $\hat{C}$ доказанных уже неравенств (5.2) дает

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(\hat{C}) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(C)=\sum_{j=1}^{n} s_j^2(A) \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

и так как согласно (5.5) и (5.6)

$$s_j^2(A) \leqslant s_j^2(\hat{A}) \leqslant \lambda_j(\hat{C}) \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots),$$

то отсюда заключаем, что

$$\lambda_j(\hat{A}^*\hat{A})=s_j^2(\hat{A})=\lambda_j(\hat{C})=\lambda_j(C) \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots).$$

Вспоминая лемму 5.1, получаем $\hat{A}^*\hat{A}=\hat{C}=C$.

Стало быть, согласно (5.5) и (5.6)

$$P_k A^* P_k A P_k = P_k A^* A P_k \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ \omega),$$

или, что то же самое,

$$P_k A^* (I-P_k) A P_k = 0 \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ \omega).$$

Так как $I-P_k=(I-P_k)^2$, то последние соотношения равносильны следующим

$$(I-P_k) A P_k = 0 \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ \omega).$$

Умножение этого соотношения на P_j $(j \neq k)$ или $Q=I-\sum_{k=1}^{\omega} P_k$

дает

$$QAP_k=0, \quad P_jAP_k=0 \qquad (j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ \omega;\ j\neq k).$$

Учитывая также, что $\hat{C}=C$, $\hat{C}Q=0$, находим, что $QCQ=(AQ)^*AQ=0$, и следовательно, $AQ=0$.

Таким образом,

$$A=\Big(\sum_{j=1}^{\omega} P_j+Q\Big)A\Big(\sum_{j=1}^{\omega} P_j+Q\Big)=\sum_{j=1}^{\omega} P_jAP_j=\hat{A},$$

и теорема доказана.

Теорема 5.2. *Пусть выполняются условия предыдущей теоремы и пусть* $f(x)$ $(0\leqslant x<\infty;\ f(0)=0)$ — *некоторая неубывающая выпуклая функция. Тогда*

$$\sum_{j=1}^{n} f(s_j(\hat{A}))\leqslant \sum_{j=1}^{n} f(s_j(A)) \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots), \tag{5.7}$$

и следовательно,

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(s_j(\hat{A}))\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} f(s_j(A)) \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{5.8}$$

Если функция $f(x)$ *строго выпукла, то знак равенства в этом соотношении (при условии конечности правой части) будет иметь место в том и только том случае, когда* $A=\hat{A}$.

Доказательство. Согласно лемме 3.4 неравенства (5.7) являются следствиями неравенства (5.2).

При условиях заключительного утверждения теоремы знак равенства в (5.8), на основании той же леммы 3.4, будет иметь место в единственном случае, когда будут выполняться равенства (5.3), которые, как мы уже знаем, имеют своим следствием: $A=\hat{A}$.

Теорема доказана.

Замечание 5.1. Очевидно, что в обозначениях теоремы 5.1 неравенство (5.8) можно еще записать и так:

$$\sum_{k=1}^{\omega}\sum_{j=1}^{r_k} f(s_j(A_k))\leqslant \sum_{j=1}^{r(A)} f(s_j(A)).$$

Замечание 5.2. Если о функции $f(x)$ $(0\leqslant x<\infty;\ f(0)=0)$ известно только, что она является *строго возрастающей выпуклой функцией* (но не обязательно строго выпуклой), то все же можно утверждать, что знак равенства (5.8) (при условии конечности правой части) возможен лишь при выполнении условий

$$r(\hat{A})\geqslant r(A), \qquad AQ=0 \quad \Big(Q=I-\sum_{k=1}^{\omega} P_k\Big).$$

Необходимость первого условия очевидна.

Для получения второго условия положим

$$B = A - AQ = A\,(I - Q). \tag{5.9}$$

Так как

$$\hat{B} = \sum_{k=1}^{\omega} P_k B P_k = \sum_{k=1}^{\omega} P_k A P_k = \hat{A},$$

то неравенство (5.8) в применении к оператору B дает соотношение:

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(s_j(\hat{A})) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} f(s_j(B)). \tag{5.10}$$

С другой стороны, согласно (2.3)

$$s_j(B) \leqslant s_j(A) \qquad (j = 1, 2, \ldots,), \tag{5.11}$$

и, стало быть,

$$\sum_{j=1}^{r(B)} f(s_j(B)) \leqslant \sum_{j=1}^{r(A)} f(s_j(A)). \tag{5.12}$$

Поэтому если в (5.8) при сделанных предположениях относительно $f(x)$ имеет место знак равенства, то в (5.10) и (5.12), а следовательно, и во всех отношениях (5.11) также имеет место знак равенства. Последнее означает, что $B^*B = A^*A$. Учитывая (5.9), получаем отсюда

$$QA^*AQ - A^*AQ - QA^*A = 0.$$

Помножая это равенство слева и справа на Q, получаем $QA^*AQ = 0$, откуда $AQ = 0$.

Замечание 5.3. Пусть $\{\varphi_j\}_1^{\omega}$ $(\omega \geqslant \infty)$ — некоторая ортонормированная система векторов, а P_j $(j = 1, 2, \ldots, \omega)$ — оператор ортогонального проектирования на направление орта φ_j $(j = 1, 2, \ldots, \omega)$. Легко видеть, что в этом случае оператор $A_j = P_j A P_j$ $(j = 1, 2, \ldots, \omega)$ либо одномерен, либо равен нулю в зависимости от того, будет ли $(A\varphi_j, \varphi_j) \neq 0$ или $= 0$, при этом

$$s_1(A_j) = |(A\varphi_j, \varphi_j)| \qquad (j = 1, 2, \ldots, \omega).$$

Равенство $A = \hat{A}$ в этом случае означает, что имеет место (4.15).

Таким образом, все утверждения п. 3 § 4 являются частными случаями теоремы 5.2.

§ 6. Неравенства для собственных чисел линейных операторов с вполне непрерывной мнимой компонентой

Пусть $A \in \mathfrak{R}$ — произвольный оператор с мнимой компонентой $A_{\mathcal{J}} \in \mathfrak{S}_\infty$. Согласно теореме I.5.2 весь невещественный спектр оператора A состоит из не более чем счетного числа точек спектра, являющихся нормальными собственными числами.

Через $\nu_{\mathcal{J}}(A)$ ($\leqslant \infty$) будем обозначать сумму алгебраических кратностей всех невещественных собственных чисел оператора A. В этом параграфе через $\lambda_j = \lambda_j(A)$ ($j = 1, 2, \ldots, \nu_{\mathcal{J}}(A)$) будем обозначать систему всех невещественных собственных чисел оператора A ($A_{\mathcal{J}} \in \mathfrak{S}_\infty$), перенумерованных как-либо по убыванию их мнимых частей с учетом алгебраической кратности.

Лемма 6.1. *Пусть A — линейный ограниченный оператор с вполне непрерывной мнимой компонентой $A_{\mathcal{J}}$. Тогда*

$$\sum_{j=1}^{n} |\operatorname{Im}\lambda_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} s_j(A_{\mathcal{J}}) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Равенства

$$|\operatorname{Im}\lambda_j| = s_j(A_{\mathcal{J}}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu_{\mathcal{J}}(A)) \tag{6.1}$$

будут иметь место в том и только том случае, когда либо 1) $\nu_{\mathcal{J}}(A) \geqslant r(A_{\mathcal{J}})$ *и оператор A нормален, либо* 2) $\nu_{\mathcal{J}}(A) < r(A_{\mathcal{J}})$ (*и значит*, $\nu_{\mathcal{J}}(A) < \infty$) *и оператор A обладает следующими свойствами*:

а) *в линейной замкнутой оболочке $\mathfrak{E}_{\mathcal{J}}$ всех корневых подпространств, отвечающих невещественным собственным числам оператора A, оператор A индуцирует нормальный оператор*;

б) *подпространство $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{E}_{\mathcal{J}}$ является инвариантным относительно A и в нем оператор A индуцирует оператор $\hat{A}$ с вещественным спектром, причем*

$$s_1(\hat{A}_{\mathcal{J}}) = s_{\nu_{\mathcal{J}}(A)+1}(A_{\mathcal{J}}).$$

Доказательство. Рассмотрим ортонормированную систему Шура ω_j ($j = 1, 2, \ldots, \nu_{\mathcal{J}}(A)$) оператора A в подпространстве $\mathfrak{E}_{\mathcal{J}}$. Имеем

$$A\omega_j = a_{j1}\omega_1 + a_{j2}\omega_2 + \ldots + a_{j,\,j-1}\omega_{j-1} + \lambda_j\omega_j$$
$$(j = 1, 2, \ldots, \nu_{\mathcal{J}}(A)). \tag{6.2}$$

Так как

$$\lambda_j = (A\omega_j, \omega_j) = (A_{\mathcal{R}}\omega_j, \omega_j) + i(A_{\mathcal{J}}\omega_j, \omega_j),$$

то

$$\operatorname{Im}\lambda_j = (A_{\mathcal{J}}\omega_j, \omega_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu_{\mathcal{J}}(A)). \quad (6.3)$$

Обозначим через U унитарный оператор такой, что

$$U\omega_j = \varepsilon_j\omega_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu_{\mathcal{J}}(A)),$$

где $\varepsilon_j = \operatorname{sign}(\operatorname{Im}\lambda_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu_{\mathcal{J}}(A))$. Тогда

$$|\operatorname{Im}\lambda_j| = (U^* A_{\mathcal{J}}\omega_j, \omega_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu_{\mathcal{J}}(A)).$$

Согласно лемме 4.1 будем иметь

$$\sum_{j=1}^{n} (U^* A_{\mathcal{J}}\omega_j, \omega_j) \leqslant \sum_{j=1}^{n} s_j(A_{\mathcal{J}})$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} |\operatorname{Im}\lambda_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} s_j(A_{\mathcal{J}}).$$

Таким образом, первое утверждение леммы доказано.

Выясним, когда имеют место соотношения (6.1). Очевидно, что если оператор A нормален или обладает свойствами а), б), то равенства (6.1) имеют место.

Если имеет место (6.1), то в силу (6.3)

$$|(A_{\mathcal{J}}\omega_j, \omega_j)| = s_j(A_{\mathcal{J}}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu_{\mathcal{J}}(A)). \quad (6.4)$$

Согласно рассуждениям из доказательства леммы 3.2 последнее означает, что подпространство $\mathfrak{E}_{\mathcal{J}}$ инвариантно относительно оператора $A_{\mathcal{J}}$, а система векторов $\{\omega_j\}$ является полной ортонормированной системой собственных векторов оператора $A_{\mathcal{J}}$ в $\mathfrak{E}_{\mathcal{J}}$.

Принимая во внимание, что

$$(A\omega_j, \omega_k) = \overline{(A^*\omega_k, \omega_j)} = 0 \qquad (j < k)$$

получаем, что в (6.2) числа

$$a_{jk} = (A\omega_j, \omega_k) = (A\omega_j, \omega_k) - (A^*\omega_j, \omega_k) = 2i(A_{\mathcal{J}}\omega_j, \omega_k) = 0 \qquad (j > k).$$

Таким образом, из (6.4) вытекает, что в $\mathfrak{E}_{\mathcal{J}}$ оператор A индуцирует нормальный оператор.

Очевидно, подпространство $\mathfrak{E}_{\mathcal{J}}$ является инвариантным и относительно оператора $A_{\mathcal{R}}$ $(=A-iA_{\mathcal{J}})$; следовательно, подпространство $\mathfrak{L}=\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{E}_{\mathcal{J}}$ является инвариантным относительно операторов $A_{\mathcal{J}}$, $A_{\mathcal{R}}$ и A.

Легко проверяется, что оператор $\hat{A}$, индуцированный оператором A в $\mathfrak{L}$, обладает свойствами а) и б).

Если $\nu_{\mathcal{J}}(A)\geqslant r(A_{\mathcal{J}})$, то согласно лемме 3.2 из (6.4) отсюда еще следует, что оператор $A_{\mathcal{J}}$ аннулирует подпространство $\mathfrak{L}$.

Таким образом, в этом случае оператор A порождает в $\mathfrak{L}$ самосопряженный оператор.

Лемма доказана.

Из нее и из леммы 3.4 следует

Теорема 6.1. *Если $f(x)$ $(0\leqslant x<\infty;\ f(0)=0)$ — выпуклая функция, то для любого ограниченного оператора A с $A_{\mathcal{J}}\in\mathfrak{S}_\infty$*

$$\sum_{j=1}^{n} f(|\operatorname{Im}\lambda_j|)\leqslant\sum_{j=1}^{n} f(s_j(A_{\mathcal{J}}))\qquad (n=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu_{\mathcal{J}}(A)).$$

В частности, если $\nu_{\mathcal{J}}(A)=\infty$, то

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(|\operatorname{Im}\lambda_j|)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty} f(s_j(A_{\mathcal{J}})).$$

Для строго выпуклой функции $f(x)$ равенство

$$\sum_{j=1}^{\nu_{\mathcal{J}}(A)} f(|\operatorname{Im}\lambda_j|)=\sum_{j=1}^{\infty} f(s_j(A_{\mathcal{J}}))$$

имеет место в том и только том случае, когда оператор нормален.

Полагая в этой теореме $f(x)=x^p$ $(1\leqslant p<\infty)$, получаем:

$$\sum_{j=1}^{n}|\operatorname{Im}\lambda_j|^p\leqslant\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j(A_{\mathcal{J}})|^p\qquad (n=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu_{\mathcal{J}}(A)),$$

поскольку $s_j(A_{\mathcal{J}})=\lambda_j(A_{\mathcal{J}})$.

§ 7. s-числа ограниченных операторов

1. При определении s-чисел произвольного линейного ограниченного оператора A мы снова полагаем

$$s_j(A)=\lambda_j(H) \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots), \tag{7.1}$$

где $H=(A^*A)^{1/2}$. Однако чтобы придать этому определению смысл, необходимо предварительно определить числа $\lambda_j(H)$ $(j=1,\ 2,\ \ldots)$ для любого неотрицательного оператора $H\in\mathfrak{R}$.

Точка λ спектра самосопряженного оператора $H\in\mathfrak{R}$ называется точкой *спектра сгущения*, если она является предельной точкой спектра H, либо является бесконечнократным собственным числом этого оператора.

Пусть H — произвольный неотрицательный оператор из $\mathfrak{R}$ и μ — верхняя граница спектра H. Если точка μ принадлежит спектру сгущения оператора H, положим

$$\lambda_j(H)=\mu \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots).$$

Если точка μ не принадлежит спектру сгущения H, то она является его конечнократным собственным числом. В этом случае положим

$$\lambda_j(H)=\mu \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ p),$$

где p — кратность собственного числа μ.

Остальные числа $\lambda_j(H)$ $(j=p+1,\ \ldots)$ в последнем случае определяются равенствами

$$\lambda_{p+j}(H)=\lambda_j(H_1) \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots),$$

где оператор

$$H_1=H-\mu P,$$

а P — ортопроектор на собственное подпространство оператора H, отвечающее собственному числу μ.

Для чисел $\lambda_j(H)$ остаются в силе минимаксимальные свойства *), так что

$$\lambda_1(H)=\sup_{\varphi\in\mathfrak{H}}\frac{(H\varphi,\ \varphi)}{(\varphi,\ \varphi)}$$

и

$$\lambda_{j+1}=\inf_{\mathfrak{L}\in\mathfrak{R}_j}\ \sup_{\varphi\in\mathfrak{L}^{\perp}}\frac{(H\varphi,\ \varphi)}{(\varphi,\ \varphi)} \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots),$$

где $\mathfrak{R}_j$ $(j=1,\ 2,\ \ldots)$ — множество всех j-мерных подпространств пространства $\mathfrak{H}$.

Отсюда непосредственно выводится, что если $0\leqslant H_1\leqslant H_2$ $(H_1,\ H_2\in\mathfrak{R})$, то

$$\lambda_j(H_1)\leqslant\lambda_j(H_2) \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots).$$

---

*) С заменой в соответствующих соотношениях символов min и max на inf и sup.

Последовательность $\{\lambda_j(H)\}_1^\infty$ является невозрастающей, и следовательно, имеет предел. Этот предел $\lambda_\infty(H)$, очевидно, является верхней границей спектра сгущения оператора H.

Если воспользоваться спектральной функцией $E(\lambda)$ $(=E(\lambda-0))$ оператора H, то числам $\lambda_j(H)$ можно дать и другое, эквивалентное, описание.

Пусть $\lambda_\infty(H)$ — верхняя граница спектра сгущения H. Подпространство $\mathfrak{H}_s=(I-E(\lambda_\infty(H)+0))\mathfrak{H}$ является инвариантным подпространством оператора H и в нем оператор H порождает оператор, спектр которого совпадает со спектром оператора H из промежутка $\lambda_\infty(H)\leqslant\lambda<\infty$. Рассмотрим оператор $\hat{H}$, определенный равенством

$$\hat{H}(\varphi+\psi)=H\varphi+\lambda_\infty(H)\psi \qquad (\varphi\in\mathfrak{H}_s;\ \psi\in\mathfrak{H}_s^\perp).$$

Оператор $\hat{H}-\lambda_\infty(H)I$ вполне непрерывен. Легко видеть, что

$$\lambda_j(H)=\lambda_j(\hat{H}-\lambda_\infty(H)I)+\lambda_\infty(H) \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots).$$

Отметим еще, что оператор $\hat{H}$ можно представить в виде

$$\hat{H}=\sum_j\lambda_j(H)(\cdot,\ \varphi_j)\varphi_j+\lambda_\infty(H)P_H, \tag{7.2}$$

где $\{\varphi_j\}$ — ортонормированный базис подпространства $\mathfrak{H}_s$, составленный из собственных векторов H, а P_H — ортопроектор, проектирующий пространство $\mathfrak{H}$ на подпространство $\mathfrak{H}_s^\perp$, причем ряд (7.2) сходится сильно.

2. Согласно определению (7.1) последовательность s-чисел $\{s_j(A)\}_1^\infty$ произвольного ограниченного оператора A является невозрастающей и

$$\lim s_n(A)=s_\infty(A),$$

где через $s_\infty(A)$ обозначено число $\lambda_\infty(H)$ $(H=(A^*A)^{1/2})$.

Из определения s-чисел непосредственно следует, что

$$s_j(A)=s_j(A^*) \qquad (A\in\mathfrak{R};\ j=1,\ 2,\ \ldots)$$

и для любого скаляра c

$$s_j(cA)=|c|\,s_j(A) \qquad (A\in\mathfrak{R};\ j=1,\ 2,\ \ldots).$$

Из минимаксимальных свойств чисел $\lambda_j(H)$ легко выводятся соотношения

$$s_j(BA)\leqslant|B|\,s_j(A);\quad s_j(AB)\leqslant|B|\,s_j(A) \qquad (A,\ B\in\mathfrak{R};\ j=1,\ 2,\ \ldots).$$

Пусть равенство $A=UH$ дает полярное представление некоторого оператора $A\in\mathfrak{R}$. Сопоставим оператору H оператор $\hat{H}$, определенный равенством (7.2). Положим $\hat{A}=U\hat{H}$. Очевидно, оператор $\hat{A}$ имеет те же s-числа, что и A. Оператор $\hat{A}$ представим в виде

$$\hat{A}=\sum_j s_j(A)(\cdot,\varphi_j)\psi_j+s_\infty(A)UP_H, \tag{7.3}$$

где $\{\varphi_j\}$ — ортонормированная система из равенства (7.2), а $\psi_j=U\varphi_j$. Ряд (7.3) назовем *рядом Шмидта* оператора $\hat{A}$, а оператор

$$K_n=\sum_{j=1}^{n} s_j(A)(\cdot,\varphi_j)\psi_j$$

n-м отрезком ряда Шмидта оператора $\hat{A}$.

Отметим еще, что оператор $\hat{A}-s_\infty(A)U$ — вполне непрерывен.

3. Теорема 2.1 об аппроксимационном свойстве s-чисел вполне непрерывных операторов и следствия из нее распространяются и на s-числа ограниченных операторов, а именно:

Теорема 7.1. *Пусть A — любой оператор из $\Re$, тогда для любого $n=0, 1, 2, \ldots$*

$$s_{n+1}(A)=\min_{K\in\mathfrak{K}_n}|A-K|. \tag{7.4}$$

Эта теорема демонстрирует естественность введения s-чисел для произвольного ограниченного оператора. Равенство (7.4) можно было бы, как и для вполне непрерывных операторов, принять за новое, эквивалентное определение s-чисел.

Доказательство. Точно так же, как при доказательстве теоремы 2.1, показывается, что

$$s_{n+1}(A)\leqslant|A-K|\qquad(K\in\mathfrak{K}_n). \tag{7.5}$$

Если число $s_n(A)$, а следовательно, и все предыдущие, являются собственными числами оператора $H=(A^*A)^{1/2}$, то легко видеть, что

$$|A-K_n|=s_{n+1}(A),$$

где K_n — n-й отрезок ряда Шмидта оператора $\hat{A}$. Таким образом, для этого случая теорема доказана.

Рассмотрим случай, когда точка спектра $\lambda=s_n(A)$ оператора H не является его собственным числом. Обозначим через p $(0\leqslant p\leqslant n)$ наибольшее число, для которого $s_p(A)$ является собственным числом оператора H. Тогда очевидно:

$$s_j(A)=s_\infty(A)\qquad(j=p+1,\ p+2,\ \ldots).$$

Если $p\neq 0$, то по доказанному

$$s_{p+1}(A)=|A-K_p|,$$

а следовательно,

$$s_{n+1}(A)=|A-K_p|\qquad(K_p\in\mathfrak{K}_p\subset\mathfrak{K}_n). \tag{7.6}$$

Сопоставляя (7.5) и (7.6), получаем (7.4).

Наконец, если $p=0$, то

$$s_j(A)=s_\infty(A)=|A| \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots). \tag{7.7}$$

Последнее в силу (7.6) может иметь место в том и только том случае, когда

$$\min_{K\in\mathfrak{K}_n} |A-K|=|A| \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Теорема доказана.

Следствия 2.1 и 2.2 теоремы 2.1 дословно распространяются на произвольные ограниченные операторы. Отметим еще одно следствие из теоремы 7.1.

Следствие 7.1. *Если оператор* $A\in\mathfrak{R}$, то

$$\min_{T\in\mathfrak{S}_\infty} |A-T|=s_\infty(A).$$

В самом деле, согласно теореме 7.1

$$\inf_{T\in\mathfrak{S}_\infty} |A-T|\leqslant \lim_{n\to\infty}\ \min_{K\in\mathfrak{K}_n}|A-K|=\lim_{n\to\infty} s_n(A)=s_\infty(A).$$

Кроме того, очевидно, что для $T=\hat{A}-s_\infty(A)\,U$

$$|A-T|=s_\infty(A).$$

Итак, число $s_\infty(A)$ является расстоянием от оператора A до $\mathfrak{S}_\infty$ — подпространства всех вполне непрерывных операторов.

Не вдаваясь в подробности, отметим, что лемма 4.1 дословно переносится на ограниченные операторы, лишь с той разницей, что в соотношении (4.1) max заменяется на sup. Из этой леммы без труда выводится, что для любых ограниченных операторов $A,\ B\in\mathfrak{R}$

$$\sum_{j=1}^{n} s_j(A+B)\leqslant\sum_{j=1}^{n} s_j(A)+\sum_{j=1}^{n} s_j(B) \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{7.8}$$

Для любых ограниченных операторов A, B сохраняется также соотношение

$$\sum_{j=1}^{n} s_j(AB)\leqslant\sum_{j=1}^{n} s_j(A)\,s_j(B) \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{7.9}$$

Докажем последнее. Пусть полярное представление оператора AB имеет вид $AB=UH$. Обозначим через p ($\leqslant\infty$) наименьшее число, для которого $s_{p+1}(AB)=s_\infty(AB)$, и через φ_j ($j=1,\ 2,\ \ldots,\ p$) — ортонормированную систему собственных векторов оператора H, отвечающих его собственным числам $s_j(AB)$ $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ p)$. Каждому положительному числу ε и натуральному числу n сопоставим подпространство $\mathfrak{N}_{\varepsilon;\,n}=E(s_\infty(AB)+0)\,\mathfrak{H}\ominus E\left(s_\infty(AB)-\frac{\varepsilon}{n}\right)\mathfrak{H}$, где $E(\lambda)$ — спектральная функция оператора H.

Любому $n\leqslant p$ сопоставим оператор

$$H_n=\sum_{j=1}^{n} s_j(AB)(\cdot,\ \varphi_j)\,\varphi_j. \tag{7.10}$$

Если $p<\infty$ и $n>p$, то подпространство $\mathfrak{N}_{\varepsilon;\,n}$ бесконечномерно.

В этом случае оператор H_n определим равенством

$$H_n=\sum_{j=1}^{p} s_j(AB)(\cdot,\ \varphi_j)\,\varphi_j+\sum_{j=p+1}^{\infty} s_\infty(AB)(\cdot,\ \varphi_j)\,\varphi_j, \tag{7.11}$$

где φ_j $(j=p+1,\ p+2,\ \ldots)$ — произвольная ортонормированная система векторов подпространства $\mathfrak{N}_{\varepsilon;\,n}$. Наконец, через P_n обозначим ортопроектор, проектирующий все пространство $\mathfrak{H}$ на подпространство $\mathfrak{M}_{\varepsilon;\,n}$ с базисом $\{\varphi_j\}_1^n$.

Из определения оператора H_n непосредственно следует, что при $n>p$ для всех векторов $f\in\mathfrak{M}_{\varepsilon;\,n}$

$$|Hf-H_nf|\leqslant\frac{\varepsilon}{n}|f|.$$

Отсюда и из (7.10) и (7.11) вытекает, что для любого натурального n имеет место соотношение

$$|P_nHP_n-H_n|\leqslant|(H-H_n)P_n|\leqslant\frac{\varepsilon}{n}. \tag{7.12}$$

Так как $s_j(AB)=s_j(H_n)$ $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, то согласно соотношениям (7.8) и (7.12)

$$\sum_{j=1}^{n} s_j(AB)=\sum_{j=1}^{n} s_j(H_n)\leqslant\sum_{j=1}^{n} s_j(P_nHP_n)+ \tag{7.13}$$
$$+\sum_{j=1}^{n} s_j(P_nHP_n-H_n)\leqslant\sum_{j=1}^{n} s_j(P_nHP_n)+\varepsilon.$$

Оператор $P_nHP_n=A_1B_1$, где $A_1=P_nU^*A$, а $B_1=BP_n$.

Операторы A_1 и B_1 конечномерны, стало быть, согласно (4.9)

$$\sum_{j=1}^{n} s_j(A_1B_1) \leqslant \sum_{j=1}^{n} s_j(A_1)\, s_j(B_1). \tag{7.14}$$

Принимая во внимание, что $s_j(A_1) \leqslant s_j(A)$ и $s_j(B_1) \leqslant s_j(B)$, получаем из (7.13), (7.14) соотношение

$$\sum_{j=1}^{n} s_j(AB) \leqslant \sum_{j=1}^{n} s_j(A)\, s_j(B) + \varepsilon.$$

Отсюда в силу произвольности ε вытекает (7.9).

В этом параграфе мы остановились только на свойствах s-чисел ограниченных операторов, используемых в дальнейшем. Однако на s-числа ограниченных операторов распространяются и многие другие предложения о s-числах вполне непрерывных операторов.

ГЛАВА III

СИММЕТРИЧНО-НОРМИРОВАННЫЕ ИДЕАЛЫ КОЛЬЦА ЛИНЕЙНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

В дальнейшем будут играть фундаментальную роль различные классы вполне непрерывных операторов. В качестве примера таковых можно назвать класс ядерных операторов $\mathfrak{S}_1$, класс операторов Гильберта—Шмидта $\mathfrak{S}_2$ и их естественное обобщение—классы $\mathfrak{S}_p\,(p>0)$. Эти классы-«ветераны» в настоящее время достаточно изучены и встречаются во многих исследованиях.

Однако в недавних исследованиях по проблеме приведения несамосопряженного оператора к треугольному виду выяснилась необходимость введения некоторых новых классов вполне непрерывных операторов.

Анализ этих классов обнаружил, что все они включаются в схему теории «кросс-пространств», разработанной Дж. Нейманом и Р. Шэттеном (см. Р. Шэттен [1]).

Последняя теория в применении к операторам, действующим в гильбертовом пространстве, изложена в отдельной монографии Р. Шэттена [2] под названием теории «норм-идеалов».

Настоящая глава охватывает основное содержание этой монографии. В главе изложен также ряд существенных дополнений к теории Неймана—Шэттена. В §§ 5, 6 содержатся дополнения к общей теории. В §§ 14, 15 изучаются новые классы конкретных норм-идеалов. Некоторые из них явились первыми примерами несепарабельных норм-идеалов, составленных из вполне непрерывных операторов сепарабельного гильбертового пространства. Новыми являются интерполяционные теоремы о кочующих оператор-функциях (см. §§ 13, 16). Новым является также метод получения общих предложений теории. В отличие от методов Дж. Неймана и Р. Шэттена, он основан на последовательном использовании свойств s-чисел вполне непрерывных операторов.

В этой книге «норм-идеал» именуется *симметрично-нормированным идеалом*, сокращенно *с. н. идеалом*. Одновременно необходимо подчеркнуть, что при написании этой главы существенно использована монография Р. Шэттена [2]. Особо отметим, что ввиду важности класса ядерных операторов в специальном параграфе (§ 10) приводятся аналитические признаки ядерности интегральных операторов и правило вычисления следа таких операторов.

§ 1. Двусторонние идеалы кольца линейных ограниченных операторов

1. Совокупность $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{R}$ согласно общему определению теории колец называется (алгебраическим) *двусторонним идеалом* кольца $\mathfrak{R}$, если она обладает следующими свойствами:

а) для любых операторов A и $B \in \mathfrak{M}$ оператор $A+B \in \mathfrak{M}$;

б) для произвольного $A \in \mathfrak{M}$ и для любого $B \in \mathfrak{R}$ операторы AB и $BA \in \mathfrak{M}$;

в) $\mathfrak{M} \neq \{0\}$ и $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{R}$.

Так как $I \in \mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}$ — линейное множество, то и всякий идеал $\mathfrak{M}$ — линейное множество.

Очевидно, что совокупность $\mathfrak{K}$ всех конечномерных операторов из $\mathfrak{R}$ является двусторонним идеалом кольца $\mathfrak{R}$.

Двусторонним идеалом кольца $\mathfrak{R}$ является также совокупность $\mathfrak{S}_\infty$ всех вполне непрерывных операторов. Оказывается, что $\mathfrak{K}$ является минимальным, а $\mathfrak{S}_\infty$ — максимальным двусторонним идеалом кольца $\mathfrak{R}$. Имеет место теорема:

Теорема 1.1 (Дж. Калкин [1]). *Любой двусторонний идеал $\mathfrak{M}$ кольца $\mathfrak{R}$ содержится в $\mathfrak{S}_\infty$ и содержит $\mathfrak{K}$:*

$$\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{S}_\infty .$$

Доказательство. Допустим, что идеал $\mathfrak{M}$ содержит хотя бы один оператор A, не являющийся вполне непрерывным, и докажем, что тогда $\mathfrak{M}$ будет содержать обратимый оператор. Пусть полярное представление оператора A имеет вид $A=UH$. Тогда оператор $H=U^*A$ принадлежит идеалу $\mathfrak{M}$ и не принадлежит $\mathfrak{S}_\infty$. Обозначим через $E(\lambda)$ спектральную функцию оператора H.

Так как $H \overline{\in} \mathfrak{S}_\infty$, то найдется число $\varepsilon>0$, для которого ортопроектор

$$P=E(\infty)-E(\varepsilon)$$

бесконечномерен. Подпространство $P\mathfrak{H}$ является инвариантным относительно H и в нем оператор H индуцирует обратимый оператор $\hat{H}$.

Обозначим через V некоторый оператор, отображающий изометрично пространство $\mathfrak{H}$ на подпространство $P\mathfrak{H}$. Оператор V^* отображает изометрично подпространство $P\mathfrak{H}$ на все $\mathfrak{H}$, причем

$$V^*V=I \text{ и } VV^*=P.$$

Оператор $V^*HV=V^*\hat{H}V \in \mathfrak{M}$ и является обратимым: $(V^*HV)^{-1}=V^*\hat{H}^{-1}V$.

Следовательно, в идеал $\mathfrak{M}$ входит единичный оператор I, а вместе с ним и все кольцо $\mathfrak{R}$. Последнее невозможно. Таким образом, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{S}_\infty$.

Для доказательства включения $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{M}$, очевидно, достаточно показать, что все одномерные операторы содержатся в $\mathfrak{M}$.

Пусть $K=(\cdot,\ \varphi)\psi$—произвольный одномерный оператор и пусть A—произвольный одномерный оператор из $\mathfrak{M}$. Легко видеть, что найдутся операторы B и $C \in \mathfrak{R}$ такие, что

$$BAC\psi=\psi.$$

Оператор $BAC \in \mathfrak{M}$, и, кроме того,

$$BACK=K.$$

Стало быть, оператор $K \in \mathfrak{M}$.

Теорема доказана.

Следствие 1.1. *Идеал $\mathfrak{S}_\infty$ является единственным замкнутым двусторонним идеалом кольца $\mathfrak{R}$.*

2. Приведем еще два свойства идеалов кольца $\mathfrak{R}$.

1°. *Если оператор A принадлежит двустороннему идеалу $\mathfrak{M}$ кольца $\mathfrak{R}$, то оператор A^* также принадлежит этому идеалу, иными словами, всякий двусторонний идеал является самосопряженным.*

Пусть полярное представление оператора A имеет вид $A = UH$ $(H = (A^*A)^{1/2})$. Тогда, как уже отмечалось, оператор $H = U^*A \in \mathfrak{M}$, а следовательно, идеалу $\mathfrak{M}$ принадлежит и оператор $A^* = HU^*$.

Если оператор $A \in \mathfrak{R}$ и λ^{-1} — регулярная точка оператора A, то *резольвентой Фредгольма* оператора A называется оператор $A(\lambda)$ $(\in \mathfrak{R})$, определяемый равенством

$$I + \lambda A(\lambda) = (I - \lambda A)^{-1}.$$

Очевидно, при $|\lambda| < |A|^{-1}$ резольвента Фредгольма $A(\lambda)$ допускает разложение

$$A(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j A^{j+1},$$

сходящееся по равномерной норме Из равенства

$$(I + \lambda A(\lambda))(I - \lambda A) = (I - \lambda A)(I + \lambda A(\lambda)) = I$$

следует

$$A(\lambda) = A + \lambda A A(\lambda) = A + \lambda A(\lambda) A.$$

Отсюда непосредственно вытекает предложение.

2°. *Если оператор A принадлежит некоторому двустороннему идеалу $\mathfrak{M}$ кольца $\mathfrak{R}$, то его резольвента Фредгольма $A(\lambda)$ также принадлежит $\mathfrak{M}$.*

§ 2. Симметрично-нормированные идеалы

1. Для определения симметрично-нормированных идеалов кольца $\mathfrak{R}$ понадобится понятие симметричной нормы. Функционал $|X|_s$, определенный на некотором двустороннем идеале $\mathfrak{S}$ кольца $\mathfrak{R}$, называется *симметричной нормой*, если он обладает обычными свойствами нормы:

1) $|X|_s > 0$ $\quad (X \in \mathfrak{S};\ X \neq 0)$;

2) $|\lambda X|_s = |\lambda|\,|X|_s$ $(X \in \mathfrak{S})$, где λ — произвольное комплексное число;

3) $|X+Y|_s \leqslant |X|_s + |Y|_s \qquad (X,\ Y \in \mathfrak{S})$;

и, кроме того,

4) $|AXB|_s \leqslant |A|\,|X|_s\,|B| \qquad (A,\ B \in \mathfrak{R};\ X \in \mathfrak{S})$;

5) для любого одномерного оператора X *)

$$|X|_s = |X| \equiv s_1(X).$$

Очевидно, обычная норма операторов на произвольном идеале $\mathfrak{S}$ является симметричной нормой.

Если в определении симметричной нормы условие 4) заменить условием

4′) $|UX|_s = |XU|_s = |X|_s \quad (X \in \mathfrak{S})$,

где U — произвольный унитарный оператор, то получим определение *инвариантной нормы.*

Всякая симметричная норма является инвариантной **). В самом деле, согласно свойству 4) для любых унитарных операторов U, V будем иметь

$$|UXV|_s \leqslant |X|_s \qquad (X \in \mathfrak{S}).$$

С другой стороны, так как $X = U^{-1}UXVV^{-1}$, то

$$|X|_s \leqslant |UXV|_s.$$

Стало быть,

$$|UXV|_s = |X|_s.$$

Симметричная норма обладает рядом важных свойств.

1°. *Пусть $\mathfrak{S}$ — некоторый двусторонний идеал кольца $\mathfrak{R}$ и пусть на $\mathfrak{S}$ определена симметричная норма. Тогда*

---

*) Легко видеть, что из условия 4) следует, что $|X|_s = a|X|$ для любого одномерного X; здесь $a\,(>0)$ — константа, не зависящая от X. Таким образом, условие 5) является условием «нормировки» нормы со свойством 4).

**) В следующих параграфах будет показано, что это предложение допускает обращение, если идеал $\mathfrak{S}$ — сепарабельный.

для любого оператора $X \in \mathfrak{S}$

$$|X|_s = |X^*|_s = |(XX^*)^{1/2}|_s = |(X^*X)^{1/2}|_s.$$

В самом деле, пусть $X = UH$ — полярное представление оператора X. Тогда

$$|X|_s \leqslant |H|_s.$$

Так как $U^*X = H$, то

$$|H|_s \leqslant |X|_s.$$

Следовательно, $|X|_s = |H|_s$.

Исходя из равенств $X^* = HU^*$ и $X^*U = H$, таким же образом получаем $|X^*|_s = |H|_s$.

Для идеала $\mathfrak{S}$, удовлетворяющего условиям предложения 1°, справедливо также предложение 2°:

2° *Пусть* $X \in \mathfrak{S}$; *тогда* $\mathfrak{S}$ *принадлежит всякий оператор* Y $(\in \mathfrak{S}_\infty)$, *для которого*

$$s_j(Y) \leqslant cs_j(X) \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{2.1}$$

где c — *положительная константа, причем*

$$|Y|_s \leqslant c\,|X|_s. \tag{2.2}$$

В самом деле, если $H_x = (X^*X)^{1/2}$ и $H_y = (Y^*Y)^{1/2}$, то в силу условия (2.1) найдутся унитарный оператор V и неотрицательный оператор A $(\in \mathfrak{R})$ с нормой $|A| \leqslant 1$ такие, что

$$H_y = cAVH_xV^{-1}. \tag{2.3}$$

В качестве оператора V выбирается оператор, отображающий какой-либо ортонормированный базис собственных векторов оператора H_x в соответствующий ортонормированный базис собственных векторов H_y. Из (2.3) следует, что $H_y \in \mathfrak{S}$ и $|H_y|_s \leqslant c\,|H_x|_s$. Отсюда непосредственно вытекает, что $Y \in \mathfrak{S}$ и выполняется соотношение (2.2).

3°. *Для любой симметричной нормы* $|X|_s$, *определенной на некотором идеале* $\mathfrak{S}$, *выполняются соотношения*

$$s_1(X) \leqslant |X|_s \leqslant \sum_j s_j(X) \qquad (X \in \mathfrak{S}).$$

В самом деле, пусть $Y = s_1(X)(\cdot, \varphi)\varphi$, где φ — произвольный орт из $\mathfrak{H}$. Тогда для операторов Y и X выполняются соотношения (2.1) при $c = 1$, и стало быть,

$$s_1(X) = |X| = |Y| = |Y|_s \leqslant |X|_s. \tag{2.4}$$

Пусть

$$X = \sum_j s_j(X)(\cdot, \psi_j)\varphi_j$$

— разложение Шмидта оператора X. Из него на основании свойств 3) и 5) получаем

$$|X|_s \leqslant \sum_j s_j(X).$$

2. *Симметрично-нормированным идеалом* кольца $\mathfrak{R}$ назовем всякий двусторонний идеал $\mathfrak{S}$ кольца $\mathfrak{R}$, в котором определена симметричная норма $|X|_{\mathfrak{S}}$, превращающая $\mathfrak{S}$ в банахово пространство. Сокращенно симметрично-нормированный идеал будем называть *с. н. идеалом* *).

Два с. н. идеала $\mathfrak{S}_{\mathrm{I}}$ и $\mathfrak{S}_{\mathrm{II}}$ назовем *совпадающими поэлементно*, если $\mathfrak{S}_{\mathrm{I}}$ и $\mathfrak{S}_{\mathrm{II}}$ состоят из тех же элементов.

Теорема 2.1. *Если с. н. идеалы $\mathfrak{S}_{\mathrm{I}}$ и $\mathfrak{S}_{\mathrm{II}}$ совпадают поэлементно, то их нормы топологически эквивалентны.*

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество элементов с. н. идеала $\mathfrak{S}_{\mathrm{I}}$ или, что то же самое, с. н. идеала $\mathfrak{S}_{\mathrm{II}}$. Рассмотрим функционал $\|X\|$ $(X \in \mathfrak{S})$, определенный равенством

$$\|X\| = \max\{|X|_{\mathrm{I}}, |X|_{\mathrm{II}}\},$$

где $|X|_{\mathrm{I}} = |X|_{\mathfrak{S}_{\mathrm{I}}}$ и $|X|_{\mathrm{II}} = |X|_{\mathfrak{S}_{\mathrm{II}}}$. Этот функционал обладает всеми свойствами нормы.

Из неравенств

$$|X| \leqslant |X|_{\mathrm{I}} \quad \text{и} \quad |X| \leqslant |X|_{\mathrm{II}} \quad (X \in \mathfrak{S})$$

вытекает, что если последовательность операторов сходится в каждой из норм $|X|_{\mathrm{I}}$ и $|X|_{\mathrm{II}}$, то в любой из

*) Новый подход к изучению с. н. идеалов, основанный на теории категорий, указан в статье Б. С. Митягина и А. С. Шварца [1].

них она имеет один и тот же предел. Отсюда непосредственно следует, что $\mathfrak{S}$ является полным в новой норме $\|X\|$. Рассмотрим тождественное преобразование I как оператор, действующий из пространства $\mathfrak{S}$ с нормой $\|X\|$ в каждое из пространств $\mathfrak{S}_{\mathrm{I}}$ и $\mathfrak{S}_{\mathrm{II}}$. Из определения нормы $\|X\|$ следует, что I является ограниченным оператором с нормой $\leqslant 1$. Но тогда по известной теореме С. Банаха [1] оператор I отображает взаимно непрерывно каждое из пространств $\mathfrak{S}_{\mathrm{I}}$ и $\mathfrak{S}_{\mathrm{II}}$ на пространство $\mathfrak{S}$ с нормой $\|X\|$. Отсюда следует, что каждая из норм $|X|_{\mathrm{I}}$, $|X|_{\mathrm{II}}$ топологически эквивалентна норме $\|X\|$, и стало быть, нормы $|X|_{\mathrm{I}}$ и $|X|_{\mathrm{II}}$ топологически эквивалентны между собой.

3. Из предложения 2° непосредственно следует, что всякая симметричная норма $|X|_s$ зависит только от s-чисел оператора X. (Иными словами, если у двух операторов X_1 и X_2 s-числа совпадают, то совпадают и нормы: $|X_1|_s$ и $|X_2|_s$.)

Таким образом, для всякой симметричной нормы

$$|X|_s = \Phi(s_1(X),\ s_2(X),\ \ldots), \tag{2.5}$$

где $\Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ — функция от неотрицательных переменных ξ_j, обладающая определенными свойствами.

Важным является тот случай, когда $\mathfrak{S}$ совпадает с идеалом конечномерных операторов $\mathfrak{K}$; в этом случае область определения функции (2.5) состоит из всех последовательностей $\{\xi_j\}$ неотрицательных чисел, у которых только конечное число членов отлично от нуля.

Изучению функций $\Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots)$, задающих на идеале $\mathfrak{K}$ симметричные нормы (эти функции будут называться симметрическими нормирующими функциями), посвящен следующий параграф.

§ 3. Симметрические нормирующие функции

1. Пусть c_0 — пространство всех последовательностей $\xi = \{\xi_j\}_1^\infty$ вещественных чисел, стремящихся к нулю. Через $\hat{c}$ обозначим линеал из c_0, состоящий из всех последовательностей с конечным числом ненулевых членов.

Вещественнозначная функция $\Phi(\xi)=\Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots)$, определенная на линеале $\hat{c}$, называется *нормирующей функцией*, если она обладает следующими свойствами:

I) $$\Phi(\xi)>0 \quad (\xi\in\hat{c},\ \xi\neq 0);$$

II) для любого вещественного α

$$\Phi(\alpha\xi)=|\alpha|\Phi(\xi) \quad (\xi\in\hat{c});$$

III) $$\Phi(\xi+\eta)\leqslant\Phi(\xi)+\Phi(\eta) \quad (\xi,\eta\in\hat{c});$$

IV) $$\Phi(1, 0, 0, \ldots)=1.$$

Нормирующая функция $\Phi(\xi)$ называется *симметрической*, если она обладает свойством

V) $$\Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots)= \\ =\Phi(|\xi_{j_1}|, |\xi_{j_2}|, \ldots, |\xi_{j_n}|, 0, 0, \ldots),$$

где $\xi=\{\xi_j\}$ — произвольный вектор из $\hat{c}$, а $j_1, j_2, \ldots, j_n$ — любая перестановка первых n натуральных чисел.

Приведем несколько свойств симметрических нормирующих функций (с. н. функций).

1°. *Если для векторов* $\xi=\{\xi_j\}$, $\eta=\{\eta_j\}\in\hat{c}$ *выполняются соотношения*

$$|\xi_j|\leqslant|\eta_j| \qquad (j=1, 2, \ldots),$$

то

$$\Phi(\xi)\leqslant\Phi(\eta). \tag{3.1}$$

В самом деле, без ограничения общности можно считать координаты ξ_j и η_j неотрицательными. Очевидно, предложение будет доказано, коль скоро оно будет доказано для случая

$$\xi_j=\eta_j\ (j\neq k), \quad \xi_k<\eta_k,$$

где k — произвольное натуральное число. Обозначим через α отношение ξ_k/η_k. Тогда

$$\Phi(\xi)=\Phi(\xi'+\xi'')\leqslant\Phi(\xi')+\Phi(\xi''), \tag{3.2}$$

где

$$\xi'_j = \frac{1+\alpha}{2}\xi_j, \quad \xi''_j = \frac{1-\alpha}{2}\xi_j \qquad (j \neq k)$$

и

$$\xi'_k = \frac{1+\alpha}{2}\eta_k, \quad \xi''_k = -\frac{1-\alpha}{2}\eta_k.$$

Так как

$$\Phi(\xi') = \frac{1+\alpha}{2}\Phi(\eta),$$

а в силу условия V

$$\Phi(\xi'') = \frac{1-\alpha}{2}\Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, -\eta_k, \ldots) = \frac{1-\alpha}{2}\Phi(\eta),$$

то из (3.2) следует соотношение (3.1).

Лемма 3.1 (Фань Цюй [3]). *Пусть* $\xi = \{\xi_j\}$ *и* $\eta = \{\eta_j\} \in \hat{c}$. *Если выполняются соотношения*

$$\xi_1 \geqslant \xi_2 \geqslant \ldots \geqslant 0; \qquad \eta_1 \geqslant \eta_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$$

и

$$\sum_{j=1}^{k}\xi_j \leqslant \sum_{j=1}^{k}\eta_j \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

то для любой симметрической нормирующей функции $\Phi(\xi)$:

$$\Phi(\xi) \leqslant \Phi(\eta).$$

Доказательство этой леммы основано на следующем предложении о векторах n-мерного вещественного пространства.

Пусть векторы $\xi = \{\xi_j\}_1^n$ *и* $\eta = \{\eta_j\}_1^n$ *удовлетворяют условиям*

$$\xi_1 \geqslant \xi_2 \geqslant \ldots \geqslant \xi_n \geqslant 0; \ \eta_1 \geqslant \eta_2 \geqslant \ldots \geqslant \eta_n \geqslant 0 \qquad (3.3)$$

и

$$\sum_{j=1}^{k}\xi_j \leqslant \sum_{j=1}^{k}\eta_j \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (3.4)$$

Тогда вектор ξ *допускает представление*

$$\xi = \sum_{\nu=1}^{N} t_\nu \eta^{(\nu)} \qquad (N = 2^n n!), \qquad (3.5)$$

где $\eta^{(\nu)}$ $(\nu=1, 2, \ldots, N)$ — *все n-мерные векторы, получаемые из* η *перестановками его координат и их умножением на* ± 1, *а* t_ν — *неотрицательные числа с суммой* $\sum_{\nu=1}^{N} t_\nu = 1$.

Иными словами, всякий вектор ξ, удовлетворяющий условиям (3.3) и (3.4), принадлежит выпуклой оболочке системы векторов $\eta^{(\nu)}$.

Это предложение принадлежит А. С. Маркусу [4]. Приводимое доказательство предложено Б. С. Митягиным [1].

Обозначим через G выпуклую оболочку всех векторов $\eta^{(\nu)}$ и допустим, что $\xi \overline{\in} G$. Так как всякое выпуклое тело является пересечением своих опорных полупространств, то найдется такая опорная гиперплоскость тела G, что вектор ξ и тело G лежат по разные стороны от нее. Очевидно, уравнение $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b$ этой гиперплоскости можно записать так, чтобы для любого вектора $\{x_j\}_1^n$ из G выполнялось соотношение

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant b,$$

а для вектора $\xi = \{\xi_j\}$ — соотношение

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \xi_j > b.$$

Среди векторов $\eta^{(\nu)}$ можно выбрать такой вектор $\eta^{(r)} = \{\eta_j^{(r)}\}$, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \eta_j^{(r)} = \sum_{j=1}^{n} a_j^* \eta_j,$$

где $\{a_j^*\}_1^n$ — вектор с компонентами, равными $|a_1|, |a_2|, \ldots \ldots, |a_n|$ и расположенными в невозрастающем порядке. Так как вектор $\eta^{(r)} \in G$, то

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^* \eta_j \leqslant b.$$

Учитывая равенство

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^* \eta_j = \sum_{j=1}^{n} \eta_j a_n^* + \sum_{j=1}^{n-1} (a_j^* - a_{j+1}^*) \sum_{k=1}^{j} \eta_k,$$

получим в силу соотношений (3.4), что

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^* \eta_j \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_j^* \xi_j.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^* \xi_j \leqslant b. \tag{3.6}$$

С другой стороны, из равенства

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^* \xi_j = \sum_{j=1}^{n} a_j^* \xi_n + \sum_{j=1}^{n-1} (\xi_j - \xi_{j+1}) \sum_{k=1}^{j} a_k^*$$

и очевидных соотношений

$$\sum_{j=1}^{k} a_j \leqslant \sum_{j=1}^{k} a_j^* \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

вытекает, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^* \xi_j \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_j \xi_j > b. \tag{3.7}$$

Соотношения (3.6) и (3.7) противоречат друг другу. Предложение доказано.

Доказательство леммы 3.1. Пусть все координаты векторов ξ и η с номерами, большими n, равны нулю. Через $\eta^{(\nu)}$ обозначим векторы из $\hat{c}$ такие, что их первые n координат получены из чисел η_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) перестановкой и умножением на ± 1. Тогда согласно (3.5)

$$\xi = \sum_{\nu} t_\nu \eta^{(\nu)} \quad \text{и} \quad \sum_{\nu} t_\nu = 1, \quad t_\nu \geqslant 0.$$

Так как

$$\Phi(\xi) \leqslant \sum_{\nu} t_\nu \Phi(\eta^{(\nu)}),$$

а $\Phi(\eta^{(\nu)}) = \Phi(\eta)$, то $\Phi(\xi) \leqslant \Phi(\eta)$.

Лемма доказана.

2. Обозначим через $\hat{k}$ конус всех невозрастающих последовательностей из $\hat{c}$, каждая из которых состоит из неотрицательных чисел.

Каждому вектору $\xi=\{\xi_j\}\in\hat{c}$ сопоставим вектор $\xi^*=\{\xi_j^*\}\in\hat{k}$, полагая

$$\xi_j^*=|\xi_{n_j}| \qquad (j=1, 2, \ldots),$$

где n_j $(j=1, 2, \ldots)$ — такая перестановка чисел натурального ряда, что последовательность $\{|\xi_{n_j}|\}$ является невозрастающей.

Так как для любой с. н. функции $\Phi(\xi)$

$$\Phi(\xi)=\Phi(\xi^*) \qquad (\xi\in\hat{c}), \tag{3.8}$$

то с. н. функция $\Phi(\xi)$ однозначно определяется своими значениями на конусе $\hat{k}$. Отсюда следует, что условия I) — V), определяющие с. н. функцию, можно заменить другими эквивалентными условиями, в которых фигурируют только векторы из конуса $\hat{k}$.

Лемма 3.2. *Пусть $\Phi(\xi)$ — функция, определенная на конусе $\hat{k}$. Для того чтобы равенством*

$$\Phi(\xi)=\Phi(\xi^*) \qquad (\xi\in\hat{c}) \tag{3.9}$$

определялась с. н. функция, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

I') $\qquad \Phi(\xi)>0 \qquad (\xi\in\hat{k};\ \xi\neq 0);$

II') *для любого неотрицательного числа* α

$$\Phi(\alpha\xi)=\alpha\Phi(\xi) \qquad (\xi\in\hat{k});$$

III') $\quad \Phi(\xi+\eta)\leqslant\Phi(\xi)+\Phi(\eta) \qquad (\xi, \eta\in\hat{k});$

IV') $\qquad \Phi(1, 0, 0, \ldots)=1;$

V') *если* $\xi=\{\xi_j\}$, $\eta=\{\eta_j\}\in\hat{k}$ *и*

$$\sum_{j=1}^{n}\xi_j\leqslant\sum_{j=1}^{n}\eta_j \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

то

$$\Phi(\xi)\leqslant\Phi(\eta).$$

Доказательство. Всякая с. н. функция $\Phi(\xi)$ согласно определению обладает свойствами I′)—IV′). Кроме того, согласно лемме 3.1 она обладает также свойством V′).

Обратно, пусть функция $\Phi(\xi)$, определенная на конусе $\hat{k}$, удовлетворяет условиям I′)—V′), тогда функция $\Phi(\xi)$, определенная на линеале $\hat{c}$ равенством (3.8), очевидно, обладает всеми свойствами I)—V), за исключением, быть может, свойства III). Докажем, что она обладает и этим свойством. Пусть ξ и η—произвольные векторы из $\hat{c}$ и $\zeta=\xi+\eta$. Легко видеть, что

$$\sum_{j=1}^{n}\zeta_j^*\leqslant\sum_{j=1}^{n}(\xi_j^*+\eta_j^*)\qquad(n=1,\,2,\,\ldots).$$

Следовательно, согласно условию V′)

$$\Phi(\xi+\eta)=\Phi(\zeta^*)\leqslant\Phi(\xi^*+\eta^*).\tag{3.10}$$

С другой стороны, согласно III′)

$$\Phi(\xi^*+\eta^*)\leqslant\Phi(\xi^*)+\Phi(\eta^*).\tag{3.11}$$

Из (3.10) и (3.11) вытекает свойство III).

Лемма доказана.

3. Простейшим примером с. н. функции является функция $\Phi_\infty(\xi)$, определяемая на конусе $\hat{k}$ равенством

$$\Phi_\infty(\xi)=\xi_1\qquad(\xi\in\hat{k}).$$

Другим простым примером с. н. функции является функция $\Phi_1(\xi)$, для которой

$$\Phi_1(\xi)=\sum_j\xi_j\qquad(\xi\in\hat{k}).$$

Очевидно, что

$$\Phi_\infty(\xi)=\max_j|\xi_j|\ \text{ и }\ \Phi_1(\xi)=\sum_j|\xi_j|\qquad(\xi\in\hat{c}).$$

Оказывается, что функции $\Phi_\infty(\xi)$ и $\Phi_1(\xi)$ являются экстремальными с. н. функциями.

2°. *Для любой с. н. функции* $\Phi(\xi)$ *выполняются неравенства*:

$$\xi_1\leqslant\Phi(\xi)\leqslant\sum_j\xi_j\qquad(\xi\in\hat{k}).\tag{3.12}$$

В самом деле, в силу леммы 3.1 для любого вектора

$$\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots\} \in \hat{k},$$
$$\Phi(\xi_1, 0, 0, \ldots) \leqslant \Phi(\xi) \leqslant \Phi\Big(\sum_j \xi_j, 0, 0, \ldots\Big),$$

а следовательно, выполняется неравенство (3.12).

Таким образом, функции $\Phi_\infty(\xi)$ и $\Phi_1(\xi)$ естественно назвать соответственно *минимальной* и *максимальной* с. н. функциями.

3°. *Любая с. н. функция* $\Phi(\xi)$ *непрерывна.*

Это свойство непосредственно вытекает из соотношений

$$|\Phi(\xi) - \Phi(\eta)| \leqslant \Phi(\xi - \eta) \leqslant \sum_j |\xi_j - \eta_j| \qquad (\xi, \eta \in \hat{c}).$$

4. Две с. н. функции $\Phi(\xi)$ и $\Psi(\xi)$ назовем *эквивалентными*, если

$$\sup_{\xi \in \hat{c}} \frac{\Phi(\xi)}{\Psi(\xi)} < \infty \quad \text{и} \quad \sup_{\xi \in \hat{c}} \frac{\Psi(\xi)}{\Phi(\xi)} < \infty.$$

4°. *Для любой с. н. функции* $\Phi(\xi)$ *имеет место соотношение*

$$\sup_{\xi \in \hat{k}} \frac{\Phi(\xi)}{\xi_1} = \sup_n \Phi(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots). \tag{3.13}$$

В частности, для того чтобы с. н. функция $\Phi(\xi)$ *была эквивалентна минимальной, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sup_n \Phi(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots) < \infty. \tag{3.14}$$

В самом деле, с одной стороны,

$$\sup_n \Phi(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots) \leqslant \sup_{\xi \in \hat{k}} \frac{\Phi(\xi)}{\xi_1}. \tag{3.15}$$

С другой стороны, для любого вектора $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots\} \in \hat{k}$

$$\frac{\Phi(\xi)}{\xi_1} = \Phi\left(1, \frac{\xi_2}{\xi_1}, \ldots, \frac{\xi_n}{\xi_1}, 0, 0, \ldots\right) \leqslant$$
$$\leqslant \Phi(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots).$$

Стало быть,

$$\sup_{\xi\in\hat{k}} \frac{\Phi(\xi)}{\xi_1} \leqslant \sup_n \Phi(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots). \tag{3.16}$$

Из (3.15) и (3.16) следует (3.13).

Так как для любой с. н. функции $\Phi(\xi)$

$$\frac{\Phi(\xi)}{\xi_1} \geqslant 1 \quad (\xi\in\hat{k}),$$

то эта функция эквивалентна минимальной в том и только том случае, когда

$$\sup_{\xi\in\hat{k}} \frac{\Phi(\xi)}{\xi_1} < \infty.$$

Последнее условие в силу (3.13) совпадает с условием (3.14).

5° (С. Т. Курода [1]). *Для любой с. н. функции* $\Phi(\xi)$ *имеет место соотношение*

$$\sup_{\xi\in\hat{k}} \left\{ \frac{1}{\Phi(\xi)} \sum_j \xi_j \right\} = \sup_n \frac{n}{\Phi(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots)}. \tag{3.17}$$

В частности, с. н. функции $\Phi(\xi)$ *эквивалентна максимальной в том и только том случае, когда*

$$\sup_n \frac{n}{\Phi(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots)} < \infty. \tag{3.18}$$

Очевидно,

$$\sup_n \frac{n}{\Phi(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots)} \leqslant \sup_{\xi\in\hat{k}} \left\{ \frac{1}{\Phi(\xi)} \sum_j \xi_j \right\}. \tag{3.19}$$

Пусть $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots\}$ — произвольный вектор из $\hat{k}$ и $\eta = \{\eta_j\}$ — вектор, определенный равенствами

$$\eta_1 = \eta_2 = \ldots = \eta_n = \frac{1}{n} \sum_j \xi_j, \quad \eta_{n+j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Тогда легко видеть, что

$$\sum_{j=1}^{p} \eta_j \leqslant \sum_{j=1}^{p} \xi_j \qquad (p=1, 2, \ldots),$$

а следовательно,

$$\Phi(\eta) = \left\{\frac{1}{n}\sum_j \xi_j\right\} \Phi(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots) \leqslant \Phi(\xi)$$

и

$$\frac{1}{\Phi(\xi)} \sum_j \xi_j \leqslant \frac{n}{\Phi(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots)}. \tag{3.20}$$

Из (3.19) и (3.20) следует соотношение (3.17).

Так как для любой с. н. функции $\Phi(\xi)$

$$\frac{1}{\Phi(\xi)} \sum_j \xi_j \geqslant 1 \qquad (\xi \in \hat{k}),$$

то в силу (3.17) условие (3.18) является необходимым и достаточным условием эквивалентности функции $\Phi(\xi)$ максимальной с. н. функции.

5. В этом пункте выясняется связь между с. н. функциями и инвариантными нормами на идеале всех конечномерных операторов $\mathfrak{K}$.

Теорема 3.1. *Имеет место взаимно однозначное соответствие между с. н. функциями $\Phi(\xi)$ на $\hat{k}$ и инвариантными нормами $|A|_{\mathfrak{S}}$ на $\mathfrak{K}$. Именно:*

Пусть $|A|_{\mathfrak{S}}$ — произвольная инвариантная норма на $\mathfrak{K}$. Тогда равенство

$$\Phi(s(A)) = |A|_{\mathfrak{S}} \quad (A \in \mathfrak{K}; \quad s(A) = \{s_j(A)\}) \tag{3.21}$$

определяет некоторую с. н. функцию $\Phi(\xi)$. Обратно, если $\Phi(\xi)$ — произвольная с. н. функция, то равенством

$$|A|_{\Phi} = \Phi(s(A)) \quad (A \in \mathfrak{K}) \tag{3.22}$$

определяется инвариантная норма на $\mathfrak{K}$.

Доказательство. Определение (3.21) функции $\Phi(\xi)$ можно заменить следующим эквивалентным определением:

$$\Phi(\xi) = \left| \sum_j \xi_j (\cdot, \varphi_j) \varphi_j \right|_{\mathfrak{S}} \quad (\xi = \{\xi_j\} \in \hat{k}),$$

где $\{\varphi_j\}_1^\infty$ — произвольный фиксированный ортонормированный базис пространств $\mathfrak{H}$.

Из свойств инвариантной нормы легко вывести, что функция $\Phi(\xi)$ удовлетворяет условиям I)—V) и, стало быть, является с. н. функцией.

Обратно, если $\Phi(\xi)$ — некоторая с. н. функция, то равенством (3.22) определяется некоторый функционал, который, очевидно, обладает свойствами 1) и 2) симметричной нормы. Этот функционал обладает также свойством 3). В самом деле, если операторы A и $B \in \mathfrak{R}$, то согласно лемме II.4.2

$$\sum_{j=1}^n s_j(A+B) \leqslant \sum_{j=1}^n s_j(A) + \sum_{j=1}^n s_j(B),$$

и следовательно, в силу свойства V′) с. н. функции

$$|A+B|_\Phi = \Phi(s(A+B)) \leqslant \Phi(s(A)+s(B)).$$

Так как

$$\Phi(s(A)+s(B)) \leqslant \Phi(s(A)) + \Phi(s(B)),$$

то

$$|A+B|_\Phi \leqslant |A|_\Phi + |B|_\Phi.$$

Условие 4′) также выполняется для функционала $|A|_\Phi$, так как для любых унитарных операторов U и V

$$s_j(VAU) = s_j(A) \qquad (j = 1, 2, \ldots; \ A \in \mathfrak{R}).$$

Наконец, для любого одномерного оператора A

$$s_1(A) = |A|, \quad s_{j+1}(A) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

и стало быть,

$$|A|_\Phi = \Phi(|A|, 0, 0, \ldots) = |A|.$$

Теорема доказана.

Следствие 3.1. *Всякая инвариантная норма на идеале $\mathfrak{R}$ является симметричной нормой на этом идеале.*

В самом деле, пусть $|A|_{\mathfrak{S}}$ — инвариантная норма на $\mathfrak{R}$ и $\Phi(\xi)$ — с. н. функция, порожденная этой нормой. Так как для любых операторов B, $C \in \mathfrak{R}$

$$s_j(BAC) \leqslant |B|\,|C|\, s_j(A) \qquad (A \in \mathfrak{R};\ j = 1, 2, \ldots),$$

то в силу свойств с. н. функций

$$\Phi(s(BAC)) \leqslant \Phi(|B|\,|C|\, s(A)) = |B|\,|C|\,\Phi(s(A)),$$

т. е.

$$|BAC|_{\mathfrak{S}} \leqslant |B|\,|C|\,|A|_{\mathfrak{S}}.$$

§ 4. Симметрично-нормированные идеалы, порожденные симметрическими нормирующими функциями

1. Пусть $\xi = \{\xi_j\}$ — произвольная последовательность действительных чисел и

$$\xi^{(n)} = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots\}.$$

Тогда для любой с. н. функции $\Phi(\xi)$ последовательность $\Phi(\xi^{(n)})$ $(n = 1, 2, \ldots)$ не убывает.

Обозначим через c_Φ множество всех векторов $\xi \in c_0$, для которых

$$\sup_n \Phi(\xi^{(n)}) < \infty.$$

Расширим область определения функции $\Phi(\xi)$, полагая для каждого $\xi \in c_\Phi$

$$\Phi(\xi) = \lim_{n\to\infty} \Phi(\xi^{(n)}).$$

Из определения множества c_Φ и свойств с. н. функции $\Phi(\xi)$ легко следует, что множество c_Φ обладает следующими свойствами:

а) если ξ и $\eta \in c_\Phi$, то $\xi + \eta \in c_\Phi$;

б) если α — произвольное вещественное число и $\xi \in c_\Phi$, то $\alpha\xi \in c_\Phi$;

в) если вектор $\xi = \{\xi_j\} \in c_\Phi$ и для вектора $\eta = \{\eta_j\} \in c_0$ выполняется условие

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_j^* \leqslant \sum_{j=1}^{n} \xi_j^* \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

то вектор η также принадлежит c_Φ.

Из последнего свойства вытекает свойство

г) вектор $\xi=\{\xi_j\}$ принадлежит c_Φ в том и только том случае, когда вектор $\xi^*=\{\xi_j^*\}\in c_\Phi$.

Легко видеть, что и в расширенной области c_Φ с. н. функция $\Phi(\xi)$ сохраняет свои свойства I)—V), или, что то же самое,—свойства I')—V').

Линеал c_Φ назовем *естественной областью определения* с. н. функции $\Phi(\xi)$.

2. Каждой с. н. функции $\Phi(\xi)$ сопоставим множество $\mathfrak{S}_\Phi$ всех операторов $X\in\mathfrak{S}_\infty$, для которых $s(X)=\{s_j(X)\}\in c_\Phi$, и для каждого $X\in\mathfrak{S}_\Phi$ положим:

$$|X|_\Phi=\Phi(s(X)). \tag{4.1}$$

Очевидно, оператор $X\in\mathfrak{S}_\Phi$ в том и только том случае, когда

$$\sup_n |X_n|_\Phi<\infty,$$

где X_n—n-й отрезок ряда Шмидта оператора X, причем

$$|X|_\Phi=\lim_{n\to\infty}|X_n|_\Phi=\Phi(s(X)).$$

Теорема 4.1. *Пусть $\Phi(\xi)$—произвольная с. н. функция. Тогда множество $\mathfrak{S}_\Phi$ является с. н. идеалом с нормой*

$$|A|_\Phi=|A|_{\mathfrak{S}_\Phi}=\Phi(s(A)) \qquad (A\in\mathfrak{S}_\Phi). \tag{4.2}$$

Доказательство. Пусть операторы A_1 и $A_2\in\mathfrak{S}_\Phi$, тогда $s(A_1)+s(A_2)\in c_\Phi$. Согласно теореме II.4.2

$$\sum_{j=1}^n s_j(A_1+A_2)\leqslant\sum_{j=1}^n s_j(A_1)+\sum_{j=1}^n s_j(A_2) \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

и, следовательно, $s(A_1+A_2)\in c_\Phi$, т. е. оператор $A_1+A_2\in\mathfrak{S}_\Phi$ и в силу свойства V')

$$|A_1+A_2|_\Phi\leqslant|A_1|_\Phi+|A_2|_\Phi.$$

Легко видеть, что для любого оператора $A\in\mathfrak{S}_\Phi$ и любого комплексного числа λ оператор $\lambda A\in\mathfrak{S}_\Phi$ и

$$|\lambda A|_\Phi=|\lambda|\,|A|_\Phi.$$

Пространство $\mathfrak{S}_\Phi$ является полным. В самом деле, пусть $\{A_n\}_1^\infty$ — фундаментальная последовательность операторов $\mathfrak{S}_\Phi$. Тогда в силу левой части оценки (3.12)

$$|A_m - A_n| = s_1(A_m - A_n) \leqslant |A_m - A_n|_\Phi$$

и, стало быть, последовательность операторов $\{A_n\}_1^\infty$ сходится по равномерной норме к некоторому вполне непрерывному оператору A.

Для него

$$\lim_{n\to\infty} s_j(A_n) = s_j(A) \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Имеем

$$\Phi(s_1(A_r), s_2(A_r), \ldots, s_n(A_r), 0, 0, \ldots) \leqslant \\ \leqslant \sup_p |A_p|_\Phi (< \infty) \qquad (r = 1, 2, \ldots). \quad (4.3)$$

Так как функция $\Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots)$ непрерывна, то, переходя в (4.3) к пределу при $r \to \infty$, получаем

$$\Phi(s_1(A), s_2(A), \ldots, s_n(A), 0, 0, \ldots) \leqslant \sup_p |A_p|_\Phi \\ (n = 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, оператор $A \in \mathfrak{S}_\Phi$.

Покажем, что последовательность операторов $\{A_n\}_1^\infty$ стремится к оператору A по норме пространства $\mathfrak{S}_\Phi$. Пусть $\varepsilon (> 0)$ — произвольное число и N такое, что для всех $p, q > N$

$$|A_p - A_q|_\Phi < \varepsilon.$$

Тогда

$$\Phi(s_1(A_p - A_q), s_2(A_p - A_q), \ldots, s_n(A_p - A_q), 0, 0, \ldots) < \varepsilon \\ (n = 1, 2, \ldots; p, q > N). \quad (4.4)$$

Принимая во внимание, что

$$\lim_{q\to\infty} s_j(A_p - A_q) = s_j(A_p - A) \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

и переходя в (4.4) к пределу при $q \to \infty$, находим

$$\Phi(s_1(A_p - A), \ldots, s_n(A_p - A), 0, 0, \ldots) \leqslant \varepsilon \\ (n = 1, 2, \ldots; p > N).$$

Отсюда следует:

$$|A_p - A|_\Phi \leqslant \varepsilon \qquad (p > N).$$

Для окончания доказательства теоремы осталось доказать свойство 4) симметричной нормы. Последнее вытекает из доказанных ранее неравенств

$$s_j(BAC) \leqslant |B|\,|C|\,s_j(A) \quad (j = 1, 2, \ldots; \ A \in \mathfrak{S}_\Phi;\ B,\ C \in \mathfrak{R}).$$

Теорема доказана.

Отметим еще одно важное свойство нормы $|A|_\Phi$.

Свойство мажорантности. *Если оператор $A \in \mathfrak{S}_\Phi$, а оператор $B\,(\in \mathfrak{S}_\infty)$ обладает свойством*

$$\sum_{j=1}^{n} s_j(B) \leqslant \sum_{j=1}^{n} s_j(A) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

то оператор $B \in \mathfrak{S}_\Phi$ и $|B|_\Phi \leqslant |A|_\Phi$.

Теорему 4.1 можно дополнить следующим предложением.

1°. *Для того чтобы с. н. идеалы $\mathfrak{S}_{\Phi_1}$ и $\mathfrak{S}_{\Phi_2}$ совпадали поэлементно, необходимо и достаточно, чтобы с. н. функции $\Phi_1(\xi)$ и $\Phi_2(\xi)$ были эквивалентны.*

Достаточность этого условия очевидна, а его необходимость вытекает непосредственно из теоремы 2.1 о топологической эквивалентности норм.

3. Приведем еще несколько предложений о пространствах $\mathfrak{S}_\Phi$, вытекающих из различных теорем, доказанных ранее.

Теорема 4.2. *Пусть A — некоторый оператор из $\mathfrak{S}_\Phi$ и $\{P_j\}_1^\omega$ $(\omega \leqslant \infty)$ — система взаимно ортогональных ортопроекторов. Тогда оператор*

$$\hat{A} = \sum_{j=1}^{\omega} P_j A P_j$$

также принадлежит пространству $\mathfrak{S}_\Phi$, причем

$$|\hat{A}|_\Phi \leqslant |A|_\Phi.$$

В силу свойства IV) с. н. функций эта теорема непосредственно следует из теоремы II.5.1.

Пусть $\{\varphi_j\}_1^\omega$ $(\omega\leqslant\infty)$ — некоторая ортонормированная система, а P_j $(j=1, 2, \ldots, \omega)$ — оператор ортогонального проектирования на направление орта φ_j $(j=1, 2, \ldots, \omega)$. Тогда оператор $\hat{A}$ имеет вид

$$\hat{A}=\sum_{j=1}^{\omega}(A\varphi_j, \varphi_j)(\cdot, \varphi_j)\varphi_j.$$

Предположим, что векторы последовательности $\{\varphi_j\}$ занумерованы так, что последовательность $\{|(A\varphi_j, \varphi_j)|\}_1^\infty$ является невозрастающей. Тогда, очевидно, $s_j(\hat{A})=$ $=|(A\varphi_j, \varphi_j)|$ $(j=1, 2, \ldots)$.

Из теоремы 4.2 следует, что оператор $\hat{A}\in\mathfrak{S}_\Phi$ и

$$\Phi(|(A\varphi_1, \varphi_1)|, |(A\varphi_2, \varphi_2)|, \ldots)\leqslant|A|_\Phi. \tag{4.5}$$

Теорема 4.3. *Если $A\in\mathfrak{S}_\Phi$, то последовательность его собственных чисел $\{\lambda_j(A)\}$ удовлетворяет соотношению*

$$\Phi(|\lambda_1(A)|, |\lambda_2(A)|, \ldots)\leqslant|A|_\Phi \qquad (A\in\mathfrak{S}_\Phi). \tag{4.6}$$

Доказательство. Согласно лемме I.4.1 ортонормированная система $\{\varphi_j\}_1^{\nu(A)}$ может быть выбрана так, чтобы

$$(A\varphi_j, \varphi_j)=\lambda_j(A) \qquad (j=1, 2, \ldots, \nu(A)).$$

После этого соотношение (4.5) принимает вид (4.6).

Теорема 4.4. *Пусть A — линейный ограниченный оператор с мнимой компонентой $A_{\mathcal{J}}\in\mathfrak{S}_\Phi$ и пусть λ_j $(j=1, 2, \ldots, \nu_{\mathcal{J}}(A))$ — система всех невещественных собственных чисел оператора A, перенумерованных как-либо по убыванию абсолютных величин их мнимых частей с учетом алгебраической кратности.*

Тогда

$$\Phi(|\operatorname{Im}\lambda_1|, |\operatorname{Im}\lambda_2|, \ldots)\leqslant|A_{\mathcal{J}}|_\Phi. \tag{4.7}$$

Эта теорема является следствием леммы II.6.1 и свойства IV) функции $\Phi(\xi)$.

§ 5. Критерий принадлежности оператора с. н. идеалу $\mathfrak{S}_\Phi$

1. Ниже будет приведен критерий принадлежности данного оператора пространству $\mathfrak{S}_\Phi$, используемый, в частности, при построении пространств, сопряженных к пространствам $\mathfrak{S}_\Phi$. Для доказательства этого критерия понадобятся две леммы.

Лемма 5.1. *Пусть линейный ограниченный оператор A является слабым пределом последовательности операторов $\{A_n\}_1^\infty$ из $\mathfrak{S}_\infty$, т. е. для любых f и $g \in \mathfrak{H}$*

$$\lim_{n\to\infty} (A_n f, g) = (Af, g).$$

Если

$$\lim_{j\to\infty} \sup_m s_j(A_m) = 0, \tag{5.1}$$

*то оператор A вполне непрерывен и**)

$$\sum_{j=1}^{n} s_j(A) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \sup_m s_j(A_m) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5.2}$$

Доказательство. Пусть разложение Шмидта оператора A_n имеет вид

$$A_n = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A_n)(\cdot, \varphi_j^{(n)})\psi_j^{(n)} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

и пусть

$$T_{n,k} = \sum_{j=1}^{k} s_j(A_n)(\cdot, \varphi_j^{(n)})\psi_j^{(n)}$$

— отрезок этого разложения.

Выберем последовательность индексов n_r $(r = 1, 2, \ldots)$ так, чтобы последовательности чисел $\{s_j(A_{n_r})\}_{r=1}^{\infty}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ сходились, а последовательности векторов $\{\varphi_j^{(n_r)}\}_{r=1}^{\infty}$ и $\{\psi_j^{(n_r)}\}_{r=1}^{\infty}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ были слабо сходящимися. Обозначим пределы этих последовательностей

---

*) Соотношения (5.2) сохраняют силу, если заменить в них числа $\sup\limits_m s_j(A_m)$ числами $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} s_j(A_m)$.

соответственно через s_j, φ_j и ψ_j. Тогда оператор

$$T_k = \sum_{j=1}^{k} s_j(\cdot,\ \varphi_j)\,\psi_j$$

является, очевидно, слабым пределом последовательности операторов $T_{n_r, k}$ $(r = 1,\ 2,\ \ldots)$.

Так как

$$|A_n - T_{n,k}| \leqslant s_{k+1}(A_n) \leqslant \sup_n s_{k+1}(A_n),$$

то

$$|(A_{n_r} f,\ \chi) - (T_{n_r, k} f,\ \chi)| \leqslant \sup_n s_k(A_n) \qquad (|f| = |\chi| = 1).$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $r \to \infty$, получаем

$$|(Af,\ \chi) - (T_k f,\ \chi)| \leqslant \sup_n s_k(A_n) \qquad (|f| = |\chi| = 1),$$

или

$$|A - T_k| \leqslant \sup_n s_k(A_n).$$

Отсюда согласно условию (5.1) следует, что

$$\lim_{k\to\infty} |A - T_k| = 0.$$

Следовательно, оператор A вполне непрерывен.

Выберем унитарный оператор U и ортонормированную систему $\{\chi_j\}_1^n$ так, чтобы

$$(UA\chi_j,\ \chi_j) = s_j(A) \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Согласно лемме II.4.1

$$\left|\sum_{j=1}^{n} (UA_{n_r}\chi_j,\ \chi_j)\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} s_j(A_{n_r}),$$

и стало быть,

$$\left|\sum_{j=1}^{n} (UA_{n_r}\chi_j,\ \chi_j)\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \sup_m s_j(A_m).$$

Переходя в последнем соотношении к пределу при

$n_r \to \infty$, будем иметь

$$\sum_{j=1}^{n} s_j(A) = \sum_{j=1}^{n} (UA\chi_j, \chi_j) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \sup_m s_j(A_m).$$

Лемма доказана.

2. Среди пространств $\mathfrak{S}_\Phi$ имеются пространства, состоящие из всех вполне непрерывных операторов. Таким будет, например, пространство $\mathfrak{S}_F$, порожденное какой-либо из функций

$$F_n(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^* \qquad (\xi = \{\xi_j\} \in c_0),$$

где n — произвольно фиксированное число.

Следующая лемма позволяет выделить эти пространства:

Лемма 5.2. *Пусть $\Phi(\xi)$ — произвольная с. н. функция. Для того чтобы множества $\mathfrak{S}_\Phi$ и $\mathfrak{S}_\infty$ совпадали, необходимо и достаточно, чтобы функция $\Phi(\xi)$ была эквивалентна минимальной с. н. функции, т. е.*

$$\sup_n \Phi(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots) < \infty. \tag{5.3}$$

Ее справедливость сразу же вытекает из предложений 1° § 4 и 4° § 3.

Теорема 5.1. *Пусть $\Phi(\xi)$ — произвольная с. н. функция, не эквивалентная минимальной (т. е. $\mathfrak{S}_\Phi$ и $\mathfrak{S}_\infty$ не совпадают поэлементно).*

Если оператор $A \in \mathfrak{R}$ является слабым пределом последовательности операторов $\{A_m\}_1^\infty$ из $\mathfrak{S}_\Phi$ и выполняется условие

$$\sup_m |A_m|_\Phi < \infty,$$

то оператор A также принадлежит $\mathfrak{S}_\Phi$, причем)*

$$|A|_\Phi \leqslant \sup_m |A_m|_\Phi. \tag{5.4}$$

---

*) Соотношение (5.4) сохраняет силу, если заменить в нем число $\sup |A_m|_\Phi$ числом $\overline{\lim} |A_m|_\Phi$.

Доказательство. Так как

$$s_n(A_m)\,\Phi(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots) \leqslant$$
$$\leqslant \Phi(s_1(A_m), \ldots, s_n(A_m), 0, 0, \ldots) \leqslant M \quad (m, n = 1, 2, \ldots), \tag{5.5}$$

где $M = \sup\limits_m |A_m|_\Phi$, то

$$s_n(A_m) \leqslant \frac{M}{\Phi(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n \text{ раз}}, 0, 0, \ldots)} \qquad (n, m = 1, 2, \ldots).$$

Следовательно, в силу условий теоремы и леммы 5.2

$$\lim_{n\to\infty} \sup_m s_n(A_m) = 0.$$

По лемме 5.1 отсюда вытекает, что оператор A вполне непрерывен.

Выберем последовательность индексов n_r $(r = 1, 2, \ldots)$ так, чтобы последовательности чисел $\{s_j(A_{n_r})\}_{r=1}^\infty$ при $j = 1, 2, \ldots, k$ сходились.

Из соотношения 5.5 следует, что

$$\Phi(s_1, s_2, \ldots, s_k, 0, 0, \ldots) \leqslant M \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

где

$$s_j = \lim_{r\to\infty} s_j(A_{n_r}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

В силу той же леммы 5.1 (см. сноску на стр. 111)

$$\sum_{j=1}^{r} s_j(A) \leqslant \sum_{j=1}^{r} s_j \qquad (r = 1, 2, \ldots, k).$$

Следовательно,

$$\Phi(s_1(A), s_2(A), \ldots, s_k(A), 0, 0, \ldots) \leqslant M \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Последнее означает, что $A \in \mathfrak{S}_\Phi$.

Теорема доказана.

В качестве простого следствия из доказанной теоремы вытекает следующий критерий принадлежности оператора A идеалу $\mathfrak{S}_\Phi$.

Теорема 5.2. *Пусть $\mathfrak{S}_\Phi$ — с. н. идеал, не совпадающий поэлементно с $\mathfrak{S}_\infty$. Пусть, далее, P_n $(n = 1, 2, \ldots)$ —*

монотонно возрастающая последовательность конечномерных ортопроекторов, стремящихся сильно к единичному оператору:

$$\lim_{n\to\infty} |P_n f - f| = 0 \qquad (f \in \mathfrak{H}). \tag{5.6}$$

Тогда для того чтобы оператор $A \in \mathfrak{S}_\Phi$, необходимо и достаточно, чтобы

$$M = \sup_n |P_n A P_n|_\Phi < \infty. \tag{5.7}$$

Замечание 5.1. Для с. н. идеала $\mathfrak{S}_\Phi$, совпадающего поэлементно с $\mathfrak{S}_\infty$, теорема 5.2 не имеет места, так как условие (5.7) в этом случае выполняется для всех ограниченных операторов.

§ 6. Сепарабельные с. н. идеалы

1. Обозначим через $\mathfrak{K}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ множество всех конечномерных операторов размерности $\leqslant n$. Очевидно, $\mathfrak{K} = \bigcup_n \mathfrak{K}_n$.

Лемма 6.1. *Пусть $\Phi(\xi)$ — произвольная с. н. функция и оператор $A \in \mathfrak{S}_\Phi$. Тогда*

$$\min_{K \in \mathfrak{K}_n} |A - K|_\Phi = |A - A_n|_\Phi = \Phi(s_{n+1}(A), \; s_{n+2}(A), \; \ldots) \tag{6.1}$$

и

$$\inf_{K \in \mathfrak{K}} |A - K|_\Phi = \lim_{n\to\infty} \Phi(s_{n+1}(A), \; s_{n+2}(A), \; \ldots), \tag{6.2}$$

где A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — n-й отрезок ряда Шмидта оператора A.

Доказательство. В самом деле, согласно следствию II.2.1

$$s_j(A - K) \geqslant s_{n+j}(A) \qquad (K \in \mathfrak{K}_n; \; n, \; j = 1, 2, \ldots),$$

а следовательно, в силу предложения 2° § 2

$$|A - K|_\Phi \geqslant |A - A_n|_\Phi.$$

Так как знак равенства достигается здесь при $K = A_n$, то соотношение (6.1) доказано.

Соотношение (6.2) непосредственно следует из (6.1). Лемма доказана.

В § 14 будут приведены примеры с. н. идеалов, в которых множество конечномерных операторов неплотно. Это обстоятельство подсказывает необходимость введения подпространства $\mathfrak{S}_\Phi^{(0)}$, являющегося замыканием по норме $\mathfrak{S}_\Phi$ множества $\mathfrak{K}$. В силу леммы 6.1 это подпространство состоит из всех операторов $A \in \mathfrak{S}_\Phi$, для которых

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(s_{n+1}(A),\ s_{n+2}(A),\ \ldots) = 0$$

или

$$\lim_{n,\ p\to\infty} \Phi(s_{n+1}(A),\ s_{n+2}(A),\ \ldots,\ s_{n+p}(A),\ 0,\ 0,\ \ldots) = 0.$$

С. н. функцию $\Phi(\xi)$ назовем *мононормирующей*, если для любого $\xi \in c_\Phi$ выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(\xi_{n+1},\ \xi_{n+2},\ \ldots) = 0$$

или эквивалентное условие

$$\lim_{n,\ p\to\infty} \Phi(\xi_{n+1},\ \xi_{n+2},\ \ldots,\ \xi_{n+p},\ 0,\ 0,\ \ldots) = 0.$$

В силу сказанного выше, пространства $\mathfrak{S}_\Phi$ и $\mathfrak{S}_\Phi^{(0)}$ совпадают в том и только том случае, когда $\Phi(\xi)$ является мононормирующей функцией.

Легко видеть, что минимальная и максимальная с. н. функции являются мононормирующими.

Из леммы 6.1 вытекает, что для мононормирующей функции Φ и для любого оператора A из $\mathfrak{S}_\Phi$ ряд Шмидта сходится к A по норме $|\ \ |_\Phi$.

Всякая с. н. функция, не являющаяся мононормирующей, будет именоваться *бинормирующей*.

Без труда доказывается теорема:

Теорема 6.1. *Подпространство $\mathfrak{S}_\Phi^{(0)}$ является сепарабельным с. н. идеалом кольца $\mathfrak{R}$.*

Доказательство. Покажем сначала, что вместе с оператором A и всякий оператор BAC (B, $C \in \mathfrak{R}$) принадлежит пространству $\mathfrak{S}_\Phi^{(0)}$.

Пусть A_n — n-й отрезок ряда Шмидта оператора A. Операторы BA_nC конечномерны, а следовательно, принадлежат $\mathfrak{S}_\Phi^{(0)}$. Так как

$$|BA_nC - BAC|_\Phi \leqslant |B|\,|C|\,|A_n - A|_\Phi,$$

и $A \in \mathfrak{S}_\Phi^{(0)}$, в силу леммы 6.1 имеем

$$\lim_{n\to\infty} |BA_nC - BAC|_\Phi = 0.$$

Стало быть, оператор $BAC \in \mathfrak{S}_\Phi^{(0)}$.

Пусть $\mathfrak{N}$ — какое-либо счетное множество векторов, плотное в $\mathfrak{H}$, а $\mathfrak{M}$ — множество всех конечномерных операторов вида

$$K = \sum_j (\cdot,\ \chi_j)\,\omega_j,$$

где χ_j и $\omega_j \in \mathfrak{N}$. Очевидно, $\mathfrak{M}$ также является счетным множеством. Для доказательства сепарабельности $\mathfrak{S}_\Phi^{(0)}$ достаточно показать, что $\mathfrak{M}$ плотно в $\mathfrak{K}$ в метрике, порождаемой нормой $\mathfrak{S}_\Phi$, а последнее очевидно.

Теорема доказана.

Теорема 6.2. *Всякий сепарабельный с. н. идеал совпадает с некоторым идеалом* $\mathfrak{S}_\Phi^{(0)}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{S}$ — произвольный сепарабельный с. н. идеал с нормой $|A|_\mathfrak{S}$. На множестве $\mathfrak{K}$ ($\subset \mathfrak{S}$) всех конечномерных операторов норма $|A|_\mathfrak{S}$ порождает инвариантную норму. Следовательно, согласно теореме 3.1 найдется с. н. функция $\Phi(\xi)$ такая, что

$$|A|_\mathfrak{S} = \Phi(s(A)) = |A|_\Phi \quad (A \in \mathfrak{K}).$$

Покажем, что $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_\Phi^{(0)}$. Допустим противное, т. е. что в $\mathfrak{S}$ имеется оператор $B \overline{\in} \mathfrak{S}_\Phi^{(0)}$. Так как для любого конечномерного ортопроектора P

$$|PBP|_\Phi = |PBP|_\mathfrak{S} \leqslant |B|_\mathfrak{S},$$

то согласно теореме 5.2: $B \in \mathfrak{S}_\Phi$.

Так как $B \overline{\in} \mathfrak{S}_\Phi^{(0)}$, то существует $\delta > 0$ такое, что

$$|B - B_n|_\Phi > \delta \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{6.3}$$

где B_n — n-й отрезок ряда Шмидта оператора B:

$$B = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(B)\,(\cdot,\ \varphi_j)\,\psi_j.$$

Из (6.3) следует, что для любого натурального n можно указать такой номер $m > n$, что

$$\Big|\sum_{j=n}^{m} s_j(B)(\cdot,\ \varphi_j)\psi_j\Big|_\Phi > \delta,$$

а отсюда вытекает существование возрастающей последовательности натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ ($n_1 = 1$), для которой нормы операторов

$$C_k = \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} s_j(B)(\cdot,\ \varphi_j)\psi_j$$

превосходят δ:

$$|C_k|_\Phi > \delta \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Каждой последовательности $\alpha = \{\alpha_j\}_1^\infty$, состоящей только из нулей и единиц, сопоставим оператор

$$A_\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j C_j. \tag{6.4}$$

Очевидно, $s_j(A_\alpha) \leqslant s_j(B)$ ($j = 1, 2, \ldots$) и, стало быть, оператор A_α принадлежит пространству $\mathfrak{S}$. Мощность множества всех различных последовательностей $\alpha = \{\alpha_j\}_1^\infty$ ($\alpha_j = 0, 1$) равна мощности континуума. Так как различным последовательностям α' и α'' отвечают различные операторы $A_{\alpha'}$ и $A_{\alpha''}$, то множество $\mathfrak{A}$ всех операторов вида (6.4) также имеет мощность континуума.

Пусть $A_{\alpha'}$ и $A_{\alpha''}$ — два произвольных различных оператора из $\mathfrak{A}$. Тогда оператор $A_{\alpha'} - A_{\alpha''}$ имеет вид

$$A_{\alpha'} - A_{\alpha''} = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j C_j,$$

где не все числа ε_j равны нулю и каждое из них принимает одно из значений -1, 0, 1. Если для некоторого номера r число ε_r равно $+1$ или -1, то, как легко видеть,

$$s_j(A_{\alpha'} - A_{\alpha''}) \geqslant s_j(C_r).$$

Поэтому если $\alpha' \neq \alpha''$, то при некотором r:

$$|A_{\alpha'} - A_{\alpha''}|_{\mathfrak{S}} \geqslant |C_r|_{\mathfrak{S}} = |C_r|_\Phi > \delta.$$

Учитывая, что множество $\mathfrak{A}$ имеет мощность континуума, заключаем, что оно, а вместе с ним и пространство $\mathfrak{S}$, несепарабельны.

Теорема доказана.

Из теоремы 6.2 вытекает

Следствие 6.1. *С. н. идеал $\mathfrak{S}_\Phi$ несепарабелен в том и только том случае, когда функция Φ является бинормирующей, т. е. $\mathfrak{S}_\Phi \neq \mathfrak{S}_\Phi^{(0)}$.*

2. Теорема 6.3. *Пусть X_n $(n=1, 2, \ldots)$ — последовательность операторов из $\mathfrak{R}$, сходящаяся сильно к некоторому оператору X $(\in \mathfrak{R})$.*

Если $\mathfrak{S}$ — какой-либо сепарабельный с. н. идеал и $A \in \mathfrak{S}$, то каждая из последовательностей $\{X_nA\}_1^\infty$, $\{AX_n\}_1^\infty$, $\{X_nAX_n\}_1^\infty$ сходится по норме идеала $\mathfrak{S}$ к соответствующему оператору XA, AX, XAX.

Доказательство. Проведем доказательство для первой из указанных последовательностей. Для двух остальных оно проводится аналогично.

Рассмотрим сначала случай, когда A — конечномерный оператор:

$$A = \sum_{j=1}^{r} (\cdot, \varphi_j)\,\psi_j \qquad (|\varphi_j| = 1).$$

Тогда

$$X_nA - XA = \sum_{j=1}^{r} (\cdot, \varphi_j)\,(X_n\psi_j - X\psi_j)$$

и, стало быть,

$$|X_nA - XA|_{\mathfrak{S}} \leqslant \sum_{j=1}^{r} |X_n\psi_j - X\psi_j|,$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} |X_nA - XA|_{\mathfrak{S}} = 0.$$

В общем случае представим оператор A в виде суммы конечномерного оператора K и малого по $\mathfrak{S}$-норме оператора L. Тогда

$$|X_nA - XA|_{\mathfrak{S}} \leqslant |X_nK - XK|_{\mathfrak{S}} + (|X_n| + |X|)\,|L|_{\mathfrak{S}}. \quad (6.5)$$

Так как

$$\sup_n |X_n| < \infty,$$

то второе слагаемое в правой части (6.5) можно сделать сколь угодно малым за счет малости $|L|_{\mathfrak{S}}$, а первое слагаемое из правой части соотношения (6.5) по доказанному стремится к нулю при $n \to \infty$.

Теорема доказана.

§ 7. Симметрично-нормированные идеалы $\mathfrak{S}_p$

1. Рассмотрим функцию

$$\Phi_p(\xi) = \Big(\sum_j |\xi_j|^p\Big)^{1/p} \qquad (0 < p \leqslant \infty;\ \xi \in \hat{c}). \tag{7.1}$$

При $p = \infty$ равенству (7.1), как обычно, придается следующий смысл:

$$\Phi_\infty(\xi) = \max_j |\xi_j|.$$

Функция $\Phi_p(\xi)$, очевидно, удовлетворяет условиям I), II), IV), V), определяющим с. н. функцию, а при $p \geqslant 1$ она удовлетворяет также условию III).

Таким образом, при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ функция $\Phi_p(\xi)$ является с. н. функцией. Легко видеть, что ее естественная область определения c_{Φ_p} совпадает с l_p, т. е. состоит из всех последовательностей $\xi = \{\xi_j\}_1^\infty \in c_0$, для которых

$$\sum_j |\xi_j|^p < \infty.$$

Очевидно, для любой последовательности $\xi = \{\xi_j\}_1^\infty \in l_p$

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^p\Big)^{1/p} = 0,$$

а следовательно, функция $\Phi_p(\xi)$ является мононормирующей при $1 \leqslant p < \infty$. При $p = \infty$ функция $\Phi_p(\xi) = \max_j |\xi_j|$, как мы уже отмечали, также является мононормирующей.

В качестве следствия из предыдущих теорем получаем следующее предложение.

Теорема 7.1. *Совокупность $\mathfrak{S}_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, состоящая из всех вполне непрерывных операторов A, для* *которых*

$$\sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(A) < \infty, \tag{7.2}$$

является сепарабельным с. н. идеалом с нормой

$$|A|_p = |A|_{\Phi_p} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(A)\right)^{1/p}. \tag{7.3}$$

Множество всех конечномерных операторов плотно в $\mathfrak{S}_p$ *и*

$$\min_{K \in \mathfrak{K}_n} |A - K|_p = \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} s_j^p(A)\right)^{1/p} \quad (A \in \mathfrak{S}_p;\ n = 1, 2, \ldots).$$

2. В дальнейшем сохраним обозначение $\mathfrak{S}_p$ также для класса всех вполне непрерывных операторов A, для которых выполняется условие (7.2) при $0 < p < 1$. При этом $|A|_p$ будет также определяться равенством (7.3). Заметим, что в этом случае функция $|A|_p$ уже не обладает свойствами нормы.

Отметим некоторые свойства классов $\mathfrak{S}_p$.

1°. *Если* $0 < p_1 < p_2 \leqslant \infty$ *и* $A \in \mathfrak{S}_{p_1}$, *то* $A \in \mathfrak{S}_{p_2}$

$$|A|_{p_2} \leqslant |A|_{p_1}. \tag{7.4}$$

Это свойство вытекает из того, что функция

$$f(p) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} s_j^p\right)^{1/p} \qquad (0 < p \leqslant \infty,\ s_j > 0)$$

является невозрастающей.

2°. *Если операторы* A_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *принадлежат соответственно пространствам* $\mathfrak{S}_{p_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *и* $\sum_{j=1}^{n} p_j^{-1} \leqslant 1$, *то оператор* $A = A_1 A_2 \ldots A_n$ *принадлежит пространству* $\mathfrak{S}_p$, *где* $p^{-1} = \sum_{j=1}^{n} p_j^{-1}$, *причем*

$$|A|_p \leqslant |A_1|_{p_1} |A_2|_{p_2} \ldots |A_n|_{p_n}. \tag{7.5}$$

В частности, если $A \in \mathfrak{S}_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ *и* $B \in \mathfrak{S}_q$, *где* $p^{-1}+q^{-1}=1$, *то* AB, $BA \in \mathfrak{S}_1$ *и*

$$|AB|_1 \leqslant |A|_p |B|_q, \quad |BA|_1 \leqslant |A|_p |B|_q.$$

В самом деле, полагая в теореме II.4.2 $f(x)=x^p$, получаем

$$|A|_p \leqslant \Big(\sum_j s_j^p(A_1)\, s_j^p(A_2) \ldots s_j^p(A_n)\Big)^{1/p}. \tag{7.6}$$

С другой стороны, согласно обобщенному неравенству Гельдера

$$\Big(\sum_j (s_j(A_1)\, s_j(A_2) \ldots s_j(A_n))^p\Big)^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant \Big(\sum_j s_j^{p_1}(A_1)\Big)^{1/p_1} \ldots \Big(\sum_j s_j^{p_n}(A_n)\Big)^{1/p_n}.$$

3°. *Если оператор* $A \in \mathfrak{S}_p$ $(p>0)$, *то для любого натурального* r *оператор* $A^r \in \mathfrak{S}_{p/r}$, *причем*

$$|A^r|_{p/r} \leqslant (|A|_p)^r.$$

Это предложение вытекает из следствия II.4.2. Для случая натурального p и $r=2$ оно было указано Фань Цюем [1].

3. В этом пункте приведем уточнения предложений из п. 3 § 4 для случая $\mathfrak{S}_\Phi = \mathfrak{S}_p$.

4°. *Если оператор* $A \in \mathfrak{S}_p$ $(p>0)$, *то*

$$\sum_{j=1}^{\nu(A)} |\lambda_j(A)|^p \leqslant (|A|_p)^p, \tag{7.7}$$

знак равенства в соотношении (7.7) *имеет место в том и только том случае, когда оператор* A *нормален.*

Это предложение является следствием теоремы II.3.1.

Замечание 7.1. Для $p=2$ предложение 4° было впервые получено И. Шуром, который нашел для него элементарное доказательство (см. § 9, теорему 9.1).

Неравенство (7.7) весьма элементарно может быть установлено также и для случая $p=1$ (см. сноску на стр. 128).

Непосредственным следствием неравенства (7.7) для $p=1$ является утверждение:

Если B и $C \in \mathfrak{S}_2$, то

$$\sum_j |\lambda_j(BC)| < \infty. \tag{7.8}$$

В самом деле, в этом случае оператор $A=BC\in\mathfrak{S}_1$ (кстати, отметим, что если B и C пробегают все $\mathfrak{S}_2$, то, как легко видеть, A пробегает все $\mathfrak{S}_1$).

Любопытно, что в свое время установление неравенства (7.8) *) потребовало усилий нескольких математиков: после работ Т. Лалеско, С. А. Георгиу его окончательно доказали (далеко не простым методом) Э. Хилле и Я. Д. Тамаркин в интересном мемуаре [1].

