

В. А. ГОВОРКОВ

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

Издание третье,
переработанное и дополненное



«ЭНЕРГИЯ»

МОСКВА 1968

6П2.1

Г 57

УДК 537.212+538.122

Говорков В. А.

Г 57 Электрические и магнитные поля, изд. 3-е, перераб. и доп.

М., «Энергия», 488 с. с илл.

В книге изложена теория электромагнитного поля в объеме, необходимом для практического расчета большинства стационарных и переменных магнитных полей, встречающихся в технике электрической связи, радиотехнике, электронной технике, энергетике, устройствах автоматики и т. п.

Книга предназначена в качестве учебного пособия для студентов и аспирантов электротехнических и радиотехнических институтов и факультетов, а также может быть полезна инженерам, связанным с решением практических вопросов, базирующихся на элементарной теории электромагнитного поля.

3-3-8
146-68

6П2.1

ПРЕДИСЛОВИЕ

«Коммунизм — это есть Советская власть плюс электрификация всей страны» — так определил основатель Советского государства В. И. Ленин роль электричества в построении высшей фазы развития человеческого общества — коммунизма.

Практические нужды выдвинули на первое место в теоретической электротехнике методы теории электромагнитного поля; они необходимы для решения ряда важнейших задач не только в области высоких и сверхвысоких частот, но и в технике низких частот, начиная с расчета магнитных полей в электрических машинах и в многочисленных новых конструкциях электромагнитных механизмов для целей автоматики, телемеханики, электрической связи и т. д.

Знание теории электромагнитного поля и овладение ее методами для решения практических задач необходимы теперь каждому инженеру и технику-электрику.

Настоящая книга имеет целью дать систематическое изложение основ теории и расчета электромагнитного поля в инженерном аспекте.

Для лучшего усвоения теории в книге дан ряд практических примеров расчета полей с иллюстрациями.

Особое внимание обращено на графические построения картин полей, весьма полезные для усвоения сложных физических закономерностей и являющиеся первым и необходимым шагом в применении теории к практике.

Значительное место в книге отведено приближенным расчетам электрических и магнитных полей методом се-

ток. Их освоение освобождает расчетчика от неблагодарной задачи подыскивать не всегда достаточно оправданные приближения к граничным условиям, при которых дифференциальные уравнения математической физики допускают так называемые «точные» решения.

Действительная простота пространственного распределения параметров электрических и магнитных процессов нередко оказывается существенно замаскированной сложными алгебраическими формами решений дифференциальных уравнений. Введение векторного анализа упростило запись уравнений электромагнитного поля и их решения в некотором, довольно ограниченном круге простейших граничных условий.

Последующие шаги в развитии электромагнитных расчетов направлены в сторону развития простых методов числового расчета при каких угодно границах. Весьма обещающим в этом отношении является метод сеток, удобный как для программирования расчетов на вычислительных машинах, так и для проведения расчетов «вручную», т. е. при помощи настольных машин и других средств простейшей вычислительной техники (счетная линейка, таблицы Барлоу, таблицы О'Рурка).

Настоящее издание книги пополнено описанием итерационных приемов решения задач методом сеток, наиболее подходящих к программированию. Кроме того, вкратце изложен (в элементарной форме) релятивистский подход к исследованию электромагнитных процессов.

Чтобы сделать книгу доступной широкому кругу читателей — инженеров и техников, занятых практической работой, и избежать чрезмерного увеличения ее объема, некоторые математические выводы даны в упрощенной форме, хотя иногда это снижает строгость доказательства. Более требовательным в этом отношении читателям рекомендуется обращаться к учебникам по курсу теоретических основ электротехники, монографиям и

другим работам, указанным в списке литературы в конце книги.

Для читателей, не знакомых с векторным анализом, в гл. 2 приведено краткое изложение его элементарных основ.

Большая часть материала книги требует от читателей знания основ анализа и аналитической геометрии в объеме обычного курса высшей математики в технических институтах. С изучением же отдельных параграфов книги, в частности параграфов с примерами электрических и магнитных полей простых геометрических форм, без особого напряжения справятся и читатели, владеющие основами высшей математики в меньшем объеме.

Векторные величины обозначены в тексте прямым полужирным шрифтом, а на рисунках — черточками над буквами. Вектор плотности тока \vec{j} обозначен и в тексте черточкой над буквой.

Все уравнения электромагнитного поля и примеры расчетов даны в книге в Международной системе единиц СИ (по ГОСТ 9867-61), наименования электрических и магнитных величин и их буквенные обозначения выдержаны в соответствии с ГОСТ 1494-61, основные формулировки описаний терминов приведены в соответствие с «Терминологией теоретической электротехники» Академии наук СССР 1958 г. (ответственный редактор — член-корреспондент АН СССР Л. Р. Нейман).

В книге используется рационализированная система единиц, в которой множитель 4π исключен из уравнений Максвелла. Этим достигается симметрия зависимостей, относящихся к электрическим и магнитным величинам.

Этот множитель появляется только там, где для этого имеется простое геометрическое обоснование (в выражениях емкости сферического и цилиндрического конденсаторов, в знаменателе закона Кулона).

По вступившим в силу в 1960-х годах учебным планам радиотехнических вузов изучение основ теории элект-

ромагнитного поля перенесено из упраздненного курса теоретических основ электротехники в курс технической электродинамики. Сущность основ теории и расчета электрических и магнитных полей не изменяется в зависимости от ориентации учебных дисциплин. Поэтому можно надеяться, что книга окажется полезной студентам и в качестве введения в техническую электродинамику.

Автор пользуется случаем поблагодарить профессора С. Д. Купаляна за внимательное редактирование книги и ценные советы.

Автор

Глава первая

ВВЕДЕНИЕ

1-1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Электрическое поле и магнитное поле являются двумя сторонами особого вида материи, называемого электромагнитным полем.

Электромагнитное поле отличается непрерывным распределением в пространстве (электромагнитные волны) и обнаруживает дискретность структуры (фотоны); оно характеризуется способностью распространяться в вакууме (в отсутствие сильных гравитационных полей) со скоростью, близкой к скорости света, $c = 3 \cdot 10^8$ м/сек, и оказывает силовое воздействие на заряженные частицы, зависящее от их скорости.

Электрический заряд есть свойство частиц вещества или тел, характеризующее их взаимосвязь с собственным электромагнитным полем и их взаимодействие с внешним электромагнитным полем; заряд считается положительным у таких частиц, как протон, позитрон и др., и отрицательным у электрона. Заряд определяется количественно по силовому взаимодействию тел, обладающих зарядами (закон Кулона).

Электрическое поле — одна из двух сторон электромагнитного поля, обусловленная электрическими зарядами и изменением магнитного поля (во времени); электрическое поле оказывает силовое воздействие на заряженные частицы и тела; оно выявляется по силовому воздействию на неподвижные относительно него заряженные тела и частицы.

Магнитное поле — другая из двух сторон электромагнитного поля, обусловленная электрическими зарядами движущихся заряженных частиц и тел и изменением электрического поля (во времени). Магнитное поле выявляется по оказываемому им силовому воздействию на движущиеся относительно него заряженные частицы

(«токи»), направленному нормально к направлению движения этих частиц и пропорциональному их скорости.

Электрическим током называются явления движения заряженных частиц и изменения электрического поля во времени, сопровождаемые возникновением магнитного поля.

Электрические и магнитные поля связаны с определенными количествами энергии; при изменении поля во времени происходит преобразование его энергии в другие формы энергии.

Электромагнитная энергия, связанная с электромагнитным полем в целом, складывается из энергии электрического поля и энергии магнитного поля.

Из изложенного вытекает основная концепция единства электромагнитного поля. Та или иная его сторона обнаруживается в зависимости от того, какими средствами и в каких условиях электромагнитное поле изучается; например, исследователь, перемещающийся в пространстве совместно с системой заряженных тел, считает поле электростатическим; другой исследователь, перемещающийся относительно тех же зарядов, обнаруживает электрический ток и магнитное поле, причем отделить одно от другого нельзя, поскольку это лишь две стороны одного и того же явления.

Выражение типа «ток создал магнитное поле» следует понимать всегда в условном смысле подобно фразам: «заряд создал потенциал» или «подъем на высокую гору создал уменьшение веса багажа альпиниста».

Столь же условным является деление электротехники на «теорию цепей» и «теорию электромагнитного поля». Один и тот же электромагнитный процесс в одном случае (при низких частотах) удобно исследовать с помощью теории цепей, в другом случае (при высоких частотах) — с помощью теории электромагнитного поля. Обе теории являются продуктами абстрагирующей работы человеческого мышления, пытающегося описать одно и то же явление природы с различных точек зрения.

Методы теории электромагнитного поля приобретают особо важное значение в расчетах электрических цепей, содержащих так называемые «печатные схемы», а также входящих в миниатюрную и микроминиатюрную ап-

паратуру многочисленных устройств современной электроники.

Целый ряд процессов и при низких частотах наиболее удобно исследовать и рассчитывать посредством теории электромагнитного поля. Таковы процессы в магнитных цепях электрических машин, аппаратов и приборов, в изоляции устройств высокого напряжения, в электрохимических аппаратах и т. п.

Основой процессов электропередачи, радио и электросвязи является распространение в пространстве электромагнитного поля и связанной с ним электромагнитной энергии.

Электрические линии передачи энергии и линии электрической связи являются устройствами, обеспечивающими требуемое направление преимущественного распространения электромагнитного поля и его энергии.

В используемых иногда гидравлических и других аналогиях электромагнитных процессов не следует заходить слишком далеко в поисках сравнений. Например, не будет правдоподобным однобокое представление о передаче энергии по электрической линии как о потоке несущих энергию заряженных частиц, протискивающихся внутри проводов подобно частицам воды в трубе, подводящей воду к гидротурбине. Нельзя игнорировать самую важную часть процесса — распространение электромагнитного поля и его энергии вне проводов, в окружающей среде.

Изучение электромагнитных явлений и процессов требует длительного труда и постоянного напряжения воображения. Для выработки правильного, материалистического понимания процессов следует обращаться к современным советским книгам и журналам по марксистской философии и физике.

Обстоятельный исторический очерк развития учения об электромагнитном поле помещен в книге В. М. Лаврова [Л. 33].

1-2. СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

В табл. 1-1 перечислены основные электротехнические величины, их буквенные обозначения (по ГОСТ 1494-61) и единицы измерения в международной системе единиц СИ (по ГОСТ 9867-61).

Таблица 1-1

Наименование величин	Буквенные обозначения	Единицы измерения
Векторные величины:		
Напряженность электрического поля	E	$\frac{\text{вольт}}{\text{метр}}$ (в/м)
Электрическое смещение (электрическая индукция)	D	$\frac{\text{кулон}}{\text{метр}^2}$ (к/м ²)
Поляризованность	P	$\frac{\text{кулон}}{\text{метр}^2}$ (к/м ²)
Плотность тока	\vec{j}	$\frac{\text{ампер}}{\text{метр}^2}$ (а/м ²)
Напряженность магнитного поля	H	$\frac{\text{ампер}}{\text{метр}}$ (а/м)
Магнитная индукция	B	Тесла (тл) = = в·сек/м ²
Намагниченность	J	Тесла (тл)
Векторный потенциал магнитного поля	A	в·сек/м
Скалярные величины:		
Электрический заряд	Q, q	кулон (к)
Абсолютная диэлектрическая проницаемость	ϵ_a	$\frac{\text{фарада}}{\text{метр}}$ (ф/м)
Электрическая постоянная	$\epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}$	$\frac{\text{фарада}}{\text{метр}}$ (ф/м)
Электрический потенциал, разность потенциалов, напряжение	φ, V	вольт (в)
Электрическое сопротивление	r, R, x, X, z, Z	ом (ом)
Электрическая проводимость	g, b, Y	сименс (сим)
Поток электрического смещения	Ψ	кулон (к)
Электрическая емкость	C	фарада (ф)
Ток (сила тока)	i, I	ампер (а)
Абсолютная магнитная проницаемость	μ_a	$\frac{\text{генри}}{\text{метр}}$ (гн/м)
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$	гн/м
Магнитный скалярный потенциал, намагничивающая сила	φ_M, V_M, F	ампер-виток (ав)
Магнитное сопротивление	R_M	$\frac{1}{\text{генри}}$ (1/гн)
Магнитная проводимость	G_M	генри (1 гн = = 1 ом·сек)

Наименование величин	Буквенные обозначения	Единицы измерения
Магнитный поток	Φ	вольт-секунда, вебер (<i>в·сек</i>), (<i>вб</i>)
Индуктивность, взаимная индуктивность	L, M	генри (<i>гн</i>)
Энергия	W	джоуль (<i>дж</i>)
Мощность	P	ватт ($1 \text{ вт} =$ $= 1 \text{ в} \cdot 1 \text{ а}$)

Глава вторая

ПОНЯТИЯ ИЗ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

2-1. ЕДИНИЧНЫЕ ВЕКТОРЫ

Выражение любого вектора \mathbf{A} можно записать в форме

$$\mathbf{A} = A \cdot \mathbf{1}_A, \quad (2-1)$$

где A — числовая величина вектора (скаляр), $\mathbf{1}_A$ — единичный вектор (орт), направленный так же, как и вектор \mathbf{A} .

Обычно единичные векторы связываются с принятой системой координат. В случае прямоугольной декартовой системы им присвоены обозначения: \mathbf{i} — для направленного по оси x , \mathbf{j} — по оси y и \mathbf{k} — по оси z (рис. 2-1, а).

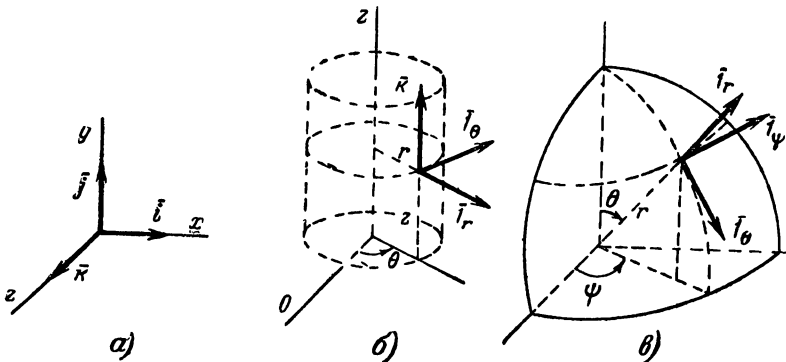


Рис. 2-1. Единичные векторы (орты).

Векторы i , j и k образуют правовинтовую систему. Длина и направление любого вектора \mathbf{A} выражаются с помощью проекций этого вектора на оси координат A_x , A_y и A_z . Эти проекции являются сами по себе скалярными величинами. Вектор \mathbf{A} можно рассматривать как сумму трех векторов, один из которых имеет длину A_x и направлен по оси x , другой имеет длину A_y и направлен по оси y , третий имеет длину A_z и направлен по оси z . Математическая запись этого делается так:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}. \quad (2-2)$$

Скалярное произведение двух одноименных единичных векторов равно единице

$$ii = 1; jj = 1; kk = 1. \quad (2-3)$$

Скалярное произведение любой пары разноименных единичных векторов равно нулю

$$ij = 0; ik = 0; jk = 0. \quad (2-4)$$

Векторное произведение пары одноименных единичных векторов равно нулю

$$[ii] = 0; [jj] = 0; [kk] = 0. \quad (2-5)$$

Величина векторного произведения разноименных единичных векторов i , j и k равна 1; направление вектора произведения определяется правилом штопора:

$$\left. \begin{aligned} [ij] = k; [jk] = i; [ki] = j; \\ [ji] = -k; [kj] = -i; [ik] = -j. \end{aligned} \right\} \quad (2-6)$$

В случае цилиндрической системы координат r , θ , z (рис. 2-1,б) единичные векторы обозначаются так: радиальный $\mathbf{1}_r$, касательный $\mathbf{1}_\theta$, осевой \mathbf{k} .

В сферической системе координат r , θ , ϕ (рис. 2-1,в) единичные векторы обозначаются так: радиальный $\mathbf{1}_r$, меридианный $\mathbf{1}_\theta$ и долготный $\mathbf{1}_\phi$.

Векторы $\mathbf{1}_r$, $\mathbf{1}_\theta$, \mathbf{k} и векторы $\mathbf{1}_r$, $\mathbf{1}_\theta$, $\mathbf{1}_\phi$ образуют правовинтовые системы.

2-2. ПОТЕНЦИАЛ. ГРАДИЕНТ ПОТЕНЦИАЛА. ЭКВИПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ И ЛИНИИ. ЛИНИИ ПОЛЯ

Если физическое состояние каждой точки в некотором пространстве характеризуется присущим данной точке значением той или иной векторной (или скалярной) величины, то говорят, что в этом пространстве существует векторное (или скалярное) математическое поле.

Определенные виды векторных полей (но отнюдь не все поля) характеризуются наличием так называемого скалярного потенциала (прилагательное «скалярный» часто опускают). Высота точки на местности является скалярным потенциалом в поле сил земного тяготения (гравитационном поле). Электростатическое поле характеризуется наличием скалярного электрического потенциала в каждой точке пространства; его величина определяется работой, которую нужно затратить на перенос единичного заряда из точки, где потенциал принят равным нулю, в данную точку.

Поля такого рода называют безвихревыми или потенциальными.

В безвихревом поле можно найти много точек, скалярные потенциалы которых одинаковы. Такие точки расположены на какой-то, в общем случае криволинейной, поверхности, называемой эквипотенциальной поверхностью. Любая линия, проведенная на эквипотенциальной поверхности, называется эквипотенциальной линией.

Наибольшая скорость пространственного изменения потенциала φ в данной точке называется градиентом потенциала и обозначается либо символом $\text{grad } \varphi$, либо (более кратко) $\nabla \varphi$.

Градиент потенциала — векторная величина. Ее можно разложить на составляющие по координатным направлениям, каждая из которых равна скорости изменения величины потенциала в соответствующем направлении.

В декартовых прямоугольных координатах (рис. 2-2)

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (2-7)$$

Выражения градиента в цилиндрических и сферических координатах даны в приложении П-1.

Величина градиента потенциала тем больше, чем ближе расположены друг к другу эквипотенциальные поверхности (или линии), соответствующие значениям потенциала, отличающимся на одну и ту же величину.

Направление градиента потенциала всегда нормально к эквипотенциальной поверхности (или линии), проходящей через данную точку.

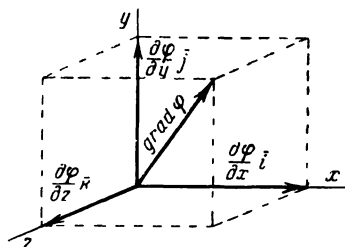


Рис. 2-2. Градиент скаляра.

Градиент потенциала электростатического поля равен пределу отношения силы, с которой поле действует на пробный отрицательный заряд, к величине этого заряда при неограниченном уменьшении величины последнего (чтобы искажением поля, вносимым присутствием пробного заряда, можно было пренебречь).

Если бы пробный заряд не обладал инерцией, то его движение под действием сил поля происходило бы по некоторой линии, называемой линией поля или силовой линией. Градиент потенциала в любой точке направлен по касательной к линии поля.

Величина градиента потенциала электростатического поля, взятая с обратным знаком, называется напряженностью электростатического поля E . Она равна пределу отношения силы, с которой поле действует на пробный положительный заряд, к величине этого заряда при неограниченном уменьшении величины последнего.

Обозначая потенциал электростатического поля буквой ϕ , записываем:

$$E = -\nabla\phi. \quad (2-8)$$

Из определения понятия линий поля вытекает их уравнение в декартовых прямоугольных координатах

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}, \quad (2-9)$$

где E_x , E_y и E_z — составляющие вектора E по координатным осям x , y и z .

Важной особенностью функции скалярного потенциала ϕ является ее непрерывность.

Действительно, наблюдаемые в природе и практике значения напряженности электростатического поля E всегда конечны; в противном случае было бы невозможным существование диэлектриков.

Следовательно, функция скалярного потенциала φ везде имеет конечной величины производные по расстоянию в любом направлении, т. е. является непрерывной функцией, всегда меняющейся плавно, без скачков, при переходе от одной точки пространства к другой, соседней.

Напряженность электростатического поля E не изменится при добавлении к значениям потенциала любой постоянной величины

$$E = -\nabla(\varphi + \text{const}).$$

Величина постоянной определяется граничным условием, которым устанавливается, какой из эквипотенциальных поверхностей (или линий) присваивается нулевой потенциал.

Посредством концепций потенциала и его градиента можно характеризовать не только электростатическое поле, но и поле электрического тока проводимости или переноса (вне источника энергии), а также магнитное поле вне областей с токами (см. гл. 5 и 6).

Линии поля (силовые линии) проводятся так, чтобы касательная к линии в любой точке совпадала по направлению с вектором напряженности соответственно электрического или магнитного поля в данной точке.

2-3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР

Вычисление градиента является операцией дифференцирования скалярной величины потенциала по координатам. Для обозначения этой операции можно применить краткий символ ∇ , приписываемый перед символом той величины, от которой берут градиент. Символ ∇ называют дифференциальным оператором («набла»). Формально его можно рассматривать как вектор, выражаемый в прямоугольной декартовой системе координат записью

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (2-10)$$

Выражение градиента (2-7) может рассматриваться

как произведение формального «вектора» ∇ на скалярную величину потенциала ϕ .

Будучи приписан к символу скалярной величины, оператор ∇ означает, что от нее берется градиент.

2-4. ПОТОК ВЕКТОРА

Представим себе некоторый объем в пространстве, ограниченный замкнутой поверхностью; малый элемент этой поверхности можно считать плоским и изобразить в виде вектора ds , нормального к нему; положительное направление вектора элемента поверхности обычно связывается правилом штопора с направлением обхода контура, ограничивающего элемент; будем считать положительным направление обхода против часовой стрелки, если смотреть на элемент поверхности снаружи (рис. 2-3). Пусть рассматриваемый объем находится в поле вектора E ; в пределах очень малого элемента поверхности вектор E можно считать постоянным.

Скалярное произведение $E ds = E ds \cos(E, ds)$ называется элементарным потоком вектора E через площадку ds . Интеграл этой величины, взятый по всей поверхности, окружающей рассматриваемый объем, $\oint E ds$ выразит полный поток вектора, выходящий из объема. Кружок на знаке интеграла означает интегрирование по всей замкнутой поверхности.

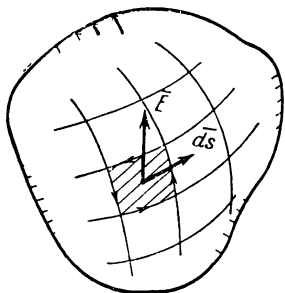


Рис. 2-3. Элементарный поток вектора E .

Поток является скалярной величиной. Вычисление потока может производиться также и через какую угодно незамкнутую поверхность.

Векторное поле можно охарактеризовать системой линий поля, проведенных так, что вектор в любой точке будет направлен по касательной к такой линии. Густота линий поля может быть выбрана так, чтобы в известном масштабе соответствовать значению вектора; в таком случае поток вектора можно условно представить количеством линий поля, пронизывающих рассматриваемую поверхность.

2-5. ДИВЕРГЕНЦИЯ ВЕКТОРА

Полный поток вектора через замкнутую поверхность, ограничивающую малый объем, может быть равен нулю или же отличаться от нуля. В первом случае в объеме не содержится ни источника, ни стока (физического агента, в котором линия поля могла бы начинаться или заканчиваться). Ограничивающая объем замкнутая поверхность может, однако, оказаться дважды пронизанной линией поля, идущей от источника, расположенного вне данного объема, к стоку, также находящемуся вне его. Во втором случае внутри объема находится либо источник, либо сток.

Предел, к которому стремится отношение полного потока вектора через замкнутую поверхность к величине ограничиваемого ею объема при бесконечном уменьшении последнего, называется дивергенцией или расходимостью вектора

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{E} \, ds}{\Delta V}. \quad (2-11)$$

Дивергенцию вектора в какой-либо точке можно условно охарактеризовать числом линий поля, начинающихся или заканчивающихся в малом объеме, центрированном в данной точке.

Дивергенция является скалярной величиной; она положительна, если линия поля начинается в малом объеме, или отрицательна, если линия поля в этом объеме заканчивается.

Рассмотрим элементарный объем в виде параллелепипеда с ребрами dx , dy , dz (рис. 2-4). Разложим вектор \mathbf{E} на составляющие по осям координат $E_x \mathbf{i}$, $E_y \mathbf{j}$, $E_z \mathbf{k}$.

В пределах малого объема вектор \mathbf{E} можно считать непрерывно изменяющейся по расстоянию величиной; его составляющие также непрерывно изменяются по расстоянию.

Например, если x -я составляющая вектора у левой стенки параллелепипеда равна E_x , то при передвижении вдоль ребра dx она изменится на величину $\frac{\partial E_x}{\partial x} dx$, где $\partial E_x / \partial x$ — скорость изменения величины E_x по направлению оси x .

Поток вектора, входящий через левую стенку, площадь которой равна $dy \, dz$, будет равен $d\psi_{x1} = E_x dy \, dz$; поток вектора, выходящий из рассматриваемого параллелепипеда через правую стенку,

будет равен $d\psi_{x_2} = \left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx \right) dy dz$; приращение потока, пронизывающего параллелепипеда по направлению оси x , будет составлять:

$$d\psi_{x_2} - d\psi_{x_1} = \frac{\partial E_x}{\partial x} dx dy dz = \frac{\partial E_x}{\partial x} dV, \quad (2-12)$$

где dV — объем малого параллелепипеда.

