CAUCHY'S PROBLEM FOR HYPERBOLIC EQUATIONS

Lectures

by

L. Gårding

Winter and Spring Quarters, 1957
University of Chicago

NOTES COMPILED WITH THE ASSISTANCE
OF G. BERGENDAL

БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА «МАТЕМАТИКА»

Л. ГОРДИНГ

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Перевод с английского
Б. П. ПАНЕЯХА

Под редакцией
А. А. ДЕЗИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1961

АННОТАЦИЯ

Публикуемые лекции известного шведского математика Л. Гординга посвящены задаче Коши для общего гиперболического уравнения произвольного порядка. В заключительном параграфе рассмотрены гиперболические системы первого порядка. Используемые методы (рассмотрение левой части уравнения как оператора в том или ином функциональном пространстве) позволяют получить в указанной задаче весьма общие и законченные результаты.

Книга будет интересна для математиков — студентов, аспирантов и научных работников, — в первую очередь для тех, кто занимается дифференциальными уравнениями и функциональным анализом.

Редакция литературы по математическим наукам

Л. Гординг

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Редактор *В. Ф. Широков* Художник *Г. Скачков*
Художественный редактор *В. Шаповалов*
Технический редактор *Л. Харьковская* Корректор *Е. С. Терентьева*

Сдано в производство 19/IX 1960 г. Подписано к печати 16/XII 1960 г
Бум. $84\times108^1/_{32}$=3,9 бум. л. 6,3 печ. л.
Уч.-изд. л. 5,3. Изд. №1/5281 Цена 37 к. Зак. 585

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Московская типография № 5 Мосгорсовнархоза.
Москва, Трехпрудный пер., 9.

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Публикуемые лекции известного шведского математика Ларса Гординга представляют собой, по замыслу автора, первые две из четырех глав задуманной им монографии, посвященной задаче Коши для гиперболических уравнений и систем. Эти лекции посвящены одному уравнению произвольного порядка. К ним приложено начало третьей главы, присланное автором дополнительно, где рассмотрен случай системы первого порядка.

Изучение задачи Коши для общих гиперболических уравнений и систем было начато И. Г. Петровским. Ему же принадлежит и само общее определение гиперболичности. Уже первоначальное исследование Петровского было весьма полным, и дальнейшее развитие теории связано не столько с получением глубоких новых результатов, сколько с усовершенствованием методов доказательств. Шагом вперед в этом направлении было появление монографии Лере [10]. Публикуемая работа дает, по всеобщему признанию, дальнейшее существенное продвижение.

Для развития теории задачи Коши оказалось характерным все более широкое привлечение методов, получивших название «функциональных», при которых левая часть уравнения рассматривается как оператор, действующий в подходящем функциональном пространстве. Одновременное использование пространств обобщенных функций Соболева—Шварца позволило, с одной стороны, упростить доказательство существования решения, обойдя использование теоремы Ковалевской, а с другой —

сделать формулировки настолько общими, что, например, существование функции Грина для задачи Коши получается как частный случай из основных теорем, гарантирующих разрешимость уравнения.

К сказанному нам хотелось бы добавить некоторые замечания о манере изложения, избранной автором. По его собственному признанию, построение аппарата, необходимого для изучения задачи Коши в максимальной общности, со скрупулезным описанием допустимых классов коэффициентов, правых частей и т. п., является весьма «скучным», и он порой стремится оживить изложение путем неформальных замечаний и образных терминов, частично утраченных, к сожалению, в переводе. Вводный параграф является методическим экспериментом; оценка его будет, по-видимому, вопросом вкуса. На всем протяжении книги изложение является весьма обстоятельным. Ранее почти весь этот материал был конспективно изложен автором примерно на 10 страницах [6].

Мы надеемся, что эти лекции будут с интересом встречены широким кругом читателей-математиков.

А. А. Дезин

ПРЕДИСЛОВИЕ

Целью настоящих лекций является доказательство основных теорем существования, относящихся к задаче Коши для гиперболических уравнений. Ранее это было сделано дважды, сначала Петровским, а впоследствии Лере в его лекциях в Принстоне; однако в этом вопросе возникают значительные технические трудности, что может оправдать иную трактовку предмета. Нашим основным инструментом будут интегралы энергии, связанные с разделяющими гиперболическими операторами, введенными Лере. Существенно новой является замена теоремы Коши—Ковалевской некоторым неравенством, которое упрощает теорию и уточняет результаты. В специальных случаях этот подход использовали Фридрихс, Лакс и Ладыженская. Новым является также применение частично сопряженных операторов, что проливает свет на задачу Коши для обобщенных функций. В первой главе мы имеем дело исключительно с задачей Коши для обыкновенного дифференциального оператора с обобщенными функциями в качестве начальных данных и решения. Эта глава была включена из педагогических соображений; во всяком случае, для автора такое изложение было методическим экспериментом.

Во второй главе излагается теория для случая одного гиперболического оператора. Эта глава является разработкой моей статьи [6] и в настоящем виде во многом следует докладу Лере на летнем съезде Итальянского математического общества в 1956 г

Первоначальный план предполагал включение глав о гиперболических системах и распространение теории на многообразия и нелинейные уравнения. Эти материалы будут опубликованы в других работах. Результаты здесь несколько более точные, чем в лекциях Лере, и содержат новые доказательства неравенств, представляющих собой основу статьи Петровского. В сочетании с недавней работой Куранта и Лакса [1] об особенностях функции Грина они дают довольно полную теорию задачи Коши.

Несмотря на то, что с помощью этой теории удалось достаточно глубоко проникнуть в основные свойства решений гиперболических уравнений, в физических задачах полученные результаты не особенно полезны. Дело в том, что большинство физических проблем приводит к смешанным граничным задачам, которые до сих пор не получили адэкватной математической трактовки.

Глава 1

ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

1. Некоторые линейные пространства. Пусть X — сепарабельное банахово пространство, а X' — сопряженное к нему относительно двойственности $\langle x, x' \rangle$ [1]). Без всяких ссылок мы будем в дальнейшем использовать два варианта теоремы Хана — Банаха. Линейное множество A называется плотным в X, если из $\langle A, x' \rangle = 0$ следует $x' = 0$. В одной из формулировок теоремы Хана — Банаха утверждается, что X является сильным замыканием любого такого множества A, т. е. что для каждого элемента $x \in X$ можно найти в A последовательность $\{x_k\}_1^\infty$, для которой $|x - x_k| \to 0$ при $k \to \infty$. Другая формулировка: рассмотрим в X' линейное множество A', (слабо) плотное в том смысле, что из $\langle x, A' \rangle = 0$ следует $x = 0$; тогда X' является слабым замыканием множества A', т. е. для любого заданного $x' \in X'$ можно найти последовательность $\{x_k'\}_1^\infty \in A'$, такую, что $|x_k'| \leqslant |x'|$ и $\langle x, x_k' \rangle \to \langle x, x' \rangle$ для всех $x \in X$. Если X рефлексивно, т. е. $X = X''$, то X' является также и сильным замыканием A', однако в общем случае нерефлексивного пространства X это неверно.

Пусть $V = V_t$ — переменный интервал $0 \leqslant x \leqslant t$. Мы ограничим изменение t конечным промежутком, скажем $0 < t \leqslant 1$. Все рассматриваемые функции определены в V. Для производной d/dx мы используем символ D_1; если $h \in C^k$, то через $D^k h(x)$ будем обозначать набор чисел $\{D_1^i h(x)\}_0^k$, полагая при этом

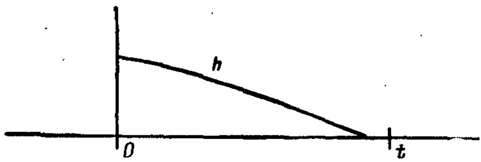
$$|D^k h(x)| = \sum_i |D_1^i h(x)|.$$

---

[1]) Иными словами, X' — пространство всех линейных функционалов на X, а $\langle x, x' \rangle$ — значение линейного функционала $x' \in X'$ на элементе $x \in X$. — *Прим. перев.*

Пусть C_0^k — подпространство функций $h \in C^k$, для которых $D^k h(t) = 0$ (см. фиг. 1). Вводя норму

$$|D^k h|_\infty = \sup |D^k h(x)|,$$



Фиг. 1. Функции из C_0^k.

мы превращаем C_0^k в банахово пространство. Норма

$$|D_1^k h|_\infty = \sup |D_1^k h(x)|$$

эквивалентна исходной, ибо, согласно теореме о среднем значении,

$$|D_1^i h(x)| \leqslant |D_1^k h|_\infty, \quad i < k.$$

Иными словами, линейный оператор D_1^k гомеоморфно отображает C_0^k на замкнутую часть C_0^0. (Поскольку уравнение $D_1^k u = f \in C_0^0$ всегда имеет решение

$$u(x) = \int_t^x \frac{(x-z)^{k-1}}{(k-1)!} f(z)\, dz,$$

эта часть совпадает со всем C_0^0, но мы делаем вид, что не знаем этого.) Тот факт, что нормы $|D^{k+1} h|_\infty$ и $|D^k D_1 h|_\infty$ в C_0^{k+1} эквивалентны, можно интерпретировать аналогичным образом, говоря, что оператор D_1 отображает подпространство C_0^{k+1} линейно и гомеоморфно на замкнутую часть C_0^k. И здесь элементарная теория интегрирования показывает, что эта часть совпадает со всем C_0^k.

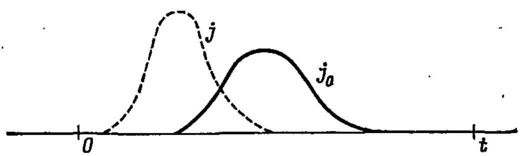
2. Сопряженные пространства. Регуляризация. Следуя Л. Шварцу, мы будем изучать сопряженные пространства, когда двойственность определяется как расширение интеграла

$$(f, h) = \int_0^t f(x) \overline{h(x)}\, dx. \tag{1}$$

Введем пространство C_0^{-k}, сопряженное к C_0^k. Это обозначение показывает, что мы должны различать пространство C_0^{-0} и пространство C_0^0 всех непрерывных функций, обращающихся в нуль при $x=t$. Если в (1) функция f интегрируема, то (f, h) — сопряженно-линейный функционал над любым C_0^k. Множество всех функций $f \in C = C^\infty$, обращающихся в нуль в окрестности точек 0 и t, (слабо) плотно в каждом из C_0^{-k}. Дуальной нормой в C_0^{-k} является

$$|D^{-k} f|_1 = \sup \frac{|(f, h)|}{|D^k h|_\infty}, \quad h \in C_0, \tag{2}$$

ибо пространство C_0 всех функций $h \in C$, равных пулю в окрестности точки t, плотно в C_0^k для любого k. Полное пространство C_0^{-k} получается как слабое замыкание множества элементов с ограниченной нормой (2).



Фиг. 2. Функция $j(x)$.

Переходя к описанию C_0^{-k}, скажем предварительно несколько слов о регуляризации. Пусть $j_0 \geqslant 0$ — функция из C, равная нулю в окрестности точек 0 и t, причем

$$\int j_0(x)\, dx = 1;$$

положим

$$j(x) = \varepsilon^{-1} j_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad 0 < \varepsilon < 1$$

(см. фиг. 2). Введем операторы осреднения

$$J^{\pm} h(x) = \int h(x \mp y)\, j(y)\, dy = \int j(\pm(x-z))\, h(z)\, dz.$$

Рассмотрим, в частности, $J^- h$ для $h \in C_0^k$. Ясно, что $J^- h$ также принадлежит пространству C_0^h (на самом деле даже пространству C_0) и что

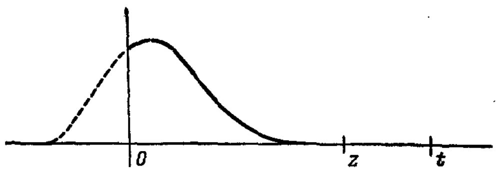
$$|D^k J^- h|_\infty = \sum_i \sup_x \left| \int D_1^i h(x+y)\, j(y)\, dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant |D^k h|_\infty \int j(y)\, dy = |D^k h|_\infty . \tag{3}$$

Положим $z = x + y$. Тогда $J^- h$ можно записать в виде

$$J^- h(x) = \int j(z-x)\, h(z)\, dz, \tag{4}$$

где функция $j_z(x) = j(z-x)$ имеет график, указанный



Фиг. 3. Функция $j_z(x)$.

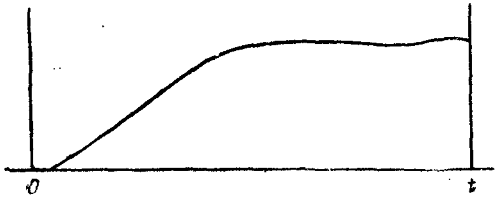
на фиг. 3, и принадлежит C_0. Умножая (4) на непрерывную функцию f и интегрируя, получим

$$(f, J^- h) = \int (f, j_z)\, \overline{h(z)}\, dz, \tag{5}$$

где

$$(f, \dot{j}_z) = \int f(x)\, j(z-x)\, dx = \int f(z-y)\, j(y)\, dy = J^+ f(z)$$

является функцией из C, равной нулю в окрестности начала координат.



Фиг. 4. Функция $J^+ f(z)$.

С помощью предельного перехода можно заключить, что для любой $f \in C_0^{-k}$ выполняется (5) и $J^+ f = (f, j_z)$ является функцией из C, равной нулю в окрестности начала координат. В самом деле, возьмем последовательность функций $\{f_n\}_1^\infty$, сходящуюся к f. Тогда легко видеть, что (f_n, j_z) сходится ограниченно к функции (f, j_z), обладающей требуемыми свойствами. Проверка этого факта проводится непосредственно, и мы ее опускаем.

Покажем, что для любых $h \in C_0^k$ и $f \in C_0^{-k}$

$$(J^+ f, h) \to (f, h) \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{6}$$

В самом деле, имеем, очевидно,

$$(J^+ f, h) - (f, h) = (f, J^- h - h),$$

где

$$J^- h(x) - h(x) = \int (h(x+y) - h(x))\, j(y)\, dy.$$

Следовательно,

$$|D^k (J^- h - h)|_\infty \leqslant \sup_x \sup_{y \in \varepsilon T} |D^k h(x+y) - D^k h(x)|,$$

где T — носитель функции j_0. Поскольку правая часть стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, наше утверждение доказано.

Мы видели, что любой функционал $f \in C_0^{-k}$ является пределом функций $J^+ f$. Но как охарактеризовать f явным образом? Рассмотрим сначала случай $k = 0$. Тогда совокупность всех f вида

$$(f, h) = \sum a_k \overline{h(x_k)} \qquad \text{(сумма—конечная)}$$

образует (слабо) плотное линейное подмножество в пространстве C_0^{-0}. Следуя Дираку, запишем f в виде

$$f = \sum a_k \delta(x - x_k).$$

Классический результат Рисса, который мы докажем в одном из следующих пунктов, утверждает, что произвольный элемент $f \in C_0^{-0}$ представим в виде «сгущения» δ-функций. Этот результат можно записать так:

$$(f, h) = F(+0)\overline{h(0)} + \int_0^l \overline{h(x)}\, dF(x), \tag{7}$$

где F — функция ограниченной вариации.

В более общем случае пространства C_0^{-k} все функционалы вида

$$(f, h) = \sum a_k \overline{D_1^k h(x_k)}$$

образуют (слабо) плотное линейное подмножество. Произвольный элемент f этого пространства имеет вид

$$F(+0)\,\overline{D_1^k h(0)} + \int_0^t \overline{D_1^k h(x)}\, dF(x).$$

Это следует из (7), если заметить, что (f, h) непрерывно зависит от $D_1^k h \in C_0^0$. Конечно, с помощью интегрирования по частям последнему выражению можно придать другие формы.

3. Лемма («зародыш» теории). Обозначим через N^0 пространство всех непрерывных слева функций ограниченной вариации, определенных в открытом интервале $0 < x < t$, с нормой

$$|f|_{N^0} = |f(+0)| + \operatorname{var} f.$$

Сходимость в N^0 является поточечной и равномерной сходимостью в интервале $0 < x < t$, ибо $|f|_\infty \leqslant |f|_{N^0}$. Легко видеть, что N^0 является банаховым пространством. Мы будем использовать следующую теорему Хелли. Ограниченная последовательность $\{f_k\}_1^\infty$ в N^0 имеет слабый предел $f \in N^0$,

$$(f_k, h) \to (f, h), \quad h \in C_0^0,$$

для которого $|f|_{N^0} \leqslant \overline{\lim}\, |f_k|_{N^0}$. По сути дела важно лишь то, что эта предельная функция имеет ограниченную вариацию. Изменяя значения f в счетном множестве точек, мы можем добиться ее непрерывности слева.

Следующая лемма является, в известном смысле, «зародышем» всей теории.

Лемма 3.1. *Если f принадлежит некоторому C_0^{-k}, то*

$$|f|_{N^0} = \sup \frac{|(f, D_1 h)|}{|h|_\infty}, \qquad h \in C_0, \tag{1}$$

в том смысле, что если правая часть конечна, то f можно отождествить с функцией из N^0, для которой выполняется равенство (1).

Доказательство. Пусть $J^{\pm}$ — два рассмотренных выше (см. п. 2) осреднения. Тогда $J^{-}C_0 \subset C_0$, причем

$$(f, D_1 J^{-} h) = (J^{+} f, D_1 h)$$

и

$$|h|_\infty \geqslant |J^{-} h|_\infty.$$

Обозначая правую часть (1) через A, мы получим, таким образом,

$$\sup \frac{|(J^{+} f, D_1 h)|}{|h|_\infty} \leqslant A.$$

Рассмотрим левую часть этого неравенства. Она имеет вид

$$\sup \frac{\left|\int D_1 J^{+} f(x) \overline{h(x)}\, dx\right|}{|h|_\infty} = \int_0^l |D_1 J^{+} f(x)|\, dx = |J^{+} f|_{N^0}.$$

(Это соотношение со знаком $\leqslant$ выполняется очевидным образом. Для получения равенства достаточно выбрать $h \to \exp i \arg D_1 J^{+} f$.) Следовательно,

$$|J^{+} f|_{N^0} \leqslant A.$$

По теореме Хелли, мы можем выбрать последовательность функций $J^{+} f$, сходящуюся к некоторой $f \in N^0$, такой, что

$$(f, h) = \lim (J^{+} f, h) = \int f(x) \overline{h(x)}\, dx.$$

Кроме того, эта функция f удовлетворяет неравенству

$$|f|_{N^0} \leqslant A.$$

Тем самым утверждение леммы доказано со знаком $\leqslant$. Чтобы получить равенство, рассмотрим правую часть (1). По определению, интеграл $(f, D_1 h)$ есть предел

$$\lim \sum_0^n f(x_k) \left(\overline{h(x_{k+1})} - \overline{h(x_k)}\right),$$

где $0 < x_0 < \ldots < x_{n+1} = t$ обозначает разбиение, максимальная из длин интервалов которого стремится к нулю. Переписывая ту же сумму в виде

$$-f(x_0)\overline{h(x_0)} - \sum_0^n (f(x_{k+1}) - f(x_k))\overline{h(x_{k+1}^-)},$$

убеждаемся, что это выражение мажорируется величиной $|h|_\infty |f|_{N^0}$, откуда $A \leqslant |f|_{N^0}$. Лемма доказана.

4. Некоторые следствия. Только что доказанная лемма имеет интересные следствия. Во-первых, ее можно использовать (весьма искусственно) вместо элементарной теории интегрирования при доказательстве того, что

оператор D_1 является линейным гомеоморфизмом $C_0^{k+1} \to \to C_0^k$.

Мы уже знаем, что D_1 гомеоморфно отображает C_0^{k+1} на замкнутую часть C_0^k; остается доказать, что эта часть совпадает со всем пространством. Но это очевидно. Наша лемма фактически утверждает, что если $f \in C_0^{-k}$ обладает тем свойством, что

$$(f, D_1 C_0) = 0, \quad C_0 \subset C_0^k,$$

то $f = 0$. Следовательно, D_1 дает нам цепочку линейных гомеоморфизмов

$$\ldots C_0^2 \longleftrightarrow C_0^1 \longleftrightarrow C_0^0. \tag{1}$$

Пусть теперь $\boxed{D_1^0}$ обозначает сопряженный к D_1 оператор, так что

$$(D_1^0 f, h) = (f, D_1 h).$$

Полагая $h \in C_0^k$, $f \in C_0^{-k+1}$ и $D_1^0 f \in C_0^{-k}$, мы видим, что (1) соответствует цепочке линейных гомеоморфизмов

$$C_0^{-0} \longleftrightarrow C_0^{-1} \longleftrightarrow C_0^{-2} \longleftrightarrow \ldots,$$

определяемой оператором D_1^0.

Второе следствие леммы состоит в том, что к этой цепочке мы можем добавить еще одно звено

$$N^0 \longleftrightarrow C_0^{-0}.$$

Для доказательства заметим, во-первых, что функция $u \in C$ определяет элемент $D_1^0 u$ в пространстве C_0^{-0} посредством отношения

$$(D_1^0u,\ h) = (u,\ D_1h) = -u(0)\,\overline{h(0)} - (D_1u,\ h),$$

где правая часть имеет смысл для любого $h\in C_0^0$. Если это выражение обращается в нуль для всех $u\in C$, у которых $u(0)=0$, то наша лемма (для перевернутого[1]) интервала V) означает, что $h=0$. Следовательно, множество D_1^0C оказывается слабо плотным в C_0^{-0}, а потому любой элемент $f\in C_0^{-0}$ можно аппроксимировать такой последовательностью $\{D_1^0u_k\}_1^\infty$, что величины

$$\sup\frac{|(D_1^0u_k,\ h)|}{|h|_\infty} = |u_k|_{N^0}$$

ограничены. Выделяя подпоследовательность, мы установим, что уравнение

$$(D_1^0u,\ h) = (u,\ D_1h) = (f,\ h)$$

имеет решение $u\in N^0$. По лемме это решение единственно и удовлетворяет соотношению

$$|u|_{N^0} = |D^{-0}f|_1 = \sup\frac{|(f,\ h)|}{|h|_\infty} \qquad (h\in C_0).$$

С другой стороны, лемма утверждает, что если $u\in N^0$, то равенство $(D_1^0u,\ h)=(u,\ D_1h)$ может быть распространено на элемент $f\in C_0^{-0}$ с нормой, равной $|u|_{N^0}$. Этим наше утверждение доказано. Отсюда уже нетрудно получить теорему Рисса. Действительно, имеем

$$(u,\ D_1h) = \lim\sum_0^n u(x_k)\left(\overline{h(x_{k+1})} - \overline{h(x_k)}\right) =$$

$$= -\lim\left(u(x_0)\,\overline{h(x_0)} + \sum_0^n \overline{h(x_{k+1})}\left(u(x_{k+1}) - u(x_k)\right)\right),$$

и последний предел равен, по определению,

$$u(+0)\,\overline{h(0)} + \int_0^l \overline{h(x)}\,du(x).$$

---

[1]) Перевернутым (reversed) интервалом здесь и в дальнейшем называется интервал, концы которого меняются ролями.— *Прим. пер.*

Следовательно, выражение

$$h(0)\,\overline{u(+0)}+\int_0^t h(x)\,\overline{du(x)}, \qquad u\in N^0,$$

представляет собой общий вид линейного функционала над пространством C_0^0. Пользуясь тем, что оператор D_1^k отображает C_0^k линейным гомеоморфным образом на C_0^0, мы находим общий вид линейного функционала над пространством C_0^k, именно

$$D_1^k h(0)\,\overline{u(+0)}+\int_0^t D_1^k h(x)\,\overline{du(x)}, \qquad u\in N^0$$

Отсюда нетрудно видеть, что выражение

$$D_1^k h(0)\,\overline{u(+0)}+\int_0^t D_1^k h(x)\,\overline{du(x)}+\sum_0^k c_i D_1^i h(t)$$

представляет собой общий вид линейного функционала над пространством C^k. В детали этого мы входить не будем, так как эта формула в дальнейшем не используется.

5. **Задача Коши.** Мы показали, что оператор D_1^0 индуцирует цепочку гомеоморфизмов

$$N^0\longleftrightarrow C_0^{-0}\longleftrightarrow C_0^{-1}\longleftrightarrow\ldots, \tag{1}$$

где N^0, C_0^{-0}, C_0^{-1}, ... образуют расширяющуюся последовательность пространств:

$$N^0\subset C_0^{-0}\subset C_0^{-1}\subset\ldots$$

Мы можем ожидать, что оператор, обратный к D_1^0, окажется сглаживающим. Это может быть подтверждено рассмотрением решения u уравнения

$$D_1^0 u=f\in C_0^{-0},$$

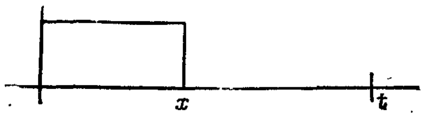
правая часть которого — заданная функция, например, из C^0. Последнее равенство означает, что

$$(u,\,D_1 h)=(f,\,h)=\int f(x)\,\overline{h(x)}\,dx.$$

Устремляя h к ступенчатой функции (см. фиг. 5), мы получим

$$u(x) = \int_0^x f(y)\,dy,$$

как что $u \in C^1$ и обращается в нуль в начале координат.



Фиг. 5. Ступенчатая функция.

Если функция $f \in C^k$, то решение u принадлежит C^{k+1}. Если, более общо, положить

$$(f, h) = \int g(x)\,\overline{h(x)}\,dx + c\overline{h(0)}, \tag{2}$$

то функция

$$u(x) = c + \int_0^x g(y)\,dy \tag{3}$$

будет решением классической задачи Коши

$$D_1 u = g, \qquad u(0) = c. \tag{4}$$

Если при этом $g \in C^k$, то $u \in C^{k+1}$. Следовательно, оператор D_1 определяет цепочку линейных гомоморфизмов

$$\ldots C^2 \to C^1 \to C^0,$$

причем ядро отображения каждый раз состоит лишь из констант. Обобщая, мы можем считать функцию g в соотношении (2) только интегрируемой. Тогда функция u, задаваемая посредством (3), абсолютно непрерывна и является решением задачи (4) с оговоркой, что равенство $D_1 u = g$ выполняется лишь почти всюду.

В дальнейшем мы сосредоточим свое внимание на получении цепочек того же типа, что (1), точнее, их первого звена. Выбирая подходящим образом f в равенстве (2), мы придем тогда к теории задачи Коши в ее классической форме. Прежде чем перейти к гиперболическим уравнениям, мы построим с помощью обыкновенного дифференциального оператора $a = a_0 D_1^{m+1} + \ldots$ модель теории. Этот оператор, в частности, может иметь вид $a = D_1$ и достаточно сложен, чтобы дать хорошую картину общего случая.

6. Другая лемма. Мы начнем с того, что приведем один вариант леммы 3.1. Обозначим через Lip^1 множество всех комплексных функций, удовлетворяющих условию Липшица.

Лемма 6.1. *Пусть* $a_0 \in \mathrm{Lip}^1$ *и* $a_0^{-1} \in \mathrm{Lip}^1$, *и пусть* $f \in C_0^{-0}$. *Тогда имеет место эквивалентность*

$$|f|_{N^0} \sim \sup \frac{|(f, a_0 D_1 h)|}{|h|_\infty}, \qquad h \in C_0. \tag{1}$$

Замечание. Обе части в (1) могут быть бесконечными, но если одна часть конечна, то и другая также конечна. Если, в частности, правая часть конечна, то f можно отождествить с функцией из N^0, для которой выполняется соотношение (1).

Доказательство. Согласно лемме 3.1, линейный функционал $\bar{a}_0 f \in C_0^{-0}$, заданный с помощью равенства $(\bar{a}_0 f, h) = (f, a_0 h)$, определяется некоторой функцией из N^0, для которой

$$|\bar{a}_0 f|_{N^0} = \text{правой части (1)}.$$

Остается доказать, что

$$|bf|_{N^0} \sim |f|_{N^0},$$

где $b = \bar{a}_0$. Имеем

$$\begin{aligned} |bf|_{N^0} = |b(0) f(+0)| + \sup \sum |b(x_{k+1}) f(x_{k+1}) - b(x_k) f(x_k)| \leqslant \\ \leqslant c|f(+0)| + c \sup \sum |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + \\ + \sum c(x_{k+1} - x_k) |f(x_{k+1})| \leqslant c|f|_{N^0} + c|f|_\infty \leqslant 2c|f|_{N^0}. \end{aligned}$$

Замена b на b^{-1} завершает доказательство леммы.

7. Основное неравенство («модель-лоцман»). Пусть

$$a = a(x, D) = a_0(x) D_1^{m+1} + a_1(x) D_1^m + \ldots + a_{m+1}(x)$$

— линейный дифференциальный оператор порядка $m+1$, определенный в интервале V, и пусть $Pa = a_0(x)D_1^{m+1}$ — его главная часть. Предположим, что функции a_0, a_0^{-1} принадлежат Lip^1 и что $a_1, \ldots$ принадлежат Lip^0 (т. е. классу всех ограниченных измеримых функций). Оператору a мы поставим в соответствие линейно-сопряженно-линейные формы

$$a^k f(x)\overline{g(x)} = a_0 D_1^k f(x)\overline{D_1^{m+1-k} g(x)} + \sum b_{pq}(x) D_1^p f(x)\overline{D_1^q g(x)},$$

где $k=0, \ldots, m$ и $p \leqslant k$, $q \leqslant m-k$. Функции b_{pq} принадлежат Lip^0 и не обязательно связаны с оператором a. Если $k=0$, то $a^0 f\overline{g} = f\overline{Ag}$, где оператор A имеет ту же главную часть, что и a. В частности, функции b_{pq} можно выбрать таким образом, чтобы в этом случае $A=a$. Введем теперь новое переменное $\overline{x}$ и положим $\overline{D} = d/d\overline{x}$. С помощью двойного дифференциального оператора

$$a^k(x, D, \overline{D}) = a_0(x) D_1^k \overline{D}_1^{m+1-k} + \sum b_{pq}(x) D_1^p \overline{D}_1^q$$

мы можем записать форму $a^k f(x)\overline{g(x)}$ в виде

$$a^k f(x)\overline{g(x)} = [a^k(x, D, \overline{D}) f(x)\overline{g(\overline{x})}]_{\overline{x}=x}.$$

Операторы $a^0, \ldots, a^m$ являются, в известном смысле, частично сопряженными к a, причем a^0 по существу будет истинным сопряженным оператором. Положим

$$(a^k f, g) = \int a^k f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

и

$$|D^{k-m} a^k f|_1 = \sup \frac{|(a^k f, h)|}{|D^{m-k} h|_\infty}, \qquad h \in C_0. \tag{1}$$

Пусть N^0, как и раньше, обозначает пространство всех функций ограниченной вариации, а L^0 — пространство интегрируемых функций с нормой

$$|f|_1 = \int_0^t |f(x)|\,dx.$$

Рассмотрим пространства $N^1, N^2, \ldots$ и $L^1, L^2, \ldots$ последовательных интегралов из N^0 и L^0. Точнее, N^k (L^k)

будет состоять из тех функций f, у которых $D_1^k f \in N^0$ ($D_1^k f \in L^0$). Вводя нормы

$$|f|_{N^k} = |D^k f|_{N^0} = \sum_{i \leq k} |D_1^i f|_{N^0} \tag{2}$$

и

$$|f|_{L^k} = |D^k f|_1 = \sum_{i \leq k} |D_1^i f|_1, \tag{3}$$

мы превращаем N^k и L^k в банаховы пространства. Обычным путем можно проверить, что нормы

$$|D_1^k f|_{N^0} + |D^{k-1} f(0)| \tag{4}$$

и

$$|D_1^k f|_1 + |D^{k-1} f(0)| \tag{5}$$

эквивалентны нормам (2) и (3) соответственно.