5°. *Если $A\in\mathfrak{S}_p$ $(1\leqslant p<\infty)$ и $\{\varphi_j\}_1^\omega$ $(\omega\leqslant\infty)$ — некоторая ортонормированная система, то*

$$\sum_{j=1}^{\omega} |(A\varphi_j,\ \varphi_j)|^p \leqslant (|A|_p)^p. \tag{7.9}$$

При $p>1$ знак равенства в (7.7) будет иметь место в том и только том случае, когда оператор A нормален и, более того,

$$A=\sum_{j=1}^{\omega} t_j(\cdot,\ \varphi_j)\varphi_j, \qquad t_j=(A\varphi_j,\ \varphi_j).$$

Эта теорема получается как следствие утверждений п. 3 § 4 гл. II в применении к функции $f(x)=x^p$.

Для $p=1$ условия, при выполнении которых в (7.9) имеет место знак равенства, будут выяснены в следующем параграфе.

Предложение 5° допускает следующее обобщение.

6°. *Пусть оператор $A\in\mathfrak{S}_p$ $(1\leqslant p<\infty)$ и $\{P_j\}_1^\omega$ $(\omega\leqslant\leqslant\infty)$ — система взаимно ортогональных ортопроекторов. Тогда*

$$\left|\sum_{j=1}^{\omega} P_jAP_j\right|_p = \left(\sum_{j=1}^{\omega} |P_jAP_j|_p^p\right)^{1/p} \leqslant |A|_p,$$

*) И, вместе с тем, без уточнения того что в правой части (7.8) вместо ∞ можно поставить $|BC|_1$ или хотя бы $|B|_2|C|_2$ $(\geqslant |BC|_1)$.

причем при $p>1$ знак равенства в этом соотношении имеет место в том и только том случае, когда

$$A=\sum_{j=1}^{\omega} P_j A P_j.$$

Это предложение легко получается из общей теоремы II.5.2.

Отметим еще следующее предложение, являющееся простым следствием теоремы II.6.1.

7°. *Пусть A — линейный ограниченный оператор с компонентой $A_{\mathcal{J}}\in\mathfrak{S}_p$ $(1\leqslant p<\infty)$. Тогда*

$$\sum_{j=1}^{\nu_{\mathcal{J}}(A)} |\operatorname{Im}\lambda_j|^p\leqslant(|A_{\mathcal{J}}|_p)^p. \tag{7.10}$$

При $p>1$ знак равенства имеет место в том и только том случае, когда оператор A нормален.

В § 2 гл. V будет показано, что равенство

$$\sum_{j=1}^{\nu_{\mathcal{J}}(A)} |\operatorname{Im}\lambda_j|=|A_{\mathcal{J}}|_1$$

является достаточным условием полноты системы корневых векторов оператора A.

Если оператор $A\in\mathfrak{S}_p$ $(1\leqslant p<\infty)$, то, кроме (7.10), имеет место соотношение

$$\sum_{j=1}^{\nu(A)} |\operatorname{Re}\lambda_j(A)|^p\leqslant(|A_{\mathfrak{R}}|_p)^p. \tag{7.11}$$

Заметим, что неравенство И. Шура (неравенство (7.7) с $p=2$) содержится как следствие в соотношениях (7.10) и (7.11) при $p=2$.

8°. *Если оператор $A\in\mathfrak{S}_p$ $(p>0)$, то*

$$s_n(A)=o(n^{-1/p}). \tag{7.12}$$

Это соотношение вытекает непосредственно из соотношения $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=0$, которое выполняется для всякого сходящегося ряда $\sum\limits_n a_n$ с невозрастающими положительными членами.

Очевидно, что не все операторы $A \in \mathfrak{S}_\infty$, для которых выполняется условие (7.12) с данным $p (> 0)$ принадлежат $\mathfrak{S}_p$; однако при $p > 1$ все такие операторы образуют некоторый с. н. идеал (см. § 14).

Приведем без доказательства еще следующий матричный критерий.

Если для оператора $A \in \mathfrak{R}$ при некотором ортонормированном базисе $\{\varphi_j\}_1^\infty$ и $p \leqslant 2$ выполняется по крайней мере одно из условий

$$\sum_{j=1}^\infty |A\varphi_j|^p < \infty, \quad \sum_{j,\,k=1}^\infty |(A\varphi_j,\ \varphi_k)|^p < \infty,$$

то оператор $A \in \mathfrak{S}_p$, причем

$$|A|_p^p \leqslant \sum_{j=1}^\infty |A\varphi_j|^p \leqslant \sum_{j,\,k=1}^\infty |(A\varphi_j,\ \varphi_k)|^p.$$

С другой стороны, если $A \in \mathfrak{S}_p$ при $p \geqslant 2$, то для любого ортонормированного базиса $\{\varphi_j\}_1^\infty$ пространства $\mathfrak{H}$

$$\sum_{j,\,k=1}^\infty |(A\varphi_j,\ \varphi_k)|^p \leqslant \sum_{j=1}^\infty |A\varphi_j|^p \leqslant |A|_p^p.$$

Для случая $p=1$ первая часть этого предложения была указана В. Ф. Стайнспрингом [1] (см. также И. М. Гельфанд и Н. Я. Виленкин [1]). В общем случае оно получено И. Ц. Гохбергом и А. С. Маркусом [2, 3] (см. также Н. Данфорд и Дж. Т. Шварц [2], стр. 1116).

§ 8. Ядерные операторы

В дальнейшем оператор A будет называться *ядерным*, если он принадлежит $\mathfrak{S}_1$, т. е. если

$$\sum_j s_j(A) < \infty.$$

Ниже будет дана другая характеристика ядерного оператора, которая позволит ввести для таких операторов понятие следа.

1. Условимся говорить, что линейный ограниченный оператор A, действующий в $\mathfrak{H}$, имеет *конечный матричный след*, если для любого ортонормированного базиса

$\{\varphi_j\}_1^\infty$ пространства $\mathfrak{H}$ ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} (A\varphi_j, \varphi_j) \tag{8.1}$$

сходится.

Так как любая перестановка ортонормированного базиса превращает его снова в ортонормированный базис, то для оператора A с конечным матричным следом ряд (8.1) сходится абсолютно, каков бы ни был ортонормированный базис $\{\varphi_j\}_1^\infty$.

Лемма 8.1. *Пусть H — линейный ограниченный неотрицательный оператор. Тогда сумма*

$$\sum_{j=1}^{\infty} (H\chi_j, \chi_j) \tag{8.2}$$

имеет одно и то же значение (конечное или бесконечное), каков бы ни был ортонормированный базис $\{\chi_j\}_1^\infty$ пространства $\mathfrak{H}$. Оператор H принадлежит $\mathfrak{S}_1$ тогда и только тогда, когда это значение конечно.

Доказательство. Если для некоторого ортонормированного базиса $\{\chi_j\}_1^\infty$ сумма (8.2) конечна, то из соотношений

$$|H^{1/2}f - \sum_{j=1}^{n} (f, \chi_j) H^{1/2}\chi_j| = |\sum_{j=n+1}^{\infty} (f, \chi_j) H^{1/2}\chi_j| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=n+1}^{\infty} |H^{1/2}\chi_j| \, |(f, \chi_j)| \leqslant \Big(\sum_{j=n+1}^{\infty} |H^{1/2}\chi_j|^2\Big)^{1/2} |f|$$

и

$$\sum_{j=1}^{\infty} |H^{1/2}\chi_j|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (H\chi_j, \chi_j) < \infty$$

следует, что последовательность конечномерных операторов

$$K_n = \sum_{j=1}^{n} (\cdot, \chi_j) H^{1/2}\chi_j \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

сходится по равномерной норме к оператору $H^{1/2}$. Стало быть, оператор $H^{1/2}$, а с ним и оператор H вполне непрерывны.

Для всякого другого ортонормированного базиса $\{\varphi_j\}_1^\infty$ будем иметь:

$$\sum_{k=1}^\infty |H^{1/2}\chi_k|^2 = \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |(H^{1/2}\chi_k, \varphi_j)|^2 = \sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty |(H^{1/2}\varphi_j, \chi_k)|^2$$

и

$$\sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty |(H^{1/2}\varphi_j, \chi_k)|^2 = \sum_{j=1}^\infty |H^{1/2}\varphi_j|^2 = \sum_{j=1}^\infty (H\varphi_j, \varphi_j),$$

так что

$$\sum_{j=1}^\infty (H\varphi_j, \varphi_j) = \sum_{j=1}^\infty (H\chi_j, \chi_j). \tag{8.3}$$

В частности, выбирая в качестве $\{\varphi_j\}_1^\infty$ полную ортонормированную систему собственных векторов оператора H, получаем из (8.3)

$$\sum_j \lambda_j(H) = \sum_{j=1}^\infty (H\chi_j, \chi_j) < \infty,$$

т. е. оператор $H \in \mathfrak{S}_1$. Лемма доказана.

Теорема 8.1. *Для того чтобы линейный ограниченный оператор A имел конечный матричный след, необходимо и достаточно, чтобы он был ядерным. Если $A \in \mathfrak{S}_1$, то сумма*

$$\sum_{j=1}^\infty (A\chi_j, \chi_j)$$

не зависит от выбора ортонормированного базиса $\{\chi_j\}_1^\infty$ пространства $\mathfrak{H}$.

Эта сумма обозначается через $\operatorname{sp} A$ и называется (*матричным*) *следом* оператора A.

Доказательство. Докажем сначала достаточность условий теоремы. Пусть оператор $A \in \mathfrak{S}_1$ и

$$A = \sum_{j=1}^\infty s_j(\cdot, \varphi_j)\psi_j \qquad (s_j = s_j(A);\ j = 1, 2, \ldots) \tag{8.4}$$

— его разложение в ряд Шмидта.

Обозначим через $\{\chi_j\}_1^\infty$ произвольный ортонормированный базис пространства $\mathfrak{H}$.

Тогда согласно неравенству (7.9)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(A\chi_k, \chi_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} s_k(A),$$

и, стало быть, оператор A имеет конечный матричный след.

Стоит отметить, что в рассматриваемом случае последнее неравенство непосредственно получается с помощью соотношений

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(A\chi_k, \chi_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} s_j |(\chi_k, \varphi_j)| |(\psi_j, \chi_k)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} s_j \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |(\chi_k, \varphi_j)|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |(\psi_j, \chi_k)|^2\Big)^{1/2} = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A)^{*}). \tag{8.5}$$

Согласно (8.4)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (A\chi_k, \chi_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} s_j (\chi_k, \varphi_j)(\psi_j, \chi_k) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} s_j \sum_{k=1}^{\infty} (\chi_k, \varphi_j)(\psi_j, \chi_k),$$

и так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\chi_k, \varphi_j)(\psi_j, \chi_k) = (\psi_j, \varphi_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty} (A\chi_k, \chi_k) = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A)(\psi_j, \varphi_j).$$

Левая часть этого соотношения не зависит, таким образом, от выбора базиса χ_j.

Перейдем к доказательству необходимости условий теоремы. Рассмотрим сначала случай, когда оператор

---

*) В частности, если в качестве χ_k выбрать ортонормированную систему Шура, то неравенство (8.5) даст:

$$\sum_j |(A\omega_j, \omega_j)| = \sum_j |\lambda_j(A)| \leqslant |A|_1,$$

что нам уже известно из (7 7); см. также замечание 7.1.

$A\,(\in \mathfrak{R})$, имеющий конечный матричный след, является самосопряженным. Обозначим через $E(\lambda)$ спектральную функцию оператора A. Как известно, подпространства $E(0)\,\mathfrak{H} = \mathfrak{L}_-$ и $(I - E(0))\,\mathfrak{H} = \mathfrak{L}_+$ являются инвариантными относительно оператора A, причем оба оператора $A_- = AE(0)$ и $A_+ = -A(I - E(0))$ неотрицательны.

Обозначим через $\{\omega_j\}$ и $\{\psi_j\}$ ортонормированные базисы соответственно подпространств $\mathfrak{L}_+$ и $\mathfrak{L}_-$. Из конечности матричного следа оператора A вытекает:

$$\sum_{j=1}^{\infty} (A_+\omega_j,\ \omega_j) < \infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty} (A_-\psi_j,\ \psi_j) < \infty,$$

следовательно, в силу леммы 8.1 A_+, $A_- \in \mathfrak{S}_1$. Так как $A = A_+ - A_-$, то и $A \in \mathfrak{S}_1$.

Рассмотрим общий случай. Пусть $A\,(\in \mathfrak{R})$ — произвольный оператор с конечным матричным следом. Вместе с ним имеет, очевидно, конечный матричный след и сопряженный оператор A^*, а следовательно, и эрмитовы компоненты:

$$A_{\mathscr{R}} = \frac{1}{2}(A + A^*), \ A_{\mathscr{J}} = \frac{1}{2i}(A - A^*).$$

Стало быть, в силу доказанного ранее $A_{\mathscr{R}}$, $A_{\mathscr{J}} \in \mathfrak{S}_1$, а значит, и $A = A_{\mathscr{R}} + iA_{\mathscr{J}} \in \mathfrak{S}_1$.

Теорема доказана.

2. Известно, что для операторов в конечномерном пространстве функционал $\operatorname{sp} A$ обладает следующими свойствами:

1) $\operatorname{sp}(\alpha A + \beta B) = \alpha \operatorname{sp} A + \beta \operatorname{sp} B$;

2) $\operatorname{sp} A^* = \overline{\operatorname{sp} A}$;

3) $\operatorname{sp}(AB) = \operatorname{sp}(BA)$;

4) $\operatorname{sp}(S^{-1}AS) = \operatorname{sp} A$;

5) $\operatorname{sp} A = \sum\limits_{1}^{\nu(A)} \lambda_j(A)$.

Эти свойства обобщаются на бесконечномерный случай. Первые два свойства для операторов A, $B \in \mathfrak{S}_1$ очевидны.

Теорема 8.2. *Если операторы* $A\,(\in\mathfrak{S}_\infty)$ *и* $B\,(\in\mathfrak{R})$ *обладают тем свойством, что* $AB\in\mathfrak{S}_1$ *и* $BA\in\mathfrak{S}_1$, *то*

$$\operatorname{sp}(AB)=\operatorname{sp}(BA). \tag{8.6}$$

В частности, если $A\in\mathfrak{S}_p$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$, *а* $B\in\mathfrak{S}_q$ $(p^{-1}+q^{-1}=1)$, *то имеет место* (8.6).

Доказательство. В самом деле, пусть

$$A=\sum_{j=1}^{\infty}s_j(\cdot,\ \varphi_j)\,\psi_j$$

— разложение Шмидта оператора A.

Тогда

$$BA=\sum_{j=1}^{\infty}s_j(\cdot,\ \varphi_j)\,B\psi_j$$

и

$$\operatorname{sp}(BA)=\sum_{j=1}^{\infty}(BA\varphi_j,\ \varphi_j)=\sum_{j=1}^{\infty}s_j(B\psi_j,\ \varphi_j). \tag{8.7}$$

С другой стороны,

$$AB=\sum_{j=1}^{\infty}s_j(\cdot,\ B^*\varphi_j)\,\psi_j$$

и

$$\operatorname{sp}(AB)=\sum_{j=1}^{\infty}(AB\psi_j,\ \psi_j)=\sum_{j=1}^{\infty}s_j(B\psi_j,\ \varphi_j). \tag{8.8}$$

Сопоставляя (8.7) и (8.8), получаем (8.6).

Следствие 8.1. *Если оператор* $A\in\mathfrak{S}_1$, *а* $S\,(\in\mathfrak{R})$ — *обратимый оператор, то*

$$\operatorname{sp}(S^{-1}AS)=\operatorname{sp}A.$$

Действительно, в силу (8.6)

$$\operatorname{sp}(S^{-1}AS)=\operatorname{sp}(ASS^{-1})=\operatorname{sp}A.$$

Теорема 8.3. *Если* A *и* B — *самосопряженные операторы, причем один из них вполне непрерывен, и произведение* $AB\in\mathfrak{S}_1$, *то* $\operatorname{sp}(AB)$ *является вещественным числом. Если, кроме того, операторы* A *и* B *неотрицательны, то*

$$\operatorname{sp}(AB)\geqslant 0, \tag{8.9}$$

причем $\operatorname{sp}(AB)$ *обращается в нуль тогда и только тогда, когда операторы* A *и* B *ортогональны, т. е.*

$$AB = BA = 0.$$

Доказательство. Пусть B — вполне непрерывный оператор и

$$B = \sum_{j=1}^{r(B)} \lambda_j(\cdot,\ e_j)\, e_j \quad (\lambda_j = \lambda_j(B))$$

—его спектральное разложение. Тогда

$$AB = \sum_{j=1}^{r(B)} \lambda_j(\cdot,\ e_j)\, Ae_j$$

и

$$\operatorname{sp}(AB) = \sum_{j=1}^{r(B)} (ABe_j,\ e_j) = \sum_{j=1}^{r(B)} \lambda_j (Ae_j,\ e_j). \qquad (8.10)$$

Следовательно, $\operatorname{sp}(AB)$ — вещественное число. Если операторы A и B неотрицательны, то

$$\lambda_j > 0 \text{ и } (Ae_j,\ e_j) \geqslant 0 \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ r(B)) \qquad (8.11)$$

и, стало быть, выполняется неравенство (8.9).

Если $\operatorname{sp}(AB) = 0$, то из (8.10) и (8.11) следует, что $(Ae_j,\ e_j) = 0$. В силу неотрицательности оператора A отсюда следуют равенства $Ae_j = 0$ $(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ r(B))$. Последнее означает, что $AB = 0$ и $BA = (AB)^* = 0$.

Теорема доказана.

Замечание 8.1. Обратим внимание на то, что само определение неотрицательности оператора $A \in \mathfrak{R}$ может быть записано в виде $\operatorname{sp}(AK) > 0$, где K — произвольный неотрицательный одномерный оператор.

В самом деле, если $K = (\cdot,\ \varphi)\,\varphi$, то $\operatorname{sp}(AK) = (A\varphi,\ \varphi)$.

3. Хотя операторы класса $\mathfrak{S}_1$ привлекали внимание математиков сравнительно давно, следующее их фундаментальное свойство было обнаружено лишь в 1958 г.

Теорема 8.4 (В. Б. Лидский [6]). *Если оператор* $A \in \mathfrak{S}_1$, *то матричный след оператора* A *совпадает с его спектральным следом*:

$$\operatorname{sp} A = \sum_{j=1}^{\nu(A)} \lambda_j(A).$$

Доказательство*). Докажем сначала, что если оператор A вольтерров, то $\operatorname{sp} A = 0$. Пусть P_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — возрастающая последовательность конечномерных ортопроекторов, сильно сходящаяся к единичному оператору, пусть $\dim \mathfrak{R}(P_n) = n$ и пусть $\lambda_j^{(n)} = \lambda_j(P_nAP_n)$ $(j = 1, 2, \ldots, n;$ $n = 1, 2, \ldots)$. Введем функции $D_n(\lambda)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, полагая

$$D_n(\lambda) = \prod_{j=1}^{n} (1 - \lambda\lambda_j^{(n)}).$$

Логарифмическая производная функции $D_n(\lambda)$ имеет вид:

$$\frac{D_n'(\lambda)}{D_n(\lambda)} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j^{(n)}}{1-\lambda\lambda_j^{(n)}};$$

следовательно, при $|\lambda\lambda_1^{(n)}| < 1$

$$\frac{D_n'(\lambda)}{D_n(\lambda)} = -\sum_{j=1}^{\infty} S_j^{(n)}\lambda^{j-1},$$

где

$$S_j^{(n)} = \operatorname{sp}[(P_nAP_n)^j] = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k^{(n)})^j \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Из соотношений

$$\left|\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j^{(n)})^k\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j^{(n)}|^k \leqslant |\lambda_1^{(n)}|^{k-1} \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j^{(n)}| \leqslant |A|_1 |\lambda_1^{(n)}|^{k-1}$$

вытекает, что

$$\left|\frac{D_n'(\lambda)}{D_n(\lambda)} - \operatorname{sp} A\right| \leqslant |S_1^{(n)} - \operatorname{sp} A| + \frac{\varepsilon_n |\lambda| |A|_1}{1-\varepsilon_n|\lambda|}, \tag{8.12}$$

где $\varepsilon_n = |\lambda_1^{(n)}|$.

Так как оператор A вольтерров и операторы P_nAP_n стремятся к A по равномерной норме, то согласно

*) Приводимое доказательство проще первоначального, оно выработано совместно с автором теоремы. Для ясности след конечной матрицы обозначается ниже sp.

теореме I.4.2

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = \lim_{n\to\infty} |\lambda_1^{(n)}| = 0.$$

Кроме того, по определению следа,

$$\lim_{n\to\infty} S_1^{(n)} = \operatorname{sp} A.$$

Таким образом, в силу (8.12) последовательность функций $\frac{D_n'(\lambda)}{D_n(\lambda)}$ $(n=1, 2, \ldots)$ сходится к $a = \operatorname{sp} A$ равномерно в любой ограниченной области:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_n'(\lambda)}{D_n(\lambda)} = \operatorname{sp} A = a. \tag{8.13}$$

Интегрируя равенство (8.13), получим

$$\lim_{n\to\infty} D_n(\lambda) = e^{a\lambda}. \tag{8.14}$$

Оценим теперь функцию $D_n(\lambda)$ и ее предел при $n \to \infty$ из других соображений. Очевидно,

$$|D_n(\lambda)| \leqslant \prod_{j=1}^{n} (1 + |\lambda_j^{(n)}|\,|\lambda|).$$

В силу неравенств следствия II.3.1

$$\prod_{j=1}^{n} (1 + |\lambda_j^{(n)}|\,|\lambda|) \leqslant \prod_{j=1}^{n} (1 + s_j^{(n)}|\lambda|) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $s_j^{(n)} = s_j(P_n A P_n)$, и стало быть:

$$D_n(\lambda) \leqslant \prod_{j=1}^{n} (1 + s_j^{(n)}|\lambda|).$$

Учитывая, что $s_j^{(n)} \leqslant s_j = s_j(A)$, получаем

$$|D_n(\lambda)| \leqslant \prod_{j=1}^{\infty} (1 + s_j|\lambda|) \leqslant \prod_{j=1}^{N} (1 + s_j|\lambda|)\, e^{|\lambda| \sum\limits_{j=N+1}^{\infty} s_j}$$

$$(n = 1, 2, \ldots). \tag{8.15}$$

Допустим, что $a = \operatorname{sp} A \neq 0$; тогда, положив

$$\lambda = \varrho e^{-i \arg a} \qquad (0 < \varrho < \infty)$$

и выбрав N так, чтобы

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} s_j < \frac{|a|}{2},$$

получим из (8.14) и (8.15)

$$e^{\rho\frac{|a|}{2}} \leqslant \prod_{j=1}^{N} (1+s_j\varrho) \quad (0<\varrho<\infty),$$

что невозможно. Таким образом,

$$\operatorname{sp} A = 0.$$

Итак, для вольтеррова оператора A теорема доказана.

Рассмотрим общий случай. Пусть A — произвольный оператор из $\mathfrak{S}_1$. Обозначим через $\mathfrak{E}_A$ линейную замкнутую оболочку всех корневых векторов оператора A, соответствующих ненулевым собственным числам. Пусть $\{\omega_j\}_1^{\nu(A)}$ — ортонормированная система Шура оператора A (см. лемму I.4.1). Тогда

$$(A\omega_j,\ \omega_j) = \lambda_j(A) \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu(A)).$$

Обозначая через $\hat{A}$ оператор, индуцированный оператором A в $\mathfrak{E}_A$, получаем

$$\operatorname{sp}\hat{A} = \sum_{j=1}^{\nu(A)} (A\omega_j,\ \omega_j) = \sum_{j=1}^{\nu(A)} \lambda_j(A).$$

Так как подпространство $\mathfrak{E}_A$ является инвариантным относительно A, то

$$A = PAP + PAQ + QAQ,$$

где P — ортогональный проектор на подпространство $\mathfrak{E}_A$, а $Q = I - P$. Согласно лемме I.4.2 оператор QAQ вольтерров, и стало быть, по доказанному,

$$\operatorname{sp}(QAQ) = 0.$$

Кроме того,

$$\operatorname{sp}(PAQ) = \operatorname{sp}(AQP) = 0 \text{ и } \operatorname{sp}(PAP) = \operatorname{sp}\hat{A}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{sp} A = \operatorname{sp}(PAP) + \operatorname{sp}(PAQ) + \operatorname{sp}(QAQ) = \operatorname{sp}\hat{A},$$

т. е.

$$\operatorname{sp} A = \sum_{j=1}^{\nu(A)} \lambda_j(A).$$

Теорема доказана.

4. Очевидно, $\operatorname{sp} A$ является линейным функционалом в банаховом пространстве $\mathfrak{S}_1$. Следующее предложение показывает, что этот функционал непрерывен и имеет норму, равную единице.

Теорема 8.5. *Если оператор* $A \in \mathfrak{S}_1$ $(A \neq 0)$, *то*

$$|\operatorname{sp} A| \leqslant |A|_1, \tag{8.16}$$

причем равенство имеет здесь место в том и только том случае, когда при $\theta = \arg \operatorname{sp} A$ *оператор* $e^{-i\theta}A$ *неотрицателен.*

Доказательство. В самом деле, в силу теоремы 8.4 и оценки (7.7)

$$|\operatorname{sp} A| \leqslant \sum_{j=1}^{\nu(A)} |\lambda_j(A)| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A) = |A|_1.$$

Если в (8.16) имеет место равенство, то

$$\left.\begin{aligned} \left|\sum_{j=1}^{\nu(A)} \lambda_j(A)\right| &= \sum_{j=1}^{\nu(A)} |\lambda_j(A)|, \\ \sum_{j=1}^{\nu(A)} |\lambda_j(A)| &= \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A). \end{aligned}\right\} \tag{8.17}$$

Согласно теореме II.3.1 из второго из равенств (8.17) следует, что оператор A нормален. С другой стороны, первое равенство показывает, что все ненулевые собственные числа оператора A имеют один и тот же аргумент θ. Следовательно, оператор $e^{-i\theta}A$ неотрицателен. Очевидно, что и обратно, если оператор $e^{-i\theta}A$ неотрицателен, то в (8.16) имеет место знак равенства. Теорема доказана.

Она допускает следующее усиление.

Теорема 8.6. *Пусть оператор* $A \in \mathfrak{S}_1$ *и* $\{\varphi_j\}_1^{\omega}$ $(\omega \leqslant \infty)$ — *некоторая (вообще говоря, неполная) ортонормированная система векторов.*

Тогда

$$\sum_{j=1}^{\omega} |(A\varphi_j, \varphi_j)| \leqslant |A|_1, \tag{8.18}$$

причем равенство имеет здесь место в том и только том случае, когда оператор A обладает следующими свойствами:

а) *оператор A обращается в тождественный нуль на подпространстве $\mathfrak{N} = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{L}$, где $\mathfrak{L}$ — линейная замкнутая оболочка тех φ_j $(j = 1, 2, \ldots, \omega)$, для которых $(A\varphi_j, \varphi_j) \neq 0$;*

б) *оператор UA неотрицателен, где U — такой унитарный оператор, что*

$$U\varphi_j = e^{-i\theta_j}\varphi_j, \quad \theta_j = \arg(A\varphi_j, \varphi_j) \quad (\varphi_j \in \mathfrak{L}). \tag{8.19}$$

Равенство

$$\left|\sum_{j=1}^{\omega} (A\varphi_j, \varphi_j)\right| = |A|_1 \tag{8.20}$$

имеет место в том и только том случае, когда оператор A обладает свойством а) *и оператор $e^{-i\theta}A$ неотрицателен при* $\theta = \arg \operatorname{sp} A$.

Доказательство. В самом деле, соотношение (8.18) следует из п. 3 § 4 гл. II. Рассмотрим тот случай, когда в (8.18) имеет место равенство. Тогда можно утверждать, что

$$(A\varphi, \varphi) = 0 \qquad (\varphi \in \mathfrak{N}).$$

Пусть теперь U — какой-либо унитарный оператор, обладающий свойством (8.19). Тогда

$$(UA\varphi_j, \varphi_j) = |(A\varphi_j, \varphi_j)| \qquad (\varphi_j \in \mathfrak{L})$$

и, следовательно,

$$\operatorname{sp}(UA) = \sum_{j=1}^{\omega} |(A\varphi_j, \varphi_j)| = \sum_{\varphi_j \in \mathfrak{L}} |(A\varphi_j, \varphi_j)| = |A|_1.$$

Учитывая, что $|UA|_1 = |A|_1$, приходим к равенству:

$$\operatorname{sp}(UA) = |UA|_1.$$

На основании предшествующей теоремы 8.5 заключаем, что оператор UA неотрицателен и $\mathfrak{L} = \overline{\mathfrak{R}(UA)}$.

Отсюда:

$$UA\varphi = 0, \quad A\varphi = 0 \qquad (\varphi \in \mathfrak{N}).$$

Таким образом, оператор A обладает свойствами а) и б). Легко видеть, что и обратно, если оператор A обладает свойствами а) и б), то для него в (8.18) имеет место равенство.

Рассмотрим теперь случай, когда выполняется (8.20). Тогда равенство будет иметь место в (8.18) и

$$\left|\sum_{j=1}^{\omega} (A\varphi_j, \varphi_j)\right| = \sum_{j=1}^{\omega} |(A\varphi_j, \varphi_j)|.$$

Отсюда вытекает, что все числа θ_j равны между собой. Следовательно, можно положить $U=e^{-i\theta}I$.

Теорема доказана.

Теорема 8.6 допускает в свою очередь следующее обобщение.

Теорема 8.7. *Пусть оператор $A \in \mathfrak{S}_1$ и $\{P_j\}_1^\omega$ $(\omega \leqslant \infty)$ — система взаимно ортогональных ортопроекторов.*

Тогда

$$\left| \sum_{k=1}^{\omega} P_k A P_k \right|_1 = \sum_{k=1}^{\omega} | P_k A P_k |_1 \leqslant | A |_1, \tag{8.21}$$

причем равенство в этом соотношении имеет место в том и только том случае, когда выполняются условия:

а) $$AQ=0, \text{ где } Q=I-\sum_{j=1}^{\omega} P_j;$$

б) *найдется частично изометрический оператор U, коммутирующий со всеми проекторами P_k $(k=1, 2, \ldots, \omega)$ и такой, что*

$$UA=(A^*A)^{1/2}, \quad UP_kAP_k=(P_kA^*P_kAP_k)^{1/2} \qquad (k=1, 2, \ldots, \omega). \tag{8.22}$$

Доказательство. Соотношение (8.21) непосредственно вытекает из общей теоремы II.5.2. Следовательно, остается проверить условия, при которых в (8.21) достигается равенство.

Пусть выполняются условия а) и б), тогда

$$\sum_{k=1}^{\omega} | P_k A P_k |_1 = \sum_{k=1}^{\omega} | UP_k A P_k |_1 = \sum_{k=1}^{\omega} \operatorname{sp}(P_k UAP_k) = \operatorname{sp} UA = | A |_1,$$

т. е. в (8.21) имеет место равенство.

Обратно, пусть в (8.21) имеет место равенство. Тогда из замечания II.5.2 вытекает выполнение условия а). Пусть $P_kAP_k = U_k^*H_k$ — полярное представление оператора P_kAP_k в подпространстве $\mathfrak{N}(P_k)$.

Частично изометрический оператор U, определенный равенством

$$U^* = \sum_{k=1}^{\omega} U_k^* P_k + Q,$$

обладает следующим свойством:

$$\operatorname{sp}(UA) = \sum_{k=1}^{\omega} \operatorname{sp}(U_k P_k A P_k) = \sum_{k=1}^{\omega} | P_k A P_k |_1 = | A |_1. \tag{8.23}$$

Так как

$$\operatorname{sp}(UA) \leqslant | UA |_1 \leqslant | A |_1,$$

то в силу (8.23)

$$\operatorname{sp}(UA) = | UA |_1 \text{ и } | UA |_1 = | A |_1.$$

Из первого равенства в силу теоремы 8.5 вытекает, что оператор UA неотрицателен; из второго равенства и соотпошения

$$(UA)^2 = A^*U^*UA \leqslant A^*A$$

следует $UA = (A^*A)^{1/2}$.

Теорема доказана.

§ 9. Операторы Гильберта—Шмидта

1. Операторы класса $\mathfrak{S}_2$ называются иначе *операторами Гильберта—Шмидта*.

Согласно лемме 8.1 для любого неотрицательного оператора H и любого ортонормированного базиса $\{\varphi_j\}_1^\infty$ сумма

$$\sum_{j=1}^{\infty} (H\varphi_j,\ \varphi_j) \tag{9.1}$$

принимает одно и то же значение (конечное или бесконечное). В случае, когда ряд (9.1) сходится, его сумма была обозначена через $\operatorname{sp} H$. Сохраним это обозначение и для случая, когда сумма ряда (9.1) равна бесконечности.

При этом условии можно сформулировать утверждение:

Линейный ограниченный оператор A является оператором Гильберта — Шмидта в том и только том случае, когда

$$\operatorname{sp}(A^*A) < \infty. \tag{9.2}$$

Необходимость этого условин явствует из определения класса $\mathfrak{S}_2$, а достаточность — из того, что если A — ограниченный оператор и имеет место (9.2), то согласно лемме 8.1 оператор $A^*A \in \mathfrak{S}_1$, а тогда

$$\operatorname{sp}(A^*A) = \sum_{j=1}^{\nu(A)} \lambda_j(A^*A) = \sum_{j=1}^{\infty} s_j^2(A) < \infty.$$

При проверке условия (9.2) полезно иметь в виду, что для любого ограниченного оператора A и любых двух ортонормированных базисов $\{\varphi_j\}_1^\infty$, $\{\psi_j\}_1^\infty$

$$\operatorname{sp}(A^*A) = \sum_{j=1}^{\infty} |A\varphi_j|^2 = \sum_{j,\ k=1}^{\infty} |(A\varphi_j,\ \varphi_k)|^2 = \sum_{j,\ k=1}^{\infty} |(A\psi_j, \psi_k)|^2.$$

Теорема 9.1 (И. Шур [1]). *Если оператор* $A \in \mathfrak{S}_2$, *то*

$$\sum_{j=1}^{\nu(A)} |\lambda_j(A)|^2 \leqslant \mathrm{sp}(A^*A). \tag{9.3}$$

Знак равенства в (9.3) *имеет место тогда и только тогда, когда оператор* A *нормален.*

Эта теорема является следствием теоремы II.3.1 Г. Вейля.

Однако Шур [1] установил свою теорему задолго до появления результата Вейля (в 1909 г.) и притом с помощью простого рассуждения, в котором впервые был использован метод приведения матрицы (оператора) к треугольному виду с помощью унитарного преобразования.

Приведем элементарное доказательство Шура.

Доказательство. Согласно лемме Шура (лемма I.4.1) в линейной замкнутой оболочке $\mathfrak{E}_A$ всех корневых линеалов $\mathfrak{L}_{\lambda_j}(A)$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu(A))$ может быть выбран ортонормированный базис ω_j $(j = 1, 2, \ldots, \nu(A))$ такой, что

$$A\omega_j = a_{j1}\omega_1 + a_{j2}\omega_2 + \ldots + \lambda_j(A)\,\omega_j.$$

Так как

$$|A\omega_j|^2 = \sum_{k=1}^{j-1} |a_{jk}|^2 + |\lambda_j|^2, \tag{9.4}$$

то

$$\sum_{j=1}^{\nu(A)} |\lambda_j|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{\nu(A)} |A\omega_j|^2 \leqslant \mathrm{sp}(A^*A). \tag{9.5}$$

Из (9.4) и (9.5) следует, что знак равенства в (9.5) будет иметь место в том и только том случае, когда

$$a_{jk} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, j-1;\ j = 1, 2, \ldots, \nu(A)) \text{ и}$$
$$A\varphi = 0 \quad (\varphi \in \mathfrak{E}_A^{\perp}),$$

а это эквивалентно нормальности оператора A.

2. Без труда можно проверить, что формула

$$(A, B) = \mathrm{sp}(AB^*)$$

определяет в $\mathfrak{S}_2$ скалярное произведение.

Так как

$$(A,\ A)^{1/2} = (\operatorname{sp}(AA^*))^{1/2} = |A|_2 \quad (A \in \mathfrak{S}_2),$$

то введенное скалярное произведение превращает $\mathfrak{S}_2$ в полное гильбертово пространство.

Отметим следующее тождество:

$$(|A_{\mathcal{R}}|_2)^2 + (|A_{\mathcal{J}}|_2)^2 = (|A|_2)^2 \quad (A \in \mathfrak{S}_2)$$

или, что то же самое,

$$\operatorname{sp} A^2_{\mathcal{R}} + \operatorname{sp} A^2_{\mathcal{J}} = \operatorname{sp} A^*A.$$

Последнее равенство является непосредственным следствием тождества $A^2_{\mathcal{R}} + A^2_{\mathcal{J}} = (AA^* + A^*A)/2$.

3. Приведем аналитическое описание операторов Гильберта—Шмидта для того случая, когда пространство $\mathfrak{H}$ реализовано в виде пространства вектор-функций $L_2^{(r)}(Q)$.

Пусть Q—некоторое ограниченное замкнутое множество точек n-мерного евклидова пространства E_n, имеющее положительную лебегову меру.

Задавшись каким-либо r $(=1,\ 2,\ \ldots,\ \infty)$, можно образовать гильбертово пространство $L_2^{(r)}(Q)$, состоящее из всех r-мерных вектор-функций $f(x) = \{f_j(x)\}_1^r$, $x \in Q$ с измеримыми координатами $f_j(x)$ $(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ r)$ такими, что

$$|f|^2 = \int_Q \sum_{j=1}^{r} |f_j(x)|^2\, dx < \infty.$$

Скалярное произведение в $L_2^{(r)}(Q)$ определяется естественным образом по формуле*)

$$(f, g) = \int_Q g^*(x) f(x)\, dx = \int_Q \sum_{j=1}^{r} \bar{g}_j(x) f_j(x)\, dx \qquad (f,\ g \in L_2^{(r)}(Q)).$$

*) Поясним, что r-мерный вектор $\xi = \{\xi_j\}_1^r$ рассматривается как вектор-столбец, а тогда $\xi^* = \{\bar{\xi}_1,\ \bar{\xi}_2,\ \ldots,\ \bar{\xi}_r\}$ рассматривается как строка. При этих обозначениях произведение $\eta^*\xi$ векторов ξ

Образуем, с другой стороны, гильбертово пространство $L_2^{(r\times r)}(Q\times Q)$, состоящее из матриц-функций $\mathcal{A}(x, y) = \| a_{\mu\nu}(x, y)\|_1^r$ с измеримыми на $Q\times Q$ элементами такими, что

$$|\mathcal{A}(x, y)|^2=\int\limits_Q\int\limits_Q\sum_{j,\,k=1}^{r}|a_{jk}(x, y)|^2\,dx\,dy<\infty, \qquad (9.6)$$

в котором скалярное произведение двух элементов $\mathcal{A}(x, y)$ и $\mathcal{B}(x, y)$ определяется по формуле

$$(\mathcal{A}, \mathcal{B})=\int\limits_Q\int\limits_Q\sum_{j,\,k=1}^{r}a_{jk}(x, y)\,\overline{b_{jk}(x, y)}\,dx\,dy.$$

Имеет место следующее предложение.

1°. *Всякому элементу $\mathcal{A}(x, y)\in L_2^{(r\times r)}(Q\times Q)$ отвечает оператор Гильберта—Шмидта A, действующий в $L_2^{(r)}(Q)$ по формуле* *)

$$(Af)(x)=\int\limits_Q\mathcal{A}(x, y)\,f(y)\,dy \quad (f\in L_2^{(r)}(Q)). \qquad (9.7)$$

Отображение $\mathcal{A}(x, y)\to A$ является изометрическим отображением всего $L_2^{(r\times r)}(Q\times Q)$ на все гильбертово пространство $\mathfrak{S}_2$ операторов Гильберта—Шмидта, действующих в $L_2^{(r)}(Q)$. Таким образом,

$$(\mathcal{A}, \mathcal{B})=\mathrm{sp}\,(B^*A). \qquad (9.8)$$

Доказательство. Так как при конечном r доказательство несколько проще, то мы сразу рассмотрим более сложный случай $r=\infty$.

Обозначим пространства $L_2^{(r)}(Q)$ и $L_2^{(r\times r)}(Q\times Q)$ для краткости через L_2 и $L_2\times L_2$.

и $\eta=\{\eta_j\}_1^r$ есть скаляр $\sum\limits_1^r\xi_j\overline{\eta}_j$, а произведение $\xi\eta^*$ есть квадратная $(r\times r)$ матрица $\|\xi_j\overline{\eta}_k\|_1^r$.

*) Точный смысл этой формулы будет разъяснен в процессе доказательства теоремы.

В силу известной теоремы Фубини, из условия (9.6) при $r=\infty$ следует, что почти для всех $x \in Q$

$$\int_Q \sum_{j,\,k=1}^{\infty} |a_{jk}(x,\ y)|^2\, dy < \infty. \tag{9.9}$$

Для тех $x \in Q$, для которых ряд (9.9) сходится при любом $f=\{f_j(y)\}_1^\infty \in L_2$, справедлива оценка

$$\left(\int_Q \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}(x,\ y)|\,|f_k(y)|\,dy\right)^2 \leqslant \tag{9.10}$$

$$\leqslant \left(\int_Q \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}(x,\ y)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(y)|^2\right)^{1/2} dy\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_Q \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}(x,\ y)|^2\, dy \int_Q \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(y)|^2\, dy$$

$$(j=1,\ 2,\ \ldots).$$

Поэтому для указанных x имеют смысл интегралы

$$g_j(x) = \int_Q \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}(x,\ y)\, f_k(y)\, dy \qquad (j=1,\ 2, \ldots) \tag{9.11}$$

и более того, согласно (9.10),

$$\int_Q \sum_{j=1}^{\infty} |g_j(x)|^2\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{Q\times Q} \sum_{j,k=1}^{\infty} |a_{jk}(x,\ y)|^2\, dx\, dy \int_Q \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(y)|^2\, dy < \infty.$$

Последнее неравенство показывает, что $g=\{g_j\}_1^\infty \in L_2$; равенства (9.11) определяют линейный оператор $g=Af$, действующий в L_2, причем

$$|Af| \leqslant \sqrt{(\mathcal{A},\ \mathcal{A})}\,|f|.$$

Сокращенно система уравнений (9.11) записывается в виде:

$$g(x) = \int_Q \mathcal{A}(x,\ y)\, f(y)\, dy. \tag{9.12}$$

Покажем, что A — оператор Гильберта — Шмидта и что, более того,

$$\mathrm{sp}\,(A^*A) = (\mathscr{A}, \mathscr{A}). \qquad (9.13)$$

Пусть $\{\varphi_j\}_1^\infty$ — некоторый ортонормированный базис пространства L_2. Образуем матрицы-функции на $Q \times Q$

$$\mathscr{F}_{jk}(x, y) = \varphi_j(y)\,\varphi_k^*(x) = \|\varphi_{j\mu}(y)\,\overline{\varphi_{k\nu}(x)}\|_{\mu, \nu=1}^{\infty}$$
$$(j, k = 1, 2, \ldots).$$

Легко видеть, что все $\mathscr{F}_{jk}(x, y) \in L_2 \times L_2$ $(j, k = 1, 2, \ldots)$ и что они образуют ортонормированную систему:

$$(\mathscr{F}_{jk}, \mathscr{F}_{j_1k_1}) = \delta_{jj_1}\delta_{kk_1} \qquad (j, k;\ j_1, k_1 = 1, 2, \ldots).$$

Читателю легко убедиться, что система $\{\mathscr{F}_{jk}(x, y)\}_{j,k=1}^\infty$ полна в $L_2 \times L_2$.

Коль скоро это показано, то

$$(\mathscr{A}, \mathscr{A}) = \sum_{j,\,k=1}^{\infty} |(\mathscr{A}, \mathscr{F}_{jk})|^2. \qquad (9.14)$$

С другой стороны, легко видеть, что

$$(\mathscr{A}, \mathscr{F}_{jk}) = \int\limits_{Q\times Q} \varphi_k^*(x)\,\mathscr{A}(x, y)\,\varphi_j(y)\,dx\,dy = (A\varphi_j, \varphi_k)$$
$$(k, j = 1, 2, \ldots). \qquad (9.15)$$

Таким образом, равенство (9.13) есть следствие (9.14) и (9.15).

Так как отображение $\mathscr{A} \to A$ линейно, то из (9.13) нетрудно заключить, что если $\mathscr{A} \to A$ и $\mathscr{B} \to B$, то имеет место (9.8).

Для окончания доказательства теоремы нам осталось показать, что любой оператор Гильберта — Шмидта в L_2 представим в виде (9.11) с некоторым ядром $\mathscr{A}(x, y) \in L_2 \times L_2$. Используем снова для этого какой-либо ортонормированный базис $\{\varphi_j\}_1^\infty$ пространства L_2 и соответствующий ортонормированный базис $\{\mathscr{F}_{jk}\}$ пространства $L_2 \times L_2$.

Если A — оператор Гильберта — Шмидта, то

$$\mathrm{sp}\,(A^*A) = \sum_{j,\,k=1}^{\infty} |\gamma_{jk}|^2, \ \gamma_{jk} = (A\varphi_j, \varphi_k) \qquad (j, k = 1, 2, \ldots).$$

Образуем ядро $\mathscr{A}_0(x, y) \in L_2 \times L_2$, полагая

$$\mathscr{A}_0(x, y) = \sum_{j, k=1}^{\infty} \gamma_{jk} \mathscr{F}_{jk}(x, y) = \sum_{j, k=1}^{\infty} \gamma_{jk} \varphi_j(x) \varphi_k^*(y), \quad (9.16)$$

где бесконечный ряд справа сходится в смысле $L_2 \times L_2$.

Обозначим через A_0 оператор Гильберта—Шмидта, порождаемый в L_2 ядром $\mathscr{A}_0(x, y)$ по формуле (9.7). Согласно (9.16)

$$(\mathscr{A}_0, \mathscr{F}_{jk}) = \gamma_{jk} = (A\varphi_j, \varphi_k) \qquad (j, k = 1, 2, \ldots),$$

а согласно (9.7):

$$(\mathscr{A}_0, \mathscr{F}_{jk}) = (\mathscr{A}_0 \varphi_j, \varphi_k) \qquad (j, k = 1, 2, \ldots),$$

так что $(A\varphi_j, \varphi_k) = (A_0\varphi_j, \varphi_k)$ $(j, k = 1, 2, \ldots)$, откуда $A = A_0$. Предложение доказано.

Замечание 9.1. Если A является самосопряженным оператором, действующим в L_2, то ряд (9.16), дающий его ядро $A(x, y)$, принимает особенно простую форму, если в качестве ортонормированной системы $\{\varphi_j\}$ выбрать полную ортонормированную систему собственных векторов оператора A *); в этом случае:

$$A\varphi_j = \lambda_j(A) \varphi_j, \quad (\varphi_j, \varphi_k) = \delta_{jk} \qquad (j, k = 1, 2, \ldots).$$

Тогда

$$\gamma_{jk} = (A\varphi_j, \varphi_k) = \lambda_j(A) \delta_{jk} \qquad (j, k = 1, 2, \ldots)$$

и формула (9.16) дает

$$\mathscr{A}_0(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(A) \varphi_j(x) \varphi_j^*(y),$$

где ряд справа сходится по норме пространства $L_2 \times L_2$.

§ 10. Признаки ядерности интегральных операторов и формулы для вычисления следа

Ввиду особой роли ядерных операторов в этом параграфе будут приведены признаки ядерности интегральных операторов и будут указаны формулы для вычисления их следа.

---

*) С учетом и нулевого собственного значения оператора A.

1. Пусть $\mathcal{J}$ — замкнутый, открытый или полуоткрытый интервал вещественной оси, имеющий конечную или бесконечную длину. Непрерывное ядро $\mathcal{A}(t, s)$ $(t, s \in \mathcal{J})$ называется *эрмитово-неотрицательным* на $\mathcal{J}$, если для любых t_j $(j = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots)$ формы

$$\sum_{j,\,k=1}^{n} \mathcal{A}(t_j, t_k)\, \xi_k \bar{\xi}_j \geqslant 0$$

неотрицательны.

Это условие автоматически включает в себя требование эрмитовости ядра $\mathcal{A}(t, s)$: $\mathcal{A}(t, s) = \overline{\mathcal{A}(s, t)}$.

Легко показывается, что непрерывное ядро $\mathcal{A}(t, s)$ эрмитово-неотрицательно в том и только том случае, когда

$$\int\limits_{\mathcal{J}} \int\limits_{\mathcal{J}} \mathcal{A}(t, s)\, \varphi(s)\, \overline{\varphi(t)}\, ds\, dt \geqslant 0$$

для любой непрерывной функции $\varphi(t)$ $(t \in \mathcal{J})$, обращающейся в нуль в окрестности концов $\mathcal{J}$ (это требование нужно для сходимости двойного интеграла).

Рассмотрим сначала случай, когда $\mathcal{J} = [a, b]$ — конечный замкнутый интервал.

Рассмотрим в $C(a, b)$ интегральное уравнение

$$\varphi(t) = \lambda \int\limits_a^b \mathcal{A}(t, s)\, \varphi(s)\, d\sigma(s) \tag{10.1}$$

с непрерывным эрмитово-неотрицательным ядром $\mathcal{A}(t, s)$ на $[a, b]$; здесь $\sigma(s)$ $(a \leqslant s \leqslant b)$ — некоторая неубывающая функция с $\operatorname{Var} \sigma = \sigma(b) - \sigma(a) > 0$.

На такие уравнения распространяется обычная теория Гильберта — Шмидта — Мерсера.

Уравнению (10.1) всегда отвечает система положительных собственных чисел $\{\lambda_j\}$ и соответствующая система $\{\varphi_j(t)\}$ непрерывных фундаментальных функций, ортонормированная по мере σ:

$$\int\limits_a^b \varphi_j(t)\, \overline{\varphi_k(t)}\, d\sigma(t) = \delta_{jk} \qquad (j, k = 1, 2, \ldots). \tag{10.2}$$

Кроме того, будет иметь место равномерно сходящееся разложение (см., например, М. Г. Крейн [2])

$$\mathscr{A}(t, s) = \mathscr{R}(t, s) + \sum_j \frac{\varphi_j(t)\varphi_j(s)}{\lambda_j} \quad (a \leqslant t, s \leqslant b), \qquad (10.3)$$

где $\mathscr{R}(t, s)$ $(a \leqslant t, s \leqslant b)$ *) — некоторое непрерывное эрмитово-неотрицательное ядро, обращающееся в нуль, если хотя бы одна из точек t, s принадлежит множеству $\mathscr{E}_\sigma$ точек роста функции σ.

Из (10.2) и (10.3), в частности, следует:

$$\sum_j \frac{1}{\lambda_j} = \int_a^b \mathscr{A}(s, s)\, d\sigma(s) < \infty.$$

Образуем гильбертово пространство $L_2^{(\sigma)} = L_2^{(\sigma)}(a, b)$, состоящее из всех σ-измеримых функций $f(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, имеющих σ-интегрируемый квадрат, со скалярным произведением:

$$(f, g)_\sigma = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\, d\sigma(t).$$

Рассматриваемому ядру $\mathscr{A}(t, s)$ отвечает в $L_2^{(\sigma)}$ неотрицательный вполне непрерывный оператор

$$(Af)(t) = \int_a^b \mathscr{A}(t, s) f(s)\, d\sigma(s). \qquad (10.4)$$

В силу (10.3) будем иметь:

$$(Af)(t) = \sum_j \frac{c_j}{\lambda_j}\varphi_j(t),$$

где $c_j = (f, \varphi_j)_\sigma$ $(j = 1, 2, \ldots)$.

Таким образом, система $\{\varphi_j\}_1^\infty$ будет полной ортонормированной системой собственных векторов оператора A в $\overline{\Re(A)}$, а $\{\lambda_j\}$ — полной системой характеристических чисел A. Мы пришли к следующему выводу:

*) Как впервые показал М. Д. Дольберг [1], ядро $\mathscr{R}(t, s)$ вполне определяется множеством $\mathscr{E}_\sigma$ и не зависит от значений σ на $\mathscr{E}_\sigma$.

1°. *Если ядро* $\mathcal{A}(t, s)$ $(a \leqslant t, s \leqslant b)$ *непрерывно и эрмитово-неотрицательно, то оно порождает в* $L_2^{(\sigma)}$ *по формуле* (10.4) *неотрицательный ядерный оператор* A, *причем*

$$\operatorname{sp} A = \int_a^b \mathcal{A}(s, s)\, d\sigma(s). \tag{10.5}$$

Предоставляем читателю распространить это предложение на всевозможные типы интервалов $\mathcal{J}$ и на случай бесконечной вариации σ, т. е. вывести из 1° предложение

2°. *Пусть* $\mathcal{J}$ — *открытый или полуоткрытый интервал (вещественной оси) конечной или бесконечной длины,* $\sigma(t)$ $(t \in \mathcal{J})$ — *неубывающая функция с* $\operatorname{Var}\sigma \leqslant \infty$, *а* $\mathcal{A}(t, s)$ $(t, s \in \mathcal{J})$ — *непрерывное эрмитово-неотрицательное ядро.*

Тогда неотрицательный оператор A, *определяемый в* $L_2^{(\sigma)}(\mathcal{J})$ *ядром* $\mathcal{A}(t, s)$,

$$(Af)(t) = \int_{\mathcal{J}} \mathcal{A}(t, s) f(s)\, d\sigma(s),$$

будет ядерным в том и только том случае, когда

$$\int_{\mathcal{J}} \mathcal{A}(s, s)\, d\sigma(s) < \infty. \tag{10.5'}$$

При выполнении этого условия интеграл (10.5′) *и будет давать след* $\operatorname{sp} A$.

Приведенные выше понятия и предложения допускают обобщение на случай, когда $\mathcal{J}$ — произвольный компакт или локально компактное множество, а $\sigma(\Delta)$ — некоторая неотрицательная мера, определенная на $\mathcal{J}$.

Однако всюду в дальнейшем $\mathcal{J}$ будет у нас интервалом вещественной оси и $d\sigma(t) = dt$, т. е. мы будем рассматривать операторы в некотором пространстве $L_2 = L_2(a, b)$, и расширение класса операторов будет происходить за счет расширения класса ядер $\mathcal{A}(t, s)$.

2. Для дальнейших рассмотрений нам понадобится оператор сглаживания Стеклова S_h $(h > 0)$, определяемый равенством

$$(S_h f)(t) = \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} f(s)\, ds \quad (f \in L_2).$$

Это равенство приобретает смысл для всех $t \in [a, b]$, если мы условимся продолжать каждую функцию $f \in L_2$ за пределы отрезка $[a, b]$ нулем.

Очевидно, S_h является вполне непрерывным самосопряженным интегральным оператором в L_2 с ограниченным ядром

$$\varrho_h(t, s) = \begin{cases} \frac{1}{2h} & \text{при} \quad |t-s| < h, \\ 0 & \text{при} \quad |t-s| > h. \end{cases}$$

Без труда проверяются следующие простые свойства оператора S_h (см., например, Л. А. Люстерник и В. И. Соболев [1], § 10):

1) $$|S_h| = 1 \quad (h > 0).$$

2) Если $f(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ — непрерывная функция, то $(S_h f)(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b;\ h > 0)$ также является непрерывной функцией, причем при $h \to 0$ функция $(S_h f)(t)$ равномерно на отрезке $[a, b]$ стремится к $f(t)$.

Из 1) и 2) следует

3) При $h \to 0$ оператор S_h стремится сильно к единичному оператору, т. е.

$$\lim_{h \to 0} |S_h f - f| = 0 \quad (f \in L_2).$$

Ядро Гильберта—Шмидта $\mathcal{A}(t, s)$ $(a \leqslant t,\ s \leqslant b)$ мы будем называть в дальнейшем эрмитово-неотрицательным, если ему соответствует по формуле

$$(Af)(t) = \int_a^b \mathcal{A}(t, s) f(s)\, ds \tag{10.6}$$

неотрицательный оператор, действующий в L_2, т. е. если для любого $f \in L_2$

$$\int_a^b \int_a^b \mathcal{A}(t, s) f(s) \overline{f(t)}\, ds\, dt \geqslant 0.$$

(Заметим, что это определение не противоречит определению эрмитовой неотрицательности непрерывного ядра $\mathcal{A}(t, s)$, данному в п. 1.)

С помощью оператора Стеклова устанавливается следующая теорема:

Теорема 10.1. *Для того чтобы эрмитово-неотрицательное ядро Гильберта—Шмидта* $\mathcal{A}(t, s)$ $(a \leqslant t,\ s \leqslant b)$ *) *порождало по формуле* (10.6) *ядерный оператор, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\, \frac{1}{4h^2} \int_a^b \int_a^b [2h - |t-s|]_+ \, \mathcal{A}(t, s)\, dt\, ds < \infty, \qquad (10.7)$$

где

$$y_+ = \max(y, 0).$$

Если условие (10.7) *выполняется, то*

$$\operatorname{sp} A = \lim_{h\to 0} \operatorname{sp}(S_h A S_h) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{4h^2} \int_a^b \int_a^b [2h - |t-s|]_+ \, \mathcal{A}(t, s)\, dt\, ds. \qquad (10.8)$$

Таким образом, теорема, в частности, утверждает, что если верхний предел (10.7) конечен, то существует обычный предел этого выражения, совпадающий со следом оператора A. Доказательству теоремы предпошлем следующее замечание. Если $\mathcal{A}(t, s)$ — ядро Гильберта—Шмидта, то ядро

$$\mathcal{A}_h(t, s) = \frac{1}{4h^2} \int_{t-h}^{t+h} \int_{s-h}^{s+h} \mathcal{A}(v, u)\, du\, dv \quad (a \leqslant t,\ s \leqslant b)$$

непрерывно. В этой формуле $\mathcal{A}(t, s)$ полагается тождественно равным нулю вне квадрата $a \leqslant t,\ s \leqslant b$.

Очевидно,

$$\mathcal{A}_h(t, s) = \int_a^b \int_a^b \varrho_h(t, u)\, \mathcal{A}(u, v)\, \varrho_h(v, s)\, du\, dv,$$

---

*) Здесь интервал $[a, b]$ конечен.

и следовательно,

$$\int_a^b \mathcal{A}_h(s, s)\,ds = \int_a^b \int_a^b \mathcal{A}(u, v) \int_a^b \varrho_h(s, u)\,\varrho_h(v, s)\,ds\,du\,dv =$$

$$= \frac{1}{4h^2} \int_a^b \int_a^b [2h - |t - s|]_+ \mathcal{A}(t, s)\,dt\,ds.$$

Таким образом, условие (10.7) совпадает с условием

$$\varlimsup_{h\to 0} \int_a^b \mathcal{A}_h(s, s)\,ds < \infty, \tag{10.9}$$

а формула (10.8) совпадает с формулой

$$\operatorname{sp} A = \lim_{h\to 0} \operatorname{sp}(S_h A S_h) = \lim_{h\to 0} \int_a^b \mathcal{A}_h(s, s)\,ds. \tag{10.10}$$

Доказательство теоремы. Ядро $\mathcal{A}_h(t, s)$ является ядром оператора $S_h A S_h$:

$$(S_h A S_h f)(t) = \int_a^b \mathcal{A}_h(t, s) f(s)\,ds \quad (f \in L_2).$$

Оно непрерывно и эрмитово-неотрицательно. Следовательно, в силу предложения 1° оператор $S_h A S_h$ является ядерным и, согласно формуле (10.5),

$$|S_h A S_h|_1 = \operatorname{sp}(S_h A S_h) = \int_a^b \mathcal{A}_h(s, s)\,ds. \tag{10.11}$$

Так как оператор A вполне непрерывен, то в силу теоремы 6.3 оператор $S_h A S_h$ при $h \to 0$ сходится равномерно к A. Поэтому если имеет место (10.9), т. е.

$$\varlimsup_{h\to 0} |S_h A S_h|_1 < \infty,$$

то согласно теореме 5.2 оператор $A \in \mathfrak{S}_1$.

Докажем теперь необходимость условий теоремы. Пусть $A \in \mathfrak{S}_1$; тогда согласно теореме 6.3 оператор $S_h A S_h$ при $h \to 0$ стремится к оператору A по норме $\mathfrak{S}_1$. Так как $\operatorname{sp} X$ является непрерывным функционалом в $\mathfrak{S}_1$, то

$$\operatorname{sp} A = \lim_{h\to 0} \operatorname{sp}(S_h A S_h),$$

и стало быть, в силу (10.11)

$$\operatorname{sp} A = \lim_{h\to 0} \int_a^b \mathcal{A}_h(s, s)\,ds < \infty.$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы непосредственно вытекают следующие предложения:

Следствие 10.1. *Если $\mathcal{A}(t, s)$ $(a \leqslant t, s \leqslant b)$ — эрмитово-неотрицательное ограниченное ядро, то оно порождает ядерный оператор A.*

Действительно, в этом случае выполняется условие (10.9), ибо

$$\sup_{a\leqslant t,\ s\leqslant b;\ h} |\mathcal{A}_h(t, s)| \leqslant \sup_{a\leqslant t,\ s\leqslant b} |\mathcal{A}(t, s)|. \tag{10.12}$$

До сих пор речь шла о критериях ядерности интегральных операторов с эрмитово положительными ядрами. Для произвольных ядер мы можем отметить следующее предложение.

Следствие 10.2. *Если ядро Гильберта — Шмидта $\mathcal{A}(t, s)$ $(a \leqslant t, s \leqslant b)$ порождает ядерный оператор A, то по-прежнему*

$$\operatorname{sp} A = \lim_{h\to 0} \operatorname{sp}(S_h A S_h) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{4h^2} \int_a^b \int_a^b [2h - |t - s|]_+ \mathcal{A}(t, s)\,dt\,ds. \tag{10.13}$$

Если, кроме того, ядро ограничено, то

$$|\operatorname{sp} A| \leqslant (b - a) \sup_{a\leqslant t,\ s\leqslant b} |\mathcal{A}(t, s)|, \tag{10.14}$$

а если оно непрерывно, то

$$\operatorname{sp} A = \int_a^b \mathcal{A}(s, s)\,ds,$$

В самом деле, ядро $\mathcal{A}(t, s)$ можно представить в виде линейной комбинации четырех эрмитово-неотрицательных ядер, каждое из которых порождает ядерный оператор, и следовательно, равенство (10.13) вытекает из (10.8).

Оценка (10.14) вытекает из соотношения (10.12), имеющего место для любого ограниченного ядра, и соотношения (10.13).

Наконец, функция $\mathcal{A}_h(s, s)$ при $h \to 0$ стремится равномерно на отрезке $[a, b]$ к функции $\mathcal{A}(s, s)$, если ядро $\mathcal{A}(t, s)$ непрерывно и, стало быть,

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \int_a^b \mathcal{A}_h(s, s)\, ds = \int_a^b \mathcal{A}(s, s)\, ds.$$

3. Оказывается, одна только непрерывность ядра $\mathcal{A}(t, s)$ на всем квадрате $a \leqslant t,\ s \leqslant b$ не гарантирует еще ядерности соответствующего оператора A. Она не гарантирует даже принадлежности A хотя бы одному из классов $\mathfrak{S}_p\ (p < 2)$. Этот факт был впервые обнаружен Т. Карлеманом [1] (см. Н. К. Бари [3]). Т. Карлеман построил непрерывную периодическую функцию $\Phi(t) = \Phi(t+1)$ с разложением Фурье:

$$\Phi(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k t}, \tag{10.15}$$

в котором

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^p = \infty \text{ при любом } p < 2. \tag{10.16}$$

Дело в том, что последовательность $\{c_k\}_{-\infty}^{\infty}$ коэффициентов Фурье такой функции образует полную систему собственных чисел нормального оператора A_Φ в $L_2(0, 1)$ с ядром $\mathcal{A}_\Phi(t, s) = \Phi(t-s)$ $(0 \leqslant t,\ s \leqslant 1)$, а поэтому условие (10.16) означает, что $A_\Phi \overline{\in} \mathfrak{S}_p$ при любом положительном $p < 2$.

Этот результат Карлемана дополним замечанием, что оператор A_Φ будет ядерным, если функция $\Phi(t) = \Phi(t+1)$ принадлежит классу Липшица $\mathrm{Lip}\,\alpha$ с $\alpha > \frac{1}{2}$; действительно в этом случае по известной теореме С. Н. Бернштейна (см. Н. Бари [3], стр. 209) ряд (10.15) абсолютно сходится и, значит,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty.$$

Последний результат интересно сопоставить с результатом Фредгольма [1] из его классического мемуара.

Если ядро $\mathcal{A}(t, s)$ $(a \leqslant t,\ s \leqslant b)$ удовлетворяет по переменной s условию $\operatorname{Lip}\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$

$$|\mathcal{A}(t, s_2) - \mathcal{A}(t, s_1)| \leqslant C\,|s_2 - s_1|^{\alpha}, \tag{10.17}$$

где константа C не зависит от $t \in [a, b]$, то

$$\sum_j |\lambda_j(A)|^p < \infty \text{ при } p > \frac{2}{2\alpha+1}. \tag{10.18}$$

Таким образом, эрмитов оператор A с ядром, удовлетворяющим условию (10.17), будет ядерным, коль скоро $\alpha > 1/2$.

Возможно, что утверждение Фредгольма сохраняет силу при замене в (10.18) чисел $\lambda_j(A)$ на числа $s_j(A)$. Тогда последний вывод будет справедлив и для неэрмитовых операторов A.

Ниже мы получим усиление результата Фредгольма для «гладких» ядер.

4. Пусть $\mathcal{A}(t, s)$ и $\mathcal{B}(t, s)$ $(a \leqslant t,\ s \leqslant b)$ — два ядра, удовлетворяющие условиям

$$\int_a^b |\mathcal{A}(t, s)|^2\, dt < \infty,$$

$$\int_a^b |\mathcal{B}(t, s)|^2\, dt < \infty \quad (a \leqslant s \leqslant b). \tag{10.19}$$

Условимся писать

$$\mathcal{B}(t, s) = \mathcal{A}_{01}(t, s)$$

и говорить, что ядро $\mathcal{B}(t, s)$ является производной в среднем (по s) ядра $\mathscr{A}(t, s)$, если

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \left| \mathscr{B}(t, s) - \frac{\mathscr{A}(t, s+h) - \mathscr{A}(t, s)}{h} \right|^2 dt = 0 \tag{10.20}$$

$$(a \leqslant s \leqslant b).$$

Ядра $\mathscr{A}(t, s)$ и $\mathscr{B}(t, s)$ в силу (10.19) можно трактовать как вектор-функции $X(s)$ и $Y(s)$ $(a \leqslant s \leqslant b)$ со значениями в $L_2(a, b)$. При такой трактовке соотношение (10.20) означает, что вектор-функция $Y(s)$ всюду в $[a, b]$ является сильной производной dX/ds от вектор-функции $X(s)$. Если $g(s)$ $(a \leqslant s \leqslant b)$ — числовая непрерывно дифференцируемая функция, причем $g(a) = g(b) = 0$, то

$$\int_a^b X(s)\, g'(s)\, ds = -\int_a^b \frac{dX}{ds} g(s)\, ds,$$

причем интегралы сходятся в среднем (т. е. по норме $L_2(a, b)$). Поэтому при указанных условиях относительно $g(s)$ будем иметь в смысле сходимости в среднем

$$\int_a^b \mathscr{A}(t, s)\, g'(s)\, ds = -\int_a^b \mathscr{A}_{01}(t, s)\, g(s)\, ds. \tag{10.21}$$

Если вектор-функция $X(s) = \mathscr{A}(t, s)$ сильно дифференцируема в (a, b), то она сильно непрерывна, а следовательно, и ее норма $|X(s)|$ непрерывна в (a, b). Поэтому в этом случае всегда

$$\int_a^b \int_a^b |\mathscr{A}(t, s)|^2\, dt\, ds = \int_a^b |X(s)|^2\, ds < \infty,$$

т. е. $\mathscr{A}(t, s)$ — ядро Гильберта — Шмидта.

Легко видеть, что если и $\mathscr{A}_{01}(t, s)$ — ядро Гильберта — Шмидта, то равенство (10.21) будет иметь место в смысле обычных интегралов Лебега почти всюду в (a, b).

Имеет место предложение

3°. *Если ядро $\mathscr{A}(t, s)$ оператора Гильберта — Шмидта A в $L_2(a, b)$ имеет производную в среднем $\mathscr{A}_{01}(t, s)$,* *являющуюся ядром Гильберта — Шмидта, то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 s_n^2(A) < \infty \tag{10.22}$$

и, следовательно,

$$s_n(A) = o(n^{-3/2}) \qquad (n \to \infty) \tag{10.23}$$

и $A \in \mathfrak{S}_p$ *при любом* $p > 2/3$.

Для доказательства утверждения введем в рассмотрение оператор интегрирования

$$J_1 f = \int_t^b f(s)\,ds.$$

Так как числа $s_n^2(J_1)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ суть собственные числа оператора $J_1^* J_1$, то $\lambda_n = s_n^{-2}(J_1)$ будут характеристическими числами интегрального уравнения

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^t \left(\int_s^b \varphi(u)\,du \right) ds,$$

которое эквивалентно краевой задаче:

$$\varphi'' + \lambda\varphi = 0, \quad \varphi(a) = 0, \; \varphi'(b) = 0.$$

Последовательность $\lambda_n = \dfrac{\pi^2 (2n-1)^2}{4(b-a)^2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ составляет полную систему характеристических чисел этой задачи, и поэтому

$$s_n(J_1) = \frac{b-a}{\pi} \frac{2}{2n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Обозначим через $\mathfrak{L}_0$ подпространство всех $f \in L_2(a, b)$, ортогональных к функции $e(t) \equiv 1$, через Q — ортопроектор, проектирующий $L_2(a, b)$ на $\mathfrak{L}_0$. Тогда $P = I - Q$ будет одномерным ортопроектором:

$$(Pf)(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt \quad (a \leqslant t \leqslant b).$$

Если $f \in \mathfrak{L}_0$, т. е. $Pf = 0$, то $g = J_1 f$ будет решением системы:

$$\frac{dg}{dt} = f(t), \quad g(a) = g(b) = 0.$$

Рассмотрим оператор $A_0 = AQ$. Так как $A - A_0 = AP$ — одномерный оператор, то

$$s_{n-1}(A_0) \leqslant s_n(A) \leqslant s_{n+1}(A_0) \qquad (n = 2, 3, \ldots). \quad (10.24)$$

Пусть теперь $f(t) \in C(a, b)$. Так как $PQf = 0$, то найдется непрерывно дифференцируемая функция $g(t)$ такая, что

$$\frac{dg}{dt} = (Qf)(t), \quad g(a) = g(b) = 0.$$

Тогда

$$(A_0 f)(t) = \int_a^b \mathscr{A}(t, s) \frac{dg}{ds}\, ds =$$

$$= -\int_a^b \mathscr{A}_{01}(t, s)\, g(s)\, ds = -(BJ_1 f)(t),$$

где B — оператор Гильберта — Шмидта с ядром $\mathscr{B}(t, s) = \mathscr{A}_{01}(t, s)$. Так как $C(a, b)$ плотно в $L_2(a, b)$, то заключаем, что

$$A_0 = -BJ_1.$$

Согласно следствию II.2.2

$$s_{2n}(A_0) \leqslant s_{2n-1}(A_0) \leqslant s_n(B)\, s_n(J_1) = \frac{2(b-a)}{\pi(2n-1)}\, s_n(B),$$

и стало быть,

$$\sum_n (2n-1)^2 [s_{2n}^2(A_0) + s_{2n-1}^2(A_0)] \leqslant \frac{8(b-a)^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} s_n^2(B) < \infty.$$

Сопоставляя это неравенство с неравенством (10.24), приходим к (10.22). Сделанное из (10.22) заключение (10.23) мы поясним несколько позже в связи с более общим предложением.

Понятие первой производной в среднем ядра $\mathcal{A}(t, s)$ позволяет ввести понятие l-й производной в среднем $\mathcal{A}_{0l}(t, s)$ $(l = 1, 2, \ldots)$.

Тем же методом*) можно получить следующее обобщение доказанного предложения:

4°. *Если ядро $\mathcal{A}(t, s)$ оператора Гильберта—Шмидта A в $L_2(a, b)$ имеет l-ю производную, в среднем, $\mathcal{A}_{0l}(t, s)$, являющуюся ядром Гильберта—Шмидта, то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2l} s_n^2(A) < \infty, \tag{10.25}$$

а следовательно,

$$s_n(A) = o\left(n^{-\left(l+\frac{1}{2}\right)}\right) \qquad (n \to \infty) \tag{10.26}$$

и $A \in \mathfrak{S}_p$ *при* $p > 1 \Big/ \left(l + \frac{1}{2}\right)$.

Поясним заключение, сделанное из (10.25).

Обозначим через $n(r)$ $(0 < r < \infty)$ число чисел $s_n^{-1}(A)$, лежащих на сегменте $[0, r]$. Из (10.25) следует:

$$\int_0^{\infty} \frac{dn^{2l+1}(r)}{r^2} < \infty.$$

С другой стороны,

$$\int_0^R \frac{dn^{2l+1}(r)}{r^2} = \frac{n^{2l+1}(R)}{R^2} + 2 \int_0^R \frac{n^{2l+1}}{r^3}\, dr.$$

Так как при $R \to \infty$ левая часть стремится к конечному пределу, то при этом и каждое из неотрицательных слагаемых (из которых второе монотонное) правой части стремится к конечному пределу. Но тогда первое слагаемое должно стремиться к нулю, ибо иначе интеграл, представляющий второе слагаемое, расходился бы. Тем самым (10.26) доказано.

---

*) Основная идея этого метода заимствована из статьи М. Г. Крейна [1], в которой установлены родственные предложения.

Согласно следствию II.3.2 из (10.26) следует, что

$$\lambda_n(A) = o\left(n^{-\left(l+\frac{1}{2}\right)}\right). \tag{10.27}$$

Для эрмитовых ядер $\mathcal{A}(t, s)$ при более жестких требованиях относительно производных $\mathcal{A}_{0k}(t, s)$ $(k=0, 1, \ldots, l)$ соотношение (10.27) было получено Г. Вейлем [1], затем для $l=1$ при еще более жестких требованиях для неэрмитовых ядер — С. Мазуркевичем [1] и, наконец, для неэрмитовых $\mathcal{A}(t, s)$ для любого целого l также при более жестких требованиях, нежели в 4°, А. О. Гельфонд [1, 2] получил, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\lambda_n(A) = o\left(\frac{1}{n^{l+\frac{1}{2}+\varepsilon}}\right).$$

Наше рассуждение является иллюстрацией к общему методу, позволяющему получить при определенных условиях на ядро оператора $\mathcal{A}(t, s)$ соотношения типа (10.25). Этот метод допускает обобщение на случай интегральных операторов, действующих в $L_2(Q)$, где Q — некоторая открытая область n-мерного евклидова пространства. Укажем также, что несколько признаков ядерности таких операторов в недавнее время получил В. Ф. Стайнспринг [1] *).

Ряд предложений об асимптотическом поведении спектра интегрального оператора можно найти в уже цитировавшемся по другому поводу мемуаре Хилле — Тамаркина [1].

5. Само собой разумеется, что приведенные в этом параграфе предложения обобщаются на случай операторов, действующих в пространствах $L_2^{(r)}(a, b)$ с матричными ядрами.

---

*) Применимость изложенного здесь метода к получению различных характеристик s-чисел многомерных линейных операторов, повышающих гладкость, рассмотрена в недавней работе В. И. Параски [1]. В этой же работе дается сравнение получаемых на этом пути результатов с результатами Ш. Агмона [1]. По-видимому, Ш. Агмон не знал работы М. Г. Крейна [4].

Приведем, например, соответствующие обобщения предложения 2° и теоремы 10.1.

Пусть $\sigma(t)=\|\sigma_{jk}(t)\|_1^r$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ — произвольная матрица-функция, обладающая следующими двумя свойствами:

а) все функции $\sigma_{jk}(t)$ имеют ограниченную вариацию;

б) для любых t_1, t_2 $(a\leqslant t_1<t_2\leqslant b)$ матрица $\Delta\sigma(t)=\sigma(t_2)-\sigma(t_1)$ является эрмитово-неотрицательной.

В пространстве $C^{(r)}(a, b)$ всех непрерывных вектор-функций $f(t)=\{f_j(t)\}_1^r$ определим скалярное произведение

$$(f, g)_\sigma=\int_a^b f(s)\,d\sigma(s)\,g^*(s)\quad (f, g\in C^{(r)}). \tag{10.28}$$

Замыкая $C^{(r)}(a, b)$ по норме, порожденной скалярным произведением (10.28), получим некоторое гильбертово пространство, обозначаемое через $L_{2,\sigma}^{(r)}(a, b)$ *).

Легко видеть, что всякое непрерывное матричное ядро $\mathcal{A}(t, s)$ (т. е. матричное ядро с непрерывными элементами) $(a\leqslant t,\ s\leqslant b)$ порождает в $L_{2,\sigma}^{(r)}$ оператор Гильберта—Шмидта A, если для любого $f\in C^{(r)}(a, b)$ положить

$$(Af)(t)=\int_a^b \mathcal{A}(t, s)\,d\sigma(s)\,f(s). \tag{10.29}$$

Матричное ядро $\mathcal{A}(t, s)=\|a_{jk}(t, s)\|_1^r$ с элементами из L_1 на основном квадрате называется эрмитово-положительным, если для любой вектор-функции $\varphi(t)$ $(\in C^{(r)}(a, b))$

$$\int_a^b\int_a^b \varphi^*(t)\,\mathcal{A}(t, s)\,\varphi(s)\,dt\,ds\geqslant 0. \tag{10.30}$$

Для непрерывного ядра $\mathcal{A}(t, s)$ последнее условие (10.30) эквивалентно следующему:

$$\sum_{j,\,k=1}^n \xi_j^*\mathcal{A}(t_j, t_k)\,\xi_k\geqslant 0,$$

---

*) В книге Н. И. Ахиезера и И. М. Глазмана [1] (п. 72 гл. VI) можно найти данную И. С. Кацем теоретико-функциональную характеристику элементов пространства $L_{2,\sigma}^{(r)}(a, b)$.

где t_j $(j=1, 2, \ldots, n;\ n=1, 2, \ldots)$ — произвольные точки отрезка $[a, b]$, а ξ_j $(j=1, 2, \ldots, n)$ — произвольные векторы из E_r.

На оператор A, порожденный в $L^{(r)}_{2,\sigma}$ по формуле (10.29) эрмитово-неотрицательным непрерывным ядром $\mathcal{A}(t, s)$, распространяется теория Гильберта — Шмидта — Мерсера. Отсюда следует, что такой оператор *всегда ядерный и его след вычисляется по формуле* *)

$$\operatorname{sp} A = \int\limits_a^b \operatorname{sp}[\mathcal{A}(s, s)\, d\sigma(s)].$$

Матричным аналогом теоремы 10.1 будет следующее предложение:

Теорема 10.1′. *Для того чтобы эрмитово-неотрицательное матричное ядро Гильберта — Шмидта* $\mathcal{A}(t, s)=\|a_{jk}(t, s)\|_1^r$ $(a\leqslant t, s\leqslant b)$ *порождало в* $L_2^{(r)}(a, b)$ *по формуле*

$$(Af)(t)=\int\limits_a^b \mathcal{A}(t, s) f(s)\, ds$$

ядерный оператор, необходимо и достаточно, чтобы

$$\varlimsup_{h\to 0}\int\limits_a^b \operatorname{sp} \mathcal{A}_h(s, s)\, ds<\infty, \tag{10.31}$$

где

$$\mathcal{A}_h(t, s)=\frac{1}{4h^2}\int\limits_{t-h}^{t+h}\int\limits_{s-h}^{s+h} \mathcal{A}(u, v)\, du\, dv.$$

Если условие (10.31) *выполняется, то*

$$\operatorname{sp} A=\lim_{h\to 0}\int\limits_a^b \operatorname{sp} \mathcal{A}_h(s, s)\, ds. \tag{10.32}$$

*) В этой и в дальнейших формулах след конечной матрицы для ясности обозначается sp.

Отметим, что так же, как в скалярном случае, условие (10.31) и равенство (10.32) можно записать в иной форме, если учесть, что

$$\int_a^b \operatorname{sp} \mathcal{A}_h(s, s)\, ds = \frac{1}{4h^2} \int_a^b \int_a^b [2h - |t - s|]_+ \operatorname{sp} \mathcal{A}(t, s)\, dt\, ds.$$

Отметим наконец, что если заранее известно, что оператор A ядерный, то его след вычисляется по формуле (10.32). Если, кроме того, ядро $\mathcal{A}(t, s)$ непрерывно, то

$$\operatorname{sp} A = \int_a^b \operatorname{sp} \mathcal{A}(s, s)\, ds.$$

§ 11. Функции, сопряженные к с. н. функциям

1. Пусть $\Phi(\xi)$ — некоторая с. н. функция и $\eta = \{\eta_j\} \in \hat{k}$ — произвольный фиксированный вектор. Рассмотрим функцию

$$F(\xi) = \frac{1}{\Phi(\xi)} \sum_j \xi_j \eta_j \qquad (\xi \in \hat{k};\ \xi \neq 0)$$

и положим

$$F(0) = 0. \tag{11.1}$$

Очевидно, что

$$F(\xi) \leqslant \sum_j \frac{\xi_j}{\xi_1} \eta_j \leqslant \sum_j \eta_j \quad (\xi \in \hat{k})$$

и

$$F(\alpha\xi) = F(\xi) \qquad (\xi \in \hat{k})$$

для любого положительного α. Кроме того, если ν — наибольший номер ненулевой координаты вектора η, то для любого вектора $\xi = \{\xi_j\} \in \hat{k}$

$$F(\xi) \leqslant F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu, 0, 0, \ldots).$$

Из перечисленных свойств функции $F(\xi)$ следует, что она ограничена и принимает свое наибольшее значение.

Таким образом, функция

$$\Phi^*(\eta) = \max_{\xi \in \hat{k}} \left[\frac{1}{\Phi(\xi)} \sum_j \eta_j \xi_j \right] \tag{11.2}$$

имеет смысл для всех векторов $\eta \in \hat{k}$. Эту функцию мы назовем *сопряженной* к функции $\Phi(\xi)$.

Теорема 11.1. *Функция $\Phi^*(\eta)$ ($\eta \in \hat{k}$), сопряженная к некоторой с. н. функции $\Phi(\xi)$, сама является с. н. функцией. Сопряженной функцией к $\Phi^*(\eta)$ является функция $\Phi(\xi)$.*

Доказательство. Очевидно, что функция $\Phi^*(\eta)$, определенная равенством (11.2), обладает свойствами I')—III') с. н. функции (см. § 3).

Так как

$$\frac{1}{\Phi(\xi)} \sum_j \eta_j \xi_j = \frac{1}{\Phi(\xi)} \sum_j \left(\sum_{m=1}^{j} \eta_m \right) (\xi_j - \xi_{j+1}),$$

а $\xi_j \geqslant \xi_{j+1}$, то функция $\Phi^*(\eta)$ обладает также свойством V'). Учитывая, наконец, что $\xi_1 \leqslant \Phi(\xi)$ и $\Phi(1, 0, 0, \ldots) = 1$, получаем

$$\Phi^*(1, 0, 0, \ldots) = 1.$$

Следовательно, $\Phi^*(\eta)$ является с. н. функцией.

Рассмотрим теперь n-мерное векторное пространство $\hat{c}_n$, состоящее из всех последовательностей комплексных чисел вида $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots\}$.

Равенством

$$|\xi| = \Phi(\xi^*) \qquad (\xi \in \hat{c}_n) \tag{11.3}$$

в пространстве $\hat{c}_n$ определяется норма *). В самом деле,

$$|\xi| > 0 \qquad (\xi \in \hat{c}_n;\quad \xi \neq 0);$$

для любого комплексного λ

$$|\lambda\xi| = |\lambda|\,|\xi| \qquad (\xi \in \hat{c}_n).$$

*) Напомним, что вектор ξ^* составлен из модулей компонент вектора ξ, расположенных в убывающем порядке.

Докажем неравенство треугольника. Пусть ξ, $\eta \in \hat{c}_n$ и $\zeta = \xi + \eta$. Тогда, очевидно,

$$\sum_{j=1}^{m} \zeta_j^* \leqslant \sum_{j=1}^{m} \xi_j^* + \sum_{j=1}^{m} \eta_j^* \qquad (m = 1, 2, \ldots, n),$$

и стало быть,

$$\Phi(\zeta^*) \leqslant \Phi(\xi^* + \eta^*). \tag{11.4}$$

Так как

$$\Phi(\xi^* + \eta^*) \leqslant \Phi(\xi^*) + \Phi(\eta^*), \tag{11.5}$$

то из (11.4) и (11.5) следует

$$|\xi + \eta| \leqslant |\xi| + |\eta|.$$

Таким образом, пространство $\hat{c}_n$ с нормой (11.3) является банаховым пространством.

Пусть

$$f(\xi) = \sum_{j=1}^{n} f_j \xi_j \qquad (\xi \in \hat{c}_n)$$

— произвольный линейный функционал из $\hat{c}_n^*$. Тогда

$$|f| = \max_{\xi \in \hat{c}_n} \left[\frac{1}{\Phi(\xi^*)} \left| \sum_{j=1}^{n} f_j \xi_j \right| \right].$$

Легко видеть, что

$$\max_{\xi \in \hat{c}_n} \left[\frac{1}{\Phi(\xi^*)} \left| \sum_{j=1}^{n} f_j \xi_j \right| \right] = \max_{\xi \in \hat{c}_n} \left[\frac{1}{\Phi(\xi^*)} \sum_{j=1}^{n} f_j^* \xi_j^* \right].$$

Кроме того, легко видеть, что

$$\max_{\xi \in \hat{c}_n} \left[\frac{1}{\Phi(\xi^*)} \sum_{j=1}^{n} f_j^* \xi_j^* \right] = \max_{\xi \in \hat{k}} \left[\frac{1}{\Phi(\xi)} \sum_{j=1}^{n} f_j^* \xi_j \right].$$

Следовательно,

$$|f| = \Phi^*(f^*). \tag{11.6}$$

Так как любое конечномерное банахово пространство рефлексивно, то из (11.3) и (11.6) следует

$$\Phi^{**}(\xi^*) = \Phi(\xi^*) \qquad (\xi \in \hat{c}_n).$$

Теорема доказана.

2. В дальнейшем будет полезно следующее замечание. Пусть $\Phi(\xi)$ $(\xi \in \hat{k})$ — некоторая с. н. функция. Если функция $\Psi(\xi)$ $(\xi \in \hat{k})$ удовлетворяет условию

$$\sum_j \xi_j \eta_j \leqslant \Phi(\xi)\Psi(\eta) \qquad (\xi,\ \eta \in \hat{k}), \tag{11.7}$$

причем для любого вектора ξ (соответственно η) из $\hat{k}$ найдется вектор η (соответственно ξ) из $\hat{k}$, для которого в (11.7) имеет место равенство, то

$$\Phi^*(\eta) = \Psi(\eta) \quad (\eta \in \hat{k}).$$

В качестве примера рассмотрим с. н. функцию

$$\Phi_p(\xi) = \Bigl(\sum_j \xi_j^p\Bigr)^{1/p} \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty;\ \xi \in \hat{k}).$$

Согласно неравенству Гельдера

$$\sum_j \eta_j \xi_j \leqslant \Phi_p(\xi)\,\Phi_q(\eta) \quad (p^{-1} + q^{-1} = 1;\ \xi,\ \eta \in \hat{k}), \tag{11.8}$$

причем при любом фиксированном $\xi \in \hat{k}$ равенство достигается в (11.8) в том и только том случае, когда

$$\eta_j = c\xi_j^{p-1} \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

где c — произвольная положительная постоянная, а при фиксированном $\eta \in \hat{k}$ равенство в (11.8) имеет место в том и только том случае, когда

$$\xi_j = c\eta_j^{q-1} \qquad (j = 1,\ 2, \ldots).$$

Таким образом,

$$\Phi_p^*(\eta) = \Phi_q(\eta) \qquad (p^{-1} + q^{-1} = 1).$$

В частности, минимальная и максимальная с. н. функции являются сопряженными друг к другу. Поэтому когда с. н. функция $\Phi(\xi)$ эквивалентна максимальной (минимальной), сопряженная функция $\Phi(\xi)$ эквивалентна минимальной (максимальной).

§ 12. Симметрично-нормированные идеалы, сопряженные к сепарабельным симметрично-нормированным идеалам

1. Как известно, через c_0, l_p $(1 \leqslant p < \infty)$ и m в функциональном анализе обозначаются банаховы пространства последовательностей чисел $\xi = \{\xi_j\}_1^\infty$, удовлетворяющих соответственно условиям:

1) $$\lim \xi_j = 0, \quad |\xi|_c = \max_j |\xi_j|;$$

2) $$(|\xi|_p)^p = \sum_j |\xi_j|^p < \infty,$$

3) $$|\xi|_m = \sup_j |\xi_j| < \infty.$$

Между этими пространствами имеется следующая связь: сопряженное пространство к l_1 эквивалентно m, сопряженное пространство к l_p $(1 < p < \infty)$ эквивалентно l_q $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$ и пространство l_1 эквивалентно сопряженному пространству к c_0.

Точнее, первое из этих утверждений означает следующее:

Общий вид линейного непрерывного функционала $f(\xi)$ в пространстве l_1 задается формулой

$$f(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \xi_j,$$

где $f = \{f_j\}_1^\infty$ — какой-либо вектор из m, причем

$$|f| = |f|_{l_1^*} = \sup_{\xi \in l_1} [|f(\xi)| / |\xi|_{l_1}] = |f|_m.$$

Второе и третье — аналогичны.

Этим предложениям, в известном смысле, соответствуют приводимые в данном параграфе теоремы о пространствах, сопряженных к $\mathfrak{S}_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. При этой аналогии роль пространств c_0, l_p $(1 \leqslant p < \infty)$ и m играют соответственно пространства $\mathfrak{S}_\infty$, $\mathfrak{S}_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ и пространство всех линейных ограниченных операторов $\mathfrak{R}$.

Все эти предложения будут получены как следствия общих теорем о пространствах, сопряженных сепарабельным с. н. идеалам.

2. Начнем со следующего предложения.

Теорема 12.1. *Общий вид линейного непрерывного функционала $F(X)$ в банаховом пространстве $\mathfrak{S}_1$ дается формулой:*

$$F(X) = \operatorname{sp}(AX),$$

где A — произвольный оператор из $\mathfrak{R}$, причем

$$|F| = \sup_{X \in \mathfrak{S}_1} \frac{|\operatorname{sp}(AX)|}{|X|_1} = |A|.$$

Таким образом, пространство $\mathfrak{R}$ изометрично пространству, сопряженному к $\mathfrak{S}_1$.

Доказательство. В самом деле, пусть A — произвольный линейный ограниченный оператор. Тогда формула

$$F(X) = \operatorname{sp}(AX) \quad (X \in \mathfrak{S}_1)$$

определяет линейный функционал. Этот функционал непрерывен, так как в силу теоремы 8.5

$$|\operatorname{sp}(AX)| \leqslant |AX|_1 \leqslant |A|\,|X|_1. \tag{12.1}$$

Из (12.1) следует, что $|F| \leqslant |A|$. Для доказательства того, что в последнем соотношении имеет место знак равенства, рассмотрим последовательность ортов φ_n такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} |A\varphi_n| = |A|$. Образуем одномерные операторы

$$X_n = \frac{1}{|A\varphi_n|}(\cdot, A\varphi_n)\,\varphi_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Очевидно, что $|X_n|_1 = 1$ и $F(X_n) = \operatorname{sp}(AX_n) = |A\varphi_n|$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Стало быть, $|F| = |A|$.

Обратно, пусть $F(X)$ — произвольный линейный непрерывный функционал, определенный на $\mathfrak{S}_1$.

Образуем форму

$$B(f, g) = F(X_{f, g}),$$

где $X_{f, g} = (\cdot, g)\,f$, а f и g — произвольные векторы из $\mathfrak{H}$.

Легко видеть, что $B(f, g)$ является билинейной формой. Кроме того, из соотношения

$$|F(X_{f,g})| \leqslant |F|\,|X_{f,g}|_1 = |F|\,|f|\,|g| \qquad (f, g \in \mathfrak{H})$$

следует

$$|B(f, g)| \leqslant |F|\,|f|\,|g| \qquad (f, g \in \mathfrak{H}).$$

Это означает, что форма $B(f, g)$ является ограниченной. Стало быть, найдется линейный ограниченный оператор A такой, что

$$B(f, g) = (Af, g).$$

Таким образом, для любого оператора $X_{f,g}$:

$$F(X_{f,g}) = (Af, g) = \operatorname{sp}(AX_{f,g}). \tag{12.2}$$

Пусть X — произвольный оператор из $\mathfrak{S}_1$; тогда он разлагается в сходящийся по норме $\mathfrak{S}_1$ (см. лемму 6.1) ряд Шмидта

$$X = \sum_j s_j(X)(\cdot, \varphi_j)\psi_j.$$

В силу линейности и непрерывности функционала $F(X)$

$$F(X) = \sum_j s_j(X) F(X_{\psi_j, \varphi_j});$$

учитывая (12.2), получаем

$$F(X) = \sum_j s_j(X)(A\psi_j, \varphi_j) = \operatorname{sp}(AX).$$

Теорема доказана.

3. Теорема 12.2. *Пусть $\Phi(\xi)$ — произвольная с. н. функция, не эквивалентная максимальной.*

Тогда общий вид линейного непрерывного функционала $F(X)$ в сепарабельном пространстве $\mathfrak{S}_\Phi^{(0)}$ дается формулой

$$F(X) = \operatorname{sp}(AX), \tag{12.3}$$

где A — произвольный оператор из $\mathfrak{S}_{\Phi^*}$, причем

$$|F| = \sup_{X \in \mathfrak{S}_\Phi^{(0)}} \frac{|\operatorname{sp}(AX)|}{|X|_\Phi} = |A|_{\Phi^*}.$$

Таким образом, пространство $\mathfrak{S}_{\Phi^*}$ *изометрично пространству, сопряженному к пространству* $\mathfrak{S}_{\Phi}^{(0)}$.

В частности, если обе функции $\Phi(\xi)$ *и* $\Phi^*(\xi)$ *являются мононормирующими, то пространство* $\mathfrak{S}_{\Phi}$ *рефлексивно.*

Доказательство. Так же, как и в доказательстве теоремы 12.1, устанавливается, что любой оператор $A \in \mathfrak{S}_{\Phi^*}$ порождает по формуле (12.3) линейный непрерывный функционал F, причем

$$|F| \leqslant |A|_{\Phi^*}. \tag{12.4}$$

Покажем, что в соотношении (12.4) имеет место знак равенства. Для этого, отправляясь от разложения Шмидта:

$$A = \sum_j s_j(A)(\cdot, \varphi_j)\psi_j,$$

образуем операторы

$$K_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(n)}(\cdot, \psi_j)\varphi_j \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

где векторы $\xi^{(n)} = \{\xi_j^{(n)}\}_1^n$ подобраны так, чтобы $\Phi(\xi^{(n)}) = 1$ и

$$\sum_{j=1}^{n} s_j(A)\xi_j^{(n)} = \\ = \Phi^*(s_1(A), s_2(A), \ldots, s_n(A), 0, 0, \ldots) = |A_n|_{\Phi^*}. \tag{12.5}$$

Через A_n обозначен n-й отрезок ряда Шмидта оператора A.

Так как

$$AK_n = \sum_{j=1}^{n} s_j(A)\xi_j^{(n)}(\cdot, \psi_j)\psi_j,$$

то

$$F(K_n) = \mathrm{sp}(AK_n) = \sum_{j=1}^{n} s_j(A)\xi_j^{(n)},$$

и стало быть, в силу (12.5)

$$F(K_n) = |A_n|_{\Phi^*}.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} F(K_n) = |A|_{\Phi^*}.$$

Принимая во внимание, что $|K_n|_\Phi = \Phi(\xi^{(n)}) = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, заключаем, что

$$|F| = |A|_{\Phi^*}.$$

Пусть теперь $F(X)$ — произвольный линейный ограниченный функционал на $\mathfrak{S}_\Phi^{(0)}$; покажем, что он допускает представление (12.3). Функционал $F(X)$ одновременно является линейным непрерывным функционалом в $\mathfrak{S}_1$, стало быть, в силу теоремы 12.1, найдется линейный ограниченный оператор A такой, что для всех $X \in \mathfrak{S}_1$

$$F(X) = \mathrm{sp}(AX). \tag{12.6}$$

Обозначим через P_n $(n = 1, 2, \ldots)$ какую-либо монотонно возрастающую последовательность конечномерных ортопроекторов, стремящуюся сильно к единичному оператору.

Образуем функционалы

$$F_n(X) = F(P_n X P_n).$$

Функционалы $F_n(X)$ непрерывны, причем

$$|F_n(X)| = |F(P_n X P_n)| \leqslant |F|\,|X|_\Phi. \tag{12.7}$$

Из (12.6) следует, что

$$F_n(X) = \mathrm{sp}(AP_n X P_n) = \mathrm{sp}(P_n A P_n X).$$

Так как операторы $P_n A P_n$ конечномерны, а следовательно, принадлежат $\mathfrak{S}_{\Phi^*}$, то согласно доказанной части теоремы и (12.7) будем иметь

$$|F_n| = |P_n A P_n|_{\Phi^*} \leqslant |F| \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{12.8}$$

По условию функция $\Phi(\xi)$ не эквивалентна максимальной, а следовательно, функция $\Phi^*(\xi)$ не эквивалентна минимальной. В силу теоремы 5.2 из соотношения (12.8) и следует, что оператор $A \in \mathfrak{S}_{\Phi^*}$.

Теорема доказана.

4. Мононормирующая функция

$$\Phi_p(\xi) = \Big(\sum_j \xi_j^p\Big)^{1/p}$$

при $p \leqslant \infty$ $(p > 1)$ не эквивалентна максимальной. Как уже отмечалось, $\Phi_p^*(\xi) = \Phi_q(\xi)$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$. Таким образом, из доказанных теорем следует

Теорема 12.3. *Общий вид линейного ограниченного функционала $F(X)$ в $\mathfrak{S}_p$ $(1 < p \leqslant \infty)$ дается формулой*

$$F(X) = \mathrm{sp}\,(AX),$$

где A — некоторый оператор из $\mathfrak{S}_q$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$, причем

$$|F| = \sup_{X \in \mathfrak{S}_p} \frac{|\mathrm{sp}\,(AX)|}{|X|_p} = |A|_q.$$

Таким образом, сопряженное пространство к $\mathfrak{S}_p$ $(1 < p \leqslant \infty)$ изометрично пространству $\mathfrak{S}_q$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$, и следовательно, всякое пространство $\mathfrak{S}_p$ $(1 < p < \infty)$ является рефлексивным.

5. Теорема 12.2 позволяет сформулировать в дополнение к теореме 5.2 еще один используемый в дальнейшем критерий того, что ограниченный оператор принадлежит пространству $\mathfrak{S}_\Phi$.

Лемма 12.1. *Пусть $\Phi(\xi)$ — произвольная с. н. функция, не эквивалентная минимальной. Для того чтобы оператор $A \in \mathfrak{S}_\Phi$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sup_{K \in \mathfrak{K}} \frac{|\mathrm{sp}\,(AK)|}{|K|_{\Phi^*}} < \infty, \tag{12.9}$$

где $\mathfrak{K}$, по-прежнему, — множество всех конечномерных операторов.

Доказательство. Необходимость условия (12.9) очевидна, докажем его достаточность.

При выполнении условия (12.9) функционал $F(K) = \mathrm{sp}\,(AK)$ будет непрерывен на $\mathfrak{K}$, рассматриваемом как часть $\mathfrak{S}_{\Phi^*}^{(0)}$. Так как $\mathfrak{K}$ плотно в $\mathfrak{S}_{\Phi^*}^{(0)}$, то функционал $F(K)$ может быть расширен на все $\mathfrak{S}_{\Phi^*}^{(0)}$ с сохранением линейности и непрерывности.

После этого в силу теоремы 12.2 он будет допускать представление в виде

$$F(X) = \mathrm{sp}(BX) \quad (X \in \mathfrak{S}_{\Phi^*}^{(0)}),$$

где B — некоторый оператор из $\mathfrak{S}_\Phi$. Стало быть, для $K \in \mathfrak{K}$ будем иметь

$$\mathrm{sp}(AK) = \mathrm{sp}(BK).$$

Записывая это равенство для произвольного одномерного оператора $K = (\cdot, \varphi)\psi$ $(\varphi, \psi \in \mathfrak{H})$, получаем

$$(A\varphi, \psi) = (B\varphi, \psi) \quad (\varphi, \psi \in \mathfrak{H}).$$

Отсюда заключаем, что $A = B \in \mathfrak{S}_\Phi$.

Лемма доказана.

6. Используя определения и свойства s-чисел для произвольных ограниченных операторов (см. § 7 гл. II), можно обобщить теорему 12.1 для любого с. н. идеала $\mathfrak{S}_\Phi^{(0)}$, определенного произвольной с. н. функцией, эквивалентной максимальной. Для формулировки теоремы понадобится понятие симметричной нормы в $\mathfrak{R}$.