Рассматривая попарно таким же путем верхнюю и нижнюю стенки, а также переднюю и заднюю стенки параллелепипеда, по-

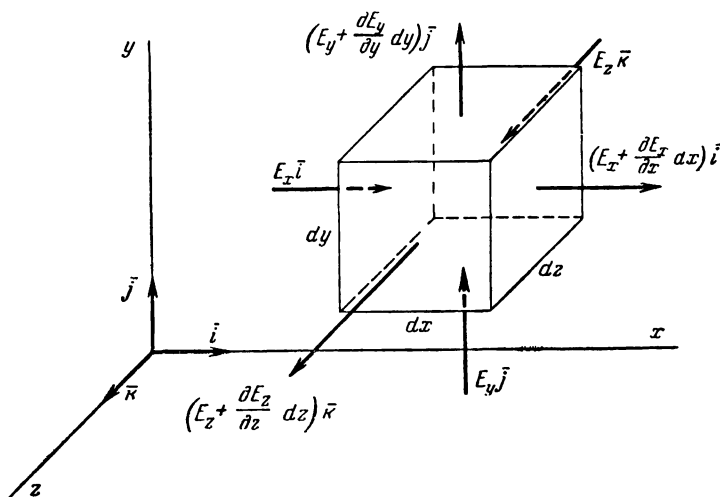


Рис. 2-4. К выводу выражения дивергенции вектора в декартовых прямоугольных координатах.

лучаем аналогичные выражения для приращений потока по осям y и z :

$$d\psi_{y_2} - d\psi_{y_1} = \frac{\partial E_y}{\partial y} dV; \quad (2-13)$$

$$d\psi_{z_2} - d\psi_{z_1} = \frac{\partial E_z}{\partial z} dV. \quad (2-14)$$

Складывая выражения (2-12), (2-13) и (2-14) и деля сумму на объем параллелепипеда dV , получаем выражение дивергенции в декартовых прямоугольных координатах

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (2-15)$$

Правая часть выражения (2-15) может формально рассматриваться как скалярное произведение «вектора» ∇ и вектора \mathbf{E}

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla \mathbf{E}. \quad (2-16)$$

Выражения дивергенции в других координатах приведены в таблице формул векторного анализа в приложении П-1.

Физическая сущность понятия дивергенции поясняется следующими примерами: на рис. 2-5,а показан отрезок трубы, по которой протекает вода. Рассмотрим векторное поле скорости течения во-

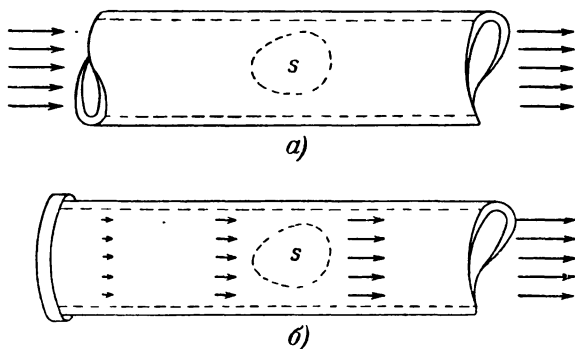


Рис. 2-5. Дивергенция вектора скорости.

а — течения жидкости, равна нулю; б — истечения газа, бывшего под давлением, не равна нулю.

ды \mathbf{v} ; поток вектора скорости через какую-либо поверхность равен объему жидкости, протекающей через эту поверхность в единицу времени. Поток через замкнутую поверхность s равен нулю, поскольку количество жидкости, находящейся в объеме, ограниченном такой поверхностью, неизменно. Это следует как из свойства практической несжимаемости воды, так и из невозможности образования вакуума внутри объема. Следовательно, дивергенция скорости течения воды в трубе равна нулю.

На рис. 2-5,б показан отрезок трубы, закрытой с левого конца. Вначале труба была закрыта крышкой и с правого конца; внутрь трубы накачали газ до некоторого давления выше атмосферного. Затем крышку с правого конца трубы сняли и сжатый газ стал выходить в атмосферу; при этом происходит расширение газа внутри трубы. Если движение газа в трубе представить векторным полем скоростей \mathbf{v} , то дивергенция (т. е. расходимость) скорости не будет равна нулю, так как общее количество газа в каком-нибудь выделенном внутри трубы объеме s , очерченном пунктирной линией, с течением времени не остается постоянным, а уменьшается вследствие расширения газа.

Наличие дивергенции вектора всегда связано с наличием в данной точке источника или стока линий поля. В электростатическом поле источниками являются положительные заряды, стоками — отрицательные. Следовательно, дивергенция вектора напряженности электростатического поля ∇E имеет отличное от нуля значение в пунктах расположения зарядов. В других местах электростатического поля, не содержащих зарядов, дивергенция отсутствует. В магнитном поле дивергенция вектора магнитной индукции всегда равна нулю, так как магнитных зарядов в изолированном виде в природе нет.

2-6. ВИХРЕВОЕ ПОЛЕ. РОТОР ВЕКТОРА

На рис. 2-6,а представлено поле скоростей течения воды в канале, в котором вода движется без трения о берега или дно. В любом месте скорость течения направлена вправо и имеет одно и то же значение. Никаких

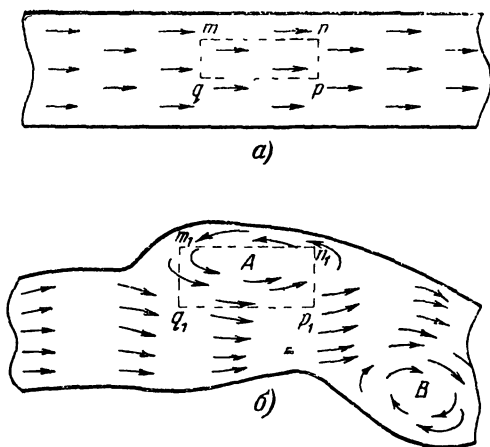


Рис. 2-6. Безвихревое и вихревое поля вектора скорости течения.

вихрей в течении воды не наблюдается. Проследим движение какого-нибудь предмета по замкнутому пути $m_1n_1p_1q_1$; на участках n_1p_1 и q_1m_1 предмет перемещается по нормали к течению воды, т. е. без затраты работы (предполагается, что трение отсутствует); однако придется затратить работу на движение против течения по участ-

ку pq ; в идеальном случае невязкой жидкости эта работа будет полностью возвращена при прохождении участка mn , когда движение будет происходить по течению. Таким образом, результирующая работа при движении по замкнутому пути в безвихревом поле равна нулю.

Иначе говоря, циркуляция (линейный интеграл) вектора силы по замкнутому пути в безвихревом поле равна нулю: $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0$.

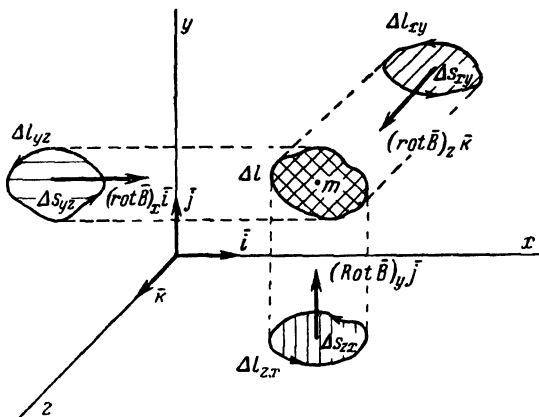


Рис. 2-7. Составляющие ротора вектора в декартовых прямоугольных координатах.

На рис. 2-6,б представлено поле скоростей течения в реке с обычной неправильной формой берегов и дна.

В отдельных местах течение воды имеет вихревой характер, например в областях A и B . Циркуляция вектора силы по замкнутому пути $m_1 n_1 p_1 q_1 m_1$ здесь не может быть равной нулю; движение по часовой стрелке происходит на всем пути против сил поля. Величина циркуляции будет определяться работой, затрачиваемой на обход контура циркуляции.

Такого типа поле называется соленоидальным или вихревым полем.

Выберем очень малый контур произвольной формы Δl и поместим его так, чтобы исследуемая точка m лежала в центре контура (рис. 2-7).

Рассмотрим величину циркуляции вектора \mathbf{V} , взятой по вспомогательному контуру Δl_{yz} , являющемуся проекцией контура Δl на плоскость yz декартовой пря-

моугольной системы координат. Предел отношения полученной величины циркуляции к величине площади ΔS_{yz} , ограниченной вспомогательным контуром циркуляции, при беспредельном уменьшении площади обозначают символом $(\text{rot } \mathbf{B})_x$ и называют составляющей ротора вектора в точке m по координатной оси x , перпендикулярной плоскости yz , в которой лежит площадка,

$$(\text{rot } \mathbf{B})_x = \lim_{\Delta S_{yz} \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta l_{yz}} \mathbf{B} dl}{\Delta S_{yz}}. \quad (2-17)$$

Кружок на знаке интеграла означает интегрирование по замкнутому контуру.

Беря подобным же путем циркуляцию вектора по вспомогательным контурам, лежащим в плоскостях zx и xy и являющимся проекциями контура циркуляции Δl на эти плоскости, определяют составляющие ротора соответственно по осям y и z .

Знак составляющей ротора определяется правилом штопора. Если рукоять штопора поворачивать в плоскости вспомогательного контура циркуляции в таком направлении, чтобы величина циркуляции получилась положительной, то поступательное движение штопора будет указывать направление составляющей ротора. Например, ротор скорости течения воды на рис. 2-6,б имеет лишь одну составляющую, перпендикулярную чертежу. В области A она направлена из страницы к читателю, в области B — от читателя в страницу.

Умножая каждую из найденных составляющих на соответствующий единичный вектор и геометрически складывая результаты, получают векторную величину ротора вектора \mathbf{B} в рассматриваемой точке m

$$\begin{aligned} \text{rot } \bar{\mathbf{B}} = & \lim_{\Delta S_{yz} \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta l_{yz}} \mathbf{B} dl}{\Delta S_{yz}} \mathbf{i} + \lim_{\Delta S_{zx} \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta l_{zx}} \mathbf{B} dl}{\Delta S_{zx}} \mathbf{j} + \\ & + \lim_{\Delta S_{xy} \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta l_{xy}} \mathbf{B} dl}{\Delta S_{xy}} \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Для вывода выражения ротора в прямоугольных декартовых координатах обратимся к рис. 2-8, где контур циркуляции вектора

В взят в виде малого прямоугольника со сторонами dx и dy . Пусть вектор **В** лежит в плоскости xy .

Разложим вектор **В** на составляющие по координатным осям B_x, B_y . Эти значения относятся к левому нижнему углу контура циркуляции, т. е. к точке a с координатами x, y . Значения составляющих вектора в точке b , имеющей координаты $x+dx, y$, будут равны:

$$B_x + \frac{\partial B_x}{\partial x} dx \text{ и } B_y + \frac{\partial B_y}{\partial x} dx;$$

частные производные $\partial B_x/\partial x$ и $\partial B_y/\partial x$ выражают скорости изменения составляющих B_x и B_y по направлению оси x на рассматриваемом участке. Значения составляющих вектора в точках c и d определяются аналогичным путем.

В точке c они равны $B_x + \frac{\partial B_x}{\partial x} dx + \frac{\partial B_x}{\partial y} dy$ и $B_y + \frac{\partial B_y}{\partial x} dx + \frac{\partial B_y}{\partial y} dy$, а в точке d —

$$B_x + \frac{\partial B_x}{\partial y} dy \text{ и } B_y + \frac{\partial B_y}{\partial y} dy.$$

Вычислим циркуляцию вектора **В** по контуру $abcd$; направление обхода берем против часовой стрелки. При вычислении интеграла $\int \mathbf{B} d\mathbf{l}$ на участках ab и cd принимаем во внимание лишь x -ю составляющую вектора B_x , так как скалярное произведение y -й составляющей на элемент пути dx , ей перпендикулярный, равно нулю; при вычислении интеграла на участках bc и da по аналогичным соображениям принимается во внимание лишь y -я составляющая вектора.

Среднее значение x -й составляющей вектора B_x на участке ab составляет: $B_x + \frac{1}{2} \frac{\partial B_x}{\partial x} dx$; на участке cd : $B_x + \frac{1}{2} \frac{\partial B_x}{\partial x} dx + \frac{\partial B_x}{\partial y} dy$; среднее значение y -й составляющей вектора B_y на участке bc равно: $B_y + \frac{\partial B_y}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial B_y}{\partial y} dy$; на участке da : $B_y + \frac{1}{2} \frac{\partial B_y}{\partial y} dy$.

Умножая эти значения на соответствующие отрезки пути интегрирования, равные dx на участке ab , dy на участке bc , $-dx$ на участке cd и $-dy$ на участке da , получаем величину циркуляции вектора **В** по контуру $abcd$

$$\oint_{abcd} \mathbf{B} d\mathbf{l} = - \frac{\partial B_x}{\partial y} dx dy + \frac{\partial B_y}{\partial x} dx dy; \quad (2-18)$$

но $dx dy = ds$ представляет собой величину площади, ограниченной контуром циркуляции.

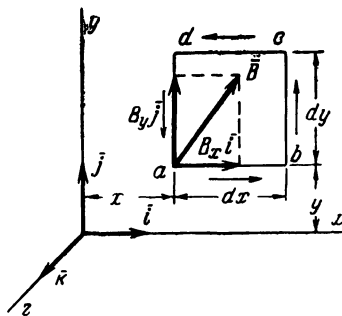


Рис. 2-8. К выводу выражения составляющей ротора вектора по оси z в декартовых прямоугольных координатах.

Разделив (2-18) на ds и умножив на \mathbf{k} , получим величину ротора вектора \mathbf{B}

$$\text{rot } \mathbf{B} = \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (2-19)$$

В общем случае выражение в скобках в формуле (2-19) представит собой только z -ю составляющую ротора, относящуюся к вектору \mathbf{B}_{xy} , являющемуся проекцией вектора \mathbf{B} на плоскость xy . Аналогичные рассуждения можно провести в отношении векторов \mathbf{B}_{yz} и \mathbf{B}_{zx} , являющихся проекциями вектора \mathbf{B} соответственно на плоскости yz и zx ; в результате мы получим x -ю и y -ю составляющие ротора.

Полное выражение ротора в прямоугольных декартовых координатах имеет вид:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}, \quad (2-20)$$

Это выражение представляет собой как бы векторное произведение дифференциального оператора ∇ на вектор \mathbf{B}

$$\text{rot } \mathbf{B} = [\nabla \mathbf{B}]. \quad (2-21)$$

Выражения (2-20) и (2-21) удобнее представить в виде определителя

$$[\nabla \mathbf{B}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \quad (2-22)$$

Выражения ротора в других системах координат приведены в таблице формул векторного анализа в приложении П-1.

2-7. СКАЛЯРНЫЙ ЛАПЛАСИАН

Из операций двукратного дифференцирования в теории электромагнитного поля имеет большое применение дивергенция градиента, называемая скалярным лапласианом

$$\nabla(\nabla \varphi) \text{ или } \nabla^2 \varphi. \quad (2-23)$$

Иногда для обозначения скалярного лапласиана применяется символ Δ .

Пользуясь формулой (2-10), легко получить развер-

нутое выражение лапласиана в прямоугольных декартовых координатах

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (2-24)$$

Выражения скалярного лапласиана в других системах координат приведены в таблице формул векторного анализа в приложении П-1.

2-8. ВЕКТОРНЫЙ ЛАПЛАСИАН

Векторным лапласианом векторной величины \mathbf{A} называется выражение

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 A_x \mathbf{i} + \nabla^2 A_y \mathbf{j} + \nabla^2 A_z \mathbf{k}. \quad (2-25)$$

Векторный лапласиан является геометрической суммой лапласианов трех скалярных составляющих вектора.

Возможно другое истолкование векторного лапласиана. Из векторной алгебры известно, что

$$(\mathbf{B}\mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{B}(\mathbf{C}\mathbf{A}) - [\mathbf{C}[\mathbf{B}\mathbf{A}]];$$

положим $\mathbf{B} = \nabla$ и $\mathbf{C} = \nabla$; тогда

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \mathbf{A}) - [\nabla[\nabla \mathbf{A}]]. \quad (2-26)$$

Векторный лапласиан \mathbf{A} является разностью градиента дивергенции \mathbf{A} и ротора от ротора \mathbf{A} .

2-9. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ПОЛЯ

Векторное произведение любого вектора на самого себя равно нулю. Этот вывод можно распространить и на «вектор» ∇

$$[\nabla \nabla] = 0. \quad (2-27)$$

Поэтому ротор градиента скалярной величины всегда равен нулю

$$\text{rot}(\text{grad } \varphi) = [\nabla(\nabla \varphi)] = [\nabla(\nabla \varphi)] \equiv 0. \quad (2-28)$$

Векторная величина \mathbf{M} , не имеющая ротора, является градиентом некоторого скаляра, обычно называемого скалярным потенциалом поля вектора \mathbf{M} . Отсутствие ротора показывает, что линии поля не образуют замкнутых

кривых (вихрей). Каждая линия принципиально разомкнута, начинаясь у некоторого «источника» и заканчиваясь у некоторого «стока». Таково, например, электростатическое поле, где источниками и стоками являются соответственно положительные и отрицательные заряды.

В точках расположения источников и стоков дивергенция вектора не равна нулю. Это — второе условие существования безвихревого (потенциального) поля.

Итак, потенциальное поле характеризуется: 1) отсутствием ротора; 2) наличием дивергенции, хотя бы в некоторых точках; 3) наличием скалярного потенциала:

$$[\nabla M] \equiv 0; \nabla M \neq 0; M = \nabla \varphi. \quad (2-29)$$

2-10. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ВИХРЕВОГО ПОЛЯ

Дивергенция ротора любого вектора всегда равна нулю. Это также видно из уравнения (2-27)

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) = \nabla[\nabla \bar{A}] = [\nabla \nabla] \bar{A} \equiv 0. \quad (2-30)$$

Отсутствие дивергенции является первым необходимым условием существования вихревого (соленоидального) поля.

Действительно, при $\nabla \mathbf{B} \equiv 0$ поле вектора \mathbf{B} не имеет ни источников, ни стоков; линии поля нигде не начинаются и не заканчиваются, т. е. представляют собой замкнутые кривые (вихри). Ротор вектора \mathbf{B} не равен нулю, по крайней мере в ряде точек. Это — второе условие существования вихревого поля; оно не совместимо с уравнением (2-28); вектор \mathbf{B} нельзя представить как градиент скаляра. Иначе говоря, вихревое векторное поле не имеет скалярного потенциала.

Итак, соленоидальное вихревое поле характеризуется: 1) отсутствием дивергенции; 2) наличием ротора, хотя бы в некоторых точках; 3) отсутствием скалярного потенциала:

$$\nabla \mathbf{B} \equiv 0; [\nabla \mathbf{B}] \neq 0. \quad (2-31)$$

Вихревое поле может быть охарактеризовано функцией, называемой векторным потенциалом (не существовавшей в случае потенциального поля).

Примером вихревого поля является магнитное поле в толще проводника с током, материал которого имеет конечное значение удельной проводимости.

2-11. ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Из уравнения (2-30) вытекает, что векторная величина \mathbf{B} , не имеющая дивергенции, всегда может рассматриваться как ротор другого вектора \mathbf{A} .

Если $\nabla \mathbf{B} \equiv 0$, то можно положить

$$\mathbf{B} = [\nabla \mathbf{A}]. \quad (2-32)$$

Вектор \mathbf{A} называется векторным потенциалом поля вектора \mathbf{B} .

Величина векторного потенциала многозначна не только в том отношении, что к ней без нарушения определения (2-32) может быть прибавлена любая постоянная, но и в том, что к ней можно добавить любую потенциальную функцию, поскольку ротор градиента равен нулю [уравнение (2-28)].

Итак,

$$\mathbf{B} = [\nabla (\mathbf{A} + \nabla \psi + \text{const})]. \quad (2-33)$$

Надлежащий выбор функции $\mathbf{A} + \nabla \psi$ (называемой иногда квазивекторным потенциалом) может значительно облегчить расчеты полей благодаря возможности упрощения граничных условий [Л. 1 и 57].

В физических задачах обычно рассматриваются векторные величины, нигде не обращающиеся в бесконечность. Таков, например, вектор магнитной индукции \mathbf{B} , значения которого всегда конечны.

Поэтому векторный потенциал магнитного поля \mathbf{A} является непрерывной функцией, плавно изменяющейся при переходе от одной точки к другой, соседней.

2-12. СМЕШАННЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Встречаются векторные поля, у которых во всех точках ограниченного пространства нет ни ротора, ни дивергенции; такое поле обладает обоими потенциалами— скалярным и векторным. В таком смешанном поле имеются поверхности и линии равного скалярного потенциала (эквипотенциали). Линии поля, касательные к которым будут указывать направление градиента скалярного потенциала в каждой точке, должны быть непременно замкнутыми, так как, поскольку дивергенция равна нулю, в поле нет ни источников, ни стоков. Однако смешанное поле не имеет и ротора; другими словами, нельзя представить, чтобы замкнутая линия поля где-

либо стянулась в маленькую петлю-вихрь, предел бесконечного уменьшения которой определял бы величину ротора. Значит, все линии поля, оставаясь замкнутыми, имеют конечное протяжение. Обычно такие поля образуются вокруг областей чисто вихревых полей. Таково, например, магнитное поле снаружи проводника с током.

В приложении П-3 представлены в схематическом виде свойства и характеристики векторных полей потенциального, соленоидального (вихревого) и смешанного типов.

2-13. ТЕОРЕМЫ ОСТРОГРАДСКОГО—ГАУССА И ОСТРОГРАДСКОГО—СТОКСА

Теорема Остроградского — Гаусса (теорема дивергенции) гласит, что интеграл дивергенции вектора, взятый по объему, можно заменить интегралом самого вектора, взятым по замкнутой поверхности, окружающей этот объем. На рис. 2-9 из объема V выделены два беско-

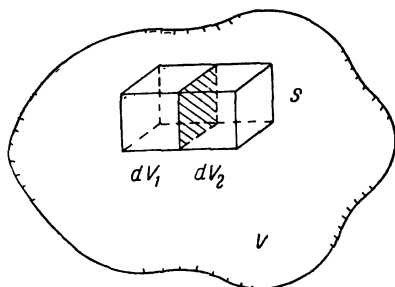


Рис. 2-9. К доказательству теоремы Остроградского — Гаусса.

нечно малых объема dV_1 и dV_2 , имеющих общую стенку.

Согласно определению дивергенции [формула (2-11)] выражение $\nabla \mathbf{D} dV_1 = \oint_{ds_1} \mathbf{D} ds$ представляет собой элементар-

ный поток вектора через замкнутую поверхность ds_1 , окружающую объем dV_1 .

Элементарный поток через замкнутую поверхность ds_2 соответственно будет равен:

$$\nabla \mathbf{D} dV_2 = \oint_{ds_2} \mathbf{D} ds.$$

Аналогичные выражения можно выписать для любого из малых объемов.

Складывая все эти выражения, имеем общий поток вектора, получивший начало в пределах всего объема

$$\sum \nabla \mathbf{D} dV_n = \sum_{ds_n} \oint \mathbf{D} ds. \quad (2-34)$$

Поток, проходящий через пограничную стенку из объема dV_1 , будет, очевидно, скомпенсирован потоком, проходящим через ту же стенку из объема dV_2 ; то же произойдет на всех других пограничных стенках; в результате правая часть уравнения (2-34) при переходе к пределу будет содержать только потоки, выходящие из тех стенок малых объемов, которые лежат на наружной поверхности S , окружающей весь объем поля; это можно выразить интегралом $\oint_S \mathbf{D} ds$.

Сумма, стоящая в левой части уравнения (2-34), при переходе к пределу превратится в интеграл дивергенции, взятый по всему объему поля,

$$\int_V \nabla \mathbf{D} dV;$$

таким образом,

$$\int_V \nabla \mathbf{D} dV = \oint_S \mathbf{D} ds. \quad (2-35)$$

Это и есть теорема Остроградского — Гаусса.

Для вывода теоремы Остроградского — Стокса (теоремы ротора) обратимся к рис. 2-10, изображающему часть некоторой поверхности S , расположенной в поле векторной величины \mathbf{B} .

Поверхность подразделена на ряд малых площадок $ds_1, ds_2 \dots$. По определению ротора произведение $[\nabla \mathbf{B}] ds_1 = \oint_{dl_1} \mathbf{B} dl$ представляет собой циркуляцию вектора \mathbf{B} по контуру dl_1 , ограничивающему площадку ds_1 ;

аналогично $(\nabla \mathbf{B}) ds_2 = \oint_{dl_2} \mathbf{B} dl$ выразит циркуляцию вектора \mathbf{B} по контуру dl_2 , ограничивающему площадку ds_2 , и т. д.

Суммируя все эти малые циркуляции, получаем:

$$\sum [\nabla \mathbf{B}] ds_k = \sum \oint_{dl_k} \mathbf{B} dl. \quad (2-36)$$

Каждая малая циркуляция берется по одному и тому же направлению, допустим против часовой стрелки; в таком случае часть интеграла циркуляции вокруг площадки ds_1 , относящаяся к участку ab , разграничивающему площадки ds_1 и ds_2 , будет скомпенсирована соответствующей частью интеграла циркуляции вокруг площадки ds_2 .

В правой части уравнения (2-36) останутся нескомпенсированными только интегралы, взятые по наружной

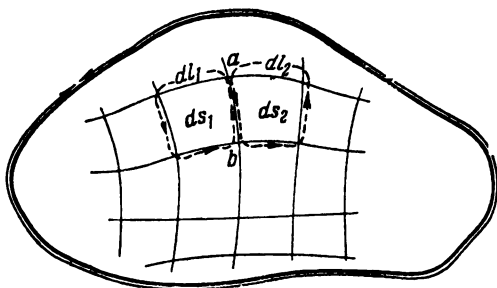


Рис. 2-10. К доказательству теоремы Остроградского — Стокса.

линии l , ограничивающей всю рассматриваемую площадь S ; их сумма при переходе к пределу даст интеграл вектора \mathbf{B} по замкнутому пути l

$$\oint_l \mathbf{B} dl.$$

Левая часть уравнения (2-36) при переходе к пределу обратится в интеграл ротора \mathbf{B} , взятый по всей поверхности S . Стало быть, интеграл ротора вектора по поверхности равен циркуляции вектора по контуру, ограничивающему поверхность,

$$\int_S [\nabla \mathbf{B}] ds = \oint_l \mathbf{B} dl. \quad (2-37)$$

Это и есть теорема Остроградского — Стокса. Поверхность интегрирования может быть любой формы. Если поверхность будет замкнутой, т. е. не будет иметь края, то правая часть выражения (2-37) обратится в нуль.