Докажем теперь следующее фундаментальное соотношение, в котором обе части могут не быть конечны.

Теорема 7.1. *Для* $f \in N^k$ *и* $k = 0, \ldots, m$

$$|D^k f|_{N^0} \sim |D^{k-1} f(0)| + |D^{k-m} a^k f|_1. \tag{6}$$

При $k = 0$ *первый член справа отсутствует.*

Доказательство. Докажем сначала теорему для случая, когда оператор

$$a = Pa = a_0 D_1^{m+1}$$

однороден. Имеем

$$|D^{k-m} a^k f|_1 = \sup \frac{|(a_0 D_1^k f,\ D_1^{m+1-k} h)|}{|D^{m-k} h|_\infty}.$$

Правая часть этого соотношения эквивалентна выражению

$$\sup \frac{|(a_0 D_1^k f,\ D_1 h)|}{|h|_\infty},$$

которое в свою очередь, по лемме 6.1, эквивалентно $|D_1^k f|_{N^0}$, так что

$$|D^{k-m} a^k f|_1 + |D^{k-1} f(0)| \sim |D_1^k f|_{N^0} + |D^{k-1} f(0)|.$$

Поскольку правая часть здесь эквивалентна $|D^k f|_{N^0}$, теорема доказана в случае однородного оператора. Для перехода к общему случаю мы воспользуемся простой леммой, которая будет неоднократно применяться и в дальнейшем.

Лемма 7.1. *Пусть ϱ и σ — две неотрицательные неубывающие функции. Тогда неравенство*

$$\varrho(t) \leqslant c \int_0^t \varrho(s)\,ds + \sigma(t)$$

влечет за собой

$$\varrho(t) \leqslant e^{ct}\sigma(t).$$

Доказательство. Запишем исходное неравенство в виде

$$\varrho \leqslant cI\varrho + \sigma,$$

где $I\varrho = \int_0^t \varrho(s)\,ds$. Интегрируя и умножая на c, получим

$$cI\varrho \leqslant c^2I^2\varrho + cI\sigma.$$

Отсюда

$$\varrho \leqslant c^2I^2\varrho + (cI + 1)\,\sigma.$$

Продолжая этот процесс, мы найдем, что

$$\varrho \leqslant c^{n+1}I^{n+1}\varrho + (1 + cI + \ldots + c^nI^n)\,\sigma.$$

Легко видеть, что выражение

$$c^{n+1}I^{n+1}\varrho = c^{n+1} \int_0^t \frac{(t-s)^n}{n!}\,\varrho(s)\,ds$$

стремится к нулю при $n \to \infty$, а второй член правой части мажорируется функцией $e^{ct}\sigma(t)$. Тем самым лемма доказана.

Возвращаясь к доказательству теоремы, определим форму $b^kf\bar{h}$ так, что

$$a^kf\bar{h} = Pa^kf\bar{h} + b^kf\bar{h}.$$

Тогда имеет место неравенство

$$|(b^kf, h)| \leqslant c\,|D^kf|_1\,|D^{m-k}h|_\infty.$$

Если теперь через σ мы обозначим правую часть (1), а через σ_1 то же выражение, но с Pa^k вместо a^k, то получим

$$\sigma_1(t) - c\,|D^k f|_1 \leqslant \sigma(t) \leqslant \sigma_1(t) + c\,|D^k f|_1.$$

Мы уже видели, что

$$\varrho = |D^k f|_{N^0} \sim \sigma_1 + |D^{k-1} f(0)|.$$

Кроме того, имеет место очевидное неравенство

$$|D^k f|_1 = \int_0^t |D^k f(s)|\,ds \leqslant \int_0^t \varrho(s)\,ds.$$

Значит,

$$\sigma(t) + |D^{k-1} f(0)| \leqslant c\varrho(t) + c\int_0^t \varrho(s)\,ds$$

и

$$\sigma(t) + |D^{k-1} f(0)| \geqslant c^{-1}\varrho(t) - c\int_0^t \varrho(s)\,ds.$$

Комбинируя последнее неравенство с леммой 7.1, мы приходим к желаемому результату.

Замечание. Неравенства в теореме не являются независимыми. Все они могут быть получены из соотношения

$$|f|_{N^0} \sim |D^{-m} a^0 f|_1, \tag{7}$$

совпадающего с (6) для $k=0$, если применить его к $D_1 f$, $D_1^2 f, \ldots$. На деталях мы не будем останавливаться.

8. Следствие. Задача Коши. С помощью фундаментального соотношения, доказанного в предыдущем пункте (см. теорему 7.1), мы можем получить теперь весьма полную теорию задачи Коши. Докажем вначале следующую теорему.

Теорема 8.1. *Если $u \in N^0$, то $a^0 u \in C_0^{-m}$, причем*

$$|u|_{N^0} \sim |D^{-m} a^0 u|_1. \tag{1}$$

Уравнение

$$a^0 u = f \in C_0^{-m}$$

имеет единственное решение u *в* N^0.

Замечание. Теорема означает, что оператор a^0 устанавливает линейный гомеоморфизм $N^0 \longleftrightarrow C_0^{-m}$; это соответствует полученному ранее результату, согласно которому D_1^0 — линейный гомеоморфизм $N^0 \longleftrightarrow C_0^{-0}$.

Доказательство. Первая часть утверждения следует из теоремы 7.1 в случае $k=0$. В самом деле, если $u \in N^0$, то, согласно (7.6),

$$(a^0 u,\ h) = (u,\ \bar{a}h).$$

Скалярное произведение в правой части этого равенства определяется интегралом при $h \in C_0^{m+1}$ и допускает ограниченное расширение на пространство C_0^m. Если функция $u \in C^1$, то, интегрируя по частям, можно записать это расширение в виде

$$(a^0 u,\ h) = -\int a_0 D_1 u \overline{D_1^m h}\, dx - \int a_{0,1} u \overline{D_1^m h}\, dx -$$
$$- a_0(0)\, u(0)\, \overline{D_1^m h(0)} + (b^0 u,\ h), \tag{2}$$

где $a_{0,1} = D_1 a_0$. Если $u \in N^0$, то интегралы в правой части понимаются в смысле Стильтьеса. Чтобы доказать, что $a^0 N^0$ совпадает со всем пространством C_0^{-m}, рассмотрим совокупность C' всех функций из C, обращающихся в нуль в окрестности начала координат. Покажем, что $a^0 C'$ слабо плотно в C_0^{-m}. Действительно, пусть функция $h \in C_0^m$ такова, что

$$0 = (a^0 u,\ h), \qquad u \in C'.$$

Записывая правую часть этого равенства в форме (2), мы представим ее в виде

$$-(A^m h,\ u),$$

где оператор A имеет такую же главную часть, как $\bar{a}$. Из теоремы 7.1 для случая $k=m$ и перевернутого интервала V следует, что

$$|D^m h|_{N^0} \sim \sup \frac{|(A^m h,\ u)|}{|u|_\infty} = 0, \quad u \in C',$$

ибо $D^{m-1}h(t)=0$. Отсюда $h=0$, так что a^0C' слабо плотно в пространстве C_0^{-m}. Следовательно, для любого элемента $f\in C_0^{-m}$ можно найти такую последовательность $\{u_k\}_1^\infty\in C'$, что

$$(a^0u_k,\ h)\to(f,\ h)$$

для всех $h\in C_0^m$, причем величины $|D^{-m}a^0u_k|_1$ ограничены одной константой. Значит, величины $|u_k|_{N^0}$ также ограничены. По теореме Хелли мы можем выбрать подпоследовательность $\{u_{k_i}\}$, сходящуюся к функции $u\in N^0$, которая и является решением уравнения $a^0u=f$. Это завершает доказательство.

Последняя теорема дает сильный вариант задачи Коши в том смысле, что особенность правой части f настолько сильна, что может поглотить граничные условия. Если особенность f меньшего порядка, например $f\in C_0^{-k}$, $k<m$, то граничные условия не могут быть поглощены; при этом решение оказывается более регулярным. Пусть Z_k есть k-мерное комплексное пространство со скалярным произведением $(z,\ z')=\sum z_j\overline{z_j'}$, $1\leqslant j\leqslant k$.

Теорема 8.2. *Если $u\in N^k$ $(k=0,\ldots,m)$, то вектор*

$$\{a^ku,\ D^{k-1}u(0)\},\quad D^{k-1}u(0)=(D_1^{k-1}u(0),\ldots,u(0)),\qquad(3)$$

принадлежит пространству $C_0^{k-m}+Z_k$, причем имеет место эквивалентность

$$|D^ku|_{N^0}\sim|D^{k-1}u(0)|+|D^{k-m}a^ku|_1.$$

Уравнение

$$a^ku=f\in C_0^{k-m}$$

с начальными данными

$$D^{k-1}u(0)=D^{k-1}g(0)\in Z_k$$

имеет единственное решение $u\in N^k$.

Замечание. Обозначим (3) через Tu. Теорема фактически утверждает, что оператор T является линейным гомеоморфизмом $N^k\longleftrightarrow C_0^{k-m}\oplus Z_k$. Если оператор $a=Pa$ однородный, то решения уравнения $a^ku=0$ оказываются полиномами степени $<k$.

Доказательство. Первое утверждение является новой формулировкой теоремы 7.1. Интегрируя по частям, получим

$$(a^k u,\ h) = (Pa^k u,\ h) + (b^k u,\ h) =$$
$$= -(Pa^{k+1} u,\ h) - \int a_{0,1} D_1^k u \overline{D_1^{m-k} h} dx +$$
$$+ (b^k u,\ h) - a_0(0)\, D_1^k u(0) \overline{D_1^{m-k} h(0)},$$

где правая часть имеет смысл для любой функции $h \in C_0^{m-k}$, когда $u \in C^{k+1}$. Если $u \in N^k$, то интегралы в правой части понимаются в смысле Стильтьеса. Когда $u \in C'$, сопряженное выражение принимает вид

$$-(A^{m-k} h,\ u),$$

причем операторы A и $\bar{a}$ имеют одинаковые главные части. Предположим теперь, что элемент

$$\{h,\ D^{k-1} g(0)\} \in C_0^{m-k} \oplus Z_k$$

ортогонален $\{a^k u,\ D^{k-1} u(0)\}$ при всех $u \in C$. Это **означает**, что

$$(a^k u,\ h) + (D^{k-1} u(0),\ D^{k-1} g(0)) = 0.$$

Если положить функцию u равной нулю в окрестности начала, то из теоремы 7.1, примененной к перевернутому интервалу V, следует, что

$$|D^{m-k} h|_{N^0} \sim \sup \frac{|(A^{m-k} h,\ u)|}{|D^k u|_\infty} = 0, \qquad u \in C',$$

так как $D^{m-k-1} h(t) = 0$. Отсюда $h = 0$. Далее, из того, что

$$(D^{k-1} u(0),\ D^{k-1} g(0)) = 0$$

при всех $u \in C$, вытекает $D^{k-1} g(0) = 0$. Значит, множество элементов вида

$$Tu = \{a^k u,\ D^{k-1} u(0)\}, \qquad u \in C,$$

слабо плотно в пространстве $C_0^{k-m} \oplus Z_k$. Чтобы получить второе утверждение теоремы, остается построить последовательность $\{Tu_j\}_1^\infty$, слабо сходящуюся к $\{f,\ D^{k-1} g(0)\}$, и применить теорему Хелли к производным $D_1^k u_j$.

Чтобы приблизиться к задаче Коши в ее классической форме, приведем еще один вариант доказанной теоремы. Для этого нам потребуются некоторые новые пространства. Обозначим через B^0 пространство всех ограниченных измеримых функций и рассмотрим последовательность пространств B^1, $B^2, \ldots$, связанных с B^0 следующим образом: $f \in B^k$ тогда и только тогда, когда $D_1^k f \in B^0$. С введением нормы $|D^k f|_\infty = \sup |D^k f(x)|$ множество B^k становится банаховым пространством.

Пусть, далее, L^{-k} обозначает пополнение пространства C по норме

$$|D^{-k} f|_1 = \sup \frac{|(f, h)|}{|D^k h|_\infty}, \qquad h \in C_0.$$

Согласно классическому результату, пространство $L^{-0} = L^0$ состоит из всех интегрируемых функций с нормой

$$|f|_1 = |D^{-0} f|_1 = \int |f(x)|\, dx.$$

Докажем, далее, что каждый функционал f, действующий по правилу

$$(f, h) = (g, D_1^j h), \qquad j \leqslant k, \tag{4}$$

где $g \in L^0$, принадлежит пространству L^{-k}. Для этого воспользуемся осредняющими операторами $J^\pm$, введенными в п. 2. Имеем

$$(J^+ f, h) = (-1)^j (D_1^j J^+ g, h),$$

так что $J^+ f \in C$. Но

$$|D^{-k} (J^+ f - f)|_1 \leqslant |J^+ g - g|_1,$$

и правая часть этого неравенства стремится к нулю при $\to 0$. Отсюда и следует наше утверждение: $f \in L^{-k}$. Оказывается, что пространство, сопряженное к L^{-k}, есть часть пространства B^k, состоящая из функций, для которых

$$D^{k-1} h(t) = 0. \tag{5}$$

Действительно, так как $L^{-k} \supset L^0$, то линейный функционал над L^{-k} на элементах пространства L^0 имеет вид

$$(f, h) = \int f(x) \overline{h(x)}\, dx,$$

где $h \in B^0$. Пусть теперь функция $f \in C$ обращается в нуль в окрестности начала координат. Тогда

$$| D^{-k} D_1^k f |_1 = \sup \frac{|(D_1^k f, g)|}{|D^k g|_\infty} = \sup \frac{|(f, D_1^k g)|}{|D^k g|_\infty} \leqslant |f|_1, \qquad (6)$$

где $g \in C_0$. Согласно определению, величина $(D_1^k f, h)$ ограничена выражением (6) с точностью до постоянного множителя; поэтому она определяет некоторый линейный функционал от f, ограниченный в L^0 и имеющий поэтому вид

$$(D_1^k f, h) = (f, h_k),$$

где $h_k \in B^0$, а функция $f \in C$ равна нулю в окрестности начала координат. Но это и означает, что h имеет ограниченные производные порядка $\leqslant k$ почти всюду и удовлетворяет условию (5).

Обратно, если h обладает всеми указанными свойствами и $|D^k h|_\infty = 1$, то, как легко видеть, справедливо неравенство

$$|(f, h)| \leqslant \sup \frac{|(f, g)|}{|D^k g|_\infty}, \qquad g \in C_0.$$

В заключение введем набор частично сопряженных к a операторов. В п. 7 было определено выражение $(a^k f, h)$. Определим теперь функционал fa^k, т. е. величину (fa^k, h), полагая

$$(fa^k, h) = (f, \bar{a}^k h) = \overline{(\bar{a}^k h, f)}, \qquad k = 0, \ldots, m.$$

В главную часть этого скалярного произведения входят производные функций f и h порядка $m+1-k$ и k соответственно. Порядок производных, образующих группу младших членов, не превышает $m-k$ для f и k для h. Следовательно, выражения $(a^{m+1-k} f, h)$ и (fa^k, h) отличаются друг от друга своими неглавными частями. В разность между ними войдут: от первого выражения — члены, в которых наивысший порядок производных функций f и h равен $m+1-k$ и $k-1$ соответственно, от второго — члены с порядком производных не выше $m-k$ и k.

Сформулируем теперь следующую теорему.

Теорема 8.3. *Если* $u \in L^{k+1}$ $(k = 0, \ldots, m)$, *то* $\{ua^{m-k}, D^k u(0)\}$ *принадлежит пространству* $L^{k-m} \oplus Z_{k+1}$, *кроме того,*

$$|D^{k+1}u|_1 \sim |D^k u(0)| + |D^{k-m} u a^{m-k}|_1. \tag{7}$$

Задача

$$ua^{m-k} = f \in L^{k-m},$$
$$D^k u(0) = D^k g(0) \in Z_{k+1}$$

имеет единственное решение $u \in L^{k+1}$.

Доказательство. Согласно (4), $ua^{m-k} \in L^{k-m}$. Запишем последний член в равенство (7) в виде

$$\varrho(t) = \sup \frac{|(u, \bar{a}^{m-k} h)|}{|D^{m-k} h|_\infty}, \quad h \in C_0.$$

Это выражение мажорируется величиной $c|D^{k+1}u|_1$ и само мажорирует величину

$$c^{-1}|D_1^{k+1} u|_1 - c|D^k u|_1. \tag{8}$$

Положим

$$\sigma(t) = |D_1^{k+1} u|_1$$

и

$$\sigma_1 = |D^k u(0)|.$$

Интегрируя от 0 до t соотношение

$$|D^k u|_\infty \leqslant c|D_1^{k+1} u|_1 + c|D^k u(0)|,$$

где нормы функций берутся по интервалу V_s, $s \leqslant t$, получим

$$|D^k u|_1 \leqslant cI\sigma + c\sigma_1, \qquad I\sigma = \int_0^t \sigma\, ds,$$

так что (8) сводится к неравенству

$$\varrho \geqslant c^{-1}\sigma - cI\sigma - \sigma_1,$$

или

$$\varrho + \sigma_1 \geqslant c^{-1}\sigma - I\sigma,$$

откуда, в силу леммы 7.1,

$$\varrho + \sigma_1 \geqslant c^{-1}\sigma.$$

Следовательно, $\varrho+\sigma_1 \sim \sigma+\sigma_1$, что приводит к соотношению (7), поскольку

$$|D^{k+1} u|_1 \sim \sigma+\sigma_1.$$

Таким образом, первое утверждение теоремы доказано.

Переходя ко второй части теоремы, положим

$$Tu = \{ua^{m-k},\ D^k u(0)\}$$

и покажем, что множество TC сильно плотно в $L^{k-m} \oplus \oplus Z_{k+1}$. Действительно, пусть равенство

$$(ua^{m-k},\ h) + (D^k u(0),\ D^k g(0)) = 0, \qquad u \in C,$$

выполняется для некоторой функции $h \in B^{m-k}$, удовлетворяющей (5), и некоторого вектора $D^k g(0) \in Z_{k+1}$. Положим функцию $u \in C$ равной нулю в окрестности начала координат. Тогда обычным образом из теоремы 7.1 с заменой k на $m-k$ получаем, что

$$|D^k h|_{N^0} \sim \sup \frac{|(\bar{a}^{m-k} h,\ u)|}{|D^k u|_\infty} = 0,$$

так что $h=0$ и, следовательно, $D^k g(0)=0$. Это завершает доказательство.

В случае $k=m$ мы получаем хорошо известный результат, согласно которому задача Коши в ее классической форме

$$au = f \in L^0, \quad D^m u(0) = D^m g(0)$$

имеет единственное решение $u \in L^{m+1}$. Если коэффициенты оператора a достаточно хорошие, то увеличение гладкости правой части влечет увеличение гладкости решения. Нетрудно показать, например, что из условий $f \in C^k$, $a_0, \ldots, a_{m+1} \in C^k$ следует $u \in C^{m+k+1}$. Отметим также, не вдаваясь в подробности, что в этих предположениях оператор a^0 задает линейный гомеоморфизм

$$C^{-k} \longleftrightarrow C^{-m-1-k}.$$

Центральный результат следующей главы, в которой гиперболические уравнения рассматриваются в векторном пространстве, аналогичен теореме 7.1. Это позволит нам в дальнейшем получить ряд утверждений о задаче Коши, соответствующих трем доказанным в настоящем пункте теоремам.

Глава 2

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В ВЕКТОРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В этой главе будет изложена теория задачи Коши ля гиперболических уравнений в векторном простран- тве, тесно примыкающая к модели, построенной в пре- ыдущей главе. В следующей [1]), третьей главе рассмат- иваются гиперболические системы в векторном про- транстве. Излагаемая теория оказывается искусственно граниченной в том смысле, что не сразу видна локаль- ая природа задачи Коши, т. е. ограниченность области ависимости, однако дефект этот устраняется в четвер- ой главе, где уравнения изучаются на многообразиях помощью склеивания локальных решений. Можно сра- у построить теорию задачи Коши на многообразиях, но то приводит к ненужным усложнениям.

1. Энергетические формы. Двойные дифференциаль- ые операторы. Дивергенция. (См. также Хёрмандер [7], тр. 36—39 русск. изд.) Все построения проводятся в дей- твительном ν-мерном пространстве R^ν с координатами $= \{x^k\}_1^\nu$. Для производных мы используем обычные бозначения

$$D\alpha = D_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot D_{\alpha_\varrho}, \qquad D_j = \partial/\partial x^j.$$

уммарный порядок производной будем обозначать че- ез $|\alpha|$. Пусть

$$H = H(f, g) = \sum h_{\alpha\beta}(x)\, D_\alpha f(x)\, D_\beta g(x) \tag{1}$$

— билинейная форма от производных функций f и g, которой суммирование производится независимо по α_i β_j и коэффициенты симметричны относительно пере-

[1]) В настоящем издании публикуются только главы 1 и 2 и ачало главы 3.—*Прим. перев.*

становок внутри каждого из индексов $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_\varrho)$ и $\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_\tau)$. В физике подобные выражения, в которых $f=g$, часто представляют собой плотности энергии. Будем говорить, что порядок формы H (в точке x) равен m, m', если в правой части (1) $|\alpha| \leqslant m$, $|\beta| \leqslant m'$ и найдется по крайней мере один коэффициент, у которого $|\alpha|=m$, и один, у которого $|\beta|=m'$, не обращающиеся в нуль в данной точке.

Пусть $\bar{x}$ обозначает точку пространства $\bar{R}^\nu$, отличного от R^ν. Удобно связать с H двойной дифференциальный оператор

$$K=K(x, \bar{x}, D, \bar{D})=\sum K_{\alpha\beta}(x, \bar{x}) D_\alpha \bar{D}_\beta, \tag{2}$$

где $\bar{D}_\alpha=\bar{D}_{\alpha_1}\cdot\ldots$ и $\bar{D}_k=\partial/\partial\bar{x}^k$. Если тогда

$$K_{\alpha\beta}(x, x)=h_{\alpha\beta}(x),$$

то

$$H(f, \bar{g})=[K(x, \bar{x}, D, \bar{D}) f(x) \overline{g(\bar{x})}]_{\bar{x}=x}. \tag{3}$$

Мы часто будем условно записывать правую часть (3) в виде

$$K(x, D, \bar{D}) f(x) \overline{g(x)} \quad \text{или} \quad Kf\bar{g}. \tag{4}$$

Пусть $\zeta=\{\zeta_k\}_1^\nu$ — комплексный вектор, и пусть

$\zeta=\xi+i\eta$, $\bar{\zeta}=\xi-i\eta$ (ξ, η — действительные векторы)

$$\zeta_\alpha=\zeta_{\alpha_1}\cdot\ldots, \quad \zeta x=\sum \zeta_j x^j.$$

Тогда

$$Ke^{\zeta x}e^{\bar{\zeta}\bar{x}}=K(x, \bar{x}, \zeta, \bar{\zeta})\, e^{\zeta x}e^{\bar{\zeta}\bar{x}},$$

где

$$K(x, \bar{x}, \zeta, \bar{\zeta})=\sum K_{\alpha\beta}(x, \bar{x}) \zeta_\alpha \bar{\zeta}_\beta$$

является характеристическим полиномом оператора K. Поскольку ζ и $\bar{\zeta}$ содержат 2ν действительных независимых переменных, характеристический полином обращается в нуль тогда и только тогда, когда все его коэффициенты равны нулю. Таким образом, соответствие между двойным дифференциальным оператором и его характеристическим полиномом оказывается линейным и взаимно однозначным.

Рассмотрим случай, когда коэффициенты H — постоянные. Пусть $K_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}$. Тогда соответствие между H и K или его характеристическим полиномом $K(\zeta, \bar{\zeta}) = \sum K_{\alpha\beta}\zeta_\alpha \bar{\zeta}_\beta$ линейно и взаимно однозначно. Поэтому $K(\zeta, \bar{\zeta})$ можно рассматривать как характеристический полином оператора H.

Будем говорить, что H является эрмитовым оператором, если он принимает действительные значения при $g = f$, т. е. если

$$H(\bar{g}, f) = \overline{H(f, \bar{g})}$$

для любых f и g. Это эквивалентно тому, что

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\beta\alpha},$$

или, в терминах характеристических полиномов,

$$K(\bar{\zeta}, \zeta) = \overline{K(\zeta, \bar{\zeta})}.$$

Если коэффициенты H — постоянные, то

$$D_k H(f, \bar{g}) = H(D_k f, \bar{g}) + H(f, \overline{D_k g}).$$

Правой части этого равенства соответствует двойной дифференциальный оператор

$$(D_k + \bar{D}_k) K(D, \bar{D})$$

с характеристическим полиномом

$$(\zeta_k + \bar{\zeta}_k) K(\zeta, \bar{\zeta}).$$

Нас будет интересовать случай, когда оператор H представляется в виде дивергенции:

$$H = \sum D_j H_j.$$

Тогда характеристический полином принимает вид

$$K = \sum (\zeta_j + \bar{\zeta}_j) K_j. \tag{5}$$

Имеет место следующая лемма, принадлежащая Л. Хёрмандеру [7]:

Лемма 1.1. *Форма H с постоянными коэффициентами и характеристическим полиномом K тогда и только тогда представима в виде дивергенции, когда выполняется условие*

$$K(\zeta, \bar{\zeta}) = 0 \quad \textit{при} \quad \operatorname{Re}\zeta = 0. \tag{6}$$

Доказательство. Необходимость условия была только что доказана. Для доказательства достаточности заметим, что условие (6) позволяет представить полином K в виде (5). Действительно, полагая $\operatorname{Re}\zeta_k = 0$, $k \neq j$, мы находим, что

$$(\zeta_j + \bar{\zeta}_j) K_j = K. \tag{7}$$

Отсюда, в частности, следует, что полиномы $K_j(i\eta, \overline{i\eta})$ (η действительное) определены однозначно, чего, как легко видеть, нельзя сказать про формы H_j. Например,

$$(\zeta_1 + \bar{\zeta}_1)(\zeta_2 + \bar{\zeta}_2) - (\zeta_2 + \bar{\zeta}_2)(\zeta_1 + \bar{\zeta}_1) = 0.$$

Для нас особый интерес представляет случай эрмитова оператора H, который является линейной комбинацией с действительными коэффициентами форм

$$H_{\alpha\beta}(f, \bar{g}) = D_\alpha f \overline{D_\beta g} + D_\beta f \overline{D_\alpha g}, \qquad |\alpha| = m+1, \ |\beta| = m, \tag{8}$$

соответствующих двойным дифференциальным операторам

$$K_{\alpha\beta}(D, \bar{D}) = D_\alpha \bar{D}_\beta + D_\beta \bar{D}_\alpha \tag{9}$$

с характеристическими полиномами

$$\zeta_\alpha \bar{\zeta}_\beta + \zeta_\beta \bar{\zeta}_\alpha.$$

По лемме каждая такая форма является дивергенцией:

$$H_{\alpha\beta}(f, \bar{g}) = \sum D_j H^j_{\alpha\beta}(f, \bar{g}). \tag{10}$$

Покажем, что формы $H^j_{\alpha\beta}$ могут быть выбраны эрмитовыми и однородными порядка m; m. Действительно, пусть

$$\tau = \sum t_k \zeta_k, \quad \sigma = \sum s_k \zeta_k,$$

где t и s действительны. Имеем

$$\tau^{m+1}\bar{\sigma}^m+\bar{\tau}^{m+1}\sigma^m=(\tau+\bar{\tau})\sum_0^m \tau^j\sigma^{m-j}\bar{\tau}^{m-j}\bar{\sigma}^j-$$
$$-(\sigma+\bar{\sigma})\sum_0^{m-1}\tau^{j+1}\sigma^{m-j-1}\bar{\tau}^{m-j}\bar{\sigma}^j.$$

Приравнивая коэффициенты при $t_\alpha s_\beta$ в обеих частях этого равенства, мы приходим к тождеству (10), выраженному в терминах характеристических полиномов. Для двойных дифференциальных операторов $K^j_{\alpha\beta}(D, \bar{D})$, соответствующих $H^j_{\alpha\beta}$, соотношение (10) принимает вид

$$K_{\alpha\beta}=D_\alpha\bar{D}_\beta+D_\beta\bar{D}_\alpha=\sum(D_j+\bar{D}_j)K^j_{\alpha\beta}(D, \bar{D}). \qquad (11)$$

2. Преобразования Фурье. Вполне положительные формы. Рассмотрим форму

$$H=\sum h_{\alpha\beta}D_\alpha f(x)\overline{D_\beta f(x)}$$

с постоянными коэффициентами и характеристическим полиномом

$$K=\sum h_{\alpha\beta}\zeta_\alpha\bar{\zeta}_\beta.$$

Отступая от (1.3), будем писать $H=K(D, \bar{D})f\bar{f}$. Если функция f бесконечно дифференцируема и равна нулю вне компактного множества, то существует ее преобразование Фурье

$$F(\eta)=\int e^{-i\eta x}f(x)\,dx.$$

Используя формулу Парсеваля, мы получаем

$$\int H\,dx=(2\pi)^{-n}\int K(i\eta, \overline{i\eta})\,|F(\eta)|^2\,d\eta.$$

Отсюда, в частности, следует, что соотношение

$$K(i\eta, \overline{i\eta})\geqslant 0 \qquad (1)$$

обеспечивает неотрицательность левой части. Нас будет интересовать случай, когда интеграл $\int H\,dx$ от формы H положителен на какой-либо плоскости, например на плоскости $S{:}x^1=t$. При этом удобно использовать частичное преобразование Фурье

$$F(x^1, \eta') = \int e^{-i(\eta_2 x^2 + \ldots)} f(x)\, dS, \quad (dS = dx^2 \cdot \ldots \cdot dx^\nu),$$
$$\eta' = (\eta_2, \ldots, \eta_\nu)$$

функции f по переменным $x^2, \ldots, x^\nu$. Снова несколько отклоняясь от обозначений (1.3), получаем в этом случае

$$\int H\, dS = (2\pi)^{1-n} \int K(\sigma, \bar\sigma) F\bar F\, d\eta', \tag{2}$$

где

$$\sigma = (D_1, i\eta_2, \ldots, i\eta_\nu).$$

При фиксированном η' подинтегральное выражение в правой части является формой переменных

$$z_k = D_1^k F, \qquad k = 0, \ldots, m, \tag{3}$$

меняющихся на плоскости S независимо друг от друга. Мы будем иметь дело с тем случаем, когда оператор H является эрмитовым и однородным порядка m; m, причем

$$K(\sigma, \bar\sigma) F\bar F \sim \sum |\sigma_\alpha F|^2, \qquad |\alpha| = m, \tag{4}$$

в том смысле, что отношение обеих частей (4) отделено константами от нуля и бесконечности для любых F и η'. Из формулы Парсеваля тогда следует, что

$$\int H\, dS \sim \int \sum |D_\alpha f|^2\, dS, \qquad |\alpha| = m.$$

Будем называть H *вполне положительным оператором* (по отношению к оси x^1), если выполняется соотношение (4). Имеет место

Лемма 2.1. *Эрмитов однородный оператор H степени m; m тогда и только тогда является вполне положительным, когда K представимо в виде суммы квадратов*

$$K(\zeta, \bar\zeta) = \sum_0^m |l_k(\zeta)|^2, \qquad \operatorname{Re}\zeta_2 = \ldots = 0, \tag{5}$$

где l_k — полиномы степени $\leqslant m$ от ζ_1, линейно независимые, если только не все $\zeta_2, \ldots$ равны нулю.