Если функционал $|A|_\mathfrak{S}$ определен на всем $\mathfrak{R}$ и обладает на кольце $\mathfrak{R}$ всеми свойствами 1) —5) симметричной нормы, то $|A|_\mathfrak{S}$ назовем *симметричной нормой в* $\mathfrak{R}$.

Легко показать, что для всякой симметричной нормы в $\mathfrak{R}$

$$|A| \leqslant |A|_\mathfrak{S} \leqslant \sum_j s_j(A) \quad (A \in \mathfrak{R}). \tag{12.10}$$

Так как

$$|A| \leqslant |A|_\mathfrak{S} \leqslant |I|_\mathfrak{S} |A|,$$

то всякая симметричная норма в $\mathfrak{R}$ топологически эквивалентна обычной норме операторов.

Пусть $\Phi(\xi)$ — произвольная с. н. функция, эквивалентная минимальной. Тогда равенством

$$|A|_\Phi = \lim_{n\to\infty} \Phi(s_1(A), s_2(A), \ldots, s_n(A), 0, 0, \ldots) \tag{12.11}$$

определяется симметричная норма в $\mathfrak{R}$.

В самом деле, из соотношения

$$\sup_n \Phi(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots) < \infty$$

следует, что для любого $A \in \mathfrak{R}$

$$|A|_\Phi < \infty.$$

Без труда проверяется, что норма $|A|_\Phi$ удовлетворяет всем условиям 1) — 5) симметричной нормы в $\mathfrak{R}$.

Если $\Phi(\xi)$ — произвольная с. н. функция, эквивалентная минимальной, то через $\mathfrak{R}_\Phi$ будем обозначать нормированное кольцо всех ограниченных операторов, в котором норма определяется равенством (12.11).

Теорема 12.4. *Пусть $\Phi(\xi)$ — произвольная с. н. функция, эквивалентная максимальной. Тогда общий вид линейного непрерывного функционала $F(X)$ в сепарабельном пространстве $\mathfrak{S}_\Phi$ дается формулой*

$$F(X)=\mathrm{sp}(AX), \tag{12.12}$$

где A — произвольный оператор из $\mathfrak{R}$, причем

$$|F|=\sup_{X\in\mathfrak{S}_\Phi}\frac{|\mathrm{sp}(AX)|}{|X|_\Phi}=|A|_{\Phi^*}.$$

Таким образом, пространство $\mathfrak{R}_{\Phi^*}$ изометрично пространству, сопряженному к с. н. идеалу $\mathfrak{S}_\Phi$.

Доказательство. Так как пространства $\mathfrak{S}_\Phi$ и $\mathfrak{S}_1$ состоят из одних и тех же операторов и нормы в них топологически эквивалентны, то формулой

$$F(X)=\mathrm{sp}(AX)\quad (X\in\mathfrak{S}_\Phi), \tag{12.13}$$

где $A\in\mathfrak{R}$, дается общий вид линейного функционала на $\mathfrak{S}_\Phi$.

Пусть K — произвольный конечномерный оператор, тогда

$$|\mathrm{sp}(AK)|\leqslant|AK|_1=\sum_j s_j(AK),$$

а следовательно, в силу леммы II.4.2

$$|\mathrm{sp}(AK)|\leqslant\sum_j s_j(A)\,s_j(K). \tag{12.14}$$

Функция $\Phi^*(\xi)$ является минимальной и, следовательно, имеет смысл величина $|A|_{\Phi^*}$. Согласно определению сопряженной с. н. функции, из (12.14) следует:

$$|\mathrm{sp}(AK)|\leqslant|A|_{\Phi^*}|K|_\Phi\quad (K\in\mathfrak{K}). \tag{12.15}$$

Последнее соотношение означает, что

$$|F|\leqslant|A|_{\Phi^*}. \tag{12.16}$$

Докажем, что в (12.16) имеет место знак равенства.

Пусть полярное представление оператора A имеет вид $A=HU$. Обозначим через $p\ (\leqslant\infty)$ наименьшее число, для которого $s_{p+1}(A)=s_\infty(A)$, и через $\varphi_j\ (j=1, 2, \ldots, p)$ — ортонормированную систему собственных векторов оператора H, отвечающих собственным числам $s_j(A)$ $(j=1, 2, \ldots, p)$. Каждому положительному числу ε сопоставим подпространство

$$\mathfrak{N}_\varepsilon = E(s_\infty(A)+0)\,\mathfrak{H} \ominus E(s_\infty(A)-\varepsilon)\,\mathfrak{H},$$

где $E(\lambda)$ — спектральная функция оператора H. Если число p конечно, то подпространство $\mathfrak{N}_\varepsilon$ бесконечномерно. В этом случае через φ_j $(j=p+1, p+2, \ldots)$ обозначим произвольную ортонормированную систему векторов из $\mathfrak{N}_\varepsilon$.

Таким образом, система $\{\varphi_j\}$ всегда является бесконечной ортонормированной системой. Образуем операторы H_n, полагая

$$H_n = \sum_{j=1}^{n} s_j(A)(\cdot, \varphi_j)\,\varphi_j \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Легко видеть, что если через P_n обозначить ортопроектор на подпространство $\mathfrak{M}_{\varepsilon;\,n}$ с базисом $\{\varphi_j\}_1^n$, то

$$|P_nHP_n - H_n| < \varepsilon \qquad (n=1, 2, \ldots). \tag{12.17}$$

Образуем еще конечномерные операторы L_n, полагая

$$L_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(n)}(\cdot, \varphi_j)\,\varphi_j \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

где векторы $\xi^{(n)} = \{\xi_j^{(n)}\}_1^n$ подобраны так, чтобы $\Phi(\xi^{(n)})=1$ и

$$\sum_{j=1}^{n} s_j(A)\,\xi_j^{(n)} = \Phi^*(s_1(A), \ldots, s_n(A), 0, 0, \ldots) = |H_n|_{\Phi^*}$$
$$(n=1, 2, \ldots). \tag{12.18}$$

Очевидно, $|L_n|_\Phi = 1$ $\qquad (n=1, 2, \ldots)$.

Для операторов $K_n = U^*L_n$ будем иметь

$$|K_n|_\Phi = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{sp}(AK_n) = \operatorname{sp}(HUU^*L_n) = \operatorname{sp}(HL_n) \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Так как

$$\operatorname{sp}(HL_n) = \operatorname{sp}(P_nHP_nL_n),$$

то

$$\operatorname{sp}(HL_n) \geqslant \operatorname{sp}(H_nL_n) - \operatorname{sp}((H_n - P_nHP_n)\,L_n),$$

и следовательно,

$$\operatorname{sp}(HL_n) \geqslant \operatorname{sp}(H_nL_n) - |H_n - P_nHP_n|\,|L_n|_1. \tag{12.19}$$

По условию функция $\Phi(\xi)$ эквивалентна максимальной, т. е.

$$C = \sup_{\xi \in \hat{k}} \left[\frac{1}{\Phi(\xi)} \sum_j \xi_j \right] < \infty.$$

Отсюда следует, что

$$|L_n|_1 \leqslant C\,|L_n|_\Phi = C. \tag{12.20}$$

Из соотношений (12.17), (12.19) и (12.20) вытекает соотношение

$$\mathrm{sp}\,(HL_n) \geqslant \mathrm{sp}\,(H_nL_n) - C\varepsilon. \tag{12.21}$$

Принимая во внимание, что

$$H_nL_n = \sum_{j=1}^{n} s_j(A)\,\xi_j^{(n)}\,(\cdot,\ \varphi_j)\,\varphi_j,$$

получаем

$$\mathrm{sp}\,(H_nL_n) = \sum_{j=1}^{n} s_j(A)\,\xi_j^{(n)}.$$

Таким образом, в силу (12.18) и (12.21)

$$\mathrm{sp}\,(AK_n) = \mathrm{sp}\,(AL_n) \geqslant |H_n|_{\Phi^*} - C\varepsilon$$

и

$$\sup_n \mathrm{sp}\,(AK_n) \geqslant |A|_{\Phi^*} - C\varepsilon.$$

Теорема доказана.

§ 13. Теорема о трех прямых для оператор-функций, кочующих в пространствах $\mathfrak{S}_p$

В теории функций хорошо известно следующее предложение, носящее название «теоремы о трех прямых»:

Пусть $f(z)$ — *функция, голоморфная в полосе* $a \leqslant \mathrm{Re}\, z \leqslant b$. *Если*

$$|f(a+iy)| \leqslant C_1 \quad \text{и} \quad |f(b+iy)| \leqslant C_2 \qquad (-\infty < y < \infty),$$

то при любом x $(a < x < b)$

$$|f(x+iy)| \leqslant C_1^{1-t_x} C_2^{t_x} \qquad (-\infty < y < \infty),$$

где $t_x = (x-a)/(b-a)$.

Это предложение без труда обобщается на вектор-функции со значениями в произвольном банаховом пространстве (см. Н. Данфорд и Дж. Т. Шварц [1]).

Более тонких рассуждений требует доказательство предложения, названного нами «теоремой о трех прямых для кочующих оператор-функций».

Формулировке теоремы предпошлем два определения. Пусть H — неотрицательный оператор из $\mathfrak{S}_\infty$ и

$$H = \sum_j \lambda_j (\cdot, \varphi_j) \varphi_j$$

— его спектральное представление. Тогда под H^z ($\operatorname{Re} z \geqslant 0$) условимся понимать оператор, определяемый равенством:

$$H^z = \sum_j \lambda_j^z (\cdot, \varphi_j) \varphi_j \quad (\lambda^z = e^{z \ln \lambda}, \ -\infty < \ln \lambda < \infty).$$

Очевидно,

$$H^z \quad (\operatorname{Re} z > 0)$$

— нормальный оператор.

Оператор-функция $T_z \in \Re$ ($z \in G$) называется голоморфной в области G, если для любых векторов φ, $\psi \in \mathfrak{H}$ скалярная функция $(T_z\varphi, \psi)$ является голоморфной в области G*).

Теорема 13.1. *Пусть $T_z \in \Re$ — голоморфная в полосе $a \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant b$ оператор-функция. Если на прямой $z = a + iy$ ($-\infty < y < \infty$) значения оператор-функции T_z принадлежат пространству $\mathfrak{S}_{r_1}$ ($1 \leqslant r_1 < \infty$), а на прямой $z = b + iy$ ($-\infty < y < \infty$; $a < b$) — пространству $\mathfrak{S}_{r_2}$ ($r_1 < r_2 \leqslant \infty$) и если*

$$|T_{a+yi}|_{r_1} \leqslant C_1, \quad |T_{b+yi}|_{r_2} \leqslant C_2 \qquad (-\infty < y < \infty),$$

то на всякой промежуточной прямой $z = x + iy$ ($a \leqslant x \leqslant b$; $-\infty < y < \infty$) значения оператор-функции T_z принадлежат $\mathfrak{S}_r$, где

$$r^{-1} = r_1^{-1} + t_x (r_2^{-1} - r_1^{-1}), \quad t_x = \frac{x-a}{b-a},$$

причем

$$|T_{x+iy}|_r \leqslant C_1^{1-t_x} C_2^{t_x} \qquad (-\infty < y < \infty). \qquad (13.1)$$

Доказательство. Теорема будет доказана, если соотношение (13.1) будет доказано для частного

---

*) Эта «слабая» голоморфность эквивалентна «сильной» голоморфности, определенной в главе I.

значения $y=0$, т. е.

$$|T_x|_r \leqslant C_1^{1-t_x} C_2^{t_x}. \tag{13.2}$$

В самом деле, оператор-функция $T'_z = T_{z+ih}$ $(-\infty < h < \infty)$, очевидно, удовлетворяет всем условиям теоремы, а соотношение (13.2) для нее дает то же, что (13.1) для исходной оператор-функции.

Пусть K — произвольный конечномерный оператор и $K=UH$ — его полярное представление. Считая $|K|_{r'}=1$, $(r')^{-1}+r^{-1}=1$, рассмотрим функцию

$$f(z) = \operatorname{sp}[T_z U H^{\alpha+\beta z}] \qquad (a \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant b),$$

где

$$\alpha+\beta z = r' \left(\frac{b-z}{b-a} (r'_1)^{-1} + \frac{z-a}{b-a} (r'_2)^{-1} \right)$$

$$((r'_j)^{-1} + r_j^{-1} = 1;\ j=1,\ 2).$$

Пусть

$$H = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (\cdot, \varphi_j) \varphi_j$$

— спектральное разложение оператора H.

Тогда

$$T_z U H^{\alpha+\beta z} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^{\alpha+\beta z} (\cdot, \varphi_j) T_z U \varphi_j$$

и

$$f(z) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^{\alpha+\beta z} (T_z U \varphi_j, \varphi_j) \qquad (a \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant b).$$

Из полученного представления функции $f(z)$ вытекает ее голоморфность в рассматриваемой полосе.

Кроме того,

$$|f(a+iy)| \leqslant |T_{a+iy}|_{r_1} |H^{\alpha+a\beta+i\beta y}|_{r'_1} \leqslant C_1 |H^{\alpha+a\beta}|_{r'_1}.$$

Так как для любого неотрицательного оператора D

$$|D^l|_r = |D|_{lr}^l,$$

то

$$|f(a+iy)|\leqslant C_1|H|^{\alpha+a\beta}_{r_1'(\alpha+a\beta)}=C_1|K|^{\alpha+a\beta}_{r'}=C_1.$$

Оценивая таким же образом значения $f(z)$ на прямой $z=b+iy$ $(-\infty<y<\infty)$, получим

$$|f(b+iy)|\leqslant C_2|H^{\alpha+b\beta}|_{r_2'}=C_2|K|^{\alpha+b\beta}_{r'}=C_2\quad(-\infty<y<\infty).$$

Таким образом, к числовой функции $f(z)$ применима теорема о трех прямых, согласно которой

$$|f(x+iy)|\leqslant C_1^{1-t_x}C_2^{t_x}\quad(-\infty<y<\infty).$$

Так как $\alpha+\beta x=1$, то при $y=0$ будем иметь:

$$|f(x)|=|\operatorname{sp}(T_xK)|\leqslant C_1^{1-t}C_2^{t}.$$

Учитывая, что последнее соотношение имеет место для любого конечномерного оператора K $(|K|_{r'}=1)$, получаем согласно лемме 12.1, что $T_x\in\mathfrak{S}_r$ и

$$|T_x|_r\leqslant C_1^{1-t_x}C_2^{t_x}.$$

Теорема доказана.

Теорема 13.1 доказана при участии С. Г. Крейна.

§ 14. Симметрично-нормированные идеалы $\mathfrak{S}_\Pi$ и $\mathfrak{S}_\Pi^{(0)}$

1. Пусть $\Pi=\{\pi_j\}_1^\infty$ — произвольная невозрастающая последовательность положительных чисел, причем $\pi_1=1$. Последовательности Π сопоставим функцию

$$\Phi_\Pi(\xi)=\sup_n\Big[\sum_{j=1}^n\xi_j^*/\sum_{j=1}^n\pi_j\Big]\quad(\xi=\{\xi_j\}\in\hat{c}).$$

Очевидным образом доказывается, что функция $\Phi_\Pi(\xi)$ является с. н. функцией. Из определения функции $\Phi_\Pi(\xi)$ непосредственно следует, что ее естественная область определения $c_{\Phi_\Pi}=c_\Pi$ состоит из всех векторов $\xi=\{\xi_j\}\in c_0$, для которых

$$\sup_n\Big[\sum_{j=1}^n\xi_j^*/\sum_{j=1}^n\pi_j\Big]<\infty.$$

Справедлива лемма:

Лемма 14.1. *Если выполняется условие*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j < \infty, \tag{14.1}$$

то функция $\Phi_\Pi(\xi)$ эквивалентна максимальной.

Если выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} \pi_n > 0, \tag{14.2}$$

то функция $\Phi_\Pi(\xi)$ эквивалентна минимальной.

Если же

$$\sum_j \pi_j = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \pi_n = 0, \tag{14.3}$$

(т. е. не выполняется ни одно из условий (14.1) и (14.2)), то функция $\Phi_\Pi(\xi)$ не эквивалентна ни минимальной, ни максимальной и, кроме того, в этом случае она является бинормирующей функцией.

Доказательство. В самом деле,

$$\Phi_\Pi(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots) = n/\sum_{j=1}^{n} \pi_j,$$

ибо

$$\max_{1\leqslant k<\infty} \frac{\min(k, n)}{\sum\limits_{j=1}^{k} \pi_j} = \frac{n}{\sum\limits_{j=1}^{n} \pi_j}.$$

Отсюда непосредственно следует, что если выполняется условие (14.1), то

$$\sup_n \frac{n}{\Phi_\Pi(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots)} = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j < \infty,$$

и стало быть, функция $\Phi_\Pi(\xi)$ эквивалентна максимальной.

Если же выполняется условие (14.2), то, очевидно,

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j \geqslant n\pi_\infty,$$

где $\pi_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \pi_n > 0$, и следовательно,

$$\sup_n \Phi_\Pi(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots) \leqslant \frac{1}{\pi_\infty}.$$

Таким образом, в этом случае функция $\Phi_\Pi(\xi)$ эквивалентна минимальной.

Для вектора $\Pi = \{\pi_j\} \in c_\Pi$, очевидно,

$$\Phi_\Pi(\pi_{m+1}, \pi_{m+2}, \ldots) = \sup_n \left[\sum_{j=1}^n \pi_{m+j} / \sum_{j=1}^n \pi_j\right] \leqslant 1.$$

С другой стороны,

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \pi_{m+j}}{\sum\limits_{j=1}^{m} \pi_j} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n+m} \pi_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} \pi_j} - \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} \pi_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} \pi_j} \geqslant 1 - \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} \pi_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} \pi_j}. \qquad (14.4)$$

Если выполняется первое из условий (14.3), то из (14.4) следует, что

$$\Phi_\Pi(\pi_{m+1}, \pi_{m+2}, \ldots) \geqslant 1.$$

Таким образом, при выполнении первого из условий (14.3)

$$\Phi_\Pi(\pi_{m+1}, \pi_{m+2}, \ldots) = 1,$$

т. е. функция $\Phi_\Pi(\xi)$ является бинормирующей функцией.

Лемма доказана.

С. н. функция $\Phi_\Pi(\xi)$ обладает следующим характеристическим свойством:

Пусть $\Pi = \{\pi_j\}_1^\infty$ — произвольная невозрастающая последовательность положительных чисел с $\pi_1 = 1$. Тогда функция $\Phi_\Pi(\xi)$ является максимальной среди всех с. н. функций $\Phi(\xi)$, обладающих тем свойством, что при любом $n = 1, 2, \ldots$:

$$\Phi(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n, 0, 0, \ldots) \leqslant 1. \qquad (14.5)$$

В самом деле, для любого вектора

$$\xi=\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots\}\in\hat{c}$$

$$\sum_{j=1}^{m}\xi_j^*\leqslant\Phi_\Pi(\xi)\sum_{j=1}^{m}\pi_j \qquad (m=1, 2, \ldots),$$

а следовательно, какова бы ни была с. н. функция, удовлетворяющая условию (14.5), в силу ее свойства V′) будем иметь:

$$\Phi(\xi)\leqslant\Phi_\Pi(\xi)\,\Phi(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n, 0, 0, \ldots)\leqslant\Phi_\Pi(\xi)\ (\xi\in\hat{c}).$$

2. Из леммы 14.1 явствует, что новый с. н. идеал $\mathfrak{S}_\Pi$ (отличный от $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_\infty$) получается лишь в том случае, когда последовательность $\{\pi_n\}_1^\infty$ $(\pi_1=1)$ удовлетворяет условиям (14.3). Такую последовательность будем называть *бинормирующей*. Введение этого термина оправдывается следующим предложением.

Теорема 14.1. *Пусть* $\Pi=\{\pi_j\}_1^\infty$ — *произвольная бинормирующая последовательность. Тогда множество* $\mathfrak{S}_\Pi$ *всех вполне непрерывных операторов* A, *для которых*

$$\sup_n\Big[\sum_{j=1}^{n}s_j(A)/\sum_{j=1}^{n}\pi_j\Big]<\infty,$$

образует несепарабельный с. н. идеал с нормой

$$|A|_\Pi=|A|_{\Phi_\Pi}=\sup_n\Big[\sum_{j=1}^{n}s_j(A)/\sum_{j=1}^{n}\pi_j\Big]. \qquad (14.6)$$

С. н. идеал $\mathfrak{S}_\Pi$ *содержит как правильную часть сепарабельный с. н. идеал* $\mathfrak{S}_\Pi^{(0)}$, *состоящий из всех тех операторов* $A\in\mathfrak{S}_\Pi$, *для которых*

$$\lim_{n\to\infty}\Big[\sum_{j=1}^{n}s_j(A)/\sum_{j=1}^{n}\pi_j\Big]=0. \qquad (14.7)$$

Имеет место также следующее соотношение:

$$\inf_{X\in\mathfrak{S}_\Pi^{(0)}}|A-X|_\Pi=\varlimsup_{n\to\infty}\Big[\sum_{j=1}^{n}s_j(A)/\sum_{j=1}^{n}\pi_j\Big]. \qquad (14.8)$$

Доказательство. Первое утверждение теоремы вытекает из теоремы 4.1 и леммы 14.1, если учесть, что

$\mathfrak{S}_\Pi=\mathfrak{S}_{\Phi_\Pi}$. Для доказательства всех остальных утверждений достаточно показать, что

$$\inf_{X\in\mathfrak{K}} |A-X|_\Pi=\overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\sum_{j=1}^n s_j(A)/\sum_{j=1}^n \pi_j\right]. \qquad (14.8')$$

В самом деле, из этого соотношения следует, что $A\in\mathfrak{S}_{\Phi_\Pi}^{(0)}$ в том и только том случае, когда выполняется (14.7), откуда $\mathfrak{S}_\Pi^{(0)}=\mathfrak{S}_{\Phi_\Pi}^{(0)}$. Но тогда соотношение (14.8) будет следствием соотношения (14.8′).

Для доказательства (14.8′) рассмотрим два функционала $l_1(A)$ и $l_2(A)$ $(A\in\mathfrak{S}_\Pi)$, определенных равенствами

$$l_1(A)=\lim_{m\to\infty}\sup_n \left[\sum_{j=1}^n s_{m+j}(A)/\sum_{j=1}^n \pi_j\right],$$

$$l_2(A)=\overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\sum_{j=1}^n s_j(A)/\sum_{j=1}^n \pi_j\right].$$

Согласно лемме 6.1

$$l_1(A)=\inf_{K\in\mathfrak{S}_\Pi^{(0)}} |A-K|_\Pi,$$

и следовательно, соотношение (14.8) будет доказано, коль скоро будет показано, что $l_1(A)=l_2(A)$ для любого $A\in\mathfrak{S}_\Pi$. Это утверждение, в свою очередь, является простым следствием того, что для любой монотонно убывающей и стремящейся к нулю последовательности неотрицательных чисел $\{s_j\}_1^\infty$ выполняется равенство

$$(l_1=)\lim_{m\to\infty}\sup_n \left[\sum_{j=1}^n s_{m+j}/\sum_{j=1}^n \pi_j\right]=\overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\sum_{j=1}^n s_j/\sum_{j=1}^n \pi_j\right](=l_2).$$

Действительно, так как

$$\sum_{j=1}^n s_j\leqslant\sum_{j=1}^m s_j+\sum_{j=1}^n s_{m+j} \qquad (n\geqslant m;\ n, m=1, 2, \ldots),$$

то

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} s_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} \pi_j} \leqslant \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} s_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} \pi_j} + \sup_n \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} s_{m+j}}{\sum\limits_{j=1}^{n} \pi_j}.$$

Отсюда следует, что

$$l_2 \leqslant \sup_n \left[\sum_{j=1}^{n} s_{m+j} \Big/ \sum_{j=1}^{n} \pi_j\right].$$

Переходя в последнем соотношении к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$l_2 \leqslant l_1. \tag{14.9}$$

С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ найдется n_0 такое, что

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} s_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} \pi_j} < l_2 + \varepsilon,$$

коль скоро $n > n_0$. Из этого соотношения следует, что

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} s_{m+j}}{\sum\limits_{j=1}^{n} \pi_j} < l_2 + \varepsilon \qquad (m = 1, 2, \ldots; n > n_0). \tag{14.10}$$

Легко видеть, что при достаточно больших m соотношение (14.10) будет иметь место и для $n \leqslant n_0$. Следовательно, из (14.10) вытекает

$$l_1 \leqslant l_2 + \varepsilon. \tag{14.11}$$

Сопоставляя соотношения (14.9) и (14.11), получаем $l_1 = l_2$.

Теорема доказана.

Замечание 14.1. Б. С. Митягин [1] показал, что для любой бинормирующей последовательности $\Pi = \{\pi_j\}_1^\infty$ существует *промежуточный* с. н. идеал $\mathfrak{S}_\Pi$, строго заключенный между $\mathfrak{S}_\Pi^{(0)}$ и $\mathfrak{S}_\Pi$, причем норма в $\tilde{\mathfrak{S}}_\Pi$ также определяется с. н. функцией $\Phi_\Pi(\xi)$.

3. Бинормирующую последовательность $\Pi = \{\pi_j\}_1^\infty$ назовем *регулярной*, если выполняется следующее условие:

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j = O(n\pi_n) \qquad (n \to \infty). \tag{14.12}$$

Заметим, что всегда

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j \geqslant n\pi_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Без труда проверяется, что последовательность $\{n^{-\alpha}\}_1^\infty$ $(0 < \alpha < 1)$ является регулярной.

Имеет место

Теорема 14.2. *Если последовательность* $\Pi = \{\pi_j\}_1^\infty$ *является регулярной, то с. н. идеал* $\mathfrak{S}_\Pi$ *совпадает с классом всех операторов* $A \in \mathfrak{S}_\infty$, *для которых*

$$s_n(A) = O(\pi_n) \qquad (n \to \infty), \tag{14.13}$$

а класс $\mathfrak{S}_\Pi^{(0)}$ *совпадает с классом всех операторов* $A \in \mathfrak{S}_\infty$, *для которых*

$$s_n(A) = o(\pi_n) \qquad (n \to \infty). \tag{14.14}$$

Доказательство. В самом деле, всякий оператор $A \in \mathfrak{S}_\infty$, для которого выполняется (14.13), очевидно, принадлежит классу $\mathfrak{S}_\Pi$. Обратно, если оператор $A \in \mathfrak{S}_\Pi$, то

$$\sum_{j=1}^{n} s_j(A) \leqslant |A|_\Pi \sum_{j=1}^{n} \pi_j \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

и, следовательно,

$$s_n(A) \leqslant |A|_\Pi \left\{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \pi_j\right\} = O(\pi_n) \quad (n \to \infty).$$

Если выполняется условие (14.14), то, очевидно, выполняется условие (14.7) и, стало быть, оператор

$A \in \mathfrak{S}_{\text{П}}^{(0)}$. Обратно, если выполняется условие (14.7), то

$$\sum_{k=1}^{n} s_k(A) = o\left(\sum_{k=1}^{n} \pi_k\right) \quad (n \to \infty),$$

или

$$s_n(A) = o\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \pi_k\right) = o(\pi_n) \quad (n \to \infty).$$

Теорема доказана.

4. Функцию $L(\nu)$ ($a \leqslant \nu < \infty$; $a > 0$) условимся называть *медленно изменяющейся*, если она положительна, непрерывно дифференцируема и

$$\lim_{\nu \to \infty} \{\nu L'(\nu)/L(\nu)\} = 0. \tag{14.15}$$

Примером медленно изменяющейся функции может служить любая функция вида

$$L(\nu) = c(\ln_1 \nu)^{\alpha_1} (\ln_2 \nu)^{\alpha_2} \ldots (\ln_k \nu)^{\alpha_k},$$

где

$$\ln_1 \nu = \ln \nu; \ \ln_r \nu = \ln(\ln_{r-1} \nu) \qquad (r = 2, 3, \ldots),$$

а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — произвольные вещественные числа.

Непосредственно проверяются следующие свойства функций введенного класса:

а) сумма и произведение двух медленно изменяющихся функций также будут медленно изменяющимися функциями;

б) вместе с функцией $L(\nu)$ и $[L(\nu)]^{\alpha}$ ($-\infty < \alpha < \infty$) будет медленно изменяющейся функцией;

в) каково бы ни было $\varepsilon > 0$, для медленно изменяющейся функции $L(\nu)$ всегда найдутся константы C'_ε, C''_ε такие, что

$$C'_\varepsilon \nu^{-\varepsilon} < L(\nu) < C''_\varepsilon \nu^{\varepsilon} \qquad (1 \leqslant \nu < \infty).$$

Медленно изменяющиеся функции представляют интерес тем, что они позволяют строить регулярные последовательности П. Оказывается:

1°. *Всякая невозрастающая последовательность* $\{\pi_j\}_1^\infty$ *является регулярной, коль скоро она представима в виде*

$$\pi_n = n^{-1/p} L(n) \qquad (n = 1, 2, \ldots; 1 < p < \infty), \quad (14.16)$$

где $L(\nu)$ $(1 \leqslant \nu < \infty;\ L(1) = 1)$ — *произвольная медленно изменяющаяся функция, а функция* $\nu^{-1/p} L(\nu)$ — *невозрастающая.*

В самом деле, из свойства в) непосредственно следует, что последовательность (14.16) является бинормирующей. Проверим условие регулярности (14.12). Согласно условию функция $\nu^{-1/p}L(\nu)$ $(1 \leqslant \nu < \infty)$ — невозрастающая, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} k^{-1/p} L(k) \leqslant \int_1^n t^{-1/p} L(t)\, dt + 1 \quad (n = 1, 2, \ldots). \quad (14.17)$$

Интегрируя правую часть полученного неравенства по частям, получаем:

$$\int_0^n t^{-1/p}L(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{1-1/p}\left(n^{1-1/p}L(n) + \int_0^n t^{1-1/p} |L'(t)|\, dt\right). \quad (14.18)$$

Пусть число m $(\geqslant 1)$ выбрано так, чтобы для всех $t \geqslant m$

$$t\, |L'(t)|/L(t) < (1 - 1/p)/2.$$

Тогда при $n > m$:

$$\int_1^n t^{1-1/p} |L'(t)|\, dt = \int_1^n t^{-1/p}L(t)\, \frac{t\, |L'(t)|}{L(t)}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_1^m t^{1-1/p} |L'(t)|\, dt + \frac{1-1/p}{2} \int_1^n t^{-1/p}L(t)\, dt. \quad (14.19)$$

Сопоставляя (14.18) и (14.19), получаем:

$$\int_1^n t^{-1/p}L(t)\,dt \leqslant \frac{2}{1-1/p}\left(n^{1-1/p}L(n)+\int_1^m t^{1-1/p}\,|L'(t)|\,dt\right). \tag{14.20}$$

Так как $n^{1-1/p}L(n)\to\infty$ при $n\to\infty$, то из (14.20) и (14.17) вытекает:

$$\sum_{k=1}^n k^{-1/p}L(k)=O(n^{1-1/p}L(n)),$$

что и означает регулярность последовательности (14.16).

§ 15. Симметрично-нормированные идеалы $\mathfrak{S}_\pi$ и их связь с $\mathfrak{S}_\Pi$ и $\mathfrak{S}_\Pi^{(0)}$

1. Каждой невозрастающей последовательности $\Pi=\{\pi_j\}_1^\infty$ $(\pi_1=1)$ положительных чисел сопоставим также функцию

$$\Phi_\pi(\xi)=\sum_j \pi_j\xi_j^* \quad (\xi=\{\xi_j\}\in\hat{c}). \tag{15.1}$$

Функция $\Phi_\pi(\xi)$ является с. н. функцией. В самом деле, очевидно, функция $\Phi_\pi(\xi)$ обладает свойствами I′)—IV′) с. н. функций.

Из тождества

$$\sum_{j=1}^n \pi_j\xi_j=\pi_n\eta_n+\sum_{j=1}^{n-1}(\pi_j-\pi_{j+1})\eta_j \quad (\xi\in\hat{k}),$$

где

$$\eta_j=\sum_{r=1}^j \xi_r \qquad (j=1,2,\ldots,n),$$

следует, что функция $\Phi_\pi(\xi)$ обладает свойством V′).

Естественная область определения $c_\pi=c_{\Phi_\pi}$ функции $\Phi_\pi(\xi)$ состоит, очевидно, из всех векторов $\xi=\{\xi_j\}\in c_0$, для которых

$$\sum_{j=1}^\infty \pi_j\xi_j^*<\infty.$$

Лемма 15.1. *Если выполняется условие*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j < \infty, \tag{15.2}$$

то функция $\Phi_\pi(\xi)$ эквивалентна минимальной.

Если выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} \pi_n > 0, \tag{15.3}$$

то функция $\Phi_\pi(\xi)$ эквивалентна максимальной.

Если же $\Pi = \{\pi_j\}_1^\infty$ — бинормирующая последовательность, т. е.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \pi_n = 0, \tag{15.4}$$

то функция $\Phi_\pi(\xi)$ не эквивалентна ни минимальной, ни максимальной; функция $\Phi_\pi(\xi)$ всегда является мононормирующей.

Доказательство. В самом деле,

$$\Phi_\pi(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots) = \sum_{j=1}^{n} \pi_j, \tag{15.5}$$

а следовательно, при выполнении условия (15.2) функция $\Phi_\pi(\xi)$ эквивалентна минимальной.

Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\Phi_\pi(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots)} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \pi_j\right]} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \pi_n}, \tag{15.6}$$

то при выполнении условия (15.3) функция $\Phi_\pi(\xi)$ эквивалентна максимальной.

Наконец, пусть выполняются условия (15.4), тогда из соотношений (15.5) и (15.6) следует, что функция $\Phi_\pi(\xi)$ не эквивалентна ни минимальной, ни максимальной.

Пусть ξ — произвольный вектор из c_π, тогда для любого положительного ε найдется число m такое, что

$$\sum_{j=m+1}^{\infty} \pi_j \xi_j^* < \varepsilon/2.$$

Так как $\lim \xi_j^* = 0$, то можно подобрать такое n, что

$$\sum_{j=1}^{m} \pi_j \xi_{j+n}^* < \varepsilon/2.$$

Учитывая, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \xi_{j+n}^* \leqslant \sum_{j=1}^{m} \pi_j \xi_{n+j}^* + \sum_{j=m+1}^{\infty} \pi_j \xi_j^*,$$

получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \xi_{n+j}^* < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_\pi(\xi_{n+1}^*, \xi_{n+2}^*, \ldots) = 0 \quad (\xi \in c_\pi),$$

и, стало быть, функция $\Phi_\pi(\xi)$ мононормирующая.

Лемма доказана.

2. В качестве следствия из общих теорем и доказанной леммы получаем следующую теорему.

Теорема 15.1. *Пусть* $\Pi = \{\pi_j\}_1^\infty$ — *произвольная бинормирующая последовательность. Тогда множество* $\mathfrak{S}_\pi$ *всех вполне непрерывных операторов* A, *для которых*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j s_j(A) < \infty,$$

образует сепарабельный с. н. идеал с нормой

$$|A|_\pi = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j s_j(A). \tag{15.7}$$

Идеал конечномерных операторов плотен в $\mathfrak{S}_\pi$ *и*

$$\min_{A \in \mathfrak{K}_n} |A - K|_\pi = \sum_{j=1}^{n} \pi_j s_{n+j}(A) \; (A \in \mathfrak{S}_\pi).$$

3. Ниже будет доказано, что класс $\mathfrak{S}_\pi$ является пространством, сопряженным к $\mathfrak{S}_\Pi^{(0)}$. Этому предложению предпошлем одну лемму.

Лемма 15.2. *Пусть* $\hat{k}_n$ — *конус вещественного* n-*мерного координатного пространства, состоящий из всех* *векторов* $\xi=\{\xi_j\}_1^n$, *для которых* $\xi_1\geqslant\xi_2\geqslant\ldots\geqslant\xi_n\geqslant 0$, *и* $\{\pi_j\}_1^n$ — *произвольная система* n *положительных чисел.*

Тогда для любой пары векторов $\xi=\{\xi_j\}_1^n$, $\eta=\{\eta_j\}_1^n$ *из* $\hat{k}_n$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{j=1}^n \eta_j\xi_j \leqslant \sum_{j=1}^n \pi_j\xi_j \max_r \Big[\sum_{j=1}^r \eta_j \Big/ \sum_{j=1}^r \pi_j\Big]. \tag{15.8}$$

Для каждого ненулевого вектора $\xi\in\hat{k}_n$ $(\eta\in\hat{k}_n)$ *найдется ненулевой вектор* $\eta\in\hat{k}_n$ $(\xi\in\hat{k}_n)$, *при котором в* (15.8) *имеет место знак равенства.*

Доказательство. Пусть вектор η фиксирован. Обозначим через Λ выпуклое множество, являющееся пересечением конуса $\hat{k}_n$ и гиперплоскости $\sum_{j=1}^n \pi_j\xi_j=1$. Очевидно, что доказательство леммы сводится к доказательству равенства

$$\max_{\xi\in\Lambda} f(\xi)=\max_r \Big[\sum_{j=1}^r \eta_j \Big/ \sum_{j=1}^r \pi_j\Big], \tag{15.9}$$

где $f(\xi)=\sum_{j=1}^n \xi_j\eta_j$. Как известно, линейный функционал $f(\xi)$ всегда принимает свое наибольшее значение на Λ в крайних точках Λ (точках, не являющихся внутренними точками интервалов, принадлежащих Λ).

Для определения всех крайних точек Λ сопоставим каждому вектору $\xi=\{\xi_j\}\in\Lambda$ вектор $x=\{x_j\}$ по правилу $x_j=\xi_{j+1}-\xi_j$ $(j=1, 2, \ldots, n-1)$, $x_n=\xi_n$. При этом соответствии, когда ξ пробегает Λ, вектор x пробегает многогранник Λ', состоящий из всех векторов $x=\{x_j\}_1^n$ $(x_j\geqslant 0)$, для которых

$$\sum_{j=1}^n \Big(\sum_{k=1}^j \pi_k\Big) x_j=1. \tag{15.9'}$$

Так как указанное преобразование $\xi\to x$ $(\xi\in\Lambda,\ x\in\Lambda')$ является взаимно однозначным и линейным, то оно устанавливает взаимно однозначное соответствие между крайними точками Λ и Λ'.

Тело Λ' является симплексом, по которому пересекается гипероктант векторов с неотрицательными координатами с гиперплоскостью (15.9′), следовательно, крайними точками Λ' будут вершины симплекса, т. е. вектора, у которых лишь одна координата отлична от нуля.

Отсюда вытекает, что крайними точками Λ являются все вектора вида

$$\xi=\{\underbrace{a, a, \ldots, a}_{r}, 0, 0, \ldots, 0\},$$

где

$$a=\Big(\sum_{j=1}^{r}\pi_j\Big)^{-1}.$$

Для такой точки

$$f(\xi)=\sum_{j=1}^{r}\eta_j \Big/ \sum_{j=1}^{r}\pi_j.$$

Лемма доказана *).

4. Из леммы согласно предложению п. 2 § 11 следует, что для любой невозрастающей последовательности $\Pi=\{\pi_j\}_1^\infty$ $(\pi_1=1)$ неотрицательных чисел функции $\Phi_\Pi(\xi)$ и $\Phi_\pi(\xi)$ являются взаимно сопряженными, т. е.

$$\Phi_\Pi^*(\xi)=\Phi_\pi(\xi) \text{ и } \Phi_\pi^*(\xi)=\Phi_\Pi(\xi).$$

Таким образом, в силу теоремы 12.2 справедлива следующая

Теорема 15.2. *Пусть* $\Pi=\{\pi_j\}_1^\infty$ — *бинормирующая последовательность. Тогда в тройке пространств* $\mathfrak{S}_\Pi^{(0)}$, $\mathfrak{S}_\pi$ *и* $\mathfrak{S}_\Pi$ *последующее пространство является сопряженным к предыдущему.*.

Замечание 15.1. Основные теоремы 14.1, 15.1 и 15.2 сформулированы в предположении, что $\Pi=\{\pi_j\}_1^\infty$ — бинормирующая последовательность. Мы оставили в стороне «малоинтересные» случаи, когда

1) $$\lim_{n\to\infty}\pi_j>0$$

*) Упрощением доказательства этой леммы авторы обязаны Ф. В. Широкову.

или

$$2) \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j < \infty.$$

В первом случае с. н. идеал $\mathfrak{S}_\pi (= \mathfrak{S}_{\Phi_\pi})$ поэлементно совпадает с $\mathfrak{S}_1$, а $\mathfrak{S}_\Pi^{(0)} = \mathfrak{S}_{\Phi_\Pi}^{(0)}$ совпадают поэлементно с $\mathfrak{S}_\infty$, при этом $\mathfrak{S}_\pi$ является сопряженным к $\mathfrak{S}_\Pi^{(0)}$, а сопряженным к $\mathfrak{S}_\pi$ будет кольцо $\mathfrak{R}_{\Phi_\Pi}$ (см. § 12), совпадающее поэлементно со всем кольцом $\mathfrak{R}$.

Читатель легко разберется на основе лемм 14.1 и 15.1 в ситуации, имеющей место во втором случае.

5. В ряде вопросов теории несамосопряженных операторов (см. В. И. Мацаев [2], И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн [3,4], М. С. Бродский, И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн и В. И. Мацаев [1]), в теории абстрактного треугольного интеграла, в вопросах полноты систем корневых векторов оператора и др. особую роль играет с. н. идеал $\mathfrak{S}_\omega$, где $\Omega = \left\{\frac{1}{2n-1}\right\}_1^\infty$, и сопряженный к $\mathfrak{S}_\omega$ с. н. идеал $\mathfrak{S}_\Omega$. С. н. идеал $\mathfrak{S}_\omega$ ввел в рассмотрение В. И. Мацаев [2].

Введение этого пространства послужило для авторов толчком к изучению общих пространств $\mathfrak{S}_\Pi^{(0)}$, $\mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{S}_\Pi$ и установлению связи между ними.

Легко видеть, что пространство $\mathfrak{S}_\omega$ содержит все пространства $\mathfrak{S}_p (1 \leqslant p < \infty)$ и

$$|A|_\omega \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2j-1} \right)^q \right)^{1/q} |A|_p \quad (A \in \mathfrak{S}_p;\ p^{-1} + q^{-1} = 1),$$

а несепарабельное пространство $\mathfrak{S}_\Omega$ попадает в щель между пространствами $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_p (1 < p \leqslant \infty)$, т. е. оно содержит $\mathfrak{S}_1$ и содержится во всех пространствах $\mathfrak{S}_p (1 < p \leqslant \infty)$, причем

$$|A|_p \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2j-1} \right)^p \right)^{1/p} |A|_\Omega \quad (A \in \mathfrak{S}_\Omega).$$

6. Возвращаясь к с. н. идеалам $\mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{S}_\Pi$, отметим еще два простых свойства $\mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{S}_\Pi$, доказательства которых предоставляются читателю.

1°. *Для того чтобы для двух невозрастающих последовательностей* $\Pi' = \{\pi'_j\}$, $\Pi'' = \{\pi''_j\}$ *нормированные идеалы* $\mathfrak{S}_{\pi'}$, $\mathfrak{S}_{\pi''}$; $\mathfrak{S}_{\Pi'}$, $\mathfrak{S}_{\Pi''}$ *попарно совпадали поэлементно, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\inf_n \Big[\sum_{j=1}^{n} \pi'_j \Big/ \sum_{j=1}^{n} \pi''_j\Big] > 0 \quad \text{и} \quad \sup_n \Big[\sum_{j=1}^{n} \pi'_j \Big/ \sum_{j=1}^{n} \pi''_j\Big] < \infty .$$

2°. *Если выполняется условие*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j^p < \infty \quad (p > 1),$$

то класс $\mathfrak{S}_p$ *содержит класс* $\mathfrak{S}_\Pi$, *а* $\mathfrak{S}_q$ $(p^{-1}+q^{-1}=1)$ *содержится в классе* $\mathfrak{S}_\pi$, *причем*

$$|A|_p \leqslant \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j^p\Big)^{1/p} |A|_\Pi \quad (A \in \mathfrak{S}_\Pi) \tag{15.10}$$

и

$$|A|_\pi \leqslant \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j^p\Big)^{1/p} |A|_q \quad (A \in \mathfrak{S}_q). \tag{15.11}$$

§ 16. Еще одна интерполяционная теорема

Пусть по-прежнему $\Pi = \{\pi_j\}_1^\infty$ — произвольная бинормирующая последовательность. Вместе с ней последовательность $\Pi_p = \{\pi_j^{1/p}\}_1^\infty$ $(1 \leqslant p < \infty)$ также будет бинормирующей. Обозначим через $\mathfrak{S}_{\Pi;\,p}$ $(1 \leqslant p < \infty)$ с. н. идеал $\mathfrak{S}_{\Pi_p}$ и через $|A|_{\Pi;\,p}$ — норму в этом пространстве. Аналогично через $\mathfrak{S}_{\pi;\,p}$ обозначим с. н. идеал всех операторов $A \in \mathfrak{S}_\infty$, для которых

$$|A|_{\pi;\,p} = \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n^{1/p} s_n(A) < \infty ,$$

с нормой $|A|_{\pi;\,p}$.

Теорема 16.1. *Пусть* T_z $(\in \mathfrak{S}_\infty)$ — *оператор-функция, голоморфная в полосе* $a_1 < \operatorname{Re} z < a_2$. *Если для некоторых* p_1, p_2 $(1 \leqslant p_2 < p_1 < \infty)$

$$|T_{a_j+iy}|_{\Pi;\,p_j} \leqslant C_j \quad (-\infty < y < \infty;\ j = 1,\ 2),$$

то для любого промежуточного x $(a_1 < x < a_2)$ *будет иметь место соотношение*

$$|T_{x+iy}|_{\Pi;\,p_x} \leqslant C_1^{1-t_x} C_2^{t_x} \qquad (-\infty < y < \infty), \tag{16.1}$$

где

$$p_x^{-1}=(1-t_x)\,p_1^{-1}+t_x p_2^{-1},\quad t_x=(x-a_1)/(a_2-a_1).$$

Доказательство. Так же, как в доказательстве теоремы 13.1, устанавливается, что эта теорема будет доказана, коль скоро соотношение (16.1) будет доказано для частного значения $y=0$.

Отправляясь от произвольного конечномерного оператора K, разложение Шмидта которого имеет вид

$$K=\sum_{j=1}^{m} s_j(K)\,(\cdot,\,\psi_j)\,\varphi_j,$$

образуем аналитическую оператор-функцию

$$K_z=\sum_{j=1}^{m} \pi_j^z s_j(K)\,(\cdot,\,\psi_j)\,\varphi_j. \qquad (16.2)$$

Очевидно, что для любых $p,\ r$ $\left(1\leqslant p,\ r<\infty;\ \frac{1}{p}+\frac{1}{r}\leqslant 1\right)$ имеет место соотношение

$$|K_{p^{-1}+iy}|_{\pi;\,r}=|K|_{\pi;\,l};\quad l^{-1}=p^{-1}+r^{-1}. \qquad (16.3)$$

Рассмотрим функцию

$$f(z)=\operatorname{sp}(T_z K_{v(z)})\qquad (a_1\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant a_2),$$

где

$$v(z)=p_x^{-1}-\left(\frac{z-a_1}{a_2-a_1}\,p_2^{-1}+\frac{a_2-z}{a_2-a_1}\,p_1^{-1}\right).$$

Из (16.2) следует, что

$$f(z)=\sum_{j=1}^{m} \pi_j^{v(z)} s_j(K)\,(T_z\varphi_j,\,\psi_j)\qquad (a_1\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant a_2).$$

Таким образом, функция $f(z)$ является голоморфной в рассматриваемой полосе.

Кроме того,

$$|f(a_1+iy)|\leqslant |T_{a_1+iy}|_{\Pi;\,p_1}\,|K_{v(a_1+iy)}|_{\pi;\,p_1}\leqslant C_1\,|K_{v(a_1+iy)}|_{\pi;\,p_1}.$$

Так как $\operatorname{Re} v(a_1+iy)=p_x^{-1}-p_1^{-1}$, то из (16.3) вытекает, что

$$|K_{v(a_1+iy)}|_{\pi;\,p_1}=|K|_{\pi;\,p_x}\qquad (-\infty<y<\infty),$$

следовательно,

$$|f(a_1+iy)|\leqslant C_1|K|_{\pi;\,p_x} \qquad (-\infty<y<\infty).$$

Оценивая таким же образом значения функции $f(z)$ на прямой $z=a_2+iy\,(-\infty<y<\infty)$, получим

$$|f(a_2+iy)|\leqslant C_2|K|_{\pi;\,p_x} \qquad (-\infty<y<\infty).$$

Таким образом, к функции $f(z)$ применима теорема о трех прямых, согласно которой

$$|f(x+iy)|\leqslant C_1^{1-t_x}C_2^{t_x}|K|_{\pi;\,p_x} \qquad (-\infty<y<\infty).$$

Полагая в последнем соотношении $y=0$ и учитывая, что $v(x)=0$, получаем

$$|f(x)|=|\operatorname{sp}(T_xK)|\leqslant C_1^{1-t_x}C_2^{t_x}|K|_{\pi;\,p_x}.$$

Принимая, наконец, во внимание, что множество всех конечномерных операторов $\mathfrak{K}$ плотно в $\mathfrak{S}_{\pi;\,p_x}$ и что пространство $\mathfrak{S}_{\Pi;\,p_x}$ является сопряженным к пространству $\mathfrak{S}_{\pi;\,p_x}$, получаем

$$|T_x|_{\Pi;\,p_x}\leqslant C_1^{1-t_x}C_2^{t_x}.$$

Теорема доказана.

§ 17. Конические нормы в вещественных банаховых пространствах операторов $\hat{\mathfrak{S}}$

1. Пусть $\mathfrak{S}$ — произвольный с. н. идеал. Норму $|A|_{\mathfrak{S}}$ оператора $A\in\mathfrak{S}$ в этом параграфе будем обозначать через $\|A\|$.

Обозначим через $\hat{\mathfrak{S}}$ множество всех самосопряженных операторов из $\mathfrak{S}$. Очевидно, $\hat{\mathfrak{S}}$ образует вещественное банахово пространство с нормой $\|A\|$. Легко проверяется, что если $\mathfrak{S}^*$ — пространство, сопряженное к $\mathfrak{S}$, то пространство $\hat{\mathfrak{S}}^*$ всех самосопряженных операторов из $\mathfrak{S}^*$ является сопряженным к $\hat{\mathfrak{S}}$. В частности, если пространство $\mathfrak{S}$ рефлексивно, то таковым является и пространство $\hat{\mathfrak{S}}$.

В дальнейшем для получения некоторых точных оценок понадобятся новые нормы в пространствах $\hat{\mathfrak{S}}$ и $\hat{\mathfrak{S}}^*$.. Введение этих норм связано с некоторыми идеями геометрии конусов в банаховых пространствах (см. М. Г. Крейн и М. А. Рутман [1]).

2. Множество $\boldsymbol{K}$ векторов банахова пространства $\mathfrak{B}$ называется *конусом*, если: 1) оно замкнуто, 2) для любой пары векторов x, $y \in \boldsymbol{K}$ и любой пары неотрицательных чисел α, β вектор $\alpha x + \beta y \in \boldsymbol{K}$ и 3) из $x \in \boldsymbol{K}$ и $x \neq 0$ следует $-x \overline{\in} \boldsymbol{K}$.

Конус называется *острым*, если для любой пары векторов x, $y \in \boldsymbol{K}$

$$|x| \leqslant |x+y|.$$

Последнее условие как бы выражает то, что угол между любыми двумя векторами x, $y \in \boldsymbol{K}$ не превосходит $\pi/2$. Конус $\boldsymbol{K}$ называется *воспроизводящим*, если любой вектор $z \in \mathfrak{B}$ можно представить в виде $z = x - y$, где x, $y \in \boldsymbol{K}$.

Пусть $\boldsymbol{K}$ — воспроизводящий конус; тогда совокупность всех линейных непрерывных функционалов $f \in \mathfrak{B}^*$, обладающих свойством $f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \boldsymbol{K}$, также образует конус (в пространстве $\mathfrak{B}^*$). Этот конус называется сопряженным к конусу $\boldsymbol{K}$ и обозначается через $\boldsymbol{K}^*$. Пусть $\boldsymbol{K}$ — воспроизводящий конус пространства $\mathfrak{B}$. Равенствами

$$|z|_{K;\,p} = \inf_{x,\, y \in K;\; x-y=z} (|x|^p + |y|^p)^{1/p} \quad (1 \leqslant p < \infty) \tag{17.1}$$

в пространстве $\mathfrak{B}$ определяются «конические» нормы, топологически эквивалентные исходной; при $p = \infty$ равенство (17.1) следует понимать как

$$|z|_{K;\,\infty} = \inf_{x,\, y \in K;\; x-y=z} \max(|x|, |y|).$$

Если сопряженный конус $\boldsymbol{K}^*$, отвечающий воспроизводящему конусу $\boldsymbol{K}$, сам воспроизводящий, то норме $|z|_{K;\,p}$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ в сопряженном пространстве будет отвечать коническая норма $|f|_{K^*;\,q}$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1;\ f \in \mathfrak{B}^*)$.

В дальнейшем мы не будем опираться на сформулированные положения из теории конусов, а проиллюстрируем их с доказательствами на примере конусов в пространстве $\hat{\mathfrak{S}}$.

3. Обозначим через $\mathscr{K}$ совокупность всех неотрицательных операторов из $\hat{\mathfrak{S}}$. Покажем, что

1°. *Множество $\mathscr{K}$ является острым воспроизводящим конусом.* В самом деле, то, что $\mathscr{K}$ является конусом, очевидно. Если X и $Y \in \mathscr{K}$, то согласно лемме II.1.1

$$s_j(X+Y) = \lambda_j(X+Y) \geqslant \lambda_j(X) = s_j(X) \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

откуда

$$\|X\| \leqslant \|X+Y\|,$$

т. е. $\mathscr{K}$ — острый конус.

Пусть оператор $Z \in \hat{\mathfrak{S}}$ и

$$Z = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(Z)(\cdot, e_j)\, e_j$$

— его спектральное разложение. Очевидно,

$$Z = Z_+ - Z_-, \tag{17.2}$$

где

$$Z_+ = \sum_{\lambda_j > 0} \lambda_j(Z)(\cdot, e_j) e_j; \quad Z_- = -\sum_{\lambda_j < 0} \lambda_j(Z)(\cdot, e_j) e_j.$$

Так как

$$\lambda_j(Z_+) \leqslant s_j(Z) \text{ и } \lambda_j(Z_-) \leqslant s_j(Z) \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

то $Z_\pm \in \hat{\mathfrak{S}}$ и, кроме того,

$$\max(\| Z_+ \|, \| Z_- \|) \leqslant \| Z \|. \tag{17.3}$$

Таким образом, $Z_\pm \in \mathscr{K}$, и утверждение доказано.

Разложение (17.2) обладает следующим важным свойством.

2°. *Пусть*

$$Z = X - Y \qquad (Z \in \hat{\mathfrak{S}};\ X, Y \in \mathscr{K}),$$

тогда

$$\| Z_+ \| \leqslant \| X \| \quad \text{и} \quad \| Z_- \| \leqslant \| Y \|.$$

Это предложение непосредственно следует из леммы II.1.2.

3°. *Конус* $\mathscr{K} = \mathscr{K}_{\mathfrak{S}}$ *имеет своим сопряженным конус* $\mathscr{K}^* = \mathscr{K}_{\mathfrak{S}^*}$.

Это утверждение следует из теоремы 8.3 и замечания 8.1.

В рассматриваемом случае равенство (17.1), которым определяется коническая норма $\| Z \|_{\mathscr{K};\, p}$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, принимает вид:

$$\| Z \|_{\mathscr{K};\, p} = (\| Z_+ \|^p + \| Z_- \|^p)^{1/p} \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty;\ Z \in \hat{\mathfrak{S}}). \tag{17.1'}$$

Исходя из равенств (17.1′), легко вывести, что функционал $\| Z \|_{\mathscr{K};\, p}$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ обладает в $\hat{\mathfrak{S}}$ всеми свойствами нормы.

Из соотношения

$$\| Z \| \leqslant \| Z_+ \| + \| Z_- \| \leqslant \sqrt[q]{2}\, \| Z \|_{\mathscr{K};\, p} \qquad (1 \leqslant p \leqslant \infty;\ p^{-1} + q^{-1} = 1)$$

и соотношения

$$\frac{1}{\sqrt[p]{2}} \| Z \|_{\mathscr{K};\, p} \leqslant \max(\| Z_+ \|, \| Z_- \|) \leqslant \| Z \| \ (1 \leqslant p \leqslant \infty),$$

вытекающего из (17.3), следует, что все конические нормы $\| Z \|_{\mathscr{K};\, p}$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ топологически эквивалентны исходной.

Теорема 17.1. *Каждая из конических норм* $\| Z \|_{\mathscr{K};\, p}$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ *топологически эквивалентна исходной норме* $\| Z \|$.

Норме $\| Z \|_{\mathscr{K};\, p}$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ *в сопряженном пространстве* $\hat{\mathfrak{S}}^*$ *отвечает норма* $\| Z \|_{\mathscr{K}^*;\, q}$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$.

Доказательство. Первое утверждение теоремы уже доказано. Докажем второе. Пусть $F(Z)$ — произвольный линейный непрерывный функционал на $\hat{\mathfrak{S}}$, тогда

$$F(Z)=\operatorname{sp}(AZ) \quad (Z\in\hat{\mathfrak{S}}),$$

где $A\in\hat{\mathfrak{S}}^*$. Так как

$$\operatorname{sp}(AZ)=\operatorname{sp}(A_+Z_+)+\operatorname{sp}(A_-Z_-)-[\operatorname{sp}(A_+Z_-)+\operatorname{sp}(A_-Z_+)]$$

и

$$\operatorname{sp}(A_+Z_\pm)+\operatorname{sp}(A_-Z_\mp)\leqslant\|A\|_{\mathscr{K}^*;\,q}\|Z\|_{\mathscr{K};\,p},$$

где $p^{-1}+q^{-1}=1$, то

$$|\operatorname{sp}(AZ)|\leqslant\|A\|_{\mathscr{K}^*;\,q}\|Z\|_{\mathscr{K};\,p} \quad (Z\in\hat{\mathfrak{S}}).$$

Если $Z\in\hat{\mathfrak{S}}$ удовлетворяет условию $\mathfrak{R}(Z_\pm)=\mathfrak{R}(A_\pm)$, то $A_+Z_-=$ $=A_-Z_+=0$ и, следовательно,

$$\operatorname{sp}(AZ)=\operatorname{sp}(A_+Z_+)+\operatorname{sp}(A_-Z_-).$$

После этого нетрудно убедиться в том, что для любого $A\in\hat{\mathfrak{S}}^*$

$$\sup_Z\frac{|\operatorname{sp}(AZ)|}{\|Z\|_{\mathscr{K};\,p}}=\|A\|_{\mathscr{K}^*;\,q}.$$

Теорема доказана.

Для случая пространств $\mathfrak{S}_\Pi^{(0)}$, $\mathfrak{S}_\pi$, $\mathfrak{S}_\Pi$ особую роль играют (см. доклад М. С. Бродского, И. Ц. Гохберга М. Г. Крейна и В. И. Мацаева [1]) взаимно сопряженные конические нормы

$$|Z|_{\pi;\,\mathscr{K}}=\sum_{j=1}^{\infty}\pi_j(\lambda_j^+(Z)+\lambda_j^-(Z)) \qquad (Z\in\hat{\mathfrak{S}}_\pi)$$

и

$$|Z|_{\Pi;\,\mathscr{K}}=\max\left\{\sup_n\frac{\sum_{j=1}^n\lambda_j^+(Z)}{\sum_{j=1}^n\pi_j},\ \sup_n\frac{\sum_{j=1}^n\lambda_j^-(Z)}{\sum_{j=1}^n\pi_j}\right\}(Z\in\hat{\mathfrak{S}}_\Pi),$$

где

$$\lambda_j^+(Z)=\lambda_j(Z_+),\ \lambda_j^-(Z)=\lambda_j(Z_-) \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots).$$

ГЛАВА IV

БЕСКОНЕЧНЫЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Уже в предыдущих главах приходилось привлекать методы теории аналитических функций. В этой главе будут использованы значительно более тонкие и разнообразные результаты теории функций — большей частью связанные с теорией роста целых функций. Некоторые из них еще не успели найти свое место в курсах по теории функций и изложены только в журнальной литературе.

Замечательно, что ряд этих результатов возник в связи с требованиями теории операторов.

Каналом использования теорем теории функций в этой главе являются бесконечные определители и определители возмущения, общие предложения о которых приводятся в первых трех параграфах.

В §§ 3—10 излагаются результаты М. Г. Крейна, анонсированные в основном в заметках [8, 9], а в § 11 — результаты В. И. Мацаева [3].

Формулировки используемых теорем теории функций приводятся в соответствующих местах; в отношении их доказательств авторы вынуждены были ограничиться соответствующими ссылками.

Отметим, что теория определителей возмущения находит важные применения в теории возмущений неограниченных (даже самосопряженных) операторов (см. М. Г. Крейн [6]). Однако эти вопросы выпадают из плана книги.

§ 1. Характеристический определитель для ядерного оператора *)

1. Пусть $K=\sum_{j=1}^{n}(\cdot, \psi_j)\,\varphi_j$ — произвольный конечномерный оператор размерности $\leqslant n$. Обозначим через $\mathfrak{L}$ произвольное конечномерное подпространство, содержащее области значений операторов K и K^*. Очевидно, $\mathfrak{L}$ является инвариантным подпространством оператора K, причем на ортогональном дополнении к $\mathfrak{L}$ оператор K обращается в нуль. Пусть $\{\chi_j\}_1^m$ — ортонормированный базис подпространства $\mathfrak{L}$, через $\det(I-K)$ обозначим определитель матрицы $\|\delta_{jk}-(K\chi_j, \chi_k)\|_1^m$. Как известно, этот определитель не зависит от выбора пространства $\mathfrak{L}$ и базиса в нем, ибо всегда

$$\det(I-K)=\prod_{j=1}^{\nu(K)}(1-\lambda_j(K)).$$

Последнее равенство подсказывает, что определитель $\det(I-A)$ для любого оператора $A\in\mathfrak{S}_1$ следует задать формулой

$$\det(I-A)=\prod_{j=1}^{\nu(A)}(1-\lambda_j(A)). \tag{1.1}$$

Произведение в правой части (1.1) сходится, так как для любого $A\in\mathfrak{S}_1$:

$$\sum_{j=1}^{\nu(A)}|\lambda_j(A)|\leqslant|A|_1.$$

Если оператор A — вольтерров, то положим $\det A=1$.

Определитель

$$\det(I-\mu A)=\prod_{j=1}^{\nu(A)}(1-\mu\lambda_j(A))\quad(A\in\mathfrak{S}_1)$$

*) Все основные предложения первых двух параграфов известны. Их изложение имеет некоторые точки соприкосновения с рядом статей: Э. Хилле и Я. Д. Тамаркин [1], В. Б. Лидский [5], С. Т. Курода [2] и др.

будем называть *характеристическим определителем* оператора A и обозначать через $D_A(\mu)$.

1°. *Характеристический определитель* $D_A(\mu)$ *любого оператора* $A \in \mathfrak{S}_1$ *является целой функцией нулевого рода*), причем*

$$|D_A(\mu)| \leqslant \prod_{j=1}^{\infty} (1+|\mu| s_j(A)) \leqslant e^{|\mu|\,|A|_1}. \tag{1.2}$$

Остается пояснить (1.2). Имеем

$$|D_A(\mu)| \leqslant \prod_{j=1}^{\nu(A)} (1+|\mu|\,|\lambda_j(A)|);$$

с другой стороны, согласно следствию II.3.1

$$\prod_{j=1}^{\nu(A)} (1+|\mu|\,|\lambda_j(A)|) \leqslant \prod_{j=1}^{\infty} (1+|\mu| s_j(A)).$$

В силу известного неравенства $1+x \leqslant e^x$:

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1+|\mu| s_j(A)) \leqslant e^{|\mu| \sum\limits_{j=1}^{\infty} s_j(A)} = e^{|\mu|\,|A|_1}.$$

Итак, (1.2) установлено.

Так как согласно определению $D_A(\mu)$ является целой функцией нулевого рода, то тем самым она будет и минимального экспоненциального типа, т. е.

$$\ln|D_A(\mu)| = o(|\mu|) \quad (\mu \to \infty).$$

Это немедленно следует из соотношения

$$|D_A(\mu)| \leqslant \prod_{j=1}^{N} (1+|\mu|\,|\lambda_j(A)|)\, e^{|\mu| \sum\limits_{j=N+1}^{\nu(A)} |\lambda_j(A)|}.$$

2. Логарифмическая производная функции $D_A(\mu)$, очевидно, имеет вид

$$\frac{D'_A(\mu)}{D_A(\mu)} = -\sum_{j=1}^{\nu(A)} \frac{\lambda_j}{1-\mu\lambda_j} \qquad (\lambda_j = \lambda_j(A);\ j = 1, 2, \ldots, \nu(A)),$$

---

*) Определение рода целой функции см. в книге Б. Я. Левина [1], гл. I, § 3.

следовательно,

$$\frac{D'_A(\mu)}{D_A(\mu)} = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\nu(A)} \lambda_j^k \right) \mu^{k-1} \quad (|\mu| < |\lambda_1|^{-1})$$

или

$$\frac{D'_A(\mu)}{D_A(\mu)} = -\operatorname{sp}(A(I-\mu A)^{-1}). \tag{1.3}$$

Аналитически продолжая левую и правую части (1.3), приходим к выводу, что равенство (1.3) имеет место при всех комплексных μ.

Комплексное число μ назовем *Ф-регулярной точкой* (регулярной в смысле Фредгольма) оператора A, если оператор $I-\mu A$ имеет обратный.

Из (1.3) следует, что для любой Ф-регулярной точки μ оператора A

$$D_A(\mu) = \exp\left[-\int_0^{\mu} \operatorname{sp} A(\mu)\, d\mu \right],$$

где $A(\mu) = A(I-\mu A)^{-1}$ — резольвента Фредгольма оператора A, определяемая равенством

$$I + \mu A(\mu) = (I - \mu A)^{-1}.$$

Формула (1.3) позволяет легко показать, что в случае, когда оператор K $(\in \mathfrak{S}_1)$ в $L_2(0, 1)$ определяется непрерывным ядром $\mathcal{K}(t, s)$, определитель $\det(I-\lambda K)$ совпадает с определителем Фредгольма этого ядра. В самом деле, как известно, для определителя Фредгольма $D(\lambda)$ ядра $\mathcal{K}(t, s)$ имеет место равенство

$$\int_0^1 \Gamma(s, s; \lambda)\, ds = -\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)},$$

где $\Gamma(t, s; \lambda)$ — резольвентное ядро. При малых λ выполняется равенство:

$$\int_0^1 \Gamma(s, s; \lambda)\, ds = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \int_0^1 \mathcal{K}_n(s, s)\, ds =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \operatorname{sp} K^n = \operatorname{sp}[K(I-\lambda K)^{-1}].$$

В силу формулы (1.3) отсюда получаем:

$$\frac{d}{d\lambda}\ln\det(I-\lambda K)=\frac{d}{d\lambda}\ln D(\lambda)$$

и

$$\det(I-\lambda K)=D(\lambda).$$

Теорема 1.1. (О непрерывной зависимости определителя $D_A(\mu)$ от оператора A). *Пусть $A\in\mathfrak{S}_1$ и F — произвольное замкнутое ограниченное множество точек комплексной плоскости. Тогда для любого числа $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что каков бы ни был оператор $B\in\mathfrak{S}_1$, удовлетворяющий неравенству $|A-B|_1<\delta$, имеет место соотношение*

$$\max_{\mu\in F}|D_A(\mu)-D_B(\mu)|<\varepsilon.$$

Доказательство. Пусть Γ — простой спрямляемый контур, состоящий из Φ-регулярных точек оператора A и окружающий множество F, а также точку $\mu=0$.

В силу принципа максимума модуля теорема будет доказана, если будет доказано существование $\delta>0$ такого, что для любого $B\in\mathfrak{S}_1$

$$\max_{\mu\in\Gamma}|D_A(\mu)-D_B(\mu)|<\varepsilon.$$

коль скоро $|B-A|_1<\delta$.

Обозначим через L простую спрямляемую кривую, состоящую из Φ-регулярных точек оператора A и соединяющую точку $\mu=0$ с некоторой точкой контура Γ. Пусть Γ_μ $(\mu\in\Gamma\cup L)$ обозначает кратчайший путь вдоль кривых Γ и L, соединяющий точку $\mu=0$ с точкой μ. Из равенства

$$(I-\mu B)^{-1}=(I-\mu A)^{-1}(I-\mu(B-A)(I-\mu A)^{-1})$$

следует, что при выполнении условия:

$$|A-B|_1<\max_{\mu\in\Gamma\cup L}[|\mu||(I-\mu A)^{-1}|]^{-1}$$

все точки μ кривых $\Gamma\cup L$ являются Φ-регулярными точками оператора B, причем

$$\max_{\mu\in\Gamma\cup L}|(I-\mu B)^{-1}|<C\max_{\mu\in\Gamma\cup L}|(I-\mu A)^{-1}|, \tag{1.4}$$

где C — константа, зависящая только от кривых Γ и L и оператора A.

Так как

$$A(\mu)-B(\mu)=(I-\mu A)^{-1}(A-B)(I-\mu B)^{-1},$$

то

$$|A(\mu)-B(\mu)|_1 \leqslant |(I-\mu A)^{-1}|\,|B-A|_1\,|(I-\mu B)^{-1}| \quad (\mu\in\Gamma\cup L). \tag{1.5}$$

Из (1.4) и (1.5) вытекает, что для любого $\eta>0$ найдется $\delta>0$ такое, что

$$\left|\int_{\Gamma_{\mu_0}} \operatorname{sp}(A(\mu)-B(\mu))\,d\mu\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{\Gamma_{\mu_0}} |A(\mu)-B(\mu)|_1\,d\mu<\eta \quad (\mu_0\in\Gamma\cup L), \tag{1.6}$$

коль скоро $|A-B|_1<\delta$.

Выбрав достаточно малое число η, можно, очевидно, добиться того, чтобы из (1.6) следовало

$$|D_A(\mu_0)-D_B(\mu_0)|=$$
$$=\left|D_A(\mu_0)\left(1-\exp\left[\int_{\Gamma_{\mu_0}} \operatorname{sp}(A(\mu)-B(\mu))\,d\mu\right]\right)\right|<\varepsilon$$
$$(\mu_0\in\Gamma\cup L).$$

Теорема доказана.

Следствие 1.1. *Пусть оператор $A\in\mathfrak{S}_1$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что для всякого оператора $B\in\mathfrak{S}_1$, удовлетворяющего неравенству $|A-B|_1<\delta_1$, будет*

$$|\det(I-A)-\det(I-B)|<\varepsilon.$$

3. Следствие 1.1 позволяет указать ряд правил вычисления определителя $\det(I-A)$.

2°. *Пусть $A\in\mathfrak{S}_1$ и $\{\varphi_n\}_1^\infty$ — произвольный ортонормированный базис пространства $\mathfrak{H}$; тогда*

$$\det(I-A)=\lim_{n\to\infty}\det\|\delta_{jk}-(A\varphi_j,\varphi_k)\|_1^n.$$

Это выражение можно записывать в виде:

$$\det \| \delta_{jk} - (A\varphi_j, \varphi_k) \|_1^\infty .$$

В самом деле, $\det \| \delta_{jk} - (A\varphi_j, \varphi_k) \|_1^n$ является определителем оператора

$$I - A_n = I - \sum_{j=1}^{n} (\cdot, \varphi_j) A\varphi_j,$$

а так как последовательность конечномерных операторов A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ стремится в силу теоремы III.6.3 к оператору A по норме пространства $\mathfrak{S}_1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \det (I - A_n) = \det (I - A).$$

Это предложение может быть дополнено предложением, которое в некоторых случаях позволяет упростить вычисление определителя $\det (I - A)$.

3°. *Пусть* $A \in \mathfrak{S}_1$ *и* $\{\varphi_j\}_1^\omega$ $(\omega \leqslant \infty)$ — *ортонормированный базис замыкания* $\mathfrak{R}(A)$. *Тогда*

$$\det (I - A) = \det \| \delta_{jk} - (A\varphi_j, \varphi_k) \|_1^\omega . \tag{1.7}$$

В самом деле, пусть $\{\psi_j\}_1^{\omega_1}$ — ортонормированный базис $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H} \ominus \overline{\mathfrak{R}(A)}$. Перенумеруем как-либо в одну последовательность $\{\chi_j\}_1^\infty$ все орты φ_j $(j = 1, 2, \ldots, \omega)$ и ψ_j $(j = 1, 2, \ldots, \omega_1)$; тогда

$$\det (I - A) = \det \| \delta_{jk} - (A\chi_j, \chi_k) \|_1^\infty = \\ = \lim_{n\to\infty} \det \| \delta_{jk} - (A\chi_j, \chi_k) \|_1^n .$$

Но если при некотором $k : \chi_k = \psi_{p_k}$, то, учитывая, что $\psi_{p_k} \in \mathfrak{R}(A)^\perp$, будем иметь:

$$(A\chi_j, \chi_k) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда нетрудно получить (1.7).

4°. *Пусть*

$$A = \sum_{j=1}^{\infty} (\cdot, \varphi_j) \psi_j$$

— одно из возможных представлений оператора $A \in \mathfrak{S}_1$, *где* $\{\varphi_j\}$ *и* $\{\psi_j\}$ *— произвольные системы векторов, удовлетворяющих условию*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j|\,|\psi_j| < \infty.$$

Тогда

$$\det(I-A) = \lim_{n\to\infty} \det \| \delta_{jk} - (\psi_j, \varphi_k) \|_1^n$$

$$(= \det \| \delta_{jk} - (\psi_j, \varphi_k) \|_1^{\infty}).$$

В самом деле, операторы

$$A_n = \sum_{j=1}^{n} (\cdot, \varphi_j)\, \psi_j$$

стремятся к оператору A по норме $\mathfrak{S}_1$:

$$\lim_{n\to\infty} |A - A_n|_1 \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} |\varphi_j|\,|\psi_j| = 0.$$

Следовательно, предложение будет доказано, коль скоро будет установлено равенство

$$\det(I-A_n) = \det \| \delta_{jk} - (\psi_j, \varphi_k) \|_1^n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Проверка последнего предоставляется читателю.

4. В дальнейшем будут использованы еще следующие утверждения.

5°. *Пусть* $A \in \mathfrak{S}_\infty$, $B \in \mathfrak{R}$, *такие, что* $AB \in \mathfrak{S}_1$ *и* $BA \in \mathfrak{S}_1$. *Тогда*

$$\det(I-AB) = \det(I-BA). \tag{1.8}$$

Пусть $s_j = s_j(A)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ — последовательные s-числа оператора A, а $\{\varphi_j\}_1^{\omega}$ и $\{\psi_j\}_1^{\omega}$ — соответствующие ортонормированные системы Шмидта, так что:

$$A\varphi_j = s_j \psi_j, \quad A^*\psi_j = s_j \varphi_j \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Так как система $\{\psi_j\}_1^{\omega}$ полна в $\mathfrak{R}(A)$, то на основании предложения 3° можно будет написать:

$$\det(I-AB) = \det \| \delta_{jk} - (AB\psi_j, \psi_k) \|_1^{\omega} =$$
$$= \det \| \delta_{jk} - (B\psi_j, A^*\psi_k) \|_1^{\omega} = \det \| \delta_{jk} - (B\psi_j, \varphi_k)\, s_k \|_1^{\omega}. \tag{1.9}$$

Аналогично по той причине, что система $\{\varphi_j\}_1^\omega$ полна в $\mathfrak{R}(A^*)$, будем иметь:

$$\det(I - A^*B^*) = \det \| \delta_{jk} - (B^*\varphi_j, \psi_k) s_k \|_1^\omega =$$
$$= \det \| \delta_{jk} - (\varphi_j, B\psi_k) s_k \|_1^\omega.$$

Отсюда

$$\det(I - BA) = \overline{\det(I - A^*B^*)} = \det \| \delta_{jk} - (B\psi_k, \varphi_j) s_k \|_1^\omega.$$

Последний определитель получается из определителя (1.9) путем умножения его j-й строчки на s_j и делением k-го столбца на s_k ($j, k = 1, 2, \ldots$) и последующего транспонирования. Поэтому равенство (1.9) доказано.

6°. *Пусть $C \in \mathfrak{S}_1$, а S — ограниченный обратимый оператор. Тогда*

$$\det(I - C) = \det(I - SCS^{-1}).$$

Это предложение есть частный случай предложения 5°, получающийся при $A = CS^{-1}$ и $B = S$.

7°. *Для любых операторов $A, B \in \mathfrak{S}_1$ имеет место равенство*

$$\det[(I - A)(I - B)] = \det[(I - B)(I - A)]. \tag{1.10}$$

В самом деле, обозначая через $\{\varphi_j\}_1^\infty$ произвольный ортонормированный базис пространства $\mathfrak{H}$ и через P_n ($n = 1, 2, \ldots$) — ортогональный проектор на линейную оболочку векторов $\{\varphi_j\}_1^n$, получим в силу следствия 1.1, что

$$\det[(I - A)(I - B)] =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \det[(I - P_nAP_n)(I - P_nBP_n)]. \tag{1.11}$$

Так как

$$\det[(I - P_nAP_n)(I - P_nBP_n)] =$$
$$= \det \| ((I - P_nAP_n)(I - P_nBP_n)\varphi_j, \varphi_k) \|_1^n, \tag{1.12}$$

$$\| ((I - P_nAP_n)(I - P_nBP_n)\varphi_j, \varphi_k) \|_1^n =$$
$$= \| ((I - P_nAP_n)\varphi_j, \varphi_k) \|_1^n \cdot \| ((I - P_nBP_n)\varphi_j, \varphi_k) \|_1^n \tag{1.13}$$

и определители матриц из правой части последнего равенства стремятся соответственно к $\det(I-A)$ и $\det(I-B)$ при $n\to\infty$, то из (1.11), (1.12) и (1.13) вытекает (1.10).

8°. *Пусть $A(\mu)$ — голоморфная в некоторой области оператор-функция со значениями из $\mathfrak{S}_1$. Тогда определитель $\det(I-A(\mu))$ голоморфен в этой же области.*

В самом деле, пусть $\{\varphi_j\}_1^\infty$ и P_n $(n=1, 2, \ldots)$ имеют тот же смысл, что и в доказательстве свойства 7°. Тогда в каждой точке μ рассматриваемой области G

$$\Delta(\mu)=\det(I-A(\mu))= \\ =\lim_{n\to\infty}\det(I-P_nA(\mu)P_n)=\lim_{n\to\infty}\Delta_n(\mu).$$

Определители $\Delta_n(\mu)$ $(n=1, 2, \ldots)$ суть голоморфные функции в G. Так как

$$|\Delta_n(\mu)|=|\det(I-P_nA(\mu)P_n)|\leqslant\exp|A(\mu)|_1 \\ (n=1, 2, \ldots),$$

то на любой ограниченной замкнутой части области G функции $\Delta_n(\mu)$ $(n=1, 2, \ldots)$ равномерно ограничены. Отсюда в силу известной теоремы теории функций и их предел голоморфная функция в G.

9°. *При условиях предложения 8° во всех точках μ, в которых оператор $I-A(\mu)$ имеет ограниченный обратный, справедлива формула*

$$\frac{d}{d\mu}\ln\det(I-A(\mu))=-\mathrm{sp}\left[(I-A(\mu))^{-1}\frac{dA(\mu)}{d\mu}\right]. \qquad (1.14)$$

Докажем сначала формулу (1.14) в предположении конечномерности пространства $\mathfrak{H}$. Пусть $\{\varphi_j\}_1^n$ — ортонормированный базис пространства $\mathfrak{H}$ и

$$a_{jk}(\mu)=(A(\mu)\varphi_k, \varphi_j) \qquad (j, k=1, 2, \ldots, n).$$

Тогда левую часть равенства (1.14) можно представить в виде

$$\frac{d}{d\mu}\ln\det(I-A(\mu))=\frac{\Delta'(\mu)}{\Delta(\mu)}= \\ =\left[\sum_{k,j=1}^{n}\gamma_{kj}(\mu)\frac{d}{d\mu}a_{kj}(\mu)\right]\Delta^{-1}(\mu), \qquad (1.15)$$

где $\gamma_{kj}(\mu)$ — алгебраическое дополнение элемента $\delta_{kj} - a_{kj}(\mu)$ в определителе $\Delta(\mu) = \det \| \delta_{kj} - a_{kj}(\mu) \|_1^n$. Правая часть равенства (1.15), как легко видеть, совпадает с правой частью равенства (1.14).

Из доказательства следует, что равенство (1.15) имеет место при замене в нем оператор-функции $A(\mu)$ на оператор-функцию $P_n A(\mu) P_n$, где P_n — ортопроектор на линейную оболочку первых n векторов некоторого ортонормированного базиса пространства $\{\varphi_j\}_1^\infty$.

Переходя в получаемом таким образом равенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем (1.14).

Заметим, что формула (1.3) является частным случаем формулы (1.14), а именно, она получается из последней при $A(\mu) = \mu A$ $(A \in \mathfrak{S}_1)$.

Формула (1.14) может быть получена как непосредственное следствие общей формулы *)

$$\frac{d}{d\mu} \operatorname{sp} \{F(A(\mu))\} = \operatorname{sp} \left\{ F'(A(\mu)) \frac{dA(\mu)}{d\mu} \right\}, \tag{1.16}$$

где $F(z)$ — какая-либо скалярная функция, голоморфная в некоторой области G_F комплексной плоскости, причем $\sigma(A(\mu)) \in G_F$ при всех $\mu \in G$ и $F(0) = 0$.

В самом деле, если $A \in \mathfrak{S}_1$ и $\det(I - A) \neq 0$, то будем иметь:

$$\ln \det (I - A) = \operatorname{sp} \ln (I - A), \tag{1.17}$$

и поэтому формулу (1.14) можно переписать в виде:

$$\frac{d}{d\mu} \operatorname{sp} \ln (I - A(\mu)) = -\operatorname{sp} \left\{ (I - A(\mu))^{-1} \frac{dA(\mu)}{d\mu} \right\}.$$

Последняя же является частным случаем формулы (1.16), соответствующим $F(z) = \ln(1 - z)$.

Ниже будет изложен вывод формулы (1.16). Предварительно сделаем несколько замечаний.

Напомним (см. Ф. Рисс и Б. С.-Надь [1]) прежде всего, что для $A \in \mathfrak{R}$ и функции $F(z)$, голоморфной в некоторой области G_F, содержащей спектр $\sigma(A)$ оператора A, оператор $F(A)$ определяется

*) Эта формула известна: в книге Диксмье [1] она выводится для случая определенной на интервале оператор-функции $A(\mu)$ $(a \leqslant \mu \leqslant b)$ со значениями из $\mathfrak{S}_1$ и непрерывно дифференцируемой в $\mathfrak{S}_1$. Вывод формулы в нашем случае совершенно аналогичен.

с помощью интеграла:

$$F(A)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} F(z)(A-zI)^{-1}dz, \tag{1.18}$$

где γ — ориентированный простой или сложный спрямляемый контур, ограничивающий слева некоторую область, содержащуюся в G_F и содержащую в себе спектр $\sigma(A)$. Как известно, оператор $F(A)$ не зависит от выбора γ.

В частности, если $A\in\mathfrak{S}_\infty$, то это определение содержит в себе требование, что точка $\lambda=0$ принадлежит G_F. Если при этом $F(0)=0$, то пользуясь тем, что $(A-zI)^{-1}+z^{-1}I=z^{-1}A(A-zI)^{-1}$, легко получаем из (1.18):

$$F(A)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} F(z)A(A-zI)^{-1}\frac{dz}{z}. \tag{1.19}$$

Если $A\in\mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S}$ — какой-либо с. н. идеал, то $A(A-zI)^{-1}$ будет некоторой непрерывной оператор-функцией на γ со значениями из $\mathfrak{S}$. Поэтому интеграл, стоящий в левой части (1.19), будет иметь всегда своим значением некоторый оператор из того же идеала $\mathfrak{S}$.

Таким образом, дополнительное условие $F(0)=0$ обеспечивает то, что вместе с $A\in\mathfrak{S}$ также и $F(A)\in\mathfrak{S}$. Без особого труда показывается, что если при этом оператор A имеет спектр собственных значений $\{\lambda_j(A)\}_1^{\nu(A)}$, то оператор $F(A)$ в качестве такового имеет последовательность $\{F(\lambda_j(A))\}_1^{\nu(A)}$. После этих пояснений, вспоминая определение (1.1) определителя $\det(I-A)$ для $A\in\mathfrak{S}_1$, убеждаемся в справедливости (1.17) для той ветви $F(z)=\ln(1-z)$ многозначной функции $\operatorname{Ln}(1-z)$, которая голоморфна в некоторой области, содержащей $\sigma(A)$, и выделяется условием $F(0)=0$.

Приведем теперь вывод формулы (1.16).

Выбрав произвольную точку $\mu_0\in G$, построим ориентированный спрямляемый контур γ, ограничивающий слева некоторую область G_γ, которая лежит в G_F и содержит $\sigma(A(\mu_0))$. Тогда для всех μ из некоторой окрестности $S(\mu_0)$ точки μ_0 будет: $\sigma(A(\mu))\in G_\gamma$ и, следовательно,

$$F(A(\mu))=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} F(z)C(\mu, z)\,dz, \tag{1.20}$$

где

$$C(\mu, z)=z^{-1}A(\mu)(A(\mu)-zI)^{-1}=(A(\mu)-zI)^{-1}+z^{-1}I \quad (z\in\gamma,\ \mu\in G_\gamma). \tag{1.21}$$

Так как при любом фиксированном $\mu\in G_\gamma$ фувкция $C(\mu, z)$ есть непрерывная оператор-функция от $z\in\gamma$ со значениями из $\mathfrak{S}_1$, то из (1.20) следует

$$\operatorname{sp} F(A(\mu))=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} F(z)\operatorname{sp}\{C(\mu, z)\}\,dz. \tag{1.22}$$

Согласно (1.21) имеем:

$$\frac{C(\mu, z) - C(\mu_0, z)}{\mu - \mu_0} = (A(\mu_0) - zI)^{-1} \frac{A(\mu) - A(\mu_0)}{\mu - \mu_0} (A(\mu) - zI)^{-1}.$$

Так как по условию в метрике $\mathfrak{S}_1$ существует предел

$$\frac{dA}{d\mu_0} = \lim_{\mu \to \mu_0} \frac{A(\mu) - A(\mu_0)}{\mu - \mu_0},$$

то отсюда нетрудно заключить, что равномерно относительно $z \in \gamma$ существует предел

$$\frac{dC(\mu_0, z)}{d\mu_0} = \lim_{\mu \to \mu_0} \frac{C(\mu, z) - C(\mu_0, z)}{\mu - \mu_0} =$$

$$= (A(\mu_0) - zI)^{-1} \frac{dA}{d\mu_0} (A(\mu_0) - zI)^{-1}$$

в метрике $\mathfrak{S}_1$. Поэтому существует равномерный по $z \in \gamma$ предел

$$\frac{d}{d\mu_0} \operatorname{sp}\{C(\mu_0, z)\} = \operatorname{sp}\left\{(A(\mu_0) - zI)^{-1} \frac{dA}{d\mu_0} (A(\mu_0) - zI)^{-1}\right\} =$$

$$= \operatorname{sp}\left\{(A(\mu_0) - zI)^{-2} \frac{dA}{d\mu_0}\right\} = -\frac{d}{dz} \operatorname{sp}\left\{(A(\mu_0) - zI)^{-1} \frac{dA}{d\mu_0}\right\}.$$

Вспоминая (1.22), находим:

$$\frac{d}{d\mu_0} \operatorname{sp}\{F(A(\mu_0))\} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma F(z) \frac{d}{dz} \operatorname{sp}\left\{(A(\mu_0) - zI)^{-1} \frac{dA}{d\mu_0}\right\} dz =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma F'(z) \operatorname{sp}\left\{(A(\mu_0) - zI)^{-1} \frac{dA}{d\mu_0}\right\} dz.$$

Последний интеграл получен интегрированием по частям и может быть дальше преобразован следующим образом:

$$\operatorname{sp}\left\{-\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma F'(z) \cdot (A(\mu_0) - zI)^{-1} dz \frac{dA}{d\mu_0}\right\} = \operatorname{sp}\left\{F'(A(\mu_0)) \frac{dA}{d\mu_0}\right\},$$

на чем и заканчивается вывод (1.16).

§ 2. Регуляризованный характеристический определитель для операторов из $\mathfrak{S}_p$

1. Всякому оператору $A \in \mathfrak{S}_p$, где p — целое положительное число, сопоставим число

$$\overset{(p)}{\det}(I - A) = \prod_{j=1}^{\nu(A)} \left[(1 - \lambda_j(A)) \exp \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \lambda_j^k(A)\right],$$

которое назовем *регуляризованным определителем* оператора $I-A$.

Для вольтеррова оператора A положим $\overset{(p)}{\det}(I-A)=1$.

Определитель

$$\overset{(p)}{\det}(I-\mu A)=\prod_{j=1}^{\nu(A)}\left[(1-\lambda_j(A)\mu)\exp\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k}\lambda_j^k(A)\mu^k\right](A\in\mathfrak{S}_p) \tag{2.1}$$

назовем *регуляризованным характеристическим определителем* оператора A и обозначим через $\overset{(p)}{D}_A(\mu)$.

Если оператор $A\in\mathfrak{S}_1$, то, очевидно,

$$\overset{(p)}{D}_A(\mu)=D_A(\mu)\exp\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k}\operatorname{sp}A^k\mu^k.$$

По самому представлению (2.1) определителя $\overset{(p)}{D}_A(\mu)$ он является целой функцией рода p, а следовательно, целой функцией p-го порядка и минимального типа, т. е.

$$\ln|\overset{(p)}{D}_A(\mu)|=o(|\mu|^p)\quad(\mu\to\infty).$$

Логарифмическая производная функции $\overset{(p)}{D}_A(\mu)$ имеет вид

$$\frac{d}{d\mu}\ln\overset{(p)}{D}_A(\mu)=-\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=p}^{\infty}\lambda_j^k\mu^{k-1}\quad(|\mu|<|\lambda_1|^{-1});$$

следовательно,

$$\frac{d}{d\mu}\ln\overset{(p)}{D}_A(\mu)=-\operatorname{sp}\{\mu^{p-1}A^p(I-\mu A)^{-1}\}.$$

Последнее равенство (аналогичное формуле (1.3)) имеет место при всех комплексных μ, являющихся Ф-регулярными точками оператора A. Поэтому для любой Ф-регулярной точки μ оператора A имеет место равенство

$$\overset{(p)}{D}_A(\mu)=\exp\left[-\int_0^{\mu}\operatorname{sp}[\mu^{p-1}A^p(I-\mu A)^{-1}\right]d\mu.$$

Последнее представление функции $\overset{(p)}{D}_A(\mu)$ позволяет доказать следующее обобщение теоремы 1.1.

Теорема 2.1. *Пусть $A \in \mathfrak{S}_p$, где p — целое положительное число, и F — произвольное замкнутое ограниченное множество. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякого оператора $B \in \mathfrak{S}_p$*

$$\max_{\mu \in F} |\overset{(p)}{D}_A(\mu) - \overset{(p)}{D}_B(\mu)| < \varepsilon,$$

коль скоро

$$|A - B|_p < \delta.$$

Доказательство этой теоремы о непрерывной зависимости регуляризованного определителя от оператора A аналогично доказательству теоремы 1.1 и опускается.

2. Если оператор $A \in \mathfrak{S}_2$, то согласно определению

$$\overset{(2)}{D}_A(\mu) = \prod_{j=1}^{\nu(A)} [(1 - \lambda_j(A)\mu)\, e^{\mu\lambda_j(A)}].$$

Этот определитель в дальнейшем будем обозначать для удобства через $\widetilde{D}_A(\mu)$, а определитель $\overset{(2)}{\det}(I - A)$ $(A \in \mathfrak{S}_2)$ — через $\widetilde{\det}(I - A)$.

1°. *Определитель $\widetilde{D}_A(\mu)$ $(A \in \mathfrak{S}_2)$ допускает следующую точную оценку*:

$$|\widetilde{D}_A(\mu)| \leqslant \exp\left[\frac{1}{2}|\mu|^2 \operatorname{sp}(A^*A)\right]. \tag{2.2}$$

В самом деле,

$$|\widetilde{D}_A(\mu)|^2 = \prod_{j=1}^{\nu(A)} |1 - \mu\lambda_j|^2 e^{2\operatorname{Re}(\mu\lambda_j)} \qquad (\lambda_j = \lambda_j(A)),$$

или

$$|\widetilde{D}_A(\mu)|^2 = \prod_{j=1}^{\nu(A)} (1 - 2\operatorname{Re}(\mu\lambda_j) + |\mu\lambda_j|^2)\, e^{2\operatorname{Re}(\mu\lambda_j)}. \tag{2.3}$$

Так как $1 + x \leqslant e^x$, то из (2.3) следует неравенство

$$|\widetilde{D}_A(\mu)|^2 \leqslant \exp\left(|\mu^2| \sum_{j=1}^{\nu(A)} |\lambda_j|^2\right).$$

Учитывая, что

$$\sum_{j=1}^{\nu(A)} |\lambda_j|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} s_j^2(A) = \operatorname{sp}(A^*A),$$

получаем (2.2).

Оценка (2.2) является точной. В этом можно убедиться, рассматривая последовательность операторов

$$K_n = \sqrt{\frac{l}{2n}}\left[\sum_{j=1}^{n}(\cdot,\ \varphi_j)\varphi_j - \sum_{j=n+1}^{2n}(\cdot,\ \varphi_j)\varphi_j\right]\quad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

где $\{\varphi_j\}_1^\infty$ — некоторая ортонормированная система. Действительно, легко подсчитать, что

$$\widetilde{D}_{K_n}(\mu) = \left(1-\mu\sqrt{\frac{l}{2n}}\right)^n e^{\sqrt{\frac{nl}{2}}\mu}\left(1+\mu\sqrt{\frac{l}{2n}}\right)^n e^{-\sqrt{\frac{nl}{2}}\mu} = \left(1-\mu^2\frac{l}{2n}\right)^n.$$

Отсюда получаем

$$\lim_{n\to\infty}\widetilde{D}_{K_n}(\mu) = e^{-\mu^2 l/2}.$$

Остается заметить, что $l = \operatorname{sp}(K_n^* K_n)$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$, и рассмотреть чисто мнимые μ.

2°. *Пусть* $A \in \mathfrak{S}_2$ *и* $\{\varphi_j\}_1^\infty$ — *произвольный ортонормированный базис пространства* $\mathfrak{H}$. *Тогда*

$$\widetilde{\det}(I-A) = \lim_{n\to\infty}\left[\det\|\delta_{jk}-(A\varphi_j,\ \varphi_k)\|_1^n \exp\sum_{j=1}^{n}(A\varphi_j,\ \varphi_j)\right]. \tag{2.4}$$

В самом деле,

$$\widetilde{\det}(I-A_n) = \det\|\delta_{jk}-(A\varphi_j,\ \varphi_k)\|_1^n \exp\sum_{j=1}^{n}(A\varphi_j,\ \varphi_j)$$
$$(n=1,\ 2,\ \ldots),$$

где

$$A_n = \sum_{j=1}^{n}(\cdot,\ \varphi_j)A\varphi_j \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Так как последовательность операторов $\{A_n\}_1^\infty$ стремится к оператору A по норме $\mathfrak{S}_2$, то согласно теореме 2.1

$$\widetilde{\det}(I-A) = \lim_{n\to\infty}\widetilde{\det}(I-A_n).$$

3°. *Если операторы* A *и* $B \in \mathfrak{S}_2$, *то для оператора* $I-C=(I-A)(I-B)$ *имеет место равенство*

$$\widetilde{\det}(I-C)\,e^{\operatorname{sp}AB} = \widetilde{\det}(I-A)\,\widetilde{\det}(I-B). \tag{2.5}$$

Пусть $\{\varphi_j\}_1^\infty$ — ортонормированный базис пространства $\mathfrak{H}$ и P_n — ортогональный проектор на линейную оболочку векторов $\{\varphi_j\}_1^n$ и $A_n = P_n A P_n$, $B_n = P_n B P_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, тогда

$$\widetilde{\det}(I - A_n)\,\widetilde{\det}(I - B_n) = \det[(I - A_n)(I - B_n)]\, e^{\operatorname{sp}(A_n + B_n)},$$

следовательно,

$$\widetilde{\det}(I - A_n)\,\widetilde{\det}(I - B_n) = \widetilde{\det}[(I - A_n)(I - B_n)]\, e^{\operatorname{sp} A_n B_n}.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем (2.5).

3. Теория бесконечных определителей Коха [1, 2] позволяет указать более глубокий подход к понятиям определителя $\det(I-A)$ и регуляризованного определителя $\widetilde{\det}(I-A)$.

Приведем без доказательств ряд предложений теории бесконечных определителей Коха.

Бесконечная матрица $I - \mathcal{A} = \|\delta_{jk} - a_{jk}\|_1^\infty$, составленная из комплексных чисел, называется матрицей с *абсолютно сходящимся определителем*, если сходится ряд

$$\sum |a_{j_1k_1}a_{j_2k_2}\ldots a_{j_nk_n}|,$$

где суммирование ведется по всем парам систем индексов $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ и $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, отличающимся друг от друга только перестановкой, причем $j_1 < j_2 < \ldots < j_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Если матрица $I - \mathcal{A}$ является матрицей с абсолютно сходящимся определителем, то существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \det \|\delta_{jk} - a_{jk}\|_1^n = \det(I - \mathcal{A}),$$

называемый определителем матрицы $I - \mathcal{A}$.

Если матрица $I - \mathcal{A}$ обладает абсолютно сходящимся определителем, то он может быть представлен в виде

$$\det(I - \mathcal{A}) = \\ = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} a_{jj} + \frac{1}{2!}\sum_{j,\,k=1}^{\infty}\begin{vmatrix} a_{jj} & a_{kj} \\ a_{jk} & a_{kk}\end{vmatrix} - \frac{1}{3!}\sum_{j,\,k,\,r=1}^{\infty}\begin{vmatrix} a_{jj} & a_{kj} & a_{rj} \\ a_{jk} & a_{kk} & a_{rk} \\ a_{jr} & a_{kr} & a_{rr}\end{vmatrix} + \ldots, \tag{2.6}$$

где ряд в правой части равенства (2.6) останется сходящимся, если заменить числа a_{jk} $(j, k = 1, 2, \ldots)$ их модулями и если все члены, получающиеся при раскрытии определителей из (2.6), брать со знаком плюс.

Матрицу $I-\mathscr{A}$ назовем *матрицей Коха*, если выполняются условия

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{jj}| < \infty, \qquad \sum_{j,\,k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 < \infty. \tag{2.7}$$

Для таких матриц имеют место следующие предложения, установленные Х. Кохом [1, 2].

I. *Всякая матрица Коха имеет абсолютно сходящийся определитель. Если элементы матрицы Коха являются функциями некоторого параметра* μ: $a_{jk}=a_{jk}(\mu)$ $(j,\ k=1,\ 2,\ \ldots)$ *и в области изменения параметра* μ *ряды* (2.7) *равномерно сходятся, то в этой области при* $n\to\infty$ *определители* $\det\|\delta_{jk}-a_{jk}(\mu)\|_1^n$ *равномерно относительно* μ *стремятся к определителю* $\det(I-\mathscr{A}(\mu))$.