Следовательно, интеграл ротора по замкнутой поверхности равен нулю

$$\oint [\nabla \mathbf{B}] ds \equiv 0. \quad (2-38)$$

2-14. ТЕОРЕМА ГРИНА

Пусть произвольный вектор \mathbf{D} не претерпевает скачкообразных изменений в пределах объема V , ограниченного замкнутой поверхностью S . Такой вектор можно представить в виде произведения

$$\mathbf{D} = \psi \operatorname{grad} \varphi = \psi \nabla \varphi,$$

где φ и ψ — скаляры, также непрерывные в пределах рассматриваемого объема V и обладающие непрерывными первыми и вторыми производными по произвольно выбранным координатным направлениям.

Применим теорему Остроградского — Гаусса (2-35); заменим по формуле дифференцирования произведения

$$\nabla \mathbf{D} = \nabla (\psi \nabla \varphi) = \nabla \psi \nabla \varphi + \psi \nabla^2 \varphi$$

и примем во внимание, что элементарный поток вектора, пронизывающий любой малый элемент ограничивающей поверхности, равен:

$$\mathbf{D} ds = \psi (\nabla \varphi)_n ds = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds,$$

где $(\nabla \varphi)_n$ — проекция градиента скаляра φ на направление нормали к элементу поверхности dS , следовательно

$$\oint_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \int_V (\nabla \psi \cdot \nabla \varphi + \psi \cdot \nabla^2 \varphi) dV. \quad (2-39)$$

Это выражение называется теоремой Грина.

Глава третья

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

3-1. СВОБОДНЫЕ И СВЯЗАННЫЕ ЗАРЯДЫ

Электростатическим называют поле неподвижных электрических зарядов. Вообще говоря, такие поля в чистом виде не встречаются, так как являющиеся носи-

телями зарядов материальные частицы всегда находятся в движении.

Это следует из теоремы Ирншоу, гласящей, что заряды не могут находиться в устойчивом равновесии под действием одних лишь электростатических сил. В качестве иллюстрации представим систему из трех точечных зарядов $+4q$, $-q$ и $+4q$, расположенных в указанном порядке вдоль прямой линии на равных расстояниях. Из закона Кулона известно, что сила взаимодействия между двумя зарядами пропорциональна произведению их величин и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними, причем заряды разных знаков притягиваются, а заряды одного знака отталкиваются друг от друга. Силы, действующие на каждый из трех зарядов, уравновешены. Однако это равновесие неустойчиво. При малейшем сдвиге, например, второго заряда в сторону первого сила притяжения между первым и вторым зарядами увеличится, а сила притяжения между вторым и третьим уменьшится. Сила же взаимного отталкивания первого и третьего зарядов не изменится. Равновесие сил нарушится. В результате первый и второй заряды притянутся друг к другу, а третий отлетит в бесконечность.

Атомы веществ должны быть динамическими системами. Устойчивость атома определяется именно движением входящих в состав атома заряженных элементарных частиц.

Однако если наблюдать поведение зарядов издали, т. е. на расстояниях, значительно превышающих пробег электрона в пределах атома и пробег теплового движения молекул вещества исследуемого тела, то наблюдателю, перемещающемуся в пространстве вместе с этим телом, заряды покажутся практически неподвижными; в этом смысле можно говорить о неподвижных зарядах и об их электростатическом поле.

Свободными называют заряды, которые, находясь под действием электрического поля, могут свободно передвигаться в среде. Свободные заряды считаются носителями тока в проводниках, называемого током проводимости.

Свободными являются также заряды, нанесенные и вне на поверхность диэлектриков и нарушающие их электрическую нейтральность.

Связанные заряды входят в состав нейтральных молекул диэлектриков или могут являться ионами, закреп-

ленными в твердых диэлектриках вблизи определенных положений равновесия. Они удерживаются в более или менее фиксированных положениях под действием внутриаомных или внутримолекулярных сил. В присутствии же постороннего электрического поля связанные заряды могут смещаться на некоторые небольшие расстояния. Часть из них оказывается смещенной на по-

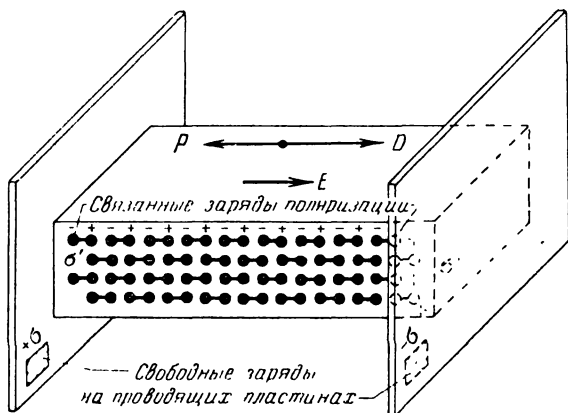


Рис. 3-1. Поляризация диэлектрика.

верхность диэлектрика, где они не будут электрически нейтрализованы (рис. 3-1).

Электрическое поле обуславливается как свободными, так и связанными зарядами.

3-2. ОСНОВНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Главными характеристиками электростатического поля являются напряженность поля E (в вольтах на метр) и потенциал φ (в вольтах). Напряженность поля равна градиенту потенциала, взятому с отрицательным знаком,

$$E = -\nabla\varphi. \quad (3-1)$$

Вычислим линейный интеграл напряженности электростатического поля между какими-либо двумя точками поля M и N . Перейдем к декартовым прямоугольным

координатам, поместив начало координат в точку отправления M :

$$\int_M^N \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_M^N (E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k}) (dx \cdot \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \cdot \mathbf{k}).$$

Здесь E_x, E_y, E_z — составляющие вектора \mathbf{E} по осям x, y, z , а dx, dy, dz — составляющие малого перемещения $d\mathbf{l}$ по тем же осям. Выполняя скалярное произведение под знаком интеграла и подставляя из выражения градиента

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

получаем:

$$\begin{aligned} \int_M^N \mathbf{E} d\mathbf{l} &= - \int_M^N \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right) = \\ &= - \int_M^N d\varphi = \varphi_M - \varphi_N. \end{aligned} \quad (3-2)$$

Линейный интеграл напряженности электростатического поля по произвольному пути между двумя точками равен разности потенциалов этих точек. От формы пути величина интеграла не зависит. Очевидно, что при замкнутой форме пути линейный интеграл, т. е. циркуляция вектора \mathbf{E} , равен нулю; этим доказывается безвихревой характер электростатического поля.

Положим, что точка N имеет потенциал, равный нулю. Тогда потенциал φ_M точки M будет равен $\int_0^M \mathbf{E} d\mathbf{l}$, т. е. численно будет выражаться работой, затраченной на перенос в данную точку M единичного положительного заряда из точки N . Точка N может находиться где угодно. Как частный случай возможен перенос ее в бесконечность.

Величина напряженности поля важна для оценки так называемой электрической прочности изоляционных материалов. Например, для воздуха критическая напряженность электрического поля равна $E_{кр} = 3 \cdot 10^6$ в/м; при превышении этого значения наступает пробой, т. е. воздух теряет свойства изолятора.

Значения потенциала ϕ и напряженности поля E зависят от свойств среды; это обстоятельство учитывается посредством абсолютной диэлектрической проницаемости ϵ_a , равной произведению

$$\epsilon_a = \epsilon_0 \epsilon, \quad (3-3)$$

в котором $\epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \phi/m$ — электрическая постоянная, являющаяся отношением суммарного электрического заряда, заключенного в вакууме внутри некоторой замкнутой поверхности, к потоку вектора напряженности электрического поля сквозь эту поверхность; ϵ — диэлектрическая (относительная) проницаемость — отвлеченное число.

Величина ϵ_a ставится в знаменателе выражения, определяющего зависимость между E и зарядами.

В некоторых случаях желательно иметь оценку действия зарядов вне зависимости от свойств среды. Это достигается введением в расчеты вектора электрического смещения (электрической индукции)

$$D = \epsilon_a E. \quad (3-4)$$

Другое определение вектора D приводится в § 3-3. Размерность вектора D — кулоны на квадратный метр.

3-3. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ДИЭЛЕКТРИКОВ

Под действием сил внешнего электрического поля в диэлектрике происходит смещение зарядов. На поверхности диэлектрика появляются неуравновешенные связанные заряды σ' . Их поле ослабляет действие внешнего поля, обусловленного, например, свободными зарядами на проводящих пластинах, между которыми помещен диэлектрик (рис. 3-1).

Действие связанных зарядов оценивается вектором поляризованности P , равным пределу отношения электрического момента некоторого объема диэлектрика к величине этого объема, когда последний стремится к нулю,

$$P = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Sigma q \cdot 2h}{\Delta V} \cdot 1_n. \quad (3-5)$$

Здесь малый объем диэлектрика ΔV рассматривается как электрический диполь, содержащий два малых разноименных заряда $+q$ и $-q$, отстоящих один от другого на расстояние $2h$. $\mathbf{1}_n$ — единичный вектор, направленный от $+q$ к $-q$.

Размерность вектора \mathbf{P} — кулоны на квадратный метр.

Объемная плотность связанных зарядов ρ' численно равна дивергенции вектора \mathbf{P} , взятой с отрицательным знаком,

$$\rho' = -\nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (3-6)$$

Умножая обе части этого равенства на элемент объема dV , интегрируя по всему объему V поляризуемого диэлектрика и применяя теорему Остроградского — Гаусса, можно установить, что общее количество связанных зарядов равно взятому со знаком минус потоку вектора поляризованности по замкнутой поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем диэлектрика,

$$\sum q_{\text{связ}} = - \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{s}. \quad (3-7)$$

Поскольку действие разноименных связанных зарядов соседних малых объемов в толще диэлектрика взаимно компенсируется (рис. 3-1), левую часть (3-7) можно заменить интегралом от поверхностной плотности связанных зарядов σ' , взятым по всей замкнутой поверхности диэлектрика,

$$\sum q_{\text{связ}} = \oint_S \sigma' \cdot d\mathbf{s} \cdot \mathbf{1}_n. \quad (3-8)$$

Здесь $\mathbf{1}_n$ — единичный вектор по нормали к поверхности.

Интегралы, входящие в (3-7) и (3-8), равны друг другу при любой величине и конфигурации объема диэлектрика. Это возможно лишь при равенстве подынтегральных выражений

$$\mathbf{P} = -\sigma' \cdot \mathbf{1}_n. \quad (3-9)$$

Вектор поляризованности равен поверхностной плотности связанных зарядов, взятой с отрицательным знаком.

Вектор электрического смещения может рассматриваться как сумма вектора напряженности поля в ди-

электрике, умноженного на электрическую постоянную, и вектора поляризованности

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (3-10)$$

Из этого уравнения следует:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D} - \mathbf{P}}{\epsilon_0} = \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}. \quad (3-11)$$

Здесь \mathbf{E}_0 — напряженность внешнего поля, определяемая свободными зарядами σ в отсутствие поляризуемого диэлектрика.

Поле в диэлектрике \mathbf{E} оказывается ослабленным по сравнению с внешним полем на величину \mathbf{P}/ϵ_0 .

Величина вектора \mathbf{P} пропорциональна действительной напряженности поля в изотропном диэлектрике \mathbf{E}

$$\frac{\mathbf{P}}{\epsilon} = k_a \mathbf{E}. \quad (3-12)$$

Коэффициент k_a называется диэлектрической восприимчивостью. Подставим (3-12) в (3-10) и сравним результат с (3-4) при подстановке в него зависимости (3-3). Получаем следующую взаимную связь величин проницаемости и восприимчивости:

$$\epsilon = 1 + k_a. \quad (3-13)$$

Оценка качеств технических диэлектриков производится по следующим величинам:

- а) относительная диэлектрическая проницаемость ϵ ;
- б) электрическая прочность (пробивная напряженность электрического поля) $E_{\text{проб}}$;
- в) удельное электрическое сопротивление ρ ;
- г) тангенс угла диэлектрических потерь $\text{tg } \delta$, где $\delta = 90^\circ - \varphi$; φ — угол сдвига фаз между переменным током через конденсатор, заполненный данным диэлектриком, и напряжением между обкладками конденсатора.

В приложении П-4 приведены примерные значения этих величин для некоторых диэлектриков.

В некоторых технических диэлектриках наблюдается поляризация и в отсутствие внешнего (возбуждающего) электрического поля. Их поверхностные заряды могут рассматриваться как источники электрического поля в окружающей среде.

Так, при механическом сжатии (или растяжении) перпендикулярно оптической оси на поверхности кристалла кварца (и некоторых других искусственных материалов) появляются заряды. Такие материалы называются пьезоэлектриками, а само явление — пьезоэлектрическим эффектом. Ничтожно малая электрическая проводимость пьезоэлектриков исключает возможность быстрого стекания зарядов. Количественная оценка производится по величине пьезоэлектрического коэффициента K_n , равного отношению величин заряда и измеряемого усилия. Для кварца $K_n \approx 2,1 \cdot 10^{-12} \text{ к/н}$, для метатитаната бария этот коэффициент в несколько десятков раз больше.

Пьезоэлектрический эффект обратим, т. е. под действием внешнего электрического поля в пьезоэлектриках возникают механические напряжения и изделия из них деформируются.

В так называемых сегнетоэлектриках (например, в титанате бария) наблюдается после их пребывания во внешнем электрическом поле остаточная поляризация. Это явление внешне сходно с остаточной магнитной индукцией в ферромагнитном материале (гл. 7). Если внешнее поле переменное, то изменение величины вектора смещения сегнетоэлектрика D происходит по кривой, напоминающей кривые циклов перемагничивания ферромагнитных материалов. При этом происходят потери энергии, называемые потерями на диэлектрический гистерезис.

Имеют большое применение так называемые электреты, представляющие диэлектрические материалы, легко поляризуемые в жидком виде и обладающие способностью после затвердевания сохранять поляризацию на длительное время (до нескольких лет). К электретам относятся органическое стекло (плексиглас), нейлон, смесь из 45% карнаубского воска, 45% белой смолы и 10% пчелиного воска и др. Плотность остаточного поверхностного заряда достигает примерно 10^{-4} к/м^2 .

3-4. ТЕОРЕМА ГАУССА

Поместим точечный заряд Q в центр сферы радиусом r . Из опыта известно, что числовое значение вектора смещения в любой точке сферической поверхности будет одним и тем же и равным $Q/4\pi r^2$. Направление век-

тора смещения будет повсюду по нормали к поверхности. Найдем полный поток вектора смещения, пронизывающий сферическую поверхность, элемент которой равен:

$$ds = r^2 d\Omega \cdot \mathbf{1}_r,$$

где $d\Omega$ — телесный угол, под которым видна из центра элементарная площадка ds , лежащая на поверхности сферы; вектор площади ds нормален к ней и направлен наружу

$$\Psi = \oint_S \mathbf{D} ds = \frac{Q}{4\pi r^2} \int_0^{4\pi} r^2 d\Omega = Q.$$

Поток вектора можно оценить количеством условных линий поля, пронизывающих рассматриваемую поверхность. Легко видеть, что полное количество линий, пронизывающих замкнутую поверхность, охватывающую заряд, не может измениться, как бы эта поверхность ни была деформирована или как бы сам заряд ни перемещался в пределах ограниченной замкнутой поверхностью объема. Следовательно, полный поток смещения через охватывающую заряд замкнутую поверхность любой формы равен величине этого заряда $\Psi = Q$.

Поток считается положительным, когда его линии выходят из замкнутой поверхности; это будет в случае положительного знака заряда Q .

В случае отрицательного заряда линии поля входят в замкнутую поверхность и поток считается отрицательным.

Если внутри некоторой замкнутой поверхности находится несколько зарядов, то, применяя принцип наложения, найдем, что полный поток, пронизывающий замкнутую поверхность, равен алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри нее

$$\oint_S \mathbf{D} ds = \sum Q. \quad (3-14)$$

Это — интегральная форма теоремы Гаусса.

Введем понятие объемной плотности заряда ρ (т. е. заряда, приходящегося на единицу объема, в кулонах на кубический метр). Сумма всех зарядов, стоящих в правой части выражения (3-14), превратится в инте-

грал $\int_V \rho dV$. Левую часть этого выражения заменим тоже объемным интегралом на основании теоремы Остроградского — Гаусса

$$\int_V \nabla \mathbf{D} dV = \int_V \rho dV.$$

Оба интеграла взяты по одному и тому же объему, занимаемому полем. Равенство справедливо при любой величине и конфигурации этого объема.

Поэтому подынтегральные выражения равны

$$\nabla \mathbf{D} = \rho. \quad (3-15)$$

Это — дифференциальная форма теоремы Гаусса.

Заметим, что при применении теоремы Гаусса имеется в виду учет всех зарядов как свободных, так и связанных.

3-5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Разделив обе части уравнения (3-15) на величину абсолютной диэлектрической проницаемости ϵ_a и подставив $\frac{\mathbf{D}}{\epsilon_a} = \mathbf{E} = -\nabla\varphi$, получим уравнение Пуассона

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_a}. \quad (3-16)$$

Оно относится к любой точке поля, где содержатся заряды. В областях поля, не содержащих зарядов, $\rho = 0$; уравнение (3-16) превращается в уравнение Лапласа

$$\nabla^2\varphi = 0. \quad (3-17)$$

Уравнения Пуассона и Лапласа являются уравнениями в частных производных; они допускают существование множества линейно независимых друг от друга решений, из которых следует в каждом случае расчета выбрать одно, единственно удовлетворяющее так называемым граничным условиям, описывающим поведение поля на границах между различными диэлектриками, а также между диэлектриками и проводниками.

Отыскание этого решения обычно является трудной задачей; лишь в отдельных случаях, при простой форме границ поля удается получить аналитическое решение. В очень многих практических случаях необходимо прибегать к приближенным расчетам (см. гл. 17).

3-6. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Большая часть практических задач сводится к расчету электростатического поля в областях, не содержащих в себе внутренних зарядов, но окружающих заряженные частицы или предметы (проводники, поверхности поляризованных диэлектриков и т. п.). Поэтому уравнение Лапласа является очень важным в практике расчетов. Выведем так называемые фундаментальные решения уравнения Лапласа. Поместим начало сферических координат в точку расположения элементарного точечного заряда. Подставим в уравнение Лапласа (3-17) выражение лапласиана в сферических координатах (приложение П-1). В силу симметрии производные по меридиану и параллели будут равны нулю. Другими словами, потенциал имеет одну и ту же величину во всех точках сферической поверхности произвольного радиуса, имеющей центр в начале координат. Поэтому уравнение Лапласа примет вид:

$$\frac{1}{r^2} \left\{ \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) \right\} = 0. \quad (3-18)$$

Это уравнение интегрируется для всех точек, кроме точки $r=0$, где размещен сам элементарный заряд. Для всех значений $r>0$ имеем:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dr} = \text{const}_1; \quad \varphi = -\frac{\text{const}_1}{r} + \text{const}_2. \quad (3-19)$$

Зависимость (3-19) называется фундаментальным решением уравнения Лапласа в пространстве.

В случае так называемого плоскопараллельного (двухмерного) поля значение потенциала не изменяется по одной из прямоугольных декартовых координат (или по осевой координате в цилиндрической системе). Таково, например, поле в пространстве, окружающем очень длинные заряженные нити или поверхности. Заряженную поверхность всегда можно представить расщеплен-

ной в направлении бесконечного протяжения на множество заряженных нитей.

Элементарным зарядом можно считать заряд бесконечно малого отрезка заряженной нити.

Выберем цилиндрическую систему координат, совместив ее ось с заряженной нитью. Подставим в уравнение Лапласа (3-17) выражение лапласиана в цилиндрических координатах из приложения П-1. По существу задачи производная по осевому направлению равна нулю.

В силу симметрии равна нулю и касательная производная. Поэтому уравнение Лапласа приобретает форму

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0.$$

Это уравнение интегрируется для всех точек плоскости, кроме той, через которую проходит заряженная нить, т. е. для всех точек, имеющих координату $r > 0$,

$$r \frac{d\varphi}{dr} = \text{const}_3; \quad \frac{d\varphi}{dr} = \frac{\text{const}_3}{r};$$

$$\varphi = \text{const}_3 \cdot \ln r + \text{const}_4. \quad (3-20)$$

Эта зависимость служит фундаментальным решением уравнения Лапласа в плоскопараллельном поле.

Встречаются также однородные поля, в которых значение потенциала изменяется лишь в направлении одной из прямоугольных декартовых координат, например в направлении координаты x .

В любой из плоскостей yz потенциал поля имеет одно и то же значение во всех точках данной плоскости. Примером может служить поле плоского конденсатора с параллельными одна другой обкладками, бесконечно простирающимися в обе стороны.

Подставим в уравнение Лапласа из приложения П-1 выражение лапласиана в прямоугольных декартовых координатах, положив производные по y и z равными нулю,

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0.$$

Интеграл этого уравнения имеет форму

$$\varphi = \text{const}_5 \cdot x + \text{const}_6. \quad (3-21)$$

Выражение (3-21) называется фундаментальным решением уравнения Лапласа в однородном поле.

Напряженность электрического поля равна градиенту потенциала, взятому с обратным знаком. Пользуясь формулами градиента для соответствующей каждому из рассмотренных фундаментальных решений системы координат (приложение П-1) получаем:

для поля в пространстве

$$E = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{1}_r = -\frac{\text{const}_1}{r^2} \cdot \mathbf{1}_r; \quad (3-22)$$

для плоскопараллельного поля

$$E = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{1}_r = -\frac{\text{const}_3}{r} \cdot \mathbf{1}_r; \quad (3-23)$$

для однородного поля

$$E = -\text{const}_5 \mathbf{i}. \quad (3-24)$$

Определение постоянных производится в каждом отдельном случае из граничных условий (см. гл. 4).

Из сравнения формул видно, что характер изменения величин поля (E и φ) в зависимости от расстояния от элементарного заряда неодинаков в полях различного рода.

Так, напряженность поля в случае одиночного точечного заряда в пространстве обратно пропорциональна квадрату расстояния, в случае же плоскопараллельного поля — обратно пропорциональна первой степени расстояния, а в случае однородного поля вообще не зависит от расстояния. Соответственно значение потенциала в первом случае изменяется обратно пропорционально первой степени расстояния, во втором — пропорционально логарифму, а в третьем — прямо пропорционально расстоянию.

Другими словами, совместное действие системы зарядов, расположенных тем или иным образом, существенно отличается от действия каждого отдельного заряда.

3-7. ФОРМУЛЫ ГРИНА

Если скаляр φ удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2\varphi=0$, то, приняв в формуле (2-39) $\psi=\varphi$, получим первую формулу Грина

$$\int_V (\nabla\varphi)^2 dV = \oint_S \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds. \quad (3-25)$$

Здесь n — направление нормали к ограничивающей поле поверхности.

Поменяем местами φ и ψ и выпишем выражение, аналогичное (2-39),

$$\int_V (\nabla\varphi \nabla\psi + \varphi \nabla^2\psi) dV = \oint_S \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} ds \quad (3-26)$$

Вычитая почленно (3-26) из (2-39), придем к второй формуле Грина

$$\int_V (\psi \nabla^2\varphi - \varphi \nabla^2\psi) dV = \oint_S \left(\psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} \right) ds. \quad (3-27)$$

Из формул Грина вытекают важные для расчета электростатических полей следствия, описанные в следующих параграфах.

3-8. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ

Теорема единственности гласит, что найденное любым путем решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее заданным граничным условиям, является единственным.

Эта теорема доказывается методом «от противного». Предположим, что существуют два решения поставленной задачи, выражаемые функциями потенциала φ и ψ . Каждое из них должно удовлетворять уравнению Лапласа; следовательно, $\nabla^2\varphi=0$ и $\nabla^2\psi=0$.

Левая часть второй формулы Грина (3-27) обращается в нуль при любой величине и форме объема интегрирования V , а следовательно, и ограничивающей его поверхности S . Значит, должно равняться нулю подынтегральное выражение в правой части (3-27). Это возможно лишь при условии $\psi=\varphi$.

3-9. ЗАМЕНА ЭКВИПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ БЕСКОНЕЧНО ТОНКИМ ПРОВОДЯЩИМ ЛИСТОМ

Из формул Грина и теоремы единственности следует, что электростатическое поле, ограниченное эквипотенциальными поверхностями, не изменится, если эти поверхности станут проводящими, т. е. будут границами проводников, которым сообщены потенциалы соответствующих величин.

Таким образом, любая эквипотенциальная поверхность может быть заменена бесконечно тонким проводящим листом. Поле по обе стороны листа при этом не изменится.

Дальнейшим развитием этого приема является замена массивного заряженного проводника заряженной замкнутой поверхностью, сделанной из бесконечно тонкого проводящего листа и имеющей форму, в точности соответствующую форме поверхности проводника. Основанием для такой замены является то обстоятельство, что заряды всегда находятся на поверхности проводника. Если, с другой стороны, эта замкнутая заряженная поверхность совпадает с эквипотенциальной поверхностью поля, например одного или нескольких точечных или линейно распределенных зарядов, то с помощью последних можно будет заменить все поле заряженного проводника и тем самым упростить расчет.

3-10. МЕТОД ИЗОБРАЖЕНИЙ

Из первой формулы Грина (3-25) видно, что характер электростатического поля определяется полностью значениями потенциала на граничной поверхности и его производной по нормали к поверхности. Отсюда можно вывести, что поле по одну сторону граничной поверхности S не изменится, если по другую сторону этой поверхности произвести изменение параметров среды (например, заменить проводник диэлектриком или один диэлектрик другим) и установить такое распределение зарядов, чтобы граничные условия полностью сохранились.