Доказательство. Предположим, что (5) выполнено. Тогда

$$K(\sigma, \bar\sigma) F\bar F = \sum_0^m | l_k(\sigma) F |^2, \tag{6}$$

причем правая часть этого равенства является положительно определенной формой переменных (3), если не все $\zeta_2 = \ldots = 0$. В силу непрерывной зависимости коэффициентов этой формы от $\zeta_2, \ldots$, имеет место равномерная эквивалентность

$$K(\sigma, \bar\sigma) FF \sim \sum | D_1^k F |^2$$

для $s = s(\eta') = |\eta_2| + \ldots = 1$. В силу однородности, левая часть последнего соотношения при замене σ на $r\sigma$ умножается на r^{2m}. Следовательно, для любого η' левая часть равномерно эквивалентна $\sum s^{2m-2k} | D_1^k F |^2$, что в свою очередь эквивалентно правой части (4). В одну сторону лемма доказана. Обратно, если для каждого значения η' имеет место соотношение (4), то левая часть (4) при всех $\eta' \neq 0$ представляется в виде (6). Чтобы получить теперь соотношение (5), достаточно положить в (6)

$$F = e^{\zeta_1 x^1}.$$

3. Неравенство для вполне положительных форм. Рассмотрим эрмитову форму

$$H = \sum h_{\alpha\beta}(x) D_\alpha f(x) \overline{D_\beta f(x)}$$

порядка m; m с переменными коэффициентами. Назовем ее главной частью выражение

$$PH = \sum h_{\alpha\beta}(x) D_\alpha f(x) \overline{D_\beta f(x)}, \qquad |\alpha| = |\beta| = m.$$

Допустим, что PH является вполне положительной формой в каждой точке x некоторой плоскости S. Если тогда положить

$$PH(X, f) = \sum h_{\alpha\beta}(X) D_\alpha f(x) \overline{D_\beta f(x)}, \qquad |\alpha| = |\beta| = m,$$

где X — некоторая фиксированная точка, то, в силу предположения,

$$\int PH(X, f)\, dS \sim \sum | D_\alpha f |^2\, dS, \qquad |\alpha| = m. \tag{1}$$

Мы докажем теперь некоторое неравенство для $\int H\,dS$. Пусть $K(x, D, \overline{D}) = \sum h_{\alpha\beta}(x) D_\alpha \overline{D}_\beta$ — двойной дифференциальный оператор, соответствующий форме H, так что, несколько искажая (1.3), можно записать

$$H = Kf\overline{f}.$$

Введем следующие обозначения:

$$|D^k f(x)|^2 = \sum |D_\alpha f(x)|^2, \qquad |\alpha| \leqslant k,$$

$$|D^k f, S'|^2 = \int |D^k f(x)|^2\, dS',$$

где S' — часть S. В случае $S' = S$ мы в настоящем пункте будем опускать слева S. Имеет место

Теорема 3.1. *Пусть $H = Kf\overline{f}$ — оператор порядка m; m с ограниченными коэффициентами, и пусть его главная часть является равномерно вполне положительной с равномерно непрерывными коэффициентами. Тогда существует постоянная c, не зависящая от f, такая, что*

$$\int Kf\overline{f}\, dS + c\,|D^{m-1}f|^2 \geqslant c^{-1}\,|D^m f|^2.$$

Замечание. Неравенство

$$\int Kf\overline{f} \leqslant c\,|D^m f|^2$$

тривиально, поэтому теорема означает, что при достаточно большом значении постоянной c

$$\int Kf\overline{f}\, dS + c\,|D^{m-1}f|^2 \sim |D^m f|^2.$$

Доказательство. Доказываемое неравенство представляет собой вариант неравенства, использованного автором в теории эллиптических операторов (см. Гординг [5]). Пусть носитель функции f заключен внутри сферы $T \subset S$ диаметра ε с центром в точке X. Имеем

$$\int H\, dS = \int P(X, f)\, dS + \int (H(f) - P(X, f))\, dS,$$

где $P = PH$. Представим подинтегральное выражение во втором члене справа в виде

$$(H(f) - P(f)) + (P(f) - P(X, f)) \qquad (2)$$

и обозначим через c некоторую (большую) константу, которая не зависит от f, но может меняться от формулы к формуле. Первый член в (2) является суммой одночленных форм порядка $\leqslant m$; $m-1$ и $\leqslant m-1$; m; он, следовательно, ограничен в каждой точке величиной $c\,|D^m f(x)|\times$ $\times\,|D^{m-1}f(x)|$. Второй член ограничен величиной

$$\delta(\varepsilon)\,|D^m f(x)|^2,$$

где

$$\delta(\varepsilon)=\sum|h_{\alpha\beta}(x)-h_{\alpha\beta}(X)|,\qquad |\alpha|=|\beta|=m,\ x\in T,$$

стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$ независимо от f и X, в силу равномерной непрерывности коэффициентов формы P. Используя теперь (1) и неравенство

$$2\,|D^m f(x)|\,|D^{m-1}f(x)|\leqslant r\,|D^m(x)|^2+r^{-1}\,|D^{m-1}f(x)|^2,$$

при малом $r>0$, получим

$$\int H\,dS\geqslant c^{-1}\,|D^m f|^2-c\,|D^{m-1}f|^2, \tag{3}$$

если ε достаточно мало.

Пусть, далее, $1=\varphi_1^2+\varphi_2^2+\ldots$ представляет собой разбиение единицы на S, удовлетворяющее следующим условиям: каждая функция $\varphi_k\geqslant 0$ бесконечно дифференцируема, и производные ее до порядка m включительно равномерно ограничены; носитель S_k функции φ_k пересекается лишь с конечным числом других носителей, причем для любой функции f, равной нулю вне S_k, соотношение (3) выполняется с постоянной, не зависящей от k. Имеем, в силу определения,

$$\int H\,dS=\sum_k\int\varphi_k^2 H(f)\,dS.$$

Форма

$$\varphi_k^2 H(f)-H(\varphi_k f) \tag{4}$$

может быть записана в виде

$$[(\varphi(x)\,\varphi(\bar{x})\,K(x,D,\bar{D})-$$
$$-K(x,D,\bar{D})\,\varphi(x)\,\varphi(\bar{x}))\,f(x)\,\overline{f(\bar{x})}]_{\bar{x}=x}$$

где для сокращения записи положено $\varphi = \varphi_k$. Поскольку

$$\varphi(x)\varphi(\bar{x})K - K\varphi(x)\varphi(\bar{x}) = \\ = \varphi(x)(\varphi(\bar{x})K - K\varphi(\bar{x})) + (\varphi(x)K - K\varphi(x))\varphi(\bar{x}),$$

форма (4) является суммой одночленных форм порядка $\leqslant m$, $m-1$ или $\leqslant m-1$; m и, следовательно, ограничена в каждой точке величиной $c\,|D^m f(x)|\,|D^{m-1}f(x)|$. Интегрируя неравенство

$$\varphi_k^2 H(f) - H(\varphi_k f) \geqslant -c\,|D^m f(x)|\,|D^{m-1}f(x)|$$

по S_k и суммируя результаты по всем k, мы получаем

$$\int H\,dS \geqslant \sum_k \int H(\varphi_k f)\,dS - c\sum_k |D^m f,\ S_k|\,|D^{m-1}f,\ S_k|. \quad (5)$$

Далее, из неравенства (3) следует, что

$$\int H(\varphi_k f)\,dS \geqslant c^{-1}|D^m\varphi_k f|^2 - c\,|D^{m-1}\varphi_k f|^2. \quad (6)$$

Так же, как в случае формы (4) рассматривая на S_k выражение

$$|D^m\varphi_k f(x)|^2 - \varphi_k^2(x)\,|D^m f(x)|^2,$$

находим, что оно ограничено в каждой точке функцией $c\,|D^m f(x)|\,|D^{m-1}f(x)|$. Поскольку, кроме того,

$$|D^{m-1}\varphi_k f(x)|^2 \leqslant c\,|D^{m-1}f(x)|^2,$$

из (6) следует, что

$$\int H(\varphi_k f)\,dS \geqslant c^{-1}\int \varphi_k^2\,|D^m f(x)|^2\,dS - \\ - c\,|D^m f,\ S_k|\,|D^{m-1}f,\ S_k| - c\,|D^{m-1}f,\ S_k|^2.$$

Суммируя эти неравенства по всем k и подставляя результат в (5), получим

$$\int H\,dS \geqslant c^{-1}|D^m f|^2 - \\ - c\sum |D^m f,\ S_k|\,|D^{m-1}f,\ S_k| - c\sum |D^{m-1}f,\ S_k|^2.$$

Из того, что при любом $r > 0$

$$2\,|D^m f,\ S_k|\,|D^{m-1}f,\ S_k| \leqslant r\,|D^m f,\ S_k|^2 + r^{-1}|D^{m-1}f,\ S_k|^2,$$

ледует, что

$$\int H\,dS \geqslant c^{-1}|D^m f|^2 - cr\sum|D^m f,\ S_h|^2 -$$
$$- c(r^{-1}+1)\sum|D^{m-1}f, S_h|^2$$

для любого $r>0$. Если теперь заметить, что

$$\sum_k |D^j f,\ S_k|^2 \leqslant N|D^j f|^2 \qquad (j \text{ — любое}),$$

где N — максимальное число S_k, которым может принадлежать фиксированная точка плоскости S, то, выбирая r достаточно малым, мы приходим к желаемому результату.

Замечание. Эта теорема тривиальным образом распространяется на случай, когда S является многообразием. Доказательство остается прежним.

4. Гиперболические дифференциальные операторы. Пусть $V=V_t$, как и выше, обозначает переменную полосу $0\leqslant x^1\leqslant t$, а $S=S_t$ — плоскость $x^1=t$. Мы ограничим изменение t конечным интервалом, скажем $0<t\leqslant 1$.

Обозначим через Lip^k множество всех определенных в V комплексных функций, у которых производные порядка $\leqslant k$ существуют почти всюду и ограничены, а через Lip^0 — совокупность всех измеримых и ограниченных функций. Пусть

$$a = a(x,\ D) = \sum a_\alpha(x)\,D_\alpha, \qquad |\alpha|\leqslant m+1,$$

— линейный дифференциальный оператор порядка $m+1$ с главной частью

$$Pa = Pa(x,\ D) = \sum a_\alpha(x)\,D_\alpha, \qquad |\alpha| = m+1.$$

Коэффициенты предполагаются симметричными относительно перестановок в α, а суммирование производится независимо по $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, что приводит к появлению в сумме одних и тех же производных несколько раз. Обозначим через $a_0=a_0(x)$ коэффициент при D_1^{m+1} и условимся называть оператор a *нормальным*, если $a_0(x)\equiv$ $\equiv \mathrm{const}$. Запись $a\in\mathrm{Lip}^k$ будет означать, что коэффициенты оператора a принадлежат Lip^k, аналогично и для других классов функций. Под

$$\sigma^k(a) \tag{1}$$

понимается сумма верхних граней производных порядка $\leqslant k$ от коэффициентов оператора a. Сформулируем теперь хорошо известное определение гиперболичности. Пусть

$$Pa(x, \zeta) = \sum a_\alpha \zeta_\alpha, \quad \zeta_\alpha = \zeta_{\alpha_1} \cdot \ldots, \qquad |\alpha| = m + 1,$$

— характеристический полином оператора Pa. Будем называть a *гиперболическим* (относительно первой координаты), если $a_0(x) \neq 0$ при всех x и если в разложении на множители

$$Pa(x, \zeta) = a_0(x) \prod (\zeta_1 - \lambda_j) \qquad (1 \leqslant j \leqslant m + 1)$$

числа $\lambda_j = \lambda_j(x, \zeta')$ $(\zeta' = (\zeta_2, \ldots, \zeta_\nu))$ действительны и различны, когда ζ' действительно и $\neq 0$. Это означает, что $a_0^{-1} Pa(x, \zeta)$ имеет действительные коэффициенты. Действительная алгебраическая поверхность

$$Pa(x, \zeta) = 0 \qquad (\zeta \text{ действительное})$$

состоит из $m+1$ листов, пересекающихся лишь в начале координат. В силу однородности Pa со степенью $m+1$, числа λ_j также однородны со степенью однородности 1, так что

$$\lambda_j(x, s\zeta') = s\lambda_j(x, \zeta')$$

при соответствующем выборе индексов[1]).

Мы будем изучать гиперболические операторы с минимальными ограничениями на коэффициенты, предполагая лишь, что

$$a \in \mathrm{Lip}^0, \qquad Pa \in \mathrm{Lip}^1. \tag{2}$$

Для таких операторов введем характеризующее их число

$$|a|_0 = \sigma^0(a) + \sigma^1(Pa) + \tau + \delta^{-1}, \tag{3}$$

где первые два члена определяются согласно (1), τ — верхняя грань функции $a_0^{-1}(x)$ и δ — наибольшая нижняя грань разности

$$|\lambda_j(x, \xi') - \lambda_k(x, \xi')|,$$

[1]) То есть когда ζ_1 — переменная, по которой оператор a гиперболичен; $\zeta' = (\zeta_2, \ldots, \zeta_\nu)$. — *Прим. перев.*

где $j \neq k$, $|\xi'| = |\xi_2| + \ldots = 1$ и $x \in V$. Если оператор a гиперболичен в каждой точке x, постоянен вне некоторого компактного множества и удовлетворяет условию (2), то $|a|_0$ — конечное число.

Пусть a и b — два гиперболических оператора порядков $m+1$ и m соответственно. Будем говорить, следуя Лере (см. [10], стр. 140), что b *разделяет* a, если для всех x листы поверхности $Pb(x, \xi) = 0$ разделяют листы $Pa(x, \xi) = 0$. Если задан произвольный нормальный гиперболический оператор a, то для построения нормального гиперболического оператора b, разделяющего a, достаточно положить $b = Pb$ и

$$b(x, \zeta) = \frac{1}{m+1} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} Pa(x, \zeta).$$

Если a непрерывен, то любой действительный дифференциальный оператор, достаточно близкий к этому оператору b, является гиперболическим и разделяет a. В частности, можно указать дифференциальный оператор, обладающий этими свойствами и имеющий бесконечно дифференцируемые коэффициенты.

5. Интеграл энергии. В случае волнового оператора

$$a = D_1^2 - D_2^2 - \ldots$$

имеет место известное энергетическое тождество (см. Фридрихс и Леви [3])

$$2D_1 f (D_1^2 - \ldots) f = D_1((D_1 f)^2 + \ldots) - 2D_2(D_1 f D_2 f) - \ldots, \quad (1)$$

где f — действительная функция. Здесь находит свое выражение тот факт, что для решения f волнового уравнения энергия

$$\int ((D_1 f)^2 + \ldots)\, dS \quad (2)$$

является интегралом движения. Мы установим аналог интеграла энергии для общего гиперболического оператора, но не из физических соображений, а обобщая (1). Используемый метод принадлежит Лере (см. Лере [10]).

Пусть

$$a = \sum a_\alpha(x) D_\alpha \quad \text{и} \quad b = \sum b_\beta(x) D_\beta$$

— два дифференциальных оператора порядков $m+1$ и m соответственно. Если оба они действительны, однородны и имеют постоянные коэффициенты, то для получения поляризованного аналога формулы (1) достаточно умножить (1.10) на $a_\alpha b_\beta$ и просуммировать. Вместо этого прямого метода мы будем использовать формальный аппарат двойных дифференциальных операторов, имеющий большие преимущества при более сложных рассмотрениях, с которыми мы столкнемся в дальнейшем.

Пусть $\bar{a}(x, D)$ и $\bar{b}(x, D)$ — операторы, получающиеся из a и b заменой их коэффициентов на сопряженные. Рассмотрим двойной дифференциальный оператор

$$L = L(a, b) = a\bar{b} + \bar{a}b,$$

где $\bar{a} = \bar{a}(\bar{x}, \bar{D})$, $\bar{b} = \bar{b}(\bar{x}, \bar{D})$. Ассоциированная с ним форма

$$Lf\bar{g} = af\overline{bg} + bf\overline{ag}$$

является эрмитовой, причем

$$Lf\bar{f} = 2\,\mathrm{Re}\, af\overline{bf}. \tag{3}$$

Условимся называть двойной дифференциальный оператор

$$K = \sum K_{\alpha\beta}(x, \bar{x})\, D_\alpha \bar{D}_\beta$$

конгруэнтным нулю, $K \equiv 0$, если ассоциированная с ним форма

$$Kf\bar{g} = \sum K_{\alpha\beta}(x, \bar{x})\, D_\alpha f \overline{D_\beta g}$$

обращается в нуль, т. е. если $K_{\alpha\beta}(x, x) = 0$ в каждой точке x и для всех α и β. Два оператора *конгруэнтны* (записывается $K \equiv K'$), если их разность конгруэнтна нулю.

Лемма 5.1. *Если главные части операторов a и b действительны, $a \in \mathrm{Lip}^0$, $Pa \in \mathrm{Lip}^1$ и $b \in \mathrm{Lip}^1$, то*

$$L(a, b) \equiv \sum (D_j + \bar{D}_j) A^j + A^0, \tag{4}$$

где $\{A^j\}_0^\nu$ — двойные дифференциальные операторы порядка $\leqslant m$; m с ограниченными коэффициентами[1]).

---

[1]) Напомним, что порядки операторов a и b принимаются равными $m+1$ и m соответственно. — *Прим. перев.*

Докажем лемму вначале для случая однородных операторов $a = Pa$ и $b = Pb$. Имеем

$$L = \sum a_\alpha(x)\, b_\beta(\overline{x})\, D_\alpha \overline{D}_\beta + b_\beta(x)\, a_\alpha(\overline{x})\, D_\beta \overline{D}_\alpha \equiv$$
$$\equiv \sum a_\alpha(x)\, b_\beta(x)\, (D_\alpha \overline{D}_\beta + \overline{D}_\alpha D_\beta).$$

Согласно (1.11),

$$D_\alpha \overline{D}_\beta + \overline{D}_\alpha D_\beta = \sum (D_j + \overline{D}_j)\, K^j_{\alpha\beta},$$

причем стоящие справа двойные дифференциальные операторы являются эрмитовыми, имеют порядок m; m и постоянные коэффициенты. Подставляя правую часть написанного равенства в выражение для L, мы приходим к формуле (4), в которой

$$A^j = \sum a_\alpha(x)\, b_\beta(x)\, K^j_{\alpha\beta}$$

и, если $c_{j\alpha\beta}(x) = D_j a_\alpha(x)\, b_\beta(x)$,

$$A^0 = -\sum c_{j\alpha\beta}(x)\, K^j_{\alpha\beta}.$$

Здесь суммирование проводится по всем таким α и β, что $|\alpha| = m + 1$, $|\beta| = m$. Для доказательства леммы в общем случае достаточно проверить выполнение (4) для операторов

$$L(a - Pa,\ Pb),\ \ L(Pa,\ b - Pb),\ \ L(a - Pa,\ b - Pb).$$

Первая и последняя формы тривиальным образом удовлетворяют условию (4), ибо порядки их не выше m; m, а потому достаточно включить их в A^0. Переходя ко второй форме, запишем Pa в виде

$$Pa = \sum D_j a^j + a^0,$$

где порядки операторов a^j $(j = 0, \ldots, \nu)$ не превышают m; m. Положим, далее, $b' = b - Pb$. Имеем

$$Pa\overline{b'} = \sum (D_j + \overline{D}_j)\, a^j\, \overline{b'} - \sum a^j\, \overline{D}_j \overline{b'} + a^0 \overline{b'}.$$

Аналогичное тождество выполняется для второго члена формы $L(Pa, b')$. Лемма доказана. Для форм, ассоциированных с оператором (4), мы получаем соотношение

$$Lf\overline{f} = 2\,\mathrm{Re}\, af\overline{bf} = \sum D_j A^j f\overline{f} + A^0 f\overline{f},$$

частным случаем которого является (1). Для получения положительной формы $A^1 f\bar{f}$, аналогичной положительной плотности энергии в (1), мы выберем в качестве b разделяющий гиперболический оператор (см. Лере, loc. cit.).

Лемма 5.2. *Если a и b — два гиперболических оператора, причем $a_0\bar{b}_0 > 0$ и b разделяет a, то форма $PA^1 f\bar{f}$ вполне положительна.*

Доказательство. Применим оператор (4) к функции $e^{\zeta x}e^{\bar{\zeta}\bar{x}}$ и положим затем $\bar{x} = x$. Тогда будем иметь

$$a(x, \zeta)\overline{b(x, \bar{\zeta})} + \overline{a(x, \bar{\zeta})}\, b(x, \zeta) =$$
$$= \sum (\zeta_j + \bar{\zeta}_j) A^j(x, \zeta, \bar{\zeta}) + A^0(x, \zeta, \bar{\zeta}),$$

так что, полагая $\operatorname{Re}\zeta_2 = \ldots = 0$, получим для главных частей

$$PA^1(x, \zeta, \bar{\zeta}) = \operatorname{Re} Pa(x, \zeta)\overline{Pb(x, \bar{\zeta})}\cdot\frac{1}{\operatorname{Re}\zeta_1}. \tag{5}$$

После разложения на множители имеем

$$Pa = a_0(x)\prod_1^{m+1}(\zeta_1 - i\lambda_k),$$

$$Pb = b_0(x)\prod_1^{m}(\zeta_1 - i\mu_k),$$

где числа λ и μ являются действительными функциями x и $\eta' = (\eta_2, \ldots, \eta_\nu)$, $(\zeta = \xi + i\eta)$. Занумеруем числа λ_j и μ_k таким образом, чтобы

$$\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \ldots < \mu_m < \lambda_{m+1}. \tag{6}$$

Это всегда можно сделать, поскольку оператор b разделяет a. Положим

$$a_k = a_k(x, \zeta) = \prod(\zeta_1 - i\lambda_j), \quad j \neq k.$$

Совокупность всех таких a_k образует базис в множестве всех полиномов от ζ_1 степени $\leqslant m$. Отсюда

$$Pb = b_0 \sum \gamma_k a_k,$$

где все

$$\gamma_k = \frac{\prod_{1}^{m} (\lambda_k - \mu_j)}{\prod_{k \neq j} (\lambda_k - \lambda_j)},$$

в силу (6), положительны. Следовательно,

$$\operatorname{Re} Pa(x, \zeta)\, \overline{Pb(x, \zeta)} = a_0 \overline{b}_0 \sum \operatorname{Re} \gamma_k (\zeta_1 - i\lambda_k) \,|\, a_k(x, \zeta)\,|^2 = \\ = a_0 \overline{b}_0 \operatorname{Re} \zeta_1 \sum{}' \gamma_k \,|\, a_k(x, \zeta)\,|^2.$$

Поскольку выражение $a_0 \overline{b}_0 \sum \gamma_k \,|\, a_k(x, \zeta)\,|^2$ удовлетворяет условиям леммы 2.1, наше утверждение доказано.

Замечание. Утверждение леммы почти обратимо. Действительно, если PA^1 в (5) вполне положителен, то Pa и Pb, рассматриваемые как полиномы от ζ_1, могут иметь нули только на мнимой оси. Следовательно, оператор Pa гиперболический, но может иметь кратные нули. Если у него нет кратных нулей, то нули Pa разделяются нулями Pb.

Из доказательства леммы следует, что PA^1 является равномерно вполне положительной формой с равномерно непрерывными коэффициентами, если только

$$|\, Pa\,|_0 < \infty, \quad |\, b\,|_0 < \infty \quad \text{и} \quad |\, PaPb\,|_0 < \infty,$$

где последнее неравенство влечет равномерное разделение[1]). Если задан произвольный оператор a, у которого $|\, Pa\,|_0 < \infty$, то можно найти оператор b с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, удовлетворяющий последним двум условиям. В дальнейшем мы всегда будем считать b выбранным именно таким способом. Это замечание вместе с теоремой 3.1 приводит нас к следующему утверждению.

Теорема 5.1. *Если a — гиперболический оператор и A^1 определяется равенством* (4), *то*

$$\int A^1 f\overline{f} dS \geqslant c^{-1} |\, D^m f, S\,|^2 - c\,|\, D^{m-1} f, S\,|^2,$$

где постоянная c зависит только от $|\, a\,|_0$.

---

[1]) То есть расстояние между корнями a и b ограничено снизу положительной константой. — *Прим. ред.*

Пусть $\mathscr{C}^k$ — множество всех функций, непрерывно дифференцируемых до порядка k, обращающихся в нуль вне компактных подмножеств V. Неравенство выполняется для $f \in \mathscr{C}^m$, а с помощью предельного перехода распространяется и на всякую функцию f, для которой $|D^m f, S| < \infty$. Отсюда следует (ср. замечание к теореме (3.1)), что из доказанного неравенства вытекает эквивалентность

$$\int A^1 f \bar{f} dS + c\, |D^{m-1} f, S|^2 \sim |D^m f, S|^2,$$

где c предполагается достаточно большим.

6. Общий интеграл энергии. Займемся теперь обобщением результатов предыдущего пункта. Прежде всего введем некоторые новые обозначения. Кроме полного порядка производной D_α, равного $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots$, мы будем использовать двойной порядок $[\alpha] = j,\ k$, где j — порядок дифференцирования по x^1, т. е. количество индексов $\alpha_1, \ldots$, равных 1, а $j+k = |\alpha|$. Например, двойной порядок операторов $D_1 D_2 D_1 D_3$ и $D_1 D_1 D_1$ равен соответственно 2,2 и 3,0. Запись

$$[\alpha] \leqslant p,\ q$$

означает, что $j \leqslant p$ и $j+k \leqslant p+q$. Очевидным образом определяется двойной порядок дифференциального оператора. Для двойного дифференциального оператора

$$K(D, \bar{D}) = \sum K_{\alpha\beta}(x, \bar{x})\, D_\alpha \bar{D}_\beta$$

двойной порядок определяется двумя парами чисел $j,\ k$; $j',\ k'$, где $j,\ k$ означает двойной порядок по D, а $j',\ k'$ — по $\bar{D}$.

Наряду с Lip^k мы будем рассматривать также $\mathrm{Lip}^{p,q}$ — класс комплекснозначных функций с ограниченными производными порядка $\leqslant p,\ q$. Каждому гиперболическому дифференциальному оператору a, $a \in \mathrm{Lip}^{p,q}$, $Pa \in \mathrm{Lip}^1$, мы сопоставим число

$$|a|_{p,q} = \sigma^{p,q}(a) + \sigma^1(Pa) + \tau + \delta^{-1},$$

где через $\sigma^{p,q}(a)$ обозначена наименьшая верхняя грань производных порядка $\leqslant p,\ q$ от коэффициентов a, а все остальные числа определяются так же, как в (4.3). Набор производных D_α, где $|\alpha| \leqslant k$ и $[\alpha] \leqslant p, q$, будет обозначаться посредством

$$D^k = \{D_\alpha\}, \quad |\alpha| \leqslant k,$$
$$D^{p,q} = \{D_\alpha\}, \quad [\alpha] \leqslant p, q,$$

соответственно. В обоих случаях предполагается включенной постоянная $1 = D_0$, порядки которой, обычный и двойной, равны соответственно 0 и 0,0. Помимо

$$|D^k f, U|^2 = \int |D^k f|^2 dU, \quad |D^k f|^2 = \sum |D_\alpha f|^2, \quad |\alpha| \leqslant k,$$

мы будем использовать также обозначения

$$|D^{p,q} f, U|^2 = \int |D^{p,q} f|^2 dU,$$
$$|D^{p,q} f|^2 = \sum |D_\alpha f|^2, \quad [\alpha] \leqslant p, q.$$

Здесь f — комплекснозначная функция, а U обозначает плоскость S, или полосу V, или какую-нибудь часть их; dU — естественный элемент объема, причем для $U = S$ мы полагаем $dU = dx^2 \ldots$, а для $U = V$ $dU = dx^1 \ldots$. Если $U = V$, то в обозначении нормы мы будем иногда опускать U, записывая просто $|D^k f|$ и $|D^{p,q} f|$. Это противоречит обозначениям $|D^k f(x)|$ и $|D^{p,q} f(x)|$, принятым для значений в точке, если аргумент в них опустить, но смысл указанной записи каждый раз будет ясен из контекста.

Введем теперь двойной дифференциальный оператор

$$\Delta^{p,q} = \Delta^{p,q}(D, \overline{D}) = \sum D_\gamma \overline{D}_\gamma, \quad [\gamma] \leqslant p, q.$$

Мы можем написать тогда, отступая от (1.3),

$$\Delta^{p,q} f(x) \overline{f(x)} = |D^{p,q} f(x)|^2,$$

или, опуская аргумент,

$$\Delta^{p,q} f \overline{f} = |D^{p,q} f|^2.$$

Этому квадрату нормы соответствует скалярное произведение, задаваемое формулой

$$\Delta^{p,q} f \overline{g} = \sum D_\gamma f \overline{D_\gamma g}, \quad [\gamma] \leqslant p, q.$$

Пусть, как и прежде, $\bar{a} = \bar{a}(\bar{x}, \bar{D})$, $\bar{b} = \bar{b}(\bar{x}, \bar{D})$ и

$$L = L(a, b) = a\bar{b} + \bar{a}b.$$

Следующее утверждение является обобщением леммы 5.1.

Лемма 6.1. *Если a и b — два нормальных оператора с действительными главными частями, $a \in \mathrm{Lip}^{p,q}$, $Pa \in \mathrm{Lip}^1$ и $b \in \mathrm{Lip}^{p+1,q}$, то*

$$\Delta^{p,q}L \equiv \sum (D_j + \bar{D}_j) B^j + B^0, \tag{1}$$

где B^j ($j = 0, \ldots, \nu$) — двойные дифференциальные операторы порядка $\leqslant m + p, q; m + p, q$ с ограниченными коэффициентами. Более точно,

$$B^j = A^j\Delta^{p,q} + a^j\bar{b}_\Delta + \bar{a}^j b_\Delta, \quad j > 0, \tag{2}$$

где $a = \sum D_j a^j + a^0$ и $b_\Delta = \Delta^{p,q}b - b\Delta^{p,q}$.

Доказательство. Из леммы 5.1 следует, что оператор $L\Delta$ ($\Delta = \Delta^{p,q}$) имеет вид (1), где $B^j = A^j\Delta$. Поэтому остается доказать, что $\Delta L - L\Delta$ имеет вид (1). Этот факт следует из тождества

$$\Delta a\bar{b} - a\bar{b}\Delta = a_\Delta \bar{b} + a\bar{b}_\Delta =$$
$$= \sum (D_j + \bar{D}_j) a^j\bar{b}_\Delta - \sum a^j \overline{D_j b_\Delta} + a^0\bar{b}_\Delta + a_\Delta\bar{b} \tag{3}$$

и аналогичного тождества для $\bar{a}b$, если заметить, что, поскольку a и b нормальны, порядки двойных дифференциальных операторов $a_\Delta = \Delta a - a\Delta$ и $b_\Delta = \Delta b - b\Delta$ будут $\leqslant m + p, q; p, q$ и $\leqslant m - 1 + p, q; p, q$ соответственно. Группируя члены, получаем (2).