II. *Если матрицы* $I-\mathscr{A}$ *и* $I-\mathscr{B}$ *являются матрицами Коха, то их произведение* $I-\mathscr{C}=(I-\mathscr{A})(I-\mathscr{B})$ *также является матрицей Коха и*

$$\det(I-\mathscr{C})=\det(I-\mathscr{A})\det(I-\mathscr{B}).$$

Пусть A — некоторый вполне непрерывный оператор, а $\{\varphi_j\}_1^\infty$ — какой-либо ортонормированный базис $\mathfrak{H}$. Как известно, оператору A в базисе $\{\varphi_j\}_1^\infty$ отвечает бесконечная матрица

$$A_\varphi=\|a_{jk}\|_1^\infty;\quad a_{jk}=(A\varphi_k,\ \varphi_j)\qquad (j,\ k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Для матрицы A_φ второе условие из (2.7) будет выполнено в том и только том случае, когда оператор $A\in\mathfrak{S}_2$. Если оператор $A\in\mathfrak{S}_1$, то для матрицы A_φ будут выполнены оба условия (2.7), а следовательно, будет иметь смысл определитель Коха $\det(I-A_\varphi)$. Вспоминая предложение I, заключаем, что для $A\in\mathfrak{S}_1$

$$\det(I-A)=\det(I-A_\varphi).$$

Если же A — произвольный оператор из $\mathfrak{S}_2$, то первое из условий (2.7) для матрицы A_φ, вообще говоря, не будет выполняться, а следовательно, заведомо матрице A_φ не отвечает абсолютно сходящийся определитель Коха. Однако если матрицу A_φ «регуляризовать», заменив ее матрицей

$$\widetilde{A}_\varphi=\|\widetilde{a}_{jk}\|_1^\infty,$$

где $\widetilde{a}_{jk}$ определяется из соотношения

$$\delta_{jk}-\widetilde{a}_{jk}=(\delta_{jk}-a_{jk})\,e^{a_{jj}}\qquad (j,\ k=1,\ 2,\ \ldots),$$

то после этого условия (2.7) будут снова выполняться. В самом деле, так как $a_{jj}\to 0$ при $j\to\infty$, то

$$\widetilde{a}_{jj}=1-e^{a_{jj}}(1-a_{jj})=O(|a_{jj}|^2)\qquad (j\to\infty)$$

и

$$|\widetilde{a}_{jk}|\leqslant c\,|a_{jk}|\qquad (j,\ k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Легко видеть, что

$$\widetilde{D}_A(\mu) = \widetilde{\det}\,(I - (\mu A_\varphi)).$$

Отправляясь именно от такого определения характеристического определителя, Хилле и Тамаркин [1] получили оценку (2.2), воспользовавшись известным неравенством Адамара.

Отметим, что для интегральных операторов в $L_2(a, b)$ с ядром Гильберта—Шмидта оценка (2.2) для регуляризованного по Гильберту детерминанта Фредгольма была получена еще Карлеманом [2]. Им же было выяснено, что эта оценка точная.

§ 3. Определители возмущения

1. Пусть A и B — линейные ограниченные операторы, действующие в $\mathfrak{H}$, причем $A - B \in \mathfrak{S}_1$.

Если точка μ является Ф-регулярной точкой оператора A, то

$$(I - \mu B)(I - \mu A)^{-1} = I - \mu(B - A)(I - \mu A)^{-1}, \qquad (3.1)$$

где оператор $\mu(B - A)(I - \mu A)^{-1} \in \mathfrak{S}_1$. Следовательно, имеет смысл определитель

$$D_{B/A}(\mu) = \det[(I - \mu B)(I - \mu A)^{-1}],$$

который мы назовем *определителем возмущения* оператора A оператором $T = B - A$.

В силу предложения 8° § 1 определитель возмущения $D_{B/A}(\mu)$ является голоморфной функцией в области всех Ф-регулярных точек оператора A.

Если операторы A, $B \in \mathfrak{S}_1$, то, очевидно,

$$D_{B/A}(\mu) = \frac{D_B(\mu)}{D_A(\mu)}. \qquad (3.2)$$

1°. *Если операторы A, $B \in \mathfrak{S}_2$, разность $A - B \in \mathfrak{S}_1$ и μ является Ф-регулярной точкой оператора A, то*

$$D_{B/A}(\mu) = \frac{\widetilde{D}_B(\mu)}{\widetilde{D}_A(\mu)} \exp[\mu\,\mathrm{sp}\,(A - B)]. \qquad (3.3)$$

В самом деле, согласно предложению 3° § 2, из (3.1) следует, что

$$\widetilde{D}_B(\mu)\, e^{\mu\,\mathrm{sp}\,MA} = \widetilde{\det}\,(I - M)\,\widetilde{D}_A(\mu),$$

где

$$M = \mu(B - A)(I - \mu A)^{-1}.$$

Так как оператор $M \in \mathfrak{S}_1$, то

$$\widetilde{\det}(I-M)=\det(I-M)\,e^{\operatorname{sp} M}.$$

Таким образом,

$$D_{B/A}(\mu)=\det(I-M)=\frac{\widetilde{D}_B(\mu)}{\widetilde{D}_A(\mu)}\,e^{-\operatorname{sp} M(I-\mu A)}.$$

Учитывая, что $-M(I-\mu A)=\mu(A-B)$, приходим к (3.3).

2°. *Пусть A, B, $C \in \mathfrak{R}$. Если точка μ является Φ-регулярной точкой операторов A и B, а операторы $B-A$, $C-B$ принадлежат $\mathfrak{S}_1$, то*

$$D_{C/B}(\mu)\,D_{B/A}(\mu)=D_{C/A}(\mu).$$

Действительно, это равенство непосредственно следует из равенства

$$[(I-\mu C)(I-\mu B)^{-1}]\,[(I-\mu B)(I-\mu A)^{-1}]=$$
$$=(I-\mu C)(I-\mu A)^{-1}.$$

В качестве следствия из предложения 2° получаем:

3°. *Если точка μ является общей Φ-регулярной точкой операторов A и $B\,(\in \mathfrak{R})$ и $A-B \in \mathfrak{S}_1$, то*

$$D_{A/B}(\mu)=[D_{B/A}(\mu)]^{-1}.$$

Хотя в общем случае A, $B\,(\overline{\in}\,\mathfrak{S}_1)$ равенство (3.2) не имеет смысла, несмотря на это, порядок *) определителя возмущения в какой-либо точке $\mu_0\,(\neq 0)$ определяется естественным образом через кратности $\lambda_0=\mu_0^{-1}$ как собственного числа операторов A и B.

4°. *Пусть для операторов A, $B \in \mathfrak{R}$ выполняются условия: а) $A-B \in \mathfrak{S}_1$, б) λ_0 — общая нормальная точка A и B.*

Тогда порядок определителя возмущения $D_{B/A}(\mu)$ в точке $\mu_0=1/\lambda_0$ равен разности $\nu_{\lambda_0}(B)-\nu_{\lambda_0}(A)$, где $\nu_{\lambda_0}(A)$ и $\nu_{\lambda_0}(B)$ — алгебраические кратности числа λ_0, соответственно, для операторов A и B.

---

*) Порядком аналитической функции $f(z)$ в точке z_0 называется целое число k ($=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) из представления $f(z)=(z-z_0)^k g(z)$, где $g(z)$ аналитична в точке z_0 и $g(z_0)\neq 0$.

В самом деле, могут представиться три случая.

1) Пусть λ_0 — регулярная точка операторов A и B. Тогда точка $\mu_0 = 1/\lambda_0$ является регулярной точкой определителя $D_{B/A}(\mu)$. Оператор $I + \mu_0(A - B)(I - \mu_0 A)^{-1} = (I - \mu_0 B)(I - \mu_0 A)^{-1}$ имеет ограниченный обратный $(I - \mu_0 A)(I - \mu_0 B)^{-1}$, стало быть,

$$D_{B/A}(\mu_0) = \det[(I - \mu_0 A)(I - \mu_0 B)^{-1}] \neq 0.$$

2) Пусть λ_0 является регулярным числом оператора A и собственным числом кратности $\nu_{\lambda_0}(B)$ $(\neq 0)$ оператора B. Обозначим через $\mathfrak{L}$ корневое подпространство оператора B, соответствующее λ_0, и через $\mathfrak{N}$ — прямое дополнение $\mathfrak{L}$ в $\mathfrak{H}$, инвариантное относительно оператора B. Рассмотрим операторы $B_1 = B(I - P)$ и $B_2 = BP$, где P — оператор проектирования $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{L}$ параллельно $\mathfrak{N}$.

Точка λ_0 является регулярной точкой оператора B_1. Обозначим через C_ε окрестность $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ точки λ_0, в которой операторы $A - \lambda I$ и $B_1 - \lambda I$ обратимы.

Так как оператор B_1 конечномерен, то к тройке операторов A, B_1, B и точке $\mu = 1/\lambda$ применимо предложение 2°, т. е.

$$D_{B/A}(\mu) = D_{B/B_1}(\mu)\, D_{B_1/A}(\mu). \tag{3.4}$$

Операторы B_1 и B_2 ортогональны, стало быть,

$$(I - \mu B)(I - \mu B_1)^{-1} = \\ = (I - \mu B_2)(I - \mu B_1)(I - \mu B_1)^{-1} = I - \mu B_2$$

и

$$D_{B/B_1}(\mu) = D_{B_2}(\mu).$$

Определитель $D_{B_2}(\mu)$ имеет в точке μ_0 $(= 1/\lambda_0)$ нуль кратности $\nu_{\lambda_0}(B_2) = \nu_{\lambda_0}(B)$.

Так как по доказанному $D_{B_1/A}(\mu_0) \neq 0$, то из (3.4) вытекает, что определитель $D_{B/A}(\mu)$ имеет в точке μ_0 нуль кратности $\nu_{\lambda_0}(B)$.

3) Перейдем к доказательству предложения в общем случае. Согласно доказанному определитель $D_{A/B_1}(\mu)$ имеет в точке μ_0 нуль кратности $\nu_{\lambda_0}(A)$, и стало быть, определитель

$$D_{B_1/A}(\mu) = \frac{1}{D_{A/B_1}(\mu)} \qquad (\lambda \in C_\varepsilon;\ \lambda \neq \lambda_0)$$

имеет в точке λ_0 полюс порядка $\nu_{\lambda_0}(A)$.

Из формулы (3.4) вытекает, что в точке $\mu=\mu_0$ порядок $D_{B/A}(\mu)$ равен $\nu_{\lambda_0}(B)-\nu_{\lambda_0}(A)$.

Предложение доказано.

2. Определитель $D_{B/A}(\mu)$ следовало бы называть Ф-определителем возмущения (фредгольмовым) в отличие от определителя возмущения $\Delta_{B/A}(\mu)$, определяемого формулой

$$\Delta_{B/A}(\lambda)=\det((B-\lambda I)(A-\lambda I)^{-1}) \quad (B-A\in\mathfrak{S}_1).$$

Очевидно,

$$\Delta_{B/A}(\lambda)=D_{B/A}\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Для определителя $\Delta_{B/A}(\lambda)$ предложение 4° принимает более естественную форму: порядок $\Delta_{B/A}(\lambda)$ в нормальной для A и B точке λ_0 равен $\nu_{\lambda_0}(B)-\nu_{\lambda_0}(A)$.

Как указывалось во введении к главе, понятие определителей возмущения Δ и D распространяется на некоторые пары неограниченных операторов. В теории возмущений обычно удобнее пользоваться определителем $\Delta_{B/A}(\lambda)$.

Для полноты приведем еще следующее предложение, играющее важную роль в теории возмущений (см. М. Г. Крейн [6]).

5°. *Пусть A и $B\in\mathfrak{R}$ и $A-B\in\mathfrak{S}_1$. Тогда в любой точке μ, Ф-регулярной для A и B,*

$$\frac{d}{d\mu}\ln D_{B/A}(\mu)=\operatorname{sp}(A(\mu)-B(\mu)), \tag{3.5}$$

где $A(\mu)$ и $B(\mu)$ — резольвенты Фредгольма операторов A и B.

В частности, для достаточно малых по модулю μ имеет место разложение

$$\frac{d}{d\mu}\ln D_{B/A}(\mu)=\sum_{j=0}^{\infty}\mu^j\operatorname{sp}(A^{j+1}-B^{j+1}). \tag{3.6}$$

Действительно, если μ — общая Ф-регулярная точка операторов A и B, то

$$(I-\mu A)^{-1}-(I-\mu B)^{-1}=\mu(I-\mu B)^{-1}(A-B)(I-\mu A)^{-1} \tag{3.7}$$

и

$$A(\mu)-B(\mu)=(I-\mu B)^{-1}(A-B)(I-\mu A)^{-1}, \tag{3.8}$$

так что правая часть в (3.5) имеет смысл.

Из соотношения (3.7) следует, что

$$(I-\mu B)^{-1}=(I-\mu A)^{-1}[I+\mu(A-B)(I-\mu A)^{-1}]^{-1}.$$

Внося полученное выражение для $(I-\mu B)^{-1}$ в правую часть (3.8) и беря от обеих частей след, получаем:

$$\operatorname{sp}(A(\mu)-B(\mu))=\operatorname{sp}\{(I+\mu(A-B)(I-\mu A)^{-1})^{-1}(A-B)(I-\mu A)^{-2}\}.$$

Так как

$$\frac{d\mu(I-\mu A)^{-1}}{d\mu}=(I-\mu A)^{-1}+\mu A(I-\mu A)^{-2}=(I-\mu A)^{-2},$$

то для всех Ф-регулярных точек μ оператора A будем иметь:

$$\frac{dC(\mu)}{d\mu}=(A-B)(I-\mu A)^{-2},$$

где $C(\mu)=\mu(A-B)(I-\mu A)^{-1}$.

Таким образом, на основании предложения 9° § 1 получаем:

$$\operatorname{sp}(A(\mu)-B(\mu))=\operatorname{sp}\left\{(I+C(\mu))^{-1}\frac{dC_\mu}{d\mu}\right\}=\frac{d}{d\mu}\ln\det(I+C(\mu)).$$

Предложение доказано.

Легко видеть, что формула (3.5) для определителя $\Delta_{B/A}(\lambda)$ переписывается следующим образом:

$$\frac{d}{d\lambda}\ln\Delta_{B/A}(\lambda)=\operatorname{sp}((B-\lambda I)^{-1}-(A-\lambda I)^{-1}).$$

Эта формула обобщается на некоторые пары неограниченных операторов (см. М. Г. Крейн [6] и С. Т. Курода [2]).

§ 4. Лемма о росте определителя возмущения диссипативного оператора

1. Линейный оператор A, действующий в $\mathfrak{H}$ с некоторой областью определения $\mathfrak{D}(A)$, называется *диссипативным*, если

$$\operatorname{Im}(Af,\ f)\geqslant 0 \quad \text{при} \quad f\in\mathfrak{D}(A).$$

Для ограниченного оператора A (определенного во всем $\mathfrak{H}$) требование диссипативности эквивалентно требованию неотрицательности его мнимой компоненты $A_{\mathcal{J}}=(A-A^*)/2i$.

Простым обобщением соответствующей матричной теоремы И. Бендиксона является известное предложение.

Теорема 4.1. *Спектр ограниченного диссипативного оператора* $A\in\mathfrak{R}$ *лежит в замкнутой полуплоскости* $\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0$.

Более того,

$$|(A-\lambda I)^{-1}|\leqslant\frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|} \quad \textit{при} \quad \operatorname{Im}\lambda<0\,^*). \qquad (4.1)$$

*) Эта оценка будет использована в более общей лемме V.6.1.

Доказательство. В самом деле, если $\lambda=\alpha-i\beta$, где $\beta>0$, то

$$\operatorname{Im}[(Af, f)-\lambda(f, f)]=(A_{\mathcal{J}}f, f)+\beta(f, f)\geqslant\beta(f, f),$$

и, стало быть, при $|f|=1$

$$|(A-\lambda I)f|\geqslant|((A-\lambda I)f, f)|\geqslant\beta|f|^2=\beta.$$

Отсюда следует, что λ не является собственным числом оператора A и, более того, оператор $A-\lambda I$ отображает линейно и непрерывно все $\mathfrak{H}$ на некоторое его подпространство $\mathfrak{H}_1\subseteq\mathfrak{H}$. Остается показать, что $\mathfrak{H}_1=\mathfrak{H}$. Допуская противное, можно будет утверждать, что найдется вектор $h\neq 0$, ортогональный к $\mathfrak{H}_1=(A-\lambda I)\mathfrak{H}$; но тогда $(A^*-\bar{\lambda}I)h=0$, а следовательно, $-\bar{\lambda}$ будет собственным числом диссипативного оператора $-A^*$. Так как $\operatorname{Im}(-\bar{\lambda})<0$, то, по уже доказанному, последнее невозможно.

Таким образом, при $\operatorname{Im}\lambda<0$ всегда существует ограниченная резольвента $(A-\lambda I)^{-1}$.

После этого очевидно, что неравенство $|(A-\lambda I)f|\geqslant\geqslant\beta|f|$ эквивалентно (4.1).

Теорема доказана.

2. Оценка (4.1) позволяет установить следующее предложение.

Лемма 4.1*). *Пусть A — некоторый ограниченный диссипативный оператор (в частности, самосопряженный оператор), а $B=A+T$, где $T\in\mathfrak{S}_1$. Тогда при любом $\theta_0\left(0<\theta_0<\frac{\pi}{2}\right)$ в угле U_{θ_0}*

$$\left|\frac{\pi}{2}-\theta\right|\leqslant\theta_0 \tag{4.2}$$

равномерно выполняется предельное соотношение

$$\varlimsup_{\rho\to\infty}\left[\frac{1}{\varrho}\ln|D_{B/A}(\varrho e^{i\theta})|\right]\leqslant 0. \tag{4.3}$$

Доказательство. Имеем

$$D_{B/A}(\mu)=\det[(I-\mu B)(I-\mu A)^{-1}]=\det(I-\mu TS(\mu)),$$

*) Эта лемма впервые будет использована в § 7 (при доказательстве теоремы 7.1).

где

$$S(\mu) = (I - \mu A)^{-1}.$$

Стало быть, согласно оценке (1.2)

$$|D_{B/A}(\mu)| \leqslant \prod_{j=1}^{\infty} (1 + |\mu| s_j(TS(\mu))).$$

С другой стороны, согласно теореме 4.1 при $\operatorname{Im}\mu > 0$

$$|\mu S(\mu)| = |(A - \mu^{-1} I)^{-1}| \leqslant \frac{1}{\left|\operatorname{Im}\frac{1}{\mu}\right|} = \frac{|\mu|^2}{|\operatorname{Im}\mu|},$$

т. е.

$$|S(\mu)| \leqslant \frac{1}{\sin\theta} \quad \text{при} \quad \mu = \varrho e^{i\theta} \qquad (0 < \theta < \pi),$$

и следовательно,

$$s_j(TS(\mu)) \leqslant \frac{s_j(T)}{\sin\theta} \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Таким образом,

$$|D_{B/A}(\varrho e^{i\theta})| \leqslant \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\varrho s_j(T)}{\sin\theta}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{\varrho s_j(T)}{\sin\theta}\right) \exp\left\{\frac{\varrho}{\sin\theta} \sum_{j=n+1}^{\infty} s_j(T)\right\},$$

откуда следует (4.3).

Из леммы 4.1 непосредственно вытекает

Лемма 4.2. *Пусть выполняются условия леммы 4.1 и пусть, кроме того, оператор B также диссипативный. Тогда в угле (4.2) равномерно выполняется предельное соотношение:*

$$\lim_{\rho\to\infty} \left[\frac{1}{\varrho} \ln |D_{B/A}(\varrho e^{i\theta})|\right] = 0. \tag{4.4}$$

Доказательство. В самом деле, если оба оператора A и B диссипативны и $B - A \in \mathfrak{S}_1$, то согласно лемме 4.1 при любом $\theta_0 \left(0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}\right)$ в угле (4.2) будет равномерно выполняться как неравенство (4.3), так и неравенство, получающееся из него переменой ролями операторов A и B, а так как $\ln|D_{B/A}(\mu)| = -\ln|D_{A/B}(\mu)|$, то отсюда уже следует и равномерное выполнение в пределе равенства (4.3) в указанных углах.

Доказанные леммы будут использованы в §§ 7—9.

§ 5. Теорема об определителе возмущения диссипативного оператора

Ограниченный оператор K называется *сжатием*, если $|Kf| \leqslant |f|$ при любом $f \in \mathfrak{H}$. Имеет место следующее предложение:

Теорема 5.1. *Пусть* $A = G + iH$ $(H = A_{\mathcal{J}})$ — *ограниченный диссипативный оператор, а* $B = G + iF$, *где*

$$-H \leqslant F \leqslant H. \tag{5.1}$$

Тогда при $\operatorname{Im}\lambda < 0$ *оператор*

$$W(\lambda) = I - i(H-F)^{1/2}(A - \lambda I)^{-1}(H-F)^{1/2} \tag{5.2}$$

является сжатием, т. е.

$$|W(\lambda) f| \leqslant |f| \qquad (f \in \mathfrak{H}). \tag{5.3}$$

Доказательство. Введем сокращенные обозначения $T = H - F$, $R(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$; тогда

$$W(\lambda) = I - iT^{1/2}R(\lambda)T^{1/2},$$

и стало быть,

$$I - W^*(\lambda)W(\lambda) =$$
$$= iT^{1/2}R(\lambda)T^{1/2} - iT^{1/2}R^*(\lambda)T^{1/2} - T^{1/2}R^*(\lambda)TR(\lambda)T^{1/2}. \tag{5.4}$$

С другой стороны, так как $R^*(\lambda) = (A^* - \bar{\lambda}I)^{-1}$, то

$$R(\lambda) - R^*(\lambda) = R^*(\lambda)((A^* - \bar{\lambda}I) - (A - \lambda I))R(\lambda) =$$
$$= -2iR^*(\lambda)HR(\lambda) + 2i\operatorname{Im}\lambda R^*(\lambda)R(\lambda).$$

Помножая первый и третий член равенства слева и справа на $T^{1/2}$, а затем на i, получим после сопоставления с (5.4), что

$$I - W^*(\lambda)W(\lambda) =$$
$$= T^{1/2}[R^*(\lambda)(H+F)R(\lambda) - 2\operatorname{Im}\lambda R^*(\lambda)R(\lambda)]T^{1/2}. \tag{5.5}$$

Отсюда следует, что

$$I - W^*(\lambda) W(\lambda) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} \lambda \leqslant 0,$$

что эквивалентно неравенству (5.3).

Теорема доказана.

Из нее очень просто следует теорема:

Теорема 5.2. *Если операторы A и B удовлетворяют условиям предыдущей теоремы и* $\operatorname{sp} H < \infty$, *то*

$$|D_{B/A}(\mu)| < 1 \quad \textit{при} \quad \operatorname{Im} \mu > 0. \tag{5.6}$$

Доказательство. Так как вместе с $H \in \mathfrak{S}_1$ также и неотрицательный оператор $T = H - F \ (\leqslant 2H)$ принадлежит $\mathfrak{S}_1$, то имеет смысл определитель

$$D_{B/A}(\mu) = \det (I + i\mu T (I - \mu A)^{-1}).$$

Согласно предложению 5° § 1 можно также написать:

$$D_{B/A}(\mu) = \det (I + i\mu T^{1/2} (I - \mu A)^{-1} T^{1/2}) = \det W \left(-\frac{1}{\mu} \right).$$

Следовательно,

$$D_{B/A}(\mu) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + \varepsilon_j(\mu)), \tag{5.7}$$

где $\varepsilon_j(\mu)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ — полная система собственных чисел оператора

$$C(\mu) = i\mu T^{1/2} (I - \mu A)^{-1} T^{1/2}.$$

С другой стороны, так как $1 + \varepsilon_j(\mu)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ суть собственные числа оператора $W\left(-\frac{1}{\mu}\right) = I + C(\mu)$, норма которого по теореме 5.1 при $\operatorname{Im} \mu > 0$ не превосходит единицы, то

$$|1 + \varepsilon_j(\mu)| \leqslant 1 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} \mu > 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots). \tag{5.8}$$

Таким образом, неравенство (5.6) есть следствие соотношений (5.7) и (5.8). Теорема доказана.

Замечание 5.1. По существу, при доказательстве теоремы 5.2 не было использовано условие конечности $\operatorname{sp} H$, а лишь вытекающее из него условие $\operatorname{sp}(H - F) < \infty$, которое необходимо для того, чтобы имел смысл бесконечный определитель возмущения $D_{B/A}(\mu)$.

Легко видеть, что теорема 5.2 может быть получена как непосредственное следствие предложения, в котором уже не фигурирует параметр μ.

Пусть $A = G + iH$ $(G = A_{\mathcal{R}})$ — *некоторый ограниченный диссипативный оператор, для которого существует обратный, а* $B = G + iF$, *где* $-H \leqslant F \leqslant H$, *причем* $\operatorname{sp}(H - F) < \infty$. *Тогда*

$$|\det(BA^{-1})| \leqslant 1. \tag{5.9}$$

Возможно, что это предложение является новым даже для случая, когда A и B — операторы, действующие в конечномерном пространстве (т. е. для случая, когда оно может быть сформулировано в терминах теории конечномерных матриц).

Получается это предложение как следствие соответственно обобщенной теоремы 5.1. В самом деле,

$$\det(BA^{-1}) = \det(I + i(H - F)A^{-1}). \tag{5.10}$$

С другой стороны, в обобщение теоремы 5.1 можно утверждать, что оператор

$$W = I + i(H - F)^{1/2} A^{-1} (H - F)^{1/2}$$

является сжатием, проверка чего проделывается аналогично соответствующей проверке для оператора $W(\lambda)$.

После этого остается еще заметить, что согласно (5.10) и (1.8): $\det(BA^{-1}) = \det W$, откуда уже следует (5.9).

Предоставляем читателю доказать, что знак равенства в (5.9) возможен лишь в случае, когда $F = \pm H$, т. е. когда оператор B равен A или A^*.

§ 6. Определители $D_{A^*/A}(\lambda)$ и $D_{A_{\mathcal{R}}/A}(\lambda)$ для диссипативного оператора A с ядерной мнимой компонентой

1. Теорему 5.1 следует рассматривать как обобщение одного результата М. С. Лившица [2].

В самом деле, если положить в (5.1) $F = -H$, то получим оператор-функцию

$$W(\lambda) = I - 2iH^{1/2}(A - \lambda I)^{-1} H^{1/2}, \tag{6.1}$$

называемую этим автором характеристической оператор-функцией диссипативного оператора, и теорема 5.1 перейдет в соответствующую теорему этого автора *).

При $F=-H$ в любой вещественной точке λ, регулярной для A, соотношение (5.4) дает $W^*(\lambda)W(\lambda)=I$. Аналогично доказывается, что $W(\lambda)W^*(\lambda)=I$. Таким образом, в этом случае теорема 5.1 может быть дополнена утверждением, что оператор $W(\lambda)$ унитарен в любой вещественной точке λ, регулярной для A.

Замечая, что при $F=-H\,(\in\mathfrak{S}_1)$, $B=G-iH=A^*$ и

$$D_{B/A}(\lambda)=D_{A^*/A}(\lambda)=\det W(1/\lambda),$$

а также что в случае вполне непрерывного оператора A вещественные характеристические числа и их алгебраические кратности у операторов A и A^* одни и те же, приходим к основной части следующего предложения:

Теорема 6.1. *Пусть $A=G+iH$ $(H=A_{\mathcal{J}})$ — вполне непрерывный диссипативный оператор, причем $0<\operatorname{sp}H<\infty$. Тогда*

$$|D_{A^*/A}(\lambda)|\leqslant 1 \quad \textit{при} \quad \operatorname{Im}\lambda\geqslant 0, \tag{6.2}$$

причем знак равенства имеет место только при вещественных λ.

Доказательство. После всего сказанного остается пояснить, почему при $\operatorname{Im}\lambda>0$ в (6.2) не может достигаться знак равенства. Допустив, что в (6.2) достигается знак равенства при некотором невещественном λ_0 $(\operatorname{Im}\lambda_0>0)$, мы сможем заключить на основании принципа

---

*) М. С. Лившиц [2] определил характеристическую оператор-функцию $W_A(\lambda)$ для любого оператора $A=G+iH(\in\Re)$ формулой:

$$W_A(\lambda)=I+2i\operatorname{sign}H\,H_a^{1/2}(A^*-\lambda I)^{-1}H_a^{1/2},$$

где H_a — неотрицательный квадратный корень из H^2 (операторный модуль H). Поэтому, если быть точным, то функцию $W(\lambda)$, определяемую равенством (6.1) для диссипативного оператора $A=G+iH$ $(H=H_a)$, следует рассматривать как функцию $W_{A^*}(\lambda)$.

Более общее определение характеристической функции и для более широкого класса операторов можно найти в работах М. С. Бродского [1] и А. В. Штрауса [2].

максимума модуля аналитической функции, что $D_{A^*/A}(\lambda) \equiv \equiv \text{const}$.

С другой стороны, на основании общей формулы (3.5) имеем:

$$\frac{d}{d\lambda} \ln D_{A^*/A}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \operatorname{sp}\{(I-\lambda A^*)^{-1} - (I-\lambda A)^{-1}\} =$$
$$= \operatorname{sp}\{(I-\lambda A)^{-1}(A-A^*)(I-\lambda A^*)^{-1}\} =$$
$$= 2i \operatorname{sp}\{(I-\lambda A)^{-1} H (I-\lambda A^*)^{-1}\}.$$

Следовательно, для малых по модулю λ:

$$\frac{d}{d\lambda} \ln D_{A^*/A}(\lambda) = 2i \operatorname{sp} H + O(\lambda) \qquad (\lambda \to 0). \tag{6.3}$$

Мы пришли к противоречию, ибо по условию $\operatorname{sp} H > 0$. Теорема доказана.

Замечание 6.1. Равенство

$$|D_{A^*/A}(\lambda)| = 1 \qquad (-\infty < \lambda < \infty) \tag{6.4}$$

справедливо для любого (не только диссипативного) вполне непрерывного оператора A с мнимой компонентой $A_{\mathcal{J}} \in \mathfrak{S}_1$.

В самом деле, имеем:

$$D_{A^*/A}(\lambda) = D_{A^*/G}(\lambda)\, D_{G/A}(\lambda) = \frac{D_{G/A}(\lambda)}{D_{G/A^*}(\lambda)}.$$

С другой стороны, как нетрудно видеть *):

$$D_{A^*/G}(\lambda) = \overline{D}_{A/G}(\lambda),$$

т. е. при любом комплексном λ:

$$D_{A^*/G}(\bar{\lambda}) = \overline{D_{A/G}(\lambda)}.$$

Таким образом:

$$D_{A^*/A}(\lambda) = \frac{D_{G/A}(\lambda)}{\overline{D}_{G/A}(\lambda)}, \tag{6.5}$$

откуда уже следует (6.4).

Соотношение (6.5) в дальнейшем будет играть важную роль.

---

*) Напомним, что через $\bar{f}(\lambda)$ обозначается функция $\overline{f(\bar{\lambda})}$.

2. На основании теоремы 6.1 легко доказывается теорема:

Теорема 6.2. *Детерминант* $D_{A^*/A}(\lambda)$ *есть мероморфная функция, допускающая разложение*

$$D_{A^*/A}(\lambda) = e^{2ia\lambda} \prod_j \frac{1-\lambda/\bar{\mu}_j}{1-\lambda/\mu_j}, \tag{6.6}$$

где $\{\mu_j\}$ — *полная система невещественных характеристических чисел диссипативного оператора* A, *а*

$$a = \operatorname{sp} H - \sum_j \operatorname{Im} \lambda_j \qquad (\lambda_j = 1/\mu_j). \tag{6.7}$$

Доказательство. По предыдущей теореме мероморфная функция $f(\lambda) = D_{A^*/A}(\lambda)$ обладает свойствами:

$$|f(\lambda)| = 1 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im}\lambda = 0, \; |f(\lambda)| < 1 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im}\lambda > 0.$$

Согласно элементарной теореме одного из авторов (см. Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн [1] и Б. Я. Левин [1]) всякая мероморфная функция $f(\lambda)$, обладающая этими свойствами, допускает представление:

$$f(\lambda) = e^{2ia\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1-\lambda/\bar{\mu}_j}{1-\lambda/\mu_j},$$

где $a \geqslant 0$, а $\{\mu_j\}$ — полная последовательность полюсов функции $f(\lambda)$. Для $f(\lambda) = D_{A^*/A}(\lambda)$ эта последовательность совпадает с полной системой невещественных характеристических чисел оператора A.

Итак, представление (6.6) для $D_{A^*/A}(\lambda)$ получено, и осталось только найти значение постоянной a.

Согласно (6.6) разложение $D_{A^*/A}(\lambda)$ в степенной ряд в окрестности точки $\lambda = 0$ начинается с членов:

$$D_{A^*/A}(\lambda) = 1 + 2i\left[a + \sum_j \operatorname{Im}\lambda_j\right]\lambda + \ldots$$

С другой стороны, из (6.3) следует, что

$$D_{A^*/A}(\lambda) = I + 2i\lambda \operatorname{sp} H + O(\lambda^2).$$

Сопоставление полученных разложений и дает формулу (6.7).

3. Нам осталось добавить немногое, чтобы получить следующее предложение:

Теорема 6.3. *Пусть* $A = G + iH$ — *диссипативный вполне непрерывный оператор, для которого* $\operatorname{sp} H < \infty$. *Тогда*

$$1) \qquad |D_{G/A}(\lambda)| \leqslant 1 \quad \textit{при} \quad \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0, \tag{6.8}$$

$$2) \qquad D_{G/A}(\lambda) = \overline{D}_{G/A}(\lambda)\, e^{2ai\lambda} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1-\lambda/\overline{\mu}_j}{1-\lambda/\mu_j}, \tag{6.9}$$

где $\{\mu_j\}$ — *полная система невещественных характеристических чисел оператора* A, *а постоянная* a *имеет значение* (6.7).

Доказательство. Для операторов A и $B = G$ выполняются все условия теоремы 5.2, и неравенство (5.6) в применении к операторам A и G дает неравенство (6.8).

Соотношение (6.9) есть непосредственное следствие соотношений (6.5) и (6.6).

Теорема доказана.

§ 7. Диссипативные вольтерровы операторы с ядерной мнимой компонентой

1. Для таких операторов имеет место теорема:

Теорема 7.1. *Пусть* $A = G + iH$ — *диссипативный вольтерров оператор и* $\operatorname{sp} H < \infty$. *Тогда* $G \in \mathfrak{S}_p$ *при любом* $p > 1$ *и целая функция*

$$\widetilde{D}_G(\lambda) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha_j}\right) e^{\frac{\lambda}{\alpha_j}},$$

где $\{\alpha_j\}$ — *полная система характеристических чисел оператора* G, *обладает тем свойством, что*

$$|\widetilde{D}_G(\lambda)| \leqslant e^{|\operatorname{Im}\lambda|\operatorname{sp} H} \tag{7.1}$$

при любом комплексном λ.

Более того, в любом угле U_ϑ $\left(0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}\right)$

$$\left|\frac{\pi}{2} - \theta\right| \leqslant \vartheta$$

равномерно выполняется предельное соотношение:

$$\lim_{\rho\to\infty}\left[\frac{1}{\rho}\ln|\widetilde{D}_G(\rho e^{i\theta})|\right]=|\sin\theta|\,\mathrm{sp}\,H. \tag{7.2}$$

Доказательство. В самом деле, при условиях теоремы функция $F(\lambda)=D_{G/A}(\lambda)$ будет целой с полной системой нулей $\{\alpha_j\}$, при этом в силу соотношения (6.8)

$$|F(\lambda)|\leqslant 1 \quad \text{при} \quad \mathrm{Im}\,\lambda\geqslant 0, \tag{7.3}$$

а в силу соотношения (6.9) при любом λ:

$$\overline{F}(\lambda)=e^{-2i\lambda a}F(\lambda) \qquad (a=\mathrm{sp}\,H). \tag{7.4}$$

Из (7.3) и (7.4) выводим, что

$$|F(\lambda)|=|\overline{F}(\bar\lambda)|=e^{2a\,|\mathrm{Im}\,\lambda|}\,|F(\bar\lambda)|\leqslant e^{2a\,|\mathrm{Im}\,\lambda|}$$
$$\text{при} \quad \mathrm{Im}\,\lambda\leqslant 0. \tag{7.5}$$

Таким образом, целая функция $F(\lambda)$ не выше экспоненциального типа. Поэтому при любом $p>1$ бесконечная сумма $\sum\limits_j|\alpha_j|^{-p}$ сходится, а это и означает, что $G\in\mathfrak{S}_p$. В частности, $G\in\mathfrak{S}_2$ и $A\in\mathfrak{S}_2$ и, значит, имеют смысл определители $\widetilde{D}_G(\lambda)$ и $\widetilde{D}_A(\lambda)$, причем последний тождественно равен единице (так как A — вольтерров). Согласно (3.3) имеем:

$$\widetilde{D}_G(\lambda)=\frac{\widetilde{D}_G(\lambda)}{\widetilde{D}_A(\lambda)}=e^{-i\lambda\,\mathrm{sp}\,H}D_{G/A}(\lambda)=e^{-i\lambda\,\mathrm{sp}\,H}F(\lambda). \tag{7.6}$$

Вспоминая (7.3) и (7.5), получаем отсюда оценку (7.1).

Отсюда же следует и последнее утверждение теоремы, ибо согласно лемме 4.2 в любом угле U_ϑ $\left(0<\vartheta<\frac{\pi}{2}\right)$ равномерно выполняется предельное соотношение

$$\lim_{\rho\to\infty}\left[\frac{1}{\rho}\ln|D_{G/A}(\rho e^{i\theta})|\right]=0.$$

2. Из доказанной теоремы может быть сделан важный вывод.

Теорема 7.2. *Пусть* $A=G+iH$ $(H=A_{\mathcal{J}})$ — *произвольный диссипативный вольтерров оператор и* $\mathrm{sp}\,H<\infty$.

Тогда

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n_+(r;\,G)}{r}=\lim_{r\to\infty}\frac{n_-(r;\,G)}{r}=\frac{1}{\pi}\operatorname{sp}H \tag{7.7}$$

и, кроме того,

$$\int_0^r \frac{n(\varrho;\,G)}{\varrho}\,d\varrho \leqslant \frac{2}{\pi}\,r\operatorname{sp}H \qquad (0<r<\infty). \tag{7.8}$$

Здесь $n_+(r;\,G)$ и $n_-(r;\,G)$ означают соответственно количества характеристических чисел оператора G в замкнутых интервалах $[0,\,r]$ и $[-r,\,0]$, а

$$n(r;\,G)=n_+(r;\,G)+n_-(r;\,G).$$

Доказательство. В самом деле, соотношения (7.7) следуют непосредственно из оценки (7.1) на основании теоремы Н. Левинсона (см. предложение Б) п. 1, § 8).

Для установления соотношения (7.8) воспользуемся известной теоремой Иенсена (см. Б. Я. Левин [1], гл. I, § 5), согласно которой

$$\int_0^r \frac{n(\varrho;\,G)}{\varrho}\,d\varrho=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|\widetilde{D}_G(re^{i\theta})|\,d\theta. \tag{7.9}$$

В силу (6.8) и (7.6) интеграл, стоящий в правой части равенства, не превосходит

$$\frac{1}{2\pi}\operatorname{sp}H\int_0^{2\pi}|\sin\theta|\,d\theta=\frac{2}{\pi}\operatorname{sp}H,$$

откуда и вытекает неравенство (7.8).

Заметим, что в силу (7.7)

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r}\int_0^r\frac{n(\varrho;\,G)}{\varrho}\,d\varrho=\frac{1}{\pi}\operatorname{sp}H.$$

Отметим два следствия теоремы.

Следствие 7.1. *При условиях теоремы всегда*

$$\frac{n(r;\,G)}{r}\leqslant c\operatorname{sp}H,$$

где в качестве константы c можно взять $2e/\pi$. В самом деле, так как $n(r;\ G)$ — неубывающая функция, то

$$n(r;\ G) \leqslant \int\limits_r^{er} n(\varrho;\ G)\frac{d\varrho}{\varrho} \leqslant \int\limits_0^{er} \frac{n(\varrho;\ G)\,d\varrho}{\varrho} \leqslant \frac{2e}{\pi} r \operatorname{sp} H.$$

Следствие 7.2. *При условиях теоремы всегда*

$$\lim_{n\to\infty} ns_n(A) = \frac{2}{\pi} \operatorname{sp} H. \tag{7.10}$$

В самом деле, из (7.7) следует, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r;\ G)}{r} = \lim_{r\to\infty} \frac{n_+(r;\ G) + n_-(r;\ G)}{r} = \frac{2}{\pi} \operatorname{sp} H.$$

Это соотношение иначе означает, что

$$\lim_{n\to\infty} ns_n(G) = \frac{2}{\pi} \operatorname{sp} H. \tag{7.11}$$

С другой стороны,

$$\lim_{n\to\infty} ns_n(H) = 0, \tag{7.12}$$

так как $\operatorname{sp} H < \infty$.

Вспоминая теорему II.2.3 Фань Цюя, получаем из (7.11) и (7.12) соотношение (7.10) для оператора $A = G + iH$ — суммы операторов G и iH.

3. Покажем, что для конечномерного H интеграл, фигурирующий в (7.8), допускает простую оценку снизу.

Действительно, если N — размерность $\mathfrak{R}(H)$, то

$$|D_{A/G}(\lambda)| = |\det(1 + i\lambda H(I - \lambda G)^{-1})| \leqslant \prod_{j=1}^{N} (1 + \sigma_j(\lambda)),$$

где $\sigma_j(\lambda)$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$ — s-числа оператора $C(\lambda) = i\lambda H(I - \lambda G)^{-1}$. Так как G — самосопряженный оператор, то

$$|\lambda(I - \lambda G)^{-1}| = \left|\left(\frac{1}{\lambda} I - G\right)^{-1}\right| \leqslant \frac{1}{|\operatorname{Im}(1/\lambda)|} = \frac{|\lambda|}{|\sin\theta|} \quad (\lambda = re^{i\theta}),$$

а следовательно,

$$\sigma_j(\lambda) = s_j(C(\lambda)) \leqslant \frac{|\lambda|}{|\sin\theta|} s_j(H) \qquad (j = 1, 2, \ldots, N),$$

Итак,

$$|D_{A/G}(\lambda)| \leqslant \prod_{j=1}^{N}\left(1+\frac{rs_j(H)}{|\sin\theta|}\right) \quad (\lambda = re^{i\theta}).$$

Отсюда при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$

$$|\widetilde{D}_G(\lambda)| = |e^{-i\lambda \operatorname{sp} H} D_{A/G}^{-1}(\lambda)| \geqslant e^{|\operatorname{Im}\lambda| \operatorname{sp} H} \prod_{j=1}^{N}\left(1+\frac{rs_j(H)}{|\sin\theta|}\right)^{-1}$$

и следовательно:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\widetilde{D}_G(re^{i\theta})|\,d\theta \geqslant \frac{2}{\pi} r \operatorname{sp} H - \sum_{j=1}^{N} \Phi(rs_j(H)), \tag{7.13}$$

где

$$\Phi(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left(1+\frac{r}{|\sin\theta|}\right) d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln(|\sin\theta|+r)\,d\theta + \ln 2.$$

Очевидно, что при $r \to \infty$

$$\Phi(r) = \ln 2 + \ln r + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left(1+\frac{|\sin\theta|}{r}\right) d\theta =$$

$$= \ln 2 + \ln r - \frac{4}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Таким образом, сопоставление (7.9) и (7.13) с учетом последнего асимптотического разложения дает:

$$\frac{2}{\pi}\operatorname{sp} H \geqslant \frac{1}{r}\int_0^r \frac{n(r;\,G)}{r}\,dr \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi}\operatorname{sp} H - \frac{N\ln r}{r} - \sum_{j=1}^{N} \frac{\ln(2s_j(H))}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

4. Простейший пример диссипативного вольтеррова оператора. Простые*) диссипативные вольтерровы операторы A с $A_{\mathcal{J}} \in \mathfrak{S}_1$ можно разбить на классы, объединяющие

*) Диссипативный вольтерров оператор называется *простым*, если он не обращается в нуль ни на каком векторе $f \neq 0$. (Общее понятие простого диссипативного оператора будет систематически использоваться, начиная с § 4 гл. V.)

операторы, мнимые компоненты которых имеют одну и ту же размерность.

Простейшим из них будет класс простых диссипативных вольтерровых операторов с одномерной мнимой компонентой. Модельным примером служит интегральный оператор J в $L_2(0, 1)$, определяемый равенством

$$(Jf)(t) = 2i \int_0^t f(s)\, ds.$$

Действительно, сопряженный оператор J^* действует по формуле

$$(J^*f)(t) = -2i \int_t^1 f(s)\, ds.$$

Поэтому

$$(J_{\mathcal{J}}f)(t) = \int_0^1 f(s)\, ds, \tag{7.14}$$

$$(J_{\mathcal{R}}f)(t) = i \int_0^1 \operatorname{sign}(t-s) f(s)\, ds. \tag{7.15}$$

Из (7.14) явствует, что $J_{\mathcal{J}}$ — одномерный оператор с собственным числом, равным единице, и собственной функцией $e(t) \equiv 1$.

Вычислим спектр собственных чисел оператора $J_{\mathcal{R}}$. Если $\varphi(t) = \lambda (J_{\mathcal{R}}\varphi)(t)$, то согласно (7.15) это означает, что

$$\varphi(t) = i\lambda \int_0^1 \operatorname{sign}(t-s)\, \varphi(s)\, ds.$$

Легко видеть, что это интегральное уравнение эквивалентно краевой задаче

$$\varphi'(t) - 2i\lambda\varphi(t) = 0, \qquad \varphi(0) + \varphi(1) = 0.$$

Функции

$$\varphi_n(t) = e^{-(2n+1)\pi i t} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

образуют полную систему собственных функций этой краевой задачи. Им соответствуют характеристические числа

$$\alpha_n = \frac{(2n+1)\pi}{2} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Так как $\operatorname{sp} J_{\mathcal{J}} = 1$, то полученные значения для α_n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ согласуются с общими асимптотическими формулами (7.7).

Оказывается, имеет место следующая замечательная теорема М. С. Лившица [1] (см. также М. С. Бродский [2], И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн [1]).

Всякий простой вольтерров оператор A с одномерной мнимой компонентой унитарно эквивалентен оператору cJ, где $c = \operatorname{sp} A_{\mathcal{J}}$.

5. Применение к интегральным операторам. Пусть $L^{(r)}_{2,\sigma}(a, b)$ — гильбертово пространство вектор-функций $f(t) = \{f_j(t)\}_1^r$, порожденное на отрезке $[a, b]$ матрицей-функцией $\sigma(t)$, обладающей свойствами а), б) из п. 5, § 10, гл. III, и пусть $\mathcal{K}(t, s) = \| k_{pq}(t, s) \|_1^n$ $(a \leqslant t,\ s \leqslant b)$ — эрмитово неотрицательное непрерывное матричное ядро. Имеет место предложение:

1°. *Для функций $n_\pm(r; G)$ распределения характеристических чисел оператора G, определенного в $L^{(r)}_{2,\sigma}(a, b)$ равенством*

$$(Gf)(t) = i \int_a^b \operatorname{sign}(t - s)\, \mathcal{K}(t, s)\, d\sigma(s)\, f(s),$$

имеет место соотношение

$$\lim_{r \to \infty} \frac{n_\pm(r; G)}{r} = \frac{1}{\pi} \int_a^b \operatorname{sp}[\mathcal{K}(s, s)\, d\sigma(s)]. \tag{7.16}$$

Это предложение получается как простое следствие теоремы 7.2. В самом деле, оператор G является вещественной компонентой вольтеррова диссипативного оператора

$$(Af)(t) = 2i \int_t^b \mathcal{K}(t, s)\, d\sigma(s)\, f(s).$$

Кроме того, согласно предложению 2 § 10 гл. III след оператора $A_{\mathcal{J}}$ вычисляется по формуле

$$\operatorname{sp} A_{\mathcal{J}} = \int_a^b \operatorname{sp} [\mathscr{K}(s, s)\, d\sigma(s)].$$

§ 8. Недиссипативные операторы с ядерной мнимой компонентой

1. Нам придется привлечь некоторые новые средства теории функций.

Обозначим через $(\mathfrak{A}_+)$ класс функций $F(\lambda)$, голоморфных внутри полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$ и представимых там в виде частного двух ограниченных голоморфных функций.

По известной теореме Р. Неванлинна (см. И. И. Привалов [1] гл. II, §§ 1, 2) функция $F(\lambda)$, голоморфная при $\operatorname{Im}\lambda > 0$, принадлежит классу $(\mathfrak{A}_+)$ в том и только том случае, когда найдется неотрицательная гармоническая функция $u(\lambda)$ $(\operatorname{Im}\lambda > 0)$ такая, что: $\ln|F(\lambda)| \leqslant \leqslant u(\lambda)$.

Из определения класса $(\mathfrak{A}_+)$ сравнительно просто получаются следующие два свойства.

1°. *Класс* $(\mathfrak{A}_+)$ *есть алгебра, т. е. если* F_1, $F_2 \in (\mathfrak{A}_+)$, *то и произведение* $F_1F_2 \in (\mathfrak{A}_+)$ *и при любых комплексных* c_1, c_2 *линейная комбинация* $c_1F_1 + c_2F_2 \in (\mathfrak{A}_+)$.

2°. *Если* F_1, $F_2 \in (\mathfrak{A}_+)$, *причем* F_1/F_2 — *голоморфная функция при* $\operatorname{Im}\lambda > 0$, *то* $F_1/F_2 \in (\mathfrak{A}_+)$.

Аналогично классу $(\mathfrak{A}_+)$ определим класс $(\mathfrak{A}_-)$ функции $F(\lambda)$, голоморфных внутри полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda < 0$.

Очевидно, если $F(\lambda) \in (\mathfrak{A}_+)$, то $F(-\lambda) \in (\mathfrak{A}_-)$ и $\overline{F}(\lambda) \in (\mathfrak{A}_-)$.

В дальнейшем существенную роль будет играть следующее предложение (М. Г. Крейн [3]).

А) *Если целая функция* $f(\lambda)$ *в верхней полуплоскости принадлежит классу* $(\mathfrak{A}_+)$, *а в нижней — классу* $(\mathfrak{A}_-)$, *то она не выше экспоненциального типа, т. е.*

$$\ln|f(\lambda)| = O(|\lambda|) \quad \textit{при} \quad |\lambda| \to \infty \tag{8.1}$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|f(x)||}{1+x^2}\,dx < \infty. \tag{8.2}$$

Это предложение мы дополним следующим:

Б) *Если вещественная целая функция* $f(\lambda)$ ($f(0)=1$) *с одними вещественными нулями* $\{\alpha_j\}$ *удовлетворяет условиям* (8.1) *и* (8.2), *то*

$$f(\lambda)=\lim_{r\to\infty}\prod_{|\alpha_j|\leqslant r}\left(1-\frac{\lambda}{\alpha_j}\right) \tag{8.3}$$

и

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n_+(r;\,f)}{r}=\lim_{r\to\infty}\frac{n_-(r;\,f)}{r}=\frac{1}{\pi}\lim_{r\to\infty}\frac{\ln|f(ir)|}{r}\,(<\infty). \tag{8.4}$$

Здесь $n_+(r;\,f)$ и $n_-(r;\,f)$ обозначают соответственно количество нулей α_j, содержащихся соответственно в замкнутых интервалах $[0,\,r]$ и $[-r,\,0]$.

Равенства (8.4) были установлены Н. Левинсоном (см. Б. Я. Левин [1], гл. II, § 4).

Соотношение (8.3) является следствием более общей теоремы Б. Я. Левина [1] (стр. 323—325).

2. Начнем со следующего предложения.

Лемма 8.1. *Пусть* $A=G+iH$ — *вполне непрерывный оператор с компонентой* $A_{\mathcal{J}}=H\in\mathfrak{S}_1$, *а* $\{\mu_j^+\}$ *и* $\{\mu_j^-\}$ — *полные последовательности характеристических чисел оператора* A *соответственно внутри верхней и нижней полуплоскостей. Тогда внутри верхней полуплоскости*:

$$\prod_j \frac{1-\lambda/\mu_j^+}{1-\lambda/\overline{\mu_j^+}}\,D_{G/A}(\lambda)\in(\mathfrak{A}_+), \tag{8.5}$$

а внутри нижней

$$\prod_j \frac{1-\lambda/\mu_j^-}{1-\lambda/\overline{\mu_j^-}}\,D_{G/A}(\lambda)\in(\mathfrak{A}_-). \tag{8.6}$$

Доказательство. Оператор H представим в виде разности неотрицательных ортогональных операторов:

$$H=H_+-H_-.$$

Положим

$$H_1 = H_+ + H_-, \quad A_1 = G + iH_1 \tag{8.7}$$

и рассмотрим разложение:

$$D_{G/A}(\lambda) = \frac{D_{G/A_1}(\lambda)}{D_{A/A_1}(\lambda)}. \tag{8.8}$$

Так как $-H_1 \leqslant H \leqslant H_1$, то по теореме 5.2

$$|D_{A/A_1}(\lambda)| \leqslant 1 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0. \tag{8.9}$$

По той же теореме 5.2 (или теореме 6.3):

$$|D_{G/A_1}(\lambda)| \leqslant 1 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0.$$

Единственными нулями функции $D_{A/A_1}(\lambda)$ внутри полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$ являются характеристические числа μ_j^+ $(j = 1, 2, \ldots)$.

Из (8.9) следует

$$D_{A/A_1}(\lambda) = \prod_j \frac{1-\lambda/\mu_j^+}{1-\lambda/\bar{\mu}_j^+} f(\lambda), \tag{8.10}$$

где $f(\lambda)$ — некоторая функция, голоморфная и отличная от нуля при $\operatorname{Im}\lambda > 0$, притом удовлетворяющая условию:

$$|f(\lambda)| \leqslant 1.$$

Согласно (8.8) и (8.10):

$$\prod_j \frac{1-\lambda/\mu_j^+}{1-\lambda/\bar{\mu}_j^+} D_{G/A}(\lambda) = \frac{D_{G/A_1}(\lambda)}{f(\lambda)}, \tag{8.11}$$

и так как правая часть представляет собой частное двух аналитических функций, ограниченных при $\operatorname{Im}\lambda > 0$, то (8.5) доказано.

Аналогично доказывается (8.6).

Лемма доказана.

3. Теперь без труда может быть получено обобщение теоремы 6.2 на случай недиссипативных операторов.

Теорема 8.1. *Пусть $A = G + iH$ — вполне непрерывный оператор с компонентой $A_{\mathcal{J}} = H \in \mathfrak{S}_1$. Тогда*

$$D_{A^*/A}(\lambda) = e^{2ia\lambda} \prod_j \frac{1-\lambda/\bar{\mu}_j}{1-\lambda/\mu_j}, \tag{8.12}$$

где $\{\mu_j\}$ — *полная последовательность всех невещественных характеристических чисел оператора* A, *а*

$$a = \operatorname{sp} H - \sum_j \operatorname{Im} \frac{1}{\mu_j}. \tag{8.13}$$

Доказательство. Меняя ролями A и A^*, мы можем получить для A^* соотношение, аналогичное (8.11), а именно:

$$\prod_j \frac{1-\lambda/\bar{\mu}_j}{1-\lambda/\mu_j} D_{G/A^*}(\lambda) = D_{G/A_1}/f^*(\lambda), \tag{8.14}$$

где $f^*(\lambda)$, как и $f(\lambda)$, есть некоторая функция, голоморфная и отличная от нуля при $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$ и по модулю не превосходящая единицы.

Деля почленно равенство (8.11) на равенство (8.14), найдем, что

$$D_{A^*/A}(\lambda) = \prod_j \frac{1-\lambda/\bar{\mu}_j}{1-\lambda/\mu_j} \frac{f(\lambda)}{f^*(\lambda)}. \tag{8.15}$$

Так как согласно (6.4)

$$|D_{A^*/A}(\lambda)| = 1 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im}\lambda = 0,$$

то из (8.15) следует, что

$$|f(\lambda)| = |f^*(\lambda)| \quad \text{при} \quad -\infty < \lambda < \infty.$$

В силу того, что гармоническая функция $\ln|f(\lambda)|$ неположительна при $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$, она допускает представление (см. по этому поводу § 9, п. 1):

$$\ln|f(\lambda)| = \left(\gamma + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)\,dx}{|\lambda - x|}\right) \operatorname{Im}\lambda \quad (\operatorname{Im}\lambda > 0), \tag{8.16}$$

где

$$p(x) = \ln|f(x)| = \ln|f^*(x)| \qquad (-\infty < x < \infty),$$

$$\gamma = \lim_{\rho\to\infty} \left[\frac{1}{\varrho} \ln|f(i\varrho)|\right] \leqslant 0.$$

Для $\ln|f^*(x)|$ можно написать представление, аналогичное (8.16), с тем же $p(x)$, но с некоторой другой константой γ^*. Отсюда:

$$\ln|f(\lambda)| = \ln|f^*(\lambda)| + 2a \operatorname{Im}\lambda, \quad \left| e^{-2ia\lambda} \frac{f(\lambda)}{f^*(\lambda)} \right| = 1 \ (\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0),$$

где $2a = \gamma^* - \gamma$. Учитывая, что $f(0)/f^*(0) = 1$, заключаем, что

$$\frac{f(\lambda)}{f^*(\lambda)} = e^{2ia\lambda},$$

что вместе с (8.15) и дает (8.12) при $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$ (с $a = (\gamma^* - \gamma)/2$).

Ввиду того, что левая и правая части равенства (8.12) суть мероморфные функции, то оно справедливо во всей комплексной плоскости. Остается проверить еще равенство (8.13). Так же, как и при доказательстве теоремы 6.2, оно проверяется сравнением разложений по степеням λ в окрестности начала его левой и правой части.

Теорема доказана.

4. Сформулируем теперь предложение, обобщающее и дополняющее теорему 7.2 в ее наиболее существенной части.

Теорема 8.2. *Пусть $A = G + iH$ — вольтерров оператор с компонентой $A_{\mathcal{J}} = H \in \mathfrak{S}_1$. Тогда детерминант $\widetilde{D}_G(\lambda)$ есть целая функция, удовлетворяющая условиям* (8.1) *и* (8.2); *его нули, т. е. характеристические числа a_j $(j = 1, 2, \ldots)$ оператора G таковы, что*:

$$1) \qquad \lim_{r\to\infty} \sum_{|a_j| \leqslant r} \frac{1}{a_j} = 0; \qquad (8.17)$$

$$2) \qquad \lim_{r\to\infty} \frac{n_+(r;\, G)}{r} = \lim_{r\to\infty} \frac{n_-(r;\, G)}{r} = \frac{h}{\pi}, \qquad (8.18)$$

где

$$|\operatorname{sp} H| \leqslant h \leqslant \operatorname{sp}|H| \ (= |H|_1), \qquad (8.19)$$

и 3) *существует не зависящая от оператора A константа γ $(\leqslant 4e)$ такая, что*

$$\frac{n(r;\, G)}{r} \leqslant \frac{\gamma}{\pi} \operatorname{sp}|H|.$$

Все утверждения этой теоремы, за исключением оценки $h \leqslant |H|_1$ и утверждения 3), будут доказаны на основе изложенного ранее. Для получения указанной оценки нам придется воспользоваться следующим предложением, представляющим самостоятельный интерес.

В) *Пусть $A = G + iH$ — вольтерров оператор с компонентой $A_{\mathcal{J}} = H \in \mathfrak{S}_1$. Тогда $G \in \mathfrak{S}_\Omega$ *) и, более того, выполняются неравенства*

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j^+(G) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j^-(G) \end{array}\right\} \leqslant \frac{1}{\pi} |H|_1 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Это предложение было установлено авторами в их сообщении [3]; его доказательство опирается на теорию треугольных представлений несамосопряженных операторов и, в частности, на получаемую в этой теории теорему М. С. Лившица, сформулированную в конце п. 3 предыдущего параграфа.

Теория треугольных представлений позволяет также доказать следующее простое предложение (И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн [2, 3]) **).

Г) *Пусть $A = G + iH$ — вольтерров оператор с мнимой компонентой $A_{\mathcal{J}} = H \in \mathfrak{S}_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$. Тогда оператор A допускает несущественное расширение $\widetilde{A} = \widetilde{G} + i\widetilde{H}$, представимое в виде разности $\widetilde{A} = A_1 - A_2$, где $A_1 = G_1 + i\widetilde{H}_+$ и $A_2 = G_2 + i\widetilde{H}_-$ — диссипативные вольтерровы операторы с ортогональными мнимыми компонентами $\widetilde{H}_+$, $\widetilde{H}_-$.*

Поясним, что оператор A, действующий в гильбертовом пространстве $\widetilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$, называется *несущественным расширением* оператора A, если $\widetilde{A}\varphi = A\varphi$ для $\varphi \in \mathfrak{H}$ и $\widetilde{A}\varphi = 0$ для $\varphi \in \widetilde{\mathfrak{H}} \ominus \mathfrak{H}$.

---

*) Определение с. н. идеала $\mathfrak{S}_\Omega$ см. в п. 5, § 15 главы III.

**) Один результат В. И. Мацаева [2] позволяет в этом предложении с. н. идеал $\mathfrak{S}_p$ заменить на с. н. идеал $\mathfrak{S}_\omega$.

Предложение Г) при $p=1$ будет использовано при доказательстве утверждения 3) теоремы 8.2.

Доказательство теоремы 8.2. Так как по условию A — вольтерров оператор, то $\widetilde{D}_A(\lambda)=1$ и согласно формуле (3.3)

$$\widetilde{D}_G(\lambda)=\frac{\widetilde{D}_G(\lambda)}{\widetilde{D}_A(\lambda)}=D_{G/A}(\lambda)\,e^{i\lambda\,\mathrm{sp}\,H}.$$

По лемме 8.1 целая функция $D_{G/A}(\lambda)\in(\mathfrak{A}_\pm)$, а следовательно, и $\widetilde{D}_G(\lambda)\in(\mathfrak{A}_\pm)$. На основании предложения А) функция $\widetilde{D}_G(\lambda)$ обладает свойствами (8.1) и (8.2), следовательно, к ней применимо предложение Б).

Поэтому, согласно формуле (8.4) Н. Левинсона, равенства (8.18) выполняются при

$$h=\lim_{r\to\infty}\left[\frac{1}{r}\ln|\widetilde{D}_G(ir)|\right].$$

Применение к регуляризованному определителю $\widetilde{D}_G(\lambda)$ представления (8.3) дает

$$\widetilde{D}_G(\lambda)=\prod_j\left(1-\frac{\lambda}{\alpha_j}\right)e^{\frac{\lambda}{\alpha_j}}=\lim_{r\to\infty}\prod_{|\alpha_j|\leqslant r}\left(1-\frac{\lambda}{\alpha_j}\right),$$

откуда получаем (8.17).

Для доказательства того, что

$$h=\lim_{r\to\infty}\left[\frac{1}{r}\ln|\widetilde{D}_G(ir)|\right]\geqslant|\mathrm{sp}\,H|, \tag{8.20}$$

очевидно, следует рассмотреть лишь случай, когда $\mathrm{sp}\,H\neq 0$. Примем для определенности, что $\mathrm{sp}\,H>0$. Воспользуемся соотношением

$$\widetilde{D}_G(\lambda)=e^{-i\lambda\,\mathrm{sp}\,H}D_{G/A}(\lambda)=e^{-i\lambda\,\mathrm{sp}\,H}\frac{D_{G/A_1}(\lambda)}{D_{A/A_1}(\lambda)}, \tag{8.21}$$

где диссипативный оператор A_1 определен равенством (8.7).

Согласно лемме 4.1

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\left[\frac{1}{r}\ln|D_{A/A_1}(ir)|\right]=0,$$

а согласно лемме 19.2

$$\lim_{r\to\infty}\left[\frac{1}{r}\ln|D_{G/A_1}(ir)|\right]=0.$$

Поэтому из (8.21) следует, что

$$h=\lim_{r\to\infty}\left[\frac{1}{r}\ln|\widetilde{D}_G(ir)|\right]=$$
$$=\operatorname{sp}H-\lim_{r\to\infty}\left[\frac{1}{r}\ln|D_{A/A_1}(ir)|\right]\geqslant|\operatorname{sp}H|.$$

Итак, неравенство (8.20) доказано.

Согласно предложению B) для последовательных положительных характеристических чисел $\alpha_j^+=1/\lambda_j^+(G)$ $(j=1, 2, \ldots)$

$$\sup_n\left(\sum_{j=1}^n\frac{1}{\alpha_j^+}\Big/\sum_{j=1}^n\frac{1}{j}\right)\leqslant\frac{2}{\pi}|H|_1. \tag{8.22}$$

Следовательно, всегда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\sum_{j=1}^n\frac{1}{\alpha_j^+}\Big/\sum_{j=1}^n\frac{1}{j}\right)\leqslant\frac{2}{\pi}|H|_1.$$

С другой стороны, если в (8.18) число $h>0$, то при любом $\varepsilon>0$:

$$\frac{1}{\alpha_k^+}>\frac{2(h-\varepsilon)}{\pi}\frac{1}{k}\quad(k>N_\varepsilon),$$

а следовательно,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\sum_{j=1}^n\frac{1}{\alpha_j^+}\Big/\sum_{j=1}^n\frac{1}{j}\right]>\frac{2(h-\varepsilon)}{\pi}.$$

Таким образом, $h-\varepsilon\leqslant|H|_1$ и оценка (8.19) установлена.

Остается обосновать утверждение 3). Для случая диссипативного оператора A оно было установлено ранее, ибо согласно следствию 7.1 в этом случае

$$\sup_{0<r<\infty}\frac{n(r;G)}{r}\leqslant\frac{2e}{\pi}\operatorname{sp}H. \tag{8.23}$$

В общем случае нам придется воспользоваться предложением Г), согласно которому вольтерров оператор A допускает несущественное расширение $\widetilde{A}=\widetilde{G}+i\widetilde{H}$, представимое в виде разности $\widetilde{A}=\widetilde{A}_1-\widetilde{A}_2$, где $\widetilde{A}_1=G_1+i\widetilde{H}_+$ и $\widetilde{A}_2=G_2+i\widetilde{H}_-$ — диссипативные вольтерровы операторы, причем $\widetilde{H}_+$ и $\widetilde{H}_-$ друг другу ортогональны.

Так как при несущественном расширении оператора A связанные с ним величины $n(r;\,A_{\mathcal{R}})$ и $\operatorname{sp}|A_{\mathcal{J}}|$ не изменяют своих значений, то без ограничения общности можно принять, что сам оператор A допускает разложение $A=A_1-A_2$, где $A_1=G_1+iH_+$ и $A_2=G_2+iH_-$ — диссипативные вольтерровы операторы.

Для операторов A_1 и A_2 будем иметь:

$$\sup_{0<r<\infty}\frac{n(r;\,G_1)}{r}\leqslant\frac{2e}{\pi}\operatorname{sp}H_+,\qquad \sup_{0<r<\infty}\frac{n(r;\,G_2)}{r}\leqslant\frac{2e}{\pi}\operatorname{sp}H_-. \tag{8.24}$$

Легко видеть, что для любого самосопряженного $G\in\mathfrak{S}_\infty$

$$\sup_{0<r<\infty}\frac{n(r;\,G)}{r}=\sup_{1\leqslant n<\infty} ns_n(G),$$

а поэтому соотношение (8.24) означает, что

$$\sup_n ns_n(G_1)\leqslant\frac{2e}{\pi}\operatorname{sp}H_+,\qquad \sup_n ns_n(G_2)\leqslant\frac{2e}{\pi}\operatorname{sp}H_-. \tag{8.25}$$

Так как, с другой стороны, $G_1+G_2=G$, то согласно следствию II.2.2: $s_{n+m-1}(G)\leqslant s_n(G_1)+s_m(G_2)$ $(n,\ m=1,\ 2,\ \ldots)$. Отсюда при $m=n$ и $m=n+1$ получаем:

$$(2n-1)\,s_{2n-1}(G)\leqslant 2\,[ns_n(G_1)+ns_n(G_2)],$$

$$2ns_{2n}(G)\leqslant 2\,[ns_n(G_1)+(n+1)\,s_{n+1}(G_2)],$$

и стало быть,

$$\sup_n ns_n(G)\leqslant 2\,[\sup_n ns_n(G_1)+\sup_n ns_n(G_2)].$$

Учитывая (8.25), приходим к свойству 3) со значением $\gamma=4e$.

Теорема доказана.

Заметим, что в случае диссипативного вольтеррова оператора A из (8.19) следует, что $h = \operatorname{sp} H$. Этот факт был нам уже известен из теоремы 7.2.

Можно показать, что в общем случае h может принимать любое значение из интервала (8.19).

Замечание 8.1. Соотношение (8.17) иначе можно записать еще в виде

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{|\lambda_j| \geqslant \varepsilon} \lambda_j(G) = 0. \tag{8.26}$$

Его можно трактовать как утверждение, что *«главное значение следа» вещественной компоненты вольтеррова оператора равно нулю, коль скоро мнимая компонента этого оператора ядерна.*

Если же сам вольтерров оператор $A = G + iH \in \mathfrak{S}_1$, то $G \in \mathfrak{S}_1$, а значит, имеет смысл след G и с ним совпадает главное значение следа G, так что $\operatorname{sp} G = 0$. Применяя этот результат к оператору iA, получаем, что также $\operatorname{sp} H = 0$, а следовательно, в этом случае $\operatorname{sp} A = 0$.

Мы снова пришли к результату В. Б. Лидского (см. теорему III.8.4).

Замечание 8.2. Из соотношения (8.26) можно сделать еще и такой вывод: *если вольтерров оператор A представим в виде: $A = C + T$, где C — неотрицательный оператор, а $T \in \mathfrak{S}_1$, то $A \in \mathfrak{S}_1$ и* $\operatorname{sp} C \leqslant |T_{\mathfrak{R}}|_1 (\leqslant |T|_1)$.

В самом деле, так как $A_{\mathfrak{J}} = T_{\mathfrak{J}} \in \mathfrak{S}_1$, то

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{|\lambda| \geqslant \varepsilon} \lambda_j(A_{\mathfrak{R}}) = 0. \tag{8.27}$$

С другой стороны, если воспользоваться разложениями $A_{\mathfrak{R}} = A_{\mathfrak{R}}^{+} - A_{\mathfrak{R}}^{-}$ и $T_{\mathfrak{R}} = T_{\mathfrak{R}}^{+} - T_{\mathfrak{R}}^{-}$ операторов $A_{\mathfrak{R}}$ и $T_{\mathfrak{R}}$ на ортогональные неотрицательные слагаемые, то $A_{\mathfrak{R}} = (T_{\mathfrak{R}}^{+} + C) - T_{\mathfrak{R}}^{-}$ и, стало быть, согласно лемме II.1.2 будем иметь:

$$\operatorname{sp} A_{\mathfrak{R}}^{-} \leqslant \operatorname{sp} T_{\mathfrak{R}}^{-} \leqslant |T_{\mathfrak{R}}|_1 \leqslant |T|_1 < \infty.$$

Но тогда согласно (8.27) $\operatorname{sp} A_{\mathfrak{R}}^{+} = \operatorname{sp} A_{\mathfrak{R}}^{-}$, $A_{\mathfrak{R}} \in \mathfrak{S}_1$, $\operatorname{sp} A_{\mathfrak{R}} = 0$ и $A = A_{\mathfrak{R}} + iA_{\mathfrak{J}} \in \mathfrak{S}_1$. Кроме того,

$$\operatorname{sp} C \leqslant \operatorname{sp}(T_{\mathfrak{R}}^{+} + C) = \operatorname{sp} T_{\mathfrak{R}}^{-} \leqslant |T_{\mathfrak{R}}|_1 \leqslant |T|_1.$$

5. Число h, фигурирующее в (8.18), может быть вычислено по формуле

$$h = \int\limits_{\mathfrak{P}} |dPH\,dP|_1, \tag{8.28}$$

где $\mathfrak{P}$ — максимальная собственная цепочка оператора A. Этот результат требует привлечения новых понятий и средств и будет доказан в книге авторов [7].

Поясним последнее понятие и смысл формулы (8.28).

Замкнутое в смысле сильной сходимости множество ортопроекторов $\mathfrak{P} = \{P\}$ называется *цепочкой*, если оно упорядочено естественным образом и содержит проекторы 0 и I. Цепочка $\mathfrak{P}$ называется *максимальной*, если она не является правильной частью никакой другой цепочки.

Цепочка $\mathfrak{P}$ называется *собственной* цепочкой оператора $A \in \mathfrak{R}$, если для любого ортопроектора $P \in \mathfrak{P}$ подпространство $P\mathfrak{H}$ инвариантно относительно A. Из теоремы Дж. Неймана и Н. Аронштайна (см. Н. Аронштайн и Р. Смит [1]) о существовании правильного инвариантного подпространства у всякого оператора $A \in \mathfrak{S}_\infty$ выводится следующее важное предложение (см. Л. А. Сахнович [1]).

У всякого оператора $A \in \mathfrak{S}_\infty$ существует по крайней мере одна собственная максимальная цепочка.

Формулу (8.28) проще всего интерпретировать как эквивалентную следующему равенству:

$$h = \inf \sum_{j=1}^{n} |\Delta P_j H \Delta P_j|_1, \tag{8.29}$$

где нижняя грань берется по всему множеству разбиений $0 = P_0 < P_1 < \ldots < P_n = I$ $(P_j \in \mathfrak{P})$ цепочки $\mathfrak{P}$, а $\Delta P_j = P_j - P_{j-1}$.

Напомним, что согласно теореме III.8.7, если разбиение $\{P'_j\}_0^n$ составляет часть разбиения $\{P''_j\}_0^m$, то

$$\sum_{j=1}^{m} |\Delta P''_j H \Delta P''_j|_1 \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\Delta P'_j H \Delta P'_j|_1.$$

Замечание 8.3. *Из* (8.18) *следует, что*

$$\lim_{n\to\infty} ns_n(A) = \frac{2}{\pi} h.$$

Это устанавливается точно так же, как и соответствующее соотношение в следствии 7.2.

6. Теорема 8.2 вместе с формулой (8.28) позволяют обобщить предложение 1° § 7 на случай интегрального ядра $\mathscr{K}(t, s)$, определяющего по формуле

$$(Hf)(t) = \int_a^b \mathscr{K}(t, s) f(s)\, ds$$

эрмитов ядерный, но не обязательно дефинитный оператор.

В этом случае для непрерывного ядра $\mathscr{K}(t, s)$ формула (7.16) заменится формулой

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n_\pm(r;\, G)}{r} = \frac{1}{\pi} \int_a^b \operatorname{sp} |\mathscr{K}(s, s)|\, ds,$$

где под $\operatorname{sp} |\mathscr{K}(s, s)|$ понимается сумма абсолютных величин собственных чисел матрицы $\mathscr{K}(s, s)$, а для разрывного ядра — формулой

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n_\pm(r;\, G)}{r} = \frac{1}{\pi} \lim_{\delta\to 0} \int_a^b \operatorname{sp} |\mathscr{K}_\delta(s, s)|\, ds,$$

где

$$\mathscr{K}_\delta(t, s) = \frac{1}{4\delta^2} \int_{t-\delta}^{t+\delta} \int_{s-\delta}^{s+\delta} \mathscr{K}(u, v)\, du\, dv.$$

Предоставляем читателю прокомментировать другие соотношения из этого параграфа для рассматриваемых интегральных операторов H и G.

§ 9. Асимптотическая характеристика спектра оператора с ядерной мнимой компонентой

1. Мы уже однажды воспользовались (см. доказательство теоремы 8.1) следующим предложением *).

---

*) Оно является простым следствием известной теоремы Рисса—Херглотца (см. И. И. Привалов [1], гл. I, § 2) об интегральном представлении функции, положительной и гармонической внутри единичного круга.

Пусть $u(\lambda)$ $(\operatorname{Im}\lambda > 0)$ — *положительная гармоническая функция внутри верхней полуплоскости.*

Тогда

$$u(\lambda) = \left(h_u + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_u(t)}{|t-\lambda|^2}\right) \operatorname{Im}\lambda \quad (\operatorname{Im}\lambda > 0), \tag{9.1}$$

где

$$h_u = \inf_{\operatorname{Im}\lambda > 0} \frac{u(\lambda)}{\operatorname{Im}\lambda}, \tag{9.2}$$

а $\omega_u(t) = \frac{1}{2}(\omega_u(t+0) + \omega_u(t-0))$ *есть неубывающая функция, определяемая по формуле обращения Стильтьеса:*

$$\omega_u(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\pi} \int_0^t u(s+ih)\, ds.$$

Собственно, соотношение (9.2) есть следствие самого представления (9.1); более того, из этого представления вытекает, что при любом ϑ $\left(0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}\right)$ равномерно внутри угла

$$\left|\frac{\pi}{2} - \theta\right| < \vartheta$$

выполняется соотношение

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{u(\rho e^{i\theta})}{\rho} = h_u \sin\theta.$$

В. К. Хейман [1] установил важную теорему, которая, в частности, содержит предложение:

1) *Пусть* $u(\lambda)$ — *некоторая неотрицательная супергармоническая функция при* $\operatorname{Im}\lambda > 0$, *а*

$$h_u = \inf_{\operatorname{Im}\lambda > 0} \frac{u(\lambda)}{\operatorname{Im}\lambda}.$$

Всегда найдется множество $\Delta \subset (1, \infty)$ *конечной логарифмической длины такое, что предельное соотношение*

$$\lim \frac{u(\rho e^{i\theta})}{\rho} = h_u \sin\theta$$

выполняется равномерно для всех θ $(0<\theta<\pi)$, *когда* $\varrho\to\infty$, *минуя* Δ.

Поясним, что логарифмической длиной измеримого множества $\Delta\subset(1,\infty)$ называется интеграл

$$\int\limits_{\Delta}\frac{d\varrho}{\varrho}.$$

Предложение 1), в частности, применимо к любой неотрицательной гармонической функции $u(\lambda)$ $(\operatorname{Im}\lambda>0)$.

На основании 1) для любого произведения

$$B(\lambda)=\prod_j\frac{1-\lambda/\mu_j}{1-\lambda/\bar\mu_j}\qquad\left(\sum_j\operatorname{Im}\left|\frac{1}{\mu_j}\right|<\infty,\quad \mu_j\to\infty\right)$$

можно утверждать, что равномерно по θ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$

$$\lim\left[\frac{1}{\varrho}\ln|B(\varrho e^{i\theta})|\right]=0, \tag{9.3}$$

когда $\varrho\to\infty$, минуя подходящее множество $\Delta\subset(1,\infty)$ конечной логарифмической длины.

В самом деле, полагая

$$B_1(\lambda)=\prod_{\operatorname{Im}\mu_j<0}\frac{1-\lambda/\mu_j}{1-\lambda/\bar\mu_j},\quad B_2(\lambda)=\prod_{\operatorname{Im}\mu_j>0}\frac{1-\lambda/\bar\mu_j}{1-\lambda/\mu_j},$$

будем иметь

$$\ln|B(\lambda)|=\ln|B_1(\lambda)|-\ln|B_2(\lambda)|=u_1(\lambda)-u_2(\lambda),$$

где $u_1(\lambda)$ и $u_2(\lambda)$ — супергармонические функции при $\operatorname{Im}\lambda>0$. Для этих функций константы h_{u_1} и h_{u_2} равны 0, ибо по известным свойствам произведений Бляшке (см. М. Г. Крейн [3]) найдется последовательность чисел $\varrho_n\to\infty$ такая, что равномерно по θ $(0<\theta\leqslant2\pi)$ будут выполняться соотношения

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\varrho_n}\ln|B_j(\varrho_n e^{i\theta})|\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{u_j(\varrho_n e^{i\theta})}{\varrho_n}=0\qquad(j=1,\ 2),$$

а значит, в частности,

$$h_{u_j}\leqslant\inf_n\frac{u_j(i\varrho_n)}{\varrho_n}=0\qquad(j=1,\ 2).$$

2. Всякому вполне непрерывному оператору A будем сопоставлять функцию:

$$N(r;\,A)=\int_0^r \frac{n(\varrho;\,A)}{\varrho}\,d\varrho \qquad (0<r<\infty), \tag{9.4}$$

где $n(r;\,A)$ обозначает точное число характеристических чисел оператора A, лежащих в круге $|\lambda|\leqslant r$.

Рассуждениями, подобными тем, с помощью которых было установлено предложение 1°, § 14, гл. III, показывается, что если при некотором $l>0$

$$n(r;\,A)=r^lL(r)+o(r^lL(r)) \qquad (r\to\infty), \tag{9.5}$$

где $L(r)$ — медленно изменяющаяся функция, то

$$N(r;\,A)=\frac{1}{l}r^lL(r)+o(r^lL(r)) \qquad (r\to\infty) \tag{9.6}$$

(см. по этому поводу Б. Я. Левин [1], стр. 50).

Теорема 9.1. *Пусть $A=G+iH$ — некоторый вполне непрерывный оператор с $A_{\mathcal{J}}=H\in\mathfrak{S}_1$, а $\{\mu_j\}$ — его полная система характеристических чисел. Тогда найдется множество $\Delta\subset(1,\,\infty)$ конечной логарифмической длины такое, что когда $r\to\infty$, минуя Δ, то*

$$N(r;\,G)-N(r;\,A)=\varkappa r+o(r), \tag{9.7}$$

где

$$\varkappa\geqslant\frac{2}{\pi}\left|\operatorname{sp}H-\sum_j \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\mu_j}\right)\right|. \tag{9.8}$$

Если оператор A диссипативен, то

$$\varkappa=\frac{2}{\pi}\left[\operatorname{sp}H-\sum_j \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\mu_j}\right)\right]. \tag{9.9}$$

Доказательство. Так же, как и при доказательстве теоремы 8.1, воспользуемся тождествами:

$$D_{G/A}(\lambda)=D_{G/A_1}(\lambda)\,D_{A_1/A}(\lambda)=\frac{D_{G/A_1}(\lambda)}{D_{A/A_1}(\lambda)},$$

где $A_1=G+iH_1$ $(H_1=H_++H_-)$. Напомним, что

$$|D_{G/A_1}(\lambda)|\leqslant 1, \quad |D_{A/A_1}(\lambda)|\leqslant 1 \text{ при } \operatorname{Im}\lambda\geqslant 0$$

и согласно лемме 4.2

$$\lim_{r\to\infty}\left[\frac{1}{r}\ln|D_{A_1/G}(ir)|\right]=0. \tag{9.10}$$

Таким образом,

$$\ln|D_{G/A}(\lambda)|=u_2(\lambda)-u_1(\lambda) \qquad (\operatorname{Im}\lambda>0),$$

где

$$u_1(\lambda)=\ln|D_{A_1/G}(\lambda)|>0 \qquad (\operatorname{Im}\lambda>0),$$

а

$$u_2(\lambda)=\ln|D_{A_1/A}(\lambda)|=-\ln|D_{A/A_1}(\lambda)|>0 \quad (\operatorname{Im}\lambda>0)$$

— супергармоническая функция.

Обозначим через h_1^+ и h_2^+ неотрицательные числа, а через Δ_1 и Δ_2 — множества конечной логарифмической длины, которые соответствуют функциям $u_1(\lambda)$ и $u_2(\lambda)$ по теореме Хеймана. В силу (9.10) будем иметь $h_1^+=0$. Поэтому, если положить $\Delta_+=\Delta_1\bigcup\Delta_2$, то можно будет утверждать на основании теоремы Хеймана и равенства (9.10), что равномерно относительно θ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ выполняется предельное соотношение

$$\lim\left[\frac{1}{r}\ln|D_{G/A}(re^{i\theta})|\right]=h_2^+\sin\theta, \tag{9.11}$$

когда $r\to\infty$, минуя Δ_+.

Аналогично доказывается существование постоянной $h_2^-\geqslant 0$ и множества Δ_- конечной логарифмической длины таких, что равномерно относительно θ $(-\pi<\theta<0)$ выполняется соотношение:

$$\lim\left[\frac{1}{r}\ln|D_{G/A}(re^{i\theta})|\right]=h_2^-|\sin\theta|, \tag{9.12}$$

когда $r\to\infty$, минуя Δ_-.

Покажем, что

$$\frac{1}{2}\left(h_2^--h_2^+\right)=\operatorname{sp}H-\sum_j\operatorname{Im}\left(\frac{1}{\mu_j}\right). \tag{9.13}$$

В самом деле, согласно (9.11) и (9.12)

$$\lim\ln\frac{|D_{G/A}(ir)|}{|D_{G/A}(-ir)|}=h_2^+-h_2^-,$$

когда $r \to \infty$, минуя множество

$$\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-.$$

С другой стороны, имеем

$$\overline{D_{G/A}(-ir)} = D_{G/A^*}(ir), \quad \frac{D_{G/A}(ir)}{D_{G/A^*}(ir)} = D_{A^*/A}(ir),$$

а согласно теореме 8.1 и соотношению (9.3)

$$-\frac{1}{2}\lim\left[\frac{1}{r}\ln|D_{A^*/A}(ir)|\right] = \mathrm{sp}\, H - \sum_j \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\mu_j}\right),$$

когда $r \to \infty$, минуя некоторое множество конечной логарифмической длины. Отсюда уже следует (9.13).

Применим теперь к мероморфной функции $D_{G/A}(\lambda)$ формулу Иенсена. Так как нули и полюсы этой функции совпадают соответственно с характеристическими числами операторов G и A, то на основании этой формулы будем иметь

$$N(r;\ G) - N(r;\ A) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|D_{G/A}(re^{i\theta})|\, d\theta. \qquad (9.14)$$

Если $r \to \infty$, минуя Δ, то асимптотическое значение интеграла, стоящего в правой части (9.14), может быть вычислено на основании предельных соотношений (9.11) и (9.12), что дает

$$N(r;\ G) - N(r;\ A) = \frac{1}{\pi}(h_2^+ + h_2^-)\, r + o(r), \qquad (9.15)$$

когда $r \to \infty$, минуя Δ.

Очевидно, первое утверждение теоремы следует из (9.13) и (9.15), причем $\varkappa = \frac{1}{\pi}(h_2^+ + h_2^-)$.

Если оператор A диссипативен, то $A_1 = A$, $D_{A_1/A}(\lambda) = 1$, $h_2^+ = 0$ и согласно (9.13)

$$h_2^- = 2\left[\mathrm{sp}\, H - \sum_j \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\mu_j}\right)\right].$$

Таким образом, в этом случае $\varkappa = \frac{1}{\pi}(h_2^+ + h_2^-)$ будет иметь значение (9.9).

Теорема доказана.

Теорема 9.1 была установлена в статье М. Г. Крейна [9]. До этого Б. Я. Левин [2], впервые привлекая результат Хеймана, показал, что в случае вполне непрерывного *диссипативного* оператора $A=G+iH$ ($\operatorname{sp} H<\infty$) выполняется асимптотическое неравенство

$$N(r;\ G)-N(r;\ A)\leqslant r\operatorname{sp} H+o(r)\quad(r\to\infty).$$

К соображениям этой статьи нужно добавить лишь немногое, чтобы для указанного случая диссипативного оператора получить асимптотическое неравенство $N(r;\ G)-N(r;\ A)\leqslant \varkappa r+o(r)$, где $\varkappa$ имеет значение, указанное в (9.9).

§ 10. Теорема о вольтерровых операторах с конечномерной мнимой компонентой

1. Для установления этой теоремы придется пополнить наш арсенал вспомогательных теоретико-функциональных предложений.

В частности, нам понадобится следующее обобщение теоремы Н. Левинсона (см. § 8, предложение Б)), доказанное М. Картрайт [1] (см. Б. Я. Левин [1], стр. 315 и 323—325).

В) *Пусть целая функция $f(\lambda)$ не выше экспоненциального типа удовлетворяет условию:*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln^{+}|f(\lambda)|\,d\lambda}{1+\lambda^2}<\infty,$$

тогда при любом ϑ $(0<\vartheta<\pi)$ имеют место предельные соотношения:

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n_+(r;\ \vartheta)}{r}=\lim_{r\to\infty}\frac{n_-(r;\ \vartheta)}{r}=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left\{\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|f(ir)|}{r}+\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|f(-ir)|}{r}\right\},\qquad(10.1)$$

где $n_+(r;\ \vartheta)$ и $n_-(r;\ \vartheta)$ обозначают соответственно точные количества нулей $f(\lambda)$ в секторах:

$$|\lambda|\leqslant r,\ |\arg\lambda|<\vartheta\quad\text{и}\quad|\lambda|\leqslant r,\ |\arg(-\lambda)|<\vartheta.$$

Кроме того, понадобятся следующие предложения.

Г) *Классам* $(\mathfrak{A}_+)$ *и* $(\mathfrak{A}_-)$ *) *принадлежит внутри соответствующих полуплоскостей всякая функция* $F(\lambda)$ *вида*:

$$F(\lambda)=\sum_j \frac{m_j}{\alpha_j-\lambda}, \tag{10.2}$$

где $\{\alpha_j\}$ — *некоторая последовательность вещественных чисел, а* $\{m_j\}$ — *последовательность комплексных чисел такая, что*

$$\sum_j \frac{|m_j|}{1+|\alpha_j|}<\infty. \tag{10.3}$$

Это предложение является следствием более общего и точного предложения В. И. Смирнова (см. И. И. Привалов [1], гл. II, § 4). Оно допускает простое непосредственное доказательство. В силу линейности классов $(\mathfrak{A}_\pm)$ достаточно доказать предложение Г) для случая, когда все $m_j>0$ $(j=1,\ 2,\ \ldots)$. В этом случае для функции $\Phi(\lambda)=i+F(\lambda)$ будем иметь

$$\operatorname{Im}\Phi(\lambda)=1+\sum_j \frac{m_j \operatorname{Im}\lambda}{|\alpha_j-\lambda|^2}>1 \qquad \text{при } \operatorname{Im}\lambda>0.$$

Поэтому внутри верхней полуплоскости функция $\Psi(\lambda)=1/\Phi(\lambda)$ ограничена по модулю единицей, а следовательно, $\Phi(\lambda)=1/\Psi(\lambda)\in(\mathfrak{A}_+)$ и $F(\lambda)=\Phi(\lambda)-i\in(\mathfrak{A}_+)$. Аналогично доказывается, что внутри нижней полуплоскости $F(\lambda)\in(\mathfrak{A}_-)$.

Д) *Пусть* $F(\lambda)$ — *мероморфная функция вида* (10.2), *причем выполняется дополнительное условие*:

$$\sum_{\alpha_j<0} \frac{1}{\sqrt{|\alpha_j|}}<\infty \qquad \left(\sqrt{|\alpha_j|}>0,\ j=1,\ 2,\ \ldots\right). \tag{10.4}$$

Положим

$$B(\lambda)=\prod_{\alpha_j<0} \frac{i\sqrt{|\alpha_j|}-\lambda}{i\sqrt{|\alpha_j|}+\lambda}. \tag{10.5}$$

---

*) Определение классов $(\mathfrak{A}_\pm)$ см. в § 8 п. 1.

Тогда внутри верхней полуплоскости: $B(\lambda)F(\lambda^2)\in(\mathfrak{A}_+)$, *а внутри нижней*: $B^{-1}(\lambda)F(\lambda^2)\in(\mathfrak{A}_-)$.

В самом деле, функция $F(\lambda^2)$ допускает представление *)

$$F(\lambda^2)=\sum_{\alpha_j>0}\frac{m_j}{2\sqrt{\alpha_j}}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_j}-\lambda}+\frac{1}{\sqrt{\alpha_j}+\lambda}\right)+$$

$$+\sum_{\alpha_j<0}\frac{m_j}{2i\sqrt{|\alpha_j|}\,(i\sqrt{|\alpha_j|}+\lambda)}+\sum_{\alpha_j<0}\frac{m_j}{2i\sqrt{|\alpha_j|}\,(i\sqrt{|\alpha_j|}-\lambda)}=$$

$$=\Phi_1(\lambda)+\Phi_2(\lambda)+\Phi_3(\lambda).$$

Согласно предложению Г) функция $\Phi_1(\lambda)\in(\mathfrak{A}^+)$. Так как при $\operatorname{Im}\lambda>0$:

$$\left|\frac{1}{i\sqrt{|\alpha_j|}+\lambda}\right|<\frac{1}{\sqrt{|\alpha_j|}},\tag{10.6}$$

то функция $\Phi_2(\lambda)$ ограничена при $\operatorname{Im}\lambda>0$:

$$|\Phi_2(\lambda)|\leqslant\frac{1}{2}\sum_{\alpha_j<0}\frac{|m_j|}{|\alpha_j|}<\infty,$$

и следовательно, также принадлежит классу $(\mathfrak{A}_+)$.

Внутри верхней полуплоскости функция $B(\lambda)$ голоморфна и ограничена по модулю единицей, так что $B(\lambda)\in(\mathfrak{A}_+)$, а значит, и $B(\lambda)\Phi_p(\lambda)\in(\mathfrak{A}_+)$ $(p=1,\ 2)$.

Для доказательства того, что $B(\lambda)F(\lambda^2)\in(\mathfrak{A}_+)$, остается показать, что функция $B(\lambda)\Phi_3(\lambda)\in(\mathfrak{A}_+)$. Для этого представим последнюю функцию в виде:

$$B(\lambda)\Phi_3(\lambda)=\frac{1}{2i}\sum_{\alpha_k<0}\frac{m_k}{\sqrt{|\alpha_k|}}\,\frac{B(\lambda)}{i\sqrt{|\alpha_k|}-\lambda}=$$

$$=\frac{1}{2i}\sum_{\alpha_k<0}\frac{m_k}{\sqrt{|\alpha_k|}}\,\frac{B_k(\lambda)}{i\sqrt{|\alpha_k|}+\lambda}.$$

---

*) Так как $\frac{1}{\lambda^2}\in\mathfrak{A}_\pm$, то без ограничения общности можно считать, что все $\alpha_j\neq 0$.

Так как при $\operatorname{Im}\lambda > 0$

$$|B_k(\lambda)| = \left| \sum_{\alpha_j<0;\ j\neq k} \frac{i\sqrt{|\alpha_j|}-\lambda}{i\sqrt{|\alpha_j|}+\lambda} \right| < 1,$$

то согласно (10.6) и (10.3)

$$|B(\lambda)\Phi_3(\lambda)| \leqslant \frac{1}{2} \sum_{\alpha_k<0} \frac{|m_k|}{|\alpha_k|} < \infty \qquad (\operatorname{Im}\lambda > 0).$$

Таким образом, $B(\lambda)\Phi_3(\lambda) \in (\mathfrak{A}_+)$ и тем самым $B(\lambda)F(\lambda^2) \in (\mathfrak{A}_+)$.

Аналогично показывается, что $B^{-1}(\lambda)F(\lambda^2) \in (\mathfrak{A}_-)$. Предложение Д) доказано.

2. После всего изложенного доказательство основной теоремы уже не составит труда.

Теорема 10.1. *Пусть $A = G + iH$ — некоторый вольтерров оператор с конечномерной мнимой компонентой H. Если отрицательные характеристические числа α_j оператора G удовлетворяют условию*

$$\sum_{\alpha_j<0} \frac{1}{\sqrt{|\alpha_j|}} < \infty, \tag{10.7}$$

то для его положительных характеристических чисел существует конечный предел

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n_+(r;\ G)}{\sqrt{r}}.$$

Занумеруем характеристические числа так, чтобы α_j было <0 при $j \leqslant 0$ и $\alpha_j > 0$ при $j > 0$. Теорема, в частности, утверждает, что если у G имеется бесконечное число положительных характеристических чисел, то при расположении их всех в неубывающую последовательность $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots$ будет существовать предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{n^2}. \tag{10.8}$$

Доказательство. По условию компонента H допускает представление

$$H = \sum_{q=1}^{n} \varepsilon_q (\cdot,\ \psi_q)\psi_q,$$

где $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — некоторая ортогональная система векторов.

Тогда

$$D_{A/G}(\lambda) = \det(I - i\lambda H(I - \lambda G)^{-1}) = \det \| 1 - i\lambda\varepsilon_q a_{pq}(\lambda) \|_1^n,$$

где

$$a_{pq}(\lambda) = ((I - \lambda G)^{-1}\psi_p, \psi_q) \quad (q, p = 1, 2, \ldots, n).$$

Так как A — вольтерров оператор, то функция $D_{G/A}(\lambda) = D_{A/G}^{-1}(\lambda)$ является целой с вещественными нулями α_j ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Если мы покажем, что функция $f(\lambda) = D_{G/A}(\lambda^2)$ принадлежит в соответствующих полуплоскостях классам $(\mathfrak{A}_\pm)$, то по предложению А) § 9 к функции $f(\lambda)$ будет применимо предложение В); так как, с другой стороны, для функции $f(\lambda)$ при $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$, очевидно, $n_+(\sqrt{r}; \vartheta) = n_+(r; G)$, то теорема будет доказана.

Имея это в виду, введем в рассмотрение ортонормированную систему собственных векторов φ_j ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) оператора G, отвечающих системе характеристических чисел α_j ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), так что

$$\alpha_j G\varphi_j = \varphi_j \qquad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Тогда

$$(I - \lambda G)^{-1} = I + \lambda \sum_j \frac{(\cdot, \varphi_j)\varphi_j}{\alpha_j - \lambda},$$

и стало быть:

$$a_{qp} = \delta_{qp} + \lambda \sum_j \frac{c_{qj}\bar{c}_{pj}}{\alpha_j - \lambda} \qquad (p, q = 1, 2, \ldots, n),$$

где $c_{qj} = (\psi_q, \varphi_j)$.

Определяя $B(\lambda)$ равенством (10.5), будем иметь согласно предложению Д):

$$B(\lambda) \sum_j \frac{c_{qj}\bar{c}_{pj}}{\alpha_j - \lambda^2} \in (\mathfrak{A}_+) \qquad (p, q = 1, 2, \ldots, n),$$

откуда

$$B(\lambda)\, a_{qp}(\lambda^2) \in (\mathfrak{A}_+) \qquad (p, q = 1, 2, \ldots, n).$$

Следовательно, если каждую строку определителя

$$\det \| 1 - i\lambda^2 \varepsilon_q a_{pq}(\lambda^2) \|_1^n \ (= D_{A/G}(\lambda^2))$$

умножить на $B(\lambda)$, то все его элементы будут принадлежать классу $(\mathfrak{A}_+)$. Так как этот класс есть некоторая алгебра функций, то

$$B^n(\lambda) D_{A/G}(\lambda^2) \in (\mathfrak{A}_+).$$

Учитывая, что $B^{n-1}(\lambda)$, вместе с $B(\lambda)$, принадлежит классу $(\mathfrak{A}_+)$, заключаем на основании свойства 2° (§ 8, п. 1) этого класса, что этому классу принадлежит также голоморфная внутри верхней полуплоскости функция

$$F(\lambda) = B(\lambda) D_{A/G}(\lambda^2) = \frac{B^n(\lambda) D_{A/G}(\lambda^2)}{B^{n-1}(\lambda)}.$$

Так как функция $F(\lambda)$ не имеет нулей внутри верхней полуплоскости, то вместе с $F(\lambda)$ и функция $f(\lambda) = F^{-1}(\lambda) \in (\mathfrak{A}_+)$, а следовательно, и

$$D_{G/A}(\lambda^2) = B(\lambda) f(\lambda) \in (\mathfrak{A}_+).$$

Аналогично показывается, что $D_{G/A}(\lambda^2) \in (\mathfrak{A}_-)$.

Теорема 10.1 доказана.

Разумеется, в формулировке теоремы можно поменять ролями положительный и отрицательные спектры характеристических чисел оператора G.

3. Вероятно, условие конечномерности компоненты $H = A_{\mathcal{J}}$ в теореме 10.1 можно ослабить (см. стр. 273). Однако даже при конечномерной компоненте H теорема 10.1 находит существенные приложения *).

Не следует думать, что теорема 10.1 может быть уточнена за счет, например, более жестких требований относительно р е д к о с т и отрицательного спектра оператора $G = A_{\mathfrak{R}}$.

Так как при условиях теоремы вольтерров оператор A оказывается принадлежащим классу $\mathfrak{S}_1$ (более того, любому классу $\mathfrak{S}_p$ с $p > 1/2$), то по теореме III.8.4: $\operatorname{sp} A = 0$, и следовательно, $\operatorname{sp} G = 0$, так что у G всегда будут собственные числа обоих знаков.

---

*) См. книгу авторов [7].

Ниже приводится пример вольтеррова оператора A с *двумерной* *) мнимой компонентой $H = A_{\mathcal{J}}$ и вещественной компонентой $G = A_{\mathcal{R}}$, имеющей точно *одно* отрицательное собственное число и для которой предел (10.8) *положителен.*

Реализуем $\mathfrak{H}$ в виде $L_2(0, 1)$ и рассмотрим в $L_2(0, 1)$ вольтерров оператор V, задаваемый равенством **):

$$(Vf)(t) = \int_t^1 (t-s) f(s)\, ds \qquad (f \in L_2). \tag{10.9}$$

Для этого оператора, очевидно,

$$(V_{\mathcal{R}} f)(t) = -\frac{1}{2} \int_0^1 |t-s| f(s)\, ds, \tag{10.10}$$

$$(V_{\mathcal{J}} f)(t) = \frac{1}{2i} \int_0^1 (t-s) f(s)\, ds. \tag{10.11}$$

Из (10.11) явствует, что компонента $V_{\mathcal{J}}$ двумерна.

Для установления интересующих нас свойств спектра оператора $V_{\mathcal{R}}$ воспользуемся тождеством:

$$-\frac{1}{2}|t-s| = G(t, s) + \left(t-\frac{1}{2}\right)\left(s-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}, \tag{10.12}$$

где

$$G(t, s) = \begin{cases} t(1-s) & (t \leqslant s), \\ s(1-t) & (s \leqslant t). \end{cases}$$

Интегральное уравнение

$$\varphi = \mu \Gamma \varphi \qquad \left((\Gamma\varphi)(t) = \int_0^1 G(t, s)\, \varphi(s)\, ds\right)$$

---

*) Так как оператор с одномерной мнимой компонентой по умножении на ± 1 становится диссипативным, то в силу теоремы М. С. Лившица, цитировавшейся на стр. 235, для такого вольтеррова оператора никогда не может выполняться условие (10.7) (см. по этому поводу также общую теорему 7.2).