Вновь вводимые заряды называются зарядами-изображениями. Основанный на этом метод расчета называется методом изображений.

Примеры расчета методом изображений приведены в гл. 4.

3-11. ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА НАЛОЖЕНИЯ. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ НЕСКОЛЬКИХ ЗАРЯЖЕННЫХ ПРОВОДНИКОВ

Допустим, что заряды проводников известны; требуется рассчитать потенциалы.

Потенциал первого проводника равен:

$$\varphi_1 = a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2 + \dots + a_{1n}Q_n + \dots \quad (3-28)$$

Первый член правой части выражает потенциал, обусловленный зарядом самого первого проводника; второй член правой части выражает потенциал, приобретаемый первым проводником благодаря наличию заряда Q_2 на втором проводнике, и т. д.

Коэффициенты $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \dots$ называются потенциальными коэффициентами. Их величины зависят только от формы и взаимного расположения проводников.

Коэффициент a_{11} численно равен потенциалу первого проводника, когда его заряд $Q_1 = 1$, а заряды всех остальных проводников равны нулю.

Коэффициент a_{12} численно равен потенциалу первого проводника, когда заряд $Q_2 = 1$, а все прочие заряды отсутствуют: $Q_1 = Q_3 = \dots = Q_n = \dots = 0$, и т. д.

Аналогичные уравнения могут быть составлены и для всех остальных проводников. В результате получается система уравнений

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2 + \dots + a_{1n}Q_n + \dots; \\ \varphi_2 &= a_{21}Q_1 + a_{22}Q_2 + \dots + a_{2n}Q_n + \dots; \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \varphi_n &= a_{n1}Q_1 + a_{n2}Q_2 + \dots + a_{nn}Q_n + \dots \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (3-29)$$

Задача расчета сводится, таким образом, к определению потенциальных коэффициентов a_{kn} .

Чаще приходится решать обратную задачу — нахождение зарядов по известным величинам разностей потенциалов между проводниками. Для этого система (3-29)

может быть решена относительно величин зарядов в такой форме:

$$\begin{array}{l}
 Q_1 = C_{11}\varphi_1 + C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + \dots + C_{1n}(\varphi_1 - \varphi_n) + \dots; \\
 Q_2 = C_{21}(\varphi_2 - \varphi_1) + C_{22}\varphi_2 + \dots + C_{2n}(\varphi_2 - \varphi_n) + \dots; \\
 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 Q_n = C_{n1}(\varphi_n - \varphi_1) + C_{n2}(\varphi_n - \varphi_2) + \dots + C_{nn}\varphi_n + \dots
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} Q_1 \\ Q_2 \\ \dots \\ Q_n \end{array}} \right\} (3-30)$$

Коэффициенты C_{kn} называются частичными емкостями. Например, коэффициент C_{11} численно равен заряду на первом проводнике, когда потенциалы всех проводников были бы равны друг другу и составляли единицу

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_n = \dots = 1.$$

Коэффициент C_{12} численно равняется заряду первого проводника в случае, когда потенциал второго проводника равен -1 , а все остальные проводники (в том числе и первый) заземлены, т. е. их потенциалы считаются равными нулю.

Общее свойство потенциальных коэффициентов и частичных емкостей — перестановка индексов не изменяет величины коэффициента

$$a_{12} = a_{21}; a_{kn} = a_{nk}; C_{12} = C_{21}; C_{kn} = C_{nk} \text{ и т. д.}$$

Это свойство вытекает из определений коэффициентов. Если поместить на n -й проводник заряд $Q_n = 1$ и положить, что заряды на всех прочих проводниках отсутствуют, то потенциал k -го проводника будет равен $\varphi_{k(n)} = a_{kn} \cdot 1$; величина этого наведенного потенциала определяется только взаимным расположением n -го и k -го проводников; если же рассматриваемый заряд $Q = 1$ перенести с n -го проводника на k -й, причем взаимное расположение проводников оставить неизменным, то потенциал, наведенный на n -м проводнике, $\varphi_{n(k)} = a_{nk} \cdot 1$ будет иметь ту же величину, которую ранее имел потенциал на k -м проводнике. Таким образом, $a_{kn} = a_{nk}$.

Величина частичной емкости между k -м и n -м проводниками зависит только от их размеров и взаимного расположения. Пусть потенциал n -го проводника равен $+1$, а потенциалы остальных проводников равны 0 ; на k -м проводнике появится наведенный заряд $Q_{k(n)} = C_{kn} \cdot 1$;

такой же величины наведенный заряд $Q_{n(k)} = C_{nk} \cdot 1$ появится и на n -м проводнике, если потенциал k -го проводника сделать равным 1, а потенциалы всех остальных проводников — равными 0; следовательно, $C_{kn} = C_{nk}$.

Частичные емкости удобно определять из опыта, путем измерения. Поэтому использование коэффициентов C_{kn} позволит найти распределение зарядов в сложных системах, не поддающихся аналитическому расчету.

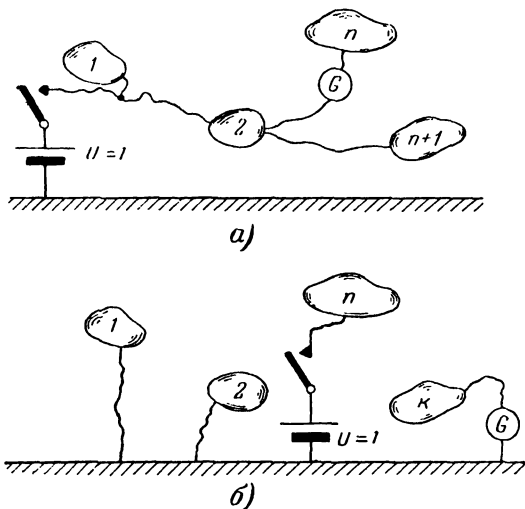


Рис. 3-2. Экспериментальное определение частичных емкостей.

Для измерения частичной емкости вида C_{nn} соединяют электрически все проводники между собой. Гальванометр G включают так, чтобы через него проходил только заряд, поступающий на n -й проводник (рис. 3-2,а). Затем включают всю систему на единичное напряжение относительно земли, наблюдая за отбросом стрелки гальванометра; показание прибора будет численно равно C_{nn} .

Для измерения же частичной емкости вида C_{kn} заземляют все проводники, кроме n -го. Гальванометр G включается в заземление k -го проводника (рис. 3-2,б). Затем заряжают n -й проводник до единичного напряжения относительно земли, наблюдая за отбросом стрелки гальванометра; через последний пройдет заряд, наведен-

ный на поверхности заземленного k -го проводника вследствие того, что n -й проводник оказался под напряжением. Показание прибора будет численно равно C_{kn} .

3-12. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ НА ГРАНИЦЕ ДВУХ ДИЭЛЕКТРИКОВ

Переход электростатического поля через границу между двумя диэлектриками, имеющими диэлектрические проницаемости соответственно ϵ_1 и ϵ_2 (рис. 3-3), ха-

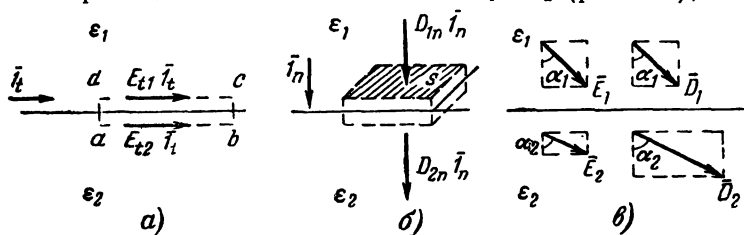


Рис. 3-3. Граничные условия для электростатического поля.

рактеризуется двумя следующими граничными условиями:

1) Касательная составляющая вектора напряженности поля E_t непрерывна.

Действительно, циркуляция вектора \mathbf{E} в электростатическом поле равна нулю. Следовательно, будет равен нулю и линейный интеграл $\oint \mathbf{E} d\mathbf{l}$, взятый по замкнутому пути $abcd$, показанному на рис. 3-3,а; пусть участки пути bc и da очень малы. Соответствующие части интеграла $\oint \mathbf{E} d\mathbf{l}$ равны нулю, так как \mathbf{E} и $d\mathbf{l}$ на данных участках взаимно перпендикулярны; таким образом, получим:

$$\int_a^b E_{t2} dl - \int_d^c E_{t1} dl = 0.$$

Поскольку пути интегрирования ab и cd одинаковы по длине, причем выбор их протяжения совершенно произволен, то подынтегральные выражения равны:

$$E_{t1} = E_{t2}. \quad (3-31)$$

2) Нормальная составляющая вектора электрического смещения D_n непрерывна, если на поверхности раздела нет свободных зарядов. В противном случае произойдет

ее скачкообразное изменение на величину, определяемую плотностью зарядов на поверхности раздела σ_n . Применим теорему Гаусса к вычислению потока, выходящего из малого параллелепипеда, показанного на рис. 3-3,б пунктиром; его «крышка» находится в одном диэлектрике, а «дно» — в другом. При отсутствии зарядов на поверхности раздела полный поток, выходящий из этого объема, должен быть равен нулю.

Другими словами, поток $\Psi_1 = \int \mathbf{D}_1 ds_1$, входящий в рассматриваемый объем из диэлектрика ϵ_1 , должен быть равен потоку $\Psi_2 = \int \mathbf{D}_2 ds_2$, выходящему из того же объема во второй диэлектрик ϵ_2 . Оба интеграла взяты по равным поверхностям s крышки и дна, причем выбор величины этих поверхностей совершенно произволен; следовательно, подинтегральные выражения равны: $\mathbf{D}_1 ds = \mathbf{D}_2 ds$ или $D_{1n} ds = D_{2n} ds$; сокращая на ds , получаем:

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (3-32)$$

Если на поверхности раздела находятся свободные заряды, размещенные с поверхностной плотностью σ_n , аналогичные рассуждения приведут к результату

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_n. \quad (3-33)$$

Следствиями будут формулы (при $\sigma_n = 0$)

$$\left. \begin{aligned} D_{t_2} &= D_{t_1} \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}; \\ E_{n_2} &= E_{n_1} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}. \end{aligned} \right\} \quad (3-34)$$

Соотношения составляющих векторов \mathbf{E} и \mathbf{D} представлены на рис. 3-3,в для случая $\epsilon_2 = 2\epsilon_1$.

В общем случае на границе двух диэлектриков происходит преломление линий напряженности электрического поля \mathbf{E} и линий электрического смещения \mathbf{D} по закону

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}. \quad (3-35)$$

Заметим, что неравенство нормальных составляющих вектора напряженности поля означает, что число линий поля вектора \mathbf{E} , приходящееся на единицу площади, неодинаково по одну и другую сторону поверхности разде-

ла. На поверхности раздела как бы появились источники линий поля — это связанные заряды, обусловленные неодинаковой способностью диэлектриков к поляризации.

3-13. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Неподвижные свободные заряды одного и того же знака не могут сохраняться в толще проводника. Силы взаимного отталкивания заставят их удалиться друг от друга на как можно большие расстояния, т. е. заряды расположатся на поверхности проводника. Таким образом, объемная плотность зарядов в толще проводника равна нулю ($\rho=0$).

Внутри проводника электростатическое поле существовать не может

$$E=0. \quad (3-36)$$

В противном случае возник бы ток проводимости, т. е. движение свободных зарядов под действием сил поля; ток проводимости существовал бы до тех пор, пока не произошло бы такое перераспределение зарядов, при котором величина напряженности электрического поля не упадет до нуля во всех точках внутри проводника.

Поскольку $E=-\nabla\phi=0$, то $\phi=\text{const}$. Вся толща проводника эквипотенциальна, равно как и его поверхность.

По условию непрерывности (3-31) касательная составляющая напряженности электростатического поля в окружающей проводник среде в точках, лежащих на поверхности проводника, должна равняться нулю. Следовательно, напряженность электростатического поля на поверхности проводника имеет только нормальную к поверхности составляющую

$$E_{\text{пов}} = E_n \cdot 1_n, \quad (3-37)$$

где 1_n — единичный вектор, нормальный к поверхности проводника.

Другими словами, линии напряженности электростатического поля подходят к поверхности проводника по нормальям.

Применив теорему Гаусса к любому малому участку ds некоторой поверхности, лежащей в окружающей среде на бесконечно малом расстоянии от поверхности проводника, получим связь между поверхностной плот-

ностью заряда σ и векторами смещения и напряженности электростатического поля на поверхности проводника

$$\mathbf{D} ds = D_n ds = \epsilon_a E_n ds = \sigma ds,$$

откуда

$$D = D_n = \sigma; E = E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_a}. \quad (3-38)$$

3-14. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ЭКРАНИРОВАНИЕ

Представим себе полость Y , окруженную со всех сторон проводником (рис. 3-4) и не содержащую зарядов. Как бы ни был заряжен проводник или в каком бы

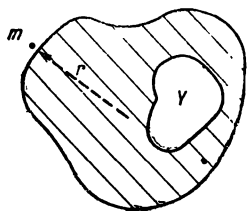


Рис. 3-4. Проводник в электростатическом поле.

внешнем электростатическом поле он ни находился, электростатическое поле в полости существовать не может. Действительно, поверхность проводника всегда эквипотенциальна. Линии вектора \mathbf{E} не могут начинаться и заканчиваться на такой поверхности, так как это соответствовало бы наличию ротора у электростатического поля, которое является безвихревым. Не может существовать и линий поля, выходящих с поверхности проводника и заканчивающихся где-то в полости, так как это соответствовало бы наличию дивергенции в точках, не имеющих зарядов, что противоречит теореме Гаусса.

На изложенном основан принцип электростатического экранирования чувствительных измерительных приборов в технике высоковольтных измерений и другой аппаратуре. Практически обычно оказывается достаточным окружить защищаемый объем металлической сеткой — экраном.

На изложенном основан принцип электростатического экранирования чувствительных измерительных приборов в технике высоковольтных измерений и другой аппаратуре. Практически обычно оказывается достаточным окружить защищаемый объем металлической сеткой — экраном.

3-15. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАРЯДОВ НА ПОВЕРХНОСТИ ЗАРЯЖЕННОГО ПРОВОДНИКА

Если поверхность заряженного проводника, удаленного от других заряженных тел, представляет собой плоскость бесконечного протяжения, то в силу взаимного отталкивания одноименных зарядов распределение их по поверхности будет равномерным, т. е. $\sigma = \text{const}$.

На основании уравнения (3-38) можно утверждать, что и значения векторов смещения и напряженности поля D и E на такой поверхности будут также постоянными. Сказанное распространяется и на случай заряженного проводника правильной шаровой формы.

Если поверхность заряженного проводника имеет конечные размеры, то поверхностная плотность заряда σ будет неравномерной. Особенно велика эта неравномерность у краев.

Рассмотрим малую часть поверхности заряженного проводника неправильной формы (рис. 3-4). В первом приближении сочтем ее за часть шаровой поверхности с радиусом кривизны r .

Электростатическое поле в непосредственной близости от поверхности (точка типа m) подчиняется уравнению Лапласа

$$\nabla^2\varphi = 0.$$

Используем фундаментальное решение (3-22)

$$E = -\frac{\text{const}}{r^2} \cdot 1_r.$$

Значение напряженности электростатического поля у поверхности заряженного проводника обратно пропорционально квадрату радиуса кривизны поверхности. Острые выступы на поверхности заряженного проводника можно рассматривать как закругления с малым радиусом; это можно распространить и на края.

Напряженность поля у таких выступов или краев может принимать очень большие значения. Этим объясняется явление истечения электричества с остриев (кистевой разряд) и явление короны, т. е. ионизации и свечения газа вблизи проводников, находящихся под высоким напряжением; явление сопровождается звуковыми эффектами (шипение) и может повлечь существенные потери энергии в электрических линиях и аппаратах высокого напряжения.

При повышении напряжения коронный разряд переходит в искровой разряд; диэлектрик пробивается. Однако газовые и жидкие диэлектрики могут восстанавливать свою электрическую прочность после выключения напряжения и исчезновения искры.

3-16. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

В электростатическом поле существует запас энергий. Пусть некоторый конденсатор заряжается от генератора путем постепенного повышения напряжения на зажимах. В данный момент напряжение равно U . Малое повышение напряжения dU вызовет малое увеличение заряда конденсатора $dQ = C dU$. Перенос заряда dQ из генератора в конденсатор потребует работы $U dQ = CU dU$. Полное количество работы, необходимое для заряда конденсатора от 0 до U , равно:

$$W = \int_0^U CU dU = \frac{CU^2}{2} = \frac{QU}{2} [\text{дж}]. \quad (3-39)$$

Оно равно запасу энергии в заряженном конденсаторе. Эта энергия распределена по всему объему, занимаемому полем.

Часто говорят об объемной плотности энергии электростатического поля, определяя ее как предел отношения энергии dW , запасенной в малом объеме dV , к величине этого объема при неограниченном уменьшении последнего, т. е. как dW/dV .

Пусть малый объем dV центрирован в некоторой точке m ; его заряд равен ρdV , где ρ — объемная плотность заряда; потенциал поля в бесконечности положим равным нулю, потенциал же в точке m пусть равен φ . Запас энергии поля в малом объеме равен:

$$dW = \frac{\varphi}{2} \rho dV. \quad (3-40)$$

Заменим по теореме Гаусса $\rho = \nabla \cdot \mathbf{D}$ и произведем преобразование, вытекающие из роли оператора ∇ как символа дифференцирования,

$$\varphi \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\varphi \mathbf{D}) - \mathbf{D} \cdot \nabla \varphi = \nabla \cdot (\varphi \mathbf{D}) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (\text{поскольку } \mathbf{E} = -\nabla \varphi).$$

Это преобразование однотипно с формулой дифференциала произведения

$$x dy = d(xy) - y dx.$$

Полная величина электрической энергии поля равна:

$$W = \int_V \frac{1}{2} \nabla \cdot (\varphi \mathbf{D}) dV + \int_V \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV. \quad (3-41)$$

Первый из интегралов заменим на основании теоремы Остроградского—Гаусса половиной интеграла $\oint_s \varphi \mathbf{D} \, ds$, взятого по замкнутой поверхности, ограничивающей объем V .

Если объем V неограниченно увеличивать, замененный интеграл будет стремиться к нулю, поскольку φ и \mathbf{D} на бесконечно удаленной поверхности равны нулю.

Поэтому

$$W = \int_V \frac{1}{2} \mathbf{D} \mathbf{E} \, dV \quad (3-42)$$

и объемная плотность энергии электрического поля равна:

$$\frac{dW}{dV} = \frac{\mathbf{D} \mathbf{E}}{2}. \quad (3-43)$$

3-17. СИЛЫ, РАЗВИВАЕМЫЕ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Рассмотрим силы, действующие на обкладки плоского конденсатора (рис. 3-5) площадью s . Возможны два случая:

1) конденсатор заряжен и отключен от источника напряжения и

2) конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения.

Первый случай. Поскольку конденсатор изолирован, его заряд сохраняется постоянным: $Q = \text{const}$.

Произведем малое увеличение емкости конденсатора путем небольшого перемещения верхней обкладки на расстояние $dn = dn \cdot \mathbf{1}_n$ (рис. 3-5). Пусть перемещение происходит медленно; в этом случае можно пренебречь магнитными явлениями.

Работа будет совершена за счет запасенной полев энергии

$$dW = \mathbf{F} \, dn, \quad (3-44)$$

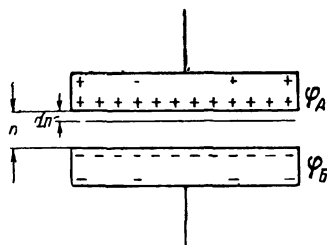


Рис. 3-5. Плоский конденсатор.

где F — сила, действующая на обкладку,

$$F = \frac{dW}{dn} \cdot 1_n. \quad (3-45)$$

Используем выражение (3-43):

$$W = \int_V \frac{DE}{2} dV = \frac{DE}{2} V = \frac{DE}{2} sn.$$

Последнее равенство написано в предположении, что D и E являются постоянными по всему объему диэлектрика конденсатора; это означает, что поле считается равномерным и влияние краев обкладок не принято во внимание; тогда

$$F = \frac{DE}{2} s \cdot 1_n.$$

Сила, приходящаяся на единицу площади, т. е. давление, испытываемое обкладками конденсатора, равно:

$$\frac{F}{s} = \frac{DE}{2} \cdot 1_n. \quad (3-46)$$

Одна и та же числовая величина $\frac{DE}{2}$ характеризует две совершенно различные физические величины: объемную плотность энергии поля и давление на обкладки конденсатора.

В результате увеличения емкости конденсатора на величину dC напряжение $U = Q/C$ уменьшится на величину dU . Энергия, запасенная в конденсаторе, уменьшится на величину $dW = Q dU/2$, равную совершенной механической работе. Этот процесс обратим; при раздвижении обкладок конденсатор за счет приложенной извне механической энергии получит увеличение запаса энергии в конденсаторе и напряжения между его обкладками.

Второй случай. Так как конденсатор подключен к источнику, напряжение между обкладками постоянно: $U = \text{const}$. Медленное перемещение верхней обкладки потребует той же затраты работы, что и ранее, $dW = U dQ/2$. Выражения для силы и давления (3-45) и (3-46) также сохраняются. Емкость в результате перемещения увеличится. Следовательно, увеличится и запасен-

ная в конденсаторе энергия за счет притока энергии из источника, равного $dW_s = U dQ$. Только половина этой энергии израсходуется на совершение механической работы. Другая половина останется в поле конденсатора, увеличивая его запас энергии.

Этот процесс также обратим; прилагая к конденсатору механическую энергию извне, т. е. раздвигая его обкладки, создадим условия, при которых в источник возвратится удвоенное количество энергии; другая половина поступит за счет запасенной в электростатическом поле энергии.

Примером использования сил, развиваемых в электростатическом поле, служит электростатический вольтметр, механизм которого нетрудно представить, если верхнюю (подвижную) обкладку конденсатора на рис. 3-6 связать с указательной стрелкой и пружиной, возвращающей обкладку в исходное положение после отключения прибора от напряжения.

Если в электростатическом поле находятся два диэлектрика с различными диэлектрическими проницаемостями, то на границе между ними может возникать механическое давление. Его природу легко понять в том случае, когда граница совпадает с эквипотенциальной поверхностью; поскольку поверхность всякого проводника эквипотенциальна, мы можем без всякого искажения характера поля и его величин поместить бесконечно тонкий проводящий лист на границе диэлектриков. Давление на лист будет с одной стороны $\frac{1}{2} \mathbf{D}_1 \mathbf{E}_1$, а с другой стороны $\frac{1}{2} \mathbf{D}_2 \mathbf{E}_2$, где \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 , \mathbf{D}_1 и \mathbf{D}_2 выражают векторы напряженности поля и векторы смещения в обоих диэлектриках.

В рассматриваемом случае $\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2 = \mathbf{D}$ (см. § 3-12). Следовательно, если $\epsilon_1 < \epsilon_2$, то первый диэлектрик оказывает большее давление на границу, чем второй.

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ ПОЛЯ ПРОСТЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФОРМ

4-1. ОБЗОР МЕТОДОВ РАСЧЕТА

Целью расчета является нахождение потенциала φ и напряженности поля E по заданному расположению и форме заряженных тел («электродов») и граничным условиям. Последние могут быть двух видов:

1) Заданы значения потенциала на границах поля (задача Дирихле). Если граница поля или часть ее лежит в бесконечности, то задача Дирихле в ряде случаев не имеет определенного решения.

2) Заданы значения напряженности поля на границах, т. е. значения производных потенциала по касательной и по нормали к границе (задача Неймана).

Если исследуемая область ограничена проводящими поверхностями, то согласно (3-38) данное условие сводится к заданию распределения зарядов по этим поверхностям.

Встречаются и задачи со смешанными граничными условиями (обоих видов).

В случае расчета поля в неоднородном диэлектрике существенно знание поляризуемости составных частей диэлектрика.

Простейшие симметричные задачи легче всего решаются с помощью теоремы Гаусса. Таковы задачи о поле точечного заряда (§ 4-2), плоского конденсатора (§ 4-3), заряженной оси (§ 4-4).

Принцип замены эквипотенциальной поверхности бесконечно тонким проводящим листом (§ 3-9) позволяет свести расчет ряда практически важных электростатических полей к более простым задачам, имеющим известные решения. Это показано на примерах полей: заряженного проводящего шара (§ 4-5) и сферического конденсатора (§ 4-6), коаксиального кабеля (§ 4-10) и цилиндрического конденсатора (§ 4-11), двухпроводной линии (§ 4-15), параллельных проводящих цилиндров (§ 4-16), однопроводной линии (§ 4-17).

Наиболее общим методом расчета является интегрирование уравнения Лапласа или Пуассона при заданных граничных условиях; при наличии лишь одной независимой переменной интегрирование

в ряде случаев производится элементарно (см. фундаментальные решения в § 3-6 и задачу о поле диэлектрического шара в § 4-7).

Если же форма поля сложна и характеризуется двумя или тремя независимыми переменными, интегрирование осуществляется специальными приемами, в частности методом Фурье—Лапе, показанным на примере поля в окрестностях проводящего цилиндра, помещенного во внешнее электрическое поле (§ 4-18).

Учет усложненных граничных условий показан на примере расчета поля цилиндрического конденсатора с двухслойным диэлектриком (§ 4-13).

Некоторые задачи удобно решаются методом участков, примеры применения которого показаны для случаев поля прямой заряженной оси конечной длины (§ 4-19) и кольцевого заряда (§ 4-20).

Методом наложения, описанным в § 3-11, легко решается ряд задач электростатического поля в присутствии двух и более заряженных тел. Таковы примеры полей одиночного диполя (§ 4-8) и двух одноименных точечных зарядов (§ 4-9), двух заряженных параллельных осей (§ 4-14), заряженного диска (§ 4-21).

Методом средних потенциалов пользуются при расчете емкости в сложных системах заряженных проводников конечной длины; это показано на примере двух параллельных заряженных проводников конечной длины (§ 4-22).