В силу того, что порядки последних двух членов в правой части (2) меньше, чем $m + p, q; m + p, q$, мы получаем с помощью неравенства Шварца

$$\left| \int (a^1\bar{b}_\Delta + \bar{a}^1 b_\Delta) f\bar{f} dS \right| \leqslant 2c \,|D^{m+p,q}f, S|\,|D^{m+p-1,q}f, S| \leqslant$$
$$\leqslant c\varepsilon\,|D^{m+p,q}f, S|^2 + c\varepsilon^{-1}\,|D^{m+p-1,q}f, S|^2,$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно, а c зависит лишь от коэффициентов операторов a и b. Следовательно,

$$\int B^1 f\bar{f} dS \geqslant \int A^1 \Delta f\bar{f} dS - c\varepsilon\,|D^{m+p,q}f, S|^2 - c\varepsilon^{-1}|D^{m+p-1,q}f, S|^2.$$

Пусть теперь a и b — два гиперболических оператора и b разделяет a; тогда к первому члену в правой части полученного неравенства можно применить теорему 5.1, если заметить, что

$$A^1 \Delta f \bar{f} = A^1 D_\gamma f \overline{D_\gamma f}, \quad [\gamma] \leqslant p, \ q.$$

Уменьшая, насколько необходимо, ε и выбирая подходящим образом b, мы получаем следующую теорему.

Теорема 6.1. *Пусть* $a \in \mathrm{Lip}^{p,q}$, $Pa \in \mathrm{Lip}^1$ — *гиперболический оператор и пусть* B^1 *определяется посредством* (2). *Тогда*

$$\int B^1 f \bar{f} dS \geqslant c^{-1} | D^{m+p,\,q} f, \ S |^2 - c \, | D^{m+p-1,\,q} f, \ S |^2,$$

где $c > 0$ *зависит только от* $|a|_{p,\,q}$.

Замечание. Это неравенство выполняется для любой функции $f \in \mathscr{C}^{m+p+q+1}$. Переходя к пределу, можно установить его справедливость для всех таких f, что

$$| D^{m+p+1,\,q} f, \ S | < \infty.$$

Поскольку обратное неравенство $B^1 f \cdot \bar{f} dS \leqslant c \, | D^{m+p,q} f, \ S |^2$ выполняется очевидным образом, мы получаем при достаточно большом c эквивалентность

$$\int B^1 f \bar{f} dS + c \, | D^{m+p-1,\,q} f, \ S |^2 \sim | D^{m+p,\,q} f, \ S |^2.$$

7. Обобщенное неравенство Фридрихса — Леви. В этом пункте приведем неравенство, которое обобщает классическое неравенство Фридрихса — Леви на случай произвольных гиперболических операторов. При этом используются две новые нормы

$$| D^{p,q} f |_1 = | D^{p,q} f, V |_1 = \int_0^t | D^{p,q} f, S_\tau | \, d\tau$$

и

$$| D^{p,q} f |_\infty = | D^{p,q} f, V |_\infty = \sup | D^{p,q} f, S_\tau |, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t.$$

В иной форме этот результат уже был опубликован без доказательства в работе Гординга [4].

Теорема 7.1. *Пусть a — гиперболический оператор порядка $m+1$ и пусть $a \in \mathrm{Lip}^{p,q}$, $Pa \in \mathrm{Lip}^1$. Тогда имеет место неравенство*

$$|D^{m+p,\,q}f|_\infty \leqslant c\,|D^{m,\,p+q}f,\ S_0| + c\,|D^{p-1,\,q}af,\ S_0| + c\,|D^{p,\,q}af|_1, \tag{1}$$

в котором постоянная c зависит только от $|a|_{p,\,q}$. При $p=0$ второй член правой части отсутствует.

Замечание 1. Достаточно доказать неравенство (1) для $p=q=0$. Утверждение теоремы, как легко видеть следует отсюда, если применить неравенство

$$|D^m f|_\infty \leqslant c\,|D^m f,\ S_0| + c\,|af|_1,$$

соответствующее этому случаю, ко всем $D_\gamma f$, где $[\gamma] \leqslant p,\ q$. Эта процедура, которая в случае $p>0$ требует только, чтобы

$$a \in \mathrm{Lip}^{0,\,p+q}, \qquad Pa \in \mathrm{Lip}^1 \cap \mathrm{Lip}^{p-1},$$

будет применена позднее (теорема 14.3). Следовательно, в полной общности интеграл энергии не нужен для получения неравенства Фридрихса — Леви. Он будет, однако, использован более существенным образом в следующем пункте.

Замечание 2. Устремляя t к 0 в (1) при $p=0$, мы приходим к тривиальному неравенству

$$|D^{m,\,q}f,\ S_0| \leqslant c\,|D^{m,\,q}f,\ S_0|,$$

которое получается из-за нескольких расточительных оценок в доказательстве. Для наших целей, однако, этого неравенства вполне достаточно.

Мы докажем теорему для случая, когда $f \in \mathscr{C}^{m+p+q+1}$. С помощью перехода к пределу полученный результат распространяется на функции, у которых

$$|D^{m+p+1,\,q}f|_1 < \infty.$$

Пусть сначала a — нормальный оператор. Применяя тождество (6.1) леммы 6.1 к произведению $f\bar{f}$ и отступая от обозначений (1.3), мы получим соотношение

$$2\,\mathrm{Re}\,\Delta a\bar{b}f\bar{f} = \sum D_j B^j f\bar{f} + B^0 f\bar{f}, \qquad \Delta = \Delta^{p,\,q},$$

интегрирование которого по V дает

$$\int B^1 f\bar{f}\,dS = \int B^1 f\bar{f}\,dS_0 - \int B^0 f\bar{f}\,dV + 2\int \operatorname{Re} \Delta a\bar{b} f\bar{f}\,dV. \tag{2}$$

Запишем последний интеграл как двойной:

$$\int_0^t d\tau \int 2\operatorname{Re} \Delta a\bar{b} f\bar{f}\,dS_\tau.$$

Применяя неравенство Шварца к внутреннему интегралу и неравенства Гёльдера к результату, мы можем оценить двойной интеграл посредством

$$2\,|D^{p,q}af|_1\,|D^{p,q}f|_\infty \leqslant c\,|D^{p,q}af|_1\,|D^{m+p,q}f|_\infty.$$

Наконец, с помощью очевидных оценок для других двух членов правой части (2) можно показать, что она не превосходит величины

$$c\,(|D^{m+p,q}f,\ S_0|^2 + |D^{m+p,q}f|^2 + |D^{p,q}af|_1\,|D^{m+p,q}f|_\infty). \tag{3}$$

Пусть теперь b — гиперболический оператор, разделяющий a. Тогда, согласно теореме 6.1, левая часть (2) мажорирует

$$c^{-1}\,|D^{m+p,q}f,\ S|^2 - c\,|D^{m+p-1,q}f,\ S|^2. \tag{4}$$

Интегрируя тождество

$$D_1|D_\alpha f(x)|^2 = D_1 D_\alpha f(x)\,\overline{D_\alpha f(x)} + D_\alpha f(x)\,\overline{D_1 D_\alpha f(x)},$$
$$[\alpha] \leqslant m+p-1,\ q,$$

по V и производя очевидные оценки, получаем, что

$$|D^{m+p-1,q}f,\ S|^2 \leqslant |D^{m+p-1,q}f,\ S_0|^2 + 2\,|D^{m+p,q}f|_1^2. \tag{5}$$

Комбинируя (3), (4) и (5), мы получаем

$$|D^{m+p,q}f,\ S|^2 \leqslant c\,|D^{m+p,q}f|_1^2 + c\,|D^{m+p,q}f,\ S_0|^2 +$$
$$+ c\,|D^{p,q}af|_1\,|D^{m+p,q}f|_\infty.$$

Здесь два последних члена не убывают с ростом t. Интегрируя это неравенство и используя лемму 1.7.1, а также очевидное соотношение

$$|D^{m+p,q}f|^2 = \int_0^t |D^{m+p,q}f,\ S_\tau|^2\,d\tau,$$

мы найдем, что

$$|D^{m+p,q}f, S|^2 \leqslant c\,|D^{m+p,q}f, S_0|^2 + c\,|D^{p,q}af|_1\,|D^{m+p,q}f|_\infty.$$

Поскольку правая часть здесь не убывает, такая же оценка имеет место и для $|D^{m+p,q}f|_\infty$. Заметим, что для любого $\varepsilon > 0$

$$2\,|D^{p,q}af|_1\,|D^{m+p,q}f|_\infty \leqslant \varepsilon\,|D^{m+p,q}f|_\infty^2 + \varepsilon^{-1}\,|D^{p,q}af|_1^2.$$

Если теперь ε достаточно мало, то из двух последних неравенств следует, что

$$|D^{m+p,q}f|_\infty^2 \leqslant c\,|D^{m+p,q}f, S_0|^2 + c\,|D^{p,q}af|_1^2. \tag{6}$$

Представим оператор a в виде

$$a = a_0 D_1^{m+1} + a',$$

где оператор a' имеет порядок не выше m, 1. Отсюда немедленно следует, что для любого $[\alpha] \leqslant m+p$, q ($p > 0$) оператор $D_\alpha f$ является линейной комбинацией всех производных $D_\alpha f$, $[\alpha] \leqslant m$, $p+q$, и $D_\beta af$, $[\beta] \leqslant p-1$, q, и обратно. Это означает, что

$$|D^{m+p,q}f, S_0|^2 \sim |D^{m,p+q}f, S_0|^2 + |D^{p-1,q}af, S_0|^2.$$

Подставляя последнее соотношение в (6) и извлекая квадратный корень, мы получаем утверждение теоремы в случае, когда оператор a нормален. Для завершения доказательства достаточно заметить, что

$$|D^{p,q}af|_1 \sim |D^{p,q}a_0^{-1}af|_1, \quad |D^{p-1,q}af, S_0| \sim |D^{p-1,q}a_0^{-1}af, S_0|.$$

8. Некоторые линейные пространства. Прежде чем двигаться дальше, мы введем некоторые линейные пространства, нужные для дальнейшего. Будем предполагать, что значения всех рассматриваемых функций лежат в χ-мерном комплексном пространстве Z_χ. Введем обозначения

$$z\bar{z}' = \sum z_k \bar{z}'_k, \quad |z|^2 = z\bar{z} = \sum z_k \bar{z}_k,$$

где $z = \{z_k\}_1^\chi$, и $z' = \{z'_k\}_1^\chi$ являются элементами Z_χ.

Как и раньше, $\mathscr{C}^k$ будет обозначать пространство всех непрерывно дифференцируемых в V до порядка k функций с компактными носителями. Вместо $\mathscr{C}^\infty$ мы будем писать просто $\mathscr{C}$. Если U является частью V, то через $H^{p,q}(U)$ обозначается пополнение $\mathscr{C}$ по норме

$$|D^{p,q}f, U|^2 = \int |D^{p,q}f(x)|^2\, dU,$$

где интегрирование ведется по U, а $dU = dx^1 \ldots dx^\nu$ при $U = V$ и $dU = dx^2 \ldots dx^\nu$, если U совпадает с S или его частью. Очевидно, что $H^{p,q}(U)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\Delta^{p,q}f, g, U) = \int \Delta^{p,q} f\bar{g}\, dU,$$

где, как и прежде, $\Delta^{p,q}$ обозначает двойной дифференциальный оператор

$$\sum D_\alpha \overline{D}_\alpha, \qquad [\alpha] \leqslant p,\ q.$$

Если $U = V$, то мы опускаем U слева, а при $p = q = 0$ и $U = V$ опускаем также $\Delta^{0,0}$, записывая просто

$$(f, g) = (\Delta^{0,0}f, g) = \int f\bar{g}\, dU\ . \tag{1}$$

При $U = S$ и $p > 0$ элементы пространства $H^{p,q}(S)$ оказываются функциями переменной x' со значениями в $Z_{(p+1)/}$, так как функции $f, D_1 f, \ldots, D_1^p f$ независимы на S. Ясно также, что положение плоскости $S = S_t$, т. е. значение t, не играет роли при описании перечисленных пространств.

Полное пространство $H^{p,q}(U)$ удобно описывать в терминах обобщенных функций (см. Л. Шварц [12]). Пусть сначала $U = V$, и пусть $\mathscr{D}$ — множество функций из $\mathscr{C}$, обращающихся в нуль в окрестностях S_0 и S. Любая локально интегрируемая функция f порождает сопряженно-линейный функционал

$$(f, g), \quad g \in \mathscr{D}.$$

Определим его производную $D_\alpha f$ как сопряженно-линейный функционал вида

$$(-1)^{|\alpha|}(f, D_\alpha g), \quad g \in \mathscr{D}.$$

Если существует такая локально интегрируемая функция f_α, что

$$(-1)^{|\alpha|}(f, D_\alpha g) = (f_\alpha, g),$$

то мы отождествляем $D_\alpha f$ и f_α и говорим, что $D_\alpha f$ локально интегрируема. Можно показать, что пространство $H^{p, q}(V)$ состоит из всех суммируемых с квадратом функций, производные которых порядка $\leqslant p$, q также суммируемы с квадратом, причем формулы для нормы и скалярного произведения остаются прежними. Мы опускаем доказательство этого факта, которое использует осреднения, вводимые в следующем пункте. При $U = S$ обобщенные функции определяются тем же способом, причем двойственность задается в этом случае соотношением

$$(f, g, S) = \int f\bar{g}\, dS.$$

Пространство $H^{p, q}(S)$ оказывается состоящим из всех интегрируемых с квадратом функций f, таких, что функции $D_1^j f$, $0 \leqslant j \leqslant p$, суммируемы с квадратом по плоскости S вместе со своими производными порядка $\leqslant p + q - j$. Формулы для нормы и скалярного произведения остаются прежними.

Для $U = V$ мы будем использовать и другие пространства. Обозначим через $L^{p, q}$ пополнение $\mathscr{C}$ по норме

$$|D^{p, q} f|_1 = \int_0^t |D^{p, q} f, S_\tau|\, d\tau. \qquad (2)$$

При этом $L^{p, q}$ оказывается сепарабельным банаховым пространством и может быть описано эквивалентным образом как совокупность всех локально интегрируемых функций с локально интегрируемыми производными порядка $\leqslant p$, q, удовлетворяющих условию

$$|D^{p, q} f|_1 < \infty.$$

Если $f \in L^{p, q}$, то для почти всех τ $f \in H^{p, q}(S_\tau)$ и

$$|D^{p, q} f, S_\tau| < \infty.$$

Рассмотрим подпространство $B^{p,q}$ пространства $L^{p,q}$, определяемое условием

$$|D^{p,q}f|_{\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{0 \leqslant \tau \leqslant t} |D^{p,q}f, S_{\tau}| < \infty. \tag{3}$$

Это также сепарабельное банахово пространство. Его можно описать как множество локально интегрируемых функций с локально интегрируемыми производными порядка $\leqslant p, q$, удовлетворяющих условию $|D^{p,q}f|_{\infty} < \infty$. Пространство $B^{p,q}$ шире, чем пополнение $\mathscr{C}$ по норме (3), обозначаемое в дальнейшем через $C^{p,q}$. Это последнее является подпространством $B^{p,q}$, характеризуемым тем свойством, что функция $f(\tau, x')$ непрерывна как элемент пространства $H^{p,q}(S_0)$.

Введем, далее, подпространства $L_0^{p,q}$, $B_0^{p,q}$ и $C_0^{p,q}$ пространств $L^{p,q}$, $B^{p,q}$, $C^{p,q}$, состоящие из функций, для которых $D^{p-1}f = 0$ на S в первых двух случаях и $D^p f = 0$ на S в последнем. При $p = 0$ первое из этих условий выпадает. Это условие имеет смысл, так как, в силу доказываемой ниже леммы, $L^{p,q} \subset C^{p-1,q}$ при $p > 0$. Пусть $\mathscr{C}_0$ обозначает множество функций из $\mathscr{C}$, обращающихся в нуль в окрестности S. Очевидно, что пространства $L_0^{p,q}$ и $C_0^{p,q}$ являются пополнениями $\mathscr{C}_0$ по нормам (2) и (3) соответственно.

Следующая лемма устанавливает некоторые свойства введенных пространств. Мы полагаем, как и прежде, $A^p = A^{p,0}$, где $A = L$, L_0, B, B_0, C, C_0 или H.

Лемма 8.1. *Если* $p > 0$, *то*

$$L^{p,q} \subset C^{p-1,q}. \tag{4}$$

Пространство B^0 *является сопряженным к* L^0. *Любая ограниченная последовательность* $\{f_j\}_1^{\infty} \in B^{p,q}$ *содержит некоторую подпоследовательность* $\{g_j\}_1^{\infty}$, *имеющую слабый предел* $f \in B^{p,q}$ *в том смысле, что*

$$(D_{\alpha} g_j, h) \to (D_{\alpha} f, h), \quad h \in L^0, \tag{5}$$

когда $j \to \infty$ *и* $[\alpha] \leqslant p, q$. *Предельная функция* f *удовлетворяет неравенству*

$$|D^{p,q} f|_\infty \leqslant \underline{\lim}\, |D^{p,q} g_j|_\infty. \tag{6}$$

Доказательство. Если $f \in \mathscr{C}$ и τ, τ' лежат в интервале $0, t$, то

$$f(\tau, x') = \int_{\tau'}^{\tau} D_1 f(\tau'', x')\, d\tau'' + f(\tau', x').$$

Рассматривая $f(\tau, x')$ как элемент $H^{p-1,q}(S_0)$, мы получаем

$$|D^{p-1,q} f,\ S_\tau| \leqslant \left| \int_{\tau'}^{\tau} |D^{p-1,q} D_1 f,\ S_{\tau''}|\, d\tau'' \right| + |D^{p-1,q} f,\ S_{\tau'}|. \tag{7}$$

Отсюда интегрирование по τ' от 0 до t дает нам

$$t\,|D^{p-1,q} f,\ S_\tau| \leqslant |D^{p-1,q} D_1 f|_1 + |D^{p-1,q} f|_1 \leqslant 2\,|D^{p,q} f|_1,$$

так что

$$t\,|D^{p-1,q} f|_\infty \leqslant 2\,|D^{p,q} f|_1.$$

Следовательно, если некоторая последовательность функций сходится в $L^{p,q}$, она сходится в $C^{p-1,q}$. Это доказывает (4). Отметим попутно, что из (7) следует также неравенство

$$|D^{p-1,q} f|_\infty \leqslant |D^{p-1,q} f,\ S_0| + |D^{p,q} f|_1. \tag{8}$$

Пусть, далее, $A(f)$ обозначает некоторый линейный функционал над пространством L^0. В силу неравенства $|A(f)| \leqslant c\,|f|_1 \leqslant c|f|$, он имеет вид

$$A(f) = (f,\ h), \quad h \in H^0.$$

Полагая $f = \varphi(x^1)\,h$, находим, что

$$A(f) = \int_0^t \varphi(\tau)\,|h, S_\tau|^2\, d\tau.$$

Поскольку

$$|A(f)| \leqslant c \int_0^t |\varphi(\tau)| |h, S_\tau| \, d\tau,$$

а φ выбрано произвольно, имеем $|h, S_\tau| \leqslant c$ для почти всех τ. Следовательно, B^0 — пространство, сопряженное к L^0.

Перейдем к доказательству последней части леммы. Если $f \in B^{p, q}$ и $[\alpha] \leqslant p, q$, то $D_\alpha f \in B^0$. Поскольку B^0 — сопряженное пространство, в силу хорошо известной теоремы о банаховых пространствах, мы можем выделить подпоследовательность $\{g_j\}_1^\infty$, такую, что

$$(D_\alpha g_j, f) \to (g_\alpha, h), \quad j \to \infty, \; h \in L^0,$$

где $g_\alpha \in B^0$. Выбирая функцию $h \in \mathscr{C}$ так, чтобы она была равна нулю на S и S_0, мы получаем отсюда, что

$$(g_\alpha, h) = (-1)^{|\alpha|} (f, D_\alpha h),$$

где $f = g_\alpha$ при $|\alpha| = 0$. Следовательно, g_α является производной $D_\alpha f$, так что (5) доказано.

Для доказательства (6) заметим, что каждая функция $h \in \mathscr{C}$ определяет линейный функционал $(f, h) = \int f \bar{h} dV$ на $B^{p, q}$ и равенство $(f, \mathscr{C}) = 0$ влечет $f = 0$. Поэтому $\mathscr{C}$ слабо плотно в пространстве B', сопряженном к $B^{p, q}$. Обозначим через E' единичную сферу в B'. Тогда по хорошо известному свойству банаховых пространств

$$|D^{p, q} f|_\infty = \sup |(f, h)|, \quad h \in E'.$$

Так как множество $K = E' \cap \mathscr{C}$ слабо плотно в E', то, в силу одного из вариантов теоремы Хана — Банаха, выполняется неравенство

$$|D^{p, q} f|_\infty \leqslant \sup |(f, h)|, \quad h \in K.$$

Выбирая функцию $h \in K$ таким образом, чтобы значение $|(f, h)|$ было близко к левой части последнего неравенства и замечая, что при $j \to \infty$

$$|D^{p,q} g_j|_\infty \geqslant |(g_j, h)| \to |(f, h)|,$$

мы приходим к соотношению (6).

Следуя Л. Шварцу, мы введем пространства, сопряженные к рассмотренным выше, используя при этом различные расширения двойственностей

$$(f, g, U) = \int f\bar{g}\,dU, \quad U = V \text{ или } S. \tag{9}$$

Элементами этих пространств являются обобщенные функции, т. е. линейные функционалы над пространством $\mathscr{C}$ с соответствующей топологией в нем, выраженные в терминах двойственности. Лере и Лакс широко использовали подобные пространства в своих работах по гиперболическим уравнениям. Они рассматривали лишь гильбертовы пространства. Мы получим несколько лучшие результаты за счет введения подходящих банаховых пространств.

Пусть, как и прежде, $\mathscr{C}_0$ обозначает множество функций из $\mathscr{C}$, обращающихся в нуль в окрестности S. Мы определим пространства $L^{-p,-q}$ и $C^{-p,-q}$ как пополнения $\mathscr{C}$ по нормам

$$|D^{-p,-q} f|_1 = \sup \frac{|(f, g)|}{|D^{p,q} g|_\infty}, \qquad g \in \mathscr{C}_0,$$

и

$$|D^{-p,-q} f|_\infty = \sup \frac{|(f, g)|}{|D^{p,q} g|_1}, \quad g \in \mathscr{C}_0,$$

соответственно. Как $C^{-p,-q}$, так и $L^{-p,-q}$ оказываются пространствами обобщенных функций, причем $C^{-p,-q} \subset L^{-p,-q}$ и оба они содержатся в пространстве $C_0^{-p,-q}$, сопряженном к $C_0^{p,q}$ относительно двойственности (1), т. е. (9) при $U = V$. Пользуясь последним обозначением, мы должны различать случаи $+p$ и $-p$ при $p = 0$.

Определим теперь пространство $B^{-p,-q}$ как сопряженное к $L_0^{p,q}$ относительно двойственности (1). Поскольку $L_0^{p,q} \supset C_0^{p,q}$, а $\mathscr{C}_0$ плотно в обоих пространствах и поскольку для любого элемента $f \in C^{-p,-q}$ выполняется неравенство

$$|(f, h)| \leqslant \text{const}\, |D^{p,q} h|_1, \quad h \in \mathscr{C}_0,$$

мы имеем

$$C^{-p,\,-q} \subset B^{-p,\,-q} \subset C_0^{-p,\,-q}.$$

Мы увидим ниже, что сопряженным к $L^{-p,\,-q}$ является пространство $B_0^{p,\,q} \subset L_0^{p,\,q}$. Комбинируя эти результаты, мы получаем следующую цепочку включений:

$$C^{-p,\,-q} \subset B^{-p,\,-q} \subset L^{-p,\,-q} \subset C_0^{-p,\,-q}.$$

Следующая лемма дает представление о природе элементов $L^{-p,\,-q}$.

Лемма 8.2. *Всякий линейный функционал F над $\mathscr{C}_0$ вида*

$$F(h) = (D_\alpha h,\ g), \quad h \in \mathscr{C}_0, \quad [\alpha] \leqslant p,\ q,$$

где $g \in L^0$ принадлежит пространству $L^{-p,\,-q}$.

Доказательство. Пусть $J^{\mp}$ — осреднения, вводимые в следующем пункте. Тогда

$$J^- h(x) = \int j(y - x)\, h(y)\, dy,$$

$J^- \mathscr{C}_0 \subset \mathscr{C}_0$ и

$$D_\alpha J^- h(x) = \int (-1)^{|\alpha|} j_\alpha (y - x)\, h(y)\, dy = \\ = \int j(y - x)\, D_\alpha h(y)\, dy = J^- D_\alpha h(x),$$

где $j_\alpha(x) = D_\alpha j(x)$. Значит,

$$F(J^- h) = (h,\ G),$$

где

$$G(y) = \int (-1)^{|\alpha|} j_\alpha (y - x)\, g(x)\, dx$$

является функцией из $\mathscr{C}$. Далее,

$$F(J^- h) - F(h) = (D_\alpha h,\ J^+ g - g),$$

где

$$J^+ g(x) = \int j(x - y)\, g(y)\, dy,$$

а поэтому

$$|F(J^- h) - F(h)| \leqslant |D^{p,\,q} h|_\infty |J^+ g - g|_1,$$

ибо $[\alpha] \leqslant p, q$. Согласно лемме 9.1 следующего пункта,

$$|J^+g - g|_1 \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$. Отсюда и следует, что $F \in L^{-p,-q}$.

Лемма 8.3. *Пространства* $B^{0,q}$ *являются сопряженными к* $L^{0,-q}$; *при* $p > 0$ *пространства* $B_0^{p,q}$ *являются сопряженными* к $L^{-p,-q}$.

Замечание. Эта лемма вместе с определением пространства $B^{-p,-q}$ показывает, что пространства $B_0^{p,q}$ и $B^{-p,-q}$ являются сопряженными к $L^{-p,-q}$ и $L_0^{p,q}$ соответственно.

Доказательство. Пусть $L(f)$ — линейный функционал над $L^{-p,-q}$, так что

$$|L(f)| \leqslant c \sup \frac{|(f, g)|}{|D^{p,q}g|_\infty}, \qquad g \in \mathscr{C}_0.$$

Если функция $f \in \mathscr{C}$ обращается в нуль в окрестности S_0, то

$$(D_\alpha f, g) = (-1)^{|\alpha|}(f, D_\alpha g).$$

Следовательно, при $[\alpha] \leqslant p, q$

$$|L(D_\alpha f)| \leqslant c|f|_1.$$

Это верно, в частности, когда $|\alpha| = 0$, так что

$$L(f) = (f, h), \quad h \in B^0.$$

Далее, для любого α, $[\alpha] \leqslant p, q$, существует элемент $h_\alpha \in B^0$, такой, что

$$(D_\alpha f, h) = (-1)^{|\alpha|}(f, h_\alpha), \tag{10}$$

если f обращается в нуль в некоторой окрестности S_0. Следовательно, $h \in B^{p,q}$. В случае $p > 0$, полагая $D_\alpha = D_1$, мы получим

$$(f, h, S) = (D_\alpha f, h) + (f, h_\alpha),$$

где правая часть ограничена величиной $|f|_1$ с точностью до постоянного множителя. Это возможно лишь тогда, когда $h = 0$ на S. Сходные рассуждения показывают, что $D_1^j h = 0$ на S при $j < p$.

Остается показать, что любой элемент $h \in B^{p,q}$, удовлетворяющий условию $D^{p-1}h = 0$ на S при $p > 0$, лежит в сопряженном к $L^{-p,-q}$ пространстве. Поскольку

$$|(f, h)| = |D^{p,q}h|_\infty \cdot \frac{|(f, h)|}{|D^{p,q}h|_\infty}, \quad h \neq 0,$$

то для доказательства достаточно оценить частное в правой части этого соотношения аналогичным частным, но с заменой h на произвольную функцию $g \in \mathscr{C}_0$. Действительно, отсюда будет следовать, что

$$|(f, h)| \leqslant |D^{p,q}h|_\infty |D^{-p,-q}f|_1.$$

Пусть теперь J^- обозначает одно из осреднений, вводимых в следующем пункте. Имеем тогда $J^-h \in \mathscr{C}_0$ и

$$(f, J^-h) \to (f, h), \text{ когда } \varepsilon \to 0.$$

Далее, как будет показано в лемме 9.1,

$$|D^{p,q}J^-h|_\infty \leqslant |D^{p,q}h|_\infty.$$

Это завершает доказательство леммы.

Определим, наконец, пространства

$$A^{p,-q} \text{ и } A^{-p,q}, \quad A = L,\ L_0,\ B,\ B_0,\ C,\ C_0, \tag{11}$$

с индексами, имеющими противоположные знаки. Все возможные случаи будут действительно встречаться. Исключение представляют пространства $L_0^{-p,\pm q}$ и $B_0^{-p,\pm q}$, которые мы не определяем, ибо условие $D^{-p-1}f = 0$ на S бессодержательно в пространствах $L^{-p,\pm q}$ и $B^{-p,\pm q}$.