**) Этот пример рассматривался также В. Б. Лидским [5].

эквивалентно краевой задаче:

$$\varphi'' + \mu\varphi = 0, \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0,$$

спектр которой состоит из чисел

$$\mu_n = \pi^2 n^2 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{10.13}$$

С другой стороны, из (10.12) следует, что

$$V_{\mathfrak{R}} = \Gamma + (\cdot, e_1) e_1 - (\cdot, e_0) e_0,$$

где $e_1(t) = t - \frac{1}{2}$, а $e_0(t) = \frac{1}{2}$. Таким образом, оператор $V_{\mathfrak{R}}$ получается из положительного оператора $\Gamma + (\cdot, e_1) e_1$ вычитанием одномерного, а следовательно, имеет не более одного отрицательного собственного числа (это легко вытекает из леммы II.1.2). Так как $\operatorname{sp} V_{\mathfrak{R}} = 0$, то $V_{\mathfrak{R}}$ имеет точно одно отрицательное собственное число. Учитывая (10.13) и вспоминая следствие II.2.1, заключаем, что для последовательности $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots$ положительных характеристических чисел оператора $V_{\mathfrak{R}}$ справедлива асимптотическая формула *):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{n^2} = \pi^2.$$

§ 11. Дальнейшие теоремы о связях между эрмитовыми компонентами вольтеррова оператора

1. Вопрос о том, в какой мере те или иные свойства одной из компонент $A_{\mathfrak{R}}$, $A_{\mathfrak{J}}$ вольтеррова оператора A определяют свойства другой компоненты, играет фундаментальную роль.

В предыдущих параграфах этот вопрос изучался для случая, когда мнимая компонента вольтеррова оператора ядерна (§§ 6—9) или конечномерна (§ 10). В этом параграфе будут приведены результаты, относящиеся к другим важным случаям. Все они были получены

---

*) Нетрудно убедиться в том, что спектр характеристических чисел оператора $V_{\mathfrak{R}}$ совпадает со спектром краевой задачи

$$\varphi'' + \mu\varphi = 0, \quad \varphi'(0) + \varphi'(1) = \varphi(0) + \varphi(1) + \varphi'(0) = 0.$$

В. И. Мацаевым [3] путем использования в теории определителей возмущения новых теорем теории целых функций, им же установленных.

В частности, ниже будут использованы следующие теоремы о целых функциях, указанные этим автором среди прочих теорем в его сообщениях [1—3].

I) *Пусть* $F(r)$ $(0 \leqslant r < \infty)$ — *неубывающая непрерывно дифференцируемая функция, которая удовлетворяет условиям:* $F(0)=1$, $F'(0)=0$, *а также при некотором* p $(1<p<2)$ *условию:*

$$\int_0^\infty \frac{\ln F(r)}{r^{1+p}}\,dr < \infty .$$

Тогда, если некоторая целая функция $f(z)$ *допускает оценку снизу*

$$|f(z)| \geqslant 1/F\left(\frac{r}{|\sin\theta|}\right) \quad (z=re^{i\theta}),$$

то для последовательности $\{a_j\}$ *всех нулей функции* $f(z)$ *будет выполняться неравенство*

$$\sum_j \frac{1}{|a_j|^p} \leqslant C_p \int_0^\infty \frac{\ln F(r)}{r^{1+p}}\,dr,$$

где C_p — *константа, зависящая только от* p.

II) *Если целая функция* $f(z)$ *при некотором* $\varrho>1$ *и* $C>0$ *допускает оценку снизу*

$$|f(z)| \geqslant C\exp\left\{-\left|\frac{r}{\sin\theta}\right|^{\rho} L_1\left(\frac{r}{|\sin\theta|}\right)\right\},$$

где $L_1(r)$ — *медленно изменяющаяся функция, то*

$$\ln^+|f(z)| = O(r^{\rho}L_1(r)) \quad (r\to\infty). \tag{11.1}$$

Заметим, что на основании известной теоремы Линделефа — Валирона (см. Б. Я. Левин [1], гл. I, теорема 17) при нецелом ϱ соотношение (11.1) эквивалентно соотношению

$$n(r;\ f) = O(r^{\rho}L_1(r)) \quad (r\to\infty), \tag{11.2}$$

где $n(r;\ f)$ $(0<r<\infty)$ — число нулей функции $f(z)$, лежащих в круге $|z| \leqslant r$.

Предполагая, что нули $\{a_j\}$ целой функции $f(z)$ занумерованы в порядке неубывания модулей $|a_1| \leqslant \leqslant |a_2| \leqslant \ldots$, можно утверждать, что последнее соотношение в свою очередь эквивалентно следующему:

$$\frac{1}{|a_n|} = O(n^{-1/\rho}L(n)) \quad (n \to \infty), \tag{11.2'}$$

где $L(r)$ — медленно изменяющаяся функция, определяемая из условия, что функции $\varphi_1(r) = r^\rho L_1(r)$ и $\varphi_2(r) = = r^{1/\rho}L(r)$ являются при достаточно больших r взаимно обратными, т. е. $\varphi_1(\varphi_2(r)) = \varphi_2(\varphi_1(r)) = r$ при $r > R$*). Эквивалентность соотношений (11.2) и (11.2′) легко проверить, если учесть, что положительная медленно изменяющаяся функция $L(r)$ при любом $a > 0$ удовлетворяет условию $L(ar)/L(r) \to 1$ при $r \to \infty$.

III) *Если целая функция $f(z)$ при некотором положительном $\varrho < 1$ (и $C > 0$) допускает оценку снизу*

$$|f(z)| \geqslant C \exp\left(-\left|\frac{r}{\sin\theta}\right|^\rho\right),$$

то

$$\ln|f(z)| = O(|z|) \textit{ при } z \to \infty \textit{ и } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|f(t)||}{1+t^2}\,dt < \infty,$$

и следовательно, для нулей $f(z)$, расположенных в неубывающую последовательность $\{a_j\}_{-\infty}^{\infty}$, существуют равные конечные пределы

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n} = \lim_{n\to-\infty} \frac{n}{a_n}.$$

Последнее заключение сделано на основании теоремы Картрайт—Левинсона (см. предложение Б) из § 8).

2. Нам понадобится также следующая элементарная лемма:

---

*) Существование при достаточно больших r обратной функции $\varphi_2(r)$ требуемого вида вытекает из следующих соображений. Если положить $\xi = \ln r$, $\eta = \ln \varphi_1(r)$, то условие $rL_1'(r)/L_1(r) \to 0$ при $r \to \infty$ эквивалентно условию $d\eta/d\xi \to \varrho$ при $\xi \to \infty$. В силу последнего $d\xi/d\eta \to 1/\varrho$ при $\eta \to \infty$, откуда уже вытекает существование обратной функции $\varphi_2(r)$ вида $r^{1/\rho}L(r)$.

Лемма 11.1. *Пусть* $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots$ — *последовательность положительных чисел такая, что* $\sum_j a_j < \infty$. *Обозначим*

$$\Pi(r) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + a_j r).$$

Тогда для любого p $(0 < p < 1)$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln \Pi(r)}{r^{p+1}} dr = \beta_p \sum_{j=1}^{\infty} a_j^p \; (\leqslant \infty), \tag{11.3}$$

где

$$\beta_p = \frac{1}{p} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^p (1+t)} = \frac{\pi}{p \sin p\pi}.$$

Если ряд, стоящий в (11.3), *имеет конечное значение, то*

$$\ln \Pi(r) = o(r^p) \quad \textit{при } r \to \infty.$$

Доказательство. В самом деле,

$$\frac{\Pi'(r)}{\Pi(r)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{1 + a_j r},$$

и следовательно, при любом p $(0 < p < 1)$:

$$\int_0^{\infty} \frac{d \ln \Pi(r)}{r^p} = \int_0^{\infty} \frac{\Pi'(r)}{r^p \Pi(r)} dr = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{a_j}{r^p (1 + a_j r)} dr = p\beta_p \sum_{j=1}^{\infty} a_j^p.$$

Так как

$$\int_0^R \frac{d \ln \Pi(r)}{r^p} = \frac{\ln \Pi(R)}{R^p} + p \int_0^R \frac{\ln \Pi(r)}{r^{p+1}} dr,$$

то при стремлении левой части при $R \to \infty$ к конечному пределу к конечным пределам будут стремиться оба слагаемых правой части, и следовательно, первое из них будет стремиться к нулю.

Таким образом, если ряд (11.3) имеет конечное значение, то

$$\int_0^\infty \frac{\ln \Pi(r)}{r^{p+1}}\,dr = p^{-1}\int_0^\infty \frac{d\ln \Pi(r)}{r^p} = \beta_p \sum_{j=1}^\infty a_j^p.$$

Так как в силу этого равенства при любом целом n:

$$\sum_{j=1}^n a_j^p = \frac{1}{\beta_p}\int_0^\infty \frac{\ln \Pi_n(r)}{r^{p+1}}\,dr \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\beta_p}\int_0^\infty \frac{\ln \Pi(r)}{r^{p+1}}\,dr \qquad \left(\Pi_n(r) = \prod_1^n (1+a_j r)\right),$$

то лемма доказана.

3. Пусть теперь $A = G + iH$ — произвольный вольтерров оператор с мнимой компонентой $H \in \mathfrak{S}_p$, где $1 \leqslant p < 2$.

Для любой Ф-регулярной точки μ оператора G введем в рассмотрение операторы

$$\Gamma(\mu) = (I - \mu G)^{-1}, \quad C(\mu) = (\Gamma(\mu) H)^2.$$

Так как

$$|C(\mu)|_1 \leqslant |C(\mu)|_{p/2} \leqslant |\Gamma(\mu) H|_p^2 \leqslant |\Gamma(\mu)|^2 |H|_p^2 < \infty,$$

то $C(\mu) \in \mathfrak{S}_1$ — голоморфная функция (со значениями в $\mathfrak{S}_1$) в области $\mathfrak{G}$ всех Ф-регулярных точек оператора G.

Следовательно, определитель

$$\Delta(\mu) = \det(I - \mu^2 C(\mu))$$

— голоморфная функция в области $\mathfrak{G}$.

Так как оператор $I - \mu^2 C(\mu)$ допускает разложение

$$I - \mu^2 C(\mu) = \Gamma(\mu)(I - \mu A)\Gamma(\mu)(I - \mu A^*) \quad (\mu \in \mathfrak{G}), \qquad (11.4)$$

то для любого $\mu \in \mathfrak{G}$ он имеет ограниченный обратный:

$$(I - \mu^2 C(\mu))^{-1} =$$
$$= (I - \mu A^*)^{-1}(I - \mu G)(I - \mu A)^{-1}(I - \mu G) \quad (\mu \in \mathfrak{G}),$$

а следовательно,

$$\Delta(\mu) \neq 0 \quad (\mu \in \mathfrak{G}).$$

Покажем теперь, что каждая точка $\mu_j=\lambda_j^{-1}(G)$ является полюсом определителя $\Delta(\mu)$ кратности $2k$, равной удвоенной кратности $\lambda_j(G)$ как собственного числа оператора G. Это можно проделать, отправляясь от той же идеи, которая легла в основу доказательства предложения 4° § 3.

Обозначим через $P_j\,(j=1,\ 2,\ \ldots)$ ортогональный проектор на собственное подпространство оператора G, отвечающее собственному числу $\lambda_j(G)$, а через G_j — оператор $(I-P_j)\,G\,(I-P_j)$. Как известно, $G=G_j+\mu_j^{-1}P_j$, и точка μ_j является Φ-регулярной точкой оператора G_j. Легко видеть, что

$$\Gamma(\mu)=(I-\mu G_j)^{-1}\left(I-\frac{\mu}{\mu_j}P_j\right)^{-1}=$$

$$=\left(I-\frac{\mu}{\mu_j}P_j\right)^{-1}(I-\mu G_j)^{-1}. \qquad (11.5)$$

Так как

$$\left(I-\frac{\mu}{\mu_j}P_j\right)^{-1}=I-\frac{\mu}{\mu-\mu_j}P_j\ (=M_j),$$

то

$$\det\left(I-\frac{\mu}{\mu_j}P_j\right)^{-1}=\det M_j=\frac{\mu_j^k}{(\mu_j-\mu)^k}\,.$$

Из (11.4) и (11.5) следует, что в достаточно малой окрестности $\mathfrak{B}_j$ точки $\mu_j\ (\mu\neq\mu_j)$

$$\Delta(\mu)=\det(M_jS_jM_jR_j),$$

где

$$S_j=(I-\mu G_j)^{-1}(I-\mu A) \qquad \text{и} \qquad R_j=(I-\mu G_j)^{-1}(I-\mu A^*).$$

Операторы $S_jM_jR_j-I$, M_j-I принадлежат $\mathfrak{S}_1$, следовательно, согласно предложению 7° § 1

$$\Delta(\mu)=\frac{\mu_j^k}{(\mu_j-\mu)^k}\det(S_jM_jR_j) \qquad (\mu\in\mathfrak{B}_j).$$

Оператор S_j имеет ограниченный обратный для всех $\mu\in\mathfrak{B}_j$, следовательно, согласно предложению 6° § 1

$$\det(S_jM_jR_j)=\det(S_j^{-1}S_jM_jR_jS_j)=\frac{\mu_j^k}{(\mu_j-\mu)^k}\det(R_jS_j).$$

Таким образом,

$$\Delta(\mu)=\frac{\mu_j^{2k}}{(\mu_j-\mu)^{2k}}\det(R_jS_j).$$

Так как операторы R_j и S_j имеют ограниченные обратные при $\mu=\mu_j$ и $R_jS_j-I\in\mathfrak{S}_1$, то

$$\det(R_jS_j)|_{\mu=\mu_j}\neq 0.$$

Следовательно, в точке $\mu=\mu_j$ определитель $\Delta(\mu)$ имеет полюс кратности $2k$.

Итак, нами показано, что функция

$$f(\mu)=\frac{1}{\Delta(\mu)} \tag{11.6}$$

является целой с нулями $\mu_j=\lambda_j(G)$ $(j=1, 2, \ldots)$.

В силу оценки (1.2) имеем

$$|\Delta(\mu)|\leqslant\prod_j(1+|\mu|^2 s_j(C(\mu))). \tag{11.7}$$

Учитывая, что согласно оценке (II.4.11)

$$\sum_{j=1}^{k} s_j(C(\mu))=\sum_{j=1}^{k} s_j[(\Gamma(\mu)H)^2]\leqslant\sum_{j=1}^{k} s_j^2(\Gamma(\mu)H)$$
$$(k=1, 2, \ldots),$$

получаем на основании следствия II.3.1

$$|\Delta(\mu)|\leqslant\prod_{j=1}^{\infty}(1+|\mu|^2 s_j^2(\Gamma(\mu)H)).$$

Так как $\mu\Gamma(\mu)=(\lambda I-G)^{-1}$ $(\lambda=\mu^{-1})$, а для самосопряженного оператора G:

$$|(\lambda I-G)^{-1}|\leqslant\frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|}\quad(\operatorname{Im}\lambda\neq 0),$$

то

$$s_j(\Gamma(\mu)H)\leqslant|\Gamma(\mu)|\,s_j(H)\leqslant\frac{|\mu|}{|\operatorname{Im}\mu|}s_j(H)\qquad(j=1, 2, \ldots).$$

Таким образом, в силу (11.7)

$$f(\mu) \geqslant 1/F\left(\frac{r}{|\sin\theta|}\right) \quad (\mu = re^{i\theta}), \tag{11.8}$$

где

$$F(r) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + s_j^2(H)\, r^2).$$

Согласно лемме 11.1

$$I_p = \int_0^{\infty} \frac{\ln F(r)}{r^{p+1}}\, dr = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\ln F(\sqrt{r})}{r^{p/2+1}}\, dr = \frac{\beta_{p/2}}{2} \sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(H) < \infty,$$

а поэтому согласно предложению I)

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\mu_j(G)|^p} = \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j(G)|^p \leqslant C_p \frac{\beta_{p/2}}{2} |H|_p^p.$$

Тем самым для значений $p > 1$ и < 2 получена следующая

Теорема 11.1 (В. И. Мацаев [3]). *Пусть A — вольтерров оператор. Если его мнимая компонента $A_{\mathcal{J}}$ принадлежит $\mathfrak{S}_p$ $(1 < p < \infty)$, то и его вещественная компонента $A_{\mathcal{R}}$ принадлежит $\mathfrak{S}_p$ и, более того,*

$$|A_{\mathcal{R}}|_p \leqslant \gamma_p |A_{\mathcal{J}}|_p, \tag{11.9}$$

где γ_p — константа, зависящая только от p.

Для $p = 2$ эта теорема была впервые доказана Л. А. Сахновичем [2] с тем уточнением, что $|A_{\mathcal{R}}|_2 = |A_{\mathcal{J}}|_2$. Простое доказательство теоремы Сахновича было дано авторами [2]. Из результатов авторов [4] также следовало, что теорему достаточно доказать для одного из двух полуоткрытых интервалов $(1, 2]$ или $[2, \infty)$ и что точная константа γ_p в оценке (11.9) как функция от $1/p$ обладает свойством логарифмической выпуклости и свойством симметрии $\gamma_p = \gamma_q$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$.

В сообщении авторов [4] можно найти доказательство этой теоремы для всех $p > 1$, не требующее применения новых или сильных средств теории функций, а также вывод простой оценки для γ_p: $\gamma_p \leqslant (e^{2/3} \ln 2)^{-1} p \quad (p \geqslant 2)$.

Подробное изложение этих результатов будет дано в книге авторов [7]. Здесь оно не приводится, так как оно опирается на теорию абстрактного треугольного интеграла.

4. Имеет место также следующая

Теорема 11.2 (В. И. Мацаев [3], И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн [4]). *Пусть A — вольтерров оператор. Тогда если*

$$s_n(A_{\mathcal{J}}) = O(n^{-1/p} L(n)) \qquad (n \to \infty), \tag{11.10}$$

где $1 < p < \infty$, а $L(r)$ — медленно изменяющаяся функция, то также

$$s_n(A_{\mathcal{R}}) = O(n^{-1/p} L(n)) \qquad (n \to \infty). \tag{11.11}$$

Теорема сохраняет силу, если в соотношениях (11.10) и (11.11) заменить O на o.

Для значений p из интервала $1 < p < 2$ эту теорему доказал В. И. Мацаев [3]. Метод авторов [4], опирающийся на теорию абстрактного треугольного интеграла, позволил показать, что теорема 11.2 справедлива для всех $p\,(1 < p < \infty)$, коль скоро доказана справедливость первого утверждения теоремы для значений p из интервала $1 < p < 2$.

Нам придется ограничиться изложением доказательства первого утверждения теоремы для случая $1 < p < 2$.

Доказательство. В самом деле, если для $H = A_{\mathcal{J}}$ выполняется условие (11.10), то $H \in \mathfrak{S}_q$ при $q > p$. Так как возможен выбор q такого, что $p < q < 2$, то целые функции $f(\mu)$ и $F(r)$ имеют смысл и выполняется соотношение (11.8). По теореме Линделефа — Валирона (см. п. 1) для функции $F(r)$ будем иметь:

$$\ln F(r) = O(r^{1/p} L_1(r)) \qquad (r \to \infty),$$

где $L_1(r)$ — некоторая медленно изменяющаяся функция, известным образом связанная с функцией $L(r)$.

Тогда в силу (11.8) при некотором $C > 0$

$$\ln \frac{1}{|f(\mu)|} \leqslant C \left(\frac{r}{|\sin\theta|} \right)^{1/p} L_1 \left(\frac{r}{|\sin\theta|} \right) \qquad (\mu = re^{i\theta}),$$

а следовательно, согласно предложению II) также

$$|f(\mu)| = O(r^{\rho} L_1(r)) \qquad (r \to \infty).$$

Отсюда на основании той же теоремы Линделефа—Валирона получаем

$$|\lambda_n(G)| = O(n^{-1/\rho} L(n)) \qquad (n \to \infty;\ G = A_{\mathfrak{R}}).$$

Теорема доказана.

5. В теореме 11.1 существенно, что $p > 1$. В самом деле, если у вольтеррова диссипативного оператора A мнимая компонента $A_{\mathfrak{J}}$ принадлежит некоторому $\mathfrak{S}_p$ при некотором $p < 1$ (или даже если компонента $A_{\mathfrak{J}}$ конечномерна и, следовательно, принадлежит классу $\mathfrak{S}_p$ при любом сколь угодно малом $p > 0$), вещественная компонента $A_{\mathfrak{R}}$ по теореме 7.2 не будет принадлежать даже классу $\mathfrak{S}_1$. Однако если к условию $A_{\mathfrak{J}} \in \mathfrak{S}_p \left(\frac{1}{2} < p < 1\right)$ добавить условие $A_{\mathfrak{R}}^{+} \in \mathfrak{S}_p$ или $A_{\mathfrak{R}}^{-} \in \mathfrak{S}_p$ ($A_{\mathfrak{R}}^{+}$ и $A_{\mathfrak{R}}^{-}$ — ортогональные друг к другу неотрицательные операторы из разложения: $A_{\mathfrak{R}} = A_{\mathfrak{R}}^{+} - A_{\mathfrak{R}}^{-}$), то отсюда уже будет следовать, что и весь вольтерров оператор $A \in \mathfrak{S}_p$. Этот результат нам удобно будет сформулировать в следующем виде.

Теорема 11.3 (В. И. Мацаев [3]). *Если вольтерров оператор A представим в виде*:

$$A = C + T,$$

где $T \in \mathfrak{S}_p \left(\frac{1}{2} < p < 1\right)$, а C — неотрицательный оператор, то $A \in \mathfrak{S}_p$, а значит, и $C \in \mathfrak{S}_p$ и более того:

$$|C|_p \leqslant \varkappa_p |T|_p, \tag{11.12}$$

где $\varkappa_p$ — константа, зависящая только от p.

Теорема справедлива также и для $p = 1$ с тем уточнением, что в этом случае $\varkappa_p = 1$, и, кроме, того, $\operatorname{sp} C \leqslant \operatorname{sp} T_{\mathfrak{R}}^{-}$. Этот результат отмечался в замечании IV.8.2.

Доказательство. Рассмотрим определитель возмущения $D_{A/C}(\mu)$. Заменяя в нем μ на μ^2, получаем

$$D_{A/C}(\mu^2) = \det(I + N(\mu)),$$

где

$$N(\mu) = -\mu^2 T(I-\mu^2 C)^{-1} = \\ = -T\left(\frac{1}{\mu} I - C^{1/2}\right)^{-1}\left(\frac{1}{\mu} I + C^{1/2}\right)^{-1}. \quad (11.13)$$

Через $C^{1/2}$ мы обозначаем *неотрицательный* оператор, квадрат которого дает оператор C. Впрочем, для нас существенно лишь то, что $C^{1/2}$ — самосопряженный оператор, в силу чего

$$\left|\left(\frac{1}{\mu} I \pm C^{1/2}\right)^{-1}\right| \leqslant \frac{1}{|\operatorname{Im}(1/\mu)|} = \frac{|\mu|^2}{|\operatorname{Im}\mu|} = \\ = \frac{r}{\sin\theta} \quad (\mu = re^{i\theta}). \quad (11.14)$$

Согласно оценке (11.2):

$$|D_{A/C}(\mu^2)| \leqslant \prod_{j=1}^{\infty}(1+s_j(N(\mu))).$$

С другой стороны, согласно (11.13) и (11.14):

$$s_j(N(\mu)) \leqslant \frac{r^2}{\sin^2\theta} s_j(T) \qquad (j=1, 2, \ldots),$$

так что

$$\frac{1}{|D_{C/A}(\mu^2)|} = |D_{A/C}(\mu^2)| \leqslant F\left(\frac{r}{|\sin\theta|}\right), \quad (11.15)$$

где

$$F(r) = \prod_{j=1}^{\infty}(1+r^2 s_j(T)). \quad (11.16)$$

Согласно лемме 11.1 получаем:

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln F(r)}{r^{2p+1}}\,dr = \int_0^{\infty} \frac{\ln F(\sqrt{r})}{r^{p+1}}\,dr = \beta_p \sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(T) = \beta_p |T|_p^p < \infty.$$

Следовательно, к целой функции $f(\mu) = D_{C/A}(\mu^2) = \det[(I-\mu^2 C)(I-\mu^2 A)^{-1}]$ применима теорема I) (с заменой в обозначениях p на $2p$). Так как нулями функции $f(\mu)$ являются числа $\alpha_{\pm j} = \pm\lambda_j^{-\frac{1}{2}}(C)$ $(j=1, 2, \ldots)$, то по теореме I) получаем:

$$|C|_p^p = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^p(C) \leqslant \frac{1}{2} C_p \beta_p |T|_p^p.$$

Теорема доказана. Из нее вытекает следствие:

Следствие 11.1. *Пусть $A = A_{\mathcal{R}} + iA_{\mathcal{J}}$ — некоторый вольтерров оператор с конечномерной мнимой компонентой $A_{\mathcal{J}}$, а $\{\lambda_j\}$ — полная система собственных чисел его вещественной компоненты $A_{\mathcal{R}}$. Тогда для любого p из интервала $\frac{1}{2} < p < 1$ оба ряда*

$$\sum_{\lambda_j < 0} |\lambda_j|^p, \qquad \sum_{\lambda_j > 0} \lambda_j^p$$

одновременно сходятся или расходятся.

Для получения этого следствия следует воспользоваться теоремой 11.3 в применении к $C = A_{\mathcal{R}}^+$ и $T = -A_{\mathcal{R}}^- + iA_{\mathcal{J}}$ или $C = A_{\mathcal{R}}^-$ и $T = -A_{\mathcal{R}}^+ + iA_{\mathcal{J}}$, где $A_{\mathcal{R}}^+$ и $A_{\mathcal{R}}^-$ — ортогональные неотрицательные операторы из разложения $A_{\mathcal{R}} = A_{\mathcal{R}}^+ - A_{\mathcal{R}}^-$.

Сравнение следствия 11.1 с теоремой 10.1 показывает, что это следствие, а значит, и, вообще, теорема 11.3 перестают быть верными при $p \leqslant 1/2$.

6. Применение теоремы II) вместо теоремы I) к функции $f(\mu) = D_{C/A}(\mu^2)$ позволяет получить предложение:

Теорема 11.4 (В. И. Мацаев [3]). *Если в представлении $A = C + T$ вольтеррова оператора A оператор C неотрицателен, а оператор T $(\in \mathfrak{S}_\infty)$ таков, что для некоторого p $\left(\frac{1}{2} < p < 1\right)$ и медленно изменяющейся функции $L(r)$*

$$s_n(T) = O(n^{-1/p} L(n)) \qquad (n \to \infty), \tag{11.17}$$

то и

$$\lambda_n(C) = O(n^{-1/p} L(n)) \qquad (n \to \infty). \tag{11.18}$$

Доказательство. В самом деле, если выполняется условие (11.17), то $T \in \mathfrak{S}_1$ и, следовательно, имеет смысл целая функция $f(\mu) = D_{C/A}(\mu^2)$, а также оценка (11.15), где $F(r)$ определена равенством (11.16). На основании (11.17) по теореме Линделефа — Валирона (см. п. 1) будем иметь:

$$\ln F(r) = O(r^{2p} L_1(r)),$$

где $L_1(r)$ — некоторая положительная медленно изменяющаяся функция. Поэтому в силу (11.15):

$$\ln \frac{1}{|f(\mu)|} \leqslant C\left(\frac{r}{|\sin\theta|}\right)^{2p} L_1\left(\frac{r}{|\sin\theta|}\right) \qquad (\mu = re^{i\theta}),$$

что в свою очередь в силу теоремы II) дает оценку

$$\ln |f(\mu)| = O(r^{2/p} L_1(r)) \qquad (r = |\mu| \to \infty).$$

Вспоминая, что единственными нулями функции $f(\mu)$ являются числа $\pm\lambda_n^{-1/2}(H)$, заключаем на основании той же теоремы Линделефа — Валирона, что имеет место (11.18).

Следствие 11.2. *Пусть A $(\in \mathfrak{S}_\infty)$ — некоторый вольтерров оператор с конечномерной мнимой компонентой и пусть $\lambda_1^+ \geqslant \lambda_2^+ \geqslant \ldots$ и $\lambda_1^- \leqslant \lambda_2^- \leqslant \ldots$ — полные системы соответственно положительных и отрицательных собственных чисел вещественной компоненты $A_{\mathfrak{R}}$. Тогда при любом $p\left(\frac{1}{2} < p < 1\right)$ и любой медленно изменяющейся функции $L(r)$ соотношение*

$$\lambda_n^- = O(n^{-1/p} L(n)) \qquad (n \to \infty) \tag{11.19}$$

влечет соотношение

$$\lambda_n^+ = O(n^{-1/p} L(n)) \qquad (n \to \infty). \tag{11.20}$$

Действительно, если $A_{\mathcal{J}}$ — r-мерный оператор, то для s-чисел $A_{\mathfrak{R}}^-$ и $T = A_{\mathfrak{R}} + iA_{\mathcal{J}}$ согласно следствию II.2.1 будем иметь:

$$s_{n-r}(T) \leqslant s_n(A_{\mathfrak{R}}^-) = |\lambda_n^-(A_{\mathfrak{R}}^-)| \leqslant s_{n+r}(T) \qquad (n = r, r+1, \ldots),$$

в силу чего из соотношения (11.19) будет следовать (11.17)*).

---

*) Мы пользуемся здесь легко доказываемым свойством медленно изменяющейся функции, выражающимся в том, что при любом $l\,(>0)$ отношение $L(r+l)/L(r) \to 1$ при $r \to \infty$.

Таким образом, к оператору $A = C + T$ $(C = A^{+}_{\mathfrak{R}})$ применима теорема 11.4, которая и дает (11.20).

Теорема 11.5 (В. И. Мацаев [3]). *Если в представлении $A = C + T$ вольтеррова оператора A оператор C неотрицателен, а оператор T принадлежит $\mathfrak{S}_p$ при некотором $p < 1/2$, то существует конечный предел* $\lim\limits_{n \to \infty} n^2 \lambda_n (C)$.

Доказательство. В самом деле, если $T \in \mathfrak{S}_p$ $(0 < p < 1/2)$, то согласно лемме 11.1

$$\ln F(r) = \ln \prod_{j=1}^{\infty} (1 + r^2 s_j(T)) = o(r^{2p}) \qquad (r \to \infty).$$

Следовательно, для целой функции $f(\mu) = D_{C/A}(\mu^2)$ согласно оценке (11.15) будем иметь:

$$|f(\mu)| \geqslant C \exp\left(-\left|\frac{r}{\sin\theta}\right|^{2p}\right) \qquad (\mu = re^{i\theta}).$$

Таким образом, к функции $f(\mu)$ применимо предложение III), откуда и получается заключение теоремы 11.5.

Сопоставление теорем 10.1 и 11.5 делает естественным следующее предположение, высказанное М. Г. Крейном и В. И. Мацаевым:

Если вольтерров оператор A допускает представление $A = C + T$, где оператор C неотрицателен, а $T \in \mathfrak{S}_{1/2}$, то существует конечный предел $\lim\limits_{n \to \infty} n^2 \lambda_n (C)$.

ГЛАВА V

ТЕОРЕМЫ О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ

В этой главе излагается ряд признаков полноты системы корневых векторов вполне непрерывного несамосопряженного оператора.

При их выборе авторы руководствовались желанием, с одной стороны, собрать достаточно оригинальные и сильные признаки и, с другой стороны, по возможности полней представить различные методы установления таких признаков.

Грубо эти методы можно разбить на три группы: 1) методы, опирающиеся на изучение поведения и роста резольвенты оператора; 2) методы, связанные с идеей треугольного представления оператора, и 3) методы, основанные на аналитическом аппарате теории определителей возмущения.

Особо интересные признаки получаются, когда вступают во взаимодействие методы из различных групп.

В приложениях приходится встречаться с вопросом о n-кратной полноте системы собственных и присоединенных векторов полиномиальных операторных пучков. Этому вопросу посвящен специальный параграф.

В параграфе 11 дается представление о том, как из признаков полноты для вполне непрерывных операторов могут быть получены признаки полноты системы корневых векторов для неограниченных операторов.

В предпоследнем параграфе излагаются теоремы об асимптотике собственных чисел несамосопряженных операторов. Последний параграф посвящен исследованиям по теории самосопряженных квадратичных пучков; в нем используются результаты почти всех предыдущих параграфов.

В этой главе, по-видимому, впервые получили достаточно развернутое изложение фундаментальные результаты М. В. Келдыша [1] по теории несамосопряженных операторов.

§ 1. Леммы о диссипативных операторах

1. Напомним еще раз, что ограниченный оператор A называется *диссипативным*, если его мнимая компонента $A_{\mathcal{J}}=(A-A^*)/2i$ является неотрицательным оператором.

Обобщая определение простого вольтеррова оператора, данное в п. 2, § 7, гл. IV, условимся называть ограниченный оператор $A \in \mathfrak{R}$ *простым*, если A и A^* не имеют общего инвариантного подпространства, на котором бы они совпадали.

Если $A\,(\in \mathfrak{R})$ — непростой оператор, то, очевидно, найдется *максимальное* подпространство $\mathfrak{L}_T=\mathfrak{L}_T(A)$, инвариантное относительно A и A^*, на котором оба эти оператора совпадают.

Подпространство $\mathfrak{L}_T$ будем называть *тривиальным* подпространством несамосопряженного оператора A.

Если $A=A^*$, то, очевидно, $\mathfrak{L}_T(A)=\mathfrak{H}$. Если A — простой оператор, то полагаем $\mathfrak{L}_T(A)=\{0\}$.

В общем случае, как легко видеть, пространство $\mathfrak{L}_T(A)$ состоит из тех и только тех векторов $f \in \mathfrak{H}$, для которых

$$A^n f=(A^*)^n f \qquad (n=1,\,2,\,\ldots). \tag{1.1}$$

Из определения тривиального подпространства явствует, что оно одно и то же для A и A^*:

$$\mathfrak{L}_T(A)=\mathfrak{L}_T(A^*).$$

Очевидно, что операторы A и A^* могут быть простыми или непростыми только одновременно.

Имеет место предложение.

1°. *Всякому непростому оператору $A \in \mathfrak{R}$ отвечает единственное разложение $\mathfrak{H}$ в ортогональную сумму двух инвариантных относительно A и A^* подпространств*

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2, \tag{1.2}$$

обладающее следующими свойствами: 1) операторы A и A^* совпадают на $\mathfrak{H}_1$ и 2) оператор A индуцирует в $\mathfrak{H}_2$ простой оператор.

В этом разложении $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{L}_T(A)$.

Действительно, $\mathfrak{L}_T = \mathfrak{L}_T(A)$ содержится в подпространстве $\mathfrak{Z}_{A_{\mathcal{J}}}$ всех нулей оператора $A_{\mathcal{J}}$ (мнимой компоненты A). Поэтому на $\mathfrak{L}_T$ вещественная компонента $A_{\mathcal{R}} = A$ и, стало быть, $\mathfrak{L}_T$ инвариантно и относительно $A_{\mathcal{R}}$.

Поскольку операторы $A_{\mathcal{R}}$ и $A_{\mathcal{J}}$ — самосопряженные, ортогональное дополнение $\mathfrak{L}_T^{\perp}$ также инвариантно относительно этих операторов, а значит, и относительно операторов A и A^*. Очевидно, в $\mathfrak{L}_T^{\perp}$ отсутствуют векторы $f \neq 0$, для которых выполняется условие (1.1). Таким образом, A индуцирует в $\mathfrak{L}_T^{\perp}$ простой оператор, и разложение

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{L}_T \oplus \mathfrak{L}_T^{\perp}$$

обладает всеми свойствами, о которых идет речь в 1°.

Предоставляем читателю убедиться в единственности разложения (1.2) с указанными свойствами.

2. Для диссипативного оператора A тривиальное подпространство имеет еще следующую характеристику.

2°. *Тривиальное подпространство $\mathfrak{L}_T(A)$ диссипативного оператора совпадает с максимальным инвариантным подпространством оператора A, в котором A индуцирует самосопряженный оператор**).

В самом деле, на $\mathfrak{L}_T(A)$ операторы A и A^* совпадают, так что A индуцирует в $\mathfrak{L}_T$ самосопряженный оператор.

Рассмотрим теперь какое-либо инвариантное подпространство $\mathfrak{L}_1$ оператора A, в котором A индуцирует самосопряженный оператор. Для $f \in \mathfrak{L}_1$

$$(A_{\mathcal{J}} f, f) = \operatorname{Im}(Af, f) = 0,$$

---

*) Предложения 1° и 2° допускают обобщение на неограниченные максимальные диссипативные операторы (см. Г. Лангер [1] и Б. С.-Надь и Ч. Фояш [1—4]).

а следовательно, оператор $A_{\mathcal{Y}}$, будучи неотрицательным, тождественно равен нулю на $\mathfrak{L}_1$. Таким образом, $Af = A^*f$ для $f \in \mathfrak{L}_1$ и, стало быть, $\mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{L}_T$, что и требовалось доказать. ☐

В качестве простого следствия предложения 2° получается

3°. *Тривиальное подпространство вполне непрерывного диссипативного оператора совпадает с линейной замкнутой оболочкой всех собственных векторов оператора, соответствующих вещественным собственным числам (включая число $\lambda = 0$, если оно является собственным).*

Из предложения 3°, в свою очередь, следует:

4°. *Вполне непрерывный простой диссипативный оператор индуцирует в любом своем инвариантном подпространстве оператор того же типа (вполне непрерывный простой и диссипативный).*

Для диссипативных операторов лемма I.4.2 допускает уточнение.

Лемма 1.1. *Пусть A — линейный диссипативный вполне непрерывный оператор, а $\mathfrak{E}$ — линейная замкнутая оболочка всех его корневых векторов. Если подпространство $\mathfrak{E}^{\perp} = \mathfrak{H}_0$ состоит не только из одного нуль-элемента, то оператор P_0AP_0 является в нем простым диссипативным вольтерровым оператором.*

Через P_0 обозначен проектор, ортогонально проектирующий $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_0$.

Доказательство. Если мы перейдем от рассмотрения диссипативного оператора $A \in \mathfrak{S}_\infty$ к рассмотрению простого диссипативного оператора $\hat{A}$, индуцируемого A в $\mathfrak{L}_{\Pi} = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{L}_T(A)$, то от этого, в силу предложений 2°, 3°, пространство $\mathfrak{H}_0$ не изменится и не изменится также оператор $A_1 = P_0AP_0$ $(= P_0\hat{A}P_0)$. Поэтому без ограничения общности можно сразу предположить, что A — простой диссипативный оператор.

Тогда, вспоминая обозначения § 4 главы I, будем иметь $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_A$, $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{M}$, $P_0 = Q_A$, и можно будет на основании леммы I.4.2 утверждать, что оператор $A_1 = Q_AAQ_A$ является вольтерровым. Сопряженный оператор A_1^* совпадает на $\mathfrak{H}_0$ с оператором, индуцируемым в $\mathfrak{H}_0$ оператором A^*.

Так как по предположению оператор $A \in \mathfrak{S}_\infty$ простой диссипативный, то таковым является и оператор A^*, а значит, и операторы A_1^* и A_1, рассматриваемые в $\mathfrak{H}_0$. Лемма доказана.

3. Свойство $(\mathscr{C})$, присущее некоторым линейным ограниченным операторам, назовем *инвариантным* относительно ортогонального проектирования, если из того, что некоторый оператор A обладает свойством $(\mathscr{C})$, следует, что им обладает и оператор PAP, где P — любой ортопроектор.

Так, например, таким свойством, инвариантным относительно ортогонального проектирования, является свойство диссипативности.

Лемма 1.2. *Пусть $(\mathscr{K})$ — некоторый комплекс свойств, инвариантных относительно операции ортогонального проектирования и присущих некоторым вполне непрерывным диссипативным операторам. Тогда имеет место одно из двух:*

1) *либо всякий вполне непрерывный диссипативный оператор, обладающий комплексом свойств $(\mathscr{K})$, обладает системой корневых векторов, полной в $\mathfrak{H}$,*

2) *либо существует по крайней мере один простой диссипативный вольтерров оператор, обладающий комплексом свойств $(\mathscr{K})$.*

Доказательство. В самом деле, пусть не выполняется 1), т. е. существует некоторый вполне непрерывный диссипативный оператор A, обладающий комплексом свойств $(\mathscr{K})$, у которого линейная замкнутая оболочка $\mathfrak{E}$ всех корневых векторов составляет правильную часть $\mathfrak{H}$. Положим $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{E}^\perp$ и обозначим через P_0 проектор, ортогонально проектирующий пространство $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_0$. Согласно лемме 1.1 оператор P_0AP_0 является простым диссипативным вольтерровым оператором и вместе с оператором A он обладает всем комплексом свойств $(\mathscr{K})$.

Итак, если 1) не выполняется, то выполняется 2). С другой стороны, очевидно, что если 2) выполняется, то 1) уже не может иметь места.

Лемма доказана.

Эта лемма допускает определенное обобщение и на случай недиссипативных операторов (ср. В. Б. Лидский [5], § 1).

§ 2. Критерий полноты системы корневых векторов диссипативных операторов с ядерной мнимой компонентой

1. Имеет место следующее общее предложение.

Теорема 2.1 (М. С. Лившиц [2]). *Пусть A — простой диссипативный или вполне непрерывный диссипативный оператор, причем* $\operatorname{sp} A_{\mathcal{J}} < \infty$.

Для того чтобы система корневых векторов оператора A была полной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{j=1}^{\nu(A)} \operatorname{Im} \lambda_j(A) = \operatorname{sp} A_{\mathcal{J}}. \tag{2.1}$$

Доказательство. В самом деле, пусть A ($A_{\mathcal{J}} \in \mathfrak{S}_1$) — оператор с полной системой корневых векторов*). Приемом, описанным при доказательстве леммы I.4.1, образуем из линейных комбинаций этих корневых векторов ортонормированный базис $\{\omega_j\}_1^\infty$ Шура пространства $\mathfrak{H}$. В этом базисе оператор A приводится к треугольному виду. Тогда

$$(A\omega_j, \omega_j) = \lambda_j(A) \quad \text{и} \quad (A_{\mathcal{J}}\omega_j, \omega_j) = \operatorname{Im} \lambda_j(A)$$

и, стало быть,

$$\operatorname{sp} A_{\mathcal{J}} = \sum_{j=1}^{\infty} (A_{\mathcal{J}}\omega_j, \omega_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{Im} \lambda_j(A).$$

Обратно, пусть выполняется (2.1). Рассмотрим линейную замкнутую оболочку $\mathfrak{E}_0$ всех корневых векторов оператора A, соответствующих его невещественным собственным числам. Обозначим через $\hat{A}$ диссипативный оператор, индуцируемый оператором A в $\mathfrak{E}_0$. Образуем, согласно только что доказанному, базис Шура $\{\omega_j\}$ пространства $\mathfrak{E}_0$ такой, что:

$$\sum_j (\hat{A}_{\mathcal{J}}\omega_j, \omega_j) = \sum_j \operatorname{Im} \lambda_j(\hat{A}) \left(= \sum_j \operatorname{Im} \lambda_j(A)\right).$$

---

*) При доказательстве необходимости условия (2.1) не используются диссипативность и полная непрерывность оператора A.

Так как

$$\sum_j (\hat{A}_{\mathcal{J}}\omega_j, \omega_j) = \sum_j \operatorname{Im}(\hat{A}\omega_j, \omega_j) = \\ = \sum_j \operatorname{Im}(A\omega_j, \omega_j) = \sum_j (A_{\mathcal{J}}\omega_j, \omega_j),$$

то, в силу (2.1),

$$\sum_j (A_{\mathcal{J}}\omega_j, \omega_j) = \operatorname{sp} A_{\mathcal{J}}.$$

Учитывая неотрицательность оператора $A_{\mathcal{J}}$, заключаем из последнего равентсва, что оператор $A_{\mathcal{J}}$ обращается в тождественный нуль на подпространстве $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{E}_0$. Таким образом, на подпространстве $\mathfrak{H}_0$ оператор $A = A_{\mathcal{R}} = A^*$, и следовательно, самосопряжен. Поэтому если A — простой оператор, то $\mathfrak{H}_0$ состоит только из нуля; если же оператор A вполне непрерывен, то у него имеется в $\mathfrak{H}_0$ полная система собственных векторов. Таким образом, в обоих случаях теорема доказана.

Свою теорему М. С. Лившиц получил как следствие довольно сложных построений, связанных с найденной им треугольной моделью линейных ограниченных операторов A с компонентой $A_{\mathcal{J}} \in \mathfrak{S}_1$.

Приведенное элементарное доказательство теоремы М. С. Лившица, примыкающее по идее к доказательству И. Шура его неравенства (см. теорему 6.1), принадлежит Б. Р. Мукминову [1]*).

В применении к интегральным операторам Фредгольма теорема дает следующее предложение.

1°. *Пусть* $\mathcal{A}(t, s)$ $(a \leqslant t,\ s \leqslant b)$ — *ядро Гильберта — Шмидта, для которого ядро*

$$\mathcal{A}_{\mathcal{J}}(t, s) = (\mathcal{A}(t, s) - \overline{\mathcal{A}(s, t)})/2i$$

— *эрмитово-неотрицательно и удовлетворяет условию*

$$S = \varlimsup_{h \to 0} \frac{1}{4h^2} \int_a^b \int_a^b [2h - |t-s|]_+ \mathcal{A}_{\mathcal{J}}(t, s)\, ds < \infty. \qquad (2.2)$$

*) Оно позволяет также обобщить теорему М. С. Лившица, на неограниченные операторы (см. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн [1]).

Тогда для того чтобы система корневых векторов оператора

$$(Af)(t) = \int_a^b \mathcal{A}(t, s) f(s)\, ds$$

была полна в $L_2(a, b)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\sum_j \operatorname{Im} \lambda_j(A) = S.$$

Это предложение, очевидно, следует из теорем III.10.1 и 2.1. Условие 2.2 всегда выполняется, если $\mathcal{A}_{\mathcal{J}}(t, s)$ — ограниченное ядро *).

Напомним еще, что если верхний предел (2.2) конечен, то существует обычный предел, который с ним совпадает (см. стр. 149).

Если ядро $\mathcal{A}(t, s)$ непрерывно, то

$$S = \int_a^b \mathcal{A}_{\mathcal{J}}(t, t)\, dt.$$

2. Условимся говорить, что оператор A распадается в *ортогонально-прямую сумму* (соответственно *разность*) операторов A_1 и A_2, и писать:

$$A = A_1 \oplus A_2 \quad (A = A_1 \ominus A_2),$$

если пространство $\mathfrak{H}$ распадается в ортогональную сумму двух инвариантных относительно A подпространств

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$$

таких, что оператор A индуцирует в $\mathfrak{H}_1$ оператор A_1, а в $\mathfrak{H}_2$ — оператор A_2 $(-A_2)$.

---

*) Для случая ограниченного ядра $\mathcal{A}(t, s)$ соответствующее предложение было сформулировано в статье М. С. Лившица [2], в которой величина S определялась равенством $S = \int_a^b \mathcal{A}_{\mathcal{J}}(t, t)\, dt$, в котором правая часть в случае разрывного ядра $\mathcal{A}(t, s)$ вообще говоря, не имеет отношения к следу оператора $A_{\mathcal{J}}$. Этот недосмотр перешел в другие работы (М. С. Бродский и М. С. Лившиц [1], Б. Р. Мукминов [1]).

В § 1 п. 2 было показано, что всякий ограниченный диссипативный оператор распадается в ортогонально-прямую сумму самосопряженного оператора и простого диссипативного.

Теорема М. С. Лившица допускает следующее обобщение.

Теорема 2.2. *Пусть A — простой или вполне непрерывный оператор и пусть компонента $A_{\mathcal{J}} \in \mathfrak{S}_1$. Для того чтобы оператор A удовлетворял условию*

$$\sum_{j=1}^{\nu(A)} |\operatorname{Im} \lambda_j(A)| = |A_{\mathcal{J}}|_1 \left(= \sum_j |\lambda_j(A_{\mathcal{J}})|\right), \tag{2.3}$$

необходимо и достаточно, чтобы

а) *он имел полную систему корневых векторов и* б) *распадался в ортогонально-прямую разность двух диссипативных операторов.*

Доказательство. Докажем сначала достаточность условий а) и б). Обозначим через A_1 и A_2 диссипативные операторы, в прямую разность которых распадается $A: A = A_1 \ominus A_2$. Если оператор A обладает свойством а), то этим свойством обладают и операторы A_1 и A_2. Стало быть, в силу теоремы 2.1

$$\sum_j \operatorname{Im} \lambda_j(A_k) = \operatorname{sp}(A_k)_{\mathcal{J}} = |(A_k)_{\mathcal{J}}|_1 \qquad (k = 1, 2). \tag{2.4}$$

Полная система собственных значений оператора A состоит из объединения последовательностей

$$\{\lambda_j(A_1)\} \quad \text{и} \quad \{-\lambda_j(A_2)\},$$

и, кроме того,

$$|A_{\mathcal{J}}|_1 = |(A_1)_{\mathcal{J}}|_1 + |(A_2)_{\mathcal{J}}|_1.$$

В силу (2.4) отсюда следует, что для оператора A выполняется (2.3).

Обратно, пусть для оператора A выполняется (2.3). Образуем линейную замкнутую оболочку $\mathfrak{E}_A$ всех корневых векторов оператора A, соответствующих ненулевым собственным числам. Пусть $\{\omega_j\}$ — базис $\mathfrak{E}_A$, существование которого утверждается в лемме I.4.1. Тогда из равенства

$$(A_{\mathcal{J}}\omega_j, \omega_j) = \operatorname{Im} \lambda_j(A) \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

следует, что

$$\sum_j |(A_{\mathcal{J}}\omega_j, \omega_j)| = |A_{\mathcal{J}}|_1.$$

В силу теоремы III.8.6 последнее означает, что оператор $UA_{\mathcal{J}}$ неотрицателен и обращается в нуль на подпространстве $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{E}_A^{\perp}$, где U — унитарный оператор, для которого $Uf = f$ при $f \in \mathfrak{E}_A$ и

$$U\omega_j = \varepsilon_j \omega_j,$$

где

$$\begin{aligned} &\varepsilon_j = \operatorname{sign} \operatorname{Im} \lambda_j(A) \quad &\text{при} \quad \operatorname{Im} \lambda_j(A) \neq 0, \\ &\varepsilon_j = 1 \quad &\text{при} \quad \operatorname{Im} \lambda_j(A) = 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что каждое из подпространств $\mathfrak{H}_0$ и $\mathfrak{E}_A$ является инвариантным относительно операторов $A_{\mathcal{J}}$, $A_{\mathcal{R}}$, A и A^*. Так как $A_{\mathcal{J}}\mathfrak{H}_0 = 0$, то на подпространстве $\mathfrak{H}_0$ оператор A самосопряжен. Кроме того, согласно лемме I.4.2 в этом подпространстве оператор A не имеет собственных чисел, отличных от нуля. Следовательно,

$$A\mathfrak{H}_0 = A_{\mathcal{R}}\mathfrak{H}_0 = 0.$$

Из сказанного следует, в частности, что оператор A имеет полную систему корневых векторов. Будем теперь рассматривать операторы U, A, $A_{\mathcal{R}}$, $A_{\mathcal{J}}$ как операторы, действующие в $\mathfrak{E}_A$.

Из самосопряженности оператора $UA_{\mathcal{J}}$ следует, что операторы U и $A_{\mathcal{J}}$ перестановочны.

В базисе $\{\omega_j\}$ оператору A отвечает треугольная матрица:

$$\| (A\omega_k, \omega_j) \|_{j,\,k} = \| a_{jk} \|_{j,\,k} \qquad (a_{jk} = 0 \text{ при } j > k).$$

В том же базисе оператору $A_{\mathcal{J}}$ соответствует матрица $\| h_{jk} \|$ с элементами

$$h_{jk} = a_{jk}/2i \text{ при } j < k \text{ и } h_{jk} = -\bar{a}_{kj}/2i \text{ при } j > k. \tag{2.5}$$

Так как операторам $UA_{\mathcal{J}}$ и $A_{\mathcal{J}}U$ в рассматриваемом базисе отвечают соответственно матрицы $\| \varepsilon_j h_{jk} \|$ и $\| h_{jk}\varepsilon_k \|$, то перестановочность операторов U и $A_{\mathcal{J}}$ эквивалентна равенствам:

$$\varepsilon_j h_{jk} \varepsilon_k = h_{jk}, \tag{2.6}$$

означающим, что $h_{jk} = 0$ для всех j, k, при которых $\varepsilon_j \neq \varepsilon_k$.

Из равенств (2.5) и (2.6) следует, что

$$\varepsilon_j a_{jk} \varepsilon_k = a_{jk};$$

стало быть, операторы A и U также перестановочны: $AU = UA$.

Обозначим через P и Q ортогональные проекторы, определенные равенствами

$$P = (I + U)/2 \text{ и } Q = (I - U)/2.$$

Очевидно, $PQ = QP = 0$ и $P + Q = I$.

Очевидно также, что каждый из операторов A, $A_{\mathcal{R}}$ и $A_{\mathcal{J}}$ перестановочен с каждым из проекторов P и Q.

Оператор A распадается в ортогонально-прямую разность двух операторов:

$$A = A_1 \ominus A_2,$$

где

$$A_1 = PAP = PA_{\mathcal{R}}P + iPA_{\mathcal{J}}P \text{ и } -A_2 = QAQ = QA_{\mathcal{R}}Q + iQA_{\mathcal{J}}Q.$$

Так как оператор $UA_{\mathcal{J}}$ неотрицателен, то таковыми являются и операторы $PA_{\mathcal{J}}P$ и $-QA_{\mathcal{J}}Q$, ибо

$$UA_{\mathcal{J}} = (P-Q)\, A_{\mathcal{J}} = PA_{\mathcal{J}}P - QA_{\mathcal{J}}Q.$$

Следовательно, операторы A_1 и A_2 диссипативны. Теорема доказана.

3. Сформулированные в теоремах 2.1 и 2.2 признаки полноты в $\mathfrak{H}$ системы корневых векторов обладают той особенностью, что их проверка, вообще говоря, возможна лишь после того, как вычислен спектр оператора. Однако из них можно получить простые достаточные условия; например, сопоставление теоремы 2.1 с теоремой III.8.4 В. Б. Лидского приводит к признаку, не требующему вычисления спектра.

Теорема 2.3 (В. Б. Лидский [5, 6]). *Если диссипативный оператор $A \in \mathfrak{S}_1$, то его система корневых векторов полна в $\mathfrak{H}$.*

Доказательство. В самом деле, в силу теоремы III.8.4

$$\sum_j \lambda_j(A) = \operatorname{sp} A = \operatorname{sp} A_{\mathcal{R}} + i \operatorname{sp} A_{\mathcal{J}}.$$

Следовательно,

$$\sum_j \operatorname{Im} \lambda_j(A) = \operatorname{sp} A_{\mathcal{J}}.$$

Теорема доказана.

Различные усиления этой теоремы излагаются в §§ 4—6.

§ 3. Критерий полноты системы корневых векторов оператора сжатия *)

Оператор $A \in \mathfrak{R}$ называется *оператором сжатия* или просто *сжатием*, если $|A| \leqslant 1$.

*) Результаты этого параграфа заимствованы из статьи авторов [6].

Теория диссипативных операторов тесно связана с теорией сжатий. Легко видеть, что если B — диссипативный оператор, то его преобразование Кэли

$$A=(B-iI)(B+iI)^{-1}$$

является сжатием. Это положение распространяется на так называемые неограниченные максимальные диссипативные операторы и играет фундаментальную роль в теории последних (см. Филлипс [1], Б. С.-Надь и Ч. Фояш [1—4], Т. Като [1], Г. Лангер [1,2]). Однако всего этого мы касаться не будем.

Основная цель этого параграфа — установление теоремы о полноте системы корневых векторов сжатия, которую следует рассматривать как некоторый аналог (впрочем, имеющий более законченный характер) соответствующей теоремы М. С. Лившица для диссипативных операторов (теорема 2.1).

1. Сначала покажем, что *если оператор A ($\in \mathfrak{R}$) обратим, а оператор $H_1=A^*A-I$ принадлежит некоторому двустороннему идеалу $\mathfrak{S}$, то полярное представление оператора A имеет вид*

$$A=U(I+H), \tag{3.1}$$

где U — унитарный оператор, а $H\in\mathfrak{S}$.

В самом деле, согласно п. 4 § 1 гл. I оператор A имеет вид (3.1), где $I+H$ — неотрицательный оператор такой, что $(I+H)^2=I+H_1$. Отсюда следует, что $H\in\mathfrak{S}_\infty$ и

$$\lambda_n(H)=\sqrt{1+\lambda_n(H_1)}-1=\frac{1}{2}\lambda_n(H_1)+O(\lambda_n^2(H_1))\quad (n\to\infty).$$

Стало быть, $\lambda_n(H)=O(\lambda_n(H_1))$ $(n\to\infty)$ и вместе с $H_1\in\mathfrak{S}$ также $H\in\mathfrak{S}$.

Согласно теореме I.5.3 у всякого обратимого оператора A вида (3.1) часть спектра, находящаяся не на единичной окружности, состоит из нормальных собственных чисел.

Все собственные числа, не лежащие на единичной окружности, занумеруем как-либо, считая каждое столько раз, какова его алгебраическая кратность.

Последовательность этих собственных чисел в этом параграфе будем обозначать через $\{\lambda_j'(A)\}$.

Лемма 3.1. *Пусть A — обратимый оператор, для которого $A^*A-I\in\mathfrak{S}_1$. Если $\mathfrak{E}$ — линейная замкнутая оболочка всех корневых векторов оператора A, отвечающих собственным числам $\lambda_j'(A)$, а P — ортопроектор, проектирующий пространство $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{E}$, то*

$$\det(PA^*AP+Q)=\prod_j|\lambda_j'(A)|^2, \tag{3.2}$$

где $Q=I-P$.

В частности, если указанное множество корневых векторов плотно в $\mathfrak{H}$, т. е. $\mathfrak{E}=\mathfrak{H}$, то

$$\det A^*A=\prod_j|\lambda_j'(A)|^2. \tag{3.3}$$

Доказательство. Легко видеть, что равенство (3.3) будет доказано, коль скоро будет доказано равенство (3.2). Для доказательства последнего построим (как в лемме I.4.1) ортонормированный базис $\{\omega_j\}_1^\infty$ Шура, в котором оператору A отвечает треугольная матрица, т. е.

$$A\omega_j=a_{j1}\omega_1+\ldots+a_{jj-1}\omega_{j-1}+\lambda_j(A)\omega_j \qquad (j=1,2,\ldots).$$

Обозначим через P_n ортопроектор, проектирующий $\mathfrak{H}$ на подпространство с базисом $\{\omega_j\}_1^n$. Очевидно, $AP_n=$ $=P_nAP_n$, и следовательно, $P_nA^*P_nAP_n=P_nA^*AP_n$. Так как

$$\det(A^*A)=\lim_{n\to\infty}\det(P_nA^*AP_n+Q_n)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\det(P_nA^*P_nAP_n+Q_n),$$

а

$$\det(P_nA^*P_nAP_n+Q_n)=$$
$$=\det(P_nA^*P_n+Q_n)\det(P_nAP_n+Q_n)=\prod_{j=1}^n|\lambda_j'(A)|^2,$$

то получаем (3.2).

Для дальнейшего понадобится следующая

Лемма 3.2. *Пусть $A\,(\in\mathfrak{R})$ — произвольный обратимый оператор, для которого $A^*A-I\in\mathfrak{S}_1$.*

Если $\mathfrak{L}$ является инвариантным подпространством каждого из операторов A и A^{-1}, то

$$\det(A^*A)=\det(PA^*AP+Q)\det(QA^*QAQ+P), \tag{3.4}$$

где P — ортопроектор, проектирующий $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{L}$, а $Q=I-P$.

Доказательство. Так как $QAP=QPAP=0$, то оператор A представим в виде

$$A=(P+Q)\,A\,(P+Q)=PAP+PAQ+QAQ.$$

Отсюда следует, что

$$A=(QAQ+P)\,(I+PAQ)\,(Q+PAP). \qquad (3.5)$$

Оператор $S_1=Q+PAP$ имеет ограниченный обратный

$$S_1^{-1}=Q+PA^{-1}P.$$

Квадрат оператора PAQ равен нулю, а следовательно, обратим и оператор $S_2=I+PAQ$.

А тогда из (3.5) заключаем, что оператор $S_3=QAQ+P$ также обратим.

Так как оператор

$$S_1^*S_1-I=PA^*PAP+Q-I=P\,(A^*A-I)\,P$$

ядерный, то ядерным будет и оператор

$$S_1S_1^*-I=(S_1^*)^{-1}\,(S_1^*S_1-I)\,S_1^*.$$

Из последнего равенства согласно предложению 6° § 1 гл. IV вытекает также, что

$$\det\,(S_1S_1^*)=\det\,(S_1^*S_1).$$

Учитывая, далее, равенство

$$S_1A^*AS_1^{-1}=S_1S_1^*S_2^*S_3^*S_3S_2\ (=S_1S_1^*B),$$

находим, что оператор $B-I\in\mathfrak{S}_1$ и

$$\det\,(A^*A)=\det\,(S_1^*S_1)\det B. \qquad (3.6)$$

Аналогичным образом, из равенства

$$S_2BS_2^{-1}=S_2S_2^*S_3^*S_3$$

выводим, что оператор $S_2S_2^*S_3^*S_3-I\in\mathfrak{S}_1$ и

$$\det B=\det\,(S_2S_2^*S_3^*S_3). \qquad (3.7)$$

Оператор $S_3S_3^*-I=P+QAQA^*Q-I=Q\,(AA^*-I)\,Q$.

Так как оператор $AA^*-I=A^{*-1}\,(A^*A-I)\,A^*\in\mathfrak{S}_1$, то оператор $S_3S_3^*-I$ также принадлежит $\mathfrak{S}_1$. Наконец, из равенства $S_3^*S_3-I=S_3^{-1}(S_3S_3^*-I)S_3$ получаем, что $S_3^*S_3-I\in\mathfrak{S}_1$ и

$$\det(S_3^*S_3)=\det(S_3S_3^*). \tag{3.8}$$

Из доказанного вытекает, что оператор $S_2S_2^*-I=$ $=PAQ+QA^*P+PAQA^*P$ — ядерный; следовательно, ядерным будет и оператор $S_2-I=PAQ=P(S_2S_2^*-I)Q$.

Так как оператор PAQ — вольтерров, то

$$\det S_2=\det S_2^*=1. \tag{3.9}$$

Сопоставляя равенства (3.6)—(3.9), приходим к (3.4). Лемма доказана.

2. Перейдем теперь к рассмотрению сжатий.

Очевидно, весь спектр любого сжатия $A\,(|A|\leqslant 1)$ содержится в замкнутом единичном круге.

1°. *Пусть $A\,(\in\mathfrak{R})$ — некоторое сжатие. Если для некоторого ортопроектора P оператор PAP унитарен в подпространстве $P\mathfrak{H}$, т. е.*

$$PA^*PAP=PAPA^*P=P,$$

то каждое из подпространств $P\mathfrak{H}$ и $(I-P)\mathfrak{H}$ инвариантно относительно A.

В самом деле,

$$PA^*AP=PA^*PAP+PA^*QAP=P+PA^*QAP, \tag{3.10}$$

где $Q=I-P$. Так как оператор PA^*AP — сжатие, а оператор $PA^*QAP=(QAP)^*QAP$ неотрицателен, то равенство (3.10) может иметь место в том и только том случае, когда этот оператор равен 0, т. е. $QAP=0$. Последнее означает, что подпространство $P\mathfrak{H}$ инвариантно относительно A. Аналогичным образом из равенства

$$PAA^*P=PAPA^*P+PAQA^*P=P+PAQA^*P$$

выводим, что $PAQ=0$, и следовательно, подпространство $Q\mathfrak{H}$ инвариантно относительно A.

Сжатие $A\,(\in\mathfrak{R})$ назовем *простым*, если ни на одном своем инвариантном подпространстве оно не индуцирует унитарного оператора.

Из предложения 1° следует, что если A — простое сжатие, то каков бы ни был ортопроектор P, оператор PAP

не является унитарным в соответствующем подпространстве $P\mathfrak{H}$.

Теорема 3.1 (Г. Лангер [1], Б. С.-Надь и Ч. Фояш [1]). *Пусть $A\,(\in\mathfrak{R})$ — произвольное сжатие. Тогда множество $\mathfrak{H}_A$ всех векторов $f\in\mathfrak{H}$, для которых*

$$|A^n f|=|A^{*n}f|=|f| \qquad (n=1,\,2,\,\ldots),$$

образует максимальное инвариантное подпространство оператора A, в котором он индуцирует унитарный оператор.

Подпространство $\mathfrak{H}_A^{\perp}$ также инвариантно относительно A, и в нем A индуцирует простое сжатие.

Таким образом, всякое сжатие распадается в ортогональную сумму унитарного оператора и простого сжатия.

Доказательство. В самом деле, если $f\in\mathfrak{H}_A$, то для любого натурального n

$$|A^{*n}A^nf-f|^2=|A^{*n}A^nf|^2-2\,|A^nf|^2+|f|^2\leqslant|f|^2-|A^nf|^2=0,$$

т. е.

$$A^{*n}A^nf=f \qquad (f\in\mathfrak{H}_A;\; n=1,\,2,\,\ldots). \tag{3.11}$$

Поменяв A и A^* ролями, получим

$$A^nA^{*n}f=f \qquad (f\in\mathfrak{H}_A;\; n=1,\,2,\,\ldots). \tag{3.12}$$

Легко видеть, что верно и обратное: если для некоторого вектора $f\in\mathfrak{H}$ выполняются соотношения (3.11) и (3.12), то $f\in\mathfrak{H}_A$. Таким образом, $\mathfrak{H}_A$ состоит из тех и только тех векторов $f\in\mathfrak{H}$, для которых выполняются соотношения (3.11) и (3.12). Отсюда непосредственно следует, что $\mathfrak{H}_A$ является замкнутым подпространством $\mathfrak{H}$.

Для любого вектора $g=Af$ $(f\in\mathfrak{H}_A)$

$$|A^ng|=|A^{n+1}f|=|Af|=|g|$$

и

$$|A^{*n}g|=|A^{*n-1}A^*Af|=|A^{*n-1}f|=|Af|=|g|.$$

Следовательно, $\mathfrak{H}_A$ инвариантно относительно A. Аналогично выводится, что $\mathfrak{H}_A$ инвариантно и относительно A^*.

В силу равенств (3.11) и (3.12) при $n=1$ оператор A индуцирует в $\mathfrak{H}_A$ унитарный оператор. Если некоторое подпространство $\mathfrak{L}$ инвариантно относительно A и A индуцирует в нем унитарный оператор, то согласно предложению 1° это подпространство инвариантно относительно A^*, и стало быть, $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{H}_A$.

Подпространство $\mathfrak{H}_A^{\perp}$ также инвариантно относительно операторов A и A^*, и для любого $f \in \mathfrak{H}_A^{\perp}$ с $|f| = 1$ найдется натуральное n такое, что хотя бы одно из чисел $|A^n f|$, $|A^{*n} f|$ меньше единицы.

Следовательно, в $\mathfrak{H}_A^{\perp}$ оператор A индуцирует простое сжатие.

Теорема 3.2. *Пусть $A \,(\in \mathfrak{R})$ — произвольное сжатие, для которого $A^{-1} \in \mathfrak{R}$ и $A^*A - I \in \mathfrak{S}_1$. Тогда*

$$\det (A^*A) \leqslant \prod_j |\lambda_j(A)|^2. \tag{3.13}$$

Если, кроме того, оператор A простой или отличается от единичного на вполне непрерывный, т. е. $A - I \in \mathfrak{S}_\infty$, то в (3.13) имеет место знак равенства в том и только том случае, когда система всех корневых векторов оператора A полна в $\mathfrak{H}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{E}$ — замыкание линейной оболочки всех корневых векторов оператора A, отвечающих собственным числам $\lambda_j(A)$, и P — ортопроектор, проектирующий пространство $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{E}$.

Очевидно, подпространство $\mathfrak{E}$ является инвариантным подпространством операторов A и A^{-1}. Следовательно, в силу леммы 3.2

$$\det (A^*A) = \det (PA^*AP + Q) \det (P + QA^*QAQ). \tag{3.14}$$

Неотрицательный оператор

$$P + QA^*QAQ = I - (Q - QA^*QAQ) \leqslant I$$

и, стало быть,

$$\det (P + QA^*QAQ) \leqslant 1. \tag{3.15}$$

Принимая во внимание (3.14), (3.15) и (3.2), приходим к соотношению (3.13).

В соотношении (3.13) имеет место знак равенства в том и только том случае, когда этот знак имеет место в (3.15), а последнее имеет место тогда и только тогда, когда

$$QA^*QAQ = Q. \tag{3.16}$$

В этом случае

$$QA^*AQ = QA^*QAQ + QA^*PAQ = Q + QA^*PAQ,$$

откуда следует, что $PAQ = 0$, и стало быть, $Q\mathfrak{H}$ — инвариантное подпространство оператора A. Так как, кроме того, $P\mathfrak{H}$ инвариантно относительно A и A обратим, то A распадается в ортогональную сумму двух обратимых операторов. Оператор, отвечающий подпространству $Q\mathfrak{H}$, является в силу (3.16) унитарным.

Если A — простое сжатие, то $Q = 0$ и, стало быть, $\mathfrak{E} = \mathfrak{H}$. Если же $A - I \in \mathfrak{S}_\infty$, то в подпространстве $Q\mathfrak{H}$ унитарное сужение оператора A имеет полную систему собственных векторов.

Теорема доказана.

Близкую (более сложно формулируемую) теорему к теореме 3.2 установил В. Г. Поляцкий [1]. При выводе своего результата В. Г. Поляцкий использовал полученные им треугольные модели «квазиунитарных» операторов. Для построения этих моделей ему пришлось привлечь глубокие исследования В. П. Потапова [1] и Ю. П. Гинзбурга [1] по теории аналитических матриц и оператор-функций.

Замечание 3.1. Теорему, аналогичную теореме 3.2, можно сформулировать для растяжения, т. е. для оператора $A\,(\in \mathfrak{R})$, обладающего свойством $|Af| \geqslant |f|$. В этом случае неравенство (3.13) переходит в неравенство

$$\det(A^*A) \geqslant \prod_j |\lambda_j'(A)|^2,$$

где через $\{\lambda_j'(A)\}$ обозначена полная система собственных чисел оператора A, лежащих вне единичной окружности.

Если A — обратимое растяжение, то $B = A^{-1}$ будет обратимым сжатием, и обратно. Поэтому одна теорема сводится к другой.

§ 4. Теоремы о признаках полноты системы корневых векторов диссипативных операторов с ядерной мнимой компонентой *)

В этом параграфе будут приведены три теоремы о полноте системы корневых векторов диссипативного оператора A с ядерной мнимой компонентой. Первые две теоремы содержат в себе как следствие теорему В. Б. Лидского 2.3.

Первая из них гарантирует полноту системы корневых векторов оператора A указанного класса, коль скоро его вещественная компонента $A_{\mathfrak{R}}$ имеет «достаточно редкий» спектр на положительной или отрицательной полуоси, а вторая — когда соответствующее условие выполняется для s-чисел этого оператора.

Третья теорема показывает, что полнота системы корневых векторов имеет место тогда и только тогда, когда спектры операторов A и $A_{\mathfrak{R}}$ имеют «плотности распределения» одного и того же порядка.

1. Из теоремы IV.8.2 без труда выводится теорема:

Теорема 4.1 (М. Г. Крейн [9]). *Система корневых векторов вполне непрерывного диссипативного оператора A с ядерной мнимой компонентой полна в $\mathfrak{H}$, коль скоро выполняется по крайней мере одно из двух условий:*

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{n_+(\varrho;\ A_{\mathfrak{R}})}{\varrho}=0 \quad \text{или} \quad \lim_{\rho\to\infty}\frac{n_-(\varrho;\ A_{\mathfrak{R}})}{\varrho}=0. \qquad (4.1)$$

Напомним, что через $n_\pm(\varrho;\ A_{\mathfrak{R}})$ обозначено число характеристических чисел вещественной компоненты $A_{\mathfrak{R}}$, соответственно, в интервалах $[0,\ \varrho]$ и $[-\varrho,\ 0]$.

Доказательство. Свойства, о которых идет речь в условиях теоремы, инвариантны по отношению к операции ортогонального проектирования. Пояснения в этом требуют лишь условия (4.1). Если P — некоторый ортогональный проектор, а $\hat{A}=PAP$, то $\hat{A}_{\mathfrak{R}}=PA_{\mathfrak{R}}P$, и на основании минимаксимальных свойств собственных чисел

*) Результаты этого параграфа принадлежат М. Г. Крейну и в основном заимствованы из его статьи [9].

самосопряженного оператора можно утверждать*), что $\lambda_j^+(\hat{A}_{\mathcal{R}}) \leqslant \lambda_j^+(A_{\mathcal{R}})$ и $\lambda_j^-(\hat{A}_{\mathcal{R}}) \geqslant \lambda_j^-(A_{\mathcal{R}})$ $(j=1, 2, \ldots)$ (для этого достаточно представить оператор $A_{\mathcal{R}}$ как разность его неотрицательных компонент, и воспользоваться леммой II.1.2). Отсюда следует, что

$$n_\pm(\varrho;\ \hat{A}_{\mathcal{R}}) \leqslant n_\pm(\varrho;\ A_{\mathcal{R}}) \quad (0<\varrho<\infty).$$

Поэтому, если $A_{\mathcal{R}}$ обладает хотя бы одним из свойств (4.1), то этим же свойством будет обладать и $\hat{A}_{\mathcal{R}}$.

На основании леммы 1.2 для завершения доказательства остается показать, что никакой вольтерров диссипативный оператор A при условии $0<\operatorname{sp} A_{\mathcal{J}}<\infty$ не может обладать ни одним из свойств (4.1). Для этого заметим, что по теореме IV.7.2 для такого оператора всегда:

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{n_\pm(\varrho,\ A_{\mathcal{R}})}{\varrho} = \frac{1}{\pi} \operatorname{sp} A_{\mathcal{J}}. \tag{4.2}$$

Теорема доказана.

Замечание 4.1. Очевидно, оператор $A_{\mathcal{R}}$ будет удовлетворять одному из условий (4.1), коль скоро он имеет только конечное число собственных чисел соответствующего знака.

Вообще, первое (соответственно второе) из условий (4.1) будет заведомо выполнено, коль скоро конечна сумма

$$\sum_{\lambda_n>0} \lambda_n(A_{\mathcal{R}}) \quad \text{(соответственно } \sum_{\lambda_n<0} \lambda_n(A_{\mathcal{R}})\text{)}.$$

Близкой по содержанию и, в особенности, по методу доказательства к теореме 4.1 является следующая

Теорема 4.2. *Система корневых векторов диссипативного оператора A с ядерной мнимой компонентой олна, коль скоро*

$$\varliminf_{n\to\infty} n s_n(A) = 0. \tag{4.3}$$

*) Через $\lambda_j^+(A)$ (соответственно $\lambda_j^-(A)$) $(j=1, 2, \ldots)$ здесь обозначены последовательные по убыванию (соответственно по возрастанию) положительные (соответственно отрицательные) собственные числа оператора A.

Доказательство. Так как для любого ортопроектора P:

$$s_n(PAP) \leqslant s_n(A) \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

то свойство (4.3) инвариантно по отношению операции ортогонального проектирования.

С другой стороны, если A — диссипативный вольтерров оператор с $\operatorname{sp} A_{\mathcal{J}} > 0$, то согласно следствию IV.7.2

$$\lim_{n\to\infty} ns_n(A) = \frac{2}{\pi} \operatorname{sp} A_{\mathcal{J}}.$$

В силу леммы 1.2 теорема доказана.

2. Анализ «точности» условий теоремы 4.1. а) Теория треугольного абстрактного представления (см. М. С. Бродский, И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн и В. И. Мацаев [1]) позволяет показать, что, задавшись любым самосопряженным оператором $H \in \mathfrak{S}_1$, можно бесчисленным множеством способов построить вольтерров оператор A с $A_{\mathcal{J}} = H$ и, если $H \geqslant 0$, то для него будет выполняться соотношение (4.2).

Это обстоятельство свидетельствует о том, что при сохранении в теореме 4.1 условия $\operatorname{sp} A_{\mathcal{J}} < \infty$ *никакие* дополнительные ограничения на *размерность* оператора $A_{\mathcal{J}}$ или на *поведение его спектра* не позволят ослабить условия (4.1).

Кстати, напомним, что в § 7 гл. IV мы рассмотрели оператор интегрирования J в $L_2(0,\ 1)$ — пример диссипативного вольтеррова оператора с одномерной мнимой компонентой.

б) С другой стороны, если отбросить в теореме 4.1 требование диссипативности оператора A (и вообще, знакоопределенности $A_{\mathcal{J}}$), то теорема перестает быть справедливой.

Более того, оказывается, существуют *вольтерровы* операторы V с *двумерной* мнимой компонентой $V_{\mathcal{J}}$ и вещественной компонентой $V_{\mathcal{R}}$, имеющей всего лишь одно отрицательное характеристическое число и *сколь угодно редкий* спектр положительных характеристических чисел (*редкий* в смысле малости его показателя сходимости).

В самом деле, пусть $\sigma(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1;\ \sigma(0)=0)$ — некоторая неубывающая функция с бесконечным числом точек роста, и пусть гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ реализовано в виде пространства $L_{2,\sigma}$ σ-измеримых функций $f(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ с σ-интегрируемым квадратом. Скалярное произведение в $L_{2,\sigma}$ определено, разумеется, формулой:

$$(f,\ g)=\int_0^1 f(t)\,\overline{g(t)}\,d\sigma(t).$$

Рассмотрим в $L_{2,\sigma}$ вольтерров оператор V *), определяемый равенством:

$$(Vf)(t)=-\int_0^t (t-s)\,f(s)\,d\sigma(s), \tag{4.4}$$

для которого, как легко видеть,

$$(V_{\mathfrak{R}}f)(t)=-\frac{1}{2}\int_0^1 |t-s|\,f(s)\,d\sigma(s),$$

$$(V_{\mathcal{J}}f)(t)=-\frac{1}{2i}\int_0^1 (t-s)\,f(s)\,d\sigma(s). \tag{4.5}$$

Из (4.5) очевидно, что компонента $V_{\mathcal{J}}$ двумерна и ее след равен нулю.

У компоненты $V_{\mathfrak{R}}$ также след равен нулю, а поэтому у нее существуют собственные числа обоих знаков. Покажем, что у $V_{\mathfrak{R}}$ имеется точно одно отрицательное собственное число. Рассмотрим для этого самосопряженный оператор, действующий в $L_{2,\sigma}$ по формуле

$$(\Gamma f)(t)=\int_0^1 G(t,\ s)\,f(s)\,d\sigma(s),$$

где

$$G(t,\ s)=\begin{cases} t(1-s), & t\leqslant s,\\ s(1-t), & s\leqslant t\end{cases}$$

*) Для $\sigma(t)=t$ этот пример вольтеррова оператора рассматривался в § 10 гл. IV.

— известное ядро из теории струны (функция $G(t, s)$ с точностью до скалярного множителя совпадает с функцией влияния однородной струны).

Так как $G(t, s)$ — положительно определенное ядро, то оператор Γ положителен. С другой стороны, так как

$$-\frac{1}{2}|t-s| = G(t, s) + \left(t-\frac{1}{2}\right)\left(s-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4},$$

то

$$V_{\mathfrak{R}} = \Gamma + (\cdot, e_1)\, e_1 - (\cdot, e_0)\, e_0, \tag{4.6}$$

где $e_1(t) = t - \frac{1}{2}$, $e_0(t) = \frac{1}{2}$. Таким образом, оператор $V_{\mathfrak{R}}$ получается из положительного оператора $\Gamma + (\cdot, e_1)\, e_1$ вычитанием одномерного, а следовательно, он имеет не более одного отрицательного собственного числа (см. лемму II.1.2), а так как $\operatorname{sp} V_{\mathfrak{R}} = 0$, то точно одно.

Компонента $V_{\mathfrak{R}}$ удовлетворяет обоим условиям (4.1).

Более того, из соотношения (4.6) очевидно, что характеристические числа оператора $V_{\mathfrak{R}}$ имеют ту же асимптотику, что и характеристические числа оператора Γ, в силу чего (см. М. Г. Крейн [4] и книгу авторов [7])

$$\lim_{\rho\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\, n(\varrho;\ V_{\mathfrak{R}})\right] = \lim_{\rho\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\, n_+(\varrho;\ V_{\mathfrak{R}})\right] = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sqrt{\sigma'(t)}\, dt. \tag{4.7}$$

(Производная $\sigma'(t)$ неубывающей функции $\sigma(t)$ существует почти всюду.)

Предел (4.7) будет равен нулю в том и только том случае, если у функции $\sigma(t)$ будет отсутствовать абсолютно непрерывная часть.

В частности, предел (4.7) равен нулю, когда имеет место *случай Стильтьеса*, т. е. когда $\sigma(t)$ есть чистая функция скачков, точки скачков которой образуют последовательность, стремящуюся к единице.

Теория обратных задач для струны (см. М. Г. Крейн [6,7]) позволяет утверждать, что для любого $\varkappa \leqslant 2$ может быть подобрана чистая функция скачков $\sigma(t)$ (стильтьесовского типа) такая, что

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{n_+(\rho,\ V_{\mathfrak{R}})}{\rho^{\varkappa}} = \lim_{\rho\to\infty} \frac{n_+(\rho,\ \Gamma)}{\rho^{\varkappa}} = 1.$$

Итак, за счет выбора функции распределения $\sigma(t)$ можно добиться любой редкости спектра вещественной компоненты $V_{\mathfrak{R}}$.

В то же время при любом выборе $\sigma(t)$ у вольтеррова оператора $V = V^{(\sigma)}$ *обе компоненты* $V_{\mathfrak{R}}$ *и* $V_{\mathfrak{J}}$ *имеют всего лишь по одному отрицательному собственному числу, притом мнимая компонента имеет также всего лишь одно положительное собственное число.*

3. Сопоставление теоремы М. С. Лившица и теоремы IV.9.1 приводит к следующему результату.

Теорема 4.3 (М. Г. Крейн [9]). *Для того чтобы система корневых векторов диссипативного оператора* $A\ (\in \mathfrak{S}_\infty)$ *с ядерной мнимой компонентой была полна, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_0^\rho \frac{n(r;\ A)}{r}\,dr - \int_0^\rho \frac{n(r;\ A_{\mathfrak{R}})}{r}\,dr = o(\rho), \tag{4.8}$$

когда $\rho \to \infty$, *минуя некоторое множество конечной логарифмической длины.*

Доказательство. Если обозначить через $N(\rho,\ A)$ и $N(\rho,\ A_{\mathfrak{R}})$ соответствующие интегралы из (4.8), то по теореме IV.9.1 при $\rho \to \infty$, минуя подходящее множество конечной логарифмической длины,

$$N(\rho;\ A) - N(\rho;\ A_{\mathfrak{R}}) = \frac{2}{\pi}\,a\rho + o(\rho),$$

где

$$a = \operatorname{sp} A_{\mathfrak{J}} - \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{Im} \lambda_j(A).$$

Поэтому критерий (4.8) эквивалентен критерию М. С. Лившица (см. теорему 2.1).

Теорема доказана.

Предоставляем читателю сформулировать результаты, получающиеся путем сопоставления теорем 4.1 и 4.3.

§ 5. Оценки роста резольвенты операторов различных классов

1. Если $A \in \mathfrak{S}_1$, то согласно (IV.12) для $D_A(\lambda) = \det(I - \lambda A)$ справедлива следующая оценка:

$$|D_A(\lambda)| \leqslant \prod_{j=1}^{\infty} (1 + |\lambda| s_j(A)).$$

Эта оценка позволяет получить важную оценку для оператора $(I - \lambda A)^{-1}$.

Теорема 5.1 *). *Если* $A \in \mathfrak{S}_1$, *то*

$$|(I - \lambda A)^{-1}| \leqslant \frac{1}{|D_A(\lambda)|} \prod_{j=1}^{\infty} (1 + |\lambda| s_j(A)). \qquad (5.1)$$

Доказательство. Выбрав произвольно орты φ, ψ и положительное ξ, образуем оператор

$$A_1 = A + \xi(\cdot, \psi)\varphi.$$

Согласно следствию II.2.1 будем иметь

$$s_{j-1}(A_1) \leqslant s_j(A) \qquad (j = 2, 3, \ldots).$$

Так как, кроме того,

$$s_1(A_1) \leqslant s_1(A) + \xi,$$

то

$$|D_{A_1}(\lambda)| \leqslant (1 + |\lambda|(s_1(A) + \xi)) \prod_{j=1}^{\infty} (1 + |\lambda| s_j(A)). \qquad (5.2)$$

С другой стороны, имеем

$$1 + \lambda\xi((I - \lambda A)^{-1}\varphi, \psi) = \det((I - \lambda A_1)(I - \lambda A)^{-1}) = \frac{D_{A_1}(\lambda)}{D_A(\lambda)}.$$

Таким образом,

$$|\lambda((I - \lambda A)^{-1}\varphi, \psi)| \leqslant \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi}\frac{|D_{A_1}(\lambda)|}{|D_A(\lambda)|}.$$

*) Независимо такой же результат был получен В. Б. Лидским [9]. Его оценка отличалась от оценки (5.1) дополнительным множителем 2 в правой части. Оценка (5.1) была получена авторами в результате анализа аналогичной, но менее точной оценки, полученной ранее В. И. Мацаевым [4].

Мы усилим эту оценку, заменяя $|D_{A_1}(\lambda)|$ правой частью из (5.2). Устремляя после этого ξ к бесконечности, получим, что

$$|((I-\lambda A)^{-1}\varphi,\psi)|\leqslant\frac{1}{|D_A(\lambda)|}\prod_{j=1}^{\infty}(1+|\lambda|\,s_j(A)).$$

Так как орты φ и ψ произвольны, то это неравенство выражает то же самое, что и (5.1).

2. Если A — вольтерров оператор, то через $M_A(r)$ $(0\leqslant r<\infty)$ обозначим монотонно растущую функцию *), определяемую равенством:

$$M_A(r)=\max_{|\lambda|=r}|(I-\lambda A)^{-1}|\ (=\max_{|\lambda|\leqslant r}|(I-\lambda A)^{-1}|).$$

Рост именно этой функции и будет дальше оцениваться.

Если вольтерров оператор $A\in\mathfrak{S}_1$, то $D_A(\lambda)=1$, и оценка (5.1) дает:

$$M_A(r)\leqslant\prod_{j=1}^{\infty}(1+rs_j(A)). \tag{5.3}$$

Теорема 5.2 (В. И. Мацаев [4]) **). *Если A — вольтерров оператор и при некотором $p>0$:*

$$s_n(A)=O(n^{-1/p})\quad (\text{или}=o(n^{-1/p})), \tag{5.4}$$

то соответственно:

$$\ln M_A(r)=O(r^{1/p})\quad (=o(r^{1/p})). \tag{5.5}$$

Если же $A\leqslant\mathfrak{S}_p$, то также

$$\int_0^{\infty}\frac{\ln M_A(r)}{r^{p+1}}\,dr<\infty. \tag{5.6}$$

Если условие (5.4) заменить на условие $A\in\mathfrak{S}_p$, то утверждение (5.5) среди прочих было установлено

---

*) Обозначение $M_A(r)$ аналогично общеупотребительному обозначению в теории функций.

**) Эту теорему В. И. Мацаев [4] получил иначе (как следствие некоторых более общих и тонких результатов).

М. В. Келдышем (указание на это см. у Д. Э. Аллахвердиева [1]). Различные доказательства утверждения М. В. Келдыша имеются в статье В. Б. Лидского [9] и книге Данфорда и Шварца [2].

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $p<1$.

В этом случае на основании известных теорем теории целых функций из (5.4) следует, что целая функция

$$F_A(z)=\prod_{j=1}^{\infty}(1+zs_j(A))$$

имеет порядок роста p и соответственно тому, будет ли иметь место первое или второе из соотношений (5.4), будет нормального или минимального типа, т. е.

$$\ln F_A(r)=O(r^{1/p}) \quad \text{или} \quad =o(r^{1/p}) \quad (r\to\infty).$$

Эти соотношения вместе с оценкой (5.3) дают соотношения (5.5). Если же $A\in\mathfrak{S}_p$, то согласно (5.3) и лемме IV.11.1 будем иметь:

$$\int_0^\infty \frac{\ln M_A(r)}{r^{p+1}}\,dr\leqslant\int_0^\infty\frac{\ln F_A(r)}{r^{p+1}}\,dr=\beta_p|A|_p^p \quad \left(\beta_p=\frac{\pi}{p\sin\pi p}\right).$$

Рассмотрим теперь случай, когда $p\geqslant 1$.

Выберем целое q (>0) так, чтобы $p_1=p/q<1$, и образуем вольтерров оператор $B=A^q$. Так как

$$I-\lambda^qB=(I-\lambda A)\,(I+\lambda A+\ldots+\lambda^{q-1}A^{q-1}),$$
$$(I-\lambda A)^{-1}=(I+\lambda A+\ldots+\lambda^{q-1}A^{q-1})\,(I-\lambda^qB)^{-1},$$

то

$$M_A(r)\leqslant M_B(r^q)\sum_{k=0}^{q-1}r^k|A^k|. \tag{5.7}$$

С другой стороны, на основании следствия II.2.2 имеем:

$$s_n(B)=s_n(A^q)\leqslant s^q_{\left[\frac{n}{q}\right]+1}(A) \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

и следовательно, если имеет место одно из соотношений (5.4), то соответственно

$$s_n(B) = O(n^{-1/p_1}) \quad (\text{или } = o(n^{-1/p_1})).$$

Но тогда по уже доказанному

$$\ln M_B(r) = O(r^{p/q}) \quad (= o(r^{p/q})) \quad (r \to \infty).$$

В сочетании с (5.7) это снова дает (5.4).

Если же $A \in \mathfrak{S}_p$, то $B \in \mathfrak{S}_{p_1}$, и в силу уже доказанного будем иметь:

$$\int_0^\infty \frac{\ln M_B(r^q)}{r^{p+1}}\, dr = \frac{1}{q} \int_0^\infty \frac{\ln M_B(r)}{r^{p_1+1}}\, dr < \infty.$$

Учитывая (5.7), получаем отсюда (5.6).

Теорема доказана.

Разумеется, первая часть теоремы 5.2 без труда может быть обобщена на случай, когда вместо соотношений (5.4) рассматриваются соотношения

$$s_n(A) = O(n^{-1/p} L(n)) \quad (\text{или} = o\ (n^{-1/p} L(n))),$$

где $L(\nu)$ $(1 \leqslant \nu < \infty)$ — медленно изменяющаяся функция.

Заметим также, что оценки (5.3) и (5.5) позволяют получить оценки фредгольмовой резольвенты $A(\lambda) = A(I - \lambda A)^{-1}$ вольтеррового оператора A в норме соответствующего с. н. идеала $\mathfrak{S}$, ибо

$$|A(\lambda)|_{\mathfrak{S}} \leqslant |A|_{\mathfrak{S}}\, |(I - \lambda A)^{-1}|.$$

§ 6. Теоремы о полноте системы корневых векторов высших классов операторов

1. По известной теореме Хаусдорфа (см. Стоун [1]) для всякого оператора $A \in \mathfrak{R}$ множество значений его формы (Af, f) на единичной сфере $|f| = 1$ является выпуклым.

Замыкание этого множества обозначим через W_A. С помощью теоремы IV.4.1 доказывается следующее общее утверждение (см. Стоун [1]).

Лемма 6.1. *Пусть $A \in \mathfrak{R}$ и $\lambda \bar{\in} W_A$, тогда λ является регулярной точкой оператора A и*

$$|(A-\lambda I)^{-1}| \leqslant \frac{1}{d(\lambda, W_A)},$$

где через $d(\lambda, W_A)$ обозначено расстояние точки λ от множества W_A.

Доказательство. Пусть a — ближайшая к λ точка из W_A. Тогда λ и W_A будут лежать по разные стороны от прямой, проходящей через точку a и перпендикулярной к отрезку, соединяющему точки λ и a. Тогда у оператора $B=(A-aI)e^{i\alpha}$, где $\alpha=\arg(\lambda-a)+\pi/2$, область W_B будет получаться из области W_A с помощью параллельного переноса $z \rightarrow z-a$ и поворота $z \rightarrow ze^{i\alpha}$ и, таким образом, будет лежать в верхней полуплоскости и будет касаться вещественной оси в точке O. При указанном движении точка λ перейдет в точку $\mu=(\lambda-a)e^{i\alpha}= -|\lambda-a|i$.

Так как B — диссипативный оператор, то будем иметь

$$|(A-\lambda I)^{-1}|=|(B-\mu I)^{-1}| \leqslant \frac{1}{|\operatorname{Im}\mu|}=\frac{1}{|\lambda-a|}.$$

Лемма доказана.

2. Если $A \in \mathfrak{R}$, то очевидно, что замыкание $\widetilde{W}_A$ множества всех значений (Af, f) $(f \in \mathfrak{H})$ состоит из точек z вида ζt, где $\zeta \in W_A$ и $0 \leqslant t < \infty$.

Из выпуклости W_A вытекает, что $\widetilde{W}_A$ либо совпадает с некоторым углом с вершиной в начале координат и раствором $\theta_A \leqslant \pi$, либо со всей плоскостью (и в этом случае мы будем писать $\theta_A=2\pi$).

Имеет место

Теорема 6.1. *Пусть для $A \in \mathfrak{S}_\infty$ выполняются следующие два условия:*

1) $$\theta_A=\frac{\pi}{p}, \text{ где } p \geqslant 1;$$

2) $$s_n(A)=o(n^{-1/p}) \qquad (n \rightarrow \infty). \tag{6.1}$$

Тогда система всех корневых векторов оператора A полна в $\mathfrak{H}$.

Очевидно, условие 2) теоремы будет выполняться, если $A \in \mathfrak{S}_p$ $(1<p<\infty)$. При таком ограничении теорема указана в докладе М. В. Келдыша и В. Б. Лидского [1] и она является естественным обобщением теорем В. Б. Лидского, установленных им ранее для случаев $p=1$ и $p=2$. Оценка (5.5) позволила несколько усилить эту теорему.

Доказательство. Без ограничения общности можно предположить, что оператор A диссипативен. Свойства 1) и 2) оператора A, сформулированные в условиях теоремы, очевидно, инвариантны по отношению к операции ортогонального проектирования ($A \longrightarrow PAP$). Поэтому на основании леммы 1.2 для доказательства теоремы достаточно показать, что вольтерров диссипативный оператор A, удовлетворяющий условиям 1) и 2), равен нулю.

В силу теоремы 5.2 для вольтеррова оператора A

$$\ln |A(z)| = \ln |A(I-zA)^{-1}| = o(|z|^p) \quad (z \longrightarrow \infty). \tag{6.2}$$

С другой стороны, так как $W_A \subset \widetilde{W}_A$, то согласно лемме 6.1

$$|(A-\lambda I)^{-1}| \leqslant \frac{1}{d(\lambda, \widetilde{W}_A)},$$

а следовательно,

$$|(I-zA)^{-1}| \leqslant \frac{1}{d\left(\frac{1}{z}, \widetilde{W}_A\right)|z|}. \tag{6.3}$$

Пусть C_1 и C_2 — круги радиуса 1, касающиеся соответственно первой и второй стороны угла $\widetilde{W}_A$ в точке $\lambda=0$ и лежащие вне этого угла. Объединение множеств C_1 и C_2 обозначим через C. Легко видеть, что если $\lambda \in C$, то $d(\lambda, \widetilde{W}_A)$ при данном $|\lambda|$ будет наименьшим, когда λ лежит на границе C и хорда, направленная от точки O к λ, образует острый угол с одной из сторон угла $\widetilde{W}_A$. Для этой точки λ легко видеть, что

$$d(\lambda, \widetilde{W}_A) = |\lambda|^2/2.$$

Отсюда следует, что

$$d(\lambda, \widetilde{W}_A) \geqslant |\lambda|^2/2 \quad (\lambda \in C). \tag{6.4}$$

Преобразование $z=\frac{1}{\lambda}$ отображает область C во внешность некоторого угла W' раствора θ_A. Следовательно, согласно (6.3) и (6.4)

$$|(I-zA)^{-1}|\leqslant 2|z| \quad (z\,\bar{\in}\, W')$$

и

$$\sup_{z\bar{\in}W'}|A(z)|=\sup_{z\bar{\in}W'}\left|\frac{(I-zA)^{-1}-I}{z}\right|<\infty.$$

В частности, на сторонах угла W' целая оператор-функция $A(z)$ ограничена. А так как, кроме того, выполняется (6.2), то по теореме Фрагмена — Линделефа (см. Титчмарш [1]) функция $A(z)$ ограничена и внутри угла W', а следовательно, и во всей плоскости. Тогда по теореме Лиувилля

$$A(z)=A+zA^2+\ldots=A.$$

Отсюда $A^2=0$, т. е. если $g=Af$, то $Ag=0$. Но так как оператор A диссипативен, то тогда и $A^*g=0$, т. е. $A^*Af=0$ и $Af=0$ $(f\in\mathfrak{H})$.

Теорема доказана.

Замечание 6.1. Покажем, что если теорема 6.1 доказана для операторов A со значениями угла $\theta_A\leqslant\theta_0$ $(0<\theta_0<\pi)$, то отсюда уже следует ее справедливость для операторов A с углами $\theta_A>\theta_0$. В самом деле, пусть A — некоторый оператор, который удовлетворяет условию

$$|\arg(Af,\ f)|\leqslant\theta/2 \quad (f\in\mathfrak{H}). \tag{6.5}$$

В этом случае степень $A^{\varkappa}$ $(0<\varkappa<1)$ естественно определить равенством (см. Т. Като [1], Филлипс [1], В. И. Мацаев и Ю. А. Палант [1])

$$A^{\varkappa}=\frac{\sin\pi\varkappa}{\pi}\int_0^{\infty}\lambda^{\varkappa}\left((A+\lambda I)^{-1}-\frac{1}{\lambda}I\right)d\lambda.$$

Сравнительно просто проверяется, что

$$|\arg(A^{\varkappa}f,\ f)|\leqslant\frac{\theta\varkappa}{2}.$$

Непосредственно проверяется, что если $\lambda_0=|\lambda_0|\,e^{i\varphi}$ $(\varphi<\theta/2)$ — нормальное собственное число оператора A, то $\lambda_0^{\varkappa}=|\lambda_0|^{\varkappa}e^{i\varkappa\varphi}$ — нормальное собственное число оператора $A^{\varkappa}$, причем соответствующие корневые подпространства $\mathfrak{L}_{\lambda_0}(A)=\mathfrak{L}_{\lambda_0^{\varkappa}}(A^{\varkappa})$ совпадают.

Можно также утверждать (см. В. И. Мацаев и Ю. А. Палант [1]), что если $A\in\mathfrak{S}_\infty$, то $A^{\varkappa}\in\mathfrak{S}_\infty$ и

$$s_{2n}(A^{\varkappa})\leqslant Cs_n^{\varkappa}(A) \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

где C — константа, зависящая только от $\varkappa$. Поэтому если для оператора A выполняется условие (6.5) при $\theta=\theta_A$ и если $s_n(A)=o(n^{-1/p})$ $(n\to\infty)$ при $p=\pi/2\theta$, то для оператора $B=A^{\varkappa}$ будем иметь $\theta_B\leqslant\theta_A\varkappa$ и $s_n(B)=o(n^{-\varkappa/p})$ $(n\to\infty.)$ Следовательно, всякий такой оператор будет удовлетворять условиям теоремы 6.1, что и объясняет сделанное утверждение.

Замечание 6.2. Из-за недостатка места здесь не излагаются важные исследования В. Б. Лидского [7—9] о возможности суммирования обобщенным методом Абеля формальных разложений произвольного элемента $f\in\mathfrak{H}$ по корневым векторам оператора A, удовлетворяющего условиям, близким к условиям теоремы 6.1. По этому поводу см. также статьи В. И. Мацаева [5] и А. С. Маркуса [5].

3. Теорема IV.11.2 В. И. Мацаева и авторов для случая $p>1$ позволяет получить следующее усиление теоремы 6.1.

Теорема 6.2. *Пусть $A\in\mathfrak{S}_\infty$ и пусть выполняются следующие два условия*:

1) $\theta_A=\dfrac{\pi}{p}$, *где* $p>1$;

2) *при некотором* α *для оператора* $B=[e^{i\alpha}A]_{\mathcal{J}}$:

$$s_n(B)=o(n^{-1/p})\qquad(n\to\infty).\tag{6.6}$$

Тогда система всех корневых векторов оператора A полна в $\mathfrak{H}$.

Доказательство этой теоремы дословно повторяет доказательство теоремы 6.1, если дополнительно учесть, что из соотношения (6.6) для вольтеррова оператора A вытекает соотношение (6.1).