Метод изображений успешно применяется в расчете полей заряженных тел, находящихся вблизи плоских, цилиндрических или сферических проводящих поверхностей. Таковы примеры полей однопроводной линии (§ 4-17), двухпроводной линии, находящейся вблизи поверхности земли (§ 4-24), точечного заряда, находящегося вблизи проводящей сферы (§ 4-26), линейно распределенного заряда вблизи плоскости раздела двух сред (§ 4-25).

Иногда полезно применение многократных изображений; примерами являются расчеты электростатических полей двух заряженных проводящих шаров (§ 4-27), а также линии из расщепленных проводов (§ 4-28).

Некоторые сложные по очертанию границ поля линейных зарядов поддаются расчету методом круговых гармоник. С сущностью этого метода можно

познакомиться ниже в § 8-9 и 8-16 (примеры расчета магнитных полей). Примеры из электростатики не приводятся в целях сокращения объема книги.

Интересные методы решения ряда задач по расчету полей разработаны Л. А. Дружким [Л. 20].

Во многих случаях расчета используется комбинация двух и более методов (§ 4-24 и др.).

Порядок подсчета энергии электростатического поля показан в § 4-7.

Заметим, что в расчетах полей чаще исследуется скалярная функция потенциала φ , чем векторная функция напряженности поля \mathbf{E} ; однако в отдельных случаях, когда направление вектора напряженности поля заранее известно или легко определимо из предварительного рассмотрения задачи, оперируют непосредственно с вектором \mathbf{E} .

Некоторые практически важные случаи электростатических полей со сложными формами границ могут разрешаться посредством конформных преобразований; описание этого метода выделено в гл. 9.

В общем же случае сложных границ поля, когда аналитическое решение вообще недоступно, прибегают к методам приближенного расчета (гл. 17).

4-2. ПОЛЕ УЕДИНЕННОГО ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА

Под «точечным» понимается заряд, равномерно распределенный на сферической поверхности бесконечно малого радиуса.

Окружим заряд q сферической поверхностью с конечным радиусом r , центрированной в точке расположения заряда. В силу симметрии напряженность поля \mathbf{E} будет иметь одну и ту же величину в любой точке сферической поверхности и направлена по нормали к ней, т. е. радиально; если заряд q положителен, то вектор \mathbf{E} направлен наружу (рис. 4-1). Аналогичным будет и поле вектора смещения $\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}$ (в случае однородной и изотропной среды, абсолютная диэлектрическая проницаемость которой одинакова во всех точках пространства и во всех направлениях). Полный поток вектора смещения через сферическую поверхность равен:

$$\Psi = \oint \mathbf{D} \, ds = \int_0^{4\pi r^2} D \, ds = D \cdot 4\pi r^2.$$

Произведенная замена контурного интеграла правомерна, поскольку векторы \mathbf{D} и $d\mathbf{s}$ повсюду совпадают по направлению.

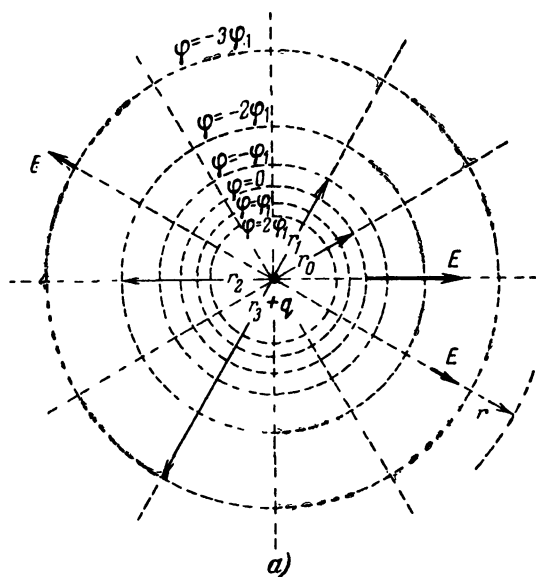
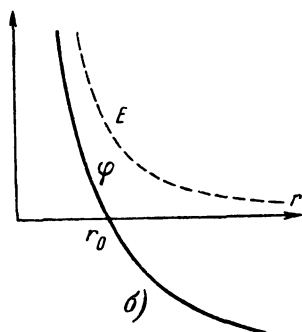


Рис. 4-1. Поле точечного заряда.



По теореме Гаусса $\Psi = q$. Следовательно

$$E = \frac{D}{\epsilon_a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_a r^2}; \quad \mathbf{E} = E \cdot \mathbf{1}_r. \quad (4-1)$$

Линии поля повсюду имеют радиальные направления.

Обращаясь к подходящим к данной задаче фундаментальным решениям (3-22) и (3-19), видим, что входящая в них постоянная const_1 равна $-q/4\pi\epsilon_a$.

Следовательно, выражение для потенциала поля (3-19) получает вид:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_a r} + \text{const}_2. \quad (4-2)$$

Постоянная const_2 может быть сделана равной нулю, если положить потенциал в бесконечности ($r=\infty$) равным нулю. Однако такое условие не является единственно возможным. Может оказаться целесообразным положить равным нулю значение потенциала на поверхности некоторой сферы радиусом r_0 .

В таком случае

$$\left. \begin{aligned} \text{const}_2 &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_a r_0}; \\ \varphi &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_a} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4-3)$$

Выбор того или иного условия для определения постоянной сводится по существу к выбору начала отсчета потенциала. Уравнение $r=\text{const}$ будет уравнением эквипотенциальной поверхности; все эквипотенциальные поверхности будут сферами, центрированными в точке расположения заряда.

При правильном построении картины поля разность потенциалов между каждой парой соседних эквипотенциальных поверхностей должна иметь одно и то же значение. Из (4-3) следует, что обратные величины радиусов эквипотенциальных поверхностей должны образовать арифметическую прогрессию

$$\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} = \dots = \text{const} = d.$$

Принимая, например $r_0=1$ и $d=0,2$, находим: $r_1=1,25$; $r_2=1,67$; $r_3=2,5$ и т. д.

В соответствии с этим правилом и вычерчены следы эквипотенциальных поверхностей на рис. 4-1.

На рис. 4-1 показаны рассчитанные по уравнениям (4-3) и (4-1) кривые изменения величины потенциала и напряженности поля в зависимости от расстояния r от заряда.

4-3. ПОЛЕ ПЛОСКОГО КОНДЕНСАТОРА

Расстояние между обкладками обычно мало по сравнению с их длиной и шириной. Поэтому почти все заряды оказываются практически равномерно распределенными по внутренним, обращенным друг к другу поверхностям обкладок. В пространстве между обкладками вдали от краев поле однородно, т. е. вектор \mathbf{E} постоянен по величине и направлен по нормали к поверхностям обкладок.

Линии напряженности поля — прямые, параллельные нормали.

Поместим вдоль нее ось x декартовых прямоугольных координат с началом, находящимся посередине расстояния между обкладками (рис. 4-2). По теореме Гаусса и уравнению (3-38)

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} = \frac{\sigma}{\epsilon_a} \mathbf{i}, \quad (4-4)$$

где $\sigma = Q/s$ — поверхностная плотность заряда на обкладках (постоянная величина вдали от краев);
 ϵ_a — абсолютная проницаемость диэлектрика.

К данной задаче подходят фундаментальные решения (3-21) и (3-24). Из сравнения формул (4-4) и (3-24) видно, что постоянная интегрирования const_5 равна $-\sigma/\epsilon_a$. Следовательно, потенциал по уравнению (3-21) равен:

$$\varphi = -\frac{\sigma}{\epsilon_a} x + \text{const}_6.$$

Положим $\varphi = 0$ при $x = 0$; тогда $\text{const}_6 = 0$ и $\varphi = -\frac{\sigma}{\epsilon_a} x$.

Напряжение между обкладками конденсатора равно:

$$U = \varphi_{x=-\frac{n}{2}} - \varphi_{x=+\frac{n}{2}} = \frac{\sigma n}{\epsilon_a},$$

откуда $\sigma = \epsilon_a U/n$ и

$$\varphi = -U \frac{x}{n}. \quad (4-5)$$

Эквипотенциальные поверхности — плоскости, параллельные обкладкам ($x = \text{const}$). При вычерчивании поля

расстояния между соседними поверхностями должны быть одинаковыми, поскольку потенциалы поверхностей должны отличаться на одну и ту же величину.

Заряд конденсатора равен:

$$Q = \sigma s = \epsilon_a \frac{s}{n} U.$$

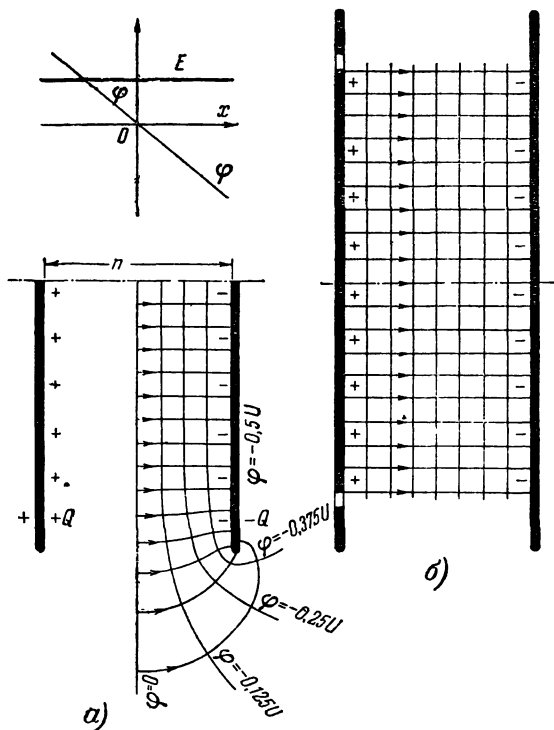


Рис. 4-2. Поле плоского конденсатора.

Емкость плоского конденсатора равна:

$$C = \frac{Q}{U} = \epsilon_a \frac{s}{n}, \quad (4-6)$$

где s — площадь обкладок;
 n — расстояние между ними.

Емкость измеряется в кулонах на вольт; эта единица называется фарадой.

Для практических целей обычно применяются более мелкие единицы: микрофарада ($1 \text{ мкф} = 10^{-6} \text{ ф}$) и пикофарада (микромикрофарада) ($1 \text{ пф} = 10^{-12} \text{ ф}$).

Другим критерием оценки конденсаторов является напряжение между обкладками, при котором максимальная напряженность поля не превосходит электрической прочности диэлектрика.

Поле у краев конденсатора искривляется, как показано на рис. 4-2,а. Расчет его производится либо методом конформных преобразований, либо приближенными методами.

Иногда желательно получить практически однородное поле в конденсаторе. В этом случае одну из рабочих обкладок окружают так называемым охранным кольцом (рис. 4-2,б). Площадь другой обкладки соответственно увеличивается.

4-4. ПОЛЕ ДЛИННОЙ ЗАРЯЖЕННОЙ ОСИ

Под заряженной осью понимается очень длинный и тонкий заряженный проводник (тонкая проволока). Величина заряда на единицу длины оси пусть равна τ к/м; вдали от концов оси величину τ можно считать практически постоянной.

В силу симметрии вектор напряженности поля E в окружающей среде, имеющей постоянную абсолютную диэлектрическую проницаемость ϵ_a , повсюду направлен радиально; его величина E_r будет одной и той же во всех точках любой цилиндрической поверхности произвольного радиуса r , ось которой совпадает с заряженной осью (рис. 4-3). Линии напряженности поля повсюду имеют радиальные направления и должны проводиться под од-

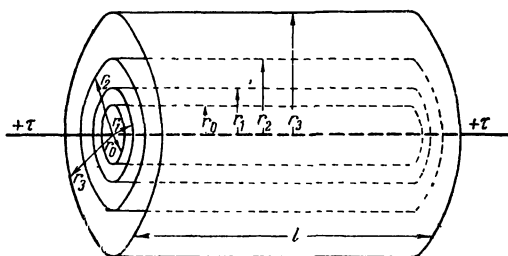


Рис. 4-3. Эквипотенциальные поверхности поля бесконечной заряженной оси.

ним и тем же углом друг к другу. К данной задаче подходят фундаментальные решения (3-23) и (3-20). Совместим с заряженной осью ось цилиндрических координат, тогда

$$\mathbf{E} = E_r \cdot \mathbf{1}_r. \quad (4-7)$$

Применим теорему Гаусса, беря в качестве расчетной поверхности боковую поверхность цилиндра с радиусом r и осевой длиной $l=1$.

Поток вектора \mathbf{D} через торцовые поверхности цилиндра равен нулю, поскольку векторы \mathbf{D} и \mathbf{E} им параллельны. Поэтому

$$D_r \cdot 2\pi r \cdot 1 = \varepsilon_a E_r \cdot 2\pi r = \tau,$$

откуда

$$E_r = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a r}. \quad (4-8)$$

Сравнивая (4-8) и (3-23), видим, что постоянная интегрирования const_3 равна $-\tau/2\pi\varepsilon_a$. Подставив это значение в (3-20), получим выражение потенциала поля

$$\varphi = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a} \ln r + \text{const}_4.$$

Положим $\varphi=0$ на некоторой цилиндрической поверхности радиусом r_0 , тогда

$$\text{const}_4 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a} \ln r_0; \quad \varphi = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{r}{r_0}. \quad (4-9)$$

Эквипотенциальные поверхности — боковые поверхности цилиндров, оси которых совпадают с заряженной осью ($r = \text{const}$). Радиусы соседних поверхностей, потенциалы которых отличаются на одну и ту же величину, выбираются в геометрической прогрессии $r_{n+1}/r_n = \text{const}$ с произвольным знаменателем.

4-5. ПОЛЕ ЗАРЯЖЕННОГО ПРОВОДЯЩЕГО ШАРА

В § 3-13 и 3-14 было установлено, что электростатическое поле внутри такого шара отсутствует как в проводящей среде, так и в непроводящей полости, если последняя имеется. Поле снаружи шара определяется зарядами, расположенными на его поверхности. Следова-

тельно, шар можно заменить очень тонким сферическим проводящим листом того же радиуса.

С другой стороны, сферическая поверхность является эквипотенциальной поверхностью в поле точечного заряда, расположенного в его центре. Таким образом, поле вне заряженного проводящего шара можно заменить полем точечного заряда, равного заряду шара и расположенного в центре шара. Такое поле было рассмотрено в § 4-2.

4-6. СФЕРИЧЕСКИЙ КОНДЕНСАТОР

Каждая из обкладок может рассматриваться как эквипотенциальная поверхность поля заряда, перенесенного с внутренней обкладки в центр сферы. Разность потенциалов между обкладками находится из уравнения (4-3):

$$U = \varphi_{\text{внут}} - \varphi_{\text{нар}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_{\text{внут}}} - \frac{1}{r_{\text{нар}}} \right),$$

где $r_{\text{внут}}$ и $r_{\text{нар}}$ — соответственно радиусы внутренней и наружной обкладок.

Емкость конденсатора

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{r_{\text{внут}}} - \frac{1}{r_{\text{нар}}}}. \quad (4-10)$$

Если наружную обкладку удалить в бесконечность, можно говорить о емкости уединенного шара, поверхностью которого является внутренняя обкладка,

$$C = 4\pi\epsilon_0 r. \quad (4-11)$$

Пример. Емкость земного шара ($r \approx 6 \cdot 10^6$ м) равна:

$$C = \frac{4\pi \cdot 6 \cdot 10^6}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 0,667 \cdot 10^{-3} \text{ ф.}$$

4-7. ПОЛЕ ШАРА ИЗ ДИЭЛЕКТРИКА, ИМЕЮЩЕГО ПОСТОЯННУЮ ОБЪЕМНУЮ ПЛОТНОСТЬ ЗАРЯДА

Пусть радиус шара будет R , а абсолютная диэлектрическая проницаемость его материала $\epsilon_{\text{ш}}$. Потенциал поля внутри шара определится уравнением Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_{\text{ш}}},$$

где ρ — объемная плотность заряда.

Берем систему сферических координат; начало координат в центре шара. В силу шаровой симметрии производные потенциала по широте и долготе равны нулю. Уравнение Пуассона сводится, таким образом, к выражению

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_{\text{ш}}}.$$

Частные производные заменены полными, поскольку потенциал является функцией только расстояния от центра r . Умножаем обе части уравнения на r^2 , интегрируем и делим на r^2 :

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{\rho r}{3\epsilon_{\text{ш}}} + \frac{C_1}{r^2}. \quad (4-12)$$

Интегрируем еще раз:

$$\varphi = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_{\text{ш}}} - \frac{C_1}{r} + C_2. \quad (4-13)$$

Выражение (4-12) представляет собой градиент потенциала. Следовательно, напряженность поля внутри шара

$$E = -\nabla\varphi = -\frac{d\varphi}{dr} \cdot \mathbf{1}_r = \left(\frac{\rho r}{3\epsilon_{\text{ш}}} - \frac{C_1}{r^2} \right) \mathbf{1}_r. \quad (4-14)$$

Определяем постоянные интегрирования C_1 и C_2 . Напряженность поля должна иметь везде конечные значения, включая и области вблизи центра шара ($r \rightarrow 0$); следовательно, C_1 может быть равно только нулю. Физический смысл постоянной C_2 теперь виден из (4-13); это — значение потенциала в центре шара.

Примем его равным нулю, тогда

$$\varphi = -\frac{\rho}{6\epsilon_{\text{ш}}} r^2; \quad (4-15)$$

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_{\text{ш}}} r \cdot \mathbf{1}_r. \quad (4-16)$$

Внутри шара линии поля направлены радиально; напряженность поля пропорциональна расстоянию от центра; эквипотенциальными являются сферические поверхности; поверхность шара является одной из них. При правильном вычерчивании картины поля внутри шара квадраты радиусов соседних поверхностей, потенциалы которых отличаются на одну и ту же величину, должны образовывать арифметическую прогрессию, с разностью, соответствующей интервалу потенциала.

Если поверхность шара обернуть бесконечно тонким проводящим листом, поле совершенно не изменится. Заряды будут распре-

делены по поверхности такого листа с плотностью

$$\sigma \cdot 1r = D_{(r=R)} = \epsilon_{\text{ш}} E_{(r=R)}.$$

Подставляя значение $E_{(r=R)}$ из (4-16), получаем:

$$\sigma = \frac{\rho R}{3}. \quad (4-17)$$

Поле вне шара, очевидно, будет одним и тем же как в случае равномерного распределения заряда Q по проводящему листу, так и в случае сосредоточения того же заряда в центре шара. Поэтому уравнения § 4-2 сохраняют свою силу.

На рис. 4-4 представлены кривые изменения величин φ и E по радиальному направлению, вычерченные в предположении, что диэлектрическая проницаемость материала шара выше, чем окружающей среды.

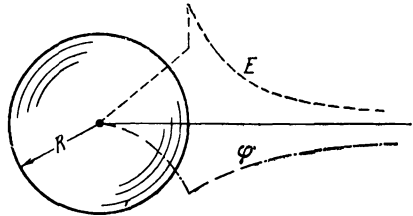


Рис. 4-4. Потенциал и напряженность поля равномерно заряженного шара из диэлектрика.

Подсчитаем полную величину энергии электростатического поля рассматриваемого электрического шара. Рассмотрим элементарный объем dV , заключенный между двумя концентрическими сферическими поверхностями, имеющими радиусы r и $r+dr$,

$$dV = 4\pi r^2 dr.$$

Запасенная в таком объеме энергия по уравнению (3-43) равна:

$$dW = \frac{DE}{2} = \frac{\epsilon_a E^2}{2} dV.$$

Берем выражения напряженности электрического поля внутри и вне шара из уравнений (4-16) и (4-1), имея в виду, что полный заряд шара составляет:

$$Q = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Составляем интегральные выражения для энергии внутри и вне шара и складываем их

$$W = \int_0^R \frac{\epsilon_{\text{ш}} E_{\text{внут}}^2}{2} \cdot 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{\epsilon_0 E_{\text{внеш}}^2}{2} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{2\pi\rho^2}{9\epsilon_{\text{ш}}} \int_0^R r^4 dr + \\ + \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{2\pi}{9} R^5 \rho^2 \left(\frac{1}{5\epsilon_{\text{ш}}} + \frac{1}{\epsilon_0} \right). \quad (4-18)$$

Так как $\epsilon_{\text{ш}} > \epsilon_0$, то основная часть запаса энергии приходится на поле в окружающем шар пространстве.

4-8. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ДИПОЛЯ

Диполем называется система двух равных разноименных зарядов $+Q$ и $-Q$, находящихся на некотором расстоянии $2h$ друг от друга.

Вид линий поля и эквипотенциальных поверхностей вблизи диполя показан на рис. 4-5.

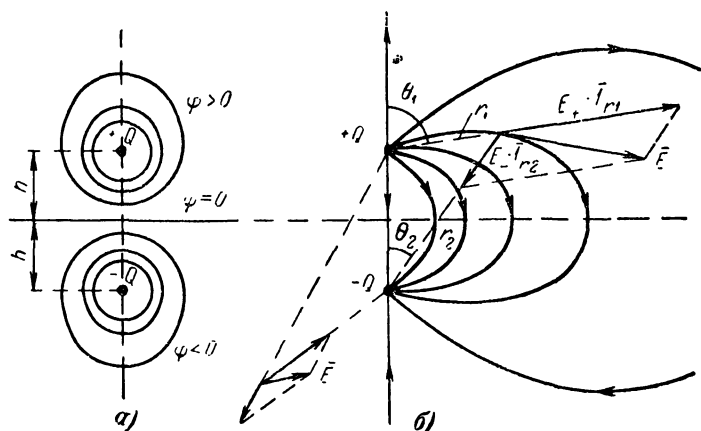


Рис. 4-5. Электростатическое поле вблизи диполя.

Значения потенциала и напряженности поля находятся по принципу наложения:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right); \quad (4-19)$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1^2} \cdot \mathbf{1}_{r1} - \frac{1}{r_2^2} \cdot \mathbf{1}_{r2} \right). \quad (4-20)$$

Здесь r_1 и r_2 — расстояния от рассматриваемой точки поля до зарядов $+Q$ и $-Q$; $\mathbf{1}_{r1}$ и $\mathbf{1}_{r2}$ — единичные векторы, взятые по этим направлениям. Геометрическая разность в уравнении (4-20) вычисляется так, как показано на рис. 4-5,б.

Уравнение силовых линий:

$$\cos \theta_2 - \cos \theta_1 = \text{const.} \quad (4-21)$$

Доказательство см. в [Л. 43].

Порядок построения картины поля показан в [Л. 15] (решение задачи 2,43).

На значительных расстояниях от диполя ($r \gg 2h$, рис. 4-6) можно положить $r_1 r_2 = r^2$ и $r_2 - r_1 \approx 2h \cos \theta_2 \approx \approx 2h \cos \theta$;

тогда

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2h \cos \theta}{r^2}. \quad (4-22)$$

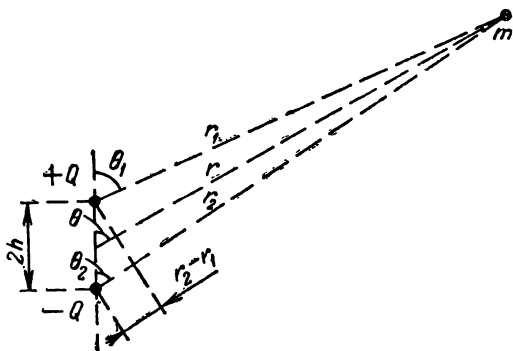


Рис. 4-6. К расчету электростатического поля на большом расстоянии от диполя.

На сферической поверхности большого радиуса ($r = \text{const}$) эквипотенциальные линии совпадают с параллелями. Чтобы разность потенциалов между любой парой соседних параллелей была одной и той же, косинусы их широтных углов должны отличаться друг от друга на одну и ту же величину. На верхнем полюсе $\theta_0 = 0$ и $\cos \theta_0 = 1$; если интервал потенциала составляет, например, 0,1 разности потенциалов полюсов, то первая параллель проводится под углом $\theta_1 = \arccos 0,8 = 36^\circ 50'$, вторая параллель — под углом $\theta_2 = \arccos 0,6 = 53^\circ 10'$, третья — под углом $\theta_3 = \arccos 0,4 = 66^\circ 25'$ и т. д. Углы отсчитываются от оси диполя.

В силу осевой симметрии потенциал не будет меняться по долготе ($\partial\varphi/\partial\psi = 0$). Беря из приложения П-1 формулу для градиента в сферических координатах, получа-

ем выражение для напряженности поля диполя:

$$\begin{aligned}
 E &= -\nabla\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\cdot\mathbf{1}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\cdot\mathbf{1}_\theta\right) = \\
 &= \frac{Q\cdot 2h}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2\cos\theta\cdot\mathbf{1}_r + \sin\theta\cdot\mathbf{1}_\theta). \quad (4-23)
 \end{aligned}$$

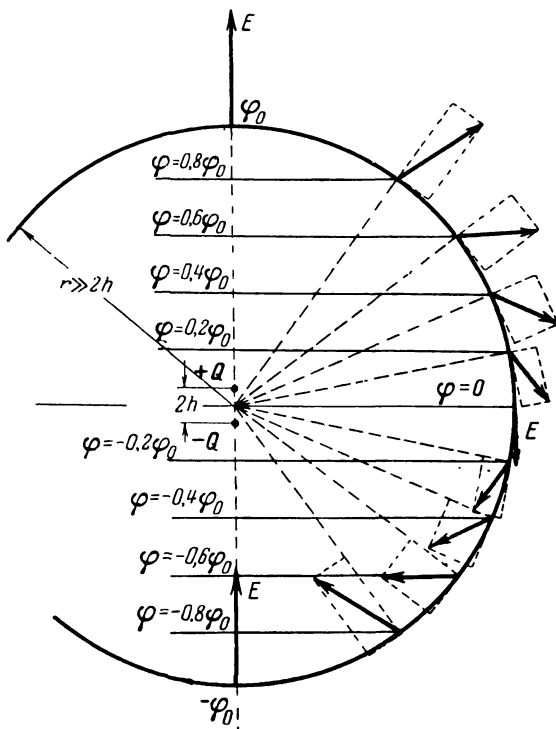


Рис. 4-7. Напряженность электростатического поля на большом расстоянии от диполя.