Начнем с введения пространств $H^{p,-q}(S)$, которые удобно описывать в терминах преобразования Фурье. Пусть

$$Ff(t, \xi') = \int e^{-ix'\xi'} f(t, x')\, dS,$$

где $x' = \{x^k\}_2^\nu$ и $\xi' = \{\xi_k\}_2^\nu$, — преобразование Фурье функции $f \in \mathscr{C}$ относительно переменных x'. Если S' обозначает $(\nu - 1)$-мерное пространство с элементом объема $dS' = (2\pi)^{1-\nu} d\xi'$, то по формуле Парсеваля имеем

$$\int |Ff|^2\, dS' = \int |f|^2\, dS.$$

Пусть $\hat{\mathscr{C}} \subset \mathscr{C}$ — множество бесконечно дифференцируемых функций f, определенных на V и таких, что для любого полинома Q и для любой производной D_α функции $QD_\alpha f$ ограничены. Хорошо известно, что

$$F\hat{\mathscr{C}} = \hat{\mathscr{C}}$$

(Л. Шварц). Положим

$$Q = Q^{0,\,2q}(\xi) = \sum \xi_\gamma^2, \quad [\gamma] \leqslant 0, q.$$

Из того, что $Q\mathscr{C} = \hat{\mathscr{C}}$, мы заключаем, что

$$\hat{T}\hat{\mathscr{C}} = \hat{\mathscr{C}},$$

где $\hat{T}$ — дифференциальный оператор

$$\hat{T} = \hat{T}^{0,2q} = \sum (-1)^{|\gamma|} D_\gamma D_\gamma, \quad [\gamma] \leqslant 0,\ q.$$

Введем для этого оператора еще и другое обозначение:

$$T^{0,\,-2q} = \hat{T}^{0,\,2q},$$

и пусть $\hat{T}^{0,\,-2q} = T^{0,\,2q}$ является обратным оператором. Положим по определению

$$|D^{p,\,-q} f,\ S| = |D^{p,\,q} \hat{T}^{0,\,-2q} f,\ S|, \quad f \in \hat{\mathscr{C}}.$$

Пусть $H^{p,\,-q}(S)$ — пополнение $\hat{\mathscr{C}}$ или $\mathscr{C}$ по этой норме. Оно оказывается гильбертовым пространством, причем отображение

$$f \longrightarrow T^{0,\,2q} f$$

определяет унитарное преобразование

$$H^{p,\,-q}(S) \longrightarrow H^{p,\,q}(S).$$

Этот факт мы коротко запишем в виде

$$T^{0,\,2q} H^{p,\,-q}(S) = H^{p,\,q}(S).$$

Таким образом, пространства $H^{0,\,q}(S)$ и $H^{0,\,-q}(S)$ оказываются сопряженными друг к другу относительно некоторого расширения двойственности

$$(f,\ g,\ S) = \int f\bar{g}\, dS.$$

В самом деле, если f, $g \in \hat{\mathscr{C}}$, то интегрирование по частям дает нам

$$(\hat{T}^{0,\,2q}f,\ g,\ S) = (\Delta^{0,\,q}f,\ g,\ S)$$

и, следовательно,

$$|D^{0,\,q}f,\ S| = \sup \frac{|(\Delta^{0,\,q}f,\ g,\ S)|}{|D^{0,\,q}g,\ S|} = $$

$$= \sup \frac{(\hat{T}^{0,2q}f,\ g,\ S)}{|D^{0,\,q}g,\ S|},$$

так что, заменяя f на $\hat{T}^{0,\,-2q}f$, получаем

$$|D^{0,\,-q}f,\ S| = \sup \frac{|(f,\ g,\ S)|}{|D^{0,\,q}g,\ S|}, \qquad g \in \hat{\mathscr{C}}. \tag{12}$$

Все это остается верным при замене q на $-q$. Элементами $H^{0,\,-q}(S)$ являются обобщенные функции на плоскости S. Пространства $H^{p,\,\pm q}(S)$ также сопряжены друг к другу относительно двойственности

$$(\Delta^{p,\,0}f,\ g,\ S),$$

причем соотношение (12) принимает в этом случае вид

$$|D^{p,\,\mp q}f,\ S| \sim \sup \frac{|(\Delta^{p,\,0}f,\ g,\ S)|}{|D^{p,\,\pm q}g,\ S|}, \qquad g \in \hat{\mathscr{C}}.$$

Это легко показать с помощью преобразований Фурье. Действительно, по формуле Парсеваля

$$(\Delta^{p,\,0}f,\ g,\ S) = \int \sum \sigma_\beta Ff \cdot \overline{\sigma_\beta Fg}\, dS', \qquad |\beta| \leqslant p,$$

$$|D^{p,\,q}f,\ S|^2 = \int \sum |\sigma_\alpha Ff|^2\, dS',$$

$$|D^{p,\,-q}f,\ S|^2 = \int \sum |\sigma_\alpha Ff|^2 (Q^{0,2q})^{-2}\, dS',$$

где $[\alpha] \leqslant p, q$ и $\sigma = (D_1, i\xi_2, \ldots, i\xi_\nu)$. Из этих формул вытекает также следующая

Лемма 8.4. *Преобразования $T^{0,\,\pm 2q}$ являются линейными гомеоморфизмами*

$$H^{p,\,r}(S) \longleftrightarrow H^{p,\,r\pm 2q}(S),$$

где r — любое целое число, положительное, отрицательное или нуль.

Теперь можно определить пространства (11), полагая

$$A^{p,\,-q} = T^{0,\,-2q} A^{p,\,q},$$

где $A = L$, L_0, B, B_0, C или C_0. Это означает, например, что $L^{p,\,-q}$ является пополнением $\mathscr{C}$ или $\hat{\mathscr{C}}$ по норме

$$|D^{p,\,-q} f|_1 = \int_0^1 |D^{p,\,-q} f, S_\tau|\, d\tau$$

и аналогично в остальных случаях. Для пространств с отрицательным первым индексом мы полагаем

$$A^{-p,\,q} = T^{0,2q} A^{-p,\,-q}.$$

При этом пространство $B^{-p,\,q}$ оказывается сопряженным к $L^{p,\,-q}$ относительно двойственности (1) и доказательство следующей леммы сводится к непосредственной проверке.

Лемма 8.5. *Леммы 8.1 и 8.3 остаются верными в случае отрицательных q, причем $T^{0,2q}$ является линейным гомеоморфизмом*

$$A^{\pm p,\,r} \longleftrightarrow A^{\pm p,\,r+2q},$$

где r — любое целое число, положительное, отрицательное или нуль, $A = L$, L_0, B, B_0, C или C_0.

Следующее утверждение является аналогом леммы 8.2.

Лемма 8.6. *Каждый линейный функционал над $\mathscr{C}_0$ вида $F(h) = (D_\alpha h, g)$, $h \in \mathscr{C}_0$, $|\alpha| \leqslant p$, $g \in H^{0,\,q}$ принадлежит пространству $L^{-p,\,q}$.*

Доказательство предоставляется читателю.

9. Осредняющие операторы. Пусть $j_1 \geqslant 0$ — функция из $\mathscr{C}$, обращающаяся в нуль в окрестностях S_0 и S_1 и такая, что $\int j_1(x)\, dx = 1$. Положим

$$j(x) = \varepsilon^{-\nu} j_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0,$$

так что

$$\int j(x)\, dx = 1. \qquad (1)$$

Рассмотрим осредняющие операторы

$$J^{\pm}f(x)=\int j(\pm(x-y))\,f(y)\,dy,$$

где f — интегрируемая функция. Они оказываются сопряженными друг к другу, т. е.

$$(J^{+}f,\ h)=(f,\ J^{-}h),\quad h\in\mathscr{C}.$$

Переходя к пределу, мы видим, что это равенство имеет место и в том случае, когда f — обобщенная функция над пространством $\mathscr{C}_0$, ибо

$$J^{+}f(x)=(f,\ j_x),$$

где $j_x=j(x-y)$, рассматриваемая как функция y, принадлежит пространству $\mathscr{C}_0$ (если $\varepsilon<t$). Легко видеть, что $J^{+}f$ принадлежит $\mathscr{C}$ и обращается в нуль в окрестности S_0. Оператор J^{+} (J^{-}) сдвигает функции в положительном (отрицательном) направлении по оси x_1 и регуляризует их. В частности, $J^{-}\mathscr{C}_0\subset\mathscr{C}_0$. Докажем, следуя Фридрихсу ([2] стр. 369—370), следующую лемму.

Лемма 9.1. *Пусть p и q неотрицательные целые числа, и пусть $A=A^{p,\pm q}$ обозначает одно из следующих пространств:*

$$L_0^{p,\pm q},\ H_0^{p,\pm q},\ C_0^{p,\pm q}\ \text{или}\ B_0^{p,\pm q}\tag{2}$$

с соответствующими нормами

$$\|f\|=|D^{p,\pm q}f|_{\lambda}\quad(\lambda=1,\ 2,\ \infty).$$

Если $f\in A$, то функция $J^{-}f$ бесконечно дифференцируема, обращается в нуль в некоторой окрестности S и также принадлежит пространству A, причем

$$\|J^{-}f\|\leqslant\|f\|,\tag{3}$$

$$\|J^{-}f-f\|\to 0\ \text{при}\ \varepsilon\to 0\quad(A\neq B^{p,\pm q}),\tag{4}$$

$$\|J^{-}f\|\to\|f\|\ \text{при}\ \varepsilon\to 0.\tag{5}$$

Если $a=a(x,D)$ — нормальный дифференциальный оператор порядка $m+1$, причем

$$a\in\mathrm{Lip}^{p,q},\quad Pa\in\mathrm{Lip}^{1},$$

то

$$|D^{p,q}(aJ^- - J^-a)f|_\lambda \leqslant c|D^{m+p,q}f|_\lambda \quad (f \in A^{m+p,q} \cap L^{m+1,q}), \quad (6)$$

где константа c зависит только от

$$\sigma^{p,q}(a) + \sigma^1(Pa).$$

Замечание 1. Если $p=0$, то пространства (2), за исключением $C_0^{p,\pm q}$, оказываются инвариантными относительно изменения направления на оси x^1, поскольку, согласно определению, функции, составляющие эти пространства, не удовлетворяют никаким граничным условиям на S. Поэтому для $p=0$ и $A \neq C_0^{p,\pm q}$ соотношения (3), (4) и (5) сохраняются при замене оператора J^- оператором J^+.

Доказательство. Пространства $A=A^{p,q}$ и $A=A^{p,-q}$, различающиеся знаком при втором индексе, мы будем обозначать соответственно через $A=A^+$ и $A=A^-$ и говорить о них как о верхнем и нижнем случаях. Рассмотрим верхний случай. Очевидно, что функция

$$J^-f(x) = \int j(y-x) f(y)\, dy \quad (7)$$

бесконечно дифференцируема и обращается в нуль в некоторой окрестности S. Пусть

$$T = T^{0,-2q} = \sum (-1)^{|\gamma|} D_\gamma D_\gamma \quad ([\gamma] \leqslant 0, q)$$

— канонический гомеоморфизм, отображающий пространство A^+ на A^-. Очевидно, что если $f \in \mathscr{C}_0$, то $TJ^-f = J^-Tf$. Несложные рассуждения, использующие аппроксимацию, показывают, что операторы J^- и T перестановочны на всех функциях $f \in A^+$. Поэтому, если $g \in A^-$, то функция

$$J^-g = J^-Tf = TJ^-f, \quad (f = T^{-1}g \in A^+)$$

бесконечно дифференцируема и равна нулю в некоторой окрестности S, причем, согласно определению,

$$|D^{p,-q}J^-g|_\lambda = |D^{p,q}J^-f|_\lambda, \quad |D^{p,-q}g|_\lambda = |D^{p,q}f|_\lambda.$$

Следовательно, достаточно доказать соотношения (3), (4) и (5) в верхнем случае. Обратимся теперь к формуле (7). Продолжим функцию f за полосу V нулем и сделаем амену переменных $z=x-y$. Тогда получим

$$J^{-}f(x)=\int j(-z)\,f_z(x)\,dz, \tag{8}$$

где, в силу определения пространств (2), функция

$$f_z(x)=f(x-z)$$

ринадлежит пространству A, если $z_1\leqslant 0$; при этом

$$\|f_z\|=\|f,\ (V+z)\cap V\|\leqslant\|f,V\|=\|f\|.$$

Поскольку функция $j(-z)$ в (8) обращается в нуль при $z_1>0$, мы получаем

$$\|J^{-}f\|\leqslant\int j(-z)\,\|f_z\|\,dz\leqslant\|f\|\int j(-z)\,dz=\|f\|,$$

так что неравенство (3) доказано. Комбинируя (8) и соотношение

$$f(x)=\int j(-z)\,f(x)\,dz,$$

мы с помощью только что проведенных рассуждений получим неравенство

$$\|J^{-}f-f\|\leqslant\int j(-z)\,\|f_z-f\|\,dz. \tag{9}$$

Если, в частности, функция $f\in\mathscr{C}_0$, то, как легко установить элементарным предельным переходом, $\|f_z-f\|\to 0$, когда $|z|\to 0$, при условии, что $z_1\leqslant 0$. Отсюда и из (9) следует, что для $\varepsilon\to 0$

$$\|J^{-}f-f\|\to 0.$$

Далее, поскольку $A\neq B_0^{p,q}$, пространство A является замыканием пространства $\mathscr{C}_0$. Следовательно, для любого элемента $f\in A$ можно найти такую функцию $g\in\mathscr{C}_0$, что величина $\|f-g\|$ оказывается сколь угодно малой. Используя неравенство (3), мы находим

$$\|J^{-}f-f\|\leqslant\|J^{-}g-g\|+\|J^{-}(f-g)\|+$$
$$+\|f-g\|\leqslant\|J^{-}g-g\|+2\|f-g\|,$$

откуда и следует (4). Соотношение (5) вытекает непосредственно из (4), поскольку мы имеем, очевидно,

$$\bigl|\|f\|-\|J^{-}f\|\bigr|\leqslant\|f-J^{-}f\|.$$

Остается доказать (5) в случае, когда $A = B_0^{p,q}$. Согласно лемме 8.3, пространство A является в этом случае сопряженным к пространству $B = L^{-p,-q}$. Обозначим через K пересечение единичной сферы пространства B с пространством $\mathscr{C}$. Поскольку K плотно в этой сфере, мы находим, что для любого элемента $f \in A$

$$\|f\| = \sup |(f, h)|, \quad h \in K,$$

и, следовательно,

$$\|J^- f\| = \sup |(J^- f, h)|, \quad h \in K.$$

Очевидно, далее, что

$$(J^- f, h) = (f, J^+ h) \to (f, h), \text{ если } \varepsilon \to 0.$$

Последние две формулы показывают, что

$$\underline{\lim} \|J^- f\| \geqslant \|f\| \quad (\varepsilon \to 0).$$

Сопоставляя полученный результат с неравенством (3), мы получаем (5).

Обратимся теперь к доказательству неравенства (6). Пусть сначала функция f принадлежит $\mathscr{C}_0$, положим для простоты $J = J^-$. Для любой производной D_γ мы имеем

$$D_\gamma J f(x) = \int\limits_{V+x} j(y-x) D_\gamma f(y)\, dy = \int\limits_V j(z) D_\gamma f(x+z)\, dz.$$

Запишем теперь оператор $D_\gamma a$ в виде

$$a_\gamma(x, D) = \sum b_\beta(x) D_\beta,$$

где все производные стоят справа. Если $a \in \mathrm{Lip}^{p,q}$, $Pa \in \mathrm{Lip}^1$ и $[\gamma] \leqslant p, q$, то функции b_β принадлежат пространству Lip^0, причем $b_\beta(x) \in \mathrm{Lip}^1$ для $|\beta| = m + 1 + p + q$. Используя последнее замечание, мы находим, что

$$D_\gamma a J f(x) = \int j(z) a_\gamma(x, D) f(x+z)\, dz,$$

$$D_\gamma J a f(x) = \int j(z) a_\gamma(x+z, D) f(x+z)\, dz.$$

Разность между левыми частями написанных равенств представляет собой некоторую сумму членов вида

$$\int h_1(x, x+z)\, g(x+z)\, dz, \quad h_1 = j(z)\, h_0(x, x+z), \tag{9}$$

или

$$\int j(z)\,(h(x) - h(x+z))\, Dg(x+z)\, dz,$$

где g является производной функции f порядка $\leqslant m+p,\ q$, а $D = \partial/\partial x^k$ для некоторых $k > 1$ (вспомним, что оператор a нормален!). Далее, функция h_0 ограничена в $V \times V$, а $h \in \mathrm{Lip}^1$. После интегрирования по частям второе выражение принимает вид

$$\int h_2(x, z)\, g(x+z)\, dz, \tag{10}$$

где

$$h_2(x, z) = -Dj(z) \cdot (h(x) - h(x+z)) + j(z)\, Dh(x+z).$$

Итак, если $f \in \mathscr{C}_0$, то выражение

$$D_\gamma (aJ - Ja) f(x) \quad ([\gamma] \leqslant p,\ q)$$

оказывается суммой некоторого числа членов вида (9) и (10). Это утверждение с помощью предельного перехода без труда распространяется на функции

$$f \in L_0^{m+p,\, q} \cap L^{m+1,\, q}, \tag{11}$$

поскольку сходимость функций f_i в пространстве $L_0^{m+p,\, q} \cap L^{m+1,\, q}$ влечет за собой сходимость функций af_i и производных g_i в пространстве L^0. Отметим теперь, что

$$A^{m+p,\, q} \cap L^{m+1,\, q} \subset L_0^{m+p,\, q} \cap L^{m+1,\, q}.$$

Ясно, что функции h_1 и h_2 мажорируются некоторой функцией $\eta(z) \geqslant 0$, имеющей тот же носитель, что и $j(z)$, и обладающей тем свойством, что величина

$$\int \eta(z)\, dz$$

остается ограниченной при $\varepsilon \to 0$. Следовательно, **λ-нормы** функций (9) и (10) мажорируются величиной

$$\int \eta(z)\, |g(\cdot + z)|_\lambda\, dz \leqslant c\, |g|_\lambda \leqslant c\, |D^{m+p,\, q} f|_\lambda,$$

откуда

$$\sum |D_\gamma (aJ - Ja) f|_\lambda \leqslant c\, |D^{m+p,\, q} f|_\lambda \quad ([\gamma] \leqslant p,\ q).$$

Тем самым доказательство леммы завершено, ибо левая часть последнего неравенства мажорирует левую часть (6).

10. Основное неравенство. Мы можем теперь сформулировать основной результат нашей теории. Он вполне аналогичен утверждению теоремы 7.1 (при $k=0$) первой главы, с той разницей, что мы получаем не соотношение эквивалентности, а неравенство. Доказательство будет проведено частично в этом, частично в следующем пункте.

Пусть $a = \sum a_\alpha (x) D_\alpha$, $|\alpha| \leqslant m+1$, — дифференциальный оператор порядка $m+1$. Положим

$$|D^{-m,\,-n} a^* f|_1 = \sup \frac{|(f,\, ah)|}{|D^{m,\,n} h|_\infty}, \quad h \in \mathscr{C}_0. \tag{1}$$

Если функция f и коэффициенты оператора a достаточно гладки и

$$a^* = \sum (-1)^{|\alpha|} D_\alpha \bar{a}_\alpha,$$

то

$$(f,\, ah) \equiv (a^* f,\, h)$$

с точностью до граничных членов, а (1) согласуется с обозначениями п. 8; однако мы не предполагали существования a^* в качестве дифференциального оператора, а потому допускаем левую часть (1) лишь как обозначение для правой части.

Теорема 10.1. *Если оператор a гиперболичен, $a \in \mathrm{Lip}^{0,\,n}$, $Pa \in \mathrm{Lip}^1$ и $f \in L^{0,\,-n}$, то*

$$|D^{0,\,-n} f|_\infty \leqslant c\, |D^{-m,\,-n} a^* f|_1, \tag{2}$$

где постоянная c зависит только от $|a|_{0,\,n}$.

Прежде чем перейти к доказательству, мы сделаем несколько замечаний. Правая часть (2) может быть бесконечной, и в этом случае неравенство ни о чем нам не говорит. Однако, если при некотором значении t эта правая часть принимает конечное значение, то $f \in B^{0,\,-n}$.

Как указывалось выше, сформулированная теорема не вполне аналогична теореме 1.7.1, поскольку (2) представляет собой неравенство, а не соотношение эквивалентности. Было бы интересно выяснить, что соответствует в этом случае пространству N^0 и норме $|f|_{N^0}$.

Теорема 10.1 является следствием теоремы 7.1 и следующего утверждения.

Теорема 10.2. *В предположениях предыдущей теоремы пространство $a\mathscr{C}_0$ плотно в $L^{0,n}$.*

Действительно, теорема 7.1 в случае $p=0$, $q=n$ и перевернутого интервала V дает нам

$$|D^{m,n}h|_\infty \leqslant c\,|D^{0,n}ah|_1,$$

так что правая часть (2) мажорирует

$$c^{-1}\sup\frac{|(f, ah)|}{|D^{0,n}ah|_1}.$$

Если теорема 10.2 верна, то это выражение равняется

$$c^{-1}\,|D^{0,-n}f|_\infty.$$

Обратно, из теоремы 10.1 следует теорема 10.2. Действительно, сопряженным к $L^{0,n}$ является пространство $B^{0,-n}$, так что, если $f\in B^{0,-n}$ и $(f, a\mathscr{C}_0)=0$, то, в силу неравенства (2), $f=0$. В следующем пункте мы увидим, что теорема 7.1 также является следствием теоремы 10.1, которая оказывается, таким образом, основным результатом всей теории.

В приложениях важную роль играет тот факт, что теорема 10.1 остается справедливой для любой обобщенной функции $f\in L^{0,-n}$. Следующая лемма показывает, в частности, что теорему достаточно доказать для гладких функций.

Лемма 10.1. *Если теорема 10.1 верна для нормального оператора a и функции $f\in\mathscr{C}$, обращающейся в нуль в некоторой окрестности S_0, то она остается в силе и в общем случае.*

Доказательство. Положим для простоты

$$\varrho(f)=|D^{-m,-n}a^*f|_1=\sup\frac{|(f, ah)|}{|D^{m,n}h|_\infty},\quad h\in\mathscr{C}_0, \tag{3}$$

и допустим, что теорема 10.1 имеет место для функции $f\in L^{0,-n}$ и нормального оператора a. Тогда, если оператор $a = a_0 D_1^{m+1} + \ldots$ не нормален, мы получаем

$$|D^{0,-n}\bar{a}_0 f|_\infty \leqslant c\varrho(f),$$

положив в (3) $a = a_0 a_0^{-1} a$. Далее, имеем

$$|D^{0,-n}\bar{a}_0 f, S| = \sup \frac{|(\bar{a}_0 f, g)|}{|D^{0,n} g, S|},$$

а так как $(\bar{a}_0 f, g) = (f, a_0 g)$ и отображение $g \to a_0 g$ является линейным гомеоморфизмом $H^{0,n}(S) \leftrightarrow H^{0,n}(S)$, то мы получаем

$$|D^{0,-n}\bar{a}_0 f, S| \backsim |D^{0,-n} f, S|$$

и, следовательно,

$$|D^{0,-n} f|_\infty \sim |D^{0,-n}\bar{a}_0 f|_\infty \leqslant c\varrho(f).$$

В этом последнем соотношении уже содержится общее неравенство. Итак, достаточно доказать теорему 10.1 для случая нормального оператора a.

Предположим далее, что оператор a нормален, и покажем, что при доказательстве теоремы 10.1 достаточно ограничиться случаем, когда $f \in L^{0,-n}$ имеет компактный носитель. Действительно, пусть $\{\varphi_k\}_1^\infty$ — некоторая последовательность действительных функций из $\mathscr{C}$, сходящаяся к 1 при $k \to \infty$ равномерно на компактных подмножествах, причем

$$\sup_{x,k} |D^{m,n}\varphi_k(x)| < \infty.$$

Предположим, далее, что для $\varphi = \varphi_k$

$$|D^{0,-n}\varphi f|_\infty \leqslant c\varrho(\varphi f). \tag{4}$$

Имеем

$$(\varphi f, ah) = (f, a\varphi h) + (f, a_\varphi h),$$

где через a_φ обозначен дифференциальный оператор

$$a_\varphi = \varphi a - a\varphi = \sum a_\alpha(\varphi D_\alpha - D_\alpha \varphi).$$

Коэффициенты оператора a_φ принадлежат пространству $\mathrm{Lip}^{0,n}$, и порядок a_φ не превосходит m. Поэтому при достаточно большом c

$$|(f, a_\varphi h)| \leqslant |D^{0,-n} f|_1 |D^{0,n} a_\varphi h|_\infty \leqslant c |D^{0,-n} f|_1 |D^{m,n} h|_\infty.$$

)скольку, кроме того,

$$|D^{m,n}\varphi h|_\infty \leqslant c\,|D^{m,n}h|_\infty,$$

і получаем

$$\varrho(\varphi f) \leqslant c\varrho(f) + c\,|D^{0,-n}f|_1. \qquad (5)$$

)кажем теперь, что имеет место следующее неравенство:

$$|D^{0,-n}f|_\infty \leqslant \underline{\lim}\,|D^{0,-n}\varphi_k f|_\infty, \quad k \to \infty. \qquad (6)$$

самом деле, выбирая подходящим образом функцию $\mathscr{C}_0$, мы можем приблизиться к левой части (6) с лю-й степенью точности с помощью выражения

$$\frac{|(f,g)|}{|D^{0,n}g|_1}.$$

'о последнее является в свою очередь пределом после-)вательности

$$\frac{|(\varphi_k f, g)|}{|D^{0,n}g|_1} \leqslant |D^{0,-n}\varphi_k f|_\infty$$

)и $k \to \infty$, а потому (6) доказано. Устремляя теперь (5) k к ∞ и комбинируя получающийся результат (4), находим

$$|D^{0,-n}f|_\infty \leqslant c\,|D^{0,-n}f|_1 + c\varrho(f).$$

нтегрируя обе части этого неравенства и пользуясь тем, 'о

$$|D^{0,-n}f|_1 = \int_0^t |D^{0,-n}f, S_\tau|\,d\tau,$$

ı получаем требуемое соотношение

$$|D^{0,-n}f|_\infty \leqslant c\varrho(f). \qquad (7)$$

ля завершения доказательства леммы остается показать, 'о неравенство (7) выполняется для любого элемента $L^{0,-n}$, имеющего компактный носитель, при условии, 'о

$$|D^{0,-n}J^+f|_\infty \leqslant c\varrho(J^+f) \qquad (\varepsilon > 0 \text{ любое}).$$

С этой целью положим $J^{-}=J$ и заметим, что

$$(J^{+}f,\ ah)=(f.\ aJh)+(f,\ (Ja-aJ)\,h).$$

Применяя неравенства (3) и (6) леммы 9.1, мы получаем отсюда

$$|D^{0,-n}J^{+}f|_{\infty}\leqslant c\,|D^{0,-n}f|_{1}+c\varrho(f). \qquad (8)$$

Если $\varrho(f)<\infty$, что является нетривиальным случаем, то из неравенства (8) следует, что

$$|(f,\ J^{-}h)|=|(J^{+}f,\ h)|\leqslant \mathrm{const}\,|D^{0,n}h|_{1},$$

для любой $h\in\mathscr{C}_0$, откуда

$$|(f,\ h)|\leqslant \mathrm{const}\,|D^{0,n}h|_{1}$$

и, следовательно, $f\in B^{0,-n}$. Устремляя теперь в (8) ε к нулю и используя соотношение (5) леммы 9.1 для перевернутого интервала V и оператора J^{+} вместо J^{-}, находим

$$|D^{0,-n}f|_{\infty}\leqslant c\,|D^{0,-n}f|_{1}+c\varrho(f).$$

Интегрируя последнее неравенство, мы получаем требуемое.

11. Доказательство основного неравенства. Пусть $T=T^{0,2n}$—канонический гомеоморфизм между пространствами $L^{0,-n}$ и $L^{0,n}$. Тогда

$$|D^{0,-n}f|_{\infty}=|D^{0,n}Tf|_{\infty}\ \text{и}\ (f,\ ah)=(\Delta Tf,\ ah),$$

где $\Delta=\Delta^{0,n}$ — двойной дифференциальный оператор $\sum D_{\alpha}\overline{D}_{\alpha}$, $[\alpha]\leqslant 0,\ n$. Заменяя f на $T^{-1}f$, мы приходим к следующей формулировке теоремы 10.1: если $f\in L^{0,n}$ и неравенство

$$|(\Delta f,\ ah)|\leqslant\sigma\,|D^{m,n}h|_{\infty},\qquad h\in\mathscr{C}_0 \qquad (1)$$

выполняется с неубывающей функцией $\sigma=\sigma(t)$, то

$$|D^{0,n}f|_{\infty}\leqslant c\sigma. \qquad (2)$$

Используя лемму 10.1, мы увидим, что это утверждение достаточно доказать в случае, когда оператор a нормален и функция $T^{-1}f \in \mathscr{C}$ обращается в нуль в некоторой окрестности S_0. В терминах f это условие означает, что функция $f \in B = B^\infty$ обращается в нуль в окрестности S_0. Отсюда следует, в частности, что f бесконечно дифференцируема, но она не обязательно имеет компактный носитель.

Доказательство будет проведено с помощью индукции по порядку оператора a, в предположении справедливости теории для операторов степени $\leqslant m$. Пусть $b \in \mathrm{Lip}^\infty$ — нормальный гиперболический оператор, равномерно разделяющий a. Если $m = 0$, так что $a = D_1$, то мы полагаем $b = 1$. Очевидно, что в этом случае f можно записать в виде

$$f = bg,$$

где функция $g \in B$ обращается в нуль в окрестности S_0. Если $m > 0$, то можно проделать то же самое, воспользовавшись одним из следствий нашей теоремы, именно, теоремой 14.3, примененной к оператору b.

Доказательство будет разбито на две части. Во-первых, мы докажем, что неравенство

$$|(\Delta a g,\ bh)| \leqslant \sigma |D^{m,\,n} h|_\infty, \qquad h \in \mathscr{C}_0, \tag{3}$$

где $\sigma = \sigma(t)$ — неубывающая функция, влечет за собой

$$|D^{m,\,n} g|_\infty \leqslant c\sigma. \tag{4}$$

Отсюда в свою очередь тривиальным образом вытекает (2), ибо

$$|D^{0,\,n} f|_\infty = |D^{0,\,n} bg|_\infty \leqslant c\,|D^{m,\,n} g|_\infty.$$

Во второй части мы покажем, что можно заменить неравенство (3) соотношением

$$|(\Delta bg,\ ah)| \leqslant \sigma |D^{m,\,n} h|_\infty \tag{5}$$

и все же получить неравенство (4). Поскольку

$$(\Delta bg,\ ah) = (\Delta f,\ ah),$$

тем самым все будет доказано.

Установим сначала, что из (3) следует (4). Заметим, что если неравенство (3) имеет место для функции $h \in \mathscr{C}_0$, то предельный переход устанавливает его справедливость для тех функций $h \in B^{m,n}$, для которых $D^{m-1}h = 0$ на S. По теореме 14.3, уравнение

$$bh = bg \text{ в } V, \quad D^{m-1}h = 0 \text{ на } S$$

имеет решение $h \in B^{\infty}$. Подставляя именно эту функцию в (3), находим

$$\operatorname{Re}(\Delta ag,\ bg) \leqslant |(\Delta ag,\ bg)| \leqslant \sigma |D^{m,n}h|_{\infty}. \tag{6}$$

Применим теперь лемму 6.1 к левой части последнего неравенства. Имеем

$$2\operatorname{Re}\Delta abg\bar{g} = \sum D_j B^j g\bar{g} + B^0 g\bar{g},$$

откуда интегрированием по V получаем

$$2\operatorname{Re}(\Delta ag,\ bg) = \int B^1 g\bar{g}\, dS + \int B^0 g\bar{g}\, dV. \tag{7}$$

Все граничные члены, кроме первого члена справа, исчезают, так как $|D^{p,q}g|_{\infty} < \infty$ для любых p и q и $g = 0$ на S_0. Комбинируя (7) с теоремой 6,1, мы можем заключить, что выражение

$$c^{-1}|D^{m,n}g,\ S|^2 - c|D^{m-1,n}g,\ S|^2 - c|D^{m,n}g|^2$$

ограничивает снизу левую часть (6). Согласно (7.5), его можно заменить разностью

$$c^{-1}|D^{m,n}g,\ S|^2 - c|D^{m,n}g|^2. \tag{8}$$

Обратимся теперь к правой части (6). Запишем

$$h = g - u,$$

где

$$bu = 0 \text{ в } V, \quad D^{m-1}u = D^{m-1}g \text{ на } S.$$

Тогда из теоремы 7.1 следует, что

$$|D^{m,n}u|_{\infty} \leqslant c|D^{m-1,n+1}g,\ S| \leqslant c|D^{m,n}g,\ S|,$$

а потому

$$D^{m,n}h|_{\infty} \leqslant c|D^{m,n}g|_{\infty}.$$

Вместе с (6) и (8) последнее неравенство показывает, что

$$|D^{m,n}g,\ S|^2 \leqslant c|D^{m,n}g|^2 + c\sigma|D^{m,n}g|_\infty.$$

Поскольку с ростом t последний член здесь не убывает, мы можем проинтегрировать последнее неравенство, получив при этом

$$|D^{m,n}g,\ S|^2 \leqslant c\sigma|D^{m,n}g|_\infty$$

и такую же оценку для $|D^{m,n}g|^2_\infty$, так что соотношение (4) доказано.