Сделаем некоторое пояснение к теореме 6.2. Пусть для конкретности оператор A удовлетворяет условию (6.5). Легко видеть, что это условие эквивалентно следующему:

$$|(A_{\mathcal{J}}f,\ f)|\leqslant \operatorname{tg}\theta\,(A_{\mathcal{R}}f,\ f),$$

и стало быть,

$$s_n(A_{\mathcal{J}})\leqslant \operatorname{tg}\theta\, s_n(A_{\mathcal{R}})\qquad(n=1,\ 2,\ \ldots).\tag{6.7}$$

Поэтому если для данного оператора A выполняются условия теоремы 6.2 с $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ (условие (6.6) принимает в этом случае вид $s_n(A_{\mathcal{R}})=o(n^{-1/p})$ $(n\to\infty)$), то в силу

(6.7) будет выполняться также условие теоремы 6.1. Таким образом, в этом случае теорема 6.2 не будет давать ничего нового по сравнению с теоремой 6.1. Наоборот, при $\alpha=0$ условие (6.6) означает, что $s_n(A_{\mathcal{J}})=o(n^{-1/p})$ и в этом случае мы получаем явное усиление теоремы 6.1. Легко видеть, что вообще усиление теоремы 6.1 получается при значениях α из интервала $|\alpha|\leqslant\theta_A$.

Поясним еще, что в теореме 6.2 пришлось исключить случай $p=1$, так как для вольтеррова оператора A из соотношения

$$s_n(A_{\mathcal{J}})=o(n^{-1}) \qquad (n\to\infty)$$

не вытекает аналогичное соотношение для самого оператора (см. пример в п. 3 § 7 гл. IV).

Теорема 6.1 и, тем более, теорема 6.2 является «точной»: условие (6.6) в ней нельзя заменить условием

$$s_n(A)=O(n^{-1/p}) \qquad (n\to\infty).$$

Действительно, рассмотрим в $L_2(0,1)$ вольтерров оператор $T=J^\nu$:

$$(J^\nu f)(t)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t (t-s)^{\nu-1} f(s)\,ds \qquad (f\in L_2(0,1)),$$

где $\nu=1/p$. Тогда можно показать (см. замечание 6.1), что, с одной стороны,

$$|\arg(Tf,f)|\leqslant\frac{\pi\nu}{2},$$

а с другой стороны,

$$s_n(T)=O(n^{-\nu}) \qquad (n\to\infty),$$

следовательно,

$$s_n(\cos\alpha\, T_{\mathcal{R}}+\sin\alpha\, T_{\mathcal{J}})=O(n^{-\nu}) \qquad (n\to\infty).$$

Этим примером авторы обязаны Б. Я. Левину и В. И. Мацаеву.

В качестве простого следствия теоремы 6.2 получается

Теорема 6.3. *Пусть $A\,(\in\mathfrak{S}_\infty)$ — оператор с неотрицательными эрмитовыми компонентами и пусть для некоторого α оператор $B=[e^{i\alpha}A]_{\mathcal{J}}$ принадлежит $\mathfrak{S}_2$ или*

(*более общее условие*)

$$s_n(B) = o(1/\sqrt{n}) \qquad (n \to \infty).$$

Тогда система корневых векторов оператора A полна в $\mathfrak{H}$.

Действительно, если компоненты $A_{\mathcal{R}}$ и $A_{\mathcal{J}}$ неотрицательны, то все значения формы

$$(Af, f) = (A_{\mathcal{R}}f, f) + i(A_{\mathcal{J}}f, f)$$

принадлежат первому квадранту, и следовательно, $\theta_A \leqslant \pi/2$.

Последней теореме предшествовала более простая теорема В. Б. Лидского [4].

Пусть $A \in \mathfrak{S}_2$ и его эрмитовы компоненты неотрицательны, тогда система корневых векторов оператора A полна в $\mathfrak{H}$.

Приведем элементарное доказательство этой теоремы, найденное В. Б. Лидским.

В силу леммы 1.2 доказательство теоремы сводится к доказательству того, что не существует простого вольтеррова оператора, удовлетворяющего условиям теоремы.

Допустим противное, а именно, что некоторый оператор A, удовлетворяющий условиям теоремы, является простым и вольтерровым.

Так как по условию $A \in \mathfrak{S}_2$, то $A^2 \in \mathfrak{S}_1$. С другой стороны, вместе с A и оператор A^2 вольтерров, так что:

$$\operatorname{sp} A^2 = \operatorname{sp}(A_{\mathcal{R}}^2 - A_{\mathcal{J}}^2) + 2i \operatorname{sp}(A_{\mathcal{R}}A_{\mathcal{J}}) = 0.$$

Так как согласно теореме III.8.3 след $\operatorname{sp}(A_{\mathcal{R}}A_{\mathcal{J}})$ — число вещественное, то заключаем, что $\operatorname{sp}(A_{\mathcal{R}}A_{\mathcal{J}}) = 0$. Но тогда в силу той же теоремы III.8.3 операторы $A_{\mathcal{R}}$ и $A_{\mathcal{J}}$ перестановочны (и, более того, $A_{\mathcal{R}}A_{\mathcal{J}} = 0$). Таким образом, оператор A нормален и, следовательно, не может быть вольтерровым (равенство A нулю исключается в силу условия простоты оператора). Полученное противоречие доказывает теорему В. Б. Лидского. После появления теоремы Л. А. Сахновича (см. п. 3 § 11 гл. IV) оба эти автора заметили, что условие $A \in \mathfrak{S}_2$ может быть заменено условием $[e^{i\alpha}A]_{\mathcal{J}} \in \mathfrak{S}_2$.

4. Привлекая сравнительно сложные теоретико-функциональные средства, В. И. Мацаев установил следующее предложение.

Теорема 6.4 (В. И. Мацаев [5]). *Система корневых векторов вполне непрерывного диссипативного оператора A полна в $\mathfrak{H}$, коль скоро*

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{n(\rho;\,A_{\mathcal{J}})}{\rho^2}=0 \tag{6.8}$$

и выполняется по крайней мере одно из двух условий:

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{n_+(\rho;\,A_{\mathcal{R}})}{\rho}=0 \quad \text{или} \quad \lim_{\rho\to\infty}\frac{n_-(\rho;\,A_{\mathcal{R}})}{\rho}=0. \tag{6.9}$$

Теорема IV.11.2 позволяет заменить условие (6.8) более общим, а именно, условием

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{n(\rho;\,\cos\alpha A_{\mathcal{R}}+\sin\alpha A_{\mathcal{J}})}{\rho}=0 \tag{6.10}$$

при некотором α.

В такой формулировке теорема представляет собой значительное усиление теоремы 6.3.

В частности, если в условии (6.10) выбрать $\alpha=0$, то мы придем еще и к такому признаку:

Теорема 6.5 (В. И. Мацаев [5]). *Система корневых векторов вполне непрерывного диссипативного оператора A полна в $\mathfrak{H}$, коль скоро выполняется хотя бы одна из двух пар условий:*

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{n_+(\rho;\,A_{\mathcal{R}})}{\rho}=0 \quad \text{и} \quad \lim_{\rho\to\infty}\frac{n_-(\rho;\,A_{\mathcal{R}})}{\rho^2}=0$$

или

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{n_+(\rho;\,A_{\mathcal{R}})}{\rho^2}=0 \quad \text{и} \quad \lim_{\rho\to\infty}\frac{n_-(\rho;\,A_{\mathcal{R}})}{\rho}=0.$$

§ 7. Две леммы о резольвентах нормальных операторов

Первой из этих лемм, по-видимому, уже пользовался М. В. Келдыш [1] (см. также Д. Э. Аллахвердиев [1]). Вторая лемма в настоящей формулировке приводится впервые, хотя ее доказательство целиком заимствовано из статьи авторов [1]. Между этими двумя леммами существует тесная связь.

Лемма 7.1. *Пусть $H \in \mathfrak{S}_\infty$ — полный* *) *нормальный оператор, все характеристические числа которого, кроме, быть может, конечного числа, находятся вне угла*

$$\theta_1 < \arg\zeta < \theta_2 \quad (0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 \leqslant 2\pi),$$

и $T \in \mathfrak{S}_\infty$.

Тогда при любом $\varepsilon > 0$ в угле F_ε:

$$\theta_1 + \varepsilon \leqslant \arg\zeta \leqslant \theta_2 - \varepsilon$$

равномерно выполняется предельное соотношение

$$\lim_{\zeta\to\infty} |T(I-\zeta H)^{-1}| = 0.$$

Доказательство. Как известно **), для нормального оператора H выполняется оценка:

$$|(H-\lambda I)^{-1}| = 1/d(\lambda),$$

где $d(\lambda)$ — расстояние числа λ до спектра оператора H. Следовательно,

$$|(I-\zeta H)^{-1}| = \frac{|\zeta^{-1}|}{d(1/\zeta)}.$$

При достаточно больших $\zeta \in F_\varepsilon$ с фиксированным модулем $|\zeta|$ величина $d(1/\zeta)$ будет наименьшей, когда точка ζ лежит на сторонах угла F_ε. В последнем случае легко видеть, что

$$\frac{|\zeta^{-1}|}{d(1/\zeta)} \leqslant \frac{1}{\sin\varepsilon}.$$

Таким образом, для достаточно больших $\zeta \in F_\varepsilon$

$$|(I-\zeta H)^{-1}| \leqslant \frac{1}{\sin\varepsilon}. \tag{7.1}$$

Выбрав произвольное $\delta > 0$, представим оператор T в виде: $T = K + M$, где K — конечномерный оператор

$$K = \sum_{j=1}^{n} (\cdot,\ \psi_j)\varphi_j \qquad (|\varphi_j| = 1,\ j = 1, 2, \ldots, n),$$

*) Нормальный оператор H называется *полным*, если он аннулируется только на нулевом векторе.

**) Это легко вывести из спектрального представления для нормального оператора.

а оператор M имеет малую норму, именно:

$$|M| < \frac{1}{2}\delta \sin \varepsilon.$$

Согласно оценке (7.1) при достаточно больших $\zeta \in F_\varepsilon$

$$|M(I-\zeta H)^{-1}| < \frac{|M|}{\sin\varepsilon} < \frac{\delta}{2}.$$

Так как по условию H — полный нормальный оператор из $\mathfrak{S}_\infty$, то

$$(I-\zeta H)^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_j(\cdot, e_j)e_j}{\mu_j-\zeta},$$

где $\{e_j\}_1^\infty$ — полная ортонормированная последовательность собственных векторов оператора H, а $\{\mu_j\}_1^\infty$ — соответствующая последовательность характеристических чисел оператора H.

Выберем число N, а затем и число $R\ (>0)$ настолько большими, что

$$\left(\sum_{j=N+1}^{\infty} |(\psi_k, e_j)|^2\right)^{1/2} < \frac{\delta\sin\varepsilon}{4n} \qquad (k=1, 2, \ldots, n), \quad (7.2)$$

$$\left(\sum_{j=1}^{N} \left|\frac{\mu_j}{\mu_j-\zeta}\right|^2 |(\psi_k, e_j)|^2\right)^{1/2} < \frac{\delta}{4\pi}$$
$$(|\zeta| \geqslant R;\ k=1, 2, \ldots, n). \quad (7.3)$$

Учитывая, что для любого $f\in\mathfrak{H}$

$$K(I-\zeta H)^{-1}f = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_j(\psi_k, e_j)(f, e_j)}{\mu_j-\zeta}\varphi_k,$$

получаем:

$$|K(I-\zeta H)^{-1}f| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{\mu_j}{\mu_j-\zeta}(\psi_k, e_j)\right|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|(f, e_j)|^2\right)^{1/2},$$

и стало быть,

$$|K(I-\zeta H)^{-1}f| \leqslant |f| \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\mu_j|^2}{|\mu_j-\zeta|^2} |(\psi_k, e_j)|^2 \right)^{1/2}.$$

Так как

$$\frac{|\mu_j|}{|\mu_j-\zeta|} = \frac{|\zeta^{-1}|}{|\zeta^{-1}-\mu_j^{-1}|} \leqslant \frac{|\zeta^{-1}|}{d(1/\zeta)} \leqslant \frac{1}{\sin\varepsilon} \qquad (\zeta \in F_\varepsilon;\ |\zeta| \geqslant R),$$

то на основании (7.2) и (7.3) заключаем, что

$$|K(I-\zeta H)^{-1}f| < \frac{\varepsilon}{2}|f| \qquad (\zeta \in F_\varepsilon;\ |\zeta| \geqslant R).$$

Таким образом,

$$|T(I-\zeta H)^{-1}| \leqslant |K(I-\zeta H)^{-1}| + |M(I-\zeta H)^{-1}| < \varepsilon$$
$$(\zeta \in F_\varepsilon;\quad |\zeta| \geqslant R).$$

Лемма доказана.

Лемма 7.1 сохраняет силу и в случае, когда H — произвольный (даже неограниченный) нормальный оператор, не обращающийся в нуль ни на одном ненулевом векторе. В этом общем случае лемма в свою очередь вытекает из одного более точного предложения. Сформулируем последнее лишь для случая самосопряженного H.

Лемма 7.2. *Пусть H — произвольный самосопряженный оператор, $\mathfrak{S}$ — любой сепарабельный с. н. идеал и B — некоторый замкнутый оператор, обладающий двумя свойствами:*

а) *область определения $\mathfrak{D}(B)$ оператора B содержит область определения $\mathfrak{D}(H)$ оператора H;*

б) *хотя бы в одной регулярной точке λ_0 оператора H оператор $B(H-\lambda_0 I)^{-1} \in \mathfrak{S}$.*

Тогда для любого угла F с вершиной в начале координат, не содержащего ни одной точки λ ($\lambda \neq 0$) спектра оператора H, равномерно выполняется предельное соотношение:

$$\lim_{\lambda \in F;\ \lambda \to \infty} |B(H-\lambda I)^{-1}|_{\mathfrak{S}} = 0. \qquad (7.4)$$

Поясним связь между леммами 7.1 и 7.2. Заметим, что если H_1 — произвольный самосопряженный оператор, обращающийся в нуль только в нуле и $T \in \mathfrak{S}_\infty$, то оператор $T(I-\zeta H_1)^{-1}$ можно представить в виде

$$T(I-\zeta H_1)^{-1} = B(H-\zeta I)^{-1},$$

где $B = TH_1^{-1}$ и $H = H_1^{-1}$. Легко видеть, что операторы H и B удовлетворяют уже условиям последней леммы при $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_\infty$.

Доказательство. Из равенства

$$BR(\lambda) = BR(\lambda_0) + (\lambda-\lambda_0)\,BR(\lambda_0)\,R(\lambda),$$

где $R(\lambda) = (H-\lambda I)^{-1}$, вытекает, что если оператор B обладает свойством б), то $BR(\lambda) \in \mathfrak{S}$ для любой регулярной точки λ оператора H.

Предположим для простоты, что угол F имеет вид:

$$\varepsilon \leqslant \arg\lambda \leqslant \pi-\varepsilon \qquad (\varepsilon > 0).$$

Оператор $BR(z)$ можно представить в виде

$$BR(z) = BR(i) + (z-i)\,BR(i)\,R(z) = BR(i)\,Q(z), \tag{7.5}$$

где $Q(z) = I + (z-i)\,R(z)$.

Спектральное представление оператора $Q(z)$ дается формулой

$$Q(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{z-i}{\lambda-z}\right)dE_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda-i}{\lambda-z}\,dE_\lambda,$$

где E_λ — спектральная функция оператора H. Легко видеть, что если λ пробегает спектр $\sigma(H)$ оператора H, а z пробегает часть угла F, находящуюся в области $|z|>1$, то функция $\left|\frac{\lambda-i}{\lambda-z}\right|$ ограничена некоторой константой γ, и следовательно,

$$|Q(z)| \leqslant \gamma \qquad (z\in F;\ |z|>1).$$

Отметим теперь, что для любого $f \in \mathfrak{H}$

$$\lim_{z\in F;\ z\to\infty} |Q^*(z)f| = 0. \tag{7.6}$$

В самом деле,

$$|Q(z)f|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\lambda+i}{\lambda-z}\right|^2 d(E_\lambda f,\ f)\leqslant$$

$$\leqslant\int_{-N}^{N}\left|\frac{\lambda+i}{\lambda-z}\right|^2 d(E_\lambda f,\ f)+\gamma^2\left(\int_{-\infty}^{-N}+\int_{N}^{\infty}\right)d(E_\lambda f,\ f).$$

При данном f второе слагаемое можно сделать сколь угодно малым за счет выбора N, а при фиксированном N первое стремится к нулю, когда $z\to\infty$.

Для любого конечномерного оператора

$$K=\sum_{j=1}^{n}(\cdot,\ \psi_j)\,\varphi_j$$

будем иметь

$$KQ(z)=\sum_{j=1}^{n}(\cdot,\ Q^*(z)\,\psi_j)\,\varphi_j,$$

и следовательно,

$$|KQ(z)|_{\mathfrak{S}}\leqslant\sum_{j=1}^{n}|Q^*(z)\,\psi_j|\,|\varphi_j|.$$

Отсюда и из (7.6) следует, что

$$\lim_{z\in F;\ z\to\infty}|KQ(z)|_{\mathfrak{S}}=0.$$

Наконец, принимая еще во внимание равенство (7.5) и то, что оператор $BR(i)$ $(\in\mathfrak{S})$ можно аппроксимировать конечномерным по норме $\mathfrak{S}$ с любой степенью точности, получаем соотношение (7.4).

Лемма доказана.

§ 8. Теоремы о полноте системы корневых векторов слабо возмущенного самосопряженного оператора

1. Мы привели в §§ 2—6 несколько признаков полноты системы корневых векторов для несамосопряженного оператора A. Все они включали требование диссипативности этого оператора или более жесткое требование $\theta_A<\pi$.

Вместе с тем уже в первой фундаментальной работе М. В. Келдыша [1] по теории собственных и присоединенных векторов несамосопряженных операторных пучков был получен важный признак полноты системы корневых векторов несамосопряженного оператора A, в котором указанные выше требования никакой роли не играли.

Следуя М. В. Келдышу, условимся говорить, что оператор $A \in \mathfrak{S}_\infty$ имеет *конечный порядок*, если этот оператор принадлежит некоторому пространству $\mathfrak{S}_p$ $(p < \infty)$, т. е. если

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n^p(A) < \infty$$

при некотором $p\,(< \infty)$.

Нижнюю грань чисел p, для которых имеет место это соотношение, назовем *порядком* оператора A и условимся обозначать через $p(A)$,

Так как по определению $p(A)$ совпадает с порядком последовательности $\{s_n^{-1}(A)\}_{n=0}^{\infty}$, то (см. Б. Я. Левин [1], гл. I, § 4):

$$p(A) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{\ln n}{\ln(1/s_n(A))}.$$

Очевидно,

$$p(A) = p(A^*) \text{ и } p(A+B) \leqslant \max\{p(A),\ p(B)\},$$

в частности, $p(A) = \max\{p(A_{\mathcal{J}}),\ p(A_{\mathcal{R}})\}$.

Некоторые из излагаемых ниже результатов М. В. Келдыша могут быть усилены путем использования следующего предложения.

Лемма 8.1 (И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн [4]). *Если одна из эрмитовых компонент вольтеррова оператора A имеет конечный порядок $\geqslant 1$, то тот же порядок имеет и сам оператор A.*

Это предложение впервые было доказано авторами [4] (с помощью теории абстрактного треугольного интеграла). Разумеется, оно является следствием более сильной теоремы IV.11.1.

Имеет место

Теорема 8.1 (М. В. Келдыш [1]). *Пусть*

$$A = H(I+S),$$

где $H = H^*$ *и* $p(H) < \infty$, *а* $S \in \mathfrak{S}_\infty$.

Если при этом оператор A аннулируется только в нуле, то система его корневых векторов полна в $\mathfrak{H}$.

Сколь бы мало ни было $\varepsilon\ (>0)$, все собственные числа оператора A, кроме, быть может, конечного числа, лежат в углах

$$-\varepsilon<\arg\lambda<\varepsilon; \quad \pi-\varepsilon<\arg\lambda<\pi+\varepsilon \tag{8.1}$$

раствора 2ε.

Если оператор H имеет только конечное число отрицательных (положительных) собственных чисел, то оператор A имеет не более конечного числа собственных чисел в угле

$$\pi-\varepsilon<\arg\lambda<\pi+\varepsilon \quad (-\varepsilon<\arg\lambda<\varepsilon).$$

Доказательство*). Из условий теоремы следует, что оператор $I+S$ аннулируется только в нуле, и следовательно, обратим, поскольку S вполне непрерывен. Отсюда в свою очередь вытекает, что оператор H также аннулируется только в нуле и, следовательно, он является полным.

При любом $\varepsilon>0$ согласно лемме 7.1 найдется число $r>0$ такое, что в области F_ε:

$$\varepsilon\leqslant|\arg\zeta|\leqslant\pi-\varepsilon, \quad |\zeta|\geqslant r \tag{8.2}$$

будем иметь

$$|T(I-\zeta H)^{-1}|<q<1,$$

где $T=I-(I-ST)^{-1}\in\mathfrak{S}_\infty$.

Если оператор H имеет только конечное число отрицательных собственных чисел, то согласно той же лемме 7.1 область F_ε можно расширить, а именно, ее определение (8.2) можно заменить следующим:

$$\varepsilon<\arg\zeta<2\pi-\varepsilon, \quad |\zeta|\geqslant r. \tag{8.3}$$

В дальнейшем будем считать, что в общем случае область F_ε определена соотношениями (8.2), а в специальном случае, когда H имеет только конечное число отрицательных собственных чисел, соотношениями (8.3).

---

*) Это доказательство несущественно отличается от доказательства М. В. Келдыша (см. М. В. Келдыш и В. Б. Лидский [1]).

Так как оператор $I-\zeta A$ представим в виде

$$I-\zeta A=[(I+S)^{-1}-\zeta H](I+S)=(I-T-\zeta H)(I+S),$$

и значит, в виде

$$I-\zeta A=(I-T(I-\zeta H)^{-1})(I-\zeta H)(I+S),$$

то этот оператор обратим в области F_ε. Именно:

$$(I-\zeta A)^{-1}=(I+S)^{-1}(I-\zeta H)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(T(I-\zeta H)^{-1})^n. \qquad (8.4)$$

Итак, мы установили обратимость оператора $I-\zeta A$ в области $\zeta\in F_\varepsilon$ и тем самым доказали последние два утверждения теоремы*).

Одновременно из равенства (8.4) и оценки

$$|(I-\zeta H)^{-1}|\leqslant\frac{1}{\sin\varepsilon}\qquad(\zeta\in F_\varepsilon)$$

мы получаем оценку:

$$|(I-\zeta A)^{-1}|\leqslant\frac{|(I+S)^{-1}|}{(1-q)\sin\varepsilon}\;(<\infty)\qquad(\zeta\in F_\varepsilon). \qquad (8.5)$$

Перейдем теперь к доказательству первого утверждения теоремы.

Как обычно, обозначим через $\mathfrak{E}$ линейную замкнутую оболочку всех корневых векторов оператора A. Нам надлежит доказать, что $\mathfrak{E}=\mathfrak{H}$.

Допустим противное, что $\mathfrak{E}\neq\mathfrak{H}$.

Обозначим через P ортопроектор, проектирующий $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{E}$. Тогда согласно лемме 1.4.2 оператор $A_1=QAQ$ $(Q=I-P)$ — вольтерров, и оператор-функция $(I-\zeta A_1)^{-1}$ является целой.

Согласно предложению 2° § 1 гл. I

$$(I-\zeta A_1)^{-1}=Q(I-\zeta A)^{-1}Q+P\qquad(\zeta\in F_\varepsilon),$$

и следовательно, в силу (8.5) оператор-функция $(I-\zeta A_1)^{-1}$ ограничена в области F_ε. С другой стороны, $A_1\in\mathfrak{S}_p$ при

*) Отметим, что предыдущие рассуждения, а следовательно, и эти два утверждения сохраняют силу для любого ограниченного (и даже неограниченного) полного самосопряженного оператора H.

$p > p(H)$ и по теореме 5.2

$$\ln |(I-\zeta A_1)^{-1}| = o(|\zeta|^p) \quad (\zeta \to \infty). \tag{8.6}$$

Выберем теперь $\varepsilon < \pi/p$. Так как на сторонах вертикальных углов

$$|\arg \zeta| \leqslant \varepsilon, \quad |\pi - \arg \zeta| \leqslant \varepsilon,$$

оператор-функция $(I-\zeta A_1)^{-1}$ ограничена, то по теореме Фрагмена—Линделефа из (8.6) следует, что оператор-функция $(I-\zeta A_1)^{-1}$ ограничена и внутри этих углов. Таким образом, целая оператор-функция $(I-\zeta A_1)^{-1}$ ограничена на всей комплексной плоскости. Отсюда следует, что $(I-\zeta A_1)^{-1} \equiv I$ и

$$A_1 = QAQ = QA = 0.$$

Но тогда $A^*Q = 0$, т. е. оператор A^* аннулирует все подпространство $Q\mathfrak{H}$. Последнее приводит к противоречию, ибо оператор $A^* = (I+S^*)H$ обращается в нуль только в нуле.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 8.1. При выполнении условий теоремы 8.1 можно также утверждать, что и *система корневых векторов сопряженного оператора A^* полна в $\mathfrak{H}$* *). В самом деле, оператор $A_1 = H(I+S^*)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 8.1, а оператор $A^* = (I+S^*)H$ ему подобен: $A^* = (I+S^*)A_1(I+S^*)^{-1}$.

Вообще заметим, что если оператор A обладает полной системой корневых векторов, то этим свойством будет обладать и всякий подобный ему оператор $W^{-1}AW$ $(W, W^{-1} \in \mathfrak{R})$. Отсюда вытекает, что теорема 8.1 допускает обобщение на случай оператора A вида $A = (I+S_1)H(I+S_2)$, где $S_j \in \mathfrak{S}_\infty$ $(j = 1, 2)$ и операторы $I+S_j$ $(j = 1, 2)$ обратимы.

---

*) Из полноты системы корневых векторов оператора A, вообще говоря, не следует полнота системы корневых векторов оператора A^*. Как заметил А. С. Маркус, из результатов Г. Гамбургера [1] вытекает существование оператора $A \in \mathfrak{S}_1$, который обладает полной системой собственных векторов, соответствующих ненулевым собственным значениям, и в то же время ортогональное дополнение в $\mathfrak{R}(A^*)$ к линейной замкнутой оболочке всех корневых векторов оператора A^* бесконечномерно.

В самом деле, если положить $I+S=(I+S_2)(I+S_1)$, а $A_1=H(I+S)$, то $A=W^{-1}A_1W$, где $W=(I+S_1)^{-1}$.

2. Теорема 8.1 является частным следствием общей теоремы М. В Келдыша о n-кратной полноте собственных и присоединенных векторов операторного пучка определенной структуры. Эта общая теорема занимает весь следующий, девятый, параграф. В интересующем нас здесь частном случае $n=1$ теорема формулируется следующим образом.

Теорема 8.2 (М. В. Келдыш [1]). *Система собственных и присоединенных векторов линейного пучка*

$$L(\lambda)=I-T-\lambda H \tag{8.7}$$

полна в $\mathfrak{H}$, коль скоро H — полный самосопряженный оператор конечного порядка, а T — произвольный оператор из $\mathfrak{S}_\infty$.

Поясним новые понятия, которые встретились в формулировке последней теоремы.

Число λ_0 называется *характеристическим числом* пучка $L(\lambda)$, если уравнение $L(\lambda_0)\varphi=0$ имеет ненулевые решения. Последние называются *собственными векторами* пучка $L(\lambda)$, отвечающими характеристическому числу λ_0.

Векторы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ называются *присоединенными векторами* к собственному вектору φ_0 $(L(\lambda_0)\varphi_0=0)$, если

$$\varphi_r-T\varphi_r-\lambda_0H\varphi_r=H\varphi_{r-1} \qquad (r=1, 2, \ldots, k). \tag{8.8}$$

Покажем теперь, что теоремы 8.1 и 8.2 эквивалентны, т. е. что каждая из них является следствием другой. Для этого выясним сперва ряд общих свойств пучка (8.7) в единственном предположении, что H — полный самосопряженный оператор из $\mathfrak{S}_\infty$.

Без ограничения общности можно считать, что оператор $I-T$ обратим. В самом деле, замена параметра $\lambda\longrightarrow\lambda+a$ в пучке (8.7), очевидно, не изменяет его собственных и присоединенных векторов, и лишь сдвигает на a спектр характеристических чисел пучка. При таком сдвиге пучок (8.7) переходит в пучок

$$L(\lambda+a)=I-T-aH-\lambda H. \tag{8.9}$$

С другой стороны, если выбрать невещественное a так, чтобы $|(I-aH)^{-1}T|<1$, то оператор

$$I-T-aH=(I-aH)[I-(I-aH)^{-1}T]$$

будет обратим.

Итак, предполагая существование ограниченного оператора $(I-T)^{-1}$, можно написать

$$(I-T)^{-1}=I+S,$$

где S — некоторый вполне непрерывный оператор.

Очевидно, умножение слева любого пучка $L(\lambda)$ на некоторый непрерывный и обратимый оператор U не меняет его собственных и присоединенных векторов.

Умножим пучок (8.7) слева на оператор $U=(I-T)^{-1}$; тогда он перейдет в пучок $L_1(\lambda)=I-\lambda A_1$, где $A_1=$ $=(I+S)H$.

Пусть λ_0 — некоторое характеристическое число пучка $L_1(\lambda)$, а $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ — некоторая цепочка из собственного и присоединенных векторов, соответствующая этому числу λ_0, т. е.

$$(I-\lambda_0 A_1)\varphi_0=0, \quad (I-\lambda_0 A_1)\varphi_k=A_1\varphi_{k-1} \quad (k=1, 2, \ldots, m).$$

Первое соотношение показывает, что φ_0 — собственный вектор оператора A_1, а из последующих вытекает равенство:

$$(I-\lambda_0 A_1)^{k+1}\varphi_k=A_1(I-\lambda_0 A_1)^k\varphi_{k-1}=\ldots$$
$$\ldots=A_1^k(I-\lambda_0 A_1)\varphi_0=0.$$

Таким образом, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — суть корневые векторы оператора A.

Обратно, если φ — некоторый, отвечающий числу λ_0 корневой вектор оператора A_1 порядка k, т. е. если $(I-\lambda_0 A_1)^k\varphi\neq 0$, $(I-\lambda_0 A_1)^{k+1}\varphi=0$, то, полагая $\varphi_k=\varphi$,

$$\varphi_{k-1}=-\sum_{p=1}^{k+1}\binom{k+1}{p}(-\lambda_0)^p A_1^{p-1}\varphi_k-\lambda_0\varphi_k,$$

будем иметь:

$$(I-\lambda_0 A_1)\varphi_k-A_1\varphi_{k-1}=(I-\lambda_0 A_1)^{k-1}\varphi_k=0,$$

и следовательно,

$$A_1(I-\lambda_0 A_1)^k \varphi_{k-1} = (I-\lambda_0 A_1)^{k+1}\varphi_k = 0,$$
$$(I-\lambda_0 A_1)^k \varphi_{k-1} = 0.$$

Аналогичным образом по φ_{k-1} строится вектор φ_{k-2}, а затем по φ_{k-2}—вектор φ_{k-3} и т. д., пока не восстановится вся цепочка векторов $\varphi_k, \varphi_{k-1}, \ldots, \varphi_0$ $(\neq 0)$, удовлетворяющих соотношениям (8.8) *).

Тем самым доказано, что характеристические числа пучка (8.7) совпадают с характеристическими числами вполне непрерывного оператора A, и линейная оболочка собственных и присоединенных векторов пучка (8.7), отвечающих какому-либо характеристическому числу λ_0 пучка (8.7), совпадает с корневым подпространством оператора A_1, отвечающим тому же характеристическому числу. Размерность этой оболочки (корневого подпространства) и называется *алгебраической кратностью* характеристического числа λ_0 пучка (8.7).

Отсюда следует (независимо от того, допускает или нет оператор $I-T$ непрерывное обращение), что спектр характеристических чисел пучка (8.7) *дискретен*, т. е. каждое характеристическое число имеет конечную кратность и предельной точкой для спектра всех этих чисел может быть лишь точка ∞.

Одновременно показано, что при условии обратимости оператора $I-T$ полнота системы корневых векторов оператора $A_1=(I+S)H$, где $(I-T)^{-1}=I+S$, означает то же, что полнота системы собственных и присоединенных векторов линейного пучка $L(\lambda)=I-T-\lambda H$. При этом оператор A_1 можно заменить подобным оператором $A=H(I+S)=(I+S)^{-1}A_1(I+S)$.

3. При анализе доказательства теоремы 8.1 М. В. Келдыша легко обнаруживается, что лемма 8.1 о связи между компонентами вольтеррова оператора позволяет ослабить условия этой теоремы. А именно, теорема 8.1 остается в силе, если в ее формулировке условие $p(H)<\infty$ заменить более слабым условием $p([HS]_{\mathcal{J}})<\infty$ $([HS]_{\mathcal{J}}= =(HS-S^*H)/2i)$. При этой замене прежнее доказа-

*) Заметим, что для неограниченного оператора $B=A_1^{-1}= =H^{-1}(I-T)$ цепочка $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$ является цепочкой Жордана.

тельство останется в силе, если будет *дополнительно* показано, что фигурирующий в этом доказательстве вольтерров оператор $A_1 = QH(I+S)Q$ имеет конечный порядок.

Мнимая компонента оператора A_1 равна, очевидно, оператору $Q(HS - S^*H)Q/2i \in \mathfrak{S}_p$ при некотором $p\ (< \infty)$. Так как оператор A_1 — вольтерров, то по лемме (8.1) $p(A_1) < \infty$.

Аналогичное обобщение допускает теорема 8.2 для линейного пучка; именно:

Теорема 8.3. *Пусть $H\ (\in \mathfrak{S}_\infty)$ — полный самосопряженный оператор, а $T \in \mathfrak{S}_\infty$. Тогда система собственных и присоединенных векторов линейного пучка $I - T - \lambda H$ полна в $\mathfrak{H}$, коль скоро $p([HT]_{\mathcal{J}}) < \infty$.*

Доказательство. Заметим, что для сдвинутого пучка $L_1(\lambda) = L(\lambda + a) = I - T_1 - \lambda H$ оператор T_1 равен $T - aH$, а следовательно, $T_1H - HT_1^* = TH - HT^*$, если a вещественно. Поэтому без ограничения общности можно считать оператор $I - T$ обратимым, а в этом случае полнота системы собственных и присоединенных векторов пучка эквивалентна полноте системы корневых векторов оператора $A = H(I-T)^{-1} = H(I+S)$. Если при некотором $p > 0$ оператор $HT - T^*H \in \mathfrak{S}_p$, то $H(I-T) - (I-T^*)H \in \mathfrak{S}_p$, а следовательно, $(I - T^*)^{-1}H - H(I-T)^{-1} \in \mathfrak{S}_p$. Отсюда:

$$HS - S^*H = H(I+S) - (I+S^*)H = \\ = H(I-T)^{-1} - (I-T^*)^{-1}H \in \mathfrak{S}_p.$$

А при этом условии полнота системы корневых векторов оператора A была установлена.

В заключение отметим, что В. И. Мацаев [2] показал с помощью других средств, что теорема 8.1 остается в силе, если в ее формулировке условие $p(H) < \infty$ заменить условием $S \in \mathfrak{S}_\omega$. Поэтому остается в силе теорема 8.2, если в ней заменить условие $p(H) < \infty$ условием $T \in \mathfrak{S}_\omega$. В сообщении В. И Мацаева [5] можно найти ряд других обобщений теорем М. В. Келдыша *).

*) В недавнем сообщении А. С. Маркуса [5] приведено обобщение теорем М. В. Келдыша на случай банахова пространства. В этой же заметке и в статье Ю. И. Любича [2] содержатся также другие признаки полноты для операторов в банаховых пространствах.

4. В случае, когда оба оператора H и S являются самосопряженными, теорема 8.1 допускает уточнение:

1°. *Система корневых векторов оператора $A = H(I+S)$ полна в $\mathfrak{H}$, коль скоро H и S — вполне непрерывные самосопряженные операторы и оператор A аннулируется только в нуле.*

Приведем доказательство этого предложения. При указанных условиях операторы H и $I+S$, очевидно, являются полными.

Введем в $\mathfrak{H}$ новое (возможно, индефинитное) скалярное произведение, полагая:

$$\{f, g\} = ((I+S)f, g) = (Jf, g) \qquad (J = I+S). \tag{8.10}$$

По отношению к этому произведению оператор A будет самосопряженным:

$$\{Af, g\} = \{f, Ag\} \qquad (f, g \in \mathfrak{H}).$$

Если оператор J положителен *) (все собственные числа S больше -1), то в этом и только этом случае произведение $\{f, g\}$ будет дефинитным, т. е. $\{f, f\} > 0$ при $f \neq 0$. При этом нормы $|f| = \sqrt{(f, f)}$ и $|f|_1 = \sqrt{\{f, f\}}$ топологически эквивалентны.

Учитывая (8.10), заключаем, что в этом случае спектр оператора A будет вещественным и у оператора A будет существовать полная в $\mathfrak{H}$ и притом J-*ортонормированная* система собственных векторов $\{e_j\}_1^\infty$, т. е.

$$(Je_j, e_k) = \{e_j, e_k\} = \delta_{jk} \qquad (j, k = 1, 2, \ldots)$$

Система $\{e_j\}_1^\infty$ будет составлять некоторый базис Рисса (см. определение в § 2 гл. VI).

Рассмотрим второй возможный случай, когда у S имеются собственные числа < -1 и, стало быть, скалнрное произведение $\{f, g\}$ индефинитно **). В этом случае пространство $\mathfrak{H}$ распадается в ортогональную сумму инвариантных относительно S подпространств

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2,$$

где $\mathfrak{H}_1$ — конечномерное подпространство, в котором собственные числа S меньше -1, а $\mathfrak{H}_2$ — бесконечномерное подпространство, в котором собственные числа S больше -1.

Очевидно, форма $\{f, f\}$ на $\mathfrak{H}_1$ будет отрицательна, а на $\mathfrak{H}_2$ положительна; кроме того, на $\mathfrak{H}_2$ нормы $|f|$ и $|f|_1$ топологически эквивалентны.

Таким образом, пространство $\mathfrak{H}$ с индефинитным скалярным произведением $\{f, g\}$ можно рассматривать как некоторое пространство Понтрягина $\Pi_\varkappa$, где $\varkappa$ — размерность $\mathfrak{H}_1$ (см. Л. С. Понтрягин [1] и И. С. Иохвидов и М. Г. Крейн [1]).

*) Для пучка (8.7) этому случаю соответствует случай, когда оператор $I - T\ (= (I+S)^{-1})$ положителен.

**) Точка $\lambda = -1$ регулярна для оператора S, поскольку $I+S$ аннулируется только в нуле и $S \in \mathfrak{S}_\infty$.

Так как A — вполне непрерывный самосопряженный в $\Pi_\varkappa$ оператор, аннулирующийся только в нуле, то по теореме И. С. Иохвидова [1] система корневых векторов A полна в $\mathfrak{H}$.

Этот результат в сочетании с результатами Л. С. Понтрягина [1] позволяет также высказать утверждение:

2°. *При выполнении условий предложения 1° пространство $\mathfrak{H}$ распадается в прямую сумму двух инвариантных относительно оператора A подпространств:*

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{L}+\mathfrak{N},$$

причем $\mathfrak{L}$ не более чем $2\varkappa$-мерно, а на $\mathfrak{N}$ квадратичная форма $\{f, f\}$ положительна, так что оператор A имеет в $\mathfrak{N}$ полную J-ортонормированную систему собственных векторов $\{e_j\}_1^\infty$, которым отвечают вещественные собственные числа.

На $\mathfrak{L}$ форма $\{f, f\}$ не будет вырождаться и будет иметь точно $\varkappa$ отрицательных квадратов. Бесконечным числом способов в $\mathfrak{L}$ можно построить J-ортонормированный базис, который вместе с базисом (e_j) подпространства $\mathfrak{N}$ составит базис Рисса (см. § 2 гл. VI) всего пространства $\mathfrak{H}$.

Структура корневых подпространств оператора A в $\mathfrak{L}$ будет определяться известными предложениями о структуре корневых линеалов линейного оператора, действующего в конечномерном пространстве с индефинитной метрикой, по отношению к которой он самосопряжен (см. Л. С. Понтрягин [1], И. С. Иохвидов и М. Г. Крейн [1] и А. И. Мальцев [1]).

В частности, $\mathfrak{L}$ будет содержать в себе все корневые линеалы оператора A, отвечающие невещественным собственным числам.

Легко показать, что если H — положительный оператор, то подпространство $\mathfrak{L}$ состоит только из нуля.

§ 9. Теоремы о кратной полноте системы собственных и присоединенных векторов операторного пучка

1. Постановка вопроса о кратной полноте возникла у М. В. Келдыша [1] в связи с рассмотрением для вектор-функций $x(t)$ со значениями в $\mathfrak{H}$ операторного дифференциального уравнения вида:

$$\left(I-A_0-A_1\frac{d}{dt}-\ldots-A_n\frac{d^n}{dt^n}\right)x=0, \tag{9.1}$$

где A_j $(j=1, 2, \ldots, n)$ — некоторые операторы из $\mathfrak{S}_\infty$.

Как и для случая уравнений типа (9.1) в конечномерном пространстве, общая теория уравнений (9.1) основана на теории операторных пучков:

$$L(\lambda)=I-A_0-\lambda A_1-\ldots-\lambda^n A_n.$$

Если искать решения уравнения (9.1) в виде: $x(t) = e^{\lambda_0 t}\varphi$, где вектор φ из $\mathfrak{H}$ не зависит от t, то мы естественно придем к уравнению

$$L(\lambda_0)\varphi = 0.$$

Число λ_0 называется *характеристическим числом* пучка $L(\lambda)$, если уравнение $L(\lambda_0)\varphi = 0$ имеет нетривиальные решения $\varphi\,(\neq 0)$. Последние называются *собственными векторами* пучка $L(\lambda)$.

Если некоторая функция $x(t)$ вида

$$x(t) = e^{\lambda_0 t}\left(\frac{t^k}{k!}\varphi_0 + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\varphi_1 + \ldots + \frac{t}{1!}\varphi_{k-1} + \varphi_k\right), \quad (9.2)$$

где $\varphi_j \in \mathfrak{H}$ $(j = 0, 1, \ldots, k;\ \varphi_0 \neq 0)$, является решением уравнения (9.1), то решениями этого уравнения будут также функции

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_0 I\right) x = e^{\lambda_0 t}\left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\varphi_0 + \ldots + \frac{t}{1!}\varphi_{k-2} + \varphi_{k-1}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_0 I\right)^k x = e^{\lambda_0 t}\varphi_0.$$

Отсюда следует, что φ_0 есть собственный вектор пучка $L(\lambda)$, отвечающий числу λ_0.

Легко видеть, что функция $x(t)$ вида (9.2) будет решением уравнения (9.1) в том и только том случае, когда выполняются соотношения:

$$L(\lambda_0)\varphi_p + \frac{1}{1!}\frac{\partial L(\lambda_0)}{\partial \lambda_0}\varphi_{p-1} + \ldots + \frac{1}{p!}\frac{\partial^p L(\lambda_0)}{\partial \lambda_0^p}\varphi_0 = 0 \quad (9.3)$$

$$(p = 1, 2, \ldots, k).$$

Векторы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ называются *присоединенными векторами* к собственному вектору φ_0. Число $k+1$ называется *длиной* цепочки $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$; оно может быть как конечным, так и бесконечным. Вектор φ_0 называется собственным вектором пучка *конечного ранга* r, если наибольшая по длине цепочка, отвечающая вектору φ_0, имеет длину, равную r.

Собственное число λ_0 пучка $L(\lambda)$ называется собственным числом *конечной алгебраической кратности*, если подпространство $\mathfrak{Z}(L(\lambda_0))$ (нулей оператора $L(\lambda_0)$) конечномерно и ранги всех собственных векторов $\varphi \in \mathfrak{Z}(L(\lambda_0))$ ограничены одним и тем же числом *).

Очевидно, что при переходе от пучка $L(\lambda)$ к пучку $L_1(\lambda) = L(\lambda + a)$ (a — любое комплексное число) спектр характеристических чисел $L_1(\lambda)$ получается из спектра $L(\lambda)$ сдвигом $\lambda \longrightarrow \lambda + a$, а собственные и присоединенные векторы сохраняются.

Отметим, что метод доказательства приводимых ниже предложений состоит в сведении полиномиального операторного пучка к линейному пучку.

1°. *Если хотя бы в одной точке $\lambda = \lambda_0$ оператор*

$$L(\lambda_0) = I - \sum_{j=0}^{n} \lambda_0^j A_j \quad (A_j \in \mathfrak{S}_\infty)$$

обратим, то множество характеристических чисел пучка $L(\lambda)$ состоит из изолированных точек конечной алгебраической кратности **).

Изолированность множества характеристических чисел непосредственно следует из теоремы 1.5.1. В самом деле, $L(\lambda) - I$ является целой оператор-функцией, принимающей значения из $\mathfrak{S}_\infty$, и оператор $L(\lambda_0)$ обратим, а следовательно, в силу теоремы 1.5.1 оператор $L(\lambda)$ обратим всюду, за исключением, быть может, некоторого множества изолированных точек, являющихся характеристическими числами пучка $L(\lambda)$.

Для доказательства того, что каждое характеристическое число пучка имеет конечную алгебраическую кратность, перепишем уравнение (9.1) в виде уравнения первого порядка. С этой целью образуем гильбертово пространство $\widetilde{\mathfrak{H}}$, равное ортогональной сумме n копий пространства $\mathfrak{H}$. Тогда уравнение

$$L(\lambda) g = f \tag{9.4}$$

*) Как выяснится из последующего, под величиной алгебраической кратности собственного числа λ_0 пучка $L(\lambda)$ необходимо понимать кратность собственного числа λ_0 оператора $\widetilde{L}_1(I - \widetilde{L}_0)^{-1}$, который строится по пучку $L(\lambda)$ указанным далее способом.

**) Более общее предложение доказано А. С. Маркусом [1].

можно записать в виде системы

$$\begin{gathered} g^{(0)}-A_0 g^{(1)}-\ldots-A_{n-1}g^{(n-1)}-\lambda A_n g^{(n-1} = f, \\ g^{(1)}-\lambda g^{(0)}=0, \\ g^{(2)}-\lambda g^{(1)}=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ g^{(n-1)}-\lambda g^{(n-2)}=0, \end{gathered}$$

где $g^{(0)}=g$. Таким образом, оно эквивалентно следующему уравнению в пространстве $\widetilde{\mathfrak{H}}$:

$$\widetilde{L}(\lambda)\widetilde{g}=(\widetilde{I}+\widetilde{L}_0)\widetilde{g}-\lambda\widetilde{L}_1\widetilde{g}=\widetilde{f}, \tag{9.5}$$

где $\widetilde{g}=\{g^{(j)}\}_0^{n-1}\in\widetilde{\mathfrak{H}}$, $\widetilde{f}=\{f, 0, \ldots, 0\}\in\widetilde{\mathfrak{H}}$, а операторы $\widetilde{L}_1$ и $\widetilde{L}_0$ определяются в $\widetilde{\mathfrak{H}}$ матрицами

$$\widetilde{L}_0=\begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \ldots & A_{n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{L}_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & A_n \\ I & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & I & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & I & 0 \end{pmatrix}.$$

Из эквивалентности уравнений (9.4) и (9.5) непосредственно следует, что линейный пучок $\widetilde{L}(\lambda)$ имеет те же характеристические числа, что и пучок $L(\lambda)$.

Кроме того, нетрудно показать, что вектор $\varphi_0=\{\varphi_0^{(j)}\}_0^{n-1}$ $(\in\widetilde{\mathfrak{H}})$ будет собственным вектором пучка $\widetilde{L}(\lambda)$, отвечающим характеристическому числу λ_0, а $\varphi_p=\{\varphi_p^{(j)}\}_0^{n-1}$ $(\in\widetilde{\mathfrak{H}};\ p=1, 2, \ldots, k)$ — присоединенными векторами к φ_0 в том и только том случае, когда $\varphi_0^{(0)}$ является собственным, а $\varphi_p^{(0)}$ $(p=1, 2, \ldots, k)$ — присоединенными к нему векторами пучка $L(\lambda)$, отвечающими числу λ_0, и

$$\varphi_p^{(j)}=\frac{d^j}{dt^j}e^{\lambda_0 t}\left(\varphi_p^{(0)}+\varphi_{p-1}^{(0)}\frac{t}{1!}+\ldots+\varphi_0^{(0)}\frac{t^p}{p!}\right)\Bigg|_{t=0}$$

$$(j=1, 2, \ldots, n-1;\ p=1, 2, \ldots, k).$$

Отсюда, в частности, следует, что длины соответствующих цепочек присоединенных векторов у пучков $\widetilde{L}(\lambda)$ и $L(\lambda)$ совпадают.

Без ограничения общности можно предположить, что оператор $\widetilde{I}-\widetilde{L}_0$ обратим (в противном случае мы бы перешли от пучка $L(\lambda)$ к пучку $L(\lambda+\lambda_0)$). Поэтому в силу п. 2 § 8 (см. стр. 319) остается показать, что все ненулевые точки спектра оператора $\widetilde{L}_1(\widetilde{I}-\widetilde{L}_0)^{-1}$ являются нормальными собственными числами.

Нам уже известно, что все ненулевые точки спектра этого оператора являются изолированными точками.

Так как

$$\widetilde{L}_1^n=\begin{pmatrix} A_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix}=\|\delta_{jk}A_n\|_1^n,$$

то оператор $\widetilde{L}_1^n\in\mathfrak{S}_\infty$, а следовательно, весь его ненулевой спектр состоит из нормальных собственных чисел. Но тогда и ненулевой спектр $\widetilde{L}_1$ состоит из нормальных собственных чисел *).

Так как оператор $\widetilde{L}_1(\widetilde{I}-\widetilde{L}_0)^{-1}=\widetilde{L}_1T+\widetilde{L}_1$, где $T=(\widetilde{I}-\widetilde{L}_0)^{-1}-\widetilde{I}\in\mathfrak{S}_\infty$, то согласно лемме I.5.2 все точки $\lambda\,(\neq 0)$ являются нормальными точками оператора $\widetilde{L}_1(\widetilde{I}-\widetilde{L}_0)^{-1}$.

Предложение доказано.

2. Сопоставим каждому характеристическому числу λ_0 пучка $L(\lambda)$ и каждой отвечающей ему системе $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k$ из собственного и присоединенных векторов систему из nk векторов $\varphi_p^{(j)}$, построенных по правилу:

$$\varphi_p^{(0)}=\varphi_p \qquad (p=1, 2, \dots, k)$$

и

$$\varphi_p^{(j)}=\frac{d^j}{dt^j}e^{\lambda_0 t}\left(\varphi_p^{(0)}+\varphi_{p-1}^{(0)}\frac{t}{1!}+\dots+\frac{t^p}{p!}\varphi_0^{(0)}\right)\Big|_{t=0}$$

$$(j=1, 2, \dots, n-1;\ p=1, 2, \dots, k).$$

*) Мы пользуемся здесь следующим элементарным предложением, которое читатель легко установит сам. Пусть λ_0 — собственное число оператора A, и значит, λ_0^n — собственное число оператора A^n. Если λ_0^n является нормальным числом для оператора A^n то таковым будет λ_0 для A.

Следуя М. В. Келдышу [1], назовем систему всех собственных и присоединенных векторов пучка $L(\lambda)$ *n-кратно полной*, если объединение всех систем вида $\{\varphi_p^{(j)}\}_0^{n-1}$ $(p=1, 2, \ldots, k)$ образует полную систему в пространстве $\widetilde{\mathfrak{H}}$, равном ортогональной сумме n копий пространства $\mathfrak{H}$.

В случае $n=1$ это понятие сводится к понятию полноты в обычном смысле.

Вспоминая доказательство предложения 1°, приходим к выводу, что система собственных и присоединенных векторов пучка $L(\lambda)$ n-кратно полна в том и только том случае, когда полна система собственных и присоединенных векторов линейного пучка $\widetilde{L}(\lambda)$.

Отметим еще, что для дифференциального уравнения (9.1) n-кратная полнота системы собственных и присоединенных векторов пучка $L(\lambda)$ означает, что найдется решение $x(t)$ уравнения (9.1), являющееся линейной комбинацией решений вида (9.2) с начальными значениями $x(0)$, $x'(0)$, ..., $x^{(n-1)}(0)$, сколь угодно близкими к любым, наперед заданным.

Теорема 9.1 (М. В. Келдыш [1] *)). *Пусть H — произвольный полный нормальный оператор конечного порядка и пусть при некотором натуральном n оператор H^n самосопряжен.*

Тогда система собственных и присоединенных векторов каждого из двух сопряженных пучков

$$K(\lambda)=I-T_0-\lambda HT_1-\ldots-\lambda^{n-1}H^{n-1}T_{n-1}-\lambda^n H^n \tag{9.6}$$

и

$$K^*(\lambda)=I-T_0^*-\lambda T_1^*H-\ldots-\lambda^{n-1}T_{n-1}^*H^{n-1}-\lambda^n H^n, \tag{9.7}$$

где $T_j\in\mathfrak{S}_\infty$ $(j=0, 1, \ldots, n-1)$, n-кратно полна в $\mathfrak{H}$.

---

*) В этой статье теорема сформулирована при более ограничительных предположениях относительно пучка $K(\lambda)$, а именно:

$$K(\lambda)=I-B_0-\lambda H_1B_1-\ldots-\lambda^{n-1}H_1B_{n-1}-\lambda^n H_1,$$

где $B_0\in\mathfrak{S}_\infty$, $B_j\in\mathfrak{R}$ $(j=1, 2, \ldots, n-1)$, а H_1 — полный самосопряженный оператор конечного порядка.

В приводимой нами формулировке теорема сообщается в статье Д. Э. Аллахвердиева [1].

При любом $\varepsilon > 0$ *все характеристические числа пучка* $K(\lambda)$, *за исключением, быть может, конечного числа, лежат в углах*

$$\frac{\pi k}{n} - \varepsilon < \arg \zeta < \frac{\pi k}{n} + \varepsilon \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2n-1).$$

Доказательству этой теоремы предпошлем следующую лемму.

Лемма 9.1. *Пусть* $H \in \mathfrak{S}_\infty$ — *произвольный нормальный полный оператор, n-я степень которого* H^n — *самосопряженный оператор, и пусть* $T_j \in \mathfrak{S}_\infty$ $(j = 0, 1, \ldots \ldots, n-1)$.

Тогда для любого ε $(0 < \varepsilon < \pi/2n)$ *найдется* $\varrho \geqslant 0$ *такое, что во всех точках* λ *с* $|\lambda| \geqslant \varrho$ *из области* F_ε, *получаемой из комплексной плоскости удалением* $2n$ *углов* *)

$$|\arg z - \pi k/n| < \varepsilon \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2n-1), \tag{9.8}$$

операторный пучок

$$K(\lambda) = I - T_0 - \lambda H T_1 - \ldots - \lambda^{n-1} H^{n-1} T_{n-1} - \lambda^n H^n$$

обратим и

$$\sup_{\lambda \in F_\varepsilon;\ |\lambda| \geqslant \varrho} |K^{-1}(\lambda)| < \infty.$$

Доказательство. Пучку $K(\lambda)$ сопоставим линейный пучок $\widetilde{K}_1(\lambda) = \widetilde{I} - \widetilde{T} - \lambda \widetilde{H}$ с операторами $\widetilde{T}$ и $\widetilde{H}$, определенными в ортогональной сумме $\widetilde{\mathfrak{H}}$ n экземпляров $\mathfrak{H}$ следующими матрицами:

$$\widetilde{T} = \begin{pmatrix} T_0 & 0 & \ldots & 0 \\ T_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ T_n & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}; \qquad \widetilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & H & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & H \\ H & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор $\widetilde{T}$ вполне непрерывен, а оператор $\widetilde{H}$ является полным вполне непрерывным нормальным оператором.

*) Если оператор H^n имеет конечное число отрицательных собственных чисел, то углы (9.8) могут быть заменены следующими n углами:

$$|\arg z - 2\pi k/n| < \varepsilon \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Так как $\widetilde{H}^n = \| \delta_{jk} H^n \|_1^n$ самосопряжен, то все характеристические числа оператора $\widetilde{H}$ лежат на лучах $\arg\lambda = \pi k/n$ $(k=0, 1, \ldots, 2n-1)$, а следовательно, во всех точках $\lambda\,(\neq 0)$ из области F_ε для оператора $(\widetilde{I}-\lambda\widetilde{H})^{-1} = -\lambda^{-1}(\widetilde{H}-\lambda^{-1}\widetilde{I})^{-1}$ будем иметь:

$$|(\widetilde{I}-\lambda\widetilde{H})^{-1}| = \frac{|\lambda^{-1}|}{d(1/\lambda)} \leqslant \frac{1}{\sin\varepsilon}, \tag{9.9}$$

где $d(1/\lambda)$ — расстояние точки λ^{-1} до ближайшего из лучей $\arg z = \pi k/n$ $(k=0, 1, \ldots, 2n-1)$.

Согласно лемме 7.1

$$\lim_{\lambda\in F_\varepsilon;\ \lambda\to\infty} |\widetilde{T}(\widetilde{I}-\lambda\widetilde{H})^{-1}| = 0.$$

Выберем число ϱ (>0) так, чтобы

$$|\widetilde{T}(\widetilde{I}-\lambda\widetilde{H})^{-1}| = q < 1 \quad \text{при} \quad |\lambda| \geqslant \varrho,\ \lambda\in F_\varepsilon.$$

Тогда во всех точках λ области F_ε, для которых $|\lambda| \geqslant \varrho$, оператор $\widetilde{I}-\widetilde{T}(\widetilde{I}-\lambda\widetilde{H})^{-1}$ будет обратим, и

$$\sup_{|\lambda|\geqslant\varrho;\ \lambda\in F_\varepsilon} |(\widetilde{I}-\widetilde{T}(\widetilde{I}-\lambda\widetilde{H})^{-1})^{-1}| \leqslant \frac{1}{1-q}\ (<\infty). \tag{9.10}$$

Так как оператор $\widetilde{K}_1(\lambda)$ можно представить в виде $\widetilde{K}_1(\lambda) = (\widetilde{I}-\widetilde{T}(I-\lambda\widetilde{H})^{-1})(\widetilde{I}-\lambda\widetilde{H})$, то во всех точках $\lambda\in F_\varepsilon$ с $|\lambda|\geqslant\varrho$ он обратим и

$$\widetilde{K}_1^{-1}(\lambda) = (\widetilde{I}-\lambda\widetilde{H})^{-1}(\widetilde{I}-\widetilde{T}(\widetilde{I}-\lambda\widetilde{H})^{-1})^{-1}.$$

Отсюда в силу (9.9) и (9.10) следует, что

$$\sup_{\lambda\in F_\varepsilon;\ |\lambda|\geqslant\varrho} |\widetilde{K}_1^{-1}(\lambda)| < \infty.$$

Уравнение

$$K(\lambda)g = f, \tag{9.11}$$

очевидно, эквивалентно системе уравнений

$$\begin{gathered} g^{(0)} - T_0 g^{(0)} - \lambda H g^{(1)} = f, \\ g^{(1)} - T_1 g^{(0)} - \lambda H g^{(2)} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g^{(n-1)} - T_{n-1} g^{(0)} - \lambda H g^{(0)} = 0, \end{gathered} \tag{9.12}$$

где $g = g^{(0)}$, или, что то же самое, уравнению

$$\widetilde{K}_1(\lambda)\widetilde{g} = \widetilde{f}, \tag{9.13}$$

где $\widetilde{g} = \{g^{(j)}\}_0^{n-1}$, $\widetilde{f} = \{f, 0, \ldots, 0\} \in \widetilde{\mathfrak{H}}$. Отсюда, в частности, следует, что пучки $K(\lambda)$ и $\widetilde{K}_1(\lambda)$ имеют одни и те же характеристические числа.

Если λ не является характеристическим числом пучка $K(\lambda)$, то решение g уравнения (9.11) равно первой координате вектора $\widetilde{K}_1^{-1}(\lambda) f$, и стало быть,

$$|g| = |K^{-1}(\lambda) f| \leqslant |\widetilde{K}_1^{-1}(\lambda)\widetilde{f}| \leqslant |\widetilde{K}_1^{-1}(\lambda)|\,|f|.$$

Таким образом,

$$|K^{-1}(\lambda)| \leqslant |\widetilde{K}_1^{-1}(\lambda)| \quad (|\lambda| \geqslant \varrho;\ |\lambda| \in F_\varepsilon).$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 9.1 *). Последнее утверждение теоремы является непосредственным следствием леммы 9.1.

Без ограничения общности можно предполагать, что оператор $I + T_0$ обратим (в противном случае можно произвести в пучке $L(\lambda)$ сдвиг параметра $\lambda \to \lambda + a$ на соответствующее число a).

Как уже отмечалось, n-кратная полнота системы собственных и присоединенных векторов пучка $K(\lambda)$ совпадает с обычной полнотой системы собственных и присоединенных векторов линейного пучка $\widetilde{K}(\lambda) = \widetilde{I} - \widetilde{K}_0 - \lambda\widetilde{K}_1$, где операторы $\widetilde{K}_0$ и $\widetilde{K}_1$ определяются в $\widetilde{\mathfrak{H}}$ матрицами

$$\widetilde{K}_0 = \begin{pmatrix} T_0 & HT_1 & \ldots & H^{n-1}T_{n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & H^n \\ I & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & I & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как по предположению оператор $I - T_0$ обратим, то и оператор $\widetilde{I} - \widetilde{K}_0$ обратим. Следовательно, задача сводится к доказательству полноты системы корневых векторов оператора $\widetilde{A} = (\widetilde{I} + \widetilde{S})\widetilde{K}_1$, где $\widetilde{I} + \widetilde{S} = (\widetilde{I} - \widetilde{K}_0)^{-1}$.

*) При доказательстве этой теоремы используются некоторые соображения из заметки Ю. А. Паланта [1].

Обозначим через $\widetilde{\mathfrak{H}}_0$ ортогональное дополнение к линейной оболочке всех корневых векторов оператора $\widetilde{A}$. Согласно замечанию I.4.2 весь спектр оператора $\widetilde{A}_1=\widetilde{Q}\widetilde{A}\widetilde{Q}$, где $\widetilde{Q}$ — ортопроектор, проектирующий $\widetilde{\mathfrak{H}}$ на $\widetilde{\mathfrak{H}}_0$, сосредоточен в нуле.

Так как подпространство $\widetilde{\mathfrak{H}}_0^{\perp}$ инвариантно относительно $\widetilde{A}$, то в силу предложения 2° § 1 гл. I для точек λ, в которых оператор $\widetilde{I}-\lambda\widetilde{A}$ обратим, имеет место соотношение

$$(\widetilde{I}-\lambda\widetilde{A}_1)^{-1}=\widetilde{Q}(\widetilde{I}-\lambda\widetilde{A})^{-1}\widetilde{Q}+\widetilde{P}, \tag{9.14}$$

где $\widetilde{P}=\widetilde{I}-\widetilde{Q}$.

Оператор-функция $R(\lambda)=(\widetilde{I}-\lambda\widetilde{A}_1)^{-1}$ является, очевидно, целой. Покажем, что в области F_ε, полученной из всей комплексной плоскости удалением углов (9.8), имеет место соотношение

$$|R(\lambda)|=O(|\lambda^{2n-2}|) \quad (\lambda\to\infty,\ \lambda\in F_\varepsilon). \tag{9.15}$$

Учитывая равенство (9.14) и равенство

$$(\widetilde{I}-\lambda\widetilde{A})^{-1}=(\widetilde{I}-\lambda(\widetilde{I}-K_0)^{-1}\widetilde{K}_1)^{-1}=$$
$$=(\widetilde{I}-\widetilde{K}_0-\lambda\widetilde{K}_1)^{-1}(\widetilde{I}-\widetilde{K}_0),$$

получаем

$$|R(\lambda)|\leqslant|\widetilde{I}-\widetilde{K}_0||\widetilde{K}^{-1}(\lambda)|+1.$$

Таким образом, соотношение (9.15) будет установлено, коль скоро будет показано, что

$$|\widetilde{K}^{-1}(\lambda)|=O(|\lambda^{2n-2}|) \quad (\lambda\in F_\varepsilon,\ \lambda\to\infty). \tag{9.16}$$

Без труда можно убедиться в том, что оператор $\widetilde{K}^{-1}(\lambda)$ задается в $\widetilde{\mathfrak{H}}$ матрицей

$$\widetilde{K}^{-1}(\lambda)=$$
$$=\begin{pmatrix} K^{-1}(\lambda) & K^{-1}(\lambda)M_1 & \dots & K^{-1}(\lambda)M_{n-1} \\ \lambda K^{-1}(\lambda) & I+\lambda K^{-1}(\lambda)M_1 & \dots & \lambda K^{-1}(\lambda)M_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{n-1}K^{-1}(\lambda) & \lambda^{n-2}I+\lambda^{n-1}K^{-1}(\lambda)M_1 & \dots & I+\lambda^{n-1}K^{-1}(\lambda)M_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{9.17}$$

где

$$M_j = H^j T_j + \lambda H^{j+1} T_{j+1} + \ldots + \lambda^{n-j-1} H^{n-1} T_{n-1} + \lambda^{n-j} H^n \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Согласно лемме 9.1

$$|K^{-1}(\lambda)| = O(1) \qquad (\lambda \to \infty, \ \lambda \in F_\varepsilon).$$

Следовательно, из (9.17) вытекает, что имеет место соотношение (9.16), а вместе с ним и соотношение (9.15).

Оператор-функция $R(\lambda)$ является целой оператор-функцией порядка $\leqslant np \ (p > p(H))$.

В самом деле, так как оператор $H \in \mathfrak{S}_p$, то оператор

$$\widetilde{K}_0 \widetilde{K}_1 = \begin{pmatrix} HT_1 & H^2T_2 \ldots H^{n-1}T_{n-1} & T_0 H^n \\ 0 & 0 \ \ldots \ \ 0 & 0 \\ 0 & 0 \ \ldots \ \ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

принадлежит $\mathfrak{S}_p$, а с ним принадлежит $\mathfrak{S}_p$ и оператор $\widetilde{S}\widetilde{K}_1 = (\widetilde{I} - \widetilde{K}_0)^{-1} \widetilde{K}_0 \widetilde{K}_1$. Поэтому

$$\widetilde{A}_1^n = \widetilde{Q}\widetilde{A}^n \widetilde{Q} = \widetilde{Q}(\widetilde{K}_1 + \widetilde{S}\widetilde{K}_1)^n \widetilde{Q} = \widetilde{Q}\widetilde{K}_1^n \widetilde{Q} + \widetilde{Q}M\widetilde{Q},$$

где $\widetilde{M} \in \mathfrak{S}_p$.

Так как оператор $\widetilde{K}_1^n = \| \delta_{jk} H^n \|_1^n$ также принадлежит $\mathfrak{S}_p$, то оператор $\widetilde{A}_1^n \in \mathfrak{S}_p$.

Учитывая теорему 5.2, можно теперь заключить, что оператор-функция $(\widetilde{I} - \lambda^n \widetilde{A}_1^n)^{-1}$ является целой функцией порядка $\leqslant np$. Но тогда из равенства

$$R(\lambda) = (\widetilde{I} + \lambda \widetilde{A}_1 + \ldots + \widetilde{A}_1^{n-1})(\widetilde{I} - \lambda^n \widetilde{A}_1^n)^{-1}$$

следует, что таковой будет и целая функция $R(\lambda)$.

Применяя теперь к оператор-функции $R(\lambda)$ теорему Фрагмена—Линделефа, в каждом из углов (раствора 2ε), дополнительных к F_ε $(\varepsilon < \pi/np)$, получим, что во всей комплексной плоскости

$$|R(\lambda)| = O(|\lambda|^{2n-2}) \quad (\lambda \to \infty). \tag{9.18}$$

Поскольку

$$R(\lambda)=(\widetilde{I}-\lambda\widetilde{A}_1)^{-1}=\widetilde{I}+\lambda\widetilde{A}_1+\lambda^2\widetilde{A}_1^2+\ldots,$$

из (9.18) легко вывести равенство $\widetilde{A}_1^{2n-1}=0$.

Принимая во внимание, что оператор $\widetilde{A}$ представим в виде

$$\widetilde{A}=\widetilde{P}\widetilde{A}\widetilde{P}+\widetilde{P}\widetilde{A}\widetilde{Q}+\widetilde{Q}\widetilde{A}\widetilde{Q}=\widetilde{P}\widetilde{A}\widetilde{P}+\widetilde{P}\widetilde{A}\widetilde{Q}+A_1,$$

получим

$$\widetilde{A}^{2n-1}=(\widetilde{P}\widetilde{A}\widetilde{P})^{2n-1}+\widetilde{A}_1^{2n-1}+\widetilde{P}\widetilde{B}\widetilde{Q}=(\widetilde{P}\widetilde{A}\widetilde{P})^{2n-1}+\widetilde{P}\widetilde{B}\widetilde{Q},$$

где $\widetilde{B}$ — некоторый вполне непрерывный оператор. Из последнего равенства следует, что множество значений оператора $\widetilde{A}^{2n-1}$ содержится в подпространстве $\widetilde{P}\mathfrak{H}$. Но так как множество значений оператора $\widetilde{A}$, а следовательно, и оператора $\widetilde{A}^{2n-1}$ плотно в $\widetilde{\mathfrak{H}}$, то $\widetilde{\mathfrak{H}}_0$ состоит только из нуля.

Для пучка (9.6) теорема доказана.

Аналогично она доказывается для пучка (9.7).

Замечание 9.1. В § 8 было показано, что в теореме М. В. Келдыша о линейном пучке условие $p(H)<\infty$ может быть заменено условием $p([TH]_{\mathcal{J}})<\infty$. Последнее условие, в частности, выполняется, если $p(TH)<\infty$. Ю. А. Палант [1] обобщил теорему М. В. Келдыша, показав, что для пучка n-й степени условие $p(H)<\infty$ может быть заменено условием

$$p(H^rT_r)<\infty \quad (r=1,\ 2,\ \ldots), \quad p(T_0H^n)<\infty.$$

Другое обобщение теоремы 9.1 М. В. Келдыша на случай, когда оператор A нормален и удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, получил Д. Э. Аллахвердиев [1].

§ 10. Признак полноты системы корневых векторов неограниченных операторов

1. Пусть A — произвольный линейный замкнутый оператор, имеющий хотя бы одну регулярную точку. Линейный (вообще говоря, неограниченный) оператор B называется *A-вполне непрерывным*, если $\mathfrak{D}(A)\subset\mathfrak{D}(B)$,

т. е. оператор B определен на области определения $\mathfrak{D}(A)$ оператора A и для некоторой регулярной точки λ_0 оператора A оператор $B(A-\lambda_0 I)^{-1}$ принадлежит $\mathfrak{S}_\infty$ *). Очевидным образом показывается, что в этом случае для *всякого* регулярного числа λ оператора A оператор $B(A-\lambda I)^{-1}$ также принадлежит $\mathfrak{S}_\infty$. В частности, если точка $\lambda=0$ является регулярной точкой оператора A, то оператор B будет A-вполне непрерывен **) в том и только том случае, когда

$$\mathfrak{D}(B) \supset \mathfrak{D}(A) \text{ и } BA^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty.$$

Определения корневого вектора, нормального собственного числа, нормальной точки для ограниченного оператора, приведенные в гл. I, естественным образом обобщаются и для замкнутых операторов. р2 ½

Лемма 10.1. *Пусть L — произвольный линейный самосопряженный оператор и T — любой L-вполне непрерывный оператор.*

Тогда множества нормальных точек операторов L и $A=L+T$ совпадают. В частности, весь невещественный спектр оператора A состоит из изолированных нормальных собственных значений.

Для любого $\varepsilon\,(>0)$ найдется такое число $r=r_\varepsilon>0$, что весь спектр оператора A будет лежать в объединении круга $|\lambda|\leqslant r$ и двух вертикальных углов

$$-\varepsilon<\arg\lambda<\varepsilon, \quad \pi-\varepsilon<\arg\lambda<\pi+\varepsilon. \tag{10.1}$$

Следовательно, если точка $\lambda=0$ является нормальной точкой оператора L, то вне области (10.1) *может находиться только конечное число точек спектра оператора A.*

Доказательство. Для любой точки λ из области регулярности $\varrho(L)$ оператора L

$$A-\lambda I=(I-T(L-\lambda I)^{-1})(L-\lambda I). \tag{10.2}$$

---

*) Определение A-полной непрерывности можно дать и без предположения о существовании у A регулярной точки (см. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн [1]).

**) Отсюда становится понятным сам термин «A-вполне непрерывный».

Оператор-функция $T(L-\lambda I)^{-1}$, которая представима в виде

$$T(L-\lambda I)^{-1}=T(L-iI)^{-1}+T(L-iI)^{-1}(L-\lambda I)^{-1}(i-\lambda),$$

голоморфна в области $\varrho(L)$ и принимает значения из $\mathfrak{S}_\infty$. Кроме того, в силу леммы 7.1 вне углов (10.1) равномерно выполняется предельное соотношение

$$\lim_{\lambda\to\infty}|T(L-\lambda I)^{-1}|=0.$$

В частности, найдется такое $r=r_\varepsilon$, что для точек λ из углов (10.2) с $|\lambda|>r$

$$|T(L-\lambda I)^{-1}|<1.$$

Для этих λ оператор $A-\lambda I$ будет, очевидно, обратим. Кроме того, на основании теоремы I.5.1 можно будет утверждать, что спектр оператора A в $\varrho(L)$ состоит из изолированных нормальных собственных значений.

Наконец, совпадение множества нормальных точек операторов A и L доказывается так же, как аналогичное утверждение в лемме I.5.2. Это доказательство основано на том, что разность

$$(A-\lambda I)^{-1}-(L-\lambda I)^{-1}=(A-\lambda I)^{-1}T(L-\lambda I)^{-1}\in\mathfrak{S}_\infty$$

для всех $\lambda\in\varrho(A)\cap\varrho(L)$.

Лемма доказана.

2. О самосопряженном операторе L говорят, что он имеет дискретный спектр, если весь его спектр состоит из нормальных собственных чисел, т. е. из изолированных собственных чисел конечной кратности с единственной предельной точкой на бесконечности. Такой оператор, очевидно, всегда неограничен. Если λ_0 — регулярная точка оператора L, то оператор $(L-\lambda_0 I)^{-1}$ принадлежит $\mathfrak{S}_\infty$.

Теорема 10.1. *Пусть $A=L+T$, где L — самосопряженный оператор с дискретным спектром, а T — такой L-вполне непрерывный оператор, что**)

$$p(L^{-1}TL^{-1})<\infty. \qquad (10.3)$$

*) Таким образом, в условии (10.3) предполагается, что точка $\lambda=0$ не является собственным числом оператора L. Это огра-

Тогда весь спектр оператора A состоит из нормальных собственных чисел. Как бы мало ни было $\varepsilon\,(>0)$, все они, за исключением, может быть, конечного числа, лежат в углах

$$-\varepsilon < \arg\lambda < \varepsilon, \quad \pi-\varepsilon < \arg\lambda < \pi+\varepsilon.$$

Система корневых векторов оператора A полна в $\mathfrak{H}$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что точка $\lambda=0$ не является собственным числом оператора A (см. сноску на стр. 336).

После этого, представив оператор A в виде $A=(I+TL^{-1})L$, убеждаемся, что оператор $I+TL^{-1}$ аннулируется только в нуле. Принимая во внимание, что оператор TL^{-1} вполне непрерывен, заключаем, что оператор $I+TL^{-1}$ обратим и, более того,

$$(I+TL^{-1})^{-1}=I+S,$$

где S — некоторый вполне непрерывный оператор.

Таким образом, оператор A^{-1} допускает представление

$$A^{-1}=H(I+S),$$

где $H=L^{-1}$. Из соотношения

$$(I+TL^{-1})(I+S)=I$$

следует:

$$S=-TL^{-1}(I+S).$$

Стало быть, в силу условия (10.3) при некотором $p\,(<\infty)$

$$HS=-L^{-1}TL^{-1}(I+S)\in\mathfrak{S}_p.$$

Таким образом, в силу теоремы 8.1 и дополнений к ней, сделанных в п. 3 § 8, для оператора A^{-1} имеют место все заключения теоремы 8.1.

Так как собственные числа оператора A^{-1} являются обратными значениями собственных чисел оператора A,

---

ничение несущественно; если оно не выполняется, то условие (10.3) можно заменить условием $p[(L-aI)^{-1}T(L-aI)^{-1}]<\infty$, где a — какая-либо регулярная точка оператора L. Легко видеть, что последнее условие не зависит от выбора вещественной (или даже комплексной) точки a, регулярной для L, и соответствует переходу от оператора A к оператору $A-aI=(L-aI)+T$.

а корневые векторы операторов A^{-1} и A совпадают, то теорема доказана.

3. В качестве простого следствия из доказанной теоремы получаем:

Система корневых векторов оператора $A=L+K$ *полна, коль скоро* L — *самосопряженный оператор с дискретным спектром, а* K *принадлежит некоторому* $\mathfrak{S}_p$.

Это предложение может быть усилено в новом направлении, а именно, условие $K \in \mathfrak{S}_p$ может быть заменено условием $K \in \mathfrak{S}_\omega$. Это следует из общей теоремы В. И. Мацаева:

Теорема 10.2 (В. И. Мацаев [2]). *Пусть* $A=$ $=L+T$, *где* L — *самосопряженный оператор с дискретным спектром, а* T — *такой, что* $\mathfrak{D}(T) \supset \mathfrak{D}(L)$ *и* $TL^{-1} \in \mathfrak{S}_\omega$. *Тогда имеют место все заключения предыдущей теоремы.*

Эта теорема получается из предложения В. И. Мацаева, указанного в п. 3 § 8, тем же путем, что и теорема 10.1, — из теоремы 8.1.

После изложенного совершенно ясно, что и из других теорем предыдущих параграфов можно получить соответствующие теоремы о полноте для определенных классов неограниченных операторов.

Другие теоремы о полноте для неограниченных операторов имеются в статьях М. А. Наймарка [1], В. Б. Лидского [5] и др.

Все эти теоремы допускают применение к тем или иным классам дифференциальных операторов.

Отметим, что М. В. Келдыш [1] на основании своей теоремы 9.1 получил n-кратную полноту для широких классов пучков дифференциальных операторов в обыкновенных и частных производных.

§ 11. Асимптотические свойства спектра слабо возмущенного положительного оператора

1. Здесь будут приведены некоторые из результатов М. В. Келдыша об асимптотических свойствах пучка операторов. Мы будем рассматривать лишь линейный пучок операторов $I-T-\lambda H$ в предположении, что

H — положительный оператор, $p(H) < \infty$, а оператор T принадлежит $\mathfrak{S}_\infty$ *).

При этих предположениях (см. § 8 п. 2) после надлежащего сдвига параметра λ $(\lambda \to \lambda + c)$ спектр указанного пучка может быть истолкован как спектр оператора A вида: $A = H(I+S)$, где $S \in \mathfrak{S}_\infty$ и $(I+S)^{-1} \in \mathfrak{R}$.

Для таких операторов справедлива следующая лемма, играющая в дальнейшем решающую роль.

Лемма 11.1. *Пусть* $A = H(I+S)$, где $S \in \mathfrak{S}_\infty$, $(I+S)^{-1} \in \mathfrak{R}$, *а H — положительный оператор, принадлежащий при некотором целом $p\,(>0)$ классу $\mathfrak{S}_p$. Тогда*

$$\lim_{\substack{\lambda \to -\infty \\ \operatorname{Im}\lambda = 0}} \frac{\operatorname{sp}(A^p(\lambda))}{\operatorname{sp}(H^p(\lambda))} = 1,$$

где $A(\lambda)$ и $H(\lambda)$ — резольвенты Фредгольма операторов A и H.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} A(\lambda) - H(\lambda) &= \frac{1}{\lambda}\{(I-\lambda A)^{-1} - (I-\lambda H)^{-1}\} = \\ &= -(I-\lambda A)^{-1} HS (I-\lambda H)^{-1} = \\ &= -(I-\lambda A)^{-1} AT (I-\lambda H)^{-1} = \\ &= -A(\lambda)\, T (I-\lambda H)^{-1}, \end{aligned}$$

где через T обозначен оператор $S(I+S)^{-1}$.

Отсюда

$$A(\lambda) = H(\lambda)(I + C(\lambda)), \tag{11.1}$$

где

$$C(\lambda) = (I + T(I-\lambda H)^{-1})^{-1} - I.$$

Согласно лемме 6.1 $|T(I-\lambda H)^{-1}| \to 0$ при $\lambda \to -\infty$, $\operatorname{Im}\lambda = 0$, а следовательно,

$$|C(\lambda)| \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to -\infty,\ \operatorname{Im}\lambda = 0.$$

---

*) Свои результаты М. В. Келдыш [1] опубликовал без доказательств. Нам удалось найти доказательство его теоремы об асимптотике спектра пучка для случая линейного пучка.

Возводя обе части равенства (11.1) в p-ю степень, получаем:

$$A^p(\lambda) = (H(\lambda) + H(\lambda)C(\lambda))^p =$$
$$= H^p(\lambda) + \sum H^{\alpha_1}(\lambda)C(\lambda)H^{\alpha_2}(\lambda)C(\lambda)\ldots H^{\alpha_r}(\lambda), \quad (11.2)$$

где суммирование распространяется на все $2^p - 1$ комбинаций целых чисел $\alpha_1 \geqslant 0, \ldots, \alpha_r \geqslant 0$ таких, что $\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = p$.

Выберем $N\ (>0)$ так, чтобы $|C(\lambda)| < 1$ при $\lambda < -N$. Тогда при $\lambda < -N$ из (11.2) найдем:

$$|\operatorname{sp}(A^p(\lambda) - H^p(\lambda))| \leqslant |A^p(\lambda) - H^p(\lambda)|_1 \leqslant$$
$$\leqslant \sum |H(\lambda)|_p^{\alpha_1} |C(\lambda)|\, |H(\lambda)|_p^{\alpha_2} |C(\lambda)| \ldots |H(\lambda)|_p^{\alpha_r} \leqslant$$
$$\leqslant (2^p - 1)|H(\lambda)|_p^p |C(A)| = (2^p - 1)\operatorname{sp}(H^p(\lambda))|C(\lambda)|.$$

Стало быть,

$$\left|\frac{\operatorname{sp}(A^p(\lambda))}{\operatorname{sp}(H^p(\lambda))} - 1\right| = O(|C(\lambda)|) \quad \text{при} \quad \lambda \to -\infty,\ \operatorname{Im}\lambda = 0,$$

и лемма доказана.

Отсюда сравнительно просто следует лемма:

Лемма 11.2. *При условиях леммы* 11.1 *имеет место предельное соотношение*

$$\left\{\int_0^\infty \frac{dn(r;\,A)}{(r+t)^p} \Big/ \int_0^\infty \frac{dn(r;\,H)}{(r+t)^p}\right\} \to 1 \quad \textit{при} \quad +t \to \infty \ (\operatorname{Im} t = 0),$$

где $n(r;A)$ и $n(r;H)$ — функции распределения характеристических чисел операторов A и H.

Доказательство. Так как вместе с $A \in \mathfrak{S}_p$ также $A(\lambda) \in \mathfrak{S}_p$ и, стало быть, $A^p(\lambda) \in \mathfrak{S}_1$, то

$$\operatorname{sp}(A^p(\lambda)) = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{\mu_j(A^p(\lambda))} = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{(\mu_j(A) - \lambda)^p}, \quad (11.3)$$

и аналогично

$$\operatorname{sp}(H^p(\lambda)) = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{(\mu_j(H) - \lambda)^p}\left(= \int_0^\infty \frac{dn(r;\,H)}{(r-\lambda)^p}\right). \quad (11.4)$$

Так как

$$\int_0^\infty \frac{dn(r;\,A)}{(r+t)^p}=\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{(|\mu_j(A)|+t)^p},$$

то, учитывая (11.3), (11.4) и лемму 11.1, заключаем, что для доказательства леммы 11.2 остается вывести соотношение

$$\left\{\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{(\mu_j(A)+t)^p}\Big/\sum_{=1}^\infty \frac{1}{(|\mu_j(A)|+t)^p}\right\}\to 1 \text{ при } t\to+\infty$$
$$(\operatorname{Im} t=0).$$

Согласно теореме 8.1, каково бы ни было $\delta>0$, внутри угла $|\arg\lambda|<\delta$ лежат почти все числа $\mu_j(A)$ $(j=1,\ 2,\ \ldots)$. Так как $\mu=\infty$ является их единственной точкой сгущения, то это означает, что при $j\to\infty$

$$\operatorname{Re}\mu_j(A)\to\infty \quad\text{и}\quad \operatorname{Im}\mu_j(A)\to 0.$$

Поэтому для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $N=N_\varepsilon>0$, что при $t>|A|$ будут выполняться неравенства:

$$\left|\left(\frac{\mu_j(A)+t}{|\mu_j(A)|+t}\right)^{-p}-1\right|<\varepsilon \qquad (j=N,\ N+1,\ \ldots).$$

Тогда при $t>|A|$ *)

$$\left|\left\{\sum_{j=N}^\infty \frac{1}{(\mu_j(A)+t)^p}\Big/\sum_{j=N}^\infty \frac{1}{(|\mu_j(A)|+t)^p}\right\}-1\right|\leqslant\varepsilon. \tag{11.5}$$

С другой стороны, найдется всегда такое $T_\varepsilon>0$, что при $t>T_\varepsilon$ будем иметь:

$$\left|\left\{\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{(\mu_j(A)+t)^p}\Big/\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{(|\mu_j(A)|+t)^p}\right\}-1\right|<\varepsilon.$$

---

*) Если для положительных чисел a_j $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ и комплексных чисел b_j $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ выполняются неравенства $|b_j/a_j|<\varepsilon$ $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, то

$$\left|\sum_{j=1}^n b_j\Big/\sum_{j=1}^n a_j\right|<\varepsilon.$$

Но тогда при $t > T_\varepsilon$ неравенство (11.5) будет иметь место и при замене N на 1.

Лемма доказана.

2. Для получения основной теоремы этого параграфа остается привлечь результат Б. И. Коренблюма [1]*).

Лемма 11.3. *Пусть* $\varphi(r)$ *и* $\psi(r)$ $(0 \leqslant r < \infty)$ — *неубывающие функции, для которых при некотором* $p\,(>0)$ *конечны интегралы*

$$\left.\begin{aligned} \Phi(t) &= \int_0^\infty \frac{d\varphi(r)}{(r+t)^p}, \\ \Psi(t) &= \int_0^\infty \frac{d\psi(r)}{(r+t)^p} \end{aligned}\right. \qquad (0 \leqslant t < \infty)$$

и

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Psi(t)}{\Phi(t)} = 1.$$

Если при этом $\varphi(r) \to \infty$ *при* $r \to \infty$ *и существует такая положительная константа* $\gamma < p$, *что для достаточно больших* $r < s$

$$\frac{\varphi(s)}{\varphi(r)} \leqslant \left(\frac{s}{r}\right)^\gamma, \tag{11.6}$$

то также

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\psi(r)}{\varphi(r)} = 1.$$

За доказательством леммы 11.3 мы отсылаем к оригинальной статье Б. И. Коренблюма [1].

---

*) Это предложение (и еще более общее) Б. И. Коренблюм [1] получил, обобщая своим методом тауберову теорему М. В. Келдыша [1, 2], в которой на функцию $\varphi(x)$ и число p накладывались более жесткие требования, а именно, требовалось существование производной $\varphi'(x)$ такой, что $\alpha\varphi(x) < x\varphi'(x) < \beta\varphi(x)$, где α и β — константы, удовлетворяющие условиям $0 < \beta < \alpha + 1$ и $p = [\beta] + 1$. Теорема М. В. Келдыша в свою очередь явилась обобщением известных тауберовых теорем Харди и Литлвуда (см. Харди [1]).

Сочетание лемм 11.2 и 11.3 приводит к основной теореме М. В. Келдыша [1] в несколько усовершенствованной форме*).

Теорема 11.1. *Пусть* $A=H(I+S)$, *где* $S\in\mathfrak{S}_\infty$, $(I+S)^{-1}\in\mathfrak{R}$ *и* $H\,(\in\mathfrak{S}_\infty)$ — *положительный оператор.*

Если для функции распределения $n(r;\,H)$ *характеристических чисел* H *можно подобрать неубывающую функцию* $\varphi(r)$ $(0\leqslant r<\infty)$, *обладающую свойствами:*

1) $\varphi(r)\to\infty$ *при* $r\to\infty$,

2) *при некотором* $\gamma<0$ *для достаточно больших* $r<s$ *выполняется* (11.6),

3)
$$\lim_{r\to\infty}(n(r;\,H)/\varphi(r))=1, \tag{11.7}$$

то

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(r;\,A)}{n(r;\,H)}=1, \tag{11.8}$$

где $n(r;\,A)$ — *функция распределения характеристических чисел оператора* A.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\varphi(r)$ — положительная функция, причем $\varphi(0)=0$ (иначе, выбрав $R>0$ так, чтобы $\varphi(r)>0$ при $r>R$, мы затем переопределили бы на $(0,\,R)$ функцию $\varphi(r)$, положив $\varphi(r)=0$ при $0\leqslant r<R$).

Так как в силу (11.6) имеем $\varphi(r)=O(r^\gamma)$ $(r\to\infty)$, то

$$\Phi(t)=\int_0^\infty\frac{d\varphi(r)}{(r+t)^p}\,dt=p\int_0^\infty\frac{\varphi(r)\,dr}{(r+t)^{p+1}}<\infty\qquad(0<t<\infty).$$

Отсюда и из (11.7) следует, что

$$F(t)=\int_0^\infty\frac{dn(r;\,H)}{(r+t)^p}=p\int_0^\infty\frac{n(r;\,H)}{(r+t)^{p+1}}\,dr<\infty$$

и

$$\lim_{t\to\infty}\frac{F(t)}{\Phi(t)}=1.$$

*) Это усовершенствование возникло автоматически в связи с заменой тауберовой теоремы М. В. Келдыша тауберовой теоремой Б. И. Коренблюма [1].

Таким образом, $H \in \mathfrak{S}_p$ и согласно лемме 11.2

$$\lim_{t \to \infty} \frac{G(t)}{F(t)} = 1,$$

где

$$G(t) = \int_0^\infty \frac{dn(r; A)}{(r+t)^p}.$$

Следовательно, отношение $G(t)/\Phi(t) \to 1$ при $t \to \infty$, и соотношение (11.8) получается на основании леммы 11.3.

Теорема доказана.

Заметим, что для неубывающей дифференцируемой функции $\varphi(r)$, удовлетворяющей условию

$$\beta = \overline{\lim_{r \to \infty}}\, r \frac{\varphi'(r)}{\varphi(r)} < \infty, \tag{11.9}$$

условие 2) теоремы всегда выполняется при любом $\gamma > \beta$.

В частности, условиям (11.9) и (11.6) будет удовлетворять всякая неубывающая функция $\varphi(r) = r^{1/p}L(r)$, где $p > 0$, а $L(r)$ — медленно изменяющаяся функция.

Замечание 11.1. Теорема 11.1 сохраняет силу, если в ее формулировке условие положительности оператора H $(\in \mathfrak{S}_\infty)$ заменить следующими двумя условиями:

а) H — полный самосопряженный оператор,

б) оператор H имеет не более конечного числа отрицательных собственных чисел.

В этой расширенной формулировке теорема 11.1 эквивалентна следующему предложению:

Пусть H $(\in \mathfrak{S}_\infty)$ — оператор, обладающий свойствами а), б), а $T \in \mathfrak{S}_\infty$. Если для функции распределения $n(r, H)$ выполняются условия теоремы 11.1, *то для функции распределения $n(r, L)$ характеристических чисел пучка $L(\lambda) = I - T - \lambda H$ имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{r \to \infty} \frac{n(r, L)}{n(r, H)} = 1. \tag{11.10}$$

Это предложение, грубо говоря, означает, что при отыскании асимптотики собственных чисел пучка $L(x)$ можно пренебрегать вполне непрерывным слагаемым T.

Покажем, что это предложение после некоторых преобразований пучка $L(\lambda)$ может быть получено как следствие теоремы 11.1.

В самом деле, для фредгольмовой резольвенты $H(-t)=H(H+tI)^{-1}$ имеем: $\mu_j(H(-t))=\mu_j(H)+t$. Поэтому можно выбрать достаточно большое положительное t, чтобы все характеристические числа резольвенты $H(-t)$ были положительными. Тогда характеристические числа пучка

$$L_1(\lambda)=I-T(-t)-\lambda H(-t)\,(=(I+tH)^{-1}L(\lambda-t)),$$

где $T(-t)=(I+tH)^{-1}T$, получаются из характеристических чисел пучка $L(\lambda)$ сдвигом $\lambda\to\lambda+t$.

С другой стороны, выбрав t так, чтобы оператор $T(-t)$ имел норму, меньшую единицы, можно утверждать, что характеристические числа пучка $L_1(\lambda)$ совпадают с характеристическими числами оператора

$$A_1=H(-t)(I+S(-t)),$$

где $S(-t)=(I-T(-t))^{-1}-I\;(\in\mathfrak{S}_\infty)$.

Из соотношения (11.6) вытекает, что $\varphi(r-t)/\varphi(r)\to\to 1$ при $r\to\infty$, а следовательно, для функции распределения $n(r;\,H_1)=n(r-t;\,H)$ выполняется соотношение

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(r;\,H_1)}{\varphi(r)}=1.$$

Таким образом, к оператору A_1 применима теорема 11.1 и, стало быть,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(r;\,A_1)}{n(r;\,H_1)}=1. \tag{11.11}$$

Принимая, наконец, во внимание, что $n(r;\,A_1)==n(r-a;\,L)$ $(r\geqslant a)$, получаем из (11.11) соотношение (11.10).

Теорема 11.1 остается также в силе, если фигурирующий в ней оператор $A=H(I+S)$ заменить оператором $A_1=(I+S_1)H(I+S_2)$, где $S_j\in\mathfrak{S}_\infty$ и $(I+S_j)^{-1}\in\mathfrak{R}$ $(j=1,2)$. Действительно, такой оператор, как отмечалось в замечании 8.1, подобен оператору $A_1=H(I+S_2)(I+S_1)$ $(A_1=(I+S_1)^{-1}A(I+S_1))$, к которому уже применима теорема 11.1. Это замечание позволяет вывести из теоремы 11.1 асимптотические соотношения для s-чисел оператора $A=H(I+S)$. Однако для s-чисел оператора такого вида можно независимо доказать более сильное утверждение, чем то, которое получается на основании теоремы 11.1.

Теорема 11.2. *Пусть $H\ (\in \mathfrak{S}_\infty)$ — бесконечномерный самосопряженный оператор, а $S\in\mathfrak{S}_\infty$, и пусть, кроме того, выполняется хотя бы одно из двух условий:*

$$1)\quad H\text{ — полный оператор и } (I+S)^{-1}\in\mathfrak{R};\tag{11.12}$$

$$2)\quad \lim_{n\to\infty}[s_{n+1}(H)/s_n(H)]=1.\tag{11.13}$$

Тогда для оператора $A=H(I+S)$ имеет место предельное соотношение:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n(A)}{s_n(H)}=1.\tag{11.14}$$

Нетрудно видеть, что эта теорема вытекает из следующей.

Теорема 11.3 (М. Г. Крейн). *Пусть самосопряженный оператор $H=H^*\ (\in\mathfrak{S}_\infty)$ и самосопряженный оператор $S\ (\in\mathfrak{S}_\infty)$ удовлетворяют хотя бы одному из условий 1), 2) теоремы 11.2. Тогда для оператора $A=H(I+S)H$ имеет место предельное соотношение:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n(A)}{\lambda_n(H^2)}=1.\tag{11.15}$$

В самом деле, если оператор $A=H(I+S)$ удовлетворяет условиям теоремы 11.2, то к оператору $A_1=AA^*=H(I+S_1)H$, где $S_1=S+S^*+SS^*\ (\in\mathfrak{S}_\infty)$, применима теорема 11.3, и соотношение (11.14) получается как следствие соотношения (11.15) для оператора A_1.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_j\}_1^\infty$ — полная ортонормированная система собственных векторов оператора H:

$$H\varphi_j=s_j(H)\,\varphi_j\qquad (j=1,\ 2,\ \ldots).$$

Обозначим через $\mathfrak{L}_n$ ($n=1,\ 2,\ \ldots$) линейную оболочку векторов $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n$. Тогда

$$\lambda_n(H^2)=\max_{\varphi\in\mathfrak{L}_{n-1}^\perp}\frac{(H\varphi,\ H\varphi)}{(\varphi,\ \varphi)}\qquad (n=1,\ 2,\ \ldots;\ \mathfrak{L}_0=0).\tag{11.16}$$

Для всех векторов $\varphi\,(\neq 0)$ из подпространства $\mathfrak{L} = \overline{\mathfrak{R}(H)}$ имеем:

$$\frac{(A\varphi,\ \varphi)}{(\varphi,\ \varphi)} = \frac{(H\varphi,\ H\varphi)}{(\varphi,\ \varphi)}\left(1 + \frac{(SH\varphi,\ H\varphi)}{(H\varphi,\ H\varphi)}\right). \qquad (11.17)$$

Так как из принадлежности вектора φ подпространству $\mathfrak{R}_{n-1} = \mathfrak{L} \ominus \mathfrak{L}_{n-1}$ вытекает принадлежность вектора $\psi = H\varphi$ этому же подпространству, получаем, что величина

$$\varepsilon_n = \sup_{\varphi \in \mathfrak{R}_{n-1}} \left|\frac{(SH\varphi,\ H\varphi)}{(H\varphi,\ H\varphi)}\right| = \sup_{\psi \in \mathfrak{R}_{n-1}} \frac{|(S\psi,\ \psi)|}{(\psi,\ \psi)}$$

стремится к 0 при $n \to \infty$.

Таким образом, из (11.17) следует, что при достаточно большом n

$$(A\varphi,\ \varphi) \geqslant 0 \qquad (\varphi \in \mathfrak{R}_{n-1}).$$

Учитывая еще, что $A\varphi = 0$ для всех $\varphi \in \mathfrak{L}^{\perp}$, заключаем, что оператор A имеет не более конечного числа отрицательных собственных чисел.

Покажем, что без ограничения общности можно считать оператор A неотрицательным. Для этого рассмотрим фредгольмову резольвенту

$$A(-t) = A(I + tA)^{-1}$$

оператора A. Собственные числа $\lambda(A(-t))$ и $\lambda(A)$ связаны соотношением

$$\lambda^{-1}(A(-t)) = \lambda^{-1}(A) + t, \qquad (11.18)$$

и поэтому при достаточно большом t оператор $A(-t)$ неотрицателен. С другой стороны, внося выражение для A в равенство $A(-t) = A - tA(-t)$, получим $A(-t) = TH$, где $T = (I - tA(-t))\,H\,(I + S) \in \mathfrak{S}_\infty$. Но тогда

$$A(-t) = A - tAA(-t) = H(I + S(-t))\,H,$$

где $S(t) = S - t\,(I + S)\,H\,(I - tA\,(-t))\,H\,(I + S)\ (\in \mathfrak{S}_\infty)$. Оператор-функция $S(t)$ аналитически зависит от параметра t, и следовательно, если оператор $I + S\ (= I + S(0))$ обратим, то в силу теоремы I.5.1 число $t\,(>0)$ может быть одновременно выбрано так, чтобы и оператор $I+S(t)$ также был обратим. Наконец, заметим, что в силу соотношения (11.18) предельное соотношение (11.15) для оператора A эквивалентно этому же соотношению для оператора $A(-t)$.

Итак, будем считать, что оператор A неотрицателен. Тогда

$$\lambda_n(A) \leqslant \sup_{\varphi \in \mathfrak{N}_{n-1}} \frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)} = \sup_{\varphi \in \mathfrak{N}_{n-1}} \left[\frac{(H\varphi, H\varphi)}{(\varphi, \varphi)} \left(1 + \frac{(SH\varphi, H\varphi)}{(H\varphi, H\varphi)} \right) \right].$$

Отсюда в силу (11.16) получаем неравенство

$$\lambda_n(A) \leqslant \lambda_n(H^2)(1+\varepsilon_n),$$

а следовательно,

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n(A)}{\lambda_n(H^2)} \leqslant 1. \tag{11.19}$$

Отметим, что в проведенной части доказательства теоремы не использовалось ни одно из условий 1) и 2) из теоремы 11.2.

Предположим теперь, что выполняется свойство 1), т. е. H — полный оператор и оператор $I+S$ обратим. Из равенства

$$(A\varphi, \varphi) = ((I+S)\psi, \psi), \qquad \psi = H\varphi$$

будет следовать, что оператор $I+S$ неотрицателен.