Величина $Q \cdot 2h$ называется электрическим моментом диполя. На рис. 4-7 показан в масштабе вектор E в отдельных точках, лежащих на одном и том же меридиане.

4.9. ПОЛЕ ДВУХ РАВНЫХ ОДНОИМЕННЫХ ТОЧЕЧНЫХ ЗАРЯДОВ

Общий вид такого поля изображен на рис. 4-8,а. Поле имеет точку ветвления O в середине линии, соединяющей заряды. Точка ветвления характеризуется тем, что напряженность поля в ней рав-

на нулю; эквипотенциальная поверхность в такой точке пересекает сама себя. Для получения представления о характере поля в ближайших окрестностях этой точки рассмотрим рис. 4-8, б и в. Поместим начало координат в точку ветвления. Разность потенциалов между некоторой точкой $P(x, y)$ и точкой ветвления O равна:

$$\varphi_P - \varphi_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a} \left\{ \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{h} \right) + \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{h} \right) \right\} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a} N. \quad (4-24)$$

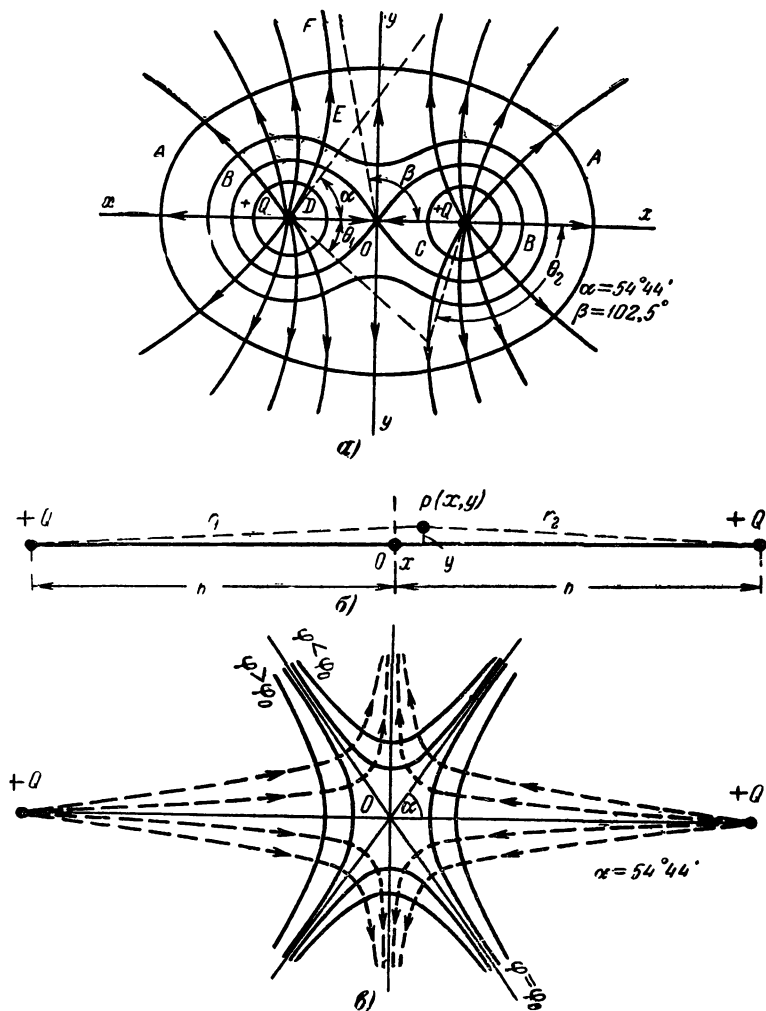


Рис. 4-8. Поле двух равных одноименных точечных зарядов.

Из рис. 4-8, б легко усмотреть, что величина N равна:

$$N = \{(h+x)^2 + y^2\}^{-\frac{1}{2}} + \{(h-x)^2 + y^2\}^{-\frac{1}{2}} - 2h^{-1}. \quad (4-25)$$

Если точка P находится недалеко от O , то значения ее координат x и y малы по сравнению с h .

В таком случае каждое из выражений в фигурных скобках в (4-25) можно разложить по формуле бинома и пренебречь всеми членами разложений, начиная с третьих; разложим затем в свою очередь по формуле бинома члены $(h+x)$ и $(h-x)$ в отрицательных степенях. Подставив результаты в уравнение (4-25), приближенно получим:

$$N \approx h^{-3}(2x^2 - y^2). \quad (4-26)$$

Уравнения следов эквипотенциальных поверхностей будут $N = \text{const}$.

Возможны три типа уравнений:

1. Для линий, потенциалы которых выше потенциала точки ветвления,

$$\varphi_p > \varphi_0; N > 0; 2x^2 - y^2 > 0. \quad (4-27)$$

Это уравнение гиперболы. Поверхности, образованные вращением двух ветвей этой гиперболы относительно линии, соединяющей заряды, будут эквипотенциальными (двухполостный гиперболоид вращения).

2) Для линий, потенциал которых равен потенциалу точки ветвления, $N = 0$:

$$2x^2 - y^2 = 0. \quad (4-28)$$

Это уравнение двух прямых, симметричных относительно оси вращения. Точка пересечения этих прямых лежит в точке ветвления ($x=0$; $y=0$).

Вращая эти прямые вокруг оси, получим два конуса, ось которых совпадает с линией, соединяющей заряды. Угол α между образующей конуса и осью находим из уравнения (4-28)

$$y = \pm \sqrt{2}x; \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \pm \sqrt{2}; \alpha = \pm 54^\circ 44'.$$

Образующие конусов являются асимптотами гипербол, определяемых уравнением (4-28).

3) Для линий, потенциалы которых ниже потенциала точки ответвления, $N < 0$:

$$2x^2 - y^2 < 0. \quad (4-29)$$

Это уравнение гипербол, вращением которых вокруг линии, соединяющей заряды, образована эквипотенциальная поверхность — однополостный гиперболоид.

Уравнение линий поля

$$\cos \theta_1 + \cos \theta_2 = \text{const}. \quad (4-30)$$

Углы показаны на рис. 4-8, а. Доказательство см. в [Л. 43].

Для приближенного построения линий поля двух зарядов $+Q$ и $+Q$ рассмотрим сперва рис. 4-9. Прямой круговой конус AB на рис. 4-9,а имеет при вершине телесный угол Ω ; плоский угол между его образующей и осью пусть будет равен α . Построим из центра, лежащего в вершине конуса, шар радиусом R ; впишем этот шар в круговой цилиндр, ось которого совпадает с осью конуса.

Из геометрии известна связь телесного угла Ω с плоским углом α

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \alpha). \quad (4-31)$$

Выбрав равные приращения для $\cos \alpha$, т. е. откладывая равные отрезки вдоль оси OD , и проводя плоскости, нормальные к оси, получим вырезки поверхности шара равной площади. Это позволит разделить полный поток точечного заряда на равные конические группы, отсчитываемые относительно оси, проходящей через точку размещения заряда O (рис. 4-9,б).

Часть полного потока (выраженная в процентах), проходящая через сферический сегмент, вырезаемый конусом с плоским углом α между образующей и осью, равна:

$$\frac{\Omega}{4\pi} \cdot 100\% = \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha) 100\%, \quad (4-32)$$

Возвратимся теперь к рис. 4-8,а, на котором начерчены линии поля, выбранные так, чтобы между каждой парой соседних поверхностей, образованных вращением этих линий относительно линии, соединяющей заряды, проходило 20% общего потока, испускаемого зарядом $+Q$. Согласно уравнению (4-32) линии поля на рис. 4-8 должны выходить под углами соответственно 54° ; $78,5^\circ$; $101,5^\circ$ и 126° к оси.

На значительных расстояниях весь заряд $+2Q$ можно считать сосредоточенным в «центре тяжести» системы O . По (4-32) находим, что асимптота линии поля DEF , выходящей из левого заряда под углом $\alpha = 54^\circ$ к оси (рис. 4-8,а), будет лежать под углом $\beta = 180^\circ - 78,5^\circ = 101,5^\circ$ к оси.

Эквипотенциальные поверхности на очень больших расстояниях от обоих зарядов будут близки к сферам, центрированным в точке O . По мере приближения к зарядам форма эквипотенциальных поверхностей начинает усложняться, принимая сперва очертание A (рис. 4-8,а), напоминающее поверхность эллипсоида. Затем появляется впадина у плоскости симметрии YY . Эквипотенциальная

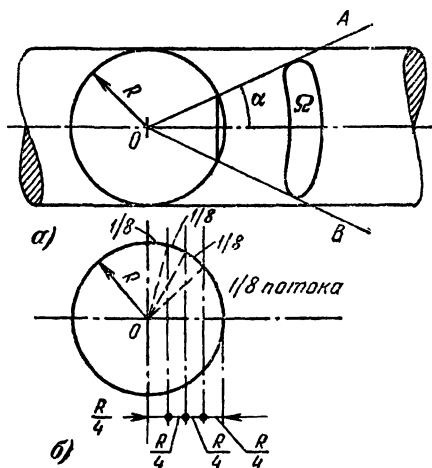


Рис. 4-9. Разделение потока точечного заряда на равные конические группы.

α между образующей и осью, равна:

поверхность типа *B* образует в районе точки ветвления подобие конусов, разобранных выше; соседние поверхности имеют в ближайших окрестностях точки ветвления формы, близкие к гиперболоидам. При дальнейшем приближении к зарядам эквипотенциальные поверхности раздваиваются и каждая часть замыкается вокруг своего заряда (тип *C* на рис. 4-8,а).

4-10. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ КОАКСИАЛЬНОГО КАБЕЛЯ

Коаксиальный кабель имеет внутренний цилиндрический проводник и наружный проводник в виде трубы (рис. 4-10); оба проводника имеют общую ось. Поле зарядов, имеющих на цилиндрической поверхности внутреннего проводника, можно заменить полем фиктивных зарядов, расположенных на оси кабеля. Так как длина

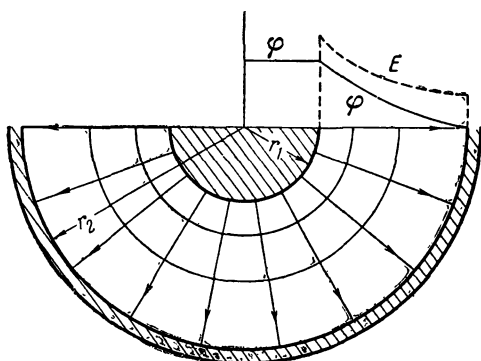


Рис. 4-10. Электростатическое поле коаксиального кабеля.

кабеля велика по сравнению с его диаметром, применимы формулы § 4-4. Полагая потенциал на поверхности наружного проводника равным нулю, для потенциала внутреннего проводника можно написать:

$$\varphi_{\text{внут}} = U = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (4-33)$$

Емкость кабеля на единицу длины по его оси равна:

$$C_1 = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\epsilon_a}{\ln \frac{r_2}{r_1}} [\varphi/м]. \quad (4-34)$$

Напряженность поля в кабеле определяется по уравнению (4-8)

$$E = E_r \cdot 1_r = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot 1_r. \quad (4-35)$$

Выразим ее величину через разность потенциалов между обкладками; для этого исключим τ из уравнений (4-33) и (4-35)

$$E_r = \frac{U}{r \ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (4-36)$$

На рис. 4-10 изображены вид поля и кривые изменения скалярного потенциала и напряженности поля по радиусу коаксиального кабеля.

В приложении П-5 приведены размеры и электрические параметры некоторых стандартных высокочастотных коаксиальных кабелей.

4-11. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ КОНДЕНСАТОР

Если не учитывать влияния краев, то любой отрезок коаксиального кабеля представляет собой цилиндрический конденсатор. Поэтому для расчета емкости и напряженности поля в цилиндрическом конденсаторе пригодны формулы § 4-10. На рис. 4-11 показан

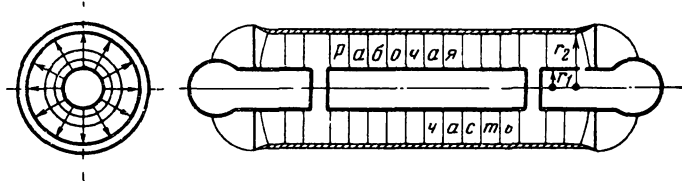


Рис. 4-11. Поле цилиндрического конденсатора.

воздушный цилиндрический конденсатор типа применяемых в измерительной аппаратуре высокого напряжения; для получения равномерного поля в рабочей части конденсатора внутренний электрод имеет «охранные концы».

Рассмотрим, как следует выбрать радиус внутреннего электрода r_1 для того, чтобы получить возможно меньшее значение максимальной напряженности поля при заданном габарите конденсатора, т. е. при заданном радиусе r_2 наружного электрода. Вопрос сводится к тому, при каком значении r_1 знаменатель выражения

(4-36) при $r=r_1$ ($M=r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}$) будет наибольшим. Дифференцируя

по r_1 , получаем:

$$\frac{dM}{dr_1} = \ln \frac{r_2}{r_{1m}} - 1 = 0; \quad \frac{r_2}{r_{1m}} = e; \quad \frac{d^2M}{dr_1^2} < 0.$$

Лучшее соотношение между радиусами электродов цилиндрического конденсатора равняется основанию натуральных логарифмов $e=2,71828$.

4-12. КОНДЕНСАТОРНЫЙ ВВОД

Провод высокого напряжения, вводимый в крышку бака трансформатора, и стенки отверстия бака образуют цилиндрический конденсатор. Чтобы выиграть в электрической прочности изоляции, надо сгладить неравномерность распределения напряженности поля по радиусу, свойственную цилиндрическому конденсатору. Для этого изоляцию делают расслоенной: между слоями равной толщины прокладывают тонкие металлические цилиндры; в результате полу-

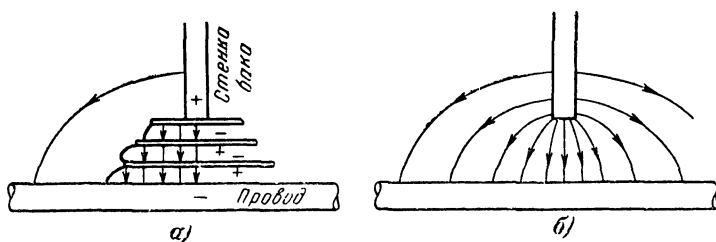


Рис. 4-12. Конденсаторная вводная втулка.

чается как бы несколько вложенных друг в друга цилиндрических конденсаторов. Чтобы получить приблизительно равномерное распределение поля во всех слоях изоляции, все цилиндры подбирают так, чтобы их поверхности были одинаковыми, поэтому наружные цилиндры оказываются короче внутренних. Заряд на каждом цилиндре один и тот же; следовательно, поверхностная плотность заряда получается на всех листах одинаковой. Напряженность поля в диэлектрике вблизи поверхностей всех цилиндров будет практически одной и той же. Изменение напряженности поля в пределах каждого слоя будет небольшим, поскольку толщина слоев невелика. На рис. 4-12 показан вид поля между проводом и стенкой отверстия при устройстве конденсаторного ввода (а) и без него (б).

Другой метод выравнивания напряженности поля связан с использованием различных диэлектриков (см. § 4-13).

4-13. КОНДЕНСАТОР С ДВУХСЛОЙНЫМ ДИЭЛЕКТРИКОМ

Рассмотрим цилиндрический конденсатор с двумя слоями диэлектрика (рис. 4-13). К обкладкам приложено напряжение U .

Пусть поверхность раздела диэлектриков совпадает с эквипотенциальной поверхностью. Поместим здесь очень тонкий проводящий лист. Двухслойный конденсатор можно теперь рассматривать как два цилиндрических конденсатора, вложенных один в другой. Их емкости на единицу длины в направлении, перпендикулярном чертежу, C_1 и C_2 можно рассчитать по формуле (4-34). Общая емкость

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2};$$

заряд на единицу длины $\tau = CU$.

Напряженность поля в первом диэлектрике ($r_1 \leq r \leq r_2$) можно рассчитать по формуле (4-35). Выполнив подстановки, получим:

$$E_1 = \frac{U}{r \left(\ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \ln \frac{r_3}{r_2} \right)} \cdot 1r. \quad (4-37)$$

Аналогичным путем можно рассчитать и напряженность поля во втором диэлектрике ($r_2 \leq r \leq r_3$):

$$E_2 = \frac{U}{r \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \ln \frac{r_3}{r_2} \right)} \cdot 1r. \quad (4-38)$$

На поверхности раздела ($r = r_2$) напряженность поля испытывает скачок. Однако вектор смещения $D_{1n} = \epsilon_{a1} E_{1n}$ и $D_{2n} = \epsilon_{a2} E_{2n}$ непрерывен. На рис. 4-13 приведены кривые изменения напряженности поля и смещения вдоль радиуса, вычерченные для случая $\epsilon_1 > \epsilon_2$. Из кривых видно, что при таком подборе диэлектриков удастся добиться существенного выравнивания распределения напряженности поля.

4-14. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ДЛИННЫХ РАЗНОИМЕННО-ЗАРЯЖЕННЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЕЙ

Чертеж на рис. 4-14 лежит в плоскости, нормальной к заряженным осям; одна из осей имеет линейную плотность заряда $+\tau$, другая $-\tau$. Расстояние между ними

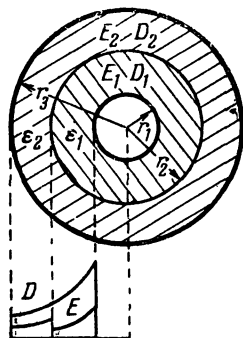


Рис. 4-13. Цилиндрический конденсатор с двухслойным диэлектриком.

равно $2h$. Поместим начало прямоугольной декартовой системы координат в точку O , лежащую посередине прямой, соединяющей следы осей. Ось x направим вдоль этой прямой. Потенциал в начале координат примем равным нулю. Тогда выражения для потенциала в какой-либо точке m , находящейся на расстояниях a_1 и a_2 от осей,

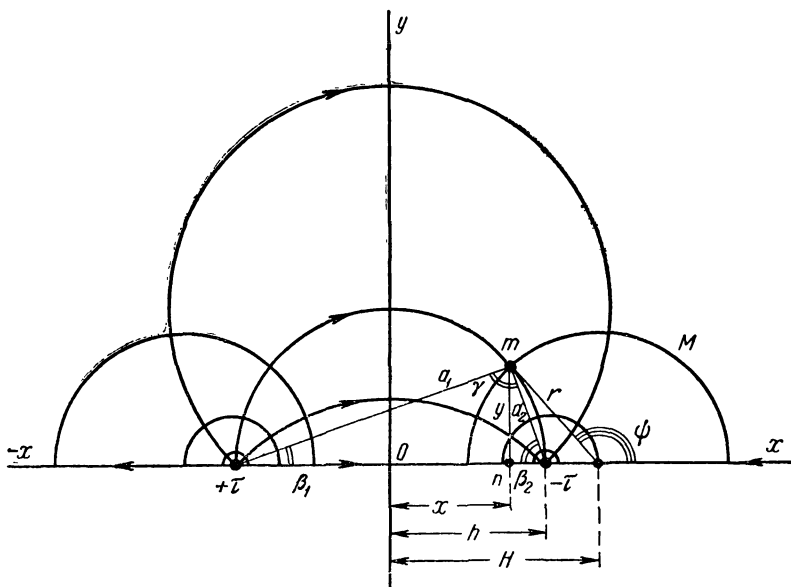


Рис. 4-14. Электростатическое поле двухпроводной линии из тонких проводов.

можно записать по типу формулы (4-9); потенциал, обусловленный зарядом $+\tau$,

$$\varphi'_m = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{h}{a_1};$$

потенциал, обусловленный зарядом $-\tau$,

$$\varphi''_m = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{h}{a_2}.$$

Полное значение потенциала в точке m равно:

$$\varphi_m = \varphi'_m + \varphi''_m = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{a_2}{a_1}. \quad (4-39)$$

Эквипотенциальные линии ($\varphi = \text{const}$) должны удовлетворять уравнению

$$\frac{a_2}{a_1} = \text{const} = k. \quad (4.40)$$

Это уравнение окружности, поскольку окружность является геометрическим местом точек, отношение расстояний от которых до пары заданных точек на плоскости является постоянной величиной. Исследуем подробнее эти окружности. Из рис. 4-14 следует:

$$a_1^2 = (h+x)^2 + y^2; \quad a_2^2 = (h-x)^2 + y^2;$$

$$k^2 = \frac{(h-x)^2 + y^2}{(h+x)^2 + y^2}.$$

Освободившись от знаменателя и приведя подобные члены, получим:

$$(k^2 - 1)(x^2 + y^2 + h^2) + (k^2 + 1)2hx = 0.$$

Делим все выражение на $(k^2 - 1)$ и добавляем к левой и правой частям член

$$\left(\frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}h\right)^2 - h^2 = \left(\pm h \frac{2k}{k^2 - 1}\right)^2.$$

Тогда в левой части можно выделить полный квадрат

$$\left(x + \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}h\right)^2 + y^2 = \left(\pm h \frac{2k}{k^2 - 1}\right)^2.$$

Это уравнение окружности с радиусом

$$r = \pm h \frac{2k}{k^2 - 1} \quad (4.41)$$

и с координатами центра

$$H = -\frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}h; \quad y_1 = 0. \quad (4.42)$$

Окружности, соответствующие $k > 1$, расположены слева от избранного начала координат; окружности, соответствующие $k < 1$, расположены справа от начала ко-

ординат. В последнем случае при определении радиуса по выражению (4-41) следует брать соответствующий физическому смыслу отрицательный знак. Между величинами r , h и H имеется простое соотношение

$$H^2 - r^2 = h^2 \left\{ \left(\frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} \right)^2 - \left(\frac{2k}{k^2 - 1} \right)^2 \right\} = h^2. \quad (4-43)$$

Решив уравнение (4-41) относительно k и применив соотношения (4-43) и (4-40), получим следующие выражения для k и φ :

$$k = \frac{H \pm h}{r}; \quad (4-44)$$

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{H \pm h}{r}. \quad (4-45)$$

Положительный знак в числителе имеет силу для точек, лежащих в левой половине чертежа, т. е. прилегающих к положительно заряженной оси. Отрицательный знак имеет силу для точек в правой половине чертежа, т. е. прилегающих к отрицательно заряженной оси.

Определим теперь вектор напряженности электростатического поля. По формуле (4-8) величина напряженности поля в точке m , обусловленной зарядом $+\tau$, распределенным вдоль левой заряженной оси, равна

$$E_{(+\tau)} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a a_1},$$

а ее составляющие по координатным осям равны:

$$E_{(+\tau) x} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a a_1} \cos \beta_1 \quad \text{и} \quad E_{(+\tau) y} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a a_1} \sin \beta_1.$$

Аналогичным путем определяются составляющие по координатным осям напряженности поля, обусловленной зарядом $-\tau$, распределенным вдоль правой заряженной оси,

$$E_{(-\tau) x} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a a_2} \cos \beta_2; \quad E_{(-\tau) y} = \frac{-\tau}{2\pi\epsilon_a a_2} \sin \beta_2.$$

Полное выражение напряженности электростатического поля получает вид:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \left\{ \left(\frac{\cos \beta_1}{a_1} + \frac{\cos \beta_2}{a_2} \right) i + \left(\frac{\sin \beta_1}{a_1} - \frac{\sin \beta_2}{a_2} \right) j \right\}. \quad (4-46)$$

Отрезки a_1 , a_2 и углы β_1 и β_2 показаны на рис. 4-14.

Числовое значение напряженности поля $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$; подставляя значения E_x и E_y из уравнения (4-46), можно получить:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{2}{a_1 a_2} \cos(\beta_1 + \beta_2)} = \frac{\tau}{\pi\epsilon_a} \frac{h}{a_1 a_2}. \quad (4-47)$$

В практических задачах иногда бывает удобно перейти к цилиндрическим координатам, совмещая ось z с осью одной из эквипотенциальных цилиндрических поверхностей M (рис. 4-14). Напряженность поля в точках, лежащих на такой поверхности, имеет только одну радиальную составляющую: $E = E_r \cdot 1_r$.

Величина E_r равна значению E , вычисленному по уравнению (4-47).

Используем построение на рис. 4-14 и формул (4-44) и (4-43):

$$\begin{aligned} a_1 a_2 &= \frac{a_2^2}{k} = \frac{r}{H-h} \{r^2 + (H-h)^2 + 2r(H-h) \cos \psi\} = \\ &= 2r(H+r \cos \psi). \end{aligned}$$

Теперь

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \frac{h}{r(H+r \cos \psi)} \cdot 1_r. \quad (4-48)$$

Эта формула удобна для вычисления напряженности поля в различных точках одной и той же эквипотенциальной цилиндрической поверхности, имеющей радиус r и координату центра H ; если эту поверхность заменить бесконечно тонким проводящим листом, то согласно теореме Гаусса результат расчета по формуле (4-48), умноженный на диэлектрическую проницаемость среды, будет равен поверхностной плотности заряда в данной точке листа

$$\sigma = \frac{\tau}{2\pi} \frac{h}{r(H+r \cos \psi)}. \quad (4-49)$$

Определим характер линий поля. Одна из линий очевидна — это прямая, соединяющая следы осей. Опустим из какой-либо точки m перпендикуляр mn на известную нам линию поля. Вообразим плоскую площадку дли-

ной mn и шириной, равной единице (по нормали к плоскости чертежа). На основании теоремы Гаусса можно установить, что эта площадка пронизывается следующими потоками смещения:

$$\text{от оси с зарядом } +\tau: \frac{\tau}{2\pi} \beta_1;$$

$$\text{от оси с зарядом } -\tau: \frac{\tau}{2\pi} \beta_2.$$

Полный поток, пронизывающий эту площадку, равен:

$$\Psi = \frac{\tau}{2\pi} (\beta_1 + \beta_2). \quad (4-50)$$

Можно найти ряд точек, являющихся следами нормальных к плоскости чертежа линий, которые служили бы верхними границами площадок, пронизываемых такой же величины потоком Ψ .