Перейдем теперь ко второй части доказательства. Нам достаточно установить справедливость неравенства

$$|(\Delta ag,\ bh) + (\Delta bg,\ ah)| \leqslant c|D^{m,n}g|_1|D^{m,n}h|_\infty. \tag{9}$$

В самом деле, если (9) выполнено, то

$$|(\Delta ag,\ bh)| \leqslant |(\Delta bg,\ ah)| + c|D^{m,n}g|_1|D^{m,n}h|_\infty,$$

так что из (5) следует неравенство (3), в котором роль σ играет $\sigma_1 = c|D^{m,n}g|_1 + \sigma$. Но тогда верно и (4) с σ_1 вместо σ. Интегрируя его, мы приходим к требуемому неравенству (4).

Для доказательства (9) заметим, что левая часть может быть записана в виде

$$\left|\int M g\bar{h}\, dV\right|, \tag{10}$$

где M — двойной дифференциальный оператор

$$M = M(a,\ b) = \Delta a\bar{b} + \Delta b\bar{a}, \quad \bar{a} = \bar{a}(\bar{x},\ \bar{D}) \text{ и } \bar{b} = \bar{b}(\bar{x},\ \bar{D}).$$

Как будет видно из дальнейшего, оператор M представим в виде

$$M \equiv \sum (D_j + \bar{D}_j) M_j + M_0, \tag{11}$$

где операторы M_j $(j = 0, \ldots, \nu)$ имеют ограниченные коэффициенты и порядки $\leqslant m,\ n;\ m,\ n$. Отсюда следует тождество

$$Mg\bar{h} = \sum D_j(M_j g\bar{h}) + M_0 g\bar{h}.$$

При интегрировании его по V дивергенция исчезает, так что (10) равняется $\left|\int M_0 g\bar{h}\, dV\right|$, что в свою очередь ограничено сверху правой части (9).

Для доказательства (11) запишем M в виде

$$M = (\Delta a\bar{b} - a\bar{b}\Delta) + (\Delta b\bar{a} - b\bar{a}\Delta) + (a\bar{b} + b\bar{a})\Delta.$$

Из (6.3) и сопряженного к нему тождества следует, что выражения в первых двух скобках имеют вид (11), а лемма 5.1 утверждает то же относительно последнего члена. Тем самым доказательство утверждения, сформулированного в начале настоящего пункта, завершено.

12. Частично сопряженные операторы. Пусть

$$a = \sum a_\alpha D_\alpha$$

— некоторый дифференциальный оператор. Интегрируя по частям, мы можем записать выражение

$$(af,\ g) = \int af(x)\,\overline{g(x)}\,dx$$

в виде суммы граничных членов и интеграла от различных форм вида

$$Mf(x)\,\overline{g(x)} = \sum M_{\alpha\beta}(x)\, D_\alpha f(x)\, D_\beta \overline{g(x)}\,(-1)^{|\beta|}.$$

Перебрасывая все производные на g, мы получим форму

$$f(x)\,\overline{a^* g(x)},$$

где

$$a^* = \sum (-1)^{|\alpha|} D_\alpha \bar{a}_\alpha(x)$$

— формально сопряженный к a оператор. Нас будут интересовать частично сопряженные к a операторы или, точнее, их главные части. Мы сформулируем определение в терминах двойных дифференциальных операторов. Пусть

$$M = M(x,\ \bar{x},\ D,\ \bar{D}) = \sum M_{\alpha\beta}(x,\ \bar{x})\, D_\alpha \bar{D}_\beta\,(-1)^{|\beta|}$$

— двойной дифференциальный оператор. Определим его главную часть PM (в точке x, $\bar{x}$) как

$$PM = \sum M_{\alpha\beta}(x,\ \bar{x})\, D_\alpha \bar{D}_\beta\,(-1)^{|\beta|}, \quad |\alpha| = |\beta| = p,$$

где p — максимальный полный порядок входящих в M членов.

Определение. Двойной дифференциальный оператор M называется *частично сопряженным к оператору* a, если

$$PM(x,\ x,\ D,\ -D) = Pa(x,\ D).$$

Мы скажем, что оператор M *частично сопряжен к* a *в узком смысле*, если

$$\sum D_\beta M_{\alpha\beta}(x,\ x) D_\alpha = a(x,\ D).$$

Ясно, что оператор, частично сопряженный к a в узком смысле, является частично сопряженным к a. Возьмем хорошо известный пример: оператор $M = \sum a_{jk} D_j \overline{D}_k$ частично сопряжен к оператору $a = -\sum a_{jk} D_j D_k$; он частично сопряжен к a в узком смысле, если коэффициенты его — постоянные числа. Если a — оператор Лапласа, то интеграл соответствующей формы

$$\int Mf\bar{f}\,dx = \int \sum a_{jk} D_j f \overline{D_k f}\,dx$$

оказывается интегралом Дирихле.

Если двойной дифференциальный оператор M частично сопряжен к оператору a в узком смысле, то

$$\int Mf\bar{g}\,dx = (Mf,\ g) \equiv (af,\ g)$$

с точностью до граничных членов. Если же M не обладает указанным свойством, то это равенство оказывается уже неверным. Для образования частично сопряженного в узком смысле оператора мы должны потребовать дифференцируемости коэффициентов a, тогда как для существования частично сопряженного оператора нет необходимости в таком ограничении.

Порядки оператора M относительно D и $\overline{D}$ будут, как обычно, обозначаться парой чисел k; h или, если заданы двойные порядки D или $\overline{D}$, одним из следующих способов:

$$k,\ k';\ h, \qquad k;\ h,\ h', \qquad k,\ k';\ h,\ h'.$$

Эти числа зависят от точки x, $\bar{x}$.

Во избежание ненужной общности сделаем теперь несколько упрощающих предположений. Допустим, во-первых, что порядок оператора a не зависит от точки x.

Обозначим его через $m+1$. Во-вторых, ограничимся частично сопряженными к a операторами, имеющими порядок $m+1$ для любых значений x и $\overline{x}$.

Мы скажем, что частично сопряженный оператор M' *покрывается* оператором $M=\sum M_{\alpha\beta}D_\alpha\overline{D}_\beta(-1)^{|\beta|}$, если

$$PM'\equiv\sum M_{\alpha\beta}D_{\alpha'}\overline{D}_{\beta'}(-1)^{|\beta'|},$$

где $D_{\alpha'}D_{\beta'}=D_\alpha D_\beta$ и $|\alpha|+|\beta|=m+1$. В более общем определении частично сопряженный оператор M называется покрытым набором коэффициентов

$$\{b_\alpha(x, \overline{x})\},\quad |\alpha|=m+1,$$

не обязательно симметричных относительно перестановок внутри α, если

$$PM\equiv\sum b_\alpha D_\beta\overline{D}_\gamma(-1)^{|\gamma|},\quad D_\beta D_\gamma=D_\alpha.$$

Если индексы β и γ, таковы, что $|\beta|=k$ и, следовательно, $|\gamma|=m+1-k$, где k — фиксированное число между 0 и $m+1$, то

$$\text{порядок } PM=k;\ m+1-k. \tag{1}$$

Частично сопряженный оператор, удовлетворяющий этому условию, будет обозначаться с помощью индекса k наверху:

$$M=M^k.$$

В этом случае, очевидно, оператор M имеет единственный старший член

$$LM\equiv a_0(x)\,D_1^k\overline{D}_1^{m+1-k}(-1)^{m+1-k},$$

который оказывается оператором порядка k; $m+1-k$, частично сопряженным к старшему члену $La=a_0D_1^{m+1}$ оператора a. Мы будем говорить об a_0 как о старшем коэффициенте a и M.

Докажем теперь следующую лемму, в которой запись $M\in\mathrm{Lip}^{p,q}$ означает, что коэффициенты оператора M принадлежат пространству $\mathrm{Lip}^{p,q}$ в $V\times V$.

Лемма 12.1. *Пусть M^k и M^{k+1} $(k=0,\ldots,m)$ — два частично сопряженных к a оператора, удовлетворяю-*

щих условию (1), *и пусть один из них покрывается другим. Тогда*

$$PM^k - PM^{k+1} \equiv \sum (D_j + \overline{D}_j) N_j + N_0, \tag{2}$$

где порядки операторов N_j *не выше* k; $m-k$. *Если* M^k *и* M^{k+1} *принадлежат* $\mathrm{Lip}^{p,q}$ $(p>0)$, *то* $N_1, \ldots, \ldots, N_\nu \in \mathrm{Lip}^{p,q}$, $N_0 \in \mathrm{Lip}^{p-1,q}$. *Выражение*

$$PM^k D_h + PM^{k+1}\overline{D}_h, \quad h=1, \ldots, \nu \tag{3}$$

точно так же записывается в форме (2), *причем операторы* N_j *сохраняют прежнюю регулярность; однако порядки их в этом случае* $\leqslant k+1$; $m-k$, *а порядок оператора* N_1 *равен* k, 1; $m-k$.

Доказательство. Легко видеть, что при выводе соотношения (2) достаточно ограничиться простейшим случаем, когда

$$M^k = (-1)^{m+1-k} b_\alpha D_\beta \overline{D}_\gamma \qquad (|\beta| = k,\ |\gamma| = m+1-k), \tag{4}$$

$$M^{k+1} = (-1)^{m-k} b_\alpha D_{\beta'} \overline{D}_{\gamma'} \qquad (|\beta'| = k+1,\ |\gamma'| = m-k), \tag{5}$$

где $D_\alpha = D_\beta \overline{D}_\gamma = D_{\beta'} \overline{D}_{\gamma'}$. Несложные рассуждения показывают, что выражение (5) может быть получено из (4) с помощью некоторого числа замен вида $D_j\overline{D}_h \to \overline{D}_j D_h$ и $\overline{D}_j \to -D_j$ $(h, j = 1, \ldots, \nu)$. В силу этого повторное применение тождеств

$$g(D_j\overline{D}_h - \overline{D}_j D_h) = (D_h + \overline{D}_h) g D_j - (D_j + \overline{D}_j) g D_h - \\ - g_h D_j + g_j D_h \tag{6}$$

и однократное применение тождества

$$g(D_j + \overline{D}_j) = (D_j + \overline{D}_j) g - g_j,$$

где $g_p = (D_p + \overline{D}_p) g$, а $g = b_\alpha$, доказывают (2). Для доказательства второго утверждения леммы заметим, что, согласно обозначениям (4) и (5), оператор (3) может быть представлен как некоторая сумма членов вида

$$(-1)^{m+1-k} b_\alpha (D_\beta \overline{D}_\gamma D_h - D_{\beta'} \overline{D}_{\gamma'} \overline{D}_h).$$

Первый член в скобке переходит во второй при заменах вида $D_j\overline{D}_h \to \overline{D}_j D_h$. Применяя повторно тождество (6), мы находим, что оператор записывается в виде (2), где операторы N_j имеют требуемый порядок. В силу того, что дивергенция в правой части (6) обращается в нуль при $j=k$, ни один из членов порядка $k+1$ по D_1 не входит в сумму, образующую N_1. Это завершает доказательство леммы.

До сих пор мы не накладывали никаких ограничений на порядок неглавной части частично сопряженного к a оператора $M=M^k$, удовлетворяющего условию (1), кроме, конечно, очевидного требования, чтобы общий порядок ее был $\leqslant m$. В следующем пункте, где мы наложим такие ограничения, станет ясным, для чего нужно следующее определение.

Определение. Будем говорить, что $M=M^k$ $(k=0, \ldots, m)$ — частично сопряженный к a оператор *первого рода*, если

$$\text{порядок } (M^k - PM^k) \leqslant k;\ m-k, \tag{7}$$

и что $N=N^{k+1}$ $(k=0, \ldots, m)$ — частично сопряженный к a оператор *второго рода*, если

$$\text{порядок } (N^{k+1} - PN^{k+1}) \leqslant k;\ m-k. \tag{8}$$

Частично сопряженные к a операторы обоих родов являются, в известном смысле, двойственными по отношению друг к другу. Следующая лемма будет использована в п. 14 в связи с задачей Коши.

Лемма 12.2. *Пусть M^k и N^{k+1} $(k=0, \ldots, m)$ обозначают наборы частично сопряженных к a операторов первого и второго родов соответственно. Если оператор M^k покрывается оператором N^{k+1} или наоборот, то*

$$M^k - N^{k+1} \equiv \sum (D_j + \overline{D}_j) B_j + B_0, \tag{9}$$

где порядки операторов B_j будут $\leqslant k;\ m-k$. Если M^k и N^{k+1} принадлежат к $\mathrm{Lip}^{p,\,q}$, $p>0$, то $B_1, \ldots, \ldots, B_\nu \in \mathrm{Lip}^{p,\,q}$, а $B_0 \in \mathrm{Lip}^{p-1,\,q}$; если, кроме того, a — нормальный оператор, то $B_0 \in \mathrm{Lip}^{p,\,q-1}$. Далее, имеют место формулы

$$\overline{M}^k = N^{m+1-k}, \quad M^k = \overline{N}^{m+1-k}, \tag{10}$$

где сопряженность оператора понимается в том смысле, что

$$\overline{L}=(-1)^{m+1}\sum h_{\alpha\beta}\overline{D}_\alpha D_\beta, \quad \text{если} \quad L=\sum h_{\alpha\beta}D_\alpha\overline{D}_\beta.$$

Доказательство. Тождество (9) следует из леммы 12.1, а формулы (10) проверяются непосредственно.

13. Неравенства для частично сопряженных операторов. В этом пункте мы докажем для операторов, частично сопряженных к гиперболическому оператору, цепочку неравенств, вытекающих из теоремы 10.1. В конце пункта мы вернемся к обобщенному неравенству Фридрихса — Леви.

Пусть a — дифференциальный оператор порядка $m+1$ со старшим членом

$$La=a_0(x)D_1^{m+1}.$$

Возьмем частично сопряженные к a операторы первого рода

$$a^k=a^k(x,\ \overline{x},\ D,\ \overline{D})=\sum a^k_{\alpha\beta}D_\alpha\overline{D}_\beta(-1)^{|\beta|}, \quad k=0,\ \ldots,\ m,$$

главные части которых

$$Pa^k=\sum a^k_{\alpha\beta}(z)\,D_\alpha\overline{D}_\beta(-1)^{|\beta|},\ z=x \text{ или } \overline{x},\quad |\alpha|+|\beta|=m+1,$$

имеют порядок k; $m+1-k$ и старшие члены

$$La^k=a_0(z)\,D_1^k\overline{D}_1^{m+1-k}(-1)^{m+1-k}.$$

Запись $a^k\in\mathrm{Lip}^{p,\,q}$ означает, что все коэффициенты оператора a^k принадлежат к $\mathrm{Lip}^{p,\,q}$. Определим числа $\sigma^p(a^k)$ и $\sigma^{p,\,q}(a^k)$, как прежде (см. стр. 43 и 49), и введем нормы

$$|D^{-p,\pm n}a^kf|_1=\sup\frac{|(a^kf,\ g)|}{|D^{p,\ +n}g|_\infty},\quad g\in\mathscr{C}_0, \tag{1}$$

где $(a^kf,\ g)=\int a^kf\overline{g}\,dx$. Имеет место следующая

Теорема 13.1. *Пусть частично сопряженные к a операторы первого рода a^k ($k=0,\ \ldots,\ m$) выбраны так, что*

$$\textit{порядок}\ (Pa^k-La^k)\leqslant k;\ m-k,\ 1; \tag{2}$$

пусть $a^k \in \mathrm{Lip}^{0,n}$ *и* $a \in \mathrm{Lip}^{0,n}$ *является гиперболическим нормальным оператором, для которого* $Pa^k \in \mathrm{Lip}^1$. *Тогда*

$$|D^{k,-n}f|_\infty \leqslant c\,|D^{k-1,1-n}f,\ S_0| + c\,|D^{k-m,-n}a^k f|_1 \tag{3}$$

где $f \in L^{k,-n}$, *а константа* c *зависит только от*

$$\sigma^{0,n}(a^k) + |a|_0 + \sigma^1(Pa^k).$$

Если $k=0$, *то первый член в правой части отсутствует. Если* $f \in L^{k,n}$, *то при тех же условиях мы имеем*

$$|D^{k,n}f|_\infty \leqslant c\,|D^{k-1,1+n}f,\ S_0| + c\,|D^{k-m,n}a^k f|_1, \tag{4}$$

когда Pa^k *и, следовательно,* Pa *принадлежат* $\mathrm{Lip}^{0,n+1}$, *причем теперь постоянная* c *зависит от*

$$\sigma^{0,n+1}(Pa^k) + \sigma^{0,n}(a^k) + |a|_0 + \sigma^1(Pa^k).$$

Замечание 1. Если $k>0$, то $L^{k,\pm n} \subset C^{k-1,\pm n}$, откуда следует, что функция $D^{k-1}f$ определена на S_0. Поэтому правые части в неравенствах (3) и (4) определены, но они, конечно, могут быть бесконечными. Если же эти правые части конечны, то из указанных неравенств следует, что

$$f \in B^{k,\pm n}.$$

Замечание 2. Так как $(Pa^0 f, g) = (f, \overline{Pa}g)$, то первая часть теоремы является лишь новой формулировкой теоремы 10.1 для случая нормального оператора a. Если $k=0$, m, то требование нормальности оператора может быть опущено. При $0<k<m$ это возможно лишь при дополнительном предположении о дифференцируемости старшего коэффициента a, именно, что $a_0 \in \mathrm{Lip}^{k,n}$ или $\mathrm{Lip}^{m-k,n}$. Чтобы убедиться в этом, нам достаточно применить теорему к $a^k a_0^{-1}$ или $a_0^{-1}a^k$ соответственно. Детали доказательства предоставляются читателю. Условия (2) также можно опустить, наложив при этом более жесткие ограничения на дифференциальные свойства оператора a ($Pa^k \in \mathrm{Lip}^{1,n-1}$). Доказательство этого утверждения намечено ниже; детали его предоставлены читателю.

Доказательство. Пусть $\Delta = \Delta^{0,n}$ — двойной дифференциальный оператор $\sum D_\gamma \overline{D}_\gamma$, $[\gamma] \leqslant 0$, n, и пусть

$f \in L^{k, n}$. Положим

$$\varrho(a^k, f) = \sup \frac{|(a^k \Delta f, g)|}{|D^{m-k, n} g|_\infty}, \quad g \in \mathscr{C}_0. \tag{5}$$

Докажем вначале, что неравенство

$$|D^{k, n} f|_\infty \leqslant c\, |D^{k-1, 1+n} f, S_0| + c\varrho(a^k, f), \tag{6}$$

где первый член в правой части отсутствует при $k=0$, эквивалентно неравенствам (3) и (4).

Пусть $T = T^{0, -2n}$ — канонический гомеоморфизм $L^{k, +n} \to L^{k, -n}$, так что

$$|D^{k, n} f|_\infty = |D^{k, -n} Tf|_\infty,$$

$$|D^{k-1, 1+n} f, S_0| \sim |D^{k-1, 1-n} Tf, S_0|$$

для $f \in L^{k, n}$. Предположим, что справедлива следующая оценка:

$$|(a^k Tf, g) - (a^k \Delta f, g)| \leqslant c\, |D^{k, n} f|_1 \, |D^{m-k, n} g|_\infty. \tag{7}$$

Тогда из (6) следует соотношение (3), в котором f заменено на Tf, а справа добавлен член

$$c\, |D^{k, n} f|_1 = c\, |D^{k, -n} Tf|_1.$$

В свою очередь (3) с заменой f на Tf влечет за собой неравенство (6) с тем же дополнительным членом справа. Интегрируя полученные неравенства, мы видим, что они эквивалентны. Следовательно, достаточно доказать справедливость оценки (7). Поскольку оператор T перестановочен с оператором дифференцирования, имеем, в силу определения Δ,

$$(a^k Tf, g) = \sum (TD_\alpha f, \bar{a}^k_{\alpha\beta} D_\beta g)(-1)^{|\beta} =$$
$$= \sum (\Delta D_\alpha f, \bar{a}^k_{\alpha\beta} D_\beta g)(-1)^{|\beta|}.$$

Отсюда следует, если положить $a^k(\bar{x}) = a^k(\bar{x}, \bar{x}, D, \bar{D})$, что левая часть неравенства (7) принимает вид

$$\left| \int ((\Delta a^k(\bar{x}) - a^k(\bar{x})\Delta) f\bar{g})_{\bar{x}=x}\, dx \right|.$$

Так как оператор a^k — первого рода, удовлетворяет условию (2), принадлежит пространству $\mathrm{Lip}^{0, n}$ и имеет постоянный старший коэффициент, то двойной дифференциальный оператор $\Delta a^k(\bar{x}) - a^k(\bar{x})\Delta$ имеет ограниченные коэффициенты и порядок $\leqslant k,\ n;\ \ m-k,\ n$. Поэтому оценка (7) следует из неравенства Гёльдера. (Если (2) не выполнено и если $n>0$, что является нетривиальным случаем, то двойной дифференциальный оператор имеет порядок $\leqslant k,\ n;\ m-k+1,\ n-1$. Однако, он оказывается равным оператору порядка $k,\ n;\ m-k,\ n$ плюс некоторая дивергенция, которая порождает член, стоящий в левой части (7) и ограниченный сверху величиной

$$c\,(|D^{k,\,n}f|_1 + |D^{k-1,\,n}f,\ S_0|)\,|D^{m-k,\,n}g|_\infty,$$

что не нарушает наших рассуждений. В этом случае необходимо потребовать, чтобы $Pa^k \in \mathrm{Lip}^{1,\,n-1}$.)

Докажем теперь, что из (6) следует (4). Согласно (1), имеем

$$|D^{k-m,\,n}a^k f|_1 = \sup \frac{|(a^k f, g)|}{|D^{m-k,\,-n}g|_\infty},\quad g \in \mathscr{C}_0.$$

Замена g на Tg в числителе дает, в силу определения оператора Δ,

$$(a^k f,\ Tg) = (\Delta a^k f,\ g).$$

Если теперь доказать неравенство

$$|(\Delta a^k f,\ g) - (a^k \Delta f,\ g)| \leqslant c\,(|D^{k,\,n}f|_1 + \\ + |D^{k-1,\,n}f,\ S_0|)\,|D^{m-k,\,n}g|_\infty, \tag{8}$$

то с помощью интегрирования мы сразу приходим к эквивалентности соотношений (6) и (4). Рассмотрим двойной дифференциальный оператор

$$\Delta a^k - a^k\Delta,\quad a^k = a^k(x,\ x,\ D,\ \bar{D}).$$

Положим

$$b^k = a^k - Pa^k \quad \text{и} \quad Pa^k(x) = \sum \bar{D}_j A_j(x)$$

Здесь операторы $\{A_j\}_1^\nu$ имеют порядки $k;\ m-k$ и принадлежат $\mathrm{Lip}^{0,\,n+1}$, так как $Pa^k \in \mathrm{Lip}^{0,\,n+1}$. Обозначим через $[K,\ L]$ коммутатор $KL - LK$. Справедливо следующее тождество:

$$[\Delta,\ a^k] = \sum (D_j + \overline{D}_j)[\Delta,\ A_j] - \sum D_j [\Delta,\ A_j] + [\Delta.\ b^k].$$

Поскольку a нормален, порядок оператора $[\Delta,\ A_1]$ не превосходит $k-1;\ n;\ m-k,\ n$ и, следовательно, правая часть последнего равенства (с точностью до дивергенции) имеет порядок не выше $k,\ n;\ m-k$ и ограниченные коэффициенты. Тем самым (8) доказано.

Наконец, доказательство неравенства (6) будет проведено с помощью индукции от k к $k+1$. Случай $k=0$ совпадает по существу с теоремой 10.1. Отметим прежде всего, что достаточно установить (6) для однородного оператора $a^k = Pa^k$. В самом деле, из того, что порядок $(a^k - Pa^k)$ не выше $k;\ m-k$, следует, что

$$\varrho(a^k,\ f) \leqslant \varrho(Pa^k,\ f) + c\,|D^{k,\ n} f|_1.$$

Интегрируя, мы приходим к соотношению (6), в котором Pa^k заменяет a^k.

В дальнейшем мы будем предполагать, что операторы $a^k = Pa^k$ однородны для всех k. Пусть $f \in L^{k+1,\ n}$. Применяя неравенство (6) к некоторой производной $D_j f$ и замечая, что

$$|D^{k-1,\ 1+n} D_j f,\ S_0| \leqslant |D^{k,\ 1+n} f,\ S_0|,$$

получаем

$$|D^{k,\ n} D_j f|_\infty \leqslant c\,|D^{k,\ 1+n} f,\ S_0| + c\varrho(a^k,\ D_j f), \tag{9}$$

где

$$\varrho(a^k,\ D_j f) = \sup \frac{|(a^k \Delta D_j f,\ g)|}{|D^{m-k,\ n} g|_\infty},\quad g \in \mathscr{C}_0.$$

Докажем теперь неравенство

$$|(a^k \Delta D_j f,\ g) + (a^{k+1} \Delta f,\ D_j g)| \leqslant c\,(|D^{k+1,\ n} f|_1 + \\ + |D^{k,\ 1+n} f,\ S_0|)\ |D^{m-k,\ n} g|_\infty, \tag{10}$$

из которого следует, что

$$D^{k,\ n} D_j f|_\infty \leqslant c\,|D^{k+1,\ n} f|_1 + c\,|D^{k,\ 1+n} f, S_0| + c\varrho(a^{k+1}, f), \tag{11}$$

поскольку

$$\sup \frac{|(a^{k+1}\Delta f, D_j g)|}{|D^{m-k,\, n} g|_\infty} \leqslant \sup \frac{|(a^{k+1}\Delta f, D_j g)|}{|D^{m-k-1,\, n} D_j g|_\infty} \leqslant \varrho\,(a^{k+1}, f).$$

Для этого мы воспользуемся леммой 12.1, выбрав частично сопряженный оператор a^k, покрываемый оператором a^{k+1}. В лемме утверждается, что

$$a^k \Delta D_j + a^{k+1} \Delta \overline{D}_j \equiv \sum (D_h + \overline{D}_h) N_h + N_0,$$

где порядки операторов N_h будут $\leqslant k+1,\ n;\ m-k,\ n$, а порядок N_1 в точности равен $k,\ n+1;\ m-k,\ n$. При этом коэффициенты оператора N_0 ограничены, а коэффициенты всех остальных операторов N_h, $h>0$, лежат в Lip^1. Применяя последнее тождество к $f\overline{g}$ и интегрируя по V, мы получим

$$(a^k \Delta D_j f, g) + (a^{k+1} \Delta f, D_j g) = (N_0 f, g) - (N_1 f, g, S_0). \qquad (12)$$

Для того чтобы выражения $((D_h + \overline{D}_h) N_h f, g)$ и $(N_1 f, g, S_0)$ имели смысл, нам пришлось бы потребовать, например, чтобы $f \in L^{k+2,\, n}$; однако, в силу того, что соотношение (12) выполняется для $f \in \mathscr{C}$, оказывается применимым следующее рассуждение, использующее аппроксимацию.

Поскольку коэффициенты N_1 принадлежат Lip^1, а порядок N_1 равен $k,\ n+1;\ m-k,\ n$, этот оператор может быть записан в виде

$$N_1 = N_{11} - \sum D_h N_{1h}, \quad h>1,$$

где порядки операторов $N_{11}, \ldots, N_{1\nu}$ не превосходят $k,\ n;\ m-k,\ n$, причем коэффициенты N_{11} ограничены, а коэффициенты остальных операторов принадлежат Lip^1. Интегрирование по частям дает нам тогда

$$(N_1 f, g, S_0) = (N_{11} f, g, S_0) + \sum (N_{1h} f, D_h g, S_0), \quad h>1.$$

Подставим теперь это выражение в (12). В получающемся соотношении обе части непрерывно зависят от f, если рассматривать f как элемент пространства $L^{k+1,\, n}$. Следовательно, полученная формула верна для любого $f \in L^{k+1,\, n}$. Если $|D^{k,\, 1+n} f, S_0| < \infty$, то, интегрируя по частям, мы можем снова вернуться к $(N_1 f,\ g,\ S_0)$ и с помощью неравенства Гёльдера получить, наконец, (10).

Нам понадобится также следующее неравенство:

$$|D^{k,n}f|_\infty \leqslant c\,|D^{k,n}f|_1 + c\,|D^{k,n}f,\ S_0| + c\varrho(a^{k+1},\ f). \tag{13}$$

Это неравенство следует из (6), если доказать, что

$$\varrho(a^k,\ f) \leqslant \varrho(a^{k+1},\ f) + c\,|D^{k,n}f|_1 + c\,|D^{k,n}f,\ S_0|. \tag{14}$$

Комбинируя (11) и (13), мы получим соотношение

$$|D^{k+1,n}f|_\infty \sim |D^{k,n}f|_\infty + \sum |D^{k,n}D_j f|_\infty \leqslant c\,|D^{k+1,n}f|_1 + \\ + c\,|D^{k,1+n}f,\ S_0| + c\varrho(a^{k+1},\ f),$$

которое после интегрирования оказывается эквивалентным неравенству (6). Остается доказать неравенство (14), которое в свою очередь следует из неравенства

$$|(a^k \Delta f,\ g) - (a^{k+1}\Delta f,\ g)| \leqslant c\,(|D^{k,n}f,\ S_0| + \\ + |D^{k,n}f|_1)\,|D^{m-k,n}g|_\infty, \tag{15}$$

так как

$$\sup \frac{|(a^{k+1}\Delta f,\ g)|}{|D^{m-k,n}g|_\infty} \leqslant \sup \frac{|(a^{k+1}\Delta f,\ g)|}{|D^{m-1-k,n}g|_\infty} \leqslant \varrho(a^{k+1},\ f).$$

Для доказательства (15) нужно заметить лишь, что, в силу леммы 12.1,

$$a^k\Delta - a^{k+1}\Delta \equiv \sum (D_h + \overline{D}_h) N_h + N_0,$$

где операторы N_h имеют ограниченные коэффициенты и порядки $\leqslant k,\ n;\ m-k,\ n$. Применяя последнее тождество к $f\overline{g}$ и интегрируя полученное выражение по V, мы с помощью очевидных оценок приходим к неравенству (15). Это завершает доказательство теоремы.

Докажем теперь вариант этой теоремы, использующий частично сопряженные операторы a^{k+1} $(k=0,\ \ldots,\ m)$ второго рода.