Рассмотрим оператор

$$F = (I+S)^{1/2} H.$$

Так как $F^*F = A$, то для оператора

$$A_1 = FF^* = (I+S)^{1/2} H^2 (I+S)^{1/2}$$

имеют место соотношения:

$$\lambda_n(A_1) = s_n(F) = \lambda_n(A) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{11.20}$$

Так как оператор $I+S$ обратим, то $(I+S)^{-1} = I + S_1$ $(S_1 \in \mathfrak{S}_\infty)$ и $(I+S_1)^{1/2} = (I+S)^{-1/2}$. Следовательно,

$$H^2 = (I+S_1)^{1/2} A_1 (I+S_1)^{1/2}.$$

Полагая $L = A_1^{1/2}(I + S_1)^{1/2}$, будем иметь $H^2 = L^* L$. Но тогда для $H_1 = LL^*$ будет:

$$H_1 = A_1^{1/2}(I + S_1)^{1/2}, \quad \lambda_n(H_1) = \lambda_n(H^2) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{11.21}$$

Полагая в доказанном уже соотношении (11.19) $A = H_1$ и $H^2 = A_1$, получим:

$$\overline{\lim_{n\to}} \frac{\lambda_n(H_1)}{\lambda_n(A_1)} \leqslant 1.$$

Таким образом, в силу соотношений (11.20) и (11.21)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\lambda_n(H^2)}{\lambda_n(A)} \leqslant 1. \tag{11.22}$$

Соотношение (11.22) вместе с соотношением (11.19) дает (11.15).

Рассмотрим теперь случай, когда оператор $I + S$ необратим. В этом случае без ограничения общности можно считать оператор H полным. В самом деле, подпространство $\overline{\mathfrak{R}(H)}$ $(\supset \overline{\mathfrak{R}(A)})$ является в этом случае общим инвариантным подпространством для A и H, причем A и H являются несущественными расширениями своих сужений $\hat{A}$ и $\hat{H}$ в $\overline{\mathfrak{R}(H)}$.

Так как $\hat{A} = \hat{H}(I + PSP)\hat{H}$, где P — ортопроектор, проектирующий $\mathfrak{H}$ на $\overline{\mathfrak{R}(H)}$, то без ограничения общности можно принять $\overline{\mathfrak{R}(H)} = \mathfrak{H}$.

Обозначим через $\mathfrak{Z}$ множество нулей оператора $I + S$. Оно будет и множеством нулей оператора A_1, так что $\mathfrak{H}_1 = \overline{\mathfrak{R}(A_1)} = \mathfrak{Z}^{\perp}$.

Пусть Q — ортопроектор, проектирующий $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_1$; тогда

$$A_1 = QA_1Q = (I + S)^{1/2} QH^2Q (I + S)^{1/2},$$

что можно записать и так:

$$\hat{A}_1 = (I + \hat{S})^{1/2} \hat{H} (I + \hat{S})^{1/2},$$

где $\hat{A}_1, \hat{S}, \hat{H}$ — сужения операторов A_1, S и QH^2Q на $\mathfrak{H}_1$.

Для операторов $\hat{A}$ и $\hat{H}$, связанных соотношением

$$\hat{A} = \hat{H}^{1/2}(I+\hat{S})\,\hat{H}^{1/2},$$

будут выполняться все условия теоремы, включая обратимость среднего множителя $I+\hat{S}$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n(\hat{A})}{\lambda_n(\hat{H})} = 1.$$

С другой стороны,

$$\lambda_n(\hat{A}) = \lambda_n(A),$$

и в силу следствия II.2.1

$$\lambda_{n+\nu}(H^2) \leqslant \lambda_n(\hat{H}) \leqslant \lambda_n(H^2),$$

где ν — размерность $\mathfrak{Z}$.

Таким образом, будем иметь

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{\lambda_n(A)}{\lambda_{n+\nu}(H^2)} \geqslant 1.$$

В силу условия 2) отсюда следует, что

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{\lambda_n(A)}{\lambda_n(H^2)} \geqslant 1.$$

Последнее соотношение вместе с (11.19) дает (11.15). Теорема доказана.

Замечание 11.2. Доказанная теорема допускает следующее обобщение:

Пусть G ($\in \mathfrak{S}_\infty$) — бесконечномерный оператор, а S ($\in \mathfrak{S}_\infty$) — самосопряженный оператор, и пусть, кроме того, выполняется хотя бы одно из двух условий:

1) $\mathfrak{R}(G)$ *плотно в* $\mathfrak{H}$ *и оператор* $(I+S)^{-1} \in \mathfrak{R}$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{s_{n+1}(G)}{s_n(G)} = 1$.

Тогда для оператора $A = G^*(I+S)\,G$ имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n(A)}{\lambda_n(G^*G)} = 1.$$

Естественно, что теорема 11.1 в случае самосопряженного оператора A допускает некоторое усиление:

Теорема 11.4 (М. Г. Крейн [10]) *). *Пусть* H $(\in \mathfrak{S}_\infty)$ — *бесконечномерный неотрицательный оператор, а* A — *самосопряженный оператор вида*

$$A = H(I+S),$$

где $S \in \mathfrak{S}_\infty$, *и пусть, кроме того, выполняется хотя бы одно из условий*:

1) $$(I+S)^{-1} \in \mathfrak{R},$$

2) $$\lim_{n\to\infty} (\lambda_{n+1}(H)/\lambda_n(H)) = 1.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n(A)}{\lambda_n(H)} = 1. \tag{11.23}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай 1), когда оператор $I+S$ обратим. Без ограничения общности можно считать оператор H полным. В самом деле, из равенства $A = H(I+S) = (I+S^*)H$ вытекает, что подпространство $\overline{\mathfrak{R}(H)}$ инвариантно относительно операторов A и $I+S^*$, причем $A[\mathfrak{R}(H)^\perp] = 0$. Обозначим через $\hat{A}$, $\hat{H}$ и S_1^* сужения операторов A, H и S^* на подпространстве $\overline{\mathfrak{R}(H)}$. Оператор $\hat{A}$, очевидно, можно представить в виде $\hat{A} = (I+S_1^*)\hat{H}$. Учитывая, что операторы $\hat{A}$ и $\hat{H}$ самосопряженные, получаем $\hat{A} = \hat{H}(I+S_1)$. Очевидно, $S_1 = PSP$, где P — ортопроектор, проектирующий $\mathfrak{H}$ на $\overline{\mathfrak{R}(H)}$. Из обратимости оператора $I+S^*$ в $\mathfrak{H}$ вытекает обратимость оператора $I+S_1^*$, а также обратимость оператора $I+S_1$ в $\overline{\mathfrak{R}(H)}$.

Таким образом, если бы оператор H не был полным, то мы перешли бы к рассмотрению сужения $\hat{A}$ на подпространстве $\overline{\mathfrak{R}(H)}$.

В силу теоремы 11.2 для оператора A имеет место соотношение (11.14). Это соотношение эквивалентно соотношению (11.23), ибо в силу леммы 7.1 все собственные значения оператора A, за исключением, быть может, конечного числа, положительны и, следовательно, начиная с некоторого n, $\lambda_n(A) = s_n(A)$.

*) По недосмотру в статье М. Г. Крейна [10] выпущено требование о выполнении одного из двух условий 1) или 2).

Рассмотрим теперь случай, когда выполняется условие 2), а оператор $I+S$ необратим. В этом случае $\mathfrak{H}=\mathfrak{L}\dotplus\mathfrak{H}_1$, где $\mathfrak{L}$ — корневое подпространство оператора S, отвечающее собственному числу, равному 1, а $\mathfrak{H}_1$ — инвариантное подпространство для S, в котором оператор $I+S$ обратим. Пусть Q — ортопроектор, проектирующий $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_1$. Его дополнение $P=I-Q$ будет иметь конечную размерность ν, равную размерности $\mathfrak{L}$.

Так как $(I+S)Q=Q(I+S)Q$, то

$$QAQ=QHQ\,Q(I+S)Q. \tag{11.24}$$

Обозначим через A_1, H_1 и S_1 операторы, индуцируемые соответственно операторами QAQ, QHQ и S в $\mathfrak{H}_1$. Соотношение (11.24) означает, что

$$A_1=H_1(I+S_1).$$

Так как оператор H положителен, то и оператор H_1 положителен. Так как, кроме того, оператор $I+S_1$ обратим, то по уже доказанному

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n(A_1)}{\lambda_n(H_1)}=1. \tag{11.25}$$

Очевидно, $\mu_n(H_1)=\mu_n(QHQ)$ $(n=1, 2, \ldots)$, а оператор

$$QHQ=(I-P)H(I-P)=H-P(H-HP)-HP$$

отличается от H на конечномерный размерности $\leqslant 2\nu$.

Поэтому (см. следствие II.2.1)

$$\lambda_{n+2\nu}(H)\leqslant\lambda_n(H_1)\leqslant\lambda_n(H), \tag{11.26}$$

и аналогично без ограничения общности можно считать оператор A_1 неотрицательным:

$$s_{n+2\nu}(A)\leqslant s_n(A_1)\leqslant s_n(A). \tag{11.27}$$

Сопоставляя (11.23), (11.24) и (11.25), убеждаемся, что

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{s_n(A)}{\lambda_{n+2\nu}(H)}\geqslant 1,\quad \varlimsup_{n\to\infty}\frac{s_n(A)}{\lambda_{n-2\nu}(H)}\leqslant 1, \tag{11.28}$$

а так как согласно (11.11)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n(H)}{\lambda_{n+2\nu}(H)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_{n-2\nu}(H)}{\lambda_n(H)}=1,$$

то из (11.28) следует (11.23).

Осталось еще принять во внимание, что оператор A имеет не более конечного числа отрицательных собственных чисел, т. е. для достаточно больших n числа $\lambda_n(A)=s_n(A)$. Это свойство оператора A вытекает из того, что оператор $A-A_1$ конечномерен, а по доказанному оператор A_1 имеет не более конечного числа отрицательных собственных чисел.

Теорема доказана.

Нетрудно видеть, что если для оператора H существует функция $\varphi(r)$ $(0<r<\infty)$, обладающая свойствами 1), 2) и 3) из теоремы 11.1, то всегда будет выполняться условие 2) теоремы 11.4, а соотношения (11.23) и (11.8) будут эквивалентны.

§ 12. Самосопряженные квадратичные пучки *)

1. В линейной теории малых демпфированных колебаний систем с бесконечным числом степеней свободы важную роль играют свойства квадратичных пучков $L(\lambda)$ вида

$$L(\lambda)=I+\lambda B+\lambda^2 C,$$

где C — положительный вполне непрерывный оператор, а B — неотрицательный ограниченный оператор.

Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, мы предполагаем выполненным первое условие и условие

$$B=B^*\in\mathfrak{R}. \tag{12.1}$$

Так как уравнение $L(\lambda)\varphi=0$ эквивалентно паре уравнений

$$\begin{cases}\varphi=-\lambda(B\varphi+C\psi),\\ \psi=\lambda\varphi,\end{cases}$$

*) Содержание этого параграфа заимствовано из работ М. Г. Крейна и Г. К. Лангера [1] и [2] (§§ 2, 7).

то спектр характеристических чисел пучка $L(\lambda)$ совпадает со спектром характеристических чисел оператора $\mathscr{H}_1$, действующего в пространстве $\tilde{\mathfrak{H}}=\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}$ (ортогональной сумме двух копий пространства $\mathfrak{H}$) и определяемого равенством:

$$\mathscr{H}_1=\begin{pmatrix} -B & -C \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Более того, на основании общих рассмотрений § 9 можно также утверждать, что алгебраическая и собственная кратность любого характеристического числа оператора $\mathscr{H}_1$ и пучка L одна и та же, и что двукратная полнота в $\mathfrak{H}$ системы собственных и присоединенных векторов пучка L эквивалентна полноте системы корневых векторов оператора $\mathscr{H}_1$ в $\tilde{\mathfrak{H}}$.

Вместо оператора $\mathscr{H}_1$ нам удобней будет иметь дело с оператором

$$\mathscr{H}=\begin{pmatrix} -B & -C^{1/2} \\ C^{1/2} & 0 \end{pmatrix},$$

действующим в том же пространстве $\tilde{\mathfrak{H}}$.

Вводя еще в рассмотрение операторы

$$\mathscr{S}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C^{1/2} \end{pmatrix}, \quad \mathscr{G}=\begin{pmatrix} -B & -C^{1/2} \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

будем иметь

$$\mathscr{H}_1=\mathscr{G}\mathscr{S}, \quad \mathscr{H}=\mathscr{S}\mathscr{G}, \tag{12.2}$$

а следовательно,

$$\mathscr{S}\mathscr{H}_1=\mathscr{H}\mathscr{S}, \quad \mathscr{H}_1\mathscr{G}=\mathscr{G}\mathscr{H}. \tag{12.3}$$

Легко видеть, что каждый из операторов $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}$, $\mathscr{S}$, $\mathscr{G}$ и сопряженных к ним операторов аннулируются только в нуле.

Если $\{x_j\}_0^l$ $(l\geqslant 0)$ — некоторая жорданова цепочка оператора $\mathscr{H}_1$, отвечающая собственному числу λ, т. е.

$$\mathscr{H}_1x_0=\lambda x_0, \quad \mathscr{H}_1x_j=\lambda x_j+x_{j-1} \qquad (j=1, 2, \ldots, l), \tag{12.4}$$

то векторы $y_j = \mathscr{S} x_j$ ($j = 0, 1, \ldots, l$) составят жорданову цепочку оператора $\mathscr{H}$, отвечающую тому же числу λ, т. е.

$$\mathscr{H} y_0 = \lambda y_0, \quad \mathscr{H} y_j = \lambda y_j + y_{j-1} \qquad (j = 1, 2, \ldots, l). \quad (12.5)$$

В самом деле, последние соотношения получаются из соотношений (12.4) путем почленного применения к ним оператора $\mathscr{S}$ (с учетом первого из равенств (12.3)).

Обратно, пусть имеют место соотношения (12.5). Положим

$$x_0 = \lambda^{-1} \mathscr{G} y_0, \quad x_j = \lambda^{-1} (\mathscr{G} y_j - x_{j-1}) \qquad (j = 1, \ldots, l).$$

В силу второго из равенств (12.2) получаем, что $y_j = \mathscr{S} x_j$ ($j = 0, 1, \ldots, l$). Поэтому, используя первое из равенств (12.3), можем переписать соотношения (12.5) в виде:

$$\mathscr{S}(\mathscr{H}_1 x_0 - \lambda x_0) = 0, \quad \mathscr{S}(\mathscr{H}_1 x_j - \lambda x_j - x_{j-1}) = 0$$
$$(j = 1, 2, \ldots, l).$$

Так как оператор $\mathscr{S}$ аннулируется только в нуле, то отсюда уже следуют соотношения (12.4).

Тем самым доказано, что оператор $\mathscr{S}$ отображает взаимно однозначно всякое корневое подпространство $\mathfrak{L}_\lambda(\mathscr{H}_1)$ оператора $\mathscr{H}_1$ на корневое подпространство $\mathfrak{L}_\lambda(\mathscr{H})$ оператора $\mathscr{H}: \mathscr{S}\mathfrak{L}_\lambda(\mathscr{H}_1) = \mathfrak{L}_\lambda(\mathscr{H})$. Одновременно нами доказано, что $\mathscr{G}\mathfrak{L}_\lambda(\mathscr{H}) = \mathfrak{L}_\lambda(\mathscr{H}_1)$. Так как $\overline{\mathfrak{R}(\mathscr{S})} = \widetilde{\mathfrak{H}}$ и $\overline{\mathfrak{R}(\mathscr{G})} = \widetilde{\mathfrak{H}}$, то отсюда вытекает, что полнота системы корневых векторов одного из операторов $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}_1$ влечет таковую же полноту для другого оператора.

Отсюда вытекает, что *система собственных и присоединенных векторов пучка $L(\lambda)$ двукратно полна в том и только том случае, когда система корневых векторов оператора $\mathscr{H}$ полна.*

Между прочим, при выводе этого утверждения нигде не было использовано, что $B = B^*$.

2. В предположении (12.1) будем иметь:

$$\mathscr{H}_{\mathscr{R}} = \begin{pmatrix} -B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{H}_{\mathscr{I}} = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 0 & -C^{1/2} \\ C^{1/2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что спектр самосопряженного оператора $\mathcal{H}_{\mathcal{J}}$ расположен симметрично относительно нуля и, более того,

$$\lambda_n^{\pm}(\mathcal{H}_{\mathcal{J}}) = \pm\lambda_n(C^{1/2}) = \pm\lambda_n^{1/2}(C) \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \quad (12.6)$$

Отметим, что операторы $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}^*$ подобны:

$$\mathcal{H}^* = \mathcal{Y}^{-1}\mathcal{H}\mathcal{Y}, \text{ где } \mathcal{Y} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}. \quad (12.7)$$

Так как дальнейшие наши рассмотрения будут частично относиться и к случаю, когда $B \overline{\in} \mathfrak{S}_\infty$, то оговорим четко, что точка $\lambda = \lambda_0$ называется *регулярной точкой* пучка L, если оператор $L(\lambda_0)$ обратим. Множество регулярных точек пучка L обозначим через $\varrho(L)$. Его дополнение называется *спектром* пучка L и обозначается через $\sigma(L)$.

I°. *Спектр $\sigma(L)$ симметричен относительно вещественной оси, т. е. $\sigma(L) = \overline{\sigma(L)}$. Всякая невещественная точка $\lambda_0 \in \sigma(L)$ является изолированным характеристическим числом пучка $L(\lambda)$ конечной алгебраической кратности* *). *Корневые линеалы $\mathfrak{L}_{\lambda_0}(L)$ и $\mathfrak{L}_{\bar{\lambda}_0}(L)$ имеют одинаковую размерность и, более того, одинаковую структуру.*

Первое утверждение следует из равенства $L(\bar{\lambda}) = [L(\lambda)]^*$, вытекающего из условий $B = B^*$, $C = C^*$.

Очевидно, достаточно малая окрестность нуля состоит из регулярных точек пучка L. При невещественном λ оператор $I + \lambda B$ обратим, и для таких λ

$$L(\lambda) = (I + \lambda B)(I + T(\lambda)),$$

где $T(\lambda) = \lambda^2 (I + \lambda B)^{-1} C$ — голоморфная функция со значениями из $\mathfrak{S}_\infty$. Поэтому на основании теоремы I.5.2 можно утверждать, что невещественная часть спектра $\sigma(L)$ состоит из изолированных характеристических чисел.

---

*) Этим же свойством обладает и всякая вещественная точка $\lambda_0 \in \sigma(L)$ такая, что $-\lambda_0^{-1}$ не принадлежит спектру сгущения оператора B. Кстати, отметим, что всякая точка λ_0, для которой $-\lambda_0^{-1}$ принадлежит спектру сгущения B, входит в спектр $\sigma(L)$.

Если λ_0 — невещественное характеристическое число пучка L, то оно будет характеристическим числом оператора $\mathcal{H}_1$ и, следовательно, оператора $\mathcal{H}$. Так как $\mathcal{H}_{\mathcal{J}} \in \mathfrak{S}_\infty$, то λ_0 будет нормальным собственным числом для $\mathcal{H}$ и корневой линеал $\mathfrak{L}_{\lambda_0}(\mathcal{H})$ будет конечномерен. Стало быть,

$$\dim \mathfrak{L}_{\lambda_0}(L) = \dim \mathfrak{L}_{\lambda_0}(\mathcal{H}_1) = \dim \mathfrak{L}_{\lambda_0}(\mathcal{H}) < \infty.$$

Для доказательства третьего утверждения из I° замечаем, что в силу (12.7) корневые линеалы $\mathfrak{L}_{\lambda_0}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{L}_{\bar\lambda_0}(\mathcal{H}) = \mathcal{Y}\mathfrak{L}_{\bar\lambda_0}(\mathcal{H}^*)$ $(\lambda_0 \neq \bar\lambda_0)$ имеют одинаковую размерность и одинаковую структуру (оператор $\mathcal{Y}$ отображает всякую жорданову цепочку для $\mathcal{H}$ из $\mathfrak{L}_{\bar\lambda_0}(\mathcal{H})$ в жорданову цепочку для $\mathcal{H}^*$ из $\mathfrak{L}_{\bar\lambda_0}(\mathcal{H}^*)$), поэтому и корневые линеалы

$$\mathfrak{L}_{\lambda_0}(\mathcal{H}_1) = \mathcal{S}^{-1}\mathfrak{L}_{\lambda_0}(\mathcal{H}) \text{ и } \mathfrak{L}_{\bar\lambda_0}(\mathcal{H}_1) = \mathcal{S}^{-1}\mathfrak{L}_{\bar\lambda_0}(\mathcal{H})$$

имеют одинаковую размерность и одинаковую структуру по отношению к оператору $\mathcal{H}_1$, откуда уже следует третье утверждение.

II°. *Если $B \geqslant 0$, то спектр $\sigma(L)$ лежит в левой полуплоскости* $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$.

В самом деле, если $\alpha = \operatorname{Re}\lambda > 0$, то выполняется соотношение

$$[\lambda^{-1}L(\lambda)]_{\mathcal{R}} = \frac{\alpha}{|\lambda|^2} I + B + \alpha C \geqslant \frac{\alpha}{|\lambda|^2} I;$$

отсюда следует, что оператор $L(\lambda)$ обратим *).

3. Если $B \in \mathfrak{S}_\infty$, то спектр $\sigma(L)$ состоит лишь из изолированных характеристических чисел конечной алгебраической кратности с единственной предельной точкой на бесконечности, если этих чисел бесконечно много.

В этом случае спектр $\sigma(L)$ может оказаться и пустым множеством. Действительно, пусть $B = Z + Z^*$, $C = Z^*Z$,

---

*) В самом деле, если $A = A_{\mathcal{R}} + iA_{\mathcal{J}}$, где $A_{\mathcal{R}} \geqslant \delta I$ $(\delta > 0)$, то оператор $A_{\mathcal{R}}$ обратим, и из соотношения

$${}_{\mathcal{R}} + iA_{\mathcal{J}} = A_{\mathcal{R}}^{1/2}(I + iA_{\mathcal{R}}^{-1/2}A_{\mathcal{J}}A_{\mathcal{R}}^{-1/2})\,A_{\mathcal{R}}^{1/2}$$

следует, что оператор A также обратим.

где Z — некоторый вольтерров оператор. Тогда при любом λ оператор

$$L(\lambda)=(I+\lambda Z^*)(I+\lambda Z)$$

обратим.

Если $B=B^*\overline{\in}\mathfrak{S}_\infty$, то в спектр $\sigma(L)$ всегда входят некоторые вещественные точки.

Но оказывается, каков бы ни был оператор $B=B^*\in\mathfrak{R}$, всегда справедливо предложение:

Теорема 12.1. *Множество невещественных характеристических чисел пучка* L *может иметь единственную предельную точку на бесконечности. Если* $\{\check{\lambda}_j(L)\}_1^\omega$ $(\omega\leqslant\infty)$ — *полная последовательность характеристических чисел пучка* L, *упорядоченных по возрастанию модулей* $(|\check{\lambda}_1(L)|\leqslant|\check{\lambda}_2(L)|\leqslant\ldots)$, *то для любой функции* $f(r)$ $(0<r<\infty;\ f(+0)=0)$, *для которой функция* $f(e^t)$ $(-\infty<t<\infty)$ *выпукла, выполняются неравенства*

$$\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{1}{|\check{\lambda}_j(L)|}\right)\leqslant\sum_{j=1}^{n} f(\sqrt{\lambda_j(C)})\qquad(n=1,\ 2,\ \ldots,\ \omega).\tag{12.8}$$

В частности, если $\omega=\infty$, *то*

$$\sum_{j=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{|\check{\lambda}_j(L)|}\right)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty} f(\sqrt{\lambda_j(C)})\qquad(=\operatorname{sp} f(C^{1/2})).\tag{12.9}$$

Если предположить, что функция $f(e^t)$ строго выпукла и правая часть в (12.9) конечна, то знак равенства будет иметь место в том и только том случае, когда операторы B и C перестановочны и выполняется условие $B^2<4C$.

Поясним, на каком пути получается теорема. Так как $\mathscr{Y}^2=I$, то равенство (12.7) можно переписать еще так $\mathscr{Y}\mathscr{H}=\mathscr{H}\mathscr{Y}$. Последнее равенство означает, что оператор $\mathscr{H}$ самосопряжен по отношению к индефинитному скалярному произведению $[x,\ y]=(\mathscr{Y}x,\ y)$ $(x,\ y\in\tilde{\mathfrak{H}})$. Это обстоятельство вместе с полной непрерывностью оператора $\mathscr{H}_{\mathscr{Y}}$ позволяет применить к оператору $\mathscr{H}$ обобщение известной теоремы Л. С. Понтрягина, полученное Г. Лангером [3] (см. также М. Г. Крейн [11]). Отсюда выводится существование оператора $Z_+\in\mathfrak{S}_\infty$ такого, что

$$Z_+^2+BZ_++C=0,\quad Z_+^*Z_+\leqslant C,\tag{12.10}$$

и обладающего следующими спектральными свойствами: множество всех невещественных характеристических чисел оператора Z_+ совпадает с множеством всех характеристических чисел пучка L, лежащих внутри верхней полуплоскости, и для каждой точки λ этого множества корневые линеалы $\mathfrak{L}_{1/\lambda}(Z_+)$ и $\mathfrak{L}_\lambda(L)$ совпадают.

Из второго соотношения (12.10) следует, что

$$s_j(Z_+) \leqslant \sqrt{\lambda_j(C)} \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots). \tag{12.11}$$

Таким образом, первое утверждение теоремы 12.1 получается из указанного спектрального свойства оператора Z_+ и того, что $Z_+ \in \mathfrak{S}_\infty$. Второе утверждение, т. е. соотношения (12.9) получаются путем применения к оператору Z_+ леммы II.3.4 с учетом оценок (12.11)

4. Если $B \geqslant 0$, то оператор $\mathscr{H}$ *R-диссипативен*, т. е. $\operatorname{Re}\mathscr{H} \geqslant 0$, и следовательно, оператор $-i\mathscr{H}$ просто диссипативен, и к нему применимы теоремы V.2.1 и V.4.1. Учитывая, что

$$\operatorname{sp} B = -\operatorname{sp} \mathscr{H}_{\mathfrak{R}},$$

а также соотношения (12.6) и связь оператора $\mathscr{H}$ с пучком $L(\lambda)$, приходим к следующему предложению.

Теорема 12.2. *Пусть* $B \geqslant 0$ *и* $\operatorname{sp} B < \infty$. *Тогда*

$$-\sum \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\lambda_j}\right) \leqslant \operatorname{sp} B, \tag{12.12}$$

где суммирование распространяется на все характеристические числа λ_j *пучка* L *(с учетом их алгебраических кратностей). Знак равенства в соотношении (12.12) имеет место в том и только том случае, когда система собственных и присоединенных векторов пучка* L *двукратно полна.*

Эта двукратная полнота имеет место всякий раз, когда $\varliminf n^2\lambda_n(C) = 0$, *в частности, когда* $\operatorname{sp}(C^{1/2}) < \infty$.

В связи с соотношением (12.6) заметим, что теорема II.6.1, будучи примененной к оператору $\mathscr{H}$, позволяет сделать следующее общее утверждение.

Если $B = B^* \in \mathfrak{S}_\infty$, то

$$\sum_{j=1}^{n} \left|\operatorname{Re}\frac{1}{\lambda'_j(L)}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} s_j(B) \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots,\ \omega),$$

где $\{\lambda'_j(L)\}_1^\omega$ $(\omega \leqslant \infty)$ — полная последовательность всех характеристических чисел пучка L, не лежащих на мнимой оси и упорядоченных по абсолютной величине своей вещественной части: $|\operatorname{Re}\lambda'_1(L)| \geqslant |\operatorname{Re}\lambda'_2(L)| \geqslant \ldots$

5. Если $B = 0$, то спектр $\sigma(L)$ располагается на мнимой оси. Мы покажем, что при «малом» (в определенном

смысле) операторе $B=B^*$ спектр $\sigma(L)$ будет располагаться в малых вертикальных углах, содержащих мнимую ось; при этом при некоторых дополнительных условиях относительно оператора C будет обеспечиваться двукратная полнота системы собственных и присоединенных векторов пучка.

Теорема 12.3. *Пусть $B=B^*$ и при некотором $\varkappa$ $(0<\varkappa<2)$ выполняется условие $B^2\leqslant\varkappa^2C$. Тогда спектр $\sigma(L)$ лежит в вертикальных углах*

$$\left|\arg\lambda\pm\frac{\pi}{2}\right|<\theta_1, \tag{12.13}$$

где $\sin\theta_1=\varkappa/2$ $\left(0<\theta_1<\frac{\pi}{2}\right)$.

Если $0<\varkappa\leqslant 1$ и, кроме того,

$$\lambda_n(C)=o(n^{-\pi/2\theta}), \tag{12.14}$$

где $\sin\theta=\varkappa$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$, *то система собственных и присоединенных векторов пучка L двукратно полна.*

Доказательство. Пусть для некоторого комплексного λ и $\varphi\in\mathfrak{H}$ $(|\varphi|=1)$ имеем $L(\lambda)\varphi=0$. Тогда, решая квадратное уравнение $(L(\lambda)\varphi,\ \varphi)=0$ относительно λ, находим:

$$\lambda^{-1}=\frac{1}{2}\left(-(B\varphi,\ \varphi)\pm i\sqrt{4(C\varphi,\ \varphi)-(B\varphi,\ \varphi)^2}\right).$$

Так как

$$(B\varphi,\ \varphi)^2\leqslant|B\varphi|^2|\varphi|^2=(B^2\varphi,\ \varphi)\leqslant\varkappa^2(C\varphi,\ \varphi),$$

то

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{4-\varkappa^2}\,(C\varphi,\ \varphi)^{1/2},$$

$$\left|\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right|\leqslant\frac{1}{2}\varkappa\,(C\varphi,\ \varphi)^{1/2},$$

откуда

$$\left|\frac{\operatorname{Re}\lambda}{\operatorname{Im}\lambda}\right|\leqslant\frac{\varkappa/2}{\sqrt{1-(\varkappa/2)^2}}.$$

Отсюда вытекает первое утверждение теоремы.

Рассмотрим оператор

$$\mathcal{A}=-\mathcal{H}^2=\begin{pmatrix} C-B^2 & -BC^{1/2} \\ C^{1/2}B & C \end{pmatrix}. \tag{12.15}$$

Для этого оператора при любом $x = x_1 \oplus x_2 \in \widetilde{\mathfrak{H}}$:

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}x, x) = ((C - B^2)x_1, x_1) + (Cx_2, x_2) \geqslant$$
$$\geqslant (1 - \varkappa^2)(Cx_1, x_1) + (Cx_2, x_2) \geqslant$$
$$\geqslant 2\sqrt{(1-\varkappa^2)(Cx_1, x_1)(Cx_2, x_2)}, \qquad (12.16)$$

а

$$|\operatorname{Im}(\mathcal{A}x, x)| = 2|\operatorname{Im}(C^{1/2}Bx_1, x_2)| \leqslant 2|(Bx_1, C^{1/2}x_2)| \leqslant$$
$$\leqslant 2\sqrt{(B^2x_1, x_1)(Cx_2, x_2)} \leqslant 2\varkappa\sqrt{(Cx_1, x_1)(Cx_2, x_2)}. \qquad (12.17)$$

Таким образом, при всех положительных $\varkappa \leqslant 1$ оператор $\mathcal{A}$ является R-диссипативным, причем при $\varkappa < 1$

$$|\operatorname{Im}(\mathcal{A}x, x)|/\operatorname{Re}(\mathcal{A}x, x) \leqslant \varkappa/\sqrt{1-\varkappa^2} \qquad (x_1, x_2 \neq 0).$$

Следовательно,

$$0 \leqslant |\arg(\mathcal{A}x, x)| \leqslant \theta. \qquad (12.18)$$

С другой стороны, из (12.17) вытекает, что

$$|\operatorname{Im}(\mathcal{A}x, x)| = |(\mathcal{A}_{\mathcal{J}}x, x)| \leqslant \varkappa((Cx_1, x_1) + (Cx_2, x_2)),$$

т. е.

$$-\mathcal{C} \leqslant \mathcal{A}_{\mathcal{J}} \leqslant \mathcal{C}, \quad \text{где } \mathcal{C} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Из (12.15) непосредственно следует, что также $O \leqslant \leqslant \mathcal{A}_{\mathcal{R}} \leqslant \mathcal{C}$. Поэтому если C, а следовательно, и $\mathcal{C}$, удовлетворяет условию (12.14), то этому же условию удовлетворяют и операторы $\sqrt{\mathcal{A}_{\mathcal{J}}^2}$ и $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$, откуда

$$s_n(\mathcal{A}) = o(n^{-\pi/2\theta}) \qquad (n \to \infty).$$

Таким образом, оператор $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям теоремы 6.1 о полноте системы корневых векторов. А так как $\mathcal{H}^2 = -\mathcal{A}$, то отсюда следует полнота системы корневых векторов оператора $\mathcal{H}$ и, стало быть, второе утверждение теоремы также доказано.

6. Основное (второе) утверждение теоремы 12.3 интересно сопоставить с тем, что дают общие результаты § 9 в применении к рассматриваемому пучку $L(\lambda)$.

Согласно теореме М. В. Келдыша и ее обобщению, данному Ю. А. Палантом, можно утверждать (безотносительно к тому, будет ли $B=B^*$ или $\neq B^*$), *что система собственных и присоединенных векторов пучка* $L(\lambda)=I+\lambda B+\lambda^2 C$ *двукратно полна, коль скоро* $B=TC^{1/2}$ ($T\in\mathfrak{S}_\infty$) *и хотя бы один из операторов* T, C *имеет конечный порядок.*

При выполнении этих условий весь спектр пучка L за исключением, быть может, конечного числа его точек, будет лежать в вертикальных углах

$$\left|\arg\lambda\pm\frac{\pi}{2}\right|<\varepsilon,$$

как бы мало ε ни было.

С другой стороны, условие $B^2\leqslant \varkappa^2 C$ означает, что $|Bf|\leqslant\varkappa|C^{1/2}f|$ ($f\in\mathfrak{H}$), что, в свою очередь, эквивалентно равенству $B=TC^{1/2}$, где $T\in\mathfrak{R}$ и $|T|\leqslant\varkappa$.

Таким образом, при выполнении условий теоремы 12.3 $B=B^*=TC^{1/2}$, где C имеет конечный порядок ($p(C)<\infty$), а T — ограниченный оператор с достаточно малой нормой (порядок малости нормы определяется величиной $p(C)$).

7. Теорема 11.1 позволяет установить следующее асимптотическое предложение для рассматриваемого пучка L.

Теорема 12.4. *Пусть* $B=TC^{1/2}$, *где* $T\in\mathfrak{S}_\infty$, *и пусть оператору* C *отвечает функция* $\varphi(r)$ ($0<r<\infty$) *такая, что*

$$\frac{\varphi(s)}{\varphi(r)}\leqslant\left(\frac{s}{r}\right)^\gamma \quad (0<r<s<\infty,\ \gamma - \textit{константа})$$

и

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(r;\ C)}{\varphi(r)}=1.$$

Тогда для функции распределения $n_+(r;\ L)$ *множества характеристических чисел пучка* L, *лежащих в верхней полуплоскости* $\operatorname{Im}\lambda>0$, *справедливо асимптотическое соотношение*:

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n_+(r;\ L)}{\varphi(\sqrt{r})}=1. \tag{12.19}$$

Доказательство. Из $B=TC^{1/2}$ следует, что $B=B^*=C^{1/2}T^*$; поэтому равенство (12.15) в рассматриваемом случае принимает вид:

$$\mathscr{A}=\begin{pmatrix} C-TCT^* & -TC \\ CT & C \end{pmatrix}=(I-\mathscr{S})\,\mathscr{C}\,(I+\mathscr{S}^*),$$

где

$$\mathscr{S}=\begin{pmatrix} 0 & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{C}=\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $\mathscr{S}\in\mathfrak{S}_\infty$. Так как $\mathscr{S}^2=\mathscr{S}^{*2}=0$, то операторы $I-\mathscr{S}$ и $I+\mathscr{S}^*$ обратимы. Учитывая, что $n(r,\ \mathscr{C})=2n(r,\ C)$, заключаем, что к оператору $\mathscr{A}$ применима теорема 11.1 в расширенной формулировке, указанной в замечании 11.1. Таким образом,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(r,\ \mathscr{A})}{2\varphi(r)}=1, \tag{12.20}$$

а так как $n(r;\ \mathscr{A})=n(r,\ \mathscr{H}^2)=n\left(\sqrt{r},\ \mathscr{H}\right)=n\left(\sqrt{r};\ L\right)=2n_+\left(\sqrt{r};\ L\right)$, то из (12.19) следует (12.20).

Теорема доказана.

8. Пучок $L(\lambda)$ называется *слабо демпфированным*, если

$$(Bf,\ f)<4(f,\ f)(Cf,\ f) \qquad (f\in\mathfrak{H},\ f\neq 0). \tag{12.21}$$

При выполнении условия (12.21) самосопряженный оператор B принадлежит $\mathfrak{S}_\infty$. В самом деле, пусть P_n $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ — ортопроектор на линейную оболочку первых n собственных векторов оператора C, так что

$$|Q_nCQ_n|\leqslant\lambda_{n+1}(C), \quad \text{где} \quad Q_n=I-P_n \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Из (12.21) следует, что при любом $f\in\mathfrak{H}$ с $|f|=1$

$$(BQ_nf,\ Q_nf)^2\leqslant 4(Q_nf,\ Q_nf)\,\lambda_{n+1}(C)\leqslant 4\lambda_{n+1}(C),$$

откуда

$$|Q_nBQ_n|=|B-BP_n-P_nB-P_nBP_n|\leqslant 4\lambda_{n+1}(C)\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

и, стало быть, $B\in\mathfrak{S}_\infty$.

Условие (12.21) означает, что при любом $f\neq 0$ $(f\in\mathfrak{H})$ квадратное по λ уравнение $(L(\lambda)f,\ f)=0$ не имеет вещественных корней и, стало быть, $L(\lambda)f\neq 0$ при $f\neq 0$ и $\operatorname{Im}\lambda=0$.

Таким образом, *если пучок L слабо демпфирован, то весь его спектр состоит из изолированных невещественных характеристических чисел конечной алгебраической кратности с единственной возможной предельной точкой на бесконечности.*

Можно показать, что это предложение допускает обращение.

Этот факт, в частности, находится в согласии с тем, что если $B^2 \leqslant \varkappa^2 C$ $(0 < \varkappa < 2)$ (и, следовательно, спектр $\sigma(L)$ лежит в углах (12.13)), то выполняется условие (12.21). Действительно, в этом случае

$$(Bf, f)^2 \leqslant (B^2 f, f)(f, f) \leqslant \varkappa^2 (Cf, f)(f, f) < \\ < 4(Cf, f)(f, f) \quad (\|f\| \neq 0).$$

Отметим еще, что для перестановочных B и C условие (12.21) эквивалентно условию $B^2 < 4C$, с которым мы уже встречались (см. п. 3).

9. Введем некоторые новые определения. Пусть φ_0 — некоторый собственный вектор пучка $L(\lambda_0)\varphi_0 = 0$. Тогда возможны три случая: величина $|\lambda_0|^2$ может быть равна, больше или меньше отношения $(\varphi_0, \varphi_0)/(C\varphi_0, \varphi_0)$. Соответственно этим случаям собственный вектор φ_0 называется *нейтральным*, *первого рода* или *второго рода*.

Так как λ_0 является корнем квадратного уравнения

$$((L(\lambda)\varphi_0, \varphi_0) \equiv)\, (C\varphi_0, \varphi_0)\lambda^2 + (B\varphi_0, \varphi_0)\lambda + (\varphi_0, \varphi_0) = 0,$$

то в случае невещественного λ_0 всегда $|\lambda_0|^2 = (\varphi_0, \varphi_0)/(C\varphi_0, \varphi_0)$.

Таким образом, собственные векторы пучка L, отвечающие невещественным характеристическим числам, всегда являются нейтральными.

Если все собственные векторы пучка, отвечающие одному и тому же характеристическому числу λ_0, одного и того же рода, то для числа λ_0 у пучка L не будет присоединенных векторов. В этом случае собственное число называется *дефинитным* и соответственно тому или иному случаю *собственным числом первого* или *второго рода*. Пучок L называется *сильно демпфированным*, если

$$(Bf, f) > 2\sqrt{(f, f)(Cf, f)} \qquad (f \in \mathfrak{H},\ f \neq 0). \tag{12.22}$$

Последнее условие означает, что при любом $f \neq 0$ квадратное уравнение $(L(\lambda)f, f) = 0$ имеет два различных отрицательных вещественных корня. Отсюда нетрудно заключить *):

---

*) Предложения 1° и 2° в алгебраическом случае ($\mathfrak{H}$ — конечномерно) были установлены американским механиком Даффи-

1°. *Всякое характеристическое число сильно демпфированного пучка отрицательно и дефинитно.*

Несколько более сложно доказывается утверждение:

2°. *Сильно демпфированному пучку L всегда отвечает такое число $l>0$, что*

$$(Bf, f) \geqslant \frac{1}{l}(f, f) \qquad (f \in \mathfrak{H}) \tag{12.23}$$

и всякое характеристическое число первого рода пучка L будет $\leqslant -l$, а второго рода $\geqslant -l$ ($u<0$).

Соотношение (12.23) означает, что у сильно демпфированного пучка L оператор B всегда *равномерно положителен* *) и поэтому $\bar{\in} \mathfrak{S}_\infty$. Это обстоятельство позволяет сделать такое дополнение к предложению 2°.

3°. *Спектр $\sigma(L)$ сильно демпфированного пучка состоит из характеристических чисел первого и второго рода конечной кратности и тех отрицательных λ ($>-l$), для которых число $-\lambda^{-1}$ принадлежит спектру сгущения B.*

Следующее предложение для своего доказательства во второй части требует уже сравнительно тонких рассуждений.

4°. *Множество характеристических чисел первого рода сильно демпфированного пучка L может быть расположено в полную неубывающую последовательность $\{\lambda_n^{(1)}(L)\}$, стремящуюся к $-\infty$. Этой последовательности можно сопоставить последовательность собственных векторов $\{\varphi_n^{(1)}\}$ пучка L, образующую базис Рисса* **) *пространства $\mathfrak{H}$.*

Если спектр сгущения оператора B состоит из единственной точки β (>0), т. е.

$$B = \beta I + T \qquad (T \in \mathfrak{S}_\infty), \tag{12.24}$$

то предложение 4° может быть дополнено предложением:

5°. *При выполнении условия* (12.24) *спектр $\sigma(L)$ сильно демпфированного пучка L состоит из невозрастающей полной последовательности $\{\lambda_n^{(1)}(L)\}$ характеристических чисел первого рода, стремящейся к $-\infty$, невозрастающей полной последовательности $\{\lambda_n^{(2)}(L)\}$ характеристических чисел второго рода, стремящейся к $-\beta$, и самого числа $-\beta$.*

Последовательностям $\{\lambda_n^{(1)}(L)\}$ и $\{\lambda_n^{(2)}(L)\}$ можно сопоставить последовательности собственных векторов

$$\{\varphi_n^{(1)}\} \text{ и } \{\varphi_n^{(2)}\} \quad (L(\lambda_n^{(k)})\varphi_n^{(k)}=0,\ n=1,2,\ \ldots;\ k=1,\ 2),$$

каждая из которых образует базис Рисса пространства $\mathfrak{H}$.

ном [1] в его оригинальной работе, посвященной сильно демпфированным колебаниям систем с конечным числом степеней свободы.

*) Оператор B называется *равномерно положительным*, если $B \geqslant \delta I$, где $\delta>0$.

**) О понятии базиса Рисса см. гл. VI § 2.

Объединение последовательностей $\{\varphi_n^{(1)}\}$ *и* $\{\varphi_n^{(2)}\}$ *дает двукратно полную систему собственных векторов пучка* L.

Для последовательности $\{\lambda_n^{(1)}(L)\}$ *имеет место асимптотическая формула*:

$$\lambda_n^{(1)}(L) = -\frac{\beta}{\lambda_n(C)}(1+o(1)) \qquad (n \to \infty).$$

Оказывается, что второе утверждение предложения допускает следующее уточнение. Пусть операторы $C^{1/2}$ и T принадлежат одному и тому же с. н. идеалу $\mathfrak{S}$. Тогда сильно демпфированному пучку L будет отвечать оператор $S \in \mathfrak{S}$ и два ортонормированных базиса $\{\psi_n^{(1)}\}$ и $\{\psi_n^{(2)}\}$ пространства, применение к которым оператора $I+S$ будет превращать их в полные последовательности собственных векторов $\{\varphi_n^{(1)}\}$ и $\{\varphi_n^{(2)}\}$ первого и соответственно второго рода пучка L. В частности, если $\operatorname{sp} C < \infty$ и $T \in \mathfrak{S}_2$, то базисы $\{\varphi_n^{(1)}\}$ и $\{\varphi_n^{(2)}\}$ будут базисами Бари (базисами, квадратично близкими к ортонормированным; см. гл. VI, § 3).

Заметим, что предложение 5° допускает некоторое обобщение на тот случай, когда оператор B имеет вид (12.24), а условие (12.22) сильной демпфированности не выполняется.

Более того, все предложения 1°—4° допускают обобщение на тот случай, когда оператор $B = B^*$ имеет строго положительный спектр сгущения, а условие (12.24) не выполняется. Отметим, что в этом общем случае спектр $\sigma(L)$ содержит не более конечного числа невещественных характеристических чисел и, вообще, не более конечного числа характеристических чисел, которым отвечают нейтральные собственные векторы, и все такие числа имеют конечную алгебраическую кратность.

10. Недавно С. Г. Крейн [1] показал, что задача о малых колебаниях вязкой жидкости, находящейся в неподвижном сосуде и имеющей свободную поверхность, приводит к уравнению

$$y = \mu G y + \frac{1}{\mu} H y, \tag{12.25}$$

где $G, H \in \mathfrak{S}_\infty$, $G > 0$, $H \geq 0$, а μ — комплексный параметр.

Подстановка $\mu = -\lambda - a$ $(a > 0)$ преобразует уравнение (12.25) в следующее:

$$(a^2G + aI + H)\,y + \lambda(2aG + I)\,y + \lambda^2 G y = 0.$$

Каков бы ни был оператор $H = H^*$ $(\in \mathfrak{R})$ (ни одно из условий $H \in \mathfrak{S}_\infty$, $H \geq 0$ не обязательно), при достаточно большом a оператор $F = a^2G + H + aI$ будет равномерно положительным. Выбрав такое a и произведя в уравнении (12.25) замену $x = F^{1/2}y$, мы преобразуем его в уравнение $L_a(\lambda)\,x = 0$, где

$$L_a(\lambda) = I + \lambda B_a + \lambda^2 C_a, \quad B_a = F^{-1/2}(2aG + I)\,F^{-1/2}$$
$$C_a = F^{-1/2} G F^{-1/2}.$$

Если $H \in \mathfrak{S}_\infty$, то оператор $F - aI \in \mathfrak{S}_\infty$, и тогда $F^{-1/2} - a^{-1/2}I \in \mathfrak{S}_\infty$ и, стало быть, $B_a - a^{-1}I \in \mathfrak{S}_\infty$.

Полученный пучок L_a будет сильно демпфирован в том и только том случае, когда *)

$$4(Gx, x)(Hx, x) < (x, x)^2 \qquad (x \in \mathfrak{H},\ x \neq 0). \qquad (12.26)$$

В самом деле, условие (12.26) для пучка L_a означает, что при любом $f \neq 0$ квадратное уравнение $(L_a(\lambda) f, f) = 0$ имеет два различных вещественных корня, а это свойство инвариантно при всех преобразованиях, возвращающих нас к пучку $H - \lambda I + \lambda^2 G$.

При выполнении условия (12.26) вся предыдущая теория будет применима к уравнению (12.25). Если, кроме того, $H \in \mathfrak{S}_\infty$, то для оператора B_a выполняется условие (7.16) с $\beta = 1/a$ и $\lambda_n(C_a)/\lambda_n(G) \to 1/a$ (в силу теоремы 11.3).

Все это позволяет получить ряд существенных дополнений к работе Н. Г. Аскерова, С. Г. Крейна и Г. И. Лаптева [1]. Например, в случае выполнения условия (12.26) и условий G, $H \in \mathfrak{S}_\infty$, $G > 0$ можно утверждать о существовании у уравнения (12.25) двух базисов Рисса, составленных, соответственно, из собственных векторов уравнения (12.25) первого и второго рода **) и что для соответствующей полной последовательности $\mu_1^{(1)} \leqslant \mu_2^{(1)} \leqslant \ldots$ характеристических чисел первого рода уравнения (12.25) имеет место асимптотическая формула:

$$\mu_n^{(1)} = \lambda_n^{-1}(G)(1 + o(1)) \qquad (n \to \infty),$$

а если и $H > 0$, то также и для соответствующей последовательности характеристических чисел второго рода

$$\mu_n^{(2)} = \lambda_n(H)(1 + o(1)) \qquad (n \to \infty).$$

Таким образом, асимптотика характеристических чисел первого рода определяется характеристическими числами уравнения $y = \mu G y$, а асимптотика характеристических чисел второго рода собственными числами уравнения $Hy = \lambda y$.

В предположениях $G, H \in \mathfrak{S}_\infty$, $G > 0$ можно также утверждать двукратную полноту всех собственных векторов пучка (12.25). Впрочем, Г. И. Лаптев указал остроумный прием, позволяющий преобразовать уравнение (12.25) при весьма общих условиях к виду, когда применим критерий М. В. Келдыша о двукратной полноте.

---

*) Заметим, что при $H \leqslant 0$ неравенство (12.26) автоматически выполняется. Если же $H = H_+ - H_-$ $(H_\pm \geqslant 0)$, то неравенство (12.26) будет, например, выполнено при условии, что $4|G||H_+| < 1$.

**) Нетрудно понять, как переносится на уравнение (12.25) понятие собственного вектора (характеристического числа) первого или второго рода.

Уравнение (12.25) можно переписать в каждом из следующих двух видов

$$y+\frac{1}{\mu}(G-H)y=\left(\mu+\frac{1}{\mu}\right)Gy,$$

$$(G-H)y+\frac{1}{\mu}y=\left(\mu+\frac{1}{\mu}\right)\frac{1}{\mu}Hy.$$

Замены $z=\frac{1}{\mu}y$ и $\lambda=\mu+\frac{1}{\mu}$ сводят эти уравнения к системе

$$y+(G-H)z=\lambda Gy,$$

$$(G-H)y+z=\lambda Hz.$$

В операторной форме эта система запишется в виде линейного пучка

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -G+H \\ -H+G & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix},$$

к которому в случае полноты операторов G и H и конечности их порядков применима теорема М. В. Келдыша о двукратной полноте собственных и присоединенных векторов. Заметим, что преобразование Г. И. Лаптева применимо и к уравнениям более общего типа:

$$y=Ty+\mu Gy+\frac{1}{\mu}Hy, \tag{12.26}$$

где $T\in\mathfrak{S}_\infty$. В этом случае преобразованное уравнение будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} T & H-G \\ G-H & T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}.$$

ГЛАВА VI

БАЗИСЫ. ПРИЗНАКИ СУЩЕСТВОВАНИЯ БАЗИСА, СОСТАВЛЕННОГО ИЗ КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ ДИССИПАТИВНОГО ОПЕРАТОРА

Коль скоро для некоторого несамосопряженного оператора установлена полнота его корневых векторов, то тотчас же возникает вопрос — нельзя ли составить из корневых векторов этого оператора базис.

В этом направлении имеются лишь немногочисленные исследования. Наиболее простые по формулировке результаты относятся к диссипативным операторам с вполне непрерывной мнимой компонентой. Им и посвящается настоящая глава.

Оказывается, что если спектр диссипативного оператора указанного типа достаточно «прижат» к вещественной оси, то из собственных векторов этого оператора можно составить базис их линейной замкнутой оболочки, а значит, при определенных условиях, и базис всего пространства.

В зависимости от того, в какой степени этот спектр «прижат» к вещественной оси, указанный базис может оказаться базисом того или иного типа в смысле близости к ортонормированному.

Ввиду отсутствия курсов, в которых можно было бы найти изложение основ теории базисов гильбертова пространства, авторы сочли целесообразным посвятить их изложению ряд параграфов.

При составлении этой главы авторам была оказана существенная помощь со стороны А. С. Маркуса, в особенности, в части параграфов 5 и 6, где излагаются результаты этого автора.

§ 1. Базисы пространства Гильберта

1. Последовательность $\{\varphi_j\}_1^\infty$ векторов банахова пространства $\mathfrak{B}$ называется *базисом* этого пространства, если каждый вектор $x \in \mathfrak{B}$ разлагается единственным образом в ряд

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j, \tag{1.1}$$

сходящийся по норме пространства $\mathfrak{B}$.

В написанном разложении коэффициенты c_j, очевидно, являются линейными функционалами элемента $x \in \mathfrak{B}$:

$$c_j = \Psi_j(x) \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{1.2}$$

Более того, по известной теореме Банаха (см. С. Банах [1] или Л. А. Люстерник и В. И. Соболев [1]) эти линейные функционалы непрерывны ($\Psi_j \in \mathfrak{B}^*$; $j = 1, 2, \ldots$) и для них существует константа C_φ такая, что

$$|\varphi_j|^{-1} \leqslant |\Psi_j| \leqslant C_\varphi |\varphi_j|^{-1}. \tag{1.3}$$

Воспользуемся этими общими результатами в применении к какому-либо базису $\{\varphi_j\}$ гильбертова пространства $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$. В этом случае соотношения (1.2) можно будет записать в виде

$$c_j = (x, \psi_j) \qquad (\psi_j \in \mathfrak{H};\ j = 1, 2, \ \ldots). \tag{1.4}$$

Полагая в (1.4) $x = \varphi_k$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots)$, получаем:

$$(\varphi_k, \psi_j) = \delta_{jk} \qquad (j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Напомним, что две последовательности $\{\chi_j\}$ и $\{\omega_j\}$ с элементами из $\mathfrak{H}$ называются *биортогональными*, если

$$(\chi_j, \omega_k) = \delta_{jk} \qquad (j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Для данной последовательности $\{\chi_j\}_1^\infty \subset \mathfrak{H}$ биортогональная последовательность $\{\omega_j\}_1^\infty \subset \mathfrak{H}$ существует в том и только том случае, когда каждый элемент χ_j $(j = 1, 2, \ldots)$ не входит в линейную замкнутую оболочку $\mathfrak{L}_j$ всех прочих элементов χ_k $(k \neq j)$. Если это условие выполняется, то биортогональная последовательность $\{\omega_j\}_1^\infty$ будет определяться единственным образом в том и только том случае, когда система $\{\chi_j\}_1^\infty$ полна в $\mathfrak{H}$. В этом случае ортогональное дополнение $\mathfrak{L}_j^\perp = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{L}_j$ $(j=1, 2, \ldots)$ одномерно и элемент ω_j определяется условиями $\omega_j \in \mathfrak{L}_j^\perp$, $(\omega_j, \chi_j) = 1$ $(j = 1, 2, \ldots)$.

Таким образом, для всякого базиса $\{\varphi_j\}_1^\infty$ биортогональная последовательность $\{\psi_j\}_1^\infty$ определяется однозначно.

Из равенств (1.1) и (1.4) следует, что всякий вектор f, ортогональный ко всем векторам ψ_j $(j = 1, 2, \ldots)$, равен нулю. Следовательно, биортогональная последовательность к базису всегда полна в $\mathfrak{H}$. Более того, имеет место.

Теорема 1.1 (С. Банах [1]). *Биортогональная последовательность $\{\psi_j\}_1^\infty$ к базису $\{\varphi_j\}_1^\infty$ пространства $\mathfrak{H}$ также является базисом пространства $\mathfrak{H}$.*

Доказательство. Любой вектор $f \in \mathfrak{H}$ разлагается в сходящийся по норме ряд

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} (f, \psi_j)\, \varphi_j$$

и, стало быть, для любого $\chi \in \mathfrak{H}$ числовой ряд

$$(f, \chi) = \sum_{j=1}^{\infty} (f, \psi_j)(\varphi_j, \chi)$$

сходится. Таким образом,

$$(f, \chi) = \lim_{n\to\infty} \Big(f, \sum_{j=1}^{n} (\chi, \varphi_j)\, \psi_j\Big) \qquad (f \in \mathfrak{H}).$$

Последнее означает, что последовательность проекторов $\{Q_n\}_1^\infty$, определенных равенствами

$$Q_n\chi = \sum_{j=1}^{n} (\chi, \varphi_j)\, \psi_j \qquad (n = 1, 2, \ldots, \chi \in \mathfrak{H}), \tag{1.5}$$

сходится слабо к единичному оператору. Отсюда следует (см. Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман [1], стр. 94), что последовательность проекторов $\{Q_n\}$ ограничена:

$$\sup_n |Q_n| = C < \infty.$$

В силу полноты последовательности $\{\psi_j\}_1^\infty$ в $\mathfrak{H}$, для любого $\varepsilon > 0$ и вектора $\chi \in \mathfrak{H}$ найдутся числа

$c_j^{(\varepsilon)}$ $(j=1,\ 2,\ \ldots,N_\varepsilon)$ такие, что

$$|\chi-\sum_{j=1}^{N_\varepsilon} c_j^{(\varepsilon)}\psi_j|<\varepsilon \tag{1.6}$$

и, стало быть, для вектора

$$Q_n(\chi-\sum_{j=1}^{N_\varepsilon} c_j^{(\varepsilon)}\psi_j)=Q_n\chi-\sum_{j=1}^{N_\varepsilon} c_j^{(\varepsilon)}\psi_j \qquad (n>N_\varepsilon)$$

имеем:

$$|Q_n\chi-\sum_{j=1}^{N_\varepsilon} c_j^{(\varepsilon)}\psi_j|<C\varepsilon \qquad (n>N_\varepsilon). \tag{1.7}$$

Из (1.6) и (1.7) вытекает, что при $n>N_\varepsilon$

$$|Q_n\chi-\chi|<(1+C)\varepsilon.$$

Таким образом, любой вектор $\chi\in\mathfrak{H}$ разлагается в сходящийся по норме ряд

$$\chi=\sum_{j=1}^{\infty} c_j\psi_j,$$

причем коэффициенты c_j $(j=1,\ 2,\ \ldots)$ однозначно определяются из равенств

$$c_j=(\chi,\ \varphi_j) \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots).$$

Теорема доказана.

2. Последовательность $\{\varphi_j\}$ векторов из $\mathfrak{H}$ будем называть *почти нормированной*, если

$$\inf_n|\varphi_n|>0 \quad \text{и} \quad \sup_n|\varphi_n|<\infty.$$

1°. *Если базис $\{\varphi_j\}_1^\infty$ пространства $\mathfrak{H}$ почти нормирован, то почти нормирован и биортогональный базис $\{\psi_j\}_1^\infty$.*

В самом деле, согласно (1.3)

$$\inf_n|\psi_n|\geqslant\frac{1}{\sup\limits_n|\varphi_n|}>0$$

и

$$\sup_n|\psi_n|\leqslant C_\varphi\frac{1}{\inf\limits_n|\varphi_n|}<\infty.$$

§ 2. Базисы, эквивалентные ортонормированным (базисы Рисса)

1. Пусть $\{\varphi_j\}$ — произвольный ортонормированный базис пространства $\mathfrak{H}$ и A — некоторый линейный ограниченный обратимый оператор. Тогда для любого вектора $f \in \mathfrak{H}$

$$A^{-1}f = \sum_{j=1}^{\infty} (A^{-1}f, \varphi_j)\,\varphi_j = \sum_{j=1}^{\infty} (f, A^{*-1}\varphi_j)\,\varphi_j,$$

и следовательно,

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} (f, \chi_j)\,\psi_j,$$

где

$$\psi_j = A\varphi_j, \quad \chi_j = A^{*-1}\varphi_j \qquad (j = 1, 2, \ldots). \tag{2.1}$$

Очевидно,

$$(\psi_j, \chi_k) = \delta_{jk} \qquad (j, k = 1, 2, \ldots).$$

Поэтому если

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} c_j\psi_j, \tag{2.2}$$

то

$$c_j = (f, \chi_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

т. е. разложение (2.2) единственно.

Таким образом, всякий ограниченный обратимый оператор преобразует любой ортонормированный базис в некоторый другой базис пространства $\mathfrak{H}$. Базис $\{\psi_j\}$ пространства $\mathfrak{H}$, получаемый из ортонормированного базиса с помощью такого преобразования, называется базисом, *эквивалентным ортонормированному* (по терминологии Н. К. Бари [1] — *базисом Рисса*).

Пусть ограниченный обратимый оператор A отображает ортонормированный базис $\{\varphi_j\}$ в базис $\{\psi_j\}$. Тогда, согласно (2.1), оператор A^{*-1} отображает базис $\{\varphi_j\}$

в базис $\{\chi_j\}$, биортогональный к $\{\psi_j\}_1^\infty$. Следовательно, *базис, биортогональный к базису, эквивалентному ортонормированному, сам эквивалентен ортонормированному.*

Так как

$$\sup_n |\psi_n| \leqslant |A|$$

и $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ (2.3)

$$\inf_n |\psi_n| \geqslant \frac{1}{|A^{-1}|},$$

то *всякий базис, эквивалентный ортонормированному, почти нормирован.*

Отсюда уже легко вывести, что *если базис $\{\psi_j\}_1^\infty$ эквивалентен ортонормированному, то последовательность ортов $\{\hat{\psi}_j\}_1^\infty$ ($\hat{\psi}_j = \psi_j/|\psi_j|$; $j = 1, 2, \ldots$) также образует базис, эквивалентный ортонормированному.*

В самом деле, равенствами

$$B\varphi_j = \frac{\varphi_j}{|\psi_j|} \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots),$$

очевидно, определяется линейный ограниченный обратимый оператор. Следовательно, оператор AB обратим и

$$AB\varphi_j = \frac{\psi_j}{|\psi_j|} = \hat{\psi}_j \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots).$$

2. Сформулируем ряд характеристических свойств базисов, зквивалентных ортонормированному.

Теорема 2.1 (Н. К. Бари [2]). *Следующие утверждения эквивалентны.*

1) *Последовательность $\{\psi_j\}_1^\infty$ образует базис пространства $\mathfrak{H}$, эквивалентный ортонормированному.*

2) *Последовательность $\{\psi_j\}_1^\infty$ становится ортонормированным базисом пространства $\mathfrak{H}$ при соответствующей замене скалярного произведения (f, g) некоторым новым $(f, g)_1$, топологически эквивалентным*) исходному.*

---

*) Скалярные произведения (f, g) и $(f, g)_1$ называются *топологически эквивалентными*, если они порождают топологически эквивалентные нормы, т. е. если существуют константы c_1, c_2 (>0) такие, что

$$c_1(f, f) \leqslant (f, f)_1 \leqslant c_2(f, f) \qquad (f \in \mathfrak{H}).$$

3) *Последовательность* $\{\psi_j\}_1^\infty$ *полна в* $\mathfrak{H}$ *и существуют константы* a_1, a_2 (>0) *такие, что для любого натурального* n *и любых комплексных чисел* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$

$$a_2 \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^2 \leqslant \left| \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \psi_j \right|^2 \leqslant a_1 \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^2. \tag{2.4}$$

4) *Последовательность* $\{\psi_j\}_1^\infty$ *полна в* $\mathfrak{H}$ *и ее матрица Грама*

$$\| (\psi_j, \psi_k) \|_1^\infty \tag{2.5}$$

порождает в пространстве l_2 *ограниченный обратимый оператор* *).

5) *Последовательность* $\{\psi_j\}_1^\infty$ *полна в* $\mathfrak{H}$, *ей соответствует полная биортогональная последовательность* $\{\chi_j\}_1^\infty$ *и для любого* $f \in \mathfrak{H}$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(f, \psi_j)|^2 < \infty, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} |(f, \chi_j)|^2 < \infty.$$

Доказательство. Из утверждения 1) следует 2). В самом деле, пусть A — линейный ограниченный обратимый оператор, отображающий базис $\{\psi_j\}_1^\infty$ в некоторый ортонормированный базис $\{\varphi_j\}_1^\infty$. Тогда легко видеть, что скалярное произведение

$$(f, g)_1 = (Af, Ag)$$

топологически эквивалентно исходному и

$$(\psi_j, \psi_k)_1 = (A\psi_j, A\psi_k) = (\varphi_j, \varphi_k) = \delta_{jk} \qquad (j, k = 1, 2, \ldots).$$

Пусть последовательность $\{\psi_j\}_1^\infty$ становится ортонормированным базисом пространства $\mathfrak{H}$, если заменить в $\mathfrak{H}$ исходное скалярное произведение некоторым топологически эквивалентным скалярным произведением $(f, g)_1$. Тогда из соотношения

$$c_1 (f, f) \leqslant (f, f)_1 \leqslant c_2 (f, f) \quad (f \in \mathfrak{H}),$$

где c_1 и c_2 (>0) — константы, не зависящие от f, следует, что для любых комплексных чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$

*) Эквивалентность утверждений 1) и 4) независимо доказал Р. П. Боас [1].

$(n=1,\ 2,\ \ldots)$

$$c_2^{-1}\sum_{j=1}^{n}|\gamma_j|^2\leqslant\Big|\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\psi_j\Big|^2\leqslant c_1^{-1}\sum_{j=1}^{n}|\gamma_j|^2.$$

Кроме того, последовательность $\{\psi_j\}_1^\infty$ полна в $\mathfrak{H}$, а следовательно, утверждение 2) влечет за собой утверждение 3).

Покажем, что из 3) следует 1).

Пусть $\{\varphi_j\}_1^\infty$ — произвольный ортонормированный базис $\mathfrak{H}$.

На линейных оболочках последовательностей $\{\psi_j\}_1^\infty$ и $\{\varphi_j\}_1^\infty$ определим, соответственно, операторы A и A_1, полагая

$$A\Big(\sum_j\gamma_j\varphi_j\Big)=\sum_j\gamma_j\psi_j \quad \text{и} \quad A_1\Big(\sum_j\gamma_j\psi_j\Big)=\sum_j\gamma_j\varphi_j.$$

Согласно (2.4)

$$\Big|A\Big(\sum_j\gamma_j\varphi_j\Big)\Big|\leqslant a_1^{1/2}\Big|\sum_j\gamma_j\varphi_j\Big|$$

и

$$\Big|A_1\Big(\sum_j\gamma_j\psi_j\Big)\Big|\leqslant a_2^{-1/2}\Big|\sum_j\gamma_j\psi_j\Big|.$$

Так как обе последовательности $\{\varphi_j\}_1^\infty$ и $\{\psi_j\}_1^\infty$ полны в $\mathfrak{H}$, то отсюда следует, что каждый из операторов A и A_1 можно расширить по непрерывности до линейного ограниченного оператора, определенного на всем пространстве $\mathfrak{H}$. Легко видеть, что $AA_1=A_1A=I$, т. е. оператор A обратим и $A^{-1}=A_1$. Следовательно, $\{\psi_j\}$ — базис, эквивалентный ортонормированному.

Итак, эквивалентность первых трех утверждений доказана.

Пусть A — линейный ограниченный обратимый оператор, отображающий некоторый ортонормированный базис $\{\varphi_j\}_1^\infty$ в базис $\{\psi_j\}_1^\infty$.

Так как

$$(A^*A\varphi_j,\ \varphi_k)=(A\varphi_j,\ A\varphi_k)=(\psi_j,\ \psi_k) \qquad (j,\ k=1,\ 2,\ \ldots),$$

то оператору A^*A в базисе $\{\varphi_j\}_1^\infty$ отвечает матрица (2.5). Таким образом, из 1) следует 4). Покажем, что из 4) следует 3).

Пусть матрица (2.5) порождает в l_2 линейный обратимый оператор и пусть $\{\varphi_j\}_1^\infty$ — произвольный ортонормированный базис пространства $\mathfrak{H}$. Тогда оператор H, определенный в $\mathfrak{H}$ по формуле

$$H\left(\sum_j \alpha_j\varphi_j\right) = \sum_j \varphi_j \sum_{k=1}^{\infty} (\psi_k, \psi_j)\,\alpha_k \qquad \left(\sum_j |\alpha_j|^2 < \infty\right),$$

очевидно, является линейным ограниченным положительным обратимым оператором.

Без труда проверяется, что для любых комплексных чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$

$$\left|\sum_j \gamma_j\psi_j\right|^2 = \left(H\left(\sum_j \gamma_j\varphi_j\right), \sum_j \gamma_j\varphi_j\right)$$

или

$$\left|\sum_j \gamma_j\psi_j\right|^2 = \left|H^{1/2}\left(\sum_j \gamma_j\varphi_j\right)\right|^2.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$|H^{-1}|^{-1}\sum_j |\gamma_j|^2 \leqslant \left|\sum_j \gamma_j\psi_j\right|^2 \leqslant |H| \sum_j |\gamma_j|^2.$$

Следовательно, из 4) следует 3).

Основываясь на вспомогательных предложениях, установленных в начале этого параграфа, и на эквивалентности утверждений 1) и 3), легко вывести, что из утверждения 1) следует утверждение 5).

Докажем, наконец, что утверждение 5) влечет за собой утверждение 1).

Рассмотрим выпуклый функционал

$$p(f) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |(f, \psi_j)|^2\right)^{1/2} \qquad (f \in \mathfrak{H}).$$

Так как этот функционал является точной верхней гранью выпуклых непрерывных функционалов

$$p_n(f) = \left(\sum_{j=1}^{n} |(f, \psi_j)|^2\right)^{1/2} \qquad (f \in \mathfrak{H}),$$

то в силу леммы И. М. Гельфанда (см. Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман [1], п. 18) функционал $p(f)$ непрерывен, а, следовательно, существует константа $c_1 (>0)$ такая, что

$$p(f) \leqslant c_1 |f|$$

или

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(f, \psi_j)|^2 \leqslant c_1^2 |f|^2. \tag{2.6}$$

Аналогично доказывается, что существует константа $c_2 (>0)$, для которой

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(f, \chi_j)|^2 \leqslant c_2^2 |f|^2. \tag{2.7}$$

Пусть $\{\varphi_j\}_1^\infty$ — произвольный ортонормированный базис. На линейных оболочках последовательностей $\{\varphi_j\}_1^\infty$ и $\{\chi_j\}_1^\infty$ определим соответственно операторы A_2 и A_3, полагая

$$A_2 \Bigl(\sum_j \gamma_j \psi_j\Bigr) = \sum_j \gamma_j \varphi_j \quad \text{и} \quad A_3 \Bigl(\sum_j \gamma_j \chi_j\Bigr) = \sum_j \gamma_j \varphi_j.$$

Согласно (2.6) и (2.7)

$$\Bigl| A_2 \Bigl(\sum_j \gamma_j \psi_j\Bigr) \Bigr| \leqslant c_2 \Bigl|\sum_j \gamma_j \psi_j\Bigr|$$

и

$$\Bigl| A_3 \Bigl(\sum_j \gamma_j \chi_j\Bigr) \Bigr| \leqslant c_1 \Bigl|\sum_j \gamma_j \chi_j\Bigr|.$$

Так как обе последовательности $\{\psi_j\}_1^\infty$ и $\{\chi_j\}_1^\infty$ полны в $\mathfrak{H}$, то каждый из операторов A_2 и A_3 можно расширить по непрерывности до линейного ограниченного оператора, определенного на всем пространстве $\mathfrak{H}$. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что

$$\Bigl(A_2 \Bigl(\sum_j \gamma_j' \psi_j\Bigr),\ A_3 \Bigl(\sum_k \gamma_k'' \chi_k\Bigr)\Bigr) = \Bigl(\sum_j \gamma_j' \psi_j,\ \sum_k \gamma_k'' \chi_k\Bigr),$$

и стало быть,

$$(A_2 f, A_3 g) = (f, g) \qquad (f, g \in \mathfrak{H})$$

и

$$(A_3^* A_2 f, g) = (f, g) \qquad (f, g \in \mathfrak{H}).$$

Отсюда следует, что $A_3^* A_2 = I$.

Кроме того, множество значений оператора A_2, очевидно, плотно в $\mathfrak{H}$; следовательно, оператор A_2 обратим. Теорема доказана.

3. Базис пространства $\mathfrak{H}$ называется *перестановочным* (*безусловным*) базисом, если при любых перестановках его членов он остается базисом пространства $\mathfrak{H}$.

Если базис $\{\psi_j\}_1^\infty$ перестановочен, то, очевидно, биортогональный к нему базис $\{\chi_j\}_1^\infty$ также перестановочен.

Всякий ортонормированный базис перестановочен. Более того, легко видеть, что любой базис, эквивалентный ортонормированному, перестановочен. Это свойство является характеристическим для базисов, эквивалентных ортонормированному. Для доказательства этого предложения понадобится

Лемма 2.1. *Пусть* $\{x_n\}_1^\infty$ — *последовательность векторов банахова пространства* $\mathfrak{B}$. *Если частичные суммы всякого ряда* $\sum x_{n'}$, *полученного из ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *путем какой-либо перестановки его членов, составляют ограниченное множество, то*

$$\sup_{n;\ |\varepsilon_j|\leqslant 1} \Big|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j\Big| < \infty. \tag{2.8}$$

Доказательство. Пусть f — произвольный функционал из $\mathfrak{B}^*$. Тогда из условий леммы следует, что частичные суммы ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(x_j) \tag{2.9}$$

ограничены при любой перестановке его членов. Следовательно, ряд (2.9) абсолютно сходится.

Выпуклый функционал

$$p(f) = \sum_{j=1}^{\infty} |f(x_j)| \qquad (f \in \mathfrak{B}^*)$$

является точной верхней гранью последовательности непрерывных выпуклых функционалов

$$p_n(f) = \sum_{j=1}^{n} |f(x_j)|,$$

а следовательно, в силу леммы И. М. Гельфанда (см. Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман [1]) функционал $p(f)$ непрерывен, т. е.

$$p(f) \leqslant c|f| \qquad (f \in \mathfrak{B}^*),$$

где $c\ (>0)$ — константа, не зависящая от f.

Таким образом, для любого натурального n и произвольных чисел ε_j ($|\varepsilon_j| \leqslant 1$; $j=1, 2, \ldots, n$)

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j f(x_j)\right| \leqslant c|f|,$$

а следовательно,

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j\right| \leqslant c.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Если последовательность $\{g_j\}$ векторов из $\mathfrak{H}$ удовлетворяет условиям предыдущей леммы, то*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |g_j|^2 < \infty. \tag{2.10}$$

Доказательство. Для любых двух векторов f и $h \in \mathfrak{H}$ всегда можно подобрать число ε, по модулю равное единице и такое, что

$$|f|^2 + |h|^2 \leqslant |f + \varepsilon h|^2.$$

В самом деле, если положить

$$\varepsilon = \exp\ (i \arg (f, h)),$$

то

$$|f + \varepsilon h|^2 = |f|^2 + |h|^2 + 2|(f, h)| \geqslant |f|^2 + |h|^2.$$

Отсюда нетрудно заключить, что найдется последовательность чисел ε_j ($|\varepsilon_j| = 1$; $j = 1, 2, \ldots$), для которой

$$\sum_{j=1}^{n} |g_j|^2 \leqslant \left|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j g_j\right|^2 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Вспоминая предыдущую лемму, получаем (2.10).

Лемма доказана.

Леммы 2.1 и 2.2 среди других предложений доказаны В. Орличем [1].

Теорема 2.2 (Е. Р. Лорч [1]). *Для того чтобы базис* $\{\psi_j\}_1^\infty$ *пространства* $\mathfrak{H}$ *был эквивалентен ортонормированному, необходимо и достаточно, чтобы он был перестановочен и почти нормирован.*

Доказательство *). Необходимость условий теоремы уже отмечалась. Докажем их достаточность.

Пусть f — произвольный вектор из $\mathfrak{H}$. Тогда

$$f=\sum_{j=1}^{\infty}(f, \chi_j)\,\psi_j, \tag{2.11}$$

где $\{\chi_j\}_1^\infty$ — базис, биортогональный к $\{\psi_j\}_1^\infty$, и ряд (2.11) сходится при любых перестановках его членов. Тогда, согласно лемме 2.2,

$$\sum_{j=1}^{\infty}|(f, \chi_j)|^2\;|\psi_j|^2<\infty.$$

Учитывая, что базис $\{\psi_j\}$ почти нормирован, получаем:

$$\sum_{j=1}^{\infty}|(f, \chi_j)|^2<\infty.$$

Так как биортогональный базис $\{\chi_j\}$ к почти нормированному перестановочному базису $\{\psi_j\}$ также обладает этими свойствами, то и

$$\sum_{j=1}^{\infty}|(f, \psi_j)|^2<\infty.$$

В силу теоремы 2.1 (см. утверждение 5)) отсюда следует, что базис $\{\psi_j\}$ эквивалентен ортонормированному. Теорема доказана.

4. Сформулируем два определения.

Две последовательности векторов $\{g_j\}$ и $\{f_j\}$ называются *квадратично близкими*, если

$$\sum_{j=1}^{\infty}|g_j-f_j|^2<\infty.$$

---

*) Независимо эту теорему вместе с некоторыми ее обобщениями остроумно доказал И. М. Гельфанд [1]. На возможность элементарного вывода теоремы 2.2 с помощью леммы 2.2 наше внимание обратил В. Я. Козлов в 1956 г. (см. также Б. Е. Вейц [1]).

Последовательность векторов $\{g_j\}$ называется *ω-линейно независимой* *), если равенство

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j g_j = 0$$

невозможно при

$$0 < \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 |g_j|^2 < \infty. \tag{2.12}$$

Если последовательность $\{g_j\}$ почти нормирована, то условие (2.12) эквивалентно следующему:

$$0 < \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 < \infty.$$

Теорема 2.3 (Н. К. Бари [2]). *Всякая ω-линейно независимая последовательность $\{g_j\}$, квадратично близкая к базису $\{\psi_j\}_1^{\infty}$, эквивалентному ортонормированному, сама является базисом, эквивалентным ортонормированному.*

Доказательство. Пусть A — линейный ограниченный обратимый оператор, отображающий некоторый ортонормированный базис $\{\varphi_j\}_1^{\infty}$ пространства $\mathfrak{H}$ в базис $\{\psi_j\}$:

$$A\varphi_j = \psi_j \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Определим оператор T, полагая

$$T\left(\sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j (\psi_j - g_j) \qquad \left(\sum_j |c_j|^2 < \infty\right).$$

Очевидно, T является линейным ограниченным оператором, причем

$$|T|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |\psi_j - g_j|^2.$$

*) Все дальнейшие утверждения, в которых фигурирует понятие ω-линейной независимости, сохраняют силу, если в определении этого понятия условие (2.12) заменить условием, что не все c_j равны нулю. Замена одного определения другим в некоторых случаях будет усиливать утверждения, а в некоторых случаях — их ослаблять.

Более того, из равенства

$$\sum_{j=1}^{\infty} |T\varphi_j|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\psi_j - g_j|^2 \quad (<\infty)$$

следует, что оператор $T \in \mathfrak{S}_2$.

Уравнение $(A-T)\varphi = 0$ имеет единственное нулевое решение. В самом деле, если $A\varphi = T\varphi$, то из равенства

$$(A-T)\varphi = \sum_j (\varphi, \varphi_j)\psi_j - \sum_j (\varphi, \varphi_j)(\psi_j - g_j) = \sum_j (\varphi, \varphi_j) g_j$$

следует

$$\sum_j (\varphi, \varphi_j) g_j = 0,$$

и стало быть, в силу ω-линейной независимости последовательности $\{g_j\}_1^\infty$ вектор $\varphi = 0$.

Оператор A обратим, а оператор $T\,(\in \mathfrak{S}_2)$ вполне непрерывен, и поскольку оператор $A-T$ аннулируется только в нуле, то этот оператор также обратим. Принимая во внимание очевидные равенства

$$(A-T)\varphi_j = g_j \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

приходим к заключению, что последовательность $\{g_j\}_1^\infty$ является базисом, эквивалентным ортонормированному.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2.1. Если отбросить условие ω-линейной независимости последовательности $\{g_j\}$, то для последовательности $\{g_j\}$, квадратично близкой к некоторому базису, эквивалентному ортонормированному, имеют место следующие утверждения.

Во всяком соотношении

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j g_j = 0 \tag{2.13}$$

всегда

$$\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 < \infty.$$

Среди соотношений вида (2.13) найдется конечное число p линейно независимых

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_{kj} g_j = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p), \tag{2.14}$$

через которые всякое иное соотношение (2.13) будет линейно выражаться. Число p совпадает с размерностью ортогонального дополнения к линейной замкнутой оболочке $\mathfrak{N}_g$ последовательности $\{g_j\}$. Если векторы g_{j_k} ($k=1, 2, \ldots, p$) в силу соотношений (2.14) линейно выражаются через остальные g_j ($j \neq j_k$, $k=1, 2, \ldots, p$), то последовательность $\{g_j\}$ можно превратить в базис, эквивалентный ортонормированному, заменой векторов g_{j_k} ($k=1, 2, \ldots, p$) любыми другими векторами g'_{j_k} ($k = 1, 2, \ldots, p$), образующими базис какого-либо подпространства, дополняющего $\mathfrak{N}_g$ до $\mathfrak{H}$.

Замечание 2.2 (И. Ц. Гохберг и А. С. Маркус [1]). Теорема 2.3 и замечание 2.1 сохраняют силу, если в их формулировке заменить условие квадратичной близости последовательностей $\{g_j\}$ и $\{\psi_j\}$ следующим условием: матрица Грама

$$\| (g_j-\psi_j,\ g_k-\psi_k) \|_1^\infty$$

порождает в пространстве l_2 вполне непрерывный оператор. Справедливо также утверждение, в некотором смысле обратное к этому: если для любого ортонормированного базиса $\{\varphi_j\}$ пространства $\mathfrak{H}$ последовательность $\{a\varphi_j+h_j\}_1^\infty$ ($a>0$) либо является базисом, эквивалентным ортонормированному, либо может быть превращена в таковой путем замены конечного числа векторов таким же числом других векторов, то матрица Грама

$$\| (h_j,\ h_k) \|_1^\infty$$

последовательности $\{h_j\}_1^\infty$ порождает в пространстве l_2 вполне непрерывный оператор.

Замечание 2.3. Класс базисов, эквивалентных ортонормированному, весьма широк, и задача построения хотя бы одного нормированного базиса пространства $\mathfrak{H}$, не эквивалентного ортонормированному, оказалась нелегкой. Она была решена К. И. Бабенко [1], который показал, что последовательность

$$\left\{ \left(\alpha+\frac{1}{2}\right) |x|^{\alpha} e^{\pi i n x} \right\}_{n=1}^{\infty} \qquad \left(-\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2};\ \alpha\neq 0\right)$$

является таким базисом в пространстве $L_2(-1, 1)$. Недавно этот результат был обобщен В. Ф. Гапошкиным [1].

§ 3. Базисы, квадратично близкие к ортонормированным (базисы Бари) *)

1. Из теоремы 2.3 Н. К. Бари следует, в частности, что всякая ω-линейно независимая последовательность векторов, квадратично близкая к некоторому ортонормированному базису пространства $\mathfrak{H}$, является базисом пространства $\mathfrak{H}$.

По терминологии М. Г. Крейна [7] такой базис называется *базисом Бари*.

Согласно теореме Бари всякий базис, квадратично близкий к ортонормированному, эквивалентен ортонормированному. Очевидно, при любых перестановках элементов базиса, квадратично близкого к ортонормированному, получается базис этого же типа.

1°. *Если* $\{\psi_j\}_1^\infty$ — *базис, квадратично близкий к ортонормированному, то последовательность* $\{\hat{\psi}_j\}_1^\infty$ ($\hat{\psi}_j = \psi_j/|\psi_j|$; $j=1, 2, \ldots$) *также есть базис, квадратично близкий к ортонормированному.*

В самом деле, если $\{\varphi_j\}_1^\infty$ — ортонормированный базис, квадратично близкий к $\{\psi_j\}_1^\infty$, то полагая $\varepsilon_j = \exp i\theta_j$ ($j=1, 2, \ldots$), где $\theta_j = \arg(\hat{\psi}_j, \varphi_j)$ ($j=1, 2, \ldots$), получим:

$$|\hat{\psi}_j - \varepsilon_j\varphi_j|^2 = 2(1 - |(\hat{\psi}_j, \varphi_j)|) \leqslant 2(1 - |(\hat{\psi}_j, \varphi_j)|^2) \quad (j=1, 2, \ldots).$$

Таким образом,

$$|\hat{\psi}_j - \varepsilon_j\varphi_j|^2 \leqslant 2(1 - |(\hat{\psi}_j, \varphi_j)|^2) = 2\min_t |\varphi_j - t\psi_j|^2 \leqslant 2|\varphi_j - \psi_j|^2$$

и, стало быть, последовательность $\{\hat{\psi}_j\}_1^\infty$ квадратично близка к ортонормированному базису $\{\varepsilon_j\varphi_j\}_1^\infty$.

---

*) В настоящем параграфе излагается в несколько переработанном виде содержание статьи М. Г. Крейна [7].

Легко видеть, что из базисов, эквивалентных ортонормированному, базисы Бари выделяются следующим признаком.

2°. *Для того чтобы последовательность* $\{\psi_j\}_1^\infty$ *была базисом пространства* $\mathfrak{H}$, *квадратично близким к ортонормированному, необходимо и достаточно, чтобы существовали ортонормированный базис* $\{\varphi_j\}_1^\infty$ *пространства* $\mathfrak{H}$ *и оператор* $T \in \mathfrak{S}_2$, *удовлетворяющие следующим двум условиям:*

1) $$T\varphi_j = \psi_j - \varphi_j \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

2) *оператор* $I + T$ *обратим.*

В самом деле, если $\{\psi_j\}_1^\infty$ — базис, квадратично близкий к ортонормированному базису $\{\varphi_j\}_1^\infty$, то существует ограниченный обратимый оператор A, отображающий базис $\{\varphi_j\}$ в $\{\psi_j\}$. Для оператора

$$T = A - I$$

имеют место равенства

$$T\varphi_j = \psi_j - \varphi_j \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Следовательно,

$$\sum_j |T\varphi_j|^2 = \sum_j |\psi_j - \varphi_j|^2 < \infty, \tag{3.1}$$

т. е. $T \in \mathfrak{S}_2$.

Обратно, из условий 1) и 2) следует, что $\{\psi_j\}_1^\infty$ — базис пространства $\mathfrak{H}$, а из условия $T \in \mathfrak{S}_2$ следует, что базис $\{\psi_j\}$ квадратично близок к базису $\{\varphi_j\}$.

В качестве следствия из доказанного предложения получаем

3°. *Если базис* $\{\psi_j\}_1^\infty$ *квадратично близок к ортонормированному базису* $\{\varphi_j\}_1^\infty$, *то и биортогональный базис* $\{\chi_j\}_1^\infty$ *квадратично близок к базису* $\{\varphi_j\}_1^\infty$, *а следовательно, базисы* $\{\psi_j\}_1^\infty$ *и* $\{\chi_j\}_1^\infty$ *квадратично близки.*

Действительно, пусть $I + T$ $(T \in \mathfrak{S}_2)$ — обратимый оператор, отображающий базис $\{\varphi_j\}_1^\infty$ в $\{\psi_j\}_1^\infty$. Тогда из соотношений

$$(\varphi_k,\ (I+T^*)\,\chi_j)=((I+T)\,\varphi_k,\ \chi_j)=(\psi_k,\ \chi_j)=\delta_{jk}$$
$$(j,\ k=1,\ 2,\ \ldots)$$

следует, что

$$\varphi_j=(I+T^*)\,\chi_j \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots).$$

Так как оператор $T_1=(I+T^*)^{-1}-I$ принадлежит $\mathfrak{S}_2$, то из равенств

$$(I+T_1)\,\varphi_j=\chi_j \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots)$$

следует квадратичная близость базисов $\{\chi_j\}_1^\infty$ и $\{\varphi_j\}_1^\infty$. Так как

$$|\psi_j-\chi_j|^2\leqslant 2\,(|\psi_j-\varphi_j|^2+|\chi_j-\varphi_j|^2) \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots),$$

то предложение 3° доказано.

2. Пусть $\{\psi_j\}_1^\infty$ — любая последовательность линейно независимых векторов пространства $\mathfrak{H}$. Тогда все детерминанты Грама $D(\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_n)=\det\|(\psi_j,\ \psi_k)\|_1^n$ ($n=1,\ 2,\ \ldots$) положительны. На основании известного неравенства Адамара (см. Ф. Р. Гантмахер [1], стр. 208)

$$D(\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_{n+m})\leqslant$$
$$\leqslant D(\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_n)\,D(\psi_{n+1},\ \ldots,\ \psi_{n+m}),$$

беря $m=1$, заключаем, что в случае, когда последовательность $\{\psi_j\}_1^\infty$ нормирована ($|\psi_j|=1$), последовательность положительных чисел $D(\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_n)$ является невозрастающей и, таким образом, всегда существует предел

$$\Delta=\lim_{n\to\infty}D(\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_n)\geqslant 0.$$

Легко выводится, что этот предел Δ не меняется при любой перестановке ортов ψ_j ($j=1,\ 2,\ \ldots$).

Предел Δ можно трактовать как квадрат объема параллелепипеда, натянутого на бесконечное число ортов ψ_j ($j=1,\ 2,\ \ldots$).

Теорема 3.1. *Для того чтобы полная в $\mathfrak{H}$ последовательность ортов $\{\psi_j\}_1^\infty$ составляла базис, квадратично* *близкий к ортонормированному, необходимо и достаточно, чтобы объем определяемого ею параллелепипеда был положителен, т. е. чтобы*

$$\Delta = \lim_{n\to\infty} D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) > 0. \tag{3.2}$$

Доказательство. Пусть $\{\psi_j\}_1^\infty$ — нормированный базис, квадратично близкий к ортонормированному. Обозначим через $\{\chi_j\}_1^\infty$ биортогональную систему к $\{\psi_j\}_1^\infty$.

По доказанному $\{\chi_j\}_1^\infty$ является базисом, квадратично близким к ортонормированному, и

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\psi_j - \chi_j|^2 < \infty. \tag{3.3}$$

Орт $e_j = \chi_j / |\chi_j|$ ортогонален к линейной замкнутой оболочке $\mathfrak{M}_j$ всех ψ_k с $k \neq j$, следовательно, расстояние δ_j орта ψ_j до $\mathfrak{M}_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ вычисляется по формуле

$$\delta_j = (\psi_j, e_j) = |\chi_j|^{-1} \qquad (0 < \delta_j \leqslant 1;\ j = 1, 2, \ldots).$$

Так как $|\psi_j - \chi_j|^2 = |\chi_j|^2 - 1$ $(j = 1, 2, \ldots)$, то из (3.3) следует, что ряд $\sum (\delta_j^{-2} - 1)$ сходится, а с ним сходится и ряд $\sum (1 - \delta_j^2)$. Очевидно, $\delta_j \leqslant d_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$, где d_j обозначает расстояние орта ψ_j до линейной оболочки $\mathfrak{L}_{j-1}$ векторов $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{j-1}$. Стало быть,

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1 - d_j^2) < \infty. \tag{3.4}$$

С другой стороны, как известно, $d_j^2 = D_j / D_{j-1}$, где $D_j = D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_j)$. Таким образом,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{D_j}{D_{j-1}}\right) < \infty,$$

а это неравенство является необходимым и достаточным условием существования положительного предела $\lim \prod_1^n (D_j / D_{j-1}) = \lim D_n$ ($D_0 = 1$ по определению).

Итак, необходимость условия (3.2) доказана.

Докажем его достаточность. Как только что было выяснено, условие (3.2) эквивалентно условию (3.4), или, учитывая, что $0<d_j<1$, — условию $\sum_j (1-d_j)<\infty$. Пользуясь обычным процессом треугольной ортогонализации, построим ортонормированный базис φ_j ($j=1, 2, \ldots$), где

$$\varphi_j = c_{j1}\psi_1 + c_{j2}\psi_2 + \ldots + c_{jj}\psi_j \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots), \tag{3.5}$$

причём

$$c_{jj}>0 \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots). \tag{3.6}$$

Тогда $\varphi_j \in \mathfrak{L}_{j-1}^{\perp}$, $d_j=(\varphi_j,\ \psi_j)$ и

$$|\varphi_j-\psi_j|^2 = 2\,(1-(\varphi_j,\ \psi_j)) = 2\,(1-d_j) \qquad (j=1, 2, \ldots), \tag{3.7}$$

так что будет выполняться условие $\sum_j |\varphi_j-\psi_j|^2<\infty$.

Осталось еще показать, что векторы ψ_j ($j=1, 2, \ldots$) ω-линейно независимы.

Допустим противное, т. е. что для некоторых c_j ($j=$ $=1,\ 2,\ \ldots$), среди которых не все равны нулю, выполняется $\sum_j c_j\psi_j=0$. Без ограничения общности можно считать, что $c_1\neq 0$ и, более того, $c_1=1$. Тогда будем иметь:

$$\varepsilon_n = |\psi_1+c_2\psi_2+\ldots+c_n\psi_n|^2 \to 0 \text{ при } n\to 0.$$

С другой стороны, $\varepsilon_n \geqslant \min_\xi |\psi_1+\xi_2\psi_2+\ldots+\xi_n\psi_n|^2=$ $=D(\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_n)/D(\psi_2,\ \ldots,\ \psi_n)$, и так как, в силу неравенства Адамара, $D(\psi_2,\ \ldots,\ \psi_n)\leqslant|\psi_2|\ \ldots\ |\psi_n|=1$, то $D(\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_n)\leqslant\varepsilon_n$. Мы пришли к противоречию с условием (3.2).

Теорема доказана.

Анализ доказательства теоремы 3.1 показывает, что в процессе этого доказательства одновременно установлена еще одна теорема:

Т е о р е м а 3.2. *Для того чтобы полная в $\mathfrak{H}$ последовательность ортов $\{\psi_j\}_1^\infty$ была базисом пространства $\mathfrak{H}$, квадратично близким к ортонормированному, необходимо и достаточно, чтобы существовала последо-*

вательность $\{\chi_j\}_1^\infty$, *биортогональная к* $\{\psi_j\}_1^\infty$, *и чтобы эти последовательности были квадратично близки.*

3. Для доказательства некоторых свойств базисов Бари понадобится следующая лемма:

Лемма 3.1. *Пусть A — линейный ограниченный обратимый оператор.*

Если A^*A-I принадлежит $\mathfrak{S}_2$, то оператор $(A^*A)^{1/2}-I$ также принадлежит $\mathfrak{S}_2$ и для любого унитарного оператора U выполняется неравенство

$$|A-U|_2 \geqslant |(A^*A)^{1/2}-I|_2. \tag{3.8}$$

Знак равенства в этом соотношении достигается тогда и только тогда, когда оператор U является унитарным оператором из полярного разложения оператора A, т. е. когда

$$U = A(A^*A)^{-1/2}.$$

Доказательство. Пусть $H=(A^*A)^{1/2}-I$; тогда полярное представление оператора A будет иметь вид $A=U_1(I+H)$, где U_1 — унитарный оператор. Из равенства

$$H((A^*A)^{1/2}+I)=A^*A-I$$

в силу обратимости оператора $(A^*A)^{1/2}+I$ вытекает, что оператор H принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_2$.

Для доказательства соотношения (3.8) без ограничения общности достаточно рассмотреть случай произвольного унитарного оператора U, для которого $A-U\in\mathfrak{S}_2$.

Если через V обозначим унитарный оператор $U_1^{-1}U$, то

$$|A-U|_2^2=|I+H-V|_2^2=\mathrm{sp}\,[(H+I-V)(H+I-V^*)],$$

а следовательно,

$$|A-U|_2^2=\mathrm{sp}\,H^2+\mathrm{sp}\,C,$$

где

$$C=2I+2H-V-V^*-HV^*-VH \tag{3.9}$$

— самосопряженный оператор из $\mathfrak{S}_1$.

Пусть $\{\chi_j\}$ — полная ортонормированная система собственных векторов оператора H:

$$H\chi_j=\lambda_j(H)\chi_j, \quad (\chi_j, \chi_k)=\delta_{jk} \qquad (j, k=1, 2, \ldots).$$

Тогда

$$\operatorname{sp} C = \sum_{j=1}^{\infty} (C\chi_j,\ \chi_j).$$

Легко видеть, что в силу (3.9)

$$(C\chi_j, \chi_j) = 2(\lambda_j(H)+1)[1-\operatorname{Re}(V\chi_j,\ \chi_j)] \qquad (j=1, 2, \ldots).$$

Так как

$$1-\operatorname{Re}(V\chi_j,\ \chi_j) \geqslant 0 \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots), \tag{3.10}$$

то $\operatorname{sp} C \geqslant 0$ и, стало быть, имеет место соотношение

$$|A-U|_2^2 \geqslant \operatorname{sp} H^2,$$

совпадающее с (3.8).

Знак равенства в (3.8) имеет место в том и только том случае, когда он имеет место во всех соотношениях (3.10), т. е.

$$\operatorname{Re}(V\chi_j,\ \chi_j) = 1 \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots).$$

Принимая во внимание, что $|(V\chi_j,\ \chi_j)| \leqslant 1$, получаем $(V\chi_j,\ \chi_j) = 1\ (j=1,\ 2,\ \ldots)$. Отсюда следует, что

$$V\chi_j = \chi_j \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots),$$

т. е. $V=1$, или, что одно и то же, $U=U_1$.

Лемма доказана.

Теорема 3.3. *Для того чтобы полная в $\mathfrak{H}$ последовательность $\{\psi_j\}_1^{\infty}$ была базисом, квадратично близким к ортонормированному, необходимо и достаточно, чтобы*

1) *последовательность $\{\psi_j\}_1^{\infty}$ была ω-линейно независимой;*

2) *матрица*

$$\|(\psi_j,\ \psi_k)-\delta_{jk}\|_1^{\infty} \tag{3.11}$$

была квадрируемой, т. е.

$$\sum_{j,\,k=1}^{\infty} |(\psi_j,\ \psi_k)-\delta_{jk}|^2 < \infty. \tag{3.12}$$

Доказательство. Необходимость первого условия тривиальна. Для доказательства необходимости второго условия рассмотрим линейный ограниченный непрерывно обратимый оператор A, обладающий свойством

$T=A-I\in\mathfrak{S}_2$, который переводит некоторый ортонормированный базис $\{\varphi_j\}_1^\infty$ в базис Бари $\{\psi_j\}_1^\infty$. Тогда

$$(\psi_j,\ \psi_k)=(A\varphi_j,\ A\varphi_k)=(A^*A\varphi_j,\ \varphi_k)\qquad (j,\ k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Следовательно,

$$(\psi_j,\ \psi_k)-\delta_{jk}=(B\varphi_j,\ \varphi_k)\qquad (j,\ k=1,\ 2,\ \ldots),$$

где $B=T+T^*+T^*T\in\mathfrak{S}_2$, и таким образом,

$$\sum_{j,\ k=1}^{\infty}|(\psi_j,\ \psi_k)-\delta_{jk}|^2=\sum_{j=1}^{\infty}|B\varphi_j|^2=\mathrm{sp}\,(B^*B)<\infty,$$

т. е. матрица (3.11) квадрируема.

Докажем достаточность условий теоремы.

Отправляясь от любого ортонормированного базиса $\{\varphi_j\}_1^\infty$ пространства $\mathfrak{H}$, образуем самосопряженный оператор G с матрицей (3.11), т. е.

$$((I+G)\,\varphi_j,\ \varphi_k)=(\psi_j,\ \psi_k)\qquad (j,\ k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Из условия (3.12) вытекает, что оператор $G\in\mathfrak{S}_2$.

Определим на линейной оболочке векторов $\{\varphi_j\}_1^\infty$ оператор A, полагая

$$A\Big(\sum_{j=1}^{n}c_j\varphi_j\Big)=\sum_{j=1}^{n}c_j\psi_j,$$

где c_j $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\quad n=1,\ 2,\ \ldots)$ — произвольные комплексные числа. Тогда очевидно, что

$$|Af|^2=\sum_{i,\ k=1}^{n}(\psi_j,\psi_k)\,c_j\bar c_k=((I+G)\,f,f)\leqslant(1+|G|)\,|f|^2$$

для любого $f=\sum_{j=1}^{n}c_j\varphi_j$.

Таким образом, оператор A допускает расширение по непрерывности на все пространство $\mathfrak{H}$. Обозначая это расширение той же буквой A, можно будет написать

$$|Af|^2=((I+G)\,f,\ f)\quad (f\in\mathfrak{H}).\tag{3.13}$$

Оператор $I+G$ обращается в нуль только в нуле. В самом деле, если

$$(I+G)\Big(\sum_j c_j\varphi_j\Big)=0\qquad \Big(\sum_j|c_j|^2<\infty\Big),$$

то в силу (3.13)

$$A\left(\sum_j c_j\varphi_j\right)=\sum_j c_j\psi_j=0,$$

и, стало быть, $c_1=c_2=\ldots=0$.