Геометрическим местом этих точек будет линия, лежащая в плоскости чертежа и удовлетворяющая условию $\beta_1 + \beta_2 = \text{const}$, или $\gamma = \text{const}$; это будет окружность, проходящая через следы заряженных осей $+\tau$ и $-\tau$. Физически такая окружность представляет линию напряженности поля. Давая различные значения постоянной в выражении $\gamma = \text{const}$, получаем различные линии напряженности поля; их центры лежат на оси Y .

4-15. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ДВУХПРОВОДНОЙ ЛИНИИ

Расчет электростатического поля двухпроводной линии, составленной из двух цилиндрических проводов с одинаковым радиусом r при расстоянии $2H$ между центрами проводов, следует начинать с определения положения электрических осей проводов, т. е. тех воображаемых осей, при перенесении на которые зарядов с поверхностей проводов поле не изменилось бы (§ 3-9). Иначе говоря, следует определить расстояние h по формуле (4-43)

$$h = \sqrt{H^2 - r^2}. \quad (4-51)$$

Затем определяются потенциалы проводов по формуле (4-45).

Напряжение между проводами равно:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{H+h}{H-h} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{(H+h)^2}{H^2-h^2} = \\ = \frac{\tau}{\pi\epsilon_a} \ln \frac{H+h}{r}. \quad (4-52)$$

Емкость на единицу длины линии без учета влияния земли составит:

$$C_1 = \frac{\tau}{U} = \frac{\pi\epsilon_a}{\ln \frac{H+h}{r}} [\phi/\mathcal{M}]. \quad (4-53)$$

В случае тонких проводов (воздушные линии) $h \approx H$; тогда

$$C_1 = \frac{\pi\epsilon_a}{\ln \frac{2H}{r}}. \quad (4-54)$$

Расчет напряженности электростатического поля производится по общим формулам (4-46) — (4-48) при подстановке в них значения τ из уравнения (4-52).

В частности, напряженность поля и плотность зарядов на поверхностях проводов равны:

$$E_{\text{пов}} = \frac{Uh}{2r(H+r \cos \psi) \ln \frac{H+h}{r}}; \quad (4-55)$$

$$\sigma = \epsilon_0 E_{\text{пов}}. \quad (4-56)$$

Вектор $E_{\text{пов}}$ направлен по нормали к поверхности проводника.

Рассмотрим построение картины электростатического поля двухпроводной линии. Пусть напряжение между проводами линии равно $U[\text{в}]$. Линия симметрии Oy на рис. 4-14 является одной из эквипотенциалей, потенциал всех точек которой принят равным нулю. Известны также две другие эквипотенциали: поверхность левого проводника с потенциалом $\varphi_{\text{л}} = U/2 [\text{в}]$ и поверхность правого проводника с потенциалом $\varphi_{\text{п}} = -U/2[\text{в}]$. Пусть в каждой половине рис. 4-14 требуется провести n промежуточных эквипотенциальных линий; интервал потенциала между каждой парой соседних линий составит $U/2(n+1)[\text{в}]$.

Значение натурального логарифма в формуле (4-45) служит мерой потенциала. Для линий Oy оно равно нулю, а для поверхности левого проводника оно равно $(n+1)$ условных единиц.

Для промежуточных эквипотенциальных линий величина этого логарифма должна быть соответственно равна $1, 2, 3, \dots, k, \dots, n$. Величины подлогарифменных выражений для левой половины рис. 4-14 будут:

$$\frac{H + h}{r} = e, e^2, e^3, \dots, e^k, \dots, e^n. \quad (4-57)$$

Из (4-51) вытекает, что величины $\frac{H - h}{r}$ будут соответственно равны:

$$\frac{H - h}{r} = e^{-1}, e^{-2}, e^{-3}, \dots, e^{-k}, \dots, e^{-n}. \quad (4-58)$$

Совместное решение (4-57) и (4-58) дает значения координат центров и радиусов искоемых эквипотенциальных окружностей:

$$H(k) = h \operatorname{cth} k; \quad (4-59)$$

$$r(k) = \frac{h}{\operatorname{sh} k} \dots (k=1, 2, \dots, n). \quad (4-60)$$

Правая половина рис. 4-14 совершенно симметрична левой.

Построение на рис. 4-14 сделано для $n=3$. Линии поля должны быть окружностями, проходящими через электрические оси проводов. Одна из них с радиусом ρ показана на рис. 4-15. Физический смысл имеют лишь части линий, проходящие в окружающем провода пространстве. Показанные пунктиром на рис. 4-15 замыкающие дуги получили бы физический смысл при замене реальных проводов с радиусом r бесконечно тонкими заряженными осями, совмещенными с электрическими осями проводов.

Кратчайшая линия поля $(+\tau)O(-\tau)$ на рис. 4-14 и 4-15 делит общий поток вектора смещения пополам. Она соответствует углу $\gamma = \pi$. Продолжения этой линии, уходящие в бесконечность слева и справа от наружных поверхностей проводников, являются крайними линиями поля, соответствующими углу $\gamma = 0$.

Если желательно провести n_1 промежуточных линий поля, между каждой парой которых заключается $\frac{1}{2(n_1 + 1)}$ -я часть полного потока, то определяющие их углы будут:

$$\gamma_1 = \frac{\pi}{n_1 + 1}; \quad \gamma_2 = \frac{2\pi}{n_1 + 1}; \quad \dots; \quad \gamma_n = \frac{i\pi}{n_1 + 1} \dots (i = 1, 2, \dots, n_1).$$

Радиусы и координаты центров линий поля легко найти из рис. 4-15. Угол $OO_1(-\tau)$ является внешним по отношению к равнобедренному треугольнику $O_1O_2(-\tau)$, имеющему равные углы по $\gamma/2$ каждый. Следовательно, угол $OO_1(-\tau)$ равен γ .

Из треугольника $OO_1(-\tau)$ видно, что координата центра и радиус i -й окружности равны:

$$y(i) = h \operatorname{ctg} \gamma_i; \quad (4-61)$$

$$R(i) = \frac{h}{\sin \gamma_i}. \quad (4-62)$$

Построение на рис. 4-14 сделано для случая $n_1=3$.

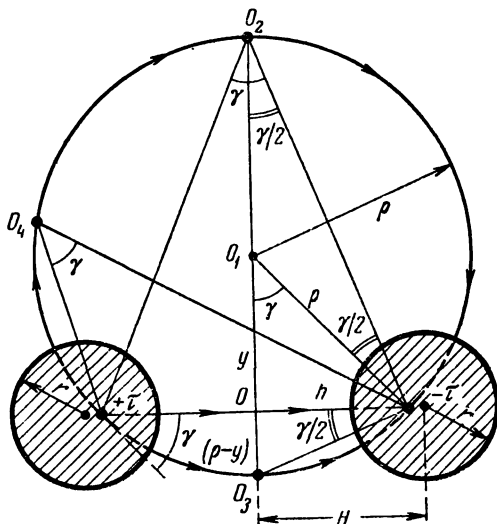


Рис. 4-15. Построение линий напряженности электростатического поля двухпроводной линии.

4-16. ПОЛЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОВОДЯЩИХ ЦИЛИНДРОВ

1. Цилиндры расположены вне друг друга (рис. 4-16). Решение задачи начинают с нахождения электрических осей цилиндров, пользуясь уравнениями типа (4-43),

$$h^2 = H_1^2 - r_1^2; \quad h^2 = H_2^2 - r_2^2.$$

Эти два уравнения решаются совместно с третьим

$$H_1 + H_2 = 2H.$$

Таким образом находятся середина расстояния между электрическими осями цилиндров и положение осей:

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= H - \frac{r_2^2 - r_1^2}{4H}; \\ H_2 &= H + \frac{r_2^2 - r_1^2}{4H}. \end{aligned} \right\} \quad (4-63)$$

Потенциалы цилиндров:

$$\varphi_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{H_1 + h}{r_1}; \quad \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{H_2 - h}{r_2}.$$

Напряжение (разность потенциалов) между цилиндрами

$$\begin{aligned} U = \varphi_1 - \varphi_2 &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{(H_1 + h) r_2}{r_1 (H_2 - h)} = \\ &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{(H_1 + h) (H_2 + h)}{r_1 r_2}. \end{aligned}$$

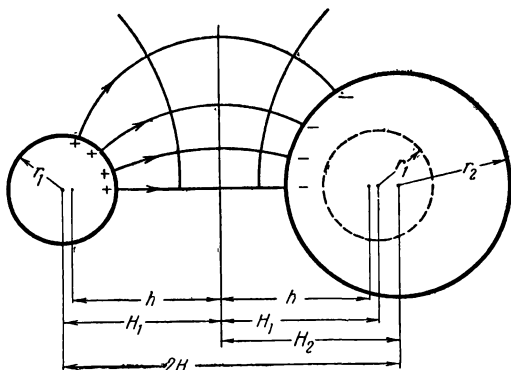


Рис. 4-16. Электростатическое поле разноименно заряженных цилиндров, находящихся один вне другого.

Емкость на единицу длины в направлении, перпендикулярном чертежу,

$$C_1 = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\epsilon_a}{\ln \frac{(H_1 + h) (H_2 + h)}{r_1 r_2}}. \quad (4-64)$$

Наибольшая напряженность поля будет на поверхности меньшего цилиндра в точке, лежащей на линии, соединяющей оси цилиндров; ее величина может быть получена из формулы (4-48) и рис. 4-14

$$E_{\max} = \frac{Uh}{r_1 (H_1 - r_1) \ln \frac{(H_1 + h) (H_2 + h)}{r_1 r_2}}. \quad (4-65)$$

2. Один из цилиндров находится внутри другого (рис. 4-17). Система таких двух цилиндров может быть заменена парой эквипотенциальных поверхностей (рис. 4-14), выбран-

ных так, чтобы одна из них была внутри другой. Практическим примером такой задачи будет электростатическое поле кабеля, который должен бы быть коаксиальным, но оси его внутреннего и наружного проводников оказались смещены одна относительно другой. Одна из электрических осей будет внутри наружного цилиндра, а другая вне его. Местоположение осей определится из уравнений:

$$h^2 = H_1^2 - r_1^2; h^2 = H_2^2 - r_2^2; H_2 - H_1 = m, \quad (4-66)$$

где m — смещение геометрических осей цилиндров.

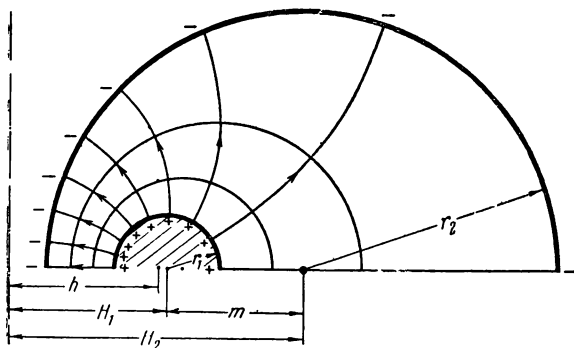


Рис. 4-17. Электростатическое поле разноосно заряженных цилиндров, находящихся один внутри другого.

Решение этой системы:

$$H_1 = \frac{r_2^2 - r_1^2 - m^2}{2m}. \quad (4-67)$$

Потенциалы цилиндров определяются по формуле (4-45) с подстановкой в числителе знака минус, поскольку оба цилиндра соответствуют эквипотенциальным поверхностям, лежащим в правой половине рис. 4-14. Вычисления аналогичны предыдущим.

Емкость системы на единицу длины в направлении, перпендикулярном чертежу,

$$C_1 = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\epsilon_a}{\ln \frac{(H_1 + h) r_2}{(H_2 + h) r_1}}. \quad (4-68)$$

Наибольшая напряженность поля будет на поверхности внутреннего цилиндра, в месте наибольшего сближения цилиндров

$$E_{\max} = \frac{Uh_1}{r_1 (H_1 - r_1) \ln \frac{(H_1 + h) r_2}{(H_2 + h) r_1}}. \quad (4-69)$$

4-17. ПОЛЕ ОДНОПРОВОДНОЙ ЛИНИИ И ЗЕМЛИ

Эта задача проще всего решается методом изображений.

Если эквипотенциальную плоскость OY , делящую поле на рис. 4-14 пополам, заменить тонким проводящим листом, то каждая половина поля будет соответствовать рассматриваемому случаю. Поэтому для расчета электростатического поля однопроводной линии, изображенного на рис. 4-18, можно представить, что на глубине под зем-

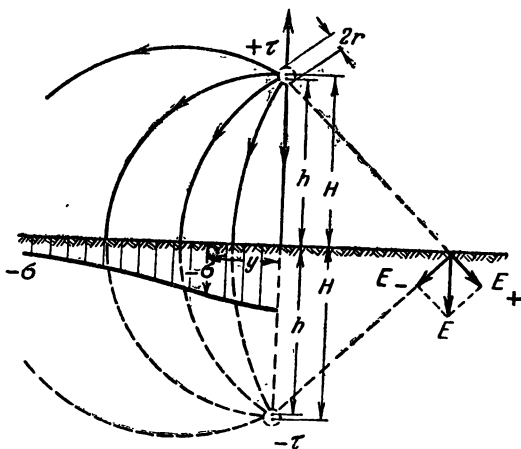


Рис. 4-18. Электростатическое поле однопроводной линии и земли.

лей находится зеркальное изображение провода, имеющее такой же величины заряд, обратный по знаку.

Расчет ведется так, как указано в § 4-15, начиная с определения местоположения электрической оси, т. е. расстояния h от поверхности земли [по формуле (4-51)].

Емкость между проводом и землей будет, очевидно, вдвое больше емкости фиктивной двухпроводной линии, составленной из провода и его зеркального изображения. Используя формулу (4-53), получаем, что емкость однопроводной линии на единицу длины равна:

$$C' = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{H+h}{r}} [\phi/м]. \quad (4-70)$$

Разность потенциалов между проводом и его зеркальным изображением должна быть вдвое больше, чем меж-

ду проводом и землей; поэтому формула для максимальной напряженности поля на поверхности провода, составленная на основе формулы (4-55) при $\psi = \pi$, получит вид:

$$E_{\text{макс}} = \frac{Uh}{r(H-r) \ln \frac{H+h}{r}} \quad (4-71)$$

На рис. 4-18 показана кривая плотности наведенных на поверхности земли зарядов. Для этого использованы выражения (3-38) и (4-46). Вектор E у поверхности земли направлен по нормали к последней. Следовательно, второй член в фигурных скобках выражения (4-46) равен нулю. Кроме того, в силу симметрии $\beta_1 = \beta_2$ и $a_1 = a_2$. Выразим τ через U по уравнению (4-52), тогда формула для вычисления поверхностной плотности наведенных зарядов получает простой вид:

$$\sigma = \frac{2U\epsilon_0 h}{(h^2 + y^2) \ln \frac{H+h}{r}} \quad (4-72)$$

Заметим, что в данном случае мы использовали изображение провода и его заряда как бы в «идеальном» плоском зеркале.

4-18. ДЛИННЫЙ ПРОВОДЯЩИЙ ЦИЛИНДР ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ, НОРМАЛЬНОМ К ОСИ ЦИЛИНДРА

Эта задача решается путем интегрирования уравнения Лапласа по двум переменным, производимого методом Фурье — Ламе. Пусть внешнее поле вдали от цилиндра является однородным с напряженностью $E_{\text{внеш}}$. Применим цилиндрическую систему координат, ось которой совпадает с осью цилиндра (рис. 4-19).

Электростатическое поле в окрестностях цилиндра, вдали от торцов, описывается двухмерным уравнением Лапласа, развертываемым с помощью формулы лапласиана в цилиндрических координатах (приложение П-1) при $\partial/\partial z = 0$:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (4-73)$$

Ищем решение этого уравнения в форме произведения двух функций

$$\varphi = \varphi_1(r) \varphi_2(\theta). \quad (4-74)$$

Каждая функция зависит только от одной переменной: φ_1 — только от r , φ_2 — только от θ .

Дифференцируем уравнение (4-74) и подставляем результаты в (4-73); получаем уравнение с разделенными переменными

$$\frac{r}{\varphi_1} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_1}{dr} \right) = - \frac{1}{\varphi_2} \frac{d^2\varphi_2}{d\theta^2}. \quad (4-75)$$

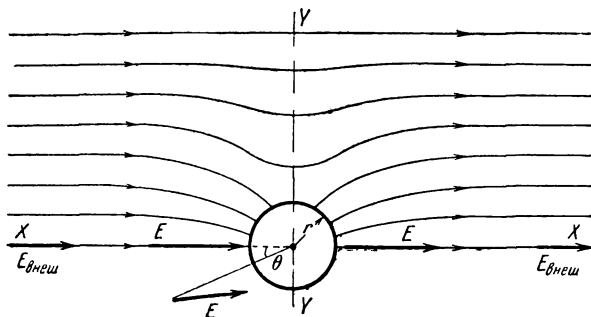


Рис. 4-19. Проводящий цилиндр во внешнем электростатическом поле.

Это равенство должно быть справедливым при любых конечных значениях координат r и θ ; это возможно, если каждая его часть равна некоторой постоянной, которую обозначим p^2 .

Итак:

$$\frac{1}{\varphi_2} \frac{d^2\varphi_2}{d\theta^2} = - p^2; \quad (4-76)$$

$$\frac{r}{\varphi_1} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_1}{dr} \right) = p^2. \quad (4-77)$$

Интеграл уравнения (4-76) состоит из тригонометрических функций

$$\varphi_2 = A_1 \cos p\theta + A_2 \sin p\theta. \quad (4-78)$$

Из симметрии поля относительно плоскости XX , нормальной к чертежу на рис. 4-19, следует:

$$\varphi_2(\theta) = \varphi_2(-\theta). \quad (4-79)$$

Этому условию удовлетворяет лишь четная функция $\cos p\theta$. Член, содержащий $\sin p\theta$, должен отсутствовать; следовательно, постоянная A_2 равна нулю.

Из симметрии поля относительно плоскости YU вытекает, что эта плоскость является эквипотенциальной. Положим ее потенциал равным нулю. Зависимость значения потенциала от угла θ в прилегающих областях не может содержать функций кратных углов $p\theta$; иначе говоря, поставленная задача требует условия $p=1$.

Таким образом

$$\varphi_2 = A_1 \cos \theta, \quad (4-80)$$

где A_1 — постоянная.

Для интегрирования уравнения (4-77) при $p=1$ введем новую переменную

$$\eta = \ln r, \quad (4-81)$$

тогда

$$\frac{d\eta}{dr} = \frac{1}{r}; \quad \frac{d\varphi_1}{dr} = \frac{d\varphi_1}{d\eta} \frac{d\eta}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d\varphi_1}{d\eta} \text{ и т. д.} \quad (4-82)$$

Уравнение (4-77) приводится к виду

$$\frac{d^2 \varphi_1}{d\eta^2} = \varphi_1. \quad (4-83)$$

Интеграл этого уравнения хорошо известен

$$\varphi_1 = C_1 e^\eta + C_2 e^{-\eta} = C_1 r + \frac{C_2}{r}. \quad (4-84)$$

Подставив выражения (4-80) и (4-84) в (4-74) и заменив постоянные $A_1 C_1 = K_1$ и $A_1 C_2 = K_2$, придем к искомого интегралу уравнения Лапласа

$$\varphi = \left(K_1 r + \frac{K_2}{r} \right) \cos \theta. \quad (4-85)$$

Напряженность поля находим как градиент потенциала, взятый с обратным знаком,

$$\begin{aligned} \dot{E} &= -\nabla\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} \cdot \mathbf{1}_r - \frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} \cdot \mathbf{1}_\theta = \\ &= -\left(K_1 - \frac{K_2}{r^2} \right) \cos \theta \cdot \mathbf{1}_r + \left(K_1 + \frac{K_2}{r^2} \right) \sin \theta \cdot \mathbf{1}_\theta. \end{aligned} \quad (4-86)$$

Определяем постоянные K_1 и K_2 .

Влияние проводящего цилиндра на внешнее поле не должно сказываться на очень большом расстоянии от

цилиндра. Следовательно, при $r \rightarrow \infty$ и, например, при $\theta = 0$

$$E = E_{\text{внеш}} = -E_{\text{внеш}} \cdot \mathbf{1}_r = -K_1 \cdot \mathbf{1}_r;$$

отсюда

$$K_1 = E_{\text{внеш}}. \quad (4-87)$$

Поверхность проводящего цилиндра ($r = r_0$) эквипотенциальна, причем ее потенциал должен совпадать с потенциалом точек плоскости YU , принятым равным нулю.

Из уравнения (4-85) видно, что условие $\varphi = 0$ при $r = r_0$ и при любом θ требует равенства

$$K_2 = -K_1 r_0^2 = -E_{\text{внеш}} r_0^2. \quad (4-88)$$

Окончательные выражения для потенциала и напряженности поля получаются после подстановки найденных постоянных K_1 и K_2 в (4-85) и (4-86):

$$\varphi = E_{\text{внеш}} \left(r - \frac{r_0^2}{r} \right) \cos \theta; \quad (4-89)$$

$$E = E_{\text{внеш}} \left\{ - \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cos \theta \cdot \mathbf{1}_r + \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \sin \theta \cdot \mathbf{1}_\theta \right\}. \quad (4-90)$$

Напряженность поля на поверхности цилиндра ($r = r_0$) равна:

$$E_{\text{пов}} = -2E_{\text{внеш}} \cos \theta \cdot \mathbf{1}_r.$$

Ее наибольшее значение будет при $\theta = 0$ или π ; оно равно удвоенной величине напряженности внешнего поля в отсутствие проводящего цилиндра. Поэтому, например, возникновение грозowego разряда на поверхности провода наземной электрической линии более вероятно, чем в окружающем свободном пространстве.

4-19. ПОЛЕ РАВНОМЕРНО ЗАРЯЖЕННОЙ ОСИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Определим потенциал и напряженность электростатического поля в точке m , отстоящей на расстояние d от равномерно заряженной оси конечной длины l . Линейная плотность заряда τ . Диэлектрическая проницаемость среды ϵ_0 .

Расстояния от точки m до концов оси обозначим r_1 и r_2 .

Расположим оси координат, как показано на рис. 4-20. Заряд бесконечно малого отрезка оси dx равен τdx ; его можно считать точечным. Примем потенциал в бесконечности равным нулю. Тогда обусловленные зарядом τdx значения потенциала и проекций напряженности электрического поля в точке m будут равны:

$$d\varphi = \frac{\tau dx}{4\pi\epsilon_a r} = \frac{\tau dx}{4\pi\epsilon_a \sqrt{d^2 + x^2}}; \quad (4-91)$$

$$dE_x = \frac{\tau dx}{4\pi\epsilon_a r^2} \cos \alpha; \quad dE_y = \frac{\tau dx}{4\pi\epsilon_a r^2} \sin \alpha. \quad (4-92)$$

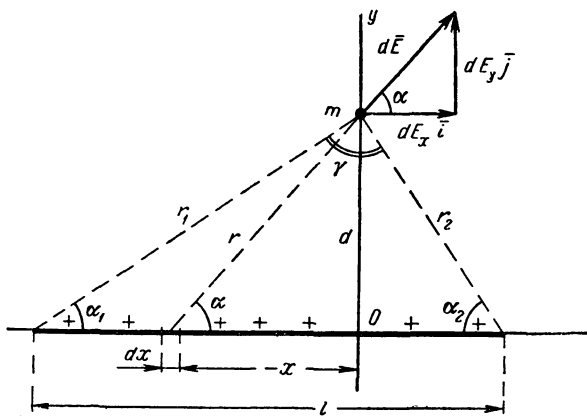


Рис. 4-20. К расчету электростатического поля равномерно заряженного прямого отрезка.

Заменяем по рис. 4-20:

$$r = \frac{d}{\sin \alpha}; \quad x = -d \operatorname{ctg} \alpha; \quad dx = \frac{dd \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

и проинтегрируем (4-91) (4-92) в пределах от $\alpha = \alpha_1$ до $\alpha = \pi - \alpha_2$:

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_a} \ln \left[\operatorname{ctg} \frac{\alpha_1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha_2}{2} \right] = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_a} \ln \frac{r_1 + r_2 + l}{r_1 + r_2 - l}. \quad (4-93)$$

Последнее преобразование проведено по формуле Мольвейде:

$$E_x = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_a d} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1); \quad (4-94)$$

$$E_y = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_a d} (\cos \alpha_2 + \cos \alpha_1); \quad (4-95)$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a d} \sin \frac{\gamma}{2}. \quad (4-96)$$

Эквипотенциальные поверхности должны удовлетворять уравнению $r_1 + r_2 = \text{const}$. Оно является уравнением эллипса. Поскольку все поле имеет осевую симметрию, приходим к выводу, что эквипотенциальными поверхностями будут конфокальные эллипсоиды; фокусы последних расположены по концам заряженной оси. Линии поля всегда нормальны к эквипотенциальным поверхностям, в данном случае они будут конфокальными гиперболами. Нормаль к эллипсу в какой-либо точке m делит пополам угол между радиус-векторами, проведенными из фокусов в данную точку. Следовательно, направление вектора напряженности поля в точке m должно делить пополам угол между линиями r_1 и r_2 , проведенными из концов заряженной оси в точку m .

Напряженность поля в точках, лежащих на продолжениях заряженной оси, имеет, очевидно, лишь x -ю составляющую; для ее вычисления заменим в формуле (4-94):

$$\frac{\sin \alpha_2}{d} = \frac{1}{r_2}; \quad \frac{\sin \alpha_1}{d} = \frac{1}{r_1}.$$

Следовательно,

$$E_{\text{оск}} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_a} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (4-97)$$

4-20. ПОЛЕ КОЛЬЦЕВОГО ЗАРЯДА

Пусть заряд равномерно распределен вдоль тонкой линии, являющейся дугой окружности радиусом R и с центром O (рис. 4-21).