Теорема 13.2. *Пусть a^{k+1} $(k=0,\ \ldots,\ m)$ — частично сопряженные операторы второго рода, выбранные так, что*

$$\textit{порядок}\ (Pa^{k+1} - La^{k+1}) \leqslant k,\ 1;\ m-k; \tag{16}$$

пусть также $a^{k+1} \in \mathrm{Lip}^{0,\,n}$ *и* $Pa^{k+1} \in \mathrm{Lip}^{1}$, *и пусть* a — *нормальный гиперболический оператор. Тогда*

$$|D^{k,\,n}f|_\infty \leqslant c\,|D^{k,\,n}f,\ S_0| + c\,|D^{k-m,\,n}a^{k+1}f|_1, \qquad (17)$$

где $f \in L^{k+1,\,n}$, *а константа* c *зависит только от*

$$\sigma^{0,\,n}(a^{k+1}) + \sigma^1(Pa^{k+1}) + |a|_0.$$

В случае, когда $f \in L^{k+1,\,-n}$, *имеет место неравенство*

$$|D^{k,\,-n}f|_\infty \leqslant c\,|D^{k,\,-n}f,\ S_0| + c\,|D^{k-m,\,-n}a^{k+1}f|_1, \qquad (18)$$

если только $Pa^{k+1} \in \mathrm{Lip}^{0,\,n+1}$; *при этом постоянная* c *зависит от*

$$\sigma^{0,\,n}(a^{k+1}) + \sigma^1(Pa^{k+1}) + \sigma^{0,\,n+1}(Pa^{k+1}) + |a|_0.$$

Замечание 1. В отличие от неравенств предыдущей теоремы обе части неравенств (17) и (18) конечны. Когда $k = m$, (17) представляет собой обобщенное неравенство Фридрихса — Леви (теорема 7.1 для $p = 0$, $q = n$).

Замечание 2. Не нарушая справедливости теоремы, можно отказаться от условия (16), наложив, однако, при этом более жесткие ограничения на коэффициенты a^k. Именно, надо потребовать, чтобы $Pa^k \in \mathrm{Lip}^{1,\,n-1}$. Это станет ясным в ходе доказательства. Теорема остается справедливой и в случае, когда a не является нормальным оператором, если вместо этого потребовать, чтобы $a_0 \in \mathrm{Lip}^{k,\,n}$ или $a_0 \in \mathrm{Lip}^{m-k,\,n}$. Последнее доказывается применением теоремы к операторам $a^k a_0^{-1}$ и $a_0^{-1}a^k$ соответственно. Детали предоставляются читателю.

Доказательство. Мы будем рассуждать так же, как при доказательстве предыдущей теоремы. Докажем, что соотношения (17) и (18) эквивалентны неравенству

$$|D^{k,\,n}f|_\infty \leqslant c\,|D^{k,\,n}f,\ S_0| + c\varrho(a^{k+1},\ f), \qquad (19)$$

где $f \in L^{k+1,\,n}$ и

$$\varrho(a^{k+1},\ f) = \sup \frac{|(a^{k+1}\Delta f,\ g)|}{|D^{m-k,\,n}g|_\infty}, \quad g \in \mathscr{C}_0.$$

Прежде всего докажем, что (19) следует из (6). Обозначим оператор a^k в неравенстве (6) через A^k, поскольку он первого рода, а мы теперь имеем дело с частично сопряженными операторами второго рода. Как и раньше, достаточно доказать неравенство (19) в случае, когда оператор $a^{k+1} = Pa^{k+1}$ однороден, а из (6) будет следовать (19), если мы докажем, что

$$|((a^{k+1} - A^k)\Delta f, g)| \leqslant c(|D^{k,n}f|_1 + |D^{k,n}f, S_0|)|D^{m-k,n}g|_\infty. \tag{20}$$

Рассмотрим двойной дифференциальный оператор

$$a^{k+1}(x)\Delta - A^k(x)\Delta, \tag{21}$$

где $A^k = PA^k$ покрывается оператором a^{k+1}. Нетрудно видеть, что если a^{k+1} удовлетворяет условию (16), то A^k можно выбрать так, чтобы удовлетворялось условие (2). [Если (16) не выполняется, то оператор A^k может не удовлетворять (2) и нужно наложить дополнительное требование $Pa^k \in \mathrm{Lip}^{1,n-1}$.]

В силу леммы 12.1, оператор (21) имеет вид

$$\sum (D_j + \overline{D_j}) N_j + N_0,$$

где порядки операторов N_j не выше k, n; $m-k$, n, а их коэффициенты ограничены. Применяя (21) к $f\overline{g}$ и интегрируя по V, мы с помощью очевидных оценок приходим к неравенству (20).

Остается проверить, что соотношения (17) и (18) следуют из (19). В обоих случаях ход рассуждений остается прежним. При доказательстве эквивалентности (19) и (17) решающее значение играет тот факт, что в силу (16) и того, что $a^{k+1} \in \mathrm{Lip}^{0,n}$, двойной дифференциальный оператор

$$\Delta a^{k+1}(x) - a^{k+1}(x)\Delta$$

имеет ограниченные коэффициенты и порядок $\leqslant k$, n; $m-k$, n. [Если (16) не имеет места и если $n > 0$, что является нетривиальным случаем, то порядок равен $k+1$, $n-1$; $m-k$, n. Однако тогда оператор представляется в виде суммы оператора порядка k, n; $m-k$, n и дивергенции, которая после интегрирования даст член более низкого порядка. В этом случае приходится наложить дополнительное требование $Pa^{k+1} \in \mathrm{Lip}^{1, n-1}$. Детальное доказательство предоставляется читателю.]

Чтобы доказать эквивалентность (19) и (18), рассмотрим двойной дифференциальный оператор

$$[\Delta, a^{k+1}] = \Delta a^{k+1} - a^{k+1}\Delta, \quad a^{k+1} = a^{k+1}(\overline{x}).$$

Положим

$$b^{k+1} = a^{k+1} - Pa^{k+1} \text{ и } Pa^{k+1}(\overline{x}) = \sum D_j A_j(\overline{x}),$$

где операторы A_j ($j = 1, \ldots, \nu$) имеют порядки не выше k; $m-k$ и принадлежат $\mathrm{Lip}^{0, n+1}$, ибо $Pa^k \in \mathrm{Lip}^{0, n+1}$. Справедливо следующее тождество:

$$[\Delta, a^{k+1}] = \sum (D_j + \overline{D}_j)[\Delta, A_j] - \sum \overline{D}_j [\Delta, A_j] + [\Delta, b^{k+1}].$$

Поскольку оператор a нормальный, порядок оператора $[\Delta, A_1]$ не превосходит k, n; $m-k-1$, n, и поэтому все члены правой части с точностью до дивергенции имеют ограниченные коэффициенты и порядок $\leqslant k$, n; $m-k$, n. Это наиболее важная часть доказательства эквивалентности (19) $\Longleftrightarrow$ (18). Остальное предоставляется читателю.

14. Задача Коши. Неравенства, полученные в предыдущем пункте, позволяют нам дать весьма полную теорию задачи Коши в различных ее формах. Несмотря на значительные внешние отличия, эти результаты, в менее точной форме, содержатся у Лере ([10], предложение 88, стр. 168).

Отметим сначала некоторые следствия леммы 12.2. Обозначим через $\{M^k\}_0^m$ и $\{N^{k+1}\}_0^m$ общие наборы частично сопряженных операторов первого и второго родов соответственно. Тогда имеют место соотношения

$$(M^k f, g) = \overline{(M^{m-k} g, f)} + (B_1 f, g, S_0) \tag{1}$$

и

$$(N^{k+1} f, g) = \overline{(N^{m+1-k} g, f)} + (B_1 f, g, S_0), \tag{2}$$

где $f \in \mathscr{C}$, $g \in \mathscr{C}_0$, а B_1 в обоих случаях обозначает двойной дифференциальный оператор порядка не выше k; $m-k$. Для получения первого равенства надо выбрать оператор N^{k+1}, покрываемый M^k, применить тождество (12.9) к произведению $f\bar{g}$, проинтегрировать резул тат по V и применить вторую часть соотношения (12.1С Равенство (2) доказывается сходным образом.

Мы будем рассматривать задачу Коши сначала д. частично сопряженных операторов первого рода.

Теорема 14.1. *В предположениях теоремы* 13 *задача*

$$a^k u = f \in C_0^{k-m, \pm q} \text{ в } V, \quad (\text{:}$$

$$D^{k-1} u = D^{k-1} g \in H^{k-1, 1\pm q}(S_0) \text{ на } S_0 \quad (\text{·}$$

имеет единственное решение $u \in B^{k, \pm q}$, *удовлетворяющ неравенству*

$$|D^{k, \pm q} u|_\infty \leqslant c\,|D^{k-1, 1\pm q} g, S_0| + c\,|D^{k-m, \pm q} f|_1. \quad (\text{:}$$

При этом в случае $+q$ *дополнительно предполагаетс что* $Pa^k \in \mathrm{Lip}^{0, q+1}$. *Если* $k=0$, *то все выражения, вклк чающие* $k-1$, *опускаются. Постоянная* c *зависит тольк от* $\sigma^{0,q}(a^k) + \sigma^1(P\dot{a}^k) + |a|_0$ и $\sigma^{0,q}(a^k) + \sigma^{0,q+1}(Pa^k) +$ $+ \sigma^1(Pa^k) + |a|_0$ *соответственно.*

Замечание 1. Уравнение (3) нужно понимать в то смысле, что равенство

$$(a^k u, h) = (f, h)$$

имеет место для всех $h \in \mathscr{C}_0$. Обе части последнего равен ства единственным образом продолжаются на пространств $C_0^{m-k, \pm q}$, поскольку $\mathscr{C}_0$ плотно в $C_0^{m-k, \pm q}$. Далее, есл $u \in B^{k, \pm q}$ и $k > 0$, то, в силу лемм 8.1 и 8.4, $u \in C^{k-1; \pm q}$ так что элемент $u(0, \cdot) \in H^{k-1, \pm q}$ единственным образо определяется по функции u. Следовательно, (4) имее смысл.

Замечание 2. Меняя параметр q, мы получае теоремы дифференцируемости для решения уравнения Действительно, с уменьшением r пространства $B^{k, r}$, $C_0^{k-m,}$ и $H^{k-1, 1+r}$ расширяются. Теорема утверждает, что улучшение регулярности начальных данных, выражающееся в увеличении r, влечет за собой такое же улучшение регулярности решения.

Замечание 3. Утверждение теоремы следует и теоремы 13.1 и нескольких общих фактов; в ходе доказательства станет ясным, что оно сохраняет силу всякий раз, когда теорема 13.1 выполняется для оператора a^k. В частности, можно не требовать, чтобы a^k удовлетворял соотношению 13.2 или был нормальным. При этом необходимо лишь наложить дополнительные условия регулярности, сформулированные в замечании 2 к теореме 13.1, и изменить соответственно характер зависимости постоянной c от a^k.

Замечание 4. Пространство всех решений u не совпадает с $B^{k, \pm q}$. Когда $\nu = 1$, оно оказывается пространством функций, все производные которых порядка $\leqslant k$, имеют ограниченную вариацию. Было бы интересным установить аналог этого предложения в общем случае.

Доказательство. Положим для простоты

$$H = H^{k-1,\, 1 \pm q}(S_0),$$

и пусть H' — сопряженное к H пространство относительно двойственности $(\Delta^{k-1} f,\, f',\, S_0)$, где Δ^{k-1} — двойной дифференциальный оператор $\sum D_\alpha \overline{D}_\alpha$, $|\alpha| \leqslant k-1$. Рассмотрим прямую сумму

$$A' = C_0^{k-m,\, \pm q} \oplus H,$$

являющуюся сопряженным к $A = C_0^{m-k,\, \mp q} \oplus H'$ пространством. Ясно, что операция

$$\mathscr{C} \ni u \to Qu = \{a^k u,\, u\}$$

отображает $\mathscr{C}$ в A'. Покажем, что $Q\mathscr{C}$ слабо плотно в пространстве A'. Действительно, пусть элемент $\{h, g\} \in A$ ортогонален $Q\mathscr{C}$, так что

$$0 = \overline{(M^{m-k} h,\, u)} + (B_1 u,\, h,\, S_0) + (\Delta^{k-1} u,\, g,\, S_0), \tag{6}$$

где мы записали *дополнение к* $(a^k u,\, h')$, $h' \in \mathscr{C}_0$, в форме (1). Пусть $\mathscr{C}'$ — совокупность тех функций пространства $\mathscr{C}$, которые обращаются в нуль на S_0. Тогда, в частности,

$$0 = (Mh,\, u), \quad u \in \mathscr{C}', \quad M = \overline{M^{m-k}}.$$

Здесь M — оператор первого рода, удовлетворяющий условию (2) п. 13, причем

$$PM \in \mathrm{Lip}^1, \quad M \in \mathrm{Lip}^0,$$

$$PM \in \mathrm{Lip}^{0,\, q+1}, \quad M \in \mathrm{Lip}^{0,\, q}$$

в нижнем и верхнем случаях соответственно. [В нижнем и верхнем — в смысле выбора знака у показателя q в формулах (3) и (4).] Рассмотрим спачала нижний случай и применим теорему 10.1 к функции $h \in C_0^{m-k,\, q}$, подставляя при этом $m-k$ вместо k и изменяя направление оси x^1 на обратное. Поскольку $D^{m-k}h = 0$ на S, имеем

$$|D^{m-k}h|_\infty \leqslant c \sup \frac{|(Mh, u)|}{|D^k u|_\infty}, \quad u \in \mathscr{C}'.$$

По предположению правая часть здесь равна нулю, поэтому $h = 0$. Такой же результат мы получим в верхнем случае. Для этого надо снова применить теорему 13.1, заменив k на $m-k$ и перевернув V. Имеем в результате

$$|D^{m-k,\, -q}h|_\infty \leqslant c \sup \frac{|(Mh, u)|}{|D^{k,\, q}u|_\infty}, \qquad u \in \mathscr{C}'.$$

Из обращения в нуль h в соотношении (6) следует, что g также равно нулю. Значит, $Q\mathscr{C}$ слабо плотно в A'. Применяя один из вариантов теоремы Хана — Банаха, мы можем использовать слабую плотность следующим образом. Возьмем произвольный элемент

$$\{f, g\} \in A'.$$

Тогда существует последовательность $\{u_j\}_1^\infty \in \mathscr{C}$, такая, что если $h \in \mathscr{C}_0$ и $e \in H'$, то

$$(a^k u_j, h) \to (f, h), \quad (\Delta^{k-1}u_j, e, S_0) \to (\Delta^{k-1}g, e, S_0); \tag{7}$$

при этом величина

$$|D^{k-m,\, \pm q}a^k u_j|_1 + |D^{k-1,\, 1\pm q}u_j, S_0|, \qquad j \to \infty,$$

оказывается ограниченной выражением

$$|D^{k-m,\, \pm q}f|_1 + |D^{k-1,\, 1\pm q}g, S_0|.$$

В силу теоремы 13.1, отсюда следует, что

$$|D^{k,\,\pm q}u_j|_\infty \leqslant c\,|D^{k-1,\,1\pm q}g,\ S_0| + c\,|D^{k-m,\,\pm q}f|_1. \tag{8}$$

В частности, согласно леммам 8.1 и 8.4, можно выбрать подпоследовательность $\{v_j\}_1^\infty$, сходящуюся к функции $u \in B^{k,\,\pm q}$, удовлетворяющей условию

$$|D^{k,\,\pm q}u|_\infty \leqslant \underline{\lim}\,|D^{k,\,\pm q}u_j|_\infty. \tag{9}$$

Сходимость здесь понимается в слабом смысле, т. е. при всех $h \in \mathscr{C}$

$$(D_\alpha v_j,\ h) \to (D_\alpha u,\ h), \qquad j \to \infty, \qquad |\alpha| \leqslant k. \tag{10}$$

Таким образом, из (7) следует, что функция u удовлетворяет уравнению (3). Комбинируя соотношения (8) и (9), мы получим неравенство (5). Остается доказать (4). Положим $D_\alpha = D_1^j$, $j < k$. Тогда для любой функции $h \in \mathscr{C}_0$ имеем

$$-(D_1 D_\alpha v_j,\ h) = (D_\alpha v_j,\ D_1 h) + (D_\alpha v_j,\ h,\ S_0)$$

и

$$-(D_1 D_\alpha u,\ h) = (D_\alpha u,\ D_1 h) + (D_\alpha u,\ h,\ S_0);$$

поэтому из (10) следует, что

$$(D_\alpha v_j,\ h,\ S_0) \to (D_\alpha u,\ h,\ S_0), \qquad j \to \infty.$$

В свою очередь вторая часть (7) показывает, что

$$(D_\alpha v_j,\ h,\ S_0) \to (D_\alpha g,\ h,\ S_0), \qquad j \to \infty,$$

откуда и следует (4). Поскольку единственность построенного решения вытекает из теоремы 13.1, доказательство закончено.

Следующая теорема относится к задаче Коши для частично сопряженных операторов второго рода и соответствует теореме 13.2.

Теорема 14.2. *В предположениях теоремы* 13.2 *задача*

$$a^{k+1}u = f \in L^{k-m,\,\pm q} \quad \text{в} \quad V, \tag{11}$$

$$D^k u = D^k g \in H^{k,\,\pm q}(S_0) \quad \text{на} \quad S_0 \tag{12}$$

имеет единственное решение $u \in C^{k, \pm q}$, *удовлетворяющее соотношению*

$$|D^{k, \pm q} u|_\infty \leqslant c\,|D^{k, \pm q} g, S_0| + c\,|D^{k-m, \pm q} f|_1.$$

В случае $-q$ *накладывается дополнительное условие* $Pa \in \mathrm{Lip}^{0, q+1}$. *Постоянная* c *зависит только от*

$$\sigma^{0, q}(a^{k+1}) + \sigma^1(Pa^{k+1}) + |a|_0$$

и

$$\sigma^{0, q+1}(Pa^{k+1}) + \sigma^1(Pa^{k+1}) + \sigma^{0, q}(a^{k+1}) + |a|_0$$

соответственно.

Замечание 1. Уравнение (11) имеет смысл не при всяком $u \in C^{k, \pm q}$. Его следует понимать как равенство

$$(a^{k+1} u, h) = (f, h), \quad h \in \mathscr{C}_0,$$

в котором левую часть нужно записать в форме (2). Уравнение (12) понимается в обычном смысле, так как любая функция из пространства $C^{k, \pm q}$ однозначно определена на каждой гиперплоскости S_τ.

Замечание 2. См. замечания 2 и 3 к предыдущей теореме.

Замечание 3. Пространство всех решений u не совпадает с $C^{k, \pm q}$. Если $\nu = 1$, то оно оказывается подпространством пространства C^k, состоящим из всех функций u, таких, что $D_1^k u$ абсолютно непрерывно и $D_1^{k+1} u \in L^0$. Было бы интересно установить, что является аналогом этой абсолютной непрерывности в общем случае.

Замечание 4. В случае $k = m$ мы имеем задачу Коши в ее классической форме с оговоркой, что уравнение (11) понимается в указанном выше смысле.

Доказательство. Положим для простоты

$$H = H^{k, \pm q}(S_0)$$

и введем в рассмотрение пространство H', сопряженное к H по отношению к двойственности $(\Delta^k f, f', S_0)$. Рассмотрим прямую сумму пространств

$$A = L^{k-m, \pm q} \oplus H.$$

В силу лемм 8.3 и 8.4, сопряженным к A является пространство

$$A' = B \oplus H',$$

где $B = B_0^{m-k, \mp q}$. Из леммы 8.6 следует, что операция

$$u \to Qu = \{a^{k+1}u, u\}$$

отображает $\mathscr{C}$ в A. Покажем, что множество $Q\mathscr{C}$ сильно плотно в A. Действительно, пусть элемент $\{h, g\} \in A'$ ортогонален $Q\mathscr{C}$, так что

$$0 = (a^{k+1}u, h) + (\Delta^k u, g, S_0), \qquad u \in \mathscr{C}. \tag{13}$$

Пусть множество $\mathscr{C}'$ состоит из тех функций пространства $\mathscr{C}$, которые обращаются в нуль в окрестности S_0. Тогда, в частности,

$$0 = (a^{k+1}u, h), \qquad u \in \mathscr{C}'.$$

Согласно лемме 12.2, правая часть последнего равенства может быть записана в виде

$$(\overline{M^{m-k}u}, h),$$

где оператор $M^{m-k} \in \mathrm{Lip}^{0, q}$ удовлетворяет условию (2) п. 13. Применяя теперь теорему 13.1 с заменой k на $m-k$ и интервала V — на перевернутый, мы получим для всех $u \in \mathscr{C}'$ неравенство

$$|D^{m-k, \mp q}h|_\infty \leqslant c \sup \frac{|(a^{k+1}u, h)|}{|D^{k, \pm q}u|_\infty} = 0,$$

так как $D^{m-k-1}h = 0$ на S. Дополнительное условие $Pa \in \mathrm{Lip}^{0, q+1}$, по предположению, удовлетворяется в нижнем случае. Следовательно, $h = 0$, так что, в силу (13), и $g = 0$.

Сильная плотность означает, что если задан элемент $\{f, g\} \in A$, то можно найти такую последовательность функций $\{u_j\}_1^\infty$ из $\mathscr{C}$, что при $j \to \infty$

$$|D^{k-m, \pm q}(a^{k+1}u_j - f)|_\infty + |D^{k, \pm q}(u_j - g), S_0| \to 0.$$

Используя теорему 13.2, мы находим отсюда, что

$$|D^{k, \pm q}(u_j - u_\chi)|_\infty \to 0, \qquad j, \chi \to \infty.$$

Предельный элемент $u \in C^{k, \pm q}$ удовлетворяет уравнению (11) и условию (12).

Остается доказать единственность найденного решения. Предположим, что u является решением для $f = D^k g = 0$. Тогда, в силу леммы 12.2,

$$0 = (a^{k+1}u,\ h) = (M^k u,\ h) + (B_1 u,\ h,\ S_0)$$

для любой функции $h \in \mathscr{C}_0$, причем в этом соотношении оператор M^k удовлетворяет требованиям теоремы 13.1, а второй член обращается в нуль, так как $D^k u = 0$ на S_0. Применяя теорему 13.1, мы получаем

$$|D^{k,\ \pm q} u|_\infty \leqslant c \sup \frac{|(M^k u,\ h)|}{|D^{m-k,\ \mp q} h|_\infty} = 0, \qquad h \in \mathscr{C}_0,$$

так что $u = 0$, и теорема доказана.

В следующей теореме рассматривается классический случай $k = m$. Мы увидим, что улучшение регулярности начальных данных по времени аналогичным образом отражается на решении. Определим функцию ϱ на множестве целых чисел следующим образом:

$$\varrho(r) = r, \qquad r \geqslant 0,$$
$$\varrho(r) = 1 + |r|, \qquad r < 0.$$

Теорема 14.3. *Пусть a — гиперболический оператор, причем*

$$a \in \mathrm{Lip}^{p-1} \cap \mathrm{Lip}^{0,\ |p \pm q|}, \quad Pa \in \mathrm{Lip}^1 \cap \mathrm{Lip}^{0,\ \varrho(p \pm q)}.$$

Тогда задача

$$au = f \in L^{p,\ \pm q} \quad \text{в} \quad V,$$

$$D^m u = D^m g \in H^{m,\ p \pm q} \quad \text{на} \quad S_0$$

имеет единственное решение $u \in C^{m+p,\ \pm q}$, удовлетворяющее условию

$$|D^{m+p,\ \pm q} u|_\infty \leqslant c\,|D^{m,\ p \pm q} g,\ S_0| + \\ + c\,|D^{p-1,\ \pm q} f,\ S_0| + c\,|D^{p,\ \pm q} f|_1, \tag{14}$$

где постоянная c зависит только от

$$\sigma^{p-1}(a) + \sigma^{0,\ |p \pm q|}(Pa) + \sigma^{0,\ \varrho(p \pm q)}(Pa) + |a|_0.$$

Если $D^{p-1} f = 0$ на S_0 и $g = 0$, то $D^{m+p} u = 0$ на S_0. Если $p = 0$, то первое условие регулярности имеет вид

$a \in \mathrm{Lip}^{0,q}$, *а второй член в правой части* (14) *и первый член в последней формуле опускаются.*

Замечание 1. В случае $+q$ (14) оказывается неравенством Фридрихса — Леви (теорема 7.1) с более слабыми, однако, ограничениями на коэффициенты.

Замечание 2. Переворачивая полосу V, мы можем доказать, что при условии теоремы уравнение

$$au = f \in L_0^{p,q}$$

имеет единственное решение $u \in C_0^{m+p,q}$.

Доказательство. Если $p=0$, то утверждение теоремы совпадает с теоремой 14.2 в случае $k=m$, так что можно считать $p>0$. Из лемм 8.1 и 8.4 следует, что

$$L^{p,\pm q} \subset C^{p-1,\pm q},$$

так что

$$f \in C^{p-1,\pm q}.$$

Далее, с помощью канонического отображения $T^{0,-2q}$ и неравенства (8.8) можно показать, что

$$|D^{p-1,\pm q} f|_\infty \leqslant |D^{p-1,\pm q} f, S_0| + |D^{p,\pm q} f|_1. \qquad (15)$$

Поскольку $L^{p,\pm q} \subset L^{0,p\pm q}$, мы можем применить теорему 14.2, показывающую, что решение

$$u \in C^{m,p\pm q} \qquad (16)$$

единственно. Рассмотрим уравнение

$$au \equiv a_0 D_1^{m+1} u + \sum a_\alpha D_\alpha u = f, \quad [\alpha] \leqslant m, 1, \qquad (17)$$

в котором все члены рассматриваются как обобщенные функции. Как показывает (16), все члены правой части, за исключением первого, принадлежат $C^{0,p\pm q-1}$, а так как $f \in C^{p-1,\pm q} \subset C^{0,p-1,\pm q}$, то вся правая часть также принадлежит этому пространству. Отсюда следует, что

$$u \in C^{m+1,p-1\pm q}.$$

Дифференцируя уравнение (17) и повторяя приведенные рассуждения, мы находим, что

$$u \in C^{m+p,\pm q},$$

При этом используется тот факт, что по условию $a \in \mathrm{Lip}^{p-1}$. Из теоремы 14.2 следует неравенство

$$|D^{m,\,p\pm q}u|_\infty \leqslant c\,|D^{m,\,p\pm q}g, S_0| + c\,|D^{0,\,p\pm q}f|_1.$$

Дополняя наши предыдущие рассуждения приведенными оценками, нетрудно видеть, что если к правой части этого неравенства добавить член

$$c\,|D^{p-1,\,\pm q}f|_\infty, \tag{18}$$

то полученное выражение мажорирует $|D^{m+p,\,\pm q}u|_\infty$. Наконец, из неравенства (15) следует, что выражение

$$c\,|D^{p,\,\pm q}f|_1 + c\,|D^{p-1,\,\pm q}f, S_0|$$

мажорирует (18). Тем самым теорема доказана, ибо условия $D^{p-1}f=0$ на S_0 и $g=0$ очевидным образом влекут за собой $D^{m+p}u=0$ на S_0.

Ограничения, накладываемые условиями теоремы 14.3 на дифференциальные свойства оператора a, возможно, носят искусственный характер. Если, например, $u \in \mathscr{C}$, то функция au может и не принадлежать пространству $L^{p,q}$. Подобные факты, однако, не будут иметь места, если улучшить регулярность оператора a.

Лемма 14. 1. *Пусть a — гиперболический оператор, и пусть*

$$a \in \mathrm{Lip}^{p,\,q}\ (p>0).$$

Пусть также

$$Tf = \{af, f\}.$$

Тогда множество $T\mathscr{C}$ плотно в пространстве $H^{p,q} \oplus H^{m,\,p+q}(S_0)$, а множество $a\mathscr{C}_0$ — в пространстве $H_0^{p,q}$.

Замечание 1. Требования регулярности теперь, очевидно, сильнее, чем в теореме 14.3.

Замечание 2. Лемма остается справедливой, если пространства $H^{p,\,q}$, $H^{m,\,p+q}\,(S_0)$, $H_0^{p,\,q}$ заменить на пространства $H^{p,\,-q}$, $H^{m,\,p-q}\,(S_0)$, $H_0^{p,\,-q}$, а также если в первом и третьем случаях заменить H на L. В самом деле, новые пространства содержат соответствующие исходные пространства в качестве плотных подмножеств, причем их нормы удовлетворяют неравенствам

$$|D^{p,-q}f| \leqslant |D^{p,q}f|, |D^{p,\pm q}f|_1 \leqslant \sqrt{t}\,|D^{p,q}f|.$$

Замечание 3. Очень легко доказать лемму, если предположить, например, что $a \in \mathrm{Lip}^{p,q+1}$, и заменить при этом пространства $H^{p,q}$ и $H_0^{p,q}$ более узкими пространствами $C^{p,q}$ и $C_0^{p,q}$. Как показывает предыдущее замечание, утверждение леммы остается тогда в силе для более широких пространств $H^{p,\pm q}$, $L^{p,\pm q}$ и т. д. В самом деле, приблизим оператор a некоторым гиперболическим оператором $a_\varepsilon \in \mathrm{Lip}^\infty$. В силу теоремы 14.3, задача

$$au = f \in \mathscr{C}, \quad D^m u = D^m g \text{ на } S_0, \quad g \in \mathscr{C},$$

имеет решение $u \in C^{m+p+1,q}$, а задача

$$a_\varepsilon u_\varepsilon = f \in C, \quad D^m u_\varepsilon = D^m g \text{ на } S_0, \quad g \in \mathscr{C},$$

имеет бесконечно дифференцируемое решение u_ε, обладающее тем свойством, что величина

$$|D^{m+p+1,q} u_\varepsilon|_\infty \tag{19}$$

ограничена при $\varepsilon \to 0$. Пусть $\varphi_\varepsilon \in \mathscr{C}$; положим $v_\varepsilon = \varphi_\varepsilon u_\varepsilon$. Тогда функция v_ε принадлежит $\mathscr{C}$ и

$$av_\varepsilon - f = a(\varphi_\varepsilon - 1)u_\varepsilon + (a - a_\varepsilon)u_\varepsilon.$$

Полагая, что $\varphi_\varepsilon \to 1$ подходящим образом при $\varepsilon \to 0$, мы находим, используя (19), что

$$|av_\varepsilon - f|_\infty \to 0, \qquad \varepsilon \to 0.$$

Очевидно, что при этом величина $|D^{m,p+q}(v_\varepsilon - g), S_0|$ также стремится к нулю. Поскольку множество пар функций $\{f, g\}$, ($f \in \mathscr{C}$ г $g \in \mathscr{C}$) плотно в пространстве $C^{p,q} \oplus H^{m,p+q}$, доказано, что множество $T\mathscr{C}$ плотно в том же пространстве. Для доказательства второй части леммы предположим, что $f \in \mathscr{C}_0$. Тогда, в силу теоремы 14.3, примененной к перевернутой полосе V, уравнение $a_\varepsilon u_\varepsilon = f$ имеет бесконечно дифференцируемое решение u_ε, которое обращается в нуль в некоторой окрестности S и обладает тем свойством, что величина $|D^{m+p+1,\,q}\ u_\varepsilon|$ ограничена. С помощью приведенных выше рассуждений мы находим тогда, что множество $a\mathscr{C}_0$ плотно в пространстве $C_0^{p,\,q}$

Доказательство леммы. Очевидное рассуждение показывает, что, не ограничивая общности, можно считать оператор a нормальным. В силу теоремы 14.3, задача

$$au = f \in H^{p,\,q},\ D^m u = D^m g \text{ на } S_0,\ g \in \dot{H}^{m,\,p+q}(S_0)$$

имеет решение $u \in C^{m+p,\,q}$. Пусть $\varphi = \varphi(x^1)$ — бесконечно дифференцируемая функция, такая, что $\varphi = 0$ и $\varphi = 1$ в окрестностях точек $x^1 = 0$ и $x^1 = t$ соответственно. Пусть функция $\psi = \psi_\varepsilon \in \mathscr{C}$ стремится к 1 равномерно на каждом компактном подмножестве V, когда $\varepsilon \to 0$, таким образом, что при этом все ее производные остаются равномерно ограниченными. Рассмотрим функцию

$$v = v_\varepsilon = \psi J^- \varphi_1 u + \psi J^+ \varphi_2 u,$$

где

$$\varphi_1 = 1 - \varphi, \quad \varphi_2 = \varphi.$$

Тогда $v_\varepsilon \in \mathscr{C}$ и, используя обозначение п. 13 для коммутаторов, мы находим, что функция av_ε представляется в виде суммы двух членов, одним из которых является выражение

$$[a,\ \psi]\, J^- \varphi_1 u + \psi\, [a,\ J^-]\, \varphi_1 u + \psi J^-\, [a,\ \varphi_1]\, u + \psi J^- \varphi_1 f,$$

а другой получается из первого заменой в нем φ_1 и J^- на φ_2 и J^+ соответственно. При этом дифференциальные операторы $[a,\ \psi]$ и $[a,\ \varphi_1]$ имеют порядки не выше m и принадлежат пространству $\mathrm{Lip}^{p,\,q}$; $f \in H^{p,\,q}$ и $u \in C^{m+p,\,q}$, так что функции $\varphi_1 u \in C_0^{m+p,\,q}$ и $\varphi_2 u$ обращаются в нуль в некоторой окрестности S_0. Поэтому, применяя лемму 9.1, мы находим, что при $\varepsilon \to 0$ величина $|D^{p,\,q}\, av_\varepsilon|$ остается ограниченной. В силу той же леммы, величина $|D^{m,\,p+q}\, v_\varepsilon,\ S_0|$ также ограничена. Следовательно, множество пар функций $\{av_\varepsilon,\ v_\varepsilon\}$ ограничено в пространстве

$$A = H^{p,\,q} \oplus H^{m,\,p+q}(S_0).$$

Обозначим через B совокупность пар функций

$$\{h,\ g_1\} \in \mathscr{C} \times \mathscr{C},$$

в которых h обращается в нуль в окрестности S и S_0. Если $\varepsilon \to 0$, то для каждой такой пары

$$(av_\varepsilon, h) + D^m(v_\varepsilon, g, S_0) \to (f, h) + D^m(g, g_1, S_0).$$

В самом деле, согласно лемме 9.1, последовательность функций v_ε сходится к u в пространстве $C^{m+p, q}$, и, следовательно, av_ε сходится к af в $C^{p-1, q}$. Кроме того,

$$|D^m(v_\varepsilon - u), S_0| \leqslant |D^m(v_\varepsilon - u)|_\infty,$$

и левая часть последнего неравенства стремится к нулю, когда $\varepsilon \to 0$. Далее, пространство A—гильбертово, а B слабо плотно в пространстве A', сопряженном к A. Поэтому B одновременно сильно плотно в A', и, следовательно,

$$\{av_\varepsilon, v_\varepsilon\} \to \{f, g\}$$

в смысле слабой сходимости в A. Значит, множество $T\mathscr{C}$ слабо плотно в пространстве A; иными словами, его ортогональное дополнение пусто, а потому $T\mathscr{C}$ оказывается сильно плотным в A.