Отсюда и из полной непрерывности оператора G следует, что оператор $I+G$ обратим. Следовательно, существует такая константа $\delta\,(>0)$, что

$$\delta|f|^2\leqslant((I+G)f,\ f)\qquad(f\in\mathfrak{H}).$$

Таким образом,

$$\delta|f|^2\leqslant|Af|^2\qquad(f\in\mathfrak{H}).$$

Последнее соотношение, ввиду плотности в $\mathfrak{H}$ области значений оператора A, влечет обратимость этого оператора.

В силу (3.13): $A^*A-I=G\,(\in\mathfrak{S}_2)$, следовательно, согласно лемме 3.1 оператор $(A^*A)^{1/2}-I\in\mathfrak{S}_2$. Стало быть,

$$|A-U|_2^2=|(A^*A)^{1/2}-I|_2^2<\infty,$$

где U — унитарный оператор, определенный равенством $U=A\,(A^*A)^{-1/2}$.

Образуем ортонормированный базис $\{\omega_j\}_1^\infty$ пространства $\mathfrak{H}$, полагая $\omega_j=U\varphi_j\ (j=1,\ 2,\ \ldots)$; тогда

$$\sum_{j=1}^\infty|\psi_j-\omega_j|^2=\sum_{j=1}^\infty|(A-U)\varphi_j|^2=|A-U|_2^2<\infty.$$

Теорема доказана.

4. Отметим, что для ортонормированного базиса $\{\omega_j\}$, построенного в доказательстве предыдущей теоремы, имеет место соотношение

$$\sum_{j=1}^\infty|\psi_j-\omega_j|^2=\sum_{j=1}^\infty\left(\sqrt{1+\lambda_j}-1\right)^2,$$

где $\lambda_j=\lambda_j(G)\quad(j=1,\ 2,\ \ldots)$.

Оказывается, что базис $\{\omega_j\}_1^\infty$ является среди всех ортонормированных базисов *максимально близким* к базису $\{\psi_j\}_1^\infty$, т. е. имеет место теорема:

Теорема 3.4. *Если $\{\psi_j\}_1^\infty$ — базис, квадратично близкий к ортонормированному, а $\{\varphi_j\}_1^\infty$ — некоторый ортонормированный базис, то*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\psi_j - \varphi_j|^2 \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} (\sqrt{1+\lambda_j} - 1)^2, \tag{3.14}$$

где $\{\lambda_j\}$ — полная система собственных чисел оператора, порожденного в пространстве l_2 матрицей

$$\| (\psi_j, \psi_k) - \delta_{jk} \|_1^\infty .$$

Знак равенства в (3.14) достигается для одного и только одного ортонормированного базиса, характеризуемого условием положительной определенности всех матриц $\| (\varphi_j, \psi_k) \|_1^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *):

$$\| (\varphi_j, \psi_k) \|_1^n \geqslant 0. \tag{3.15}$$

Доказательство. Пусть $\{\chi_j\}_1^\infty$ — произвольный ортонормированный базис и A — ограниченный обратимый оператор, отображающий базис $\{\chi_j\}$ в базис $\{\psi_j\}$:

$$A\chi_j = \psi_j \qquad (j = 1, 2, \ldots). \tag{3.16}$$

Тогда

$$(A^*A\chi_j, \chi_k) = (\psi_j, \psi_k) \qquad (j, k = 1, 2, \ldots),$$

так что в базисе $\{\chi_j\}$ оператору A^*A отвечает матрица $\| (\psi_j, \psi_k) \|_1^\infty$. Поэтому согласно теореме 3.3 оператор $A^*A - I \in \mathfrak{S}_2$. Очевидно, $\lambda_j(A^*A - I) = \lambda_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$.

Сопоставим каждому ортонормированному базису $\{\varphi_j\}_1^\infty$ пространства $\mathfrak{H}$ унитарный оператор U, отображающий базис $\{\chi_j\}_1^\infty$ в базис $\{\varphi_j\}_1^\infty$. Тогда

$$\psi_j - \varphi_j = (A - U)\chi_j,$$

и, стало быть,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\psi_j - \varphi_j|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(A - U)\chi_j|^2 = |A - U|_2^2.$$

*) В статье М. Г. Крейна [7] вместо условия (3.15) ошибочно напечатано $(\varphi_j, \psi_k) = (\psi_j, \varphi_k)$ $(j, k = 1, 2, \ldots)$.

Применяя к операторам A и U лемму 3.1, получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\psi_j - \varphi_j|^2 \geqslant |(A^*A)^{1/2} - I|_2^2 \left(= \sum_{j=1}^{\infty} (\sqrt{1+\lambda_j} - 1)^2\right). \tag{3.17}$$

В силу той же леммы 3.1 знак равенства в (3.17) будет достигаться в том и только том случае, когда

$$\varphi_j = \omega_j = U\chi_j \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

где U — унитарный оператор, определяемый равенством $U = A(A^*A)^{-1/2}$. Так как $\omega_j = U\chi_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$, где $U = A(A^*A)^{-1/2}$ $(= AS^{-1})$, а A — линейный ограниченный обратимый оператор, определенный равенствами (3.16), то

$$\left(\sum_{j=1}^{n} c_j\omega_j, \sum_{j=1}^{n} c_j\psi_j\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} c_j\chi_j, \sum_{j=1}^{n} c_j U^{-1}\psi_j\right) =$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{n} c_j\chi_j, \sum_{j=1}^{n} c_j S A^{-1}\psi_j\right),$$

и, стало быть,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} c_j\omega_j, \sum_{j=1}^{n} c_j\psi_j\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} c_j\chi_j, S\left(\sum_{j=1}^{n} c_j\chi_j\right)\right).$$

Таким образом, соотношение (3.15) выражает тот факт, что оператор S неотрицателен.

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что ортонормированный базис $\{\varphi_j\}_1^{\infty}$, удовлетворяющий условиям (3.15), является максимально квадратично близким к базису $\{\psi_j\}$.

Рассмотрим линейный ограниченный обратимый оператор A, отображающий ортонормированный базис $\{\varphi_j\}$ в базис $\{\psi_j\}$. Тогда условие (3.15) будет означать, что оператор A является положительно определенным. Так как

$$(A^2\varphi_j, \varphi_k) = (A\varphi_j, A\varphi_k) = (\psi_j, \psi_k) \qquad (j, k = 1, 2, \ldots),$$

то оператору A^2 в базисе $\{\varphi_j\}$ отвечает матрица $\|(\psi_j, \psi_k)\|_1^\infty$. Отсюда следует, что $A-I\in\mathfrak{S}_2$ и

$$\lambda_j(A-I)=\sqrt{\lambda_j+1}-1 \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots),$$

где $\{\lambda_j\}$ — полная система собственных чисел оператора, порожденного в пространстве l_2 матрицей $\|(\psi_j, \psi_k)-\delta_{jk}\|_1^\infty$.

Очевидно,

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\psi_j-\omega_j|^2=\sum_{j=1}^{\infty}|(A-I)\,\omega_j|^2=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sqrt{\lambda_j+1}-1\right)^2.$$

Теорема доказана.

§ 4. Признаки существования базиса, составленного из собственных векторов диссипативного оператора

1. И. М. Глазману [1] принадлежит следующее предложение:

Пусть $\{\psi_j\}_1^\infty$ — система собственных векторов, отвечающих различным собственным числам λ_j $(j=1,\ 2,\ \ldots)$ диссипативного оператора. Тогда система $\{\psi_j\}$ образует базис своей замкнутой линейной оболочки, эквивалентный ортонормированному), коль скоро*

$$\sum_{\substack{j,\,k=1\\ j\neq k}}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}\lambda_j\operatorname{Im}\lambda_k}{|\lambda_j-\bar{\lambda}_k|}<\infty. \tag{4.1}$$

Впервые предложение такого типа, но с более жестким условием, было получено Б. Р. Мукминовым [1]. Доказательство Б. Р. Мукминова основывалось на треугольной модели диссипативного оператора, построенной М. С. Лившицем, и было достаточно сложным.

Доказательство И. М. Глазмана элементарно и исходит из простой идеи, дальнейшее развитие которой привело к излагаемым в этом параграфе результатам. Для

---

*) По существу, в доказательстве И. М. Глазмана содержались все элементы, необходимые для более сильного утверждения: система $\{\psi_j\}$ при условии (4.1) образует базис своей замкнутой линейной оболочки, квадратично близкий к ортонормированному.

получения этих результатов понадобится одно вспомогательное утверждение.

2. Пусть $\{\lambda_j\}$ — система всех различных невещественных собственных чисел оператора $A\,(\in \mathfrak{R})$ с вполне непрерывной мнимой компонентой и $\mathfrak{L}_j$ — соответствующие корневые подпространства. Согласно теореме 1.5.2 числа λ_j изолированы, а подпространства $\mathfrak{L}_j$ конечномерны.

Выберем число r_k (>0; $k=1, 2, \ldots$) так, чтобы круг $|\lambda-\lambda_k|\leqslant r_k$ не содержал ни одного $\lambda_j\neq\lambda_k$. Тогда, как известно (см. § 2 гл. I), формулой

$$P_k=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda-\lambda_k|=r_k}(A-\lambda I)^{-1}\,d\lambda \qquad (k=1, 2, \ldots)$$

определяется проектор (не обязательно ортогональный), на корневое подпространство $\mathfrak{L}_k$;

$$P_k\mathfrak{H}=\mathfrak{L}_k \quad \text{и} \quad P_k\mathfrak{L}_j=0 \quad \text{при} \quad j\neq k.$$

Отсюда непосредственно следует утверждение:

1°. *Последовательность* $\{\psi_j\}$, *составленная из базисов всех подпространств* $\mathfrak{L}_j$, *является* ω-*линейно независимой.*

В самом деле, если

$$\sum_j c_j\psi_j=0,$$

то

$$P_k\Big(\sum_j c_j\psi_j\Big)=\sum_{j=m_k+1}^{m_{k+1}} c_j\psi_j,$$

где ψ_j ($j=m_k+1, m_k+2, \ldots, m_{k+1}$) — базис подпространства $\mathfrak{L}_k$, а следовательно, $c_j=0$ ($j=1, 2, \ldots$).

Из 1° вытекает, что последовательность, составленная из базисов всех собственных подпространств оператора A, отвечающих невещественным собственным значениям, и подавно является ω-линейно независимой.

3. Собственное подпространство оператора A, отвечающее его собственному значению λ, будем обозначать через $\mathfrak{Z}_\lambda$.

Теорема 4.1. *Пусть A — линейный ограниченный диссипативный оператор с вполне непрерывной мнимой* *компонентой, обладающий последовательностью собственных значений* $\{\lambda_j\}_1^\infty$ $(\lambda_j \neq \lambda_k$ *при* $j \neq k)$.

Если выполняется условие

$$\sum_{\substack{j, k=1 \\ j\neq k}}^{\infty} \min(n_j, n_k) \frac{\operatorname{Im}\lambda_j \operatorname{Im}\lambda_k}{|\lambda_j - \bar{\lambda}_k|^2} < \infty \text{ *)}, \tag{4.2}$$

где $n_j = \dim \mathfrak{Z}_j$ $(\mathfrak{Z}_j = \mathfrak{Z}_{\lambda_j})$, *то последовательность, составленная из ортонормированных базисов подпространств* $\mathfrak{Z}_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ *образует базис в своей линейной замкнутой оболочке* $\mathfrak{Z}$, *квадратично близкий к ортонормированному.*

Если же выполнено ослабленное условие

$$\sum_{\substack{j, k=1 \\ j\neq k}}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}\lambda_j \operatorname{Im}\lambda_k}{|\lambda_j - \bar{\lambda}_k|^2} < \infty, \tag{4.2'}$$

то эта последовательность образует базис в $\mathfrak{Z}$, *эквивалентный ортонормированному.*

Доказательство. Напомним прежде всего (см. § 1 гл. V), что для диссипативного оператора всякое собственное подпространство $\mathfrak{Z}_j$, соответствующее вещественному числу λ_j, ортогонально ко всем остальным собственным подпространствам. Поэтому без ограничения общности можно считать, что все числа λ_j $(j = 1, 2, \ldots)$ невещественны, а следовательно, все собственные подпространства конечномерны.

Применяя к неотрицательной билинейной форме $(A_{\mathcal{J}}\varphi, \psi)$ неравенство Коши—Буняковского, получим

$$|(A_{\mathcal{J}}\varphi, \psi)|^2 \leqslant (A_{\mathcal{J}}\varphi, \varphi)(A_{\mathcal{J}}\psi, \psi).$$

Если φ и ψ — орты из подпространств $\mathfrak{Z}_j$ и $\mathfrak{Z}_k$ соответственно, то

$$(A_{\mathcal{J}}\varphi, \psi) = \frac{1}{2i}[(A\varphi, \psi) - (\varphi, A\psi)] = \frac{1}{2i}(\lambda_j - \bar{\lambda}_k)(\varphi, \psi)$$

*) В сумме (4.2) считаются равными нулю все члены, для которых $\operatorname{Im}\lambda_j \operatorname{Im}\lambda_k = 0$ независимо от того, конечна или бесконечна величина $\min(n_j, n_k)$.

и

$$(A_{\mathcal{J}}\varphi,\ \varphi) = \operatorname{Im}(A\varphi,\ \varphi) = \operatorname{Im}\lambda_j; \qquad (A_{\mathcal{J}}\psi,\ \psi) = \operatorname{Im}\lambda_k.$$

Стало быть,

$$|(\varphi,\ \psi)|^2 \leqslant \frac{4\operatorname{Im}\lambda_j \operatorname{Im}\lambda_k}{|\lambda_j - \bar{\lambda}_k|^2} \qquad (= c_{jk}). \tag{4.3}$$

Обозначим через φ_r $(r = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_j)$ и ψ_q $(q = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_k)$ ортонормированные базисы соответственно подпространств $\mathfrak{Z}_j$ и $\mathfrak{Z}_k$. Тогда для векторов $\psi = \sum_q (\varphi_r,\ \psi_q)\psi_q$ $(\in \mathfrak{Z}_k)$ и $\varphi_r \in \mathfrak{Z}_j$ будем иметь:

$$c_{jk} \geqslant |(\psi,\ \varphi_r)|^2 = \sum_{q=1}^{n_k} |(\psi_q,\ \varphi_r)|^2 \qquad (r = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_j).$$

Следовательно,

$$\sum_{r=1}^{n_j} \sum_{q=1}^{n_k} |(\psi_q,\ \varphi_r)|^2 \leqslant n_j c_{jk}.$$

Поменяв ролями пространства $\mathfrak{Z}_j$ и $\mathfrak{Z}_k$, получим то же неравенство с заменой n_j на n_k, откуда

$$\sum_{r=1}^{n_j} \sum_{q=1}^{n_k} |(\psi_q,\ \varphi_r)|^2 \leqslant \min(n_j,\ n_k)\, \frac{4\operatorname{Im}\lambda_j \operatorname{Im}\lambda_k}{|\lambda_j - \bar{\lambda}_k|^2}\ . \tag{4.4}$$

Обозначим через $\mathcal{A}$ матрицу Грама для последовательности векторов, представляющей собой объединение ортонормированных базисов всех $\mathfrak{Z}_j$. Тогда из (4.2) и (4.4) следует, что матрица $\mathcal{A} - I$ квадрируема. В силу теоремы 3.2 и утверждения 1° этим завершается доказательство первой части теоремы.

Для доказательства второй части введем в рассмотрение матрицу

$$\mathcal{A}_{jk} = \|(\psi_p,\ \varphi_q)\|_{\substack{p=1,\ 2,\ \ldots,\ n_k \\ q=1,\ 2,\ \ldots,\ n_j}} \qquad (j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Эта матрица порождает некоторый оператор A_{jk}, отображающий координатное унитарное пространство E_{n_k} в координатное унитарное пространство E_{n_j}; $n_j = \dim E_{n_j}$; $j = 1, 2, \ldots$.

Очевидно, что матрицу $\mathcal{A}_{jk}$ можно также рассматривать как матрицу, задающую проектор P_{jk}, ортогонально проектирующий подпространство $\mathfrak{Z}_j$ на $\mathfrak{Z}_k$, в базисах $\{\varphi_q\}$ и $\{\psi_p\}$ соответственно:

$$P_{jk}\left(\sum_{\nu} \xi_\nu \varphi_\nu\right) = \sum_{\mu} \eta_\mu \psi_\mu,$$

где

$$\eta_\mu = \sum_{\nu} (\psi_\mu, \varphi_\nu)\, \xi_\nu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n_k).$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$|\mathcal{A}_{jk}| = \max_{\substack{|\varphi|=|\psi|=1 \\ \psi \in \mathfrak{Z}_j;\ \varphi \in \mathfrak{Z}_k}} |(\psi, \varphi)|. \tag{4.5}$$

Пусть $\widetilde{\mathfrak{L}}_2$ — гильбертово пространство последовательностей векторов, $\widetilde{x} = \{x_j\}_1^\infty$ $(x_j \in E_{n_j};\ j = 1, 2, \ldots)$ с нормой

$$|\widetilde{x}| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2\right)^{1/2}.$$

Пространства $\widetilde{\mathfrak{L}}_2$ и l_2 эквивалентны. В самом деле, каждому вектору $\widetilde{x} = \{x_j\}_1^\infty$ $(\in \widetilde{\mathfrak{L}}_2)$, где $x_j = \{x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jn_j}\}$, поставим в соответствие вектор $x = \{x_{11}, x_{12}, \ldots$ $\ldots, x_{1n_1}, x_{21}, \ldots\} \in l_2$. Очевидно, $|\widetilde{x}| = |x|$.

Матрица

$$\widetilde{\mathfrak{A}} = \| \mathcal{A}_{jk} \|_{j,\, k=1,\, 2,\, \ldots}$$

порождает в пространстве $\widetilde{\mathfrak{L}}_2$ линейный ограниченный оператор $\widetilde{\mathfrak{A}}$, для которого в силу (4.3) и (4.5) имеет место оценка

$$|\widetilde{\mathfrak{A}} - \widetilde{I}|^2 \leqslant \sum_{j,\, k;\ j \neq k} |\mathcal{A}_{jk}|^2 \leqslant \sum_{j,\, k;\ j \neq k}^{\bullet} c_{jk} \quad (< \infty).$$

Отсюда следует, что для оператора $\hat{A}$, порожденного в l_2 матрицей Грама $\mathcal{A}$, имеет место та же оценка

$$|\hat{A}-I|^2 \leqslant \sum_{j,\,k=1;\; j\neq k}^{\infty} c_{jk}. \tag{4.6}$$

Очевидно, второе утверждение теоремы будет установлено, если мы покажем, что для достаточно большого N объединение ортонормированных базисов всех $\mathfrak{Z}_j$ с $j>N$ образует базис в своей линейной замкнутой оболочке, эквивалентный ортонормированному. Поэтому без ограничения общности можно принять:

$$\sum_{j,\,k;\; j\neq k} c_{jk} = 4 \sum_{j,\,k;\; j\neq k} \frac{\operatorname{Im}\lambda_j \operatorname{Im}\lambda_k}{|\lambda_j-\bar{\lambda}_k|^2} < 1.$$

С другой стороны, при выполнении этого условия из (4.6) следует, что матрица $\mathcal{A}$ порождает в l_2 линейный ограниченный обратимый оператор.

Теорема доказана.

Следствие 4.1. *Пусть, начиная с некоторого номера N, все корневые подпространства $\mathfrak{L}_{\lambda_j}$ $(j>N)$ линейного ограниченного диссипативного оператора A с $A_{\mathcal{J}} \in \mathfrak{S}_\infty$ состоят только из собственных векторов и пусть система всех корневых векторов оператора A полна в $\mathfrak{H}$.*

Тогда при выполнении условия (4.2) (*условия* (4.2′)) *последовательность, составленная из ортонормированных базисов всех $\mathfrak{L}_{\lambda_j}$, образует базис пространства $\mathfrak{H}$, квадратично близкий к ортонормированному* (*соответственно, эквивалентный ортонормированному*).

§ 5. Базисы из подпространств

1. Последовательность $\{\mathfrak{N}_k\}_1^\infty$ ненулевых подпространств $\mathfrak{N}_k \subset \mathfrak{H}$ называется *базисом* (из подпространств) пространства $\mathfrak{H}$, если любой вектор $x \in \mathfrak{H}$ разлагается единственным образом в ряд вида

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k, \tag{5.1}$$

где $x_k \in \mathfrak{N}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Если подпространства $\mathfrak{N}_k$ $(k=1, 2, \ldots)$ одномерны, то они составляют базис пространства $\mathfrak{H}$ в том и только том случае, когда орты $\varphi_k \in \mathfrak{N}_k$ $(k=1, 2, \ldots)$ образуют векторный базис $\mathfrak{H}$.

На базисы из подпространств переносится значительная часть предложений о векторных базисах.

Подобно тому как в основе предложений о векторных базисах лежит теорема Банаха о непрерывной зависимости коэффициентов разложения по базису от элемента, отправным пунктом обобщений на базисы из подпространств является следующее предложение.

1°. *Пусть* $\{\mathfrak{N}_k\}_1^\infty$ — *некоторый базис из подпространств, а* N_k — *оператор, относящий вектору* x *его компоненту* x_k *из разложения* (5.1). *Тогда* $\{N_k\}_1^\infty$ *образует ортогональную систему непрерывных проекторов, т. е.* $N_jN_k=\delta_{jk}N_k$, *причем*

$$\sup_n \Big| \sum_{k=1}^n N_k \Big| < \infty. \tag{5.2}$$

Рассмотрим новую норму $\|x\|$, определенную в пространстве $\mathfrak{H}$ равенством

$$\|x\| = \sup_n \Big| \sum_{k=1}^n x_k \Big| \qquad (x \in \mathfrak{H}).$$

Так же, как в случае векторных базисов (см. Л. А. Люстерник и В. И. Соболев [1], стр. 221—223), без труда проверяется, что в новой норме пространство $\mathfrak{H}$ полно. Так как

$$|x| \leqslant \|x\| \qquad (x \in \mathfrak{H}), \tag{5.3}$$

то согласно известной теореме Банаха [1] (гл. VII § 3), существует константа c (>0), такая что

$$\|x\| \leqslant c\,|x|. \tag{5.4}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$|x_j| \leqslant \Big| \sum_{k=1}^{j} x_k \Big| + \Big| \sum_{k=1}^{j-1} x_k \Big| \leqslant 2c\,|x|. \tag{5.5}$$

Рассмотрим оператор N_k $(k=1, 2, \ldots)$, сопоставляющий каждому вектору $x \in \mathfrak{H}$ его компоненту x_k из разложения (5.1). Этот линейный оператор определен на всем пространстве $\mathfrak{H}$, ограничен в силу (5.5) и $N_k^2 = N_k$. Следовательно, N_k — ограниченный проектор, проектирующий все $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}_k$. Разложение (5.1) эквивалентно разложению

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} N_k x,$$

т. е. ряд $\sum\limits_k N_k$ сходится сильно к единичному оператору. Отметим еще, что из (5.4) следует соотношение (5.2).

2. Очевидно, всякая полная *) в $\mathfrak{H}$ система попарно ортогональных подпространств $\{\mathfrak{N}_k\}_1^{\infty}$ является базисом $\mathfrak{H}$; в этом случае соответствующие проекторы N_k являются ортопроекторами. Такой базис будем называть *ортогональным*.

Легко убедиться, что всякий ограниченный обратимый оператор A преобразует любой ортогональный базис из подпространств $\{\mathfrak{M}_k\}_1^{\infty}$ в некоторый другой базис $\{\mathfrak{N}_k\}_1^{\infty}$ пространства $\mathfrak{H}$. Базис из подпространств $\{\mathfrak{N}_k\}$, получаемый из ортогонального базиса с помощью такого преобразования, называется *эквивалентным ортогональному* **).

Характеристическое свойство (теорема 2.2) базисов, эквивалентных ортонормированному, сохраняется для базисов из подпространств, эквивалентных ортогональному. Для доказательства этого понадобится следующее вспомогательное предложение.

Лемма 5.1 (Г. В. Макки [1] ***)). *Пусть* $N_1, N_2, \ldots$ $\ldots, N_n$ — *попарно ортогональные проекторы в* $\mathfrak{H}$:

$$N_j N_k = \delta_{jk} N_j \qquad (j, k = 1, 2, \ldots).$$

Если

$$\sup_{\varepsilon_k = \pm 1} \left| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k N_k \right| = c, \tag{5.6}$$

*) Полнота означает, что линейная замкнутая оболочка этих подпространств совпадает с $\mathfrak{H}$.

**) Базисы, эквивалентные ортогональному, рассматривались М. К. Фаге [1] (он называл их *спрямляемыми*).

***) Эта лемма изложена также в статье Дж. Уэрмера [2].

то для любого $f \in \mathfrak{H}$

$$c^{-2}\Big|\sum_{k=1}^{n} N_k f\Big|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} |N_k f|^2 \leqslant c^2\Big|\sum_{k=1}^{n} N_k f\Big|^2.$$

Доказательство. Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости равенства

$$\sum_{k=1}^{n} |N_k f|^2 = \frac{1}{2^n} \sum |\varepsilon_1 N_1 f + \ldots + \varepsilon_n N_n f|^2 \quad (f \in \mathfrak{H}),$$

где знак суммы в правой части равенства распространяется на все системы $\{\varepsilon_k\}_1^n$, где $\varepsilon_k = \pm 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Из этого соотношения следует существование для каждого $f \in \mathfrak{H}$ систем $\{\varepsilon'_k\}_1^n$ и $\{\varepsilon''_k\}_1^n$ ($\varepsilon'_k = \pm 1$; $\varepsilon''_k = \pm 1$; $k = 1, 2, \ldots, n$) таких, что

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon'_k N_k f\Big|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} |N_k f|^2 \leqslant \Big|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon''_k N_k f\Big|^2. \tag{5.7}$$

Следовательно, если обозначить через N сумму $\sum\limits_k N_k$, то на основании (5.7) и (5.6) будем иметь

$$\sum_{k=1}^{n} |N_k f|^2 \leqslant \Big|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon''_k N_k N f\Big|^2 \leqslant c^2 |Nf|^2.$$

Так как

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon'_k N_k\Big)^2 = N,$$

то

$$|Nf|^2 = \Big|\Big(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon'_k N_k\Big)^2 f\Big|^2 \leqslant \Big|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon'_k N_k\Big|^2 \Big|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon'_k N_k f\Big|^2.$$

Отсюда, в силу (5.6) и (5.7) следует

$$|Nf|^2 \leqslant c^2 \sum_{k=1}^{n} |N_k f|^2 \quad (f \in \mathfrak{H}).$$

Лемма доказана.

Теорема 5.1 (И. М. Гельфанд [1]). *Для того чтобы последовательность* $\{\mathfrak{N}_j\}$ *подпространств была базисом* *пространства $\mathfrak{H}$, эквивалентным ортогональному, необходимо и достаточно, чтобы при любой перестановке своих элементов эта последовательность оставалась базисом $\mathfrak{H}$.*

Доказательство. Необходимость условия теоремы очевидна. Докажем его достаточность. Пусть N_k ($k=1, 2, \ldots$) — проектор, проектирующий пространство $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}_k$ параллельно линейной замкнутой оболочке всех подпространств $\mathfrak{N}_j$ ($k \neq j$). Если $\{N_{k'}\}$ — любая перестановка последовательности $\{N_k\}$, то в силу условия теоремы и неравенства (5.2) частичные суммы ряда $\sum N_{k'}$ ограничены. Следовательно, согласно лемме 2.1

$$\sup_{n;\ \varepsilon_k=\pm 1} \left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k N_k\right| = c < \infty.$$

Стало быть, в силу леммы 5.1 для любого вектора $f \in \mathfrak{H}$

$$c^{-2}\left|\sum_{k=1}^{n} N_k f\right|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} |N_k f|^2 \leqslant c^2 \left|\sum_{k=1}^{n} N_k f\right|^2 \qquad (5.8)$$

$$(n=1, 2, \ldots).$$

Выберем в пространстве $\mathfrak{H}$ какой-либо ортогональный базис $\{\mathfrak{M}_j\}$, подчиненный условию

$$\dim \mathfrak{M}_j = \dim \mathfrak{N}_j \qquad (j=1, 2, \ldots),$$

и через A_j обозначим произвольное изометрическое отображение $\mathfrak{M}_j$ на $\mathfrak{N}_j$. На линейной оболочке всех подпространств $\{\mathfrak{M}_j\}$ определим линейный оператор A, полагая

$$A\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} A_k P_k \varphi \qquad (\varphi \in \mathfrak{H}),$$

где P_k — ортопроектор, проектирующий $\mathfrak{H}$ на подпространство $\mathfrak{M}_k$ ($k=1, 2, \ldots$). Принимая в неравенствах (5.8) $f = A\varphi$, получим:

$$c^{-1}|A\varphi| \leqslant |\varphi| \leqslant c|A\varphi|.$$

Стало быть, оператор A можно расширить по непрерывности до ограниченного обратимого оператора. Очевидно, $A\mathfrak{M}_k = \mathfrak{N}_k$, и следовательно, $\{\mathfrak{N}_k\}_1^\infty$ есть базис, эквивалентный ортогональному.

Теорема доказана.

3. Нам понадобится ряд определений.

Последовательность ненулевых подпространств $\{\mathfrak{N}_k\}_1^\infty$ будем называть *ω-линейно-независимой*, если равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = 0 \qquad (x_k \in \mathfrak{N}_k;\ k = 1,\ 2,\ \ldots)$$

невозможно при

$$0 < \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty .$$

Если P и Q — ортопроекторы на подпространства $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ соответственно, то, как известно (см. § 3 гл. I), число $|P-Q|$ является в некотором смысле мерой отклонения подпространств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ друг от друга. Поэтому естественным является следующее определение.

Две последовательности подпространств $\{\mathfrak{M}_k\}_1^\infty$ и $\{\mathfrak{N}_k\}_1^\infty$ называются *квадратично близкими*, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} |P_k - Q_k|^2 < \infty,$$

где P_k и Q_k — ортопроекторы на подпространства $\mathfrak{M}_k$ и $\mathfrak{N}_k$ соответственно.

Отметим, что две последовательности одномерных подпространств $\{\mathfrak{M}_k\}_1^\infty$ и $\{\mathfrak{N}_k\}_1^\infty$ являются квадратично близкими тогда и только тогда, когда можно выбрать орты x_k $(\in \mathfrak{M}_k)$ и y_k $(\in \mathfrak{N}_k)$ такие, что последовательности $\{x_k\}_1^\infty$ и $\{y_k\}_1^\infty$ квадратично близки в смысле определения п. 4 § 2, т. е. $\sum |x_k - y_k|^2 < \infty$.

В самом деле, в рассматриваемом случае *):

$$|P_k - Q_k|^2 = 1 - |(x_k,\ y_k)|^2. \tag{5.9}$$

Так как

$$|x_k - y_k|^2 = 2\,(1 - \operatorname{Re}(x_k,\ y_k)) \tag{5.10}$$

и для α с $|\alpha| \leqslant 1$

$$1 - |\alpha|^2 \leqslant 2\,(1 - |\alpha|) \leqslant 2\,(1 - \operatorname{Re} \alpha),$$

---

*) Соотношение (5.9) нетрудно получить непосредственно; совсем просто оно может быть получено на основании предложения 4°, доказанного на стр. 411.

то

$$|P_k - Q_k'|^2 \leqslant |x_k - y_k'|^2.$$

Поэтому из квадратичной близости последовательностей $\{x_k\}_1^\infty$ и $\{y_k\}_1^\infty$ (при каком-нибудь выборе ортов $x_k \in \mathfrak{M}_k$ и $y_k \in \mathfrak{N}_k$) следует квадратичная близость последовательностей $\{\mathfrak{M}_k\}_1^\infty$ и $\{\mathfrak{N}_k\}_1^\infty$.

Если, обратно, последовательности $\{\mathfrak{M}_k\}_1^\infty$ и $\{\mathfrak{N}_k\}_1^\infty$ являются квадратично близкими, то выбирая орты $x_k \in \mathfrak{M}_k$ и $y_k \in \mathfrak{N}_k$ так, чтобы

$$(x_k, y_k) > 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

получим в силу равенств (5.9) и (5.10)

$$|x_k - y_k|^2 = 2(1 - (x_k, y_k)) \leqslant 2(1 - (x_k, y_k)^2) = 2|P_k - Q_k|.$$

Стало быть, последовательности $\{x_k\}_1^\infty$ и $\{y_k\}_1^\infty$ также будут квадратично близкими.

В дальнейшем для простоты ограничимся рассмотрением базисов из конечномерных подпространств (см. замечание 5.3).

Следующая теорема является аналогом теоремы 2.3.

Теорема 5.2 (А. С. Маркус [2]). *Полная в $\mathfrak{H}$ ω-линейно независимая последовательность конечномерных подпространств $\{\mathfrak{N}_k\}_1^\infty$, квадратично близкая к некоторому базису $\{\mathfrak{M}_k\}_1^\infty$ пространства $\mathfrak{H}$, эквивалентному ортогональному, также является базисом пространства $\mathfrak{H}$, эквивалентным ортогональному.*

Доказательство. Пусть $\{\mathfrak{Q}_k\}_1^\infty$ — ортогональный базис пространства $\mathfrak{H}$, преобразуемый линейным ограниченным обратимым оператором A в базис $\{\mathfrak{M}_k\}_1^\infty$. Подберем настолько большое число n, что

$$\sum_{k=n}^{\infty} |P_k - Q_k|^2 < (|A|\,|A^{-1}|)^{-2},$$

и положим

$$B = \sum_{k=n}^{\infty} (Q_k - P_k) A R_k,$$

где P_k, Q_k и R_k — ортопроекторы, проектирующие $\mathfrak{H}$ соответственно на подпространства $\mathfrak{M}_k$, $\mathfrak{N}_k$ и $\mathfrak{Q}_k$.

Очевидно,

$$|Bx|^2 \leqslant \Big(\sum_{k=n}^{\infty} |Q_k - P_k|\,|A|\,|R_k x|\Big)^2 \leqslant$$
$$\leqslant |A|^2 \sum_{k=n}^{\infty} |Q_k - P_k|^2 \sum_{k=n}^{\infty} |R_k x|^2 \leqslant$$
$$\leqslant |A|^2 \sum_{k=n}^{\infty} |Q_k - P_k|^2 |x|^2.$$

Стало быть,

$$|B| < |A^{-1}|^{-1},$$

и поэтому оператор $A+B$ обратим. Очевидно, что для $x \in \mathfrak{Q}_k$ $(k \geqslant n)$

$$(A+B)\,x = Q_k A x.$$

Так как

$$|P_k - Q_k| < 1 \qquad (k \geqslant n),$$

то проектор Q_k изоморфно отображает подпространство $\mathfrak{M}_k$ на $\mathfrak{N}_k$ (см. лемму I.3.1). Следовательно, оператор $A+B$ изоморфно отображает подпространство $\mathfrak{Q}_k$ на подпространство $\mathfrak{N}_k$ $(k \geqslant n)$.

Обозначим через $\mathfrak{Q}$ (соответственно $\mathfrak{N}$) прямую сумму подпространств $\mathfrak{Q}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ (соответственно $\mathfrak{N}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$) и через $\widetilde{\mathfrak{Q}}$ (соответственно $\widetilde{\mathfrak{N}}_k$) линейную замкнутую оболочку подпространств $\mathfrak{Q}_k$ $(k = n, n+1, \ldots)$ (соответственно $\mathfrak{N}_k$ $(k = n, n+1, \ldots)$). Очевидно,

$$\mathfrak{Q} \oplus \widetilde{\mathfrak{Q}} = \mathfrak{H}. \tag{5.11}$$

Покажем, что

$$\mathfrak{N} \dotplus \widetilde{\mathfrak{N}} = \mathfrak{H}. \tag{5.12}$$

Для этого, очевидно, достаточно установить, что

$$\mathfrak{N} \cap \widetilde{\mathfrak{N}} = 0.$$

Рассмотрим произвольный вектор $x \in \mathfrak{N} \cap \widetilde{\mathfrak{N}}$. Так как $x \in \mathfrak{N}$, то

$$x = \sum_{k=1}^{n-1} x_k \qquad (x_k \in \mathfrak{N}_k). \tag{5.13}$$

С другой стороны, так как $x \in \widetilde{\mathfrak{N}}$, то $x = (A+B)\,y$, $y \in \widetilde{\mathfrak{Q}}$. Представляя y в виде

$$y = \sum_{k=n}^{\infty} y_k \qquad (y_k \in \mathfrak{Q}_k),$$

получаем:

$$x = \sum_{k=n}^{\infty} x_k; \qquad x_k = (A+B)\,y_k \in \mathfrak{N}_k. \tag{5.14}$$

Из соотношений (5.13) и (5.14) и ω-линейной независимости последовательности $\{\mathfrak{N}_k\}$ следует, что $x_k = 0$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots)$, а значит, и $x = 0$.

Так как $(A+B)\,\widetilde{\mathfrak{Q}} = \widetilde{\mathfrak{N}}$, то в силу (5.11) и (5.12) $\dim \mathfrak{Q} = \dim \mathfrak{N}$, и поэтому подпространство $\mathfrak{Q}$ можно разложить в ортогональную сумму подпространств $\hat{\mathfrak{Q}}_k$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$ таких, что $\dim \hat{\mathfrak{Q}}_k = \dim \mathfrak{N}_k$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$. Пусть $\hat{C}$ — линейное обратимое отображение подпространства $\mathfrak{Q}$ на подпространство $\mathfrak{N}$, переводящее подпространство $\hat{\mathfrak{Q}}_j$ в подпространство $\mathfrak{N}_j$. Обозначим через C линейный оператор, совпадающий на подпространстве $\widetilde{\mathfrak{Q}}$ с $A+B$, а на подпространстве $\mathfrak{Q}$ — с $\hat{C}$. Ограниченный обратимый оператор C преобразует ортогональный базис $\hat{\mathfrak{Q}}_1,\ \hat{\mathfrak{Q}}_2,\ \ldots,\ \hat{\mathfrak{Q}}_{n-1},\ \mathfrak{Q}_n,\ \mathfrak{Q}_{n+1},\ \ldots$ в последовательность $\mathfrak{N}_1,\ \mathfrak{N}_2,\ \ldots$ Следовательно, $\{\mathfrak{N}_j\}_1^{\infty}$ является базисом пространства $\mathfrak{H}$, эквивалентным ортогональному.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 5.1. В отличие от того, что имеет место для векторных базисов (теорема 2.3), условие полноты последовательности $\{\mathfrak{N}_k\}$ в теореме 5.2 не может быть, вообще говоря, отброшено. Это условие является излишним, если $\dim \mathfrak{N}_k = \dim \mathfrak{M}_k$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots)$.

4. *Минимальным углом* между подпространствами $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ называется угол $\varphi(\mathfrak{M},\ \mathfrak{N})$ $\left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, определяемый равенством

$$\cos\varphi(\mathfrak{M},\ \mathfrak{N}) = \sup_{\substack{x \in \mathfrak{M},\ y \in \mathfrak{N} \\ |x| = |y| = 1}} |(x,\ y)|.$$

Приведем некоторые вспомогательные геометрические предложения, связанные с понятием минимального угла *). Через $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ далее обозначаются подпространства пространства $\mathfrak{H}$.

2°. *Если*

$$\mathfrak{M} \dot{+} \mathfrak{N} = \mathfrak{H}$$

и M — проектор, проектирующий $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{M}$ параллельно $\mathfrak{N}$, то

$$\sin\varphi(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = |M|^{-1}.$$

В самом деле,

$$|M|^{-1} = \inf_{\substack{x\in\mathfrak{M}\\ |x|=1}} \inf_{Mz=x} |z| = \inf_{\substack{x\in\mathfrak{M}\\ |x|=1}} \inf_{y\in\mathfrak{N}} |x-y| =$$
$$= \inf_{\substack{x\in\mathfrak{M}\\ |x|=1}} |x-Qx| = \inf_{\substack{x\in\mathfrak{M}\\ |x|=1}} (1-|Qx|^2)^{1/2},$$

где Q — ортопроектор на подпространство $\mathfrak{N}$. Так как

$$|Qx| = \sup_{\substack{y\in\mathfrak{N}\\ |y|=1}} |(x, y)|, \tag{5.15}$$

то

$$|M|^{-1} = (1 - \sup_{\substack{x\in\mathfrak{M},\ y\in\mathfrak{N}\\ |x|=|y|=1}} |(x, y)|^2)^{1/2} = \sin\varphi(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}).$$

3°. *Если*

$$\mathfrak{M} \dot{+} \mathfrak{N} = \mathfrak{H}, \quad \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}^{\perp} \quad \text{и} \quad \mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}^{\perp}, \tag{5.16}$$

то

$$\varphi(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = \varphi(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{N}_1).$$

Заметим прежде всего, что в силу (5.16)

$$\mathfrak{M}_1 \dot{+} \mathfrak{N}_1 = \mathfrak{H},$$

и обозначим через N_1 проектор, проектирующий $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}_1$ параллельно $\mathfrak{M}_1$, а через M — проектор из предложения 2°. Если x и y — произвольные векторы пространства $\mathfrak{H}$,

*) Предложения 2° и 4° заимствованы из статьи В. Э. Лянце [1], а предложение 3° — из статьи М. Г. Крейна, М. А. Красносельского и Д. П. Мильмана [1].

то полагая

$$x = x_1 + x_2 \quad (x_1 \in \mathfrak{M},\ x_2 \in \mathfrak{N}), \qquad y = y_1 + y_2 \quad (y_1 \in \mathfrak{M}_1,\ y_2 \in \mathfrak{N}_1),$$

получим:

$$(Mx,\ y) = (x_1,\ y) = (x_1,\ y_2) = (x,\ N_1 y).$$

Стало быть, $N_1 = M^*$, и поэтому в силу предложения 2°

$$\sin\varphi(\mathfrak{M},\ \mathfrak{N}) = |M|^{-1} = |N_1|^{-1} = \sin\varphi(\mathfrak{M}_1,\ \mathfrak{N}_1).$$

4°. *Если*

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}^{\perp} \quad \text{и} \quad \mathfrak{N} \dot{+} \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{H},$$

то

$$|P - Q| = \cos\varphi(\mathfrak{N},\ \mathfrak{M}_1), \tag{5.17}$$

где P и Q — ортопроекторы на подпространства $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ соответственно.

Так как для $x \in \mathfrak{M}$ и $y \in \mathfrak{M}_1$

$$((P - Q)x,\ (P - Q)y) = -((I - Q)x,\ Qy) =$$
$$= -(Q(I - Q)x,\ y) = 0,$$

то

$$|P - Q| = \max(|P - Q|_{\mathfrak{M}},\ |P - Q|_{\mathfrak{M}_1}), \tag{5.18}$$

где положено

$$|A|_{\mathfrak{M}} = \sup_{x \in \mathfrak{M};\ |x| = 1} |Ax|.$$

Очевидно, что

$$|P - Q|_{\mathfrak{M}_1} = |Q|_{\mathfrak{M}_1},$$

а так как в силу (5.15)

$$|Q|_{\mathfrak{M}_1} = \sup_{\substack{x \in \mathfrak{M}_1,\ y \in \mathfrak{N} \\ |x| = |y| = 1}} |(x,\ y)| = \cos\varphi(\mathfrak{N},\ \mathfrak{M}_1),$$

то

$$|P - Q|_{\mathfrak{M}_1} = \cos\varphi(\mathfrak{N},\ \mathfrak{M}_1). \tag{5.19}$$

Заменяя в последнем равенстве $\mathfrak{M}_1$ на $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ на $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}^{\perp}$ и соответственно этому P на $I - P$, Q на $I - Q$, получим:

$$|P - Q|_{\mathfrak{M}} = \cos\varphi(\mathfrak{N}_1,\ \mathfrak{M}). \tag{5.20}$$

Так как в силу предложения 3° правые части соотношений (5.19) и (5.20) равны, то из равенства (5.18) следует соотношение (5.17).

5. Из теоремы 5.2 следует, в частности, что всякая полная в $\mathfrak{H}$ ω-линейно независимая последовательность конечномерных подпространств $\{\mathfrak{N}_j\}_1^\infty$, квадратично близкая к некоторому ортогональному базису пространства $\mathfrak{H}$, является базисом $\mathfrak{H}$.

В силу теоремы 5.2 всякий базис, квадратично близкий к ортогональному, является базисом, эквивалентным ортогональному.

Следующая теорема является частичным обобщением теоремы 3.3.

Теорема 5.3 (А. С. Маркус [2]). *Пусть $\{\mathfrak{N}_k\}_1^\infty$ — полная в $\mathfrak{H}$ ω-линейно независимая последовательность конечномерных подпространств и*

$$\sum_{\substack{j,\,k=1\\ j\neq k}}^{\infty} \cos^2\varphi(\mathfrak{N}_j, \mathfrak{N}_k) < \infty. \tag{5.21}$$

Тогда $\{\mathfrak{N}_k\}_1^\infty$ есть базис пространства $\mathfrak{H}$, квадратично близкий к ортогональному.

Доказательство. Выберем натуральное число n так, что

$$\sum_{j,\,k=n;\ j\neq k}^{\infty} \cos^2\varphi(\mathfrak{N}_j, \mathfrak{N}_k) = q^2 < 1 \tag{5.22}$$

и введем в рассмотрение подпространства

$$\mathfrak{Q}_k = \mathfrak{N}_n \dotplus \mathfrak{N}_{n+1} \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{N}_k \qquad (k = n,\ n+1,\ \ldots)$$

и

$$\mathfrak{M}_n = \mathfrak{N}_n, \quad \mathfrak{M}_k = \mathfrak{Q}_k \ominus \mathfrak{Q}_{k-1} \qquad (k = n+1,\ n+2,\ \ldots).$$

Обозначим, далее, через $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2\ \ldots, \mathfrak{M}_{n-1}$ какие-либо $n-1$ подпространств, дополняющих последовательность $\{\mathfrak{M}_k\}_n^\infty$ до ортогонального базиса $\{\mathfrak{M}_k\}_1^\infty$ пространства $\mathfrak{H}$, и через P_k и Q_k — ортопроекторы на подпространства $\mathfrak{M}_k$ и $\mathfrak{N}_k$ соответственно ($k = 1,\ 2,\ \ldots$).

Так как на подпространстве $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{Q}_k$ $(k \geqslant n)$ оператор $P_k - Q_k$ равен нулю, то

$$|P_k - Q_k| = |P_k - Q_k|_{\mathfrak{Q}_k}$$

и поэтому в силу предложения 4°

$$|P_k - Q_k| = \cos\varphi(\mathfrak{N}_k, \mathfrak{Q}_{k-1}) \qquad (k = n+1, n+2, \ldots) \tag{5.23}$$

В силу теоремы 5.2 теорема будет доказана, коль скоро будет установлено, что последовательности $\{\mathfrak{M}_k\}_1^\infty$ и $\{\mathfrak{N}_k\}_1^\infty$ квадратично близки. Для этого в силу (5.23) достаточно показать, что

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \cos^2\varphi(\mathfrak{N}_k, \mathfrak{Q}_{k-1}) < \infty.$$

Пусть x и y — произвольные орты из подпространств $\mathfrak{N}_k$ и $\mathfrak{Q}_{k-1}$ соответственно. Представим вектор y в виде

$$y = \sum_{j=n}^{k-1} \alpha_j x_j \qquad (x_j \in \mathfrak{N}_j, \ |x_j| = 1; \ j = n, n+1, \ldots, k-1).$$

Так как

$$1 = \Big|\sum_{j=n}^{k-1} \alpha_j x_j\Big|^2 = \sum_{p,\, j=n}^{k-1} (x_p, x_j)\, \alpha_p \bar{\alpha}_j =$$
$$= \sum_{j=n}^{k-1} |\alpha_j|^2 + \sum_{\substack{p,\, j=n \\ p \neq j}}^{k-1} (x_p, x_j)\, \alpha_p \bar{\alpha}_j \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{j=n}^{k-1} |\alpha_j|^2 - \Big(\sum_{\substack{p,\, j=n \\ p \neq j}}^{k-1} |(x_p, x_j)|^2\Big)^{1/2} \sum_{j=n}^{k-1} |\alpha_j|^2$$

и

$$|(x_p, x_j)| \leqslant \cos\varphi(\mathfrak{N}_p, \mathfrak{N}_j),$$

то в силу соотношения (5.22)

$$1 \geqslant \sum_{j=n}^{k-1} |\alpha_j|^2 - q \sum_{j=n}^{k-1} |\alpha_j|^2,$$

или

$$\sum_{i=n}^{k-1} |\alpha_j|^2 \leqslant (1-q)^{-1}.$$

С другой стороны,

$$|(x,\ y)|^2=|\sum_{j=n}^{k-1}(x,\ x_j)\,\bar{\alpha}_j|^2\leqslant\sum_{j=n}^{k-1}|\alpha_j|^2\sum_{j=n}^{k-1}|(x,\ x_j)|^2\leqslant$$

$$\leqslant(1-q)^{-1}\sum_{j=n}^{k-1}\cos^2\varphi(\mathfrak{N}_k,\ \mathfrak{N}_j).$$

Стало быть,

$$\cos^2\varphi(\mathfrak{N}_k,\ \mathfrak{Q}_{k-1})\leqslant(1-q)^{-1}\sum_{j=n}^{k-1}\cos^2\varphi(\mathfrak{N}_k,\ \mathfrak{N}_j)\quad(k\geqslant n)$$

и поэтому

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\cos^2\varphi(\mathfrak{N}_k,\ \mathfrak{Q}_{k-1})\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}(1-q)^{-1}\sum_{\substack{k,\ j=n\\ k\neq j}}^{\infty}\cos^2\varphi(\mathfrak{N}_k,\ \mathfrak{N}_j)<\frac{q^2}{2(1-q)}.$$

Теорема доказана.

Замечание 5.2. В отличие от случая векторных базисов (теорема 3.2), условие (5.21) не является необходимым для того, чтобы система $\{\mathfrak{N}_k\}_1^\infty$ составляла базис подпространств, квадратично близкий к ортогональному. Необходимость условия (5.21) можно установить при следующем дополнительном ограничении:

$$\sup_k \dim\mathfrak{N}_k<\infty.$$

Замечание 5.3. В теоремах 5.1 и 5.2 можно отбросить условие конечномерности подпространств $\mathfrak{N}_k$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$ (доказательства останутся прежними), если заменить условие ω-линейной независимости последовательности $\{\mathfrak{N}_k\}_1^\infty$ следующим более сильным условием: для любого k минимальный угол между подпространством $\mathfrak{N}_k$ и линейной замкнутой оболочкой всех остальных подпространств $\mathfrak{N}_j$ $(j\neq k)$ положителен.

6. Приведем некоторые простые предложения, устанавливающие связь между базисами из подпространств и векторными базисами.

5°. *Если последовательность подпространств* $\{\mathfrak{N}_k\}_1^\infty$ *является базисом пространства* $\mathfrak{H}$, *эквивалентным ортогональному, то последовательность* $\{\varphi_j\}_1^\infty$, *полученная объединением всех ортонормированных базисов под-*

пространств $\mathfrak{N}_k$ $(k=1, 2, \ldots)$, *является базисом пространства* $\mathfrak{H}$, *эквивалентным ортонормированному.*

В самом деле, пусть A — линейный ограниченный обратимый оператор, преобразующий некоторый ортогональный базис $\{\mathfrak{M}_k\}_1^\infty$ пространства $\mathfrak{H}$ в базис $\{\mathfrak{N}_k\}_1^\infty$. Представим произвольный вектор $x \in \mathfrak{H}$ в виде

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \qquad (x_k \in \mathfrak{N}_k, \quad k = 1, 2, \ldots).$$

Очевидно,

$$c^{-1} |x|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \leqslant c |x|^2 \qquad (c = |A|^2 \, |A^{-1}|^2). \qquad (5.24)$$

Разлагая каждый вектор x_k по ортонормированному базису подпространства $\mathfrak{N}_k$ $(k=1, 2, \ldots)$, получим разложение вектора x по последовательности $\{\varphi_n\}_1^\infty$:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \varphi_j,$$

причем в силу (5.24)

$$c^{-1} |x|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 \leqslant c |x|^2.$$

Из последнего соотношения и теоремы 2.1 следует, что $\{\varphi_j\}_1^\infty$ является базисом пространства $\mathfrak{H}$, эквивалентным ортонормированному.

Если последовательность подпространств $\{\mathfrak{N}_k\}_1^\infty$ является базисом пространства $\mathfrak{H}$, квадратично близким к ортогональному, то последовательность векторов, полученная объединением ортонормированных базисов подпространств $\mathfrak{N}_k$ $(k=1, 2, \ldots)$, хотя и является в силу предложения 5° базисом пространства $\mathfrak{H}$, эквивалентным ортонормированному, не будет, вообще говоря, базисом, квадратично близким к ортонормированному.

Приведем одно достаточное условие, при котором указанная последовательность векторов является базисом, квадратично близким к ортонормированному.

6°. *Если* $\{\mathfrak{N}_k\}_1^\infty$ — *полная в* $\mathfrak{H}$ ω-*линейно независимая последовательность конечномерных подпространств* *и если*

$$\sum_{j,\, k=1;\; j\neq k}^{\infty} \min(n_j,\ n_k)\cos^2\varphi(\mathfrak{N}_j,\ \mathfrak{N}_k) < \infty \qquad (n_j = \dim \mathfrak{N}_j), \tag{5.25}$$

то объединение ортонормированных базисов $\varphi_{k1}, \varphi_{k2}, \ldots$ $\ldots, \varphi_{kn_k}$ *подпространств* $\mathfrak{N}_k$ $(k=1, 2, \ldots)$ *образует базис пространства* $\mathfrak{H}$, *квадратично близкий к ортонормированному.*

Для доказательства этого предложения воспользуемся методом, применявшимся выше в доказательстве первой части теоремы 4.1.

Полагая

$$\varphi = \sum_{p=1}^{n_j} (\varphi_{kq}, \varphi_{jp})\,\varphi_{jp}\ (\in \mathfrak{N}_j)$$

$$(j, k = 1, 2, \ldots;\ q = 1, 2, \ldots, n_k),$$

будем иметь:

$$\cos^2\varphi(\mathfrak{N}_j,\ \mathfrak{N}_k) \geqslant |(\varphi,\ \varphi_{kq})|^2 = \sum_{p=1}^{n_j} |(\varphi_{kq},\ \varphi_{jp})|^2$$

$$(q = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_k).$$

Стало быть,

$$\sum_{q=1}^{n_k}\sum_{p=1}^{n_j} |(\varphi_{kq},\ \varphi_{jp})|^2 \leqslant n_k \cos^2\varphi(\mathfrak{N}_j,\ \mathfrak{N}_k).$$

Поменяв ролями подпространства $\mathfrak{N}_j$ и $\mathfrak{N}_k$, получим то же неравенство с заменой n_j на n_k. Следовательно,

$$\sum_{q=1}^{n_k}\sum_{p=1}^{n_j} |(\varphi_{kq},\ \varphi_{jp})|^2 \leqslant \min(n_j,\ n_k)\cos^2\varphi(\mathfrak{N}_j,\ \mathfrak{N}_k). \tag{5.26}$$

Перенумеруем подряд все векторы φ_{kq} $(k = 1, 2, \ldots;$ $q = 1, 2, \ldots, n_k)$ и обозначим полученную последовательность через $\{\varphi_j\}_1^{\infty}$. Из неравенств (5.25) и (5.26) вытекает, что

$$\sum_{j,\, k=1;\; j\neq k} |(\varphi_j,\ \varphi_k)|^2 < \infty.$$

Так как последовательность $\{\varphi_j\}_1^\infty$ полна в $\mathfrak{H}$ и ω-линейно независима, то в силу теоремы 3.3 эта последовательность является базисом пространства $\mathfrak{H}$, квадратично близким к ортонормированному.

§ 6. Признаки существования базиса, составленного из корневых подпространств диссипативного оператора

В настоящем параграфе обобщаются результаты § 4. Это обобщение состоит в том, что рассматриваются не только собственные, но и корневые векторы оператора и кроме векторных базисов — базисы, составленные из корневых подпространств.

1. Пусть φ — корневой вектор оператора A, отвечающий собственному числу λ. *Порядком* m_φ корневого вектора φ будем называть наименьшее из натуральных чисел m таких, что

$$(A-\lambda I)^m\varphi=0.$$

Порядком собственного числа λ оператора A назовем число

$$m_\lambda=\sup_{\varphi\in\mathfrak{L}_\lambda} m_\varphi,$$

где $\mathfrak{L}_\lambda$ — корневое подпространство оператора A, отвечающее собственному числу λ. Очевидно, m_λ является наименьшим из натуральных чисел m, для которых

$$(A-\lambda I)^m\,\mathfrak{L}_\lambda=0.$$

Через ν_λ обозначим алгебраическую кратность собственного числа λ оператора A, т. е.

$$\nu_\lambda=\dim\mathfrak{L}_\lambda.$$

Как известно, всегда $m_\lambda\leqslant\nu_\lambda$.

Докажем два вспомогательных предложения, устанавливающих некоторые оценки для корневых векторов диссипативного оператора.

Лемма 6.1. *Пусть φ — корневой вектор диссипативного оператора A, отвечающий собственному числу λ. Тогда*

$$\operatorname{Im}(A\varphi,\ \varphi)\leqslant m_\varphi\operatorname{Im}\lambda\,|\varphi|^2 \tag{6.1}$$

$$|(A-\lambda I)\varphi| \leqslant \sqrt{2}\ \mathrm{Im}\,\lambda \sqrt{m_\varphi(m_\varphi-1)}\,|\varphi|. \qquad (6.2)$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}$ — линейная оболочка векторов

$$\varphi_k = (A-\lambda I)^k \varphi \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1;\ m=m_\varphi).$$

Обозначим через $\hat{A}$ сужение оператора A на подпространство $\mathfrak{N}$. Очевидно, $\mathrm{sp}\,\hat{A} = m\lambda$ и, стало быть, $\mathrm{sp}\,A_{\mathcal{J}} = m\,\mathrm{Im}\,\lambda$. Так как оператор $A_{\mathcal{J}}$ неотрицателен, то

$$|\hat{A}_{\mathcal{J}}| \leqslant \mathrm{sp}\,\hat{A}_{\mathcal{J}} = m\,\mathrm{Im}\,\lambda,$$

откуда следует (6.1).

Для доказательства соотношения (6.2) рассмотрим сначала случай, когда вектор φ, имея порядок $r\ (\leqslant \nu_\lambda)$, ортогонален к подпространству $\mathfrak{Z}((A-\lambda I)^{r-1})$.

Тогда

$$(\varphi,\ \psi) = (\varphi,\ A\psi) = 0,$$

где $\psi = (A-\lambda I)\varphi$. Стало быть,

$$(A_{\mathcal{J}}\varphi,\ \psi) = \frac{1}{2i}[(A\varphi,\ \psi) - (\varphi,\ A\psi)] = \frac{1}{2i}|\psi|^2 \qquad (6.3)$$

и

$$(A_{\mathcal{J}}\varphi,\ \varphi) = \mathrm{Im}\,(A\varphi,\ \varphi) = \mathrm{Im}\,\lambda\,|\varphi|^2 + (\psi,\ \varphi) = \mathrm{Im}\,\lambda\,|\varphi|^2. \quad (6.4)$$

Согласно неравенству Коши — Буняковского

$$|(A_{\mathcal{J}}\varphi,\ \psi)|^2 \leqslant |(A_{\mathcal{J}}\varphi,\ \varphi)|\cdot|(A_{\mathcal{J}}\psi,\ \psi)|, \qquad (6.5)$$

следовательно, в силу (6.3) и (6.4)

$$\frac{1}{4}|\psi|^4 \leqslant \mathrm{Im}\,\lambda\,|\varphi|^2\,\mathrm{Im}\,(A\psi,\ \psi). \qquad (6.6)$$

Так как $m_\psi = r-1$, то согласно доказанной оценке (6.1)

$$\mathrm{Im}\,(A\psi,\ \psi) \leqslant (r-1)\,\mathrm{Im}\,\lambda\,|\psi|^2. \qquad (6.7)$$

Сопоставляя (6.6) и (6.7), получаем

$$|\psi| \leqslant 2\sqrt{r-1}\,\mathrm{Im}\,\lambda\,|\varphi|,$$

т. е.

$$|(A-\lambda I)\varphi|\leqslant 2\sqrt{r-1}\,\mathrm{Im}\,\lambda\,|\varphi|. \tag{6.8}$$

Любой корневой вектор φ, имеющий порядок m ($\varphi\in\mathfrak{Z}((A-\lambda I)^m)$), можно представить в виде

$$\varphi=\sum_{j=1}^{m}\varphi_j,$$

где

$$\varphi_j\in\mathfrak{Z}((A-\lambda I)^j)\ominus\mathfrak{Z}((A-\lambda I)^{j-1})\qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

а следовательно, в силу (6.8)

$$|(A-\lambda I)\varphi|\leqslant\sum_{j=1}^{m}|(A-\lambda I)\varphi_j|\leqslant 2\,\mathrm{Im}\,\lambda\sum_{j=1}^{m}\sqrt{j-1}\,|\varphi_j|\leqslant$$

$$\leqslant 2\,\mathrm{Im}\,\lambda\,\Big(\sum_{j=1}^{m}j-1\Big)^{1/2}\sqrt{\sum_{j=1}^{m}|\varphi_j|^2}=\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\,\lambda\sqrt{m(m-1)}\,|\varphi|.$$

Лемма доказана.

Лемма 6.2. *Пусть φ и ψ — корневые векторы диссипативного оператора A, отвечающие, соответственно, собственным числам λ_1 и λ_2. Тогда*

$$|(\varphi,\ \psi)|\leqslant\frac{2\sqrt{nm\,\mathrm{Im}\,\lambda_1\,\mathrm{Im}\,\lambda_2}}{|\lambda_1-\bar\lambda_2|}\sum_{j=0}^{n-1}a^j\sum_{k=0}^{m-1}b^k\,|\varphi|\,|\psi|, \tag{6.9}$$

где $n=m_\varphi$, $m=m_\psi$,

$$a=a_n=\frac{2\sqrt{2}\,(n-1)\,\mathrm{Im}\,\lambda_1}{|\lambda_1-\bar\lambda_2|}\quad\text{и}\quad b=b_m=\frac{2\sqrt{2}\,(m-1)\,\mathrm{Im}\,\lambda_2}{|\lambda_1-\bar\lambda_2|}.$$

Доказательство. Легко проверить, что

$$(A_{\mathcal{J}}\varphi,\ \psi)=\frac{1}{2i}[(\lambda_1-\bar\lambda_2)(\varphi,\ \psi)+(\varphi_1,\ \psi)-(\varphi,\ \psi_1)],$$

где

$$\varphi_1=(A-\lambda_1 I)\varphi\ \text{ и }\ \psi_1=(A-\lambda_2 I)\psi.$$

Отсюда в силу неравенства Коши — Буняковского (6.5) следует соотношение

$$|(\lambda_1-\bar\lambda_2)(\varphi,\psi)+(\varphi_1,\psi)-(\varphi,\psi_1)|^2\leqslant 4\,\mathrm{Im}\,(A\varphi,\varphi)\,\mathrm{Im}\,(A\psi,\psi).$$

Таким образом, согласно (6.1) имеем:

$$|(\lambda_1-\bar{\lambda}_2)(\varphi, \psi)| \leqslant$$
$$\leqslant 2\sqrt{mn \operatorname{Im}\lambda_1 \operatorname{Im}\lambda_2}\,|\varphi|\,|\psi| + |(\varphi_1, \psi)| + |(\varphi, \psi_1)|. \quad (6.10)$$

Дальнейшее доказательство соотношения (6.9) проведем индукцией по m_φ и m_ψ.

Покажем сперва, что если соотношение (6.9) имеет место для любых корневых векторов $\varphi \in \mathfrak{L}_{\lambda_1}$ и $\psi \in \mathfrak{L}_{\lambda_2}$, для которых $m_\varphi = n-1$, $m_\psi = m$ или $m_\varphi = n$, $m_\psi = m-1$, то оно имеет также место при $m_\varphi = n$ и $m_\psi = m$.

В самом деле, пусть $m_\varphi = n$ и $m_\psi = m$; тогда $m_{\varphi_1} = n-1$ и $m_{\psi_1} = m-1$ и, стало быть, в силу сделанного предположения

$$|(\varphi_1, \psi)| \leqslant \frac{2\sqrt{(n-1)\, m \operatorname{Im}\lambda_1 \operatorname{Im}\lambda_2}}{|\lambda_1-\bar{\lambda}_2|} \sum_{j=0}^{n-2} a_{n-1}^j \sum_{k=0}^{m-1} b_m^k\, |\varphi_1| \cdot |\psi|.$$

В силу (6.2)

$$|\varphi_1| \leqslant \sqrt{2}\operatorname{Im}\lambda_1 \sqrt{n(n-1)}\,|\varphi|,$$

следовательно,

$$|(\varphi_1, \psi)| \leqslant \frac{2\sqrt{2}\sqrt{nm \operatorname{Im}\lambda_1 \operatorname{Im}\lambda_2}}{|\lambda_1-\bar{\lambda}_2|} \times$$
$$\times (n-1)\operatorname{Im}\lambda_1 \sum_{j=0}^{n-2} a_{n-1}^j \sum_{k=0}^{m-1} b_m^k\, |\varphi|\,|\psi|. \quad (6.11)$$

Так как

$$\frac{2\sqrt{2}(n-1)\operatorname{Im}\lambda_1}{|\lambda_1-\bar{\lambda}_2|} = a_n \text{ и } a_{n-1} \leqslant a_n,$$

то из соотношения (6.11) следует

$$|(\varphi_1, \psi)| \leqslant \sqrt{nm \operatorname{Im}\lambda_1 \operatorname{Im}\lambda_2} \sum_{j=1}^{n-1} a_n^j \sum_{k=0}^{m-1} b_m^k\, |\varphi|\,|\psi|. \quad (6.12)$$

Точно так же выводится соотношение

$$|(\varphi, \psi_1)| \leqslant \sqrt{nm \operatorname{Im}\lambda_1 \operatorname{Im}\lambda_2} \sum_{j=0}^{n-1} a_n^j \sum_{k=1}^{m-1} b_m^k\, |\varphi|\,|\psi|. \quad (6.13)$$

Сопоставляя неравенства (6.10), (6.12) и (6.13), получаем:

$$|(\varphi,\ \psi)| \leqslant \frac{2\sqrt{nm\,\mathrm{Im}\,\lambda_1\,\mathrm{Im}\,\lambda_2}}{|\lambda_1-\overline{\lambda}_2|}\times$$
$$\times\left(1+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} a_n^j \sum_{k=0}^{m-1} b_m^k+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} a_n^j \sum_{k=1}^{m-1} b_m^k\right)|\varphi||\psi|,$$

откуда очевидным образом следует оценка (6.9).

Совершенно аналогично доказывается, что если неравенство (6.9) имеет место в случае $m_\varphi=n-1$, $m_\psi=1$, то оно имеет место и при $m_\varphi=n$, $m_\psi=1$. В этом случае доказательство упрощается, ибо $\psi_1=0$.

Наконец, при $m_\varphi=m_\psi=1$ векторы φ и ψ являются собственными векторами оператора A, отвечающими соответственно собственным числам λ_1 и λ_2, т. е. $\varphi_1=\psi_1=0$. Поэтому в этом случае неравенство (6.9) следует из (6.10). Кстати, отметим, что для последнего случая неравенство (6.9) устанавливалось также при доказательстве теоремы 4.1.

Лемма доказана.

В качестве непосредственного следствия из леммы 6.2 получаем следующее предложение.

Теорема 6.1 (А. С. Маркус [2]). *Пусть λ_1 и λ_2 — два собственных числа конечного порядка диссипативного оператора A. Тогда для минимального угла между соответствующими корневыми подпространствами $\mathfrak{L}_{\lambda_1}$ и $\mathfrak{L}_{\lambda_2}$ имеет место оценка*

$$\cos\varphi\,(\mathfrak{L}_{\lambda_1},\ \mathfrak{L}_{\lambda_2}) \leqslant \frac{2\sqrt{m_{\lambda_1}m_{\lambda_2}\,\mathrm{Im}\,\lambda_1\,\mathrm{Im}\,\lambda_2}}{|\lambda_1-\overline{\lambda}_2|}\sum_{j=0}^{m_{\lambda_1}-1} a_1^j \sum_{k=0}^{m_{\lambda_2}-1} a_2^k,$$

где

$$a_k=\frac{2\sqrt{2}\,(m_{\lambda_k}-1)\,\mathrm{Im}\,\lambda_k}{|\lambda_1-\overline{\lambda}_2|}\qquad (k=1,\ 2).$$

2. Основным предложением настоящего параграфа является теорема:

Теорема 6.2 (А. С. Маркус [2]). *Пусть A — ограниченный диссипативный оператор с $A_{\mathcal{J}}\in\mathfrak{S}_\infty$, обладающий* *последовательностью собственных чисел* $\{\lambda_j\}_1^\infty$ $(\lambda_k \neq \lambda_j,$ $k \neq j)$.

Если выполнены условия

$$\sum_{j,\,k=1;\; j\neq k}^{\infty} m_j m_k \frac{\operatorname{Im}\lambda_j \operatorname{Im}\lambda_k}{|\lambda_j-\bar{\lambda}_k|^2}<\infty \qquad (m_j=m_{\lambda_j}), \tag{6.14}$$

$$\varlimsup_{\substack{j,\,k\to\infty\\ j\neq k}} (m_j-1)\frac{\operatorname{Im}\lambda_j}{|\lambda_j-\bar{\lambda}_k|}<\frac{1}{2\sqrt{2}}, \tag{6.15}$$

то последовательность соответствующих корневых подпространств $\{\mathfrak{L}_{\lambda_k}\}_1^\infty$ *образует базис своей замкнутой линейной оболочки* $\mathfrak{E}$, *квадратично близкий к ортогональному, а последовательность* $\{\varphi_j\}_1^\infty$, *полученная объединением ортонормированных базисов подпространств* $\mathfrak{L}_{\lambda_k}$ $(k=1, 2, \ldots)$, *образует базис пространства* $\mathfrak{E}$, *эквивалентный ортонормированному.*

Если же выполняется условие (6.15) *и усиленное условие*

$$\sum_{j,\,k=1;\; j\neq k}^{\infty} \min(\nu_{\lambda_j}, \nu_{\lambda_k})\, m_j m_k \frac{\operatorname{Im}\lambda_j \operatorname{Im}\lambda_k}{|\lambda_j-\bar{\lambda}_k|^2}<\infty\ ^{*)}, \tag{6.16}$$

то последовательность $\{\varphi_k\}_1^\infty$ *является базисом подпространства* $\mathfrak{E}$, *квадратично близким к ортонормированному* **).

Доказательство. Так же, как и в доказательстве теоремы 4.1, без ограничения общности можно считать все числа λ_j $(j=1, 2, \ldots)$ невещественными. В этом случае все подпространства $\mathfrak{L}_{\lambda_j}$ конечномерны.

Из условия (6.15) следует, что множество чисел

$$M_{jk}=\sum_{r=1}^{m_j-1} a_{jk}^r \qquad (j,\ k=1, 2, \ldots;\ j\neq k),$$

где

$$a_{jk}=\frac{2\sqrt{2}\,(m_j-1)\operatorname{Im}\lambda_j}{|\lambda_j-\bar{\lambda}_k|} \qquad (j,\ k=1, 2, \ldots;\ j\neq k)$$

---

*) См. сноску к теореме 4.1.

**) Если $\sup\limits_j m_j<\infty$, то условие (6.15) является излишним.

ограничено. Следовательно, в силу теоремы 6.1

$$\cos\varphi(\mathfrak{L}_{\lambda_j}, \mathfrak{L}_{\lambda_k}) \leqslant M^2 \frac{2\sqrt{m_k m_j \operatorname{Im}\lambda_j \operatorname{Im}\lambda_k}}{|\lambda_j - \bar{\lambda}_k|} \tag{6.17}$$
$$(j, k = 1, 2, \ldots; j \neq k),$$

где $M = \sup\limits_{j, k} M_{jk}$.

Таким образом, если выполняется условие (6.14), то

$$\sum_{j, k=1; j\neq k}^{\infty} \cos^2\varphi(\mathfrak{L}_{\lambda_j}, \mathfrak{L}_{\lambda_k}) < \infty,$$

и стало быть, в этом случае в силу теоремы 5.3 и предложений 1° § 4 и 5° § 5 последовательность подпространств $\{\mathfrak{L}_{\lambda_j}\}$ образует базис $\mathfrak{E}$, квадратично близкий к ортогональному, а последовательность $\{\varphi_j\}_1^\infty$, являющаяся объединением ортонормированных базисов всех подпространств $\mathfrak{L}_{\lambda_j}$ $(j = 1, 2, \ldots)$, образует базис $\mathfrak{E}$, эквивалентный ортонормированному.

Если же выполняется условие (6.16), то в силу (6.17)

$$\sum_{j, k=1; j\neq k}^{\infty} \min(\nu_{\lambda_j}, \nu_{\lambda_k}) \cos^2\varphi(\mathfrak{L}_{\lambda_j}, \mathfrak{L}_{\lambda_k}) < \infty,$$

а следовательно, согласно предложениям 6° § 5 и 1° § 4 последовательность $\{\varphi_j\}_1^\infty$ образует базис подпространства $\mathfrak{E}$, квадратично близкий к ортонормированному.

Теорема доказана.

Замечание 6.1. Теорема остается в силе, если в ее условиях (6.14), (6.16) нижний предел суммирования, равный единице, заменить любым конечным пределом.

Замечание 6.2. С точки зрения обобщения известных положений линейной алгебры было бы более естественным выбирать в каждом корневом подпространстве $\mathfrak{L}_{\lambda_j}$ базис из векторов, образующих жордановы цепочки, и выяснять условия, при которых объединение этих базисов образует базис подпространства $\mathfrak{E}$. Однако, как показывают простые примеры, уже в случае $m_{\lambda_k} \geqslant 3$ $(k = 1, 2, \ldots)$ никакие условия, накладываемые только на собственные числа λ_k $(\operatorname{Im}\lambda_k > 0)$ диссипативного оператора A и на соответствующие числа m_{λ_k}, ν_{λ_k} $(k = 1, 2, \ldots)$, не являются достаточными для того, чтобы указанное объединение цепочек образовывало базис подпространства $\mathfrak{E}$.

Замечание 6.3. Нетрудно убедиться, что доказательство теоремы 6.2 сохраняет силу для замкнутого оператора A, имеющего вид $A = G + iH$, где G — самосопряженный, а H — неотрицательный вполне непрерывный оператор. В этом случае для выполнения условий (6.14) и (6.15) достаточно, чтобы оператор $H \in \mathfrak{S}_1$ и

$$\inf_{j,\, k;\; j \neq k} |\lambda_k - \lambda_j| = \delta\ (> 0).$$

В самом деле, так как

$$\sum_{j=1}^{\infty} m_{\lambda_j} \operatorname{Im} \lambda_j \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \nu_{\lambda_j} \operatorname{Im} \lambda_j \leqslant \operatorname{sp} H,$$

то

$$\sum_{j,\, k=1;\; j \neq k}^{\infty} m_{\lambda_j} m_{\lambda_k} \frac{\operatorname{Im} \lambda_j \operatorname{Im} \lambda_k}{|\lambda_j - \bar{\lambda}_k|^2} \leqslant \delta^{-2} (\operatorname{sp} H)^2$$

и

$$\lim_{\substack{j,\, k \to \infty \\ j \neq k}} \frac{m_{\lambda_j} \operatorname{Im} \lambda_j}{|\lambda_j - \bar{\lambda}_k|} = 0.$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

Агмон Ш. (Agmon S.)

1. On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems, Comm. pure and appl. Math. 15, 1962, 119—148.

Аллахвердиев Д. Э.

1. О полноте системы собственных и присоединенных элементов несамосопряженных операторов, близких к нормальным, ДАН, **115**, № 2 (1957), 207—210.
2. О скорости приближения вполне непрерывных операторов конечномерными операторами, Уч. зап. Азерб. ун-та, 2, 1957, 27—35.

Амир-Моэз А. Р. (Amir-Moéz A. R.)

1. Extreme properties of eigenvalues of a hermitian transformation and singular values of the sum and product of linear transformations, Duke Math. J., **23** (1956), 463—476.

Амир-Моэз А. Р. и Хорн А. (Amir-Moéz A. R. and Horn A).

1. Singular values of a matrix, Amer. Math. Monthly (1958), 65, N 10, 742—748.

Аронштайн Н. и Смит Р. Дж. (Aronszajn N. and Smith R. J.)

1. Invariant subspaces of completely continuous operators, Ann. Math., **60** (1954), 316—320 (имеется русский перевод в журнале «Математика», Сборн. перев., 2, № 1 (1958)).

Аскеров Н. Г., Крейн С. Г. и Лаптев Г. И.

1. Об одном классе несамосопряжённых краевых задач, ДАН, 155, № 3 (1964), 499—502.

Ахиезер Н. И. и Глазман И. М.

1. Теория линейных операторов, Гостехиздат, М.—Л., 1950.

Ахиезер Н. И. и Крейн М. Г.

1. О некоторых вопросах теории моментов, Харьков, 1938.

Бабенко К. И.

1. О сопряженных функциях, ДАН, **62**, № 2 (1948), 157—160.

Банах С.

1. Курс функціонального аналізу, Радяньска школа, Київ, 1948.

Бари Н. К.

1. О базисах в гильбертовом пространстве, ДАН, 54 (1946), 383—386.
2. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве, Уч. зап. МГУ, 4, вып. 148 (1951), 69—107.
3. Тригонометрические ряды, Физматгиз, 1961.

Бишоп Е. (Bishop E.)

1. A duality theorem for an arbitrary operator, Pacific J. Math., 9, 2 (1959), 379—397.

Боас Р. П. (Boas R. P.)

1. A general moment problem, Amer. J. Math., 63, N 2 (1941), 361—370.

Бродский М. С.

1. Характеристические матрицы-функции линейных операторов, Матем. сб., 39 (81): 2 (1956), 179—200.
2. Об одной задаче И. М. Гельфанда, УМН, 12, вып. 2 (74) (1957), 129—132.
3. Об интегральном представлении ограниченных несамосопряженных операторов с вещественным спектром, ДАН, 126, № 6 (1959), 1166—1169.
4. О треугольном представлении некоторых операторов с вполне непрерывной мнимой частью, ДАН, 133, № 6 (1960), 1271—1274.
5. О треугольном представлении вполне непрерывных операторов с одной точкой спектра, УМН, 16, вып. 1 (97) (1961), 135—141.

Бродский М. С., Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. и Мацаев В. И.

1. О некоторых новых исследованиях по теории несамосопряженных операторов, Труды IV Всесоюзного матем. съезда, т. II. 1964.

Бродский М. С. и Лившиц М. С.

1. Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы, УМН, 13, вып. 1 (79) (1958), 3—85.

Беллман Р. (Bellman R.)

1. Multiplicative inequalities obtained from additive inequalities. Amer. Math. Monthly, 65, N 9 (1958), 693—694.

Вейль Г. (Weyl H.)

1. Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen, Math. Ann., 71 (1912), 441—479.
2. Inequalities between the two kinds of eigenvalues of a linear transformation, Proc. Acad. Sci. USA, 35 (1949), 408—411.

Вейц Б. Е.

1. О некоторых свойствах базисов безусловной сходимости, УМН, 17, вып. 6 (108) (1962), 135—142.

Виландт X. (Wielandt H.)

1. An extremum property of sums of eigenvalues, Proc. Amer. Math. Soc., 6, N 1 (1955), 106—110.

Вольф Ф. (Wolf F.)

1. Operators in a Banach space which admit a generalised spectral decomposition, Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math., 19 (1957), 302—311.

Гамбургер Г. Л. (Hamburger H. L.)

1. Über die Zerlegung des Hilbertschen Raumes durch vollstetige lineare Transformationen, Math. Nachr., 4 (1950/51) 56—69.

Гантмахер Ф. Р.
1. Теория матриц, Гостехиздат, 1954.
Гантмахер Ф. Р. и Крейн М. Г.
1. Осцилляционные матрицы, ядра и малые колебания механических систем, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
Гапошкин В. Ф.
1. Одно обобщение теоремы М. Рисса о сопряженных функциях, Матем. сб., 46 (88) : 3 (1958), 359—372.
Гельфанд И. М.
1. Замечание к работе Н. К. Бари «Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве», Уч. зап. МГУ, 4, вып. 148 (1951), 224—225.
Гельфанд И. М. и Виленкин Н. Я.
1. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, Физматгиз, 1961.
Гельфонд А. О.
1. О росте собственных значений однородных интегральных уравнений, Приложение к книге: Ловитт У. В., Линейные интегральные уравнения, Гостехиздат, 1957.
2. Sur l'ordre de D (λ), C. R. Paris, 192, (1931), 828.
Гинзбург Ю. П.
1. О J-нерастягивающих оператор-функциях, ДАН, 117, № 2 (1957).
Глазман И. М.
1. О разложимости по системе собственных элементов диссипативных операторов, УМН, 13, вып. 3 (81) (1958), 179—181.
Гохберг И. Ц.
1. О линейных операторах, аналитически зависящих от параметра, ДАН, 78, № 4 (1951), 629—632.
Гохберг И. Ц. и Крейн М. Г.
1. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, УМН, 12, вып. 2 (74) (1957), 43—118.
2. О вполне непрерывных операторах со спектром, сосредоточенным в нуле, ДАН, 128, № 2 (1959), 227—230.
3. К теории треугольного представления несамосопряженных операторов, ДАН, 137, № 5 (1961), 1034—1038.
4. О вольтерровых операторах с мнимой компонентой того или иного класса, ДАН, 139, № 4 (1961), 779—781.
5. О проблеме факторизации операторов в гильбертовом пространстве, ДАН, 147, № 2 (1962), 279—282.
6. Об одном критерии полноты системы корневых векторов сжатия, УМН, т. 16, вып. 1 (1963), 78—82.
7. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения, Изд-во «Наука», М., 1966.
8. О факторизации операторов в гильбертовом пространстве, Acta Sci. Math. Szeged, 25, 1—2, (1964), 90—123.
Гохберг И. Ц. и Маркус А. С.
1. Об устойчивости базисов банаховых и гильбертовых пространств, Изв. АН МССР, № 5 (1962), 17—35.

2. О некоторых неравенствах между собственными числами и матричными элементами линейных операторов. Изв. АН МССР, № 5 (1962), 103—108.
3. Некоторые соотношения между собственными числами и матричными элементами линейных операторов. Матем. сб., 64 (106): 4 (1964), 481—496.

Данфорд Н. (Dunford N.)
1. A survey of the theory of spectral operators, Bull. Amer. Math. Soc., **64**, N 5 (1958), 217—274 (имеется русский перевод в журнале «Математика», Сборн. перев., 4, № 1 (1960), 53—100).

Данфорд Н. и Шварц Дж. Т. (Dunford N. and Schwartz J. T.)
1. Линейные операторы. Общая теория, ИЛ, М., 1962.
2. Linear operators. Part II: Spectral theory. Self-adjoint operators in Hilbert space, New York — London, 1963.

Даффин Р. (Duffin R.)
1. A minimax theory for overdamped networks, J. Rational Mech. and Analisis, 4, N 2 (1955), 221—233.

Диксмье Ж. (Dixmier J.)
1. Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (Algèbres de von Neumann), Gauthier—Villars, 1957, Paris.

Дольберг М. Д.
1. О разложении позитивного ядра в билинейный ряд, ДАН, **120** № 5 (1958), 945—948.
2. О связях наибольшей жесткости. Зап. матем. отд. физ.-мат. ф-та ХГУ и Харьковского матем. о-ва, **25**, серия 4 (1957), 179—190.

Дольф К. Л. (Dolph C. L.)
1. Recent developments in some non-self-adjoint problems of mathematical physics, Bull. Amer. Math. Soc., **67**, N 1 (1961), 1—69 (имеется русский перевод: «Математика». Сборн. перев., 7, 1 (1963), 79—136).

Иохвидов И. С.
1. О спектрах эрмитовых и унитарных операторов в пространстве с индефинитной метрикой, ДАН, **71**, № 2 (1950), 225—228.

Иохвидов И. С., Крейн М. Г.
1. Спектральная теория операторов в пространстве с индефинитной метрикой. I, Труды Моск. матем. о-ва, **5** (1956), 368—432.

Калкин Дж. В. (Calkin J. W.)
1. Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space, Ann. Math., **42**, N 4 (1941), 839—873

Кальдерон А. П. и Зигмунд А. (Calderon A. P. and Zygmund A.)
1. A note on the interpolation of sublinear operations, Amer. Math. J., **78** (1956), 282—288.

Карлеман Т. (Carleman T.)
1. Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion, Acta Math., **41** (1918), 377—384.

2. Zur Theorie der linearen Integralgleichungen, Math. Zeitschrift, 9 (1921), 196—217.

Картрайт М. (Cartwright M.)

1. On certain integral functions of order I, Quarterly J. Math. (Oxford ser.), 7 (1936), 46—55.

Като Т. (Kato T.)

1. Fractional powers of dissipative operators, J. Math. Soc. Japan 13 (1961), 246—274.

Келдыш М. В.

1. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений, ДАН, 77, № 1 (1951), 11—14.
2. Об одной тауберовой теореме, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 38 (1951), 77—86.

Келдыш М. В. и Лидский В. Б.

1. Вопросы спектральной теории несамосопряженных операторов. Труды IV Всесоюзного матем. съезда, т. I (1963), 101—120.

Колмогоров А. Н.

1. Über die beste Annaherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse. Ann. Math. 37 (1936), 107—110.

Коренблюм Б. И.

1. Общая тауберова теорема для отношения функций, ДАН, 88, № 5, (1953), 745—748.

Кох Х. (von Koch H.)

1. Sur quelques points de la théorie des déterminants infinis, Acta math., 24 (1900), 89—122.
2. Sur la convergence des déterminants infinies, Rend. Palermo 28 (1909), 255—266.

Крейн М. Г.

1. О характеристических числах дифференцируемых симметрических ядер, Матем. сб., 2 (44): 4 (1937), 725—732.
2. О нагруженных интегральных уравнениях, функции распределения которых не монотонны, Сборник памяти акад. Граве (1940), 88—103.
3. К теории целых функций экспоненциального типа, Изв. АН СССР, сер. матем., 11 (1947), 309—326.
4. Об обратных задачах для неоднородной струны, ДАН, 82, № 5 (1952), 669—672.
5. Об одном обобщении исследований Стильтьеса, ДАН, 87, № 6 (1952), 881—884.
6. О формуле следов в теории возмущений, Матем. сб., 33 (75): 3 (1953), 597—626.
7. О базисах Бари пространства Гильберта, УМН, 12, вып. 3 (75) (1957), 333—341.
8. О признаках полноты системы корневых векторов диссипативного оператора, УМН, 14, вып. 3 (87) (1959), 145—152.
9. К теории линейных несамосопряженных операторов, ДАН, 130, № 2 (1960), 254—256.
10. Про лінійні цілком неперервні оператори в функціональних просторах з двома нормами, Сб. трудов матем. АН УССР, № 9 (1947), 104—129.

11. Об одном новом применении принципа неподвижной точки в теории операторов в пространстве с индефинитной метрикой, ДАН, 154, № 5 (1964), 1023—1026.
12. Об определителях возмущения и формуле следов для унитарных и самосопряженных операторов, ДАН 144, № 2 (1962), 268—271,

Крейн М. Г., Красносельский М. А. и Мильман Д. П.
1. О дефектных числах линейиых операторов в банаховом пространстве и о некоторых геометрических вопросах, Сб. трудов ин-та матем. АН УССР, № 11 (1948), 97—112.

Крейн М. Г. и Лангер Г. К.
1. К теории квадратичных пучков самосопряженных операторов, ДАН, 154, № 6 (1964), 1258—1261.
2. О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуумов. Труды международного симпозиума по применению теории функций комплексного переменного в механике сплошной среды. Изд-во «Наука», 1965.

Крейн М. Г. и Рутман М. А.
1. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, УМН, 3, вып. 1 (23) (1948), 3—95.

Крейн С. Г.
1. О колебаниях вязкой жидкости в сосуде, ДАН, 159, № 2 (1964).

Курода С. Т. (Kuroda S. T.)
1. On a theorem of Weyl—von Neumann, Proc. Japan Acad. 34 (1958), 11—15.
2. On a generalization of the Weinstein—Aronszajn formula and the infinite determinant, Scientific Papers of the College of General Education, University of Tokyo, 11, 1 (1961), 1—12.

Лангер Г. (Langer H.)
1. Ein Zerspaltungssatz für Operatoren im Hilbertraum, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 12, 3—4 (1961), 441—445.
2. Über die Wurzeln eines maximalen dissipativen Operators, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 13, 3—4 (1962), 415—424.
3. О J-эрмитовых операторах, ДАН, 134, № 2 (1960), 263—266.

Левин Б. Я.
1. Распределение корней целых функций, Гостехиздат, 1956.
2. О вполне непрерывных несамосопряженных операторах, Сб. трудов Харьковского ин-та инж. ж.-д. транспорта им. С. М. Кирова, вып. 35 (1959), 5—23.

Лившиц М. С.
1. Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве. Матем. сб., 19 (61): 2 (1946), 236—260.
2. О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов, Матем. сб., 34 (76): 1 (1954), 145—198.
3. Теория несамосопряженных операторов и ее применения. Труды III Всесоюзного математического съезда, т. III (1956), 269—276.

Лидский В. Б.
1. О собственных значениях суммы и произведения симметрических матриц, ДАН, 75, № 6 (1950), 769—772.

2. О полноте системы собственных и присоединенных функций несамосопряженного дифференциального оператора, ДАН, **110**, № 2 (1956), 172—175.
3. О полноте системы собственных и присоединенных элементов вполне непрерывного оператора, ДАН, **115** (1957), № 2, 234—236.
4. Теоремы о полноте системы собственных и присоединенных элементов оператора с дискретным спектром, ДАН, **119**, № 6 (1958), 1088—1091.
5. Условия полноты системы корневых подпространств у несамосопряженных операторов с дискретным спектром, Труды Моск. матем. о-ва, 8 (1959), 84—220.
6. Несамосопряженные операторы, имеющие след, ДАН, **125**, № 3 (1959), 485—488.
7. О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов, ДАН, 132, № 2 (1960), 275—278.
8. О разложении в ряд Фурье по главным функциям несамосопряженного эллиптического оператора, Матем. сб., **57** (99): 2 (1962), 137—150.
9. О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов, Труды Моск. матем. о-ва, т. 11 (1962).

Лорч Е. Р. (Lorch E. R.)
1. Bicontinuous linear transformations in certain vector spaces, Bull. Amer. Math. Soc., **45**, N 8 (1939), 564—569.

Любич Ю. И.
1. Почти периодические функции в спектральном анализе операторов, ДАН, **132**, № 3 (1960), 518—520.
2. Об условиях полноты системы собственных векторов корректного оператора, УМН, 18, вып. 1 (109) (1963), 165—171.

Любич Ю. И. и Мацаев В. И.
1. К спектральной теории линейных операторов в банаховом пространстве, ДАН, 131, № 1 (1960), 21—23.
2. Об операторах с отделимым спектром, Матем. сб., **56** (98): 4 (1962), 433—468.

Люстерник Л. А. и Соболев В. И.
1. Элементы функционального анализа, Гостехиздат, М.— Л., 1951.

Лянце В. Э.
1. Некоторые свойства идемпотентных операторов, Теоретическая и прикладная математика, Львов, вып. 1, 1959, 16—22.

Мазуркевич С. (Mazurkiewicz, St.)
1. Sur le déterminant de Fredholm. II. Les noyau dérivables, C. R. des séances de la Soc. des Sc. de Varsovie, 8, 1915, 805—810.

Макки Дж. В. (Mackey G. W.)
1. Commutative Banach algebras, Multigraphed Harvard lecture notes, edited by A. Blair, 1952.

Мальцев А. И.
1. Основы линейной алгебры, изд. 2-е, М., Гостехиздат, 1956.

Маркус А. С.
1. О голоморфных оператор-функциях, ДАН, **119**, № 6 (1958), 1099—1102.
2. О базисе из корневых векторов диссипативного оператора, ДАН, **132**, № 3 (1960), 524—527.
3. О разложении по корневым векторам слабо возмущенного самосопряженного оператора, ДАН, **142**, № 3 (1952), 538—541.
4. О собственных и сингулярных числах суммы и произведения линейных операторов, ДАН, **146**, № 1 (1962), 34—36.
5. О некоторых признаках полноты системы корневых векторов линейного оператора и суммируемости рядов по этой системе, ДАН, **155**, № 4 (1964), 753—756.
6. Собственные и сингулярные числа суммы и произведения линейных операторов, УМН, **19**, вып. 4 (118) (1964), 93—123.

Мацаев В. И.
1. О росте целых функций, допускающих некоторые оценки снизу, ДАН, **132**, № 2 (1960), 283—286.
2. Об одном классе вполне непрерывных операторов, ДАН, **139**, № 3 (1961), 548—552.
3. О вольтерровых операторах, получаемых возмущением самосопряженных, ДАН, **139**, № 4 (1961), 810—814.
4. Об одном методе оценки резольвент несамосопряженных операторов, ДАН, **154**, № 5 (1964), 1034—1037.
5. Несколько теорем о полноте корневых подпространств вполне непрерывных операторов, ДАН, **155**, № 2 (1964), 273—276.

Мацаев В. И. и Палант Ю. А.
1. О степенях ограниченного диссипативного оператора, Укр. матем. журнал, **14**, № 3 (1962), 329—337.

Мирский Л. (Mirsky L.)
1. Matrices with prescribed characteristic roots and diagonal elements, J. Lond. Math. Soc., **33** (part I), N 129, 1958, 14—21.
2. Remark on an existence theorem in matrix theory due to A. Horn, Monatshefte für Math., **63**, 3, 1959.

Митягин Б. С.
1. Нормированные идеалы промежуточного типа, Изв. АН СССР, сер. матем., **28**, № 4 (1964), 819—832.

Митягин Б. С. и Шварц А. С.
1. Функторы в категориях банаховых пространств, УМН, **19**, вып. 2 (116) (1964), 65—130.

Мукминов Б. Р.
1. О разложении по собственным функциям диссипативных ядер, ДАН, **99**, № 4 (1954), 499—502.

С.-Надь Б. (Sz.-Nagy B.)
1. Perturbations des transformations autoadjointes dans l'espace de Hilbert, Comm. Math. Helvetici, **19** (1947), 347—366.
2. Perturbations des transformations linéaires fermées, Acta Sci. Math., **14**, N 2 (1951), 125—137.

С.-Надь Б. и Фояш Ч. (Sz.-Nagy B. et Foias C.)
1. Sur les contractions de l'espace de Hilbert. III, Acta Sci. Math. Szeged, **19**, 1—2 (1958), 26—45.

2. Sur les contractions de l'espace de Hilbert. IV, Acta Sci. Math. Szeged, **21**, 3—4 (1960), 251—259.
3. Sur les contractions de l'espace de Hilbert. V, Translations bilatérales, Acta Sci. Math. Szeged, **23**, 1—2 (1962), 106—129.
4. Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VI, Calcul fonctionnel, Acta Sci. Math. Szeged, **23**, 1—2 (1962), 130—167.

Наймарк М. А.
1. О некоторых признаках полноты системы собственных и присоединенных векторов линейного оператора в гильбертовом пространстве, ДАН, **98**, № 5 (1954), 727—730.
2. Линейные дифференциальные операторы, Гостехиздат, 1954.
3. Спектральный анализ несамосопряженных операторов, УМН, **11**, вып. 6 (72) (1956), 183—202.

Нейман Дж. (von Neuman J.)
1. Some matrix inequalities and metrization of matrix space, Известия ин-та математики и механики при Томском гос. ун-те, **1** (1937), 286—300.

Орлич В. (Orlicz W.)
1. Über unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen, Studia Math. II, 4 (1933), 41—47.

Островский А. (Ostrowski A.)
1. Sur quelques applications des fonctions convexes et concaves au sens de I. Schur, Journal des Math. pures et appl., **31** (1952), 253—292.

Палант Ю. А.
1. Об одном признаке полноты системы собственных и присоединенных векторов полиномиального пучка операторов, ДАН, **141**, № 3 (1961), 558—560.

Параска В. И.
1. Об асимптотике собственных и сингулярных чисел линейных операторов, повышающих гладкость. Матем. сб. 68 (110): 4 (1965), 621—631.

Пойа Д. (Polya G.)
1. Remark on Weyl's note «Inequalities between the two kinds of eigenvalues of a linear transformation», Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **36**, N 1 (1950), 49—51.

Поляцкий В. Т.
1. О приведении к треугольному виду квазиунитарных операторов, ДАН, 113, № 4 (1957).

Понтрягин Л. С.
1. Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой, Изв. АН СССР, серия матем., 8 (1944), 243—280.

Потапов В. П.
1. Мультипликативная структура у нерастягивающих матриц-функций. Труды Моск. матем. о-ва, 4 (1955), 125—236.

Привалов И. И.
1. Граничные свойства аналитических функций, Гостехиздат, М.— Л., 1950.

Рисс М. (Riesz M.)
1. Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionelles linéaires, Acta Math., 49 (1926), 465—497.

2. Sur les fonctions conjuguées, Math. Z., **27** (1927), 218—244.

Рисс Ф. и С.-Надь Б.

1. Лекции по функциональному анализу, М., ИЛ. 1954.

Сахнович Л. А.

1. О приведении несамосопряженных операторов к треугольному виду, Изв. высших учебных заведений, Математика, № 1 (8) (1959), 180—186.
2. Исследование «треугольной модели» несамосопряженных операторов, Изв. высших учебных заведений, Математика, № 4 (11) (1959), 141—149.

Смирнов В. И.

1. О граничных значениях функций, регулярных вне круга, Журнал Ленинградск. физ.-матем. о-ва, **2** (1929), 22—37.

Стайнспринг В. Ф. (Stinespring W. F.)

1. A sufficient condition for an integral operator to have a trace, Journ. reine und angew. Math., **200**, N 3—4 (1958), 200—207.

Стоун М. (Stone M.)

1. Linear transformations in Hilbert space, New York, 1932.

Титчмарш Е. К. (Titchmarsh E. C.)

1. Теория функций, Гостехиздат, 1951.

Тихомиров В. М.

1. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений, УМН, **15**, вып. 3 (93) (1960), 81—120.

Уэрмер Дж. (Wermer J.)

1. The existence of invariant subspaces, Duke Math. J., 19, N 4 (1952), 615—622.
2. Commuting spectral measures on Hilbert space, Pacific J. Math., 4 (1954), 355—361.

Фаге М. К.

1. Спрямление базисов в гильбертовом пространстве, ДАН, **74**, № 6 (1950), 1053—1956.

Фань Цюй (Ky Fan)

1. On a theorem of Weyl concerning eigenvalues of linear transformations I, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **35**, N 11 (1949), 652—655.
2. On a theorem of Weyl concerning eigenvalues of linear transformations II, Proc. Nat. Acad Sci. USA, **36**, N 1 (1950), 31—35.
3. Maximum properties and inequalities for the eigenvalues of completely continuous operators, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **37** (1951), 760—766.
4. A minimum property of the eigenvalues of a hermitian transformation. Eigenvalues of a sum of hermitian matrices, Amer. Math. Monthly, **60**, N1 (1953), 48—50.

Филлипс Р. С. (Phillips R. S.)

1. Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations, Trans Amer. Math. Soc., **90** (1959), 193—254.

Фредгольм И. (Fredholm I.)

1. Sur une classe d'équations fonctionnelles. Acta math., **27** (1903), 365—390.

Х а р д и Г.
1. Расходящиеся ряды, М., ИЛ, 1951.
Х а р д и Г., Л и т т л в у д Дж. и П о й а Д.
1. Неравенства, М., ИЛ, 1948.
Х е й м а н В. К. (Hayman W. K.)
1. Questions of regularity connected with the Phragmen—Lindelöf principle, Journ. de Math. pures et appliquées, 35, 2 (1956), 115—126.
Х и л л е Э. (Hille E.), Т а м а р к и н (Tamarkin J. D.)
1. On the characteristic values of linear integral equations, Acta Mathematica, 57 (1931), 1—76.
Х о р н А. (Horn A.)
1. On the singular values of a product of completely continuous operators, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 36 (1950), 374—375.
2. On the eigenvalues of a matrix with prescribed singular values, Proc. Amer. Math. Soc., 5, N 1 (1954), 4—7.
3. Doubly stochastic matrices and the diagonal of a rotation matrix, Amer. J. Math., 76, N 3 (1954), 620—630.
Ш т р а у с А. В.
1. Характеристические функции линейных операторов, Изв. АН СССР, сер. матем., 24 (1960), 43—74.
Ш э т т е н Р. (Schatten R.)
1. A theory of cross-spaces, Princeton, 1950.
2. Norm ideals of completely continuous operators, Berlin—Göttingen — Heidelberg, 1960.
Ш и С у н ь - ч ж а н (Shin-Hsun Chang).
1. On the distribution of the characteristic values and singular values of linear integral equations, Trans. Amer. Math. Soc., 67, N 2 (1949), 351—367.
Ш у р И. (Schur I.)
1. Über die characteristischen Wurzeln einer linearen Substitution mit einer Anwendung auf die Theorie der Integralgleichungen, Math. Annalen, 66 (1909), 488—510.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