Остается доказать, что множество $a\mathscr{C}_0$ плотно в пространстве $H_0^{p, q}$. Пусть $f \in H_0^{p, q}$. Тогда, в силу теоремы 14.3, примененной к перевернутой полосе V, уравнение

$$au = f$$

имеет решение $u \in C_0^{m+p, q}$. Полагая

$$v_\varepsilon = \psi_\varepsilon J^- u$$

и повторяя предыдущие рассуждения, мы находим, что норма

$$|D^{p, q} av_\varepsilon|$$

ограничена при $\varepsilon \to 0$. Завершающая часть доказательства производится, как и прежде (см. замечание 3).

Докажем теперь утверждение, в известном смысле двойственное к теореме 14.3.

Теорема 14.4. *В предположениях леммы* 14.1 *уравнение*

$$a^0 u = f \in C_0^{-m-p, \mp q}$$

имеет единственное решение

$$u \in B^{-p, \mp q},$$

удовлетворяющее условию

$$| D^{-p, \mp q} u |_\infty \leqslant c \, | D^{-m-p, \mp q} f |_1, \tag{20}$$

где постоянная c зависит только от $|a|_{p,q}$. Если $p > 0$ и

$$f \in L^{-m-p, \mp q},$$

то

$$u \in C^{-p, \mp q}.$$

Доказательство. Если $h \in \mathscr{C}_0$, то, согласно определению,

$$|(f, h)| \leqslant | D^{-m-p, \mp q} f |_1 \, | D^{m+p, \pm q} h |_\infty,$$

и, по предыдущей теореме, примененной к перевернутой полосе V,

$$| D^{m+p, \pm q} h |_\infty \leqslant c \, | D^{p, \pm q} ah |_1.$$

Отсюда следует, что (f, h) является сопряженно линейным функционалом от $ah \in L_0^{p, \pm q}$. Лемма 14.1 для перевернутой полосы V доказывает также, что $a\mathscr{C}_0$ плотно в пространстве $L_0^{p, \pm q}$. По определению, сопряженным к этому пространству является пространство $B^{-p, \mp q}$. Следовательно, существует единственный элемент $u \in B^{-p, \mp q}$, удовлетворяющий неравенству (19), и такой, что

$$(f, h) = (u, ah), \quad h \in \mathscr{C}_0.$$

Остается доказать последнюю часть теоремы. Как следует из леммы 8.6, с помощью операции $u \to a^0 u$ пространство $\mathscr{C}$ отображается в $L^{-m-p, \pm q}$. При этом $a^0\mathscr{C}$ оказывается сильно плотным в указанном пространстве. В самом деле, сопряженным к $L^{-m-p, \pm q}$ является пространство $B_0^{m+p, \pm q}$, и если

$$(a^0 u, h) = (u, ah) = 0$$

для некоторого $h \in B_0^{m+p, \pm q}$ и всех $u \in \mathscr{C}$, то $ah = 0$. В силу теоремы 14.3, примененной к перевернутой полосе V, отсюда следует, что $h=0$. Значит, для любого $f \in L^{-m-p, \mp q}$ можно найти такую последовательность элементов $\{u_j\}_1^\infty \in \mathscr{C}$, что $\{a^0 u_j\}_1^\infty$ сходится к f. Но тогда неравенство (19) показывает, что последовательность $\{u_j\}_1^\infty$ сходится в пространстве $C^{-p, \mp q}$. Поскольку предельный элемент w удовлетворяет соотношению

$$(w, ah) = (f, h)$$

для всех $h \in \mathscr{C}_0$, он совпадает с единственным решением u уравнения $a^0 u = f$.

15. Два примера. В предыдущем пункте приведен весьма полный набор теорем существования для задачи Коши, включающий случаи, когда начальные данные и решения являются обобщенными функциями. Многие из этих теорем не встречаются в приложениях к математической физике, однако мы все же упомянем два примера.

Рассмотрим, во-первых, обобщенную функцию Грина, которая служит решением $u = u(x, y)$ уравнения

$$au = \delta(x-y). \tag{1}$$

Здесь y — точка внутри V, а функция u имеет нулевые граничные значения. Правая часть уравнения принадлежит пространству $C^{-0, -q}$, если $2q > \nu - 1$. В силу теоремы 14.1, существует единственное решение уравнения (1), принадлежащее пространству $C^{m, -q}$, при условии, что коэффициенты оператора a достаточно гладки, а его действие на функцию u определяется формулой

$$(au, h) = (a^m u, h),$$

где

$$a^m = -\sum a_k(x, D)\overline{D}_k + a_0(x, D)$$

— частично сопряженный к a оператор, удовлетворяющий условиям

$$a_1 D_1 = La, \text{ порядок } a_k \leqslant m, \; k = 0, \ldots, \nu,$$

и

$$a = \sum D_k a_k + a_0.$$

Решение v задачи

$$av = f \text{ в } V, \quad D^m v = 0 \text{ на } S_0,$$

где f — гладкая функция, имеет вид

$$v(x) = \int u(x, y) f(y) \, dy;$$

интеграл здесь понимается как расширение основной двойственности.

Следующий пример относится к задаче излучения

$$au = f = F(x^1)\, \delta(x'), \quad x' = \{x^k\}_2^{\nu},$$
$$D^m u = 0 \quad \text{на} \quad S_0.$$

Если F — интегрируемая функция, то

$$f \in L^{0,\,-q} \text{ при } 2q > \nu - 1,$$

и, следовательно, в силу теоремы 14.2,

$$u \in C^{m,\,-q},$$

при условии, что коэффициенты оператора a обладают достаточной гладкостью. По своему физическому смыслу функция f представляет источник излучения переменной интенсивности F, расположенный в начале координат.

16. Полные неравенства для частично сопряженных операторов. Для дальнейших целей мы сейчас подытожим все полученные до сих пор результаты. При этом мы распространим неравенства для частично сопряженных к a операторов a^p на все целесообразные значения p, положительные или отрицательные. Положим $a^p = a$, когда $p \geqslant m+1$, и $a^p = a^0$ при $p \leqslant 0$. При этих значениях p частично сопряженные операторы не разделяются на операторы первого и второго рода.

Как и прежде, при $k < 0$ мы считаем условия вида

$$D^k f = 0 \quad \text{на} \quad S_0$$

бессодержательными и в неравенствах опускаем соответствующие члены $|D^k \ldots, S_0|$, $k < 0$.

Теорема 16.1. *Пусть a — гиперболический оператор степени $m+1$, а $\{a^p\}_{-\infty}^{+\infty}$ — совокупность частично сопря-*

женных к a операторов первого рода. Пусть q обозначает любое целое число, положительное, отрицательное или нуль. Предположим, что

$$a^{m+p} \in \mathrm{Lip}^{h,|q|}, \quad h = \max(1, \; \min(|p|, |m+p|)). \tag{1}$$

Тогда

$$|D^{m+p,\,q}f|_\infty \leqslant c\,|D^{m+p-1,\,1+q}f, S_0| + \\ + c\,|D^{p-1,\,q}a^{m+p}f, S_0| + c\,|D^{p,\,q}\,a^{m+p}f|_1 \tag{2}$$

при условии что $f \in L^{m+p,\,q}$, а постоянная c зависит только от $\sigma^{h,\,|q|}(a^{m+p}) + |a|_0$.

Замечание 1. Поскольку $L^{m+p,\,q} \subset C^{m+p-1,\,q}$ при $m+p-1 \geqslant 0$, первый член в правой части (2) имеет смысл. Второй член в (2) имеет смысл лишь тогда, когда третий принимает конечное значение. Правая часть в (2) может быть бесконечной; в этом случае, очевидно, неравенство ни о чем не говорит.

Замечание 2. Поскольку

$$|D^{m+p-1,\,1+q}f, S_0| \leqslant |D^{m+p,\,q}f, S_0| \leqslant \\ \leqslant c\,|D^{m,\,p+q}f, S_0| + c\,|D^{p-1,\,q}af, S_0| \tag{3}$$

при $p > 0$, можно было бы заменить в этом случае первый член в правой части (2) на выражение

$$c\,|D^{m,\,p+q}f, S_0|.$$

Доказательство. При $0 \geqslant p \geqslant -m$ наше утверждение повторяет теорему 13.1 и последующее замечание 2.

Рассмотрим случай $p < -m$. Тогда $a^{m+p} = a^0$. Если

$$|D^{p,\,q}a^{m+p}f|_1 < \infty, \tag{4}$$

то $a^0 f \in C_0^{p,\,q}$ и доказательство вытекает из теоремы 14.4.

Наконец, если $p > 0$, то $a^{m+p} = a$ и соотношение (4) означает, что $af \in L^{p,\,q}$. В этом случае наше утверждение следует из теоремы 14.3, если заметить, что

$$|D^{m,\,p+q}f, S_0| \leqslant |D^{m+p-1,\,1+q}f, S_0|.$$

Различные условия дифференцируемости в этих теоремах упрощены и заменены условиями (1).

Аналогичная теорема имеет место для частично сопряженных операторов второго рода.

Теорема 16.2. *Пусть* $\{a^{p+1}\}_{-\infty}^{+\infty}$ — *совокупность частично сопряженных к* a *операторов второго рода. Тогда в тех же предположениях относительно регулярности, что и в предыдущей теореме, выполняется неравенство*

$$|D^{m+p,\,q}f|_{\infty} \leqslant |D^{m+p,\,q}f,\ S_0| + c\,|D^{p,\,q}a^{m+p+1}f|_1, \qquad (5)$$

если только $f \in L^{m+p+1,\,q}$. *Характер зависимости постоянной* c *от оператора* a^{m+p} *остается прежним.*

Замечание. В данном случае обе части неравенства остаются конечными.

Доказательство. В случае $p < -m$ утверждение вытекает из предыдущей теоремы, так как $L^{m+p+1,\,q} \subset B^{m+p,\,q}$. Если $0 \geqslant p \geqslant -m$, то оно повторяет теорему 13.2 и следующее за ней замечание 2. Наконец, когда $p > 0$, доказательство следует из предыдущей теоремы, ибо

$$L^{m+p+1,\,q} \subset C^{m+p,\,q}$$

и

$$|D^{m+p-1,\,1+q}f,\ S_0| + |D^{p-1,\,q}af,\ S_0| \leqslant c\,|D^{m+p,\,q}f,\ S_0|.$$

Как и выше, мы упростили условия регулярности. Мы могли бы также воспользоваться неравенством (3), чтобы сделать правую часть в неравенстве (5) зависящей только от af и данных Коши для функции f на S_0, когда $p \geqslant 0$.

Глава 3

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ В ВЕКТОРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Введение. В этой главе будут доказаны теоремы существования для различных форм задачи Коши для гиперболических систем. Эти теоремы большей частью получаются как простые следствия результатов гл. 2. Мы начнем с простейшего случая систем первого порядка. Для этих систем, а также для систем Коши — Ковалевской, теория задачи Коши в ее классической форме принадлежит, по существу, Петровскому. Его результаты были обобщены Лере на случай задачи Коши для обобщенных функций. Лере также распространил теорию на более общие системы. Изложенное здесь является в сущности, некоторым усовершенствованием теории Лере.

1. Задача Коши для систем первого порядка. Как и прежде, все рассмотрения будут проводиться в действительном ν-мерном пространстве. Для гиперплоскости $x^1 = t$ и полосы $0 \leqslant x^1 \leqslant t$ мы сохраняем их прежние обозначения S и V соответственно. Вместо комплексно-значных функций мы будем теперь рассматривать функции со значениями в μ-мерном комплексном пространстве $Z = Z_\mu$ со скалярным произведением

$$z\bar{z}' = \sum z_k \bar{z}'_k, \quad k = 1, \ldots, \mu,$$

и соответствующим квадратом нормы

$$|z|^2 = z\bar{z} = \sum |z_k|^2.$$

В этих обозначениях мы имеем, например,

$$f(x)\,\overline{g(x)} = \sum f_k(x)\,\overline{g_k(x)},$$

так что п. 8 целиком применим к функциям со значениями в Z.

Пусть B — некоторое линейное преобразование, действующее из Z в Z,

$$(Bz)_j = \sum b_{jk} z_k.$$

Через B мы будем также обозначать матрицу (b_{jk}). Транспонированная матрица будет обозначаться через ${}^tB = ({}^tb_{jk})$, а сопряженная — через $\overline{B} = (\overline{b}_{jk})$. Таким образом, мы имеем

$${}^tb_{jk} = b_{kj}, \quad ({}^tBz)_j = \sum b_{kj} z_k$$

и

$$Bz\bar{z}' = \overline{zB^*z'}, \quad B^* = {}^t\overline{B}.$$

Единичную матрицу мы будем обозначать через E **или** иногда через 1. Пусть

$$A = A(x, D) = \sum A_\alpha(x) D_\alpha$$

— некоторый линейный дифференциальный оператор, коэффициентами которого являются квадратные матрицы порядка $\mu = m+1$. Мы можем записать также

$$A = (A_{jk}(x, D)), \quad j, k = 1, \ldots, m+1,$$

где A_{jk} — дифференциальные операторы с комплексными коэффициентами. Мы определим порядок оператора A как максимальный порядок его элементов. Характеристическим полиномом оператора A является «полиномиальная матрица»

$$A(x, \zeta) = (A_{jk}(x, \zeta)).$$

Запись

$$A \in \mathrm{Lip}^{p, q}$$

означает, что элементы b коэффициентов оператора A принадлежат $\mathrm{Lip}^{p, q}$, и мы полагаем

$$\sigma^{p, q}(A) = \sum_b \sigma^{p, q}(b).$$

В настоящем пункте мы ограничимся операторами первого порядка

$$A = \sum A_k D_k + A_0.$$

Для этих операторов мы определим главную часть как

$$PA = \sum A_k D_k.$$

Мы скажем, что оператор A *нормален*, если $A_1 = 1$, и что A *гиперболичен* (относительно первой координаты), если полином

$$a(x, \zeta) = \det PA(x, \zeta)$$

имеет степень $m+1$ и является гиперболическим (относительно первой координаты). Поскольку

$$\det A_1 = a(x, \zeta), \quad \zeta = (1, 0, \ldots, 0),$$

матрица A_1 оказывается невырожденной в этом случае. Положим

$$|A|_{p, q} = |a|_0 + \sigma^{p, q}(A),$$

где $|a|_0$ определяется согласно 2.4. Введем следующее обозначение:

$$|D^{-p, \mp n} A^* f|_1 = \sup \frac{|(f, Ag)|}{|D^{p, \pm n} g|_\infty}, \quad g \in \mathscr{C}_0. \tag{1}$$

Здесь A^* обозначает формально сопряженный к A оператор

$$A^* = -\sum D_k A_k^* + A_0^*,$$

обладающий тем свойством, что

$$(A^* f, g) \equiv (f, Ag)$$

с точностью до граничных членов. Если $PA \in \mathrm{Lip}^1$ и $A \in \mathrm{Lip}^0$, то A^* обладает теми же свойствами; однако мы будем использовать соотношение (1) и тогда, когда функция f недифференцируема, так что левая часть в (1) будет просто некоторым обозначением для правой части. Сформулируем теперь следующую теорему, которая в случае $-n$ является аналогом основного неравенства для гиперболического дифференциального оператора.

Теорема 1.1. *Если A является гиперболическим оператором первого порядка и если*

$$PA \in \mathrm{Lip}^{1, n}, \quad A \in \mathrm{Lip}^{0, n}$$

и $f \in L^{0,\pm n}$, *то справедливо неравенство*

$$|D^{0,\mp n} f|_\infty \leqslant c\,|D^{0,\mp n} A^* f|_1, \tag{2}$$

в котором постоянная c зависит только от

$$|PA|_{1,n} + \sigma^{0,n}(A).$$

Замечание. Пусть $f \in \mathscr{C}$. Тогда

$$(f, Ag) = (A^* f, g) - (f, A_0 g, S_0),$$

так что

$$|D^{0,\mp n} A^* f|_1 \leqslant |D^{0,\mp n} A^* f|_1 + c\,|D^{0,\mp n} f, S_0|.$$

Поскольку операторы A и A^* удовлетворяют условиям теоремы 1.1 одновременно, мы получаем такое следствие:

Теорема 1.2. *Пусть оператор A удовлетворяет требованиям теоремы* 1.1, *и пусть $f \in \mathscr{C}$. Тогда неравенство* 17

$$|D^{0,\pm n} f|_\infty \leqslant c\,|D^{0,\pm n} f, S_0| + c\,|D^{0,\pm n} A f|_1 \tag{3}$$

выполняется с постоянной c, зависящей лишь от

$$|PA|_{1,n} + \sigma^{0,n}(A).$$

В случае $n = 0$, (3) является, по существу, важным неравенством Петровского. Им было доказано несколько более слабое неравенство

$$|f|_\infty \leqslant c\,|f, S_0| + c\,|Af|,$$

когда V является некоторым цилиндром, в основании которого лежит $(\nu - 1)$-мерный тор, а оператор A удовлетворяет определенным условиям регулярности. Этот результат следует из теоремы 1.2, если использовать разбиение единицы на основании цилиндра V. Переходя к пределу, мы находим, что неравенство (3) выполняется, если

$$|D^{1,\pm n} f|_1 < \infty.$$

Доказательство теоремы 1.1. Достаточно доказать теорему для случая, когда оператор A нормален. В самом деле, если утверждение верно для нормального оператора A, то мы находим, что выражение

$$|D^{0,\mp n}A_1^{*-1}f|_\infty$$

мажорируется правой частью неравенства (2). Но так как $A_1 \in \mathrm{Lip}^{0,n}$, то отображение

$$f \longleftrightarrow A_1^* f$$

является линейным гомеоморфизмом $B^{0,\mp n} \longleftrightarrow B^{0,\pm n}$, и, следовательно, (2) имеет место в общем случае.

Предположим, что оператор A нормален, и пусть элементами полиномиальной матрицы $B(x, \zeta)$ являются миноры матрицы $PA(x, \zeta)$, так что

$$PA(x, \zeta)\,B(x, \zeta) = a(x, \zeta)\,E.$$

Тогда мы имеем

$$A(x, D)\,B(x, D) = a(x, D)\,E + C(x, D), \tag{4}$$

где C — некоторый дифференциальный оператор порядка $\leqslant m$, оператор a нормален и

$$a \in \mathrm{Lip}^{1,n}, \quad C \in \mathrm{Lip}^{0,n}.$$

Поскольку $B \in \mathrm{Lip}^{1,n}$, замыкание $\mathscr{C}_0$ в $N^{1,n}$, а потому и замыкание $\mathscr{C}_0$ в $B^{1,-n}$, содержит множество $B\mathscr{C}_0$, и, следовательно,

$$\sup \frac{|(f, Ag)|}{|D^{0,\pm n}g|_\infty} \geqslant \sup \frac{|(f, ABg)|}{|D^{0,\pm n}Bg|_\infty}, \quad g \in \mathscr{C}_0.$$

Далее,

$$|D^{0,n}Bg|_\infty \leqslant c\,|D^{m,n}g|_\infty$$

и, кроме того,

$$|D^{0,-n}Bg|_\infty = \sup \frac{|(Bg, h)|}{|D^{0,n}h|_1} \leqslant c\,|D^{m,-n}g|_\infty, \quad h \in \mathscr{C}.$$

Итак, (2) будет доказано, если нам удастся показать, что

$$|D^{0,\mp n}f|_\infty \leqslant c \sup \frac{|(f, ABg)|}{|D^{m,\pm n}g|_\infty}, \quad g \in \mathscr{C}_0.$$

Если $C=0$ в (4), то последнее неравенство является одним из следствий теоремы 13.1 (при $k=0$), а так как

$$|(f, Cg)| \leqslant c\,|D^{0,\,\mp n} f|_1\,|D^{m,\,\pm n} g|_\infty,$$

то в общем случае утверждение получается отсюда обычным образом с помощью интегрирования.

Мы в состоянии теперь решить задачу Коши для дифференциального оператора A.

Теорема 1.3. *Если оператор A гиперболический порядка 1, причем*

$$PA \in \mathrm{Lip}^{1,\,q}, \quad A \in \mathrm{Lip}^{p,\,q},$$

то задача

$$Au = f \in \mathrm{Lip}^{p,\,\pm q} \text{ в } V, \tag{5}$$

$$u = g \in H^{0,\,p\pm q} \text{ на } S_0 \tag{6}$$

имеет единственное решение $u \in C^{p,\,\pm q}$, удовлетворяющее неравенству

$$D^{p,\,\pm q} u|_\infty \leqslant c\,|D^{p,\,\pm q} g,\, S_0| + c\,|D^{p-1,\,1\pm q} f,\, S_0| + |D^{p,\,\pm q} f|_1,$$

в котором c зависит только от $|PA|_{1,\,q} + \sigma^{p,\,q}(A)$. При $p=0$ средний член в правой части отсутствует.

Замечание. Если $p=0$, то (5) нужно понимать в том смысле, что

$$(u, A^*h) = (A_1 u, h) + (f, h), \quad h \in \mathscr{C}_0.$$

Поскольку пространства $L^{p,\,r}$, H^{p+r} и $C^{p,\,r}$ расширяются с ростом p и r, теорема утверждает, что улучшение регулярности начальных данных влечет за собой улучшение регулярности решения, если только коэффициенты оператора A дифференцируемы до достаточно высокого порядка.

Доказательство. Докажем вначале теорему для случая $p=0$. Пусть

$$M = L^{0,\,\pm q} \oplus H^{0,\,\pm q}(S_0).$$

Рассмотрим отображение

$$u \to \Omega u = \{Au,\, u\}$$

из $\mathscr{C}$ в M. Покажем, что множество $\Omega\mathscr{C}$ плотно в M. В самом деле, сопряженным к M является пространство

$$M' = L^{0,\,\mp q} \oplus H^{0,\,\mp q}(S_0).$$

Пусть $\{f, g\} \in M'$; предположим, что для $u \in \mathscr{C}$

$$(Au, f) + (u, g, S_0) = 0.$$

Обозначим через $\mathscr{C}'$ совокупность всех элементов из $\mathscr{C}$, равных нулю в окрестности S_0. Применяя теорему 1.1 для перевернутой полосы V, мы находим, что

$$|D^{0,\,\mp q} f|_\infty \leqslant c \sup \frac{|(f, Au)|}{|D^{0,\,\pm q} u|_\infty} = 0, \quad u \in \mathscr{C},$$

так что $f = 0$ и, следовательно, $g = 0$. Поскольку множество $\Omega\mathscr{C}$ плотно в M, для любого элемента $\{f, g\} \in M$ можно найти такую последовательность $\{u_j\}_1^\infty$ из $\mathscr{C}$, что при $j \to \infty$

$$|D^{0,\,\pm q}(Au_j - f)|_1 + |D^{0,\,\pm q}(u_j - g), S_0| \to 0.$$

По теореме 1.2 последовательность u_j сходится к некоторой функции $u \in C^{0,\,\pm q}$, удовлетворяющей равенствам (5) и (6). Единственность построенного решения следует из теоремы 1.1, примененной к оператору A^*.

Докажем теперь теорему при $p \geqslant 1$. Имеем

$$A_1 D_1 u + \ldots + A_\nu D_\nu u + A_0 u = f,$$

причем записанное равенство понимается как равенство обобщенных функций. Для доказательства достаточно воспользоваться рассуждениями, приведенными в последней части доказательства теоремы 14.3.

Докажем, наконец, теорему, дающую решение задачи Коши, когда f является обобщенной функцией, которая может поглотить начальные данные.

Теорема 1.4. *В предположениях теоремы* 1.3 *уравнение*

$$A^* u = f \in C_0^{-p,\,\pm q} \tag{7}$$

имеет единственное решение $u \in B^{-p,\,\pm q}$, удовлетворяющее неравенству

$$|D^{-p,\,\pm q} u|_\infty \leqslant c\, |D^{-p,\,\pm q} f|_1,$$

в котором c зависит от A так же, как в теореме 1.3. *Если $p > 0$ и $f \in L^{-p,\,\pm q}$, то*

$$u \in C^{-p,\,\pm q}.$$

Замечание. Уравнение (7) нужно понимать в том смысле, что

$$(u,\,Ah) = (f,\,h), \quad h \in \mathscr{C}_0.$$

Эта теорема почти непосредственно следует из теоремы 1.3; доказательство ее сходно с доказательством теоремы 14.4.

Мы предоставляем читателю применить две последние теоремы к доказательству существования функции Грина и решения задачи излучения для оператора A. Рассуждать при этом нужно так же, как в п. 15.2.

ЛИТЕРАТУРА

Курант и Лакс (Courant R. and Lax P. D.)
[1] The propagation of discontinuities in wave motion, *Proc. Mat. Acad. Sci.*, 42 (1956), 872—874.

Фридрихс (Friedrichs K. O.)
[2] Symmetric hyperbolic linear equations, *Comm. Pure and Appl. Math.*, 7 (1954), 354—392.

Фридрихс и Леви (Friedrichs K. O. and Lewy H.)
[3] Über die Eindeutigkeit und das Abhängigkeitsgebiet beim Anfangsproblem linearer hyperbolicsher Differentialgleichungen, *Math. Ann.*, 98 (1928), 192—204.

Гординг (Gårding L.)
[4] L'inégalité de Friedrichs et Lewy pour les equations hyperboliques d'ordre supérieur, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 239 (1954), 849—850.
[5] Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations, *Math. Scand.*, 1 (1953), 55—72.
[6] Solution directe au problème de Cauchy pour les equations hyperboliques, C.N.R.S. (Paris), 1956. [Есть русский перевод: см. сб. *Математика*, 2:1 (1958), 81—85.]

Хёрмандер (Hörmander L.)
[7] On the general theorie of partial differential operators, *Acta. Math.*, 94 (1955) 161—247. [Русский перевод: К теории общих дифференциальных операторов в частных производных, М., ИЛ, 1959.]

О. А. Ладыженская
[8] О разрешимости основных краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов, *ДАН СССР*, 97 (1954), № 3, 395—398.

Лакс (Lax P.)
[9] On cauchy's problem for hyperbolic equations and the differentiability of solutions of elliptic equations, *Comm. Pure and Appl. Math.*, 8 (1955), 615—633. [Есть русский перевод: см. сб. «Математика», 1 : 1 (1957), 43—59. —*Прим. ред.*]

Лере (Leray J.)
[10] Lectures on hyperbolic equations with variable coefficients, Princeton, Inst. for Adv. Study, 1952.

И. Г. Петровский
[11] Über das Cauchysche Problem für System von partiellen Differentialgleichungen, *Матем. сб.*, 2 (44) (1937), 815—870.

Шварц (Schwartz L.)
[12] Theorie des distributions, Paris, 1950—1951.

СОДЕРЖАНИЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТР…

Замеченные опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
50	6 сн.	$\Delta^{p,q}(x)\overline{f(x)}$	$\Delta^{p,q}f(x)\overline{f(x)}$
52	17 св.	$B^1f\cdot\bar{f}dS$	$\int B^1f\bar{f}dS$
54	1 сн.	$S_\tau\|^2 d\tau$	$S_\tau\|_1^2 d\tau$
65	8 св.	$Q\mathscr{C}=\hat{\mathscr{C}}$	$Q\hat{\mathscr{C}}=Q\hat{\mathscr{C}}$
66	7 сн	dS',	$dS',\ \|\alpha\|\leqslant p$
68	формула (4)	$A\neq B^{p,\pm q}$	$A\neq B_0^{p,\pm q}$
103	14 св.	$C^{p-1,\pm q}$	$C^{p-1\pm q}$
105	14 св.	$a_\varepsilon u_\varepsilon=f\in C$	$a_\varepsilon u_\varepsilon=f\in\mathscr{C}$
116	1 св.	$f\in L^{0,\pm n}$	$f\in L^{0,\mp n}$

Зак. 585