Поле можно рассчитать при помощи простых математических средств только в точках, лежащих на оси, т. е. на линии, проходящей через центр O и перпендикулярной плоскости, в которой лежит

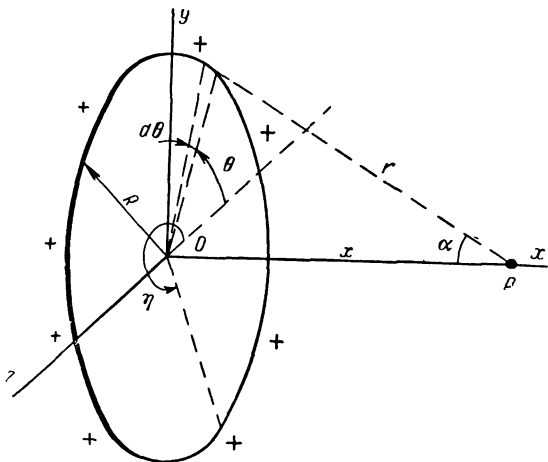


Рис. 4-21. К расчету электростатического поля равномерно заряженного кольца.

заряженная дуга. Вектор \mathbf{E} в таких точках направлен вдоль оси x ($\mathbf{E} = E_x \mathbf{i}$).

Пусть τ будет линейная плотность заряда. Малый заряд $dQ = \tau R d\theta$, рассматриваемый как точечный заряд, определит в точке P следующие величины потенциала и осевой составляющей напряженности поля:

$$d\varphi = \frac{\tau R d\theta}{4\pi\epsilon_a r} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_a} \sin \alpha d\theta; \quad (4-98)$$

$$dE_x = \frac{\tau R d\theta}{4\pi\epsilon_a r^2} \cos \alpha = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_a R} \sin^2 \alpha \cos \alpha d\theta. \quad (4-99)$$

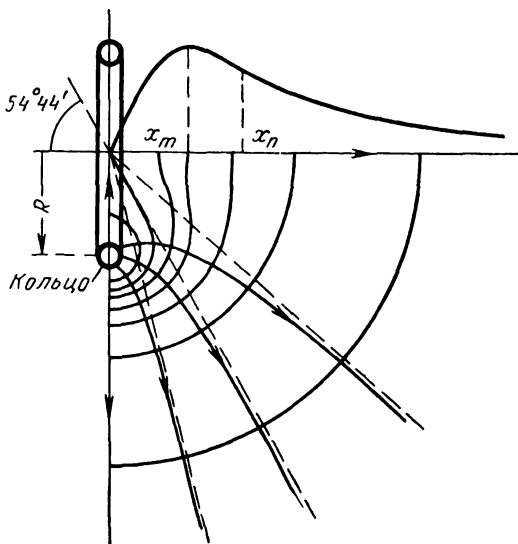


Рис. 4-22. Поле кольцевого заряда.

После интегрирования в пределах от $\theta = 0$ до $\theta = 2\pi$ получим:

$$\varphi = \frac{\tau}{2\epsilon_a} \sin \alpha = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a R} \sin \alpha; \quad (4-100)$$

$$E_{\text{оск}} = E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a R^2} \sin^2 \alpha \cos \alpha. \quad (4-101)$$

На рис. 4-22 показано поле кольцевого заряда, вычерченное с помощью приема, примененного в § 4-9. Тут же показана кривая изменения напряженности поля вдоль оси. Максимум наступает при

$$\operatorname{tg} \alpha_M = \frac{R}{x_M} = \sqrt{2}. \quad (4-102)$$

Абсцисса точки перегиба

$$x_n \approx 1,58R. \quad (4-103)$$

4-21. ПОЛЕ ЗАРЯЖЕННОГО ДИСКА

Пусть заряд $+Q$ распределен равномерно по поверхности диска с плотностью $\sigma = Q/2\pi R^2$ (рис. 4-23). Заметим, что этот диск не может быть проводящим, ибо в таком случае распределение заряда

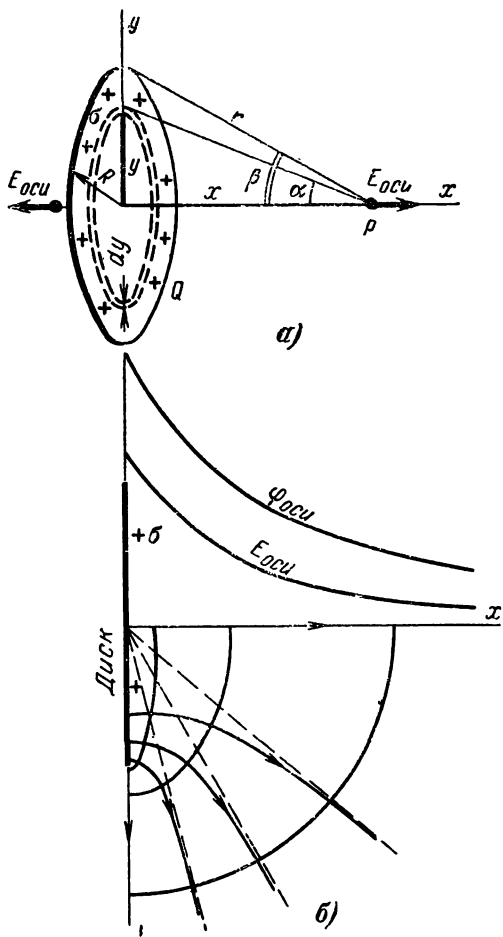


Рис. 4-23. Поле равномерно заряженного диска.

не могло бы быть равномерным. Поле имеет плоскость симметрии, совпадающую с плоскостью диска, и ось симметрии, проходящую через центр диска; последний является центром тяжести заряда. С помощью элементарных математических средств можно рассчитать поле только вдоль оси диска. Представим диск состоящим из

ряда плоских колец толщиной dy (рис. 4-23,а) и используем формулы (4-100) и (4-101), заменив R на $y = x \operatorname{tg} \alpha$, Q — на $dQ = \sigma \cdot 2\pi y dy$ и $dy = x da / \cos^2 \alpha$, где x — расстояние от рассматриваемой точки до центра диска.

Тогда

$$d\varphi = \frac{\sigma x}{2\epsilon_a} \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} da; \quad (4-104)$$

$$dE_{\text{осн}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_a} \sin \alpha da. \quad (4-105)$$

Интегрируя и полагая $\operatorname{arctg} \frac{R}{x} = \beta$ и $\sqrt{R^2 + x^2} = r$, получаем:

$$\varphi = \frac{\sigma x}{2\epsilon_a} \int_0^\beta \frac{-d(\cos \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_a} \left(\frac{1}{\cos \beta} - 1 \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_a} (r - x); \quad (4-106)$$

$$E_{\text{осн}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_a} (1 - \cos \beta). \quad (4-107)$$

В центре диска $x = 0$ и $\beta = \frac{\pi}{2}$; $r = R$. Следовательно,

$$\varphi_{\text{ц}} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_a}; \quad E_{\text{ц}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_a}. \quad (4-108)$$

На рис. 4-23,б показаны несколько линий поля и эквипотенциальных линий, а также кривые изменения величин φ и E вдоль оси диска.

В случае проводящего диска распределение зарядов по поверхности неравномерно вследствие взаимного отталкивания одноименных зарядов. Если проводящий диск рассматривать как предельный случай сплюснутого сфероида, то поверхностная плотность заряда равна [Л. 57]:

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R \sqrt{R^2 - y^2}}. \quad (4-109)$$

В центре диска ($y=0$) эта формула дает значение σ в 2 раза меньше, чем в случае равномерного распределения зарядов.

На краю диска ($y=R$) величина σ стремится к бесконечности; причина в том, что при выводе формулы (4-109) диск считался бесконечно тонким. Во всех же практических случаях край диска закруглен по той или иной кривой и величина σ всегда конечна. Расчет ее следует вести так, как описано в гл. 9 (§ 9-3, п. VI).

Собственная емкость проводящего диска равна:

$$C = 8\epsilon_a R. \quad (4-110)$$

4-22. ЕМКОСТЬ ДВУХ ПРЯМЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРОВОДОВ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Эту задачу решим методом средних потенциалов (по Хоу). Как известно, поверхность каждого проводника в электростатическом поле эквипотенциальна. Распределение плотности заряда по поверхности проводника неравномерно. При применении же метода средних потенциалов принимают не отвечающее действительности предположение о равномерном распределении заряда (подобные предположения принимались выше в § 4-19

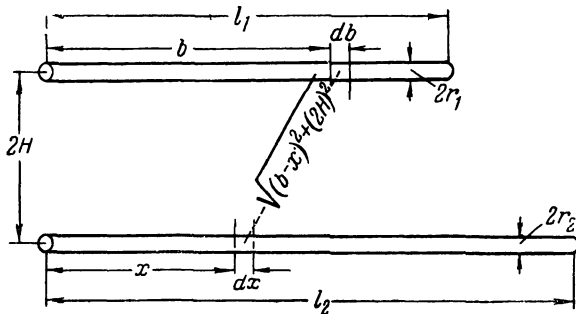


Рис. 4-24. К расчету емкости двух равномерно заряженных параллельных отрезков проводников.

и 4-21). Для расчета емкости определяют среднее значение потенциала на поверхности каждого проводника, найденное на основе сделанного предположения. Получаемые приближенные значения емкости оказываются во многих случаях мало расходящимися с действительными. Причина в том, что неравномерность распределения зарядов обычно заметно сказывается лишь вблизи концов или мест острого изгиба проводников. Поэтому метод средних потенциалов, требующий сравнительно несложных вычислений получил распространение в расчетах емкости систем параллельных проводов, многопроводных антенн и т. п.

Найдем емкость двух прямых параллельных цилиндрических проводов разных длин l_1 и l_2 и с радиусами r_1 и r_2 . Расстояние между осями проводов $2H$ (рис. 4-24). Пусть нижний провод заряжен с равномерной линейной плотностью заряда τ_2 . Заряд на малом отрезке провода dx можно считать сосредоточенным на оси отрезка. Определяемый этим зарядом потенциал в точке верхнего

провода, в которой центрирован малый отрезок db , равен:

$$d\varphi_1 = \frac{\tau_2 dx}{4\pi\epsilon_a \sqrt{(b-x)^2 + (2H)^2}}. \quad (4-111)$$

Полное значение потенциала в этой точке, определяемое всем зарядом нижнего провода, равно:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\tau_2}{4\pi\epsilon_a} \int_0^{l_2} \frac{dx}{\sqrt{(b-x)^2 + (2H)^2}} = \\ &= \frac{\tau_2}{4\pi\epsilon_a} \left(\operatorname{Arsh} \frac{b}{2H} + \operatorname{Arsh} \frac{l_2 - b}{2H} \right). \end{aligned} \quad (4-112)$$

Среднее значение потенциала вдоль верхнего провода

$$\varphi_{1cp} = \frac{1}{l_1} \int_0^{l_2} \varphi_1 db. \quad (4-113)$$

Выполнив интегрирование, получим:

$$\begin{aligned} \varphi_{1cp} &= \frac{\tau_2}{4\pi\epsilon_a} \left\{ \operatorname{Arsh} \frac{l_1}{2H} + \frac{l_2}{l_1} \operatorname{Arsh} \frac{l_2}{2H} - \left(\frac{l_2}{l_1} - 1 \right) \operatorname{Arsh} \frac{l_2 - l_1}{2H} + \right. \\ &+ \frac{2H}{l_1} + \sqrt{\left(\frac{2H}{l_1} \right)^2 + \left(\frac{l_2}{l_1} - 1 \right)^2} - \left[\sqrt{\left(\frac{2H}{l_1} \right)^2 + 1} + \right. \\ &\left. \left. + \sqrt{\left(\frac{2H}{l_1} \right)^2 + \left(\frac{l_2}{l_1} \right)^2} \right] \right\} = \frac{\tau_2}{4\pi\epsilon_a} N. \end{aligned} \quad (4-114)$$

Потенциальный коэффициент a_{12} , связывающий потенциал верхнего провода с зарядом нижнего, равен:

$$a_{12} = \frac{\varphi_{1cp}}{\tau_2 l_2}. \quad (4-115)$$

Потенциальный коэффициент a_{22} , связывающий потенциал нижнего провода с его же зарядом, можно найти, сосредоточив мысленно весь заряд провода на его оси и вычислив средний потенциал, наведенный этим зарядом на поверхности провода. Для этого расчета используем (4-114) и (4-115), положив в них $l_1 = l_2$ и за-

менив размер $2H$ на r_2 ,

$$a_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a l_2} \left\{ \text{Arsh} \frac{l_2}{r_2} + \frac{r_2}{l_2} - \sqrt{\left(\frac{r_2}{l_2}\right)^2 + 1} \right\}. \quad (4-116)$$

Потенциальный коэффициент a_{11} , связывающий потенциал верхнего провода с его зарядом $\tau_1 l_1$, будет выражаться такого же вида формулой, в которой размеры l_2 и r_2 следует заменить на l_1 и r_1 ,

$$a_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a l_1} \left\{ \text{Arsh} \frac{l_1}{r_1} + \frac{r_1}{l_1} - \sqrt{\left(\frac{r_1}{l_1}\right)^2 + 1} \right\}. \quad (4-117)$$

Для расчета емкости применим уравнения (3-29):

$$\varphi_1 = a_{11}\tau_1 l_1 + a_{12}\tau_2 l_2; \quad (4-118)$$

$$\varphi_2 = a_{12}\tau_1 l_1 + a_{22}\tau_2 l_2. \quad (4-119)$$

При расчете емкости между проводами их заряды следует полагать одинаковыми по величине и разными по знаку

$$q_1 = \tau_1 l_1 = -q_2 = -\tau_2 l_2 = q. \quad (4-120)$$

Величина емкости равна:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{1}{a_{11} + a_{22} - 2a_{12}}. \quad (4-121)$$

Если радиусы и длины проводов одинаковы ($r_1 = r_2 = r$; $l_1 = l_2 = l$, причем $l \gg r$ и $l \gg 2H$), то

$$a_{12} \approx \frac{1}{2\pi\epsilon_a l} \left\{ \text{Arsh} \frac{l}{2H} - 1 \right\}. \quad (4-122)$$

С другой стороны,

$$\text{Arsh} \frac{l}{2H} = \ln \left(\frac{l}{2H} + \sqrt{\left(\frac{l}{2H}\right)^2 + 1} \right) \approx \ln \frac{l}{H}.$$

Тогда

$$a_{12} \approx \frac{1}{2\pi\epsilon_a l} \left(\ln \frac{l}{H} - 1 \right). \quad (4-123)$$

Таким же путем выводим приближенное значение для потенциального коэффициента $a_{11} = a_{22}$

$$a_{11} = a_{22} \approx \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \left(\operatorname{Arsh} \frac{l}{r} - 1 \right) \approx \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \left(\ln \frac{2l}{r} - 1 \right). \quad (4-124)$$

Подставляя приближенные значения a_{11} , a_{22} и a_{12} в уравнение (4-121), получаем известную ранее формулу емкости двухпроводной линии (4-54).

4-23. СОБСТВЕННАЯ ЕМКОСТЬ УЕДИНЕННОГО ПРОВОДЯЩЕГО ЦИЛИНДРА

Собственная емкость уединенного цилиндра длиной l и радиусом r приближенно равна обратной величине потенциального коэффициента, связывающего заряд цилиндра со средним потенциалом его поверхности,

$$C_{\text{соб}} = \frac{1}{a_{11}}. \quad (4-125)$$

Используя выражение (4-117), получаем:

$$C_{\text{соб}} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\operatorname{Arsh} \frac{l}{r} + \frac{r}{l} - \sqrt{\left(\frac{r}{l}\right)^2 + 1}}. \quad (4-126)$$

В случае длинного тонкого цилиндра (проволока, $l \gg r$)

$$C_{\text{соб}} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\operatorname{Arsh} \frac{l}{r} - 1} \approx \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{2l}{r}}. \quad (4-127)$$

4-24. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ДВУХПРОВОДНОЙ ЛИНИИ, ПОДВЕШЕННОЙ ВЕЛИЗИ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть в общем случае провода A и B подвешены на разных высотах над землей H_A и H_B (рис. 4-25). Комбинируя метод наложения с принципом замены эквипотенциальной поверхности бесконечно тонким проводящим листом, строим зеркальные изображения проводов A' и B' на таких же глубинах под землей. Получается поле двух пар заряженных проводов AA' и BB' .

Предположим, что радиус сечения проводов r мал по сравнению с H_A и H_B , так что электрические оси можно считать совпадающими с геометрическими осями проводов.

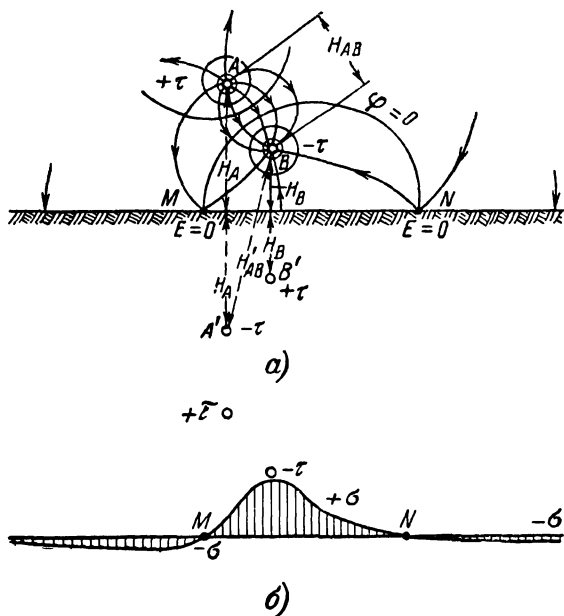


Рис. 4-25. Электростатическое поле двухпроводной линии, подвешенной вблизи земной поверхности.

Составляем уравнения типа (3-29) для потенциалов проводов A и B :

$$\Phi_A = a_{AA}\tau_A + a_{AB}\tau_B; \quad (4-128)$$

$$\Phi_B = a_{BA}\tau_A + a_{BB}\tau_B. \quad (4-129)$$

Здесь $\tau_A = -\tau_B = \tau$ — заряды проводов; a_{AA} и a_{BB} — потенциальные коэффициенты, вычисляемые исходя из формулы (4-45), для $H \approx h$:

$$a_{AA} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{2H_A}{r}; \quad a_{BB} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{2H_B}{r}; \quad (4-130)$$

$a_{AB} = a_{BA}$ — потенциальный коэффициент, определяемый исходя из формулы (4-39),

$$a_{AB} = a_{BA} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{H_{A'B}}{H_{AB}}, \quad (4-131)$$

где H_{AB} — расстояние между проводами;

$H_{A'B}$ — расстояние между одним из проводов и зеркальным изображением другого провода.

Емкость между проводами на единицу длины линии определится по формуле

$$\begin{aligned} C' &= \frac{\tau}{\varphi_A - \varphi_B} = \frac{1}{a_{AA} + a_{BB} - 2a_{AB}} = \\ &= \frac{2\pi\epsilon_a}{\ln \frac{4H_A H_B H_{AB}^2}{r^2 H_{A'B}^2}}. \end{aligned} \quad (4-132)$$

Если провода подвешены очень высоко, то $H_A \approx H_B \approx 1/2 H_{A'B}$ и формула (4-132) обратится в формулу (4-54).

На рис. 4-25,б показана также кривая поверхностной плотности наведенных на земной поверхности зарядов. Вычисление делалось по формуле (4-72) при $H \approx h$ для каждого провода в отдельности; результаты складывались алгебраически. Существуют две линии ветвления на земной поверхности, проходящие соответственно через точки M и N , напряженность поля и поверхностная плотность наведенных зарядов в которых равны нулю.

4-25. ПОЛЕ ЛИНЕЙНОГО ЗАРЯДА, РАСПОЛОЖЕННОГО ВБЛИЗИ ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЫ ДВУХ СРЕД

Очень тонкий цилиндр с линейно распределенным зарядом $+\tau$ помещен на небольшом расстоянии h от поверхности раздела двух сред, имеющих диэлектрические проницаемости ϵ_{a1} и ϵ_{a2} (рис. 4-26). Задача построения поля может быть решена путем помещения на таком же расстоянии h по другую сторону поверхности раздела линейного заряда-изображения $-\tau_2$ и наложения на действительный заряд $+\tau$ дополнительного заряда-изображения $+\tau_1$, равного заряду τ_2 по абсолютной величине.

Заряды-изображения не должны учитываться при

вычислении поля в той среде, где данное изображение помещено. Так, поле в среде ϵ_{a2} задается зарядами $+\tau$ и $+\tau_1$, а поле в среде ϵ_{a1} — зарядами $+\tau$ и $-\tau_2$. Таким образом, линии поля в среде ϵ_{a2} радиальны по отношению к $+\tau$; в среде же ϵ_{a1} линии поля изогнуты, поскольку они заданы системой двух разноименных линейных зарядов, в общем случае разной величины $+\tau$ и $-\tau_2$.

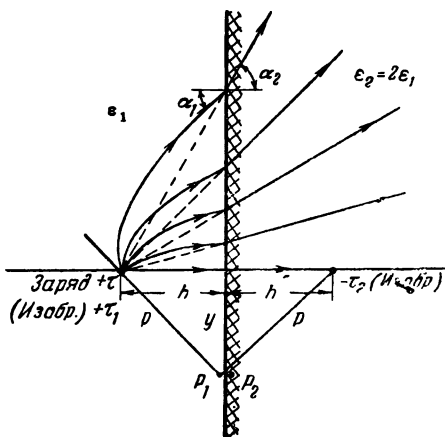


Рис. 4-26. Электростатическое поле оси с линейным зарядом $+\tau$, находящейся вблизи плоскости раздела двух диэлектриков.

Для вычисления $|\tau_1|$ и $|\tau_2|$ используются нормальные граничные условия (см. § 3-12):

$$E_{1t} = E_{2t}; \quad D_{1n} = \epsilon_{a1} E_{1n} = D_{2n} = \epsilon_{a2} E_{2n}. \quad (4-133)$$

Рассмотрим две точки P_1 и P_2 , лежащие с разных сторон граничной поверхности в непосредственной близости к ней.

Для расчетов используем (4-8):

в точке P_1

$$E_{1t} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_{a1}p} \frac{y}{p} - \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_{a1}p} \frac{y}{p} = \frac{y}{2\pi\epsilon_{a1}p^2} (\tau - \tau_2);$$

$$D_{1n} = \frac{\tau}{2\pi p} \frac{h}{p} + \frac{\tau_2}{2\pi p} \frac{h}{p} = \frac{h}{2\pi p^2} (\tau + \tau_2);$$

в точке P_2

$$E_{2t} = \frac{\tau + \tau_1}{2\pi\epsilon_{a2}p} \frac{y}{p};$$

В любой точке p этой поверхности

$$\varphi = 0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_a r_2}.$$

Отсюда следует:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{Q}{q} = K \text{ (постоянная).}$$

Это уравнение сферической поверхности, которая является геометрическим местом точек в пространстве, отношение расстояний от которых до пары заданных точек — величина постоянная.

В точке p'

$$\frac{r_1}{r_2} = K = \frac{f - R}{R - s}.$$

В точке p''

$$\frac{r_1}{r_2} = K = \frac{f + R}{R + s}.$$

Эта система двух уравнений решается относительно неизвестных K и s :

$$s = \frac{R^2}{f}; \quad (4-135)$$

$$K = \frac{f}{R}. \quad (4-136)$$

Таким образом, сферическая проводящая поверхность с нулевым потенциалом может быть заменена зарядом-изображением

$$q = -\frac{Q}{K} = -Q \frac{R}{f}, \quad (4-137)$$

находящимся на расстоянии s от центра сферы, определяемом уравнением (4-135). Напряженность поля в какой-либо точке p на поверхности сферической оболочки имеет две составляющие:

а) от заряда $+Q$, направленную по линии r_1 ,

$$E_{r_1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a r_1^2}; \quad (4-138)$$

б) к заряду $-q$, направленную по линии r_2 ,

$$E_{r_2} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_a r_2^2}. \quad (4-139)$$

Отношение абсолютных значений этих составляющих

$$\frac{|E_{r_2}|}{|E_{r_1}|} = \frac{qr_1^2}{Qr_2^2} = K.$$

Геометрическую сумму E_{r_1} и E_{r_2} , т. е. полное значение напряженности поля E в точке p , проще всего найти

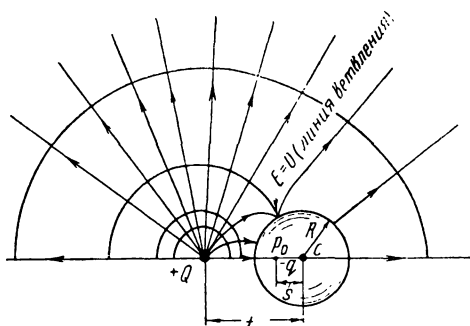


Рис. 4-28. Электростатическое поле точечного заряда $+Q$ и проводящей изолированной сферы.

из подобия треугольника напряженностей треугольнику Qpp_0

$$\frac{E}{E_{r_1}} = \frac{(Qp_0)}{(pp_0)} = \frac{f-s}{r_2}. \quad (4-140)$$

Вектор E направлен, конечно, по нормали к сферической поверхности.

Рассматриваемая сфера может иметь любой потенциал $\varphi_{ш}$, отличающийся от нуля, если отключить заземление и поместить в ее центре заряд $\pm Q'$,

$$\pm \varphi_{ш} = \frac{\pm Q'}{4\pi\epsilon_a R}. \quad (4-141)$$

Полный заряд сферы станет равным:

$$Q_{\text{ш}} = -q + Q'.$$

В случае изолированной сферы $Q' = +q$ и поле получит вид, показанный на рис. 4-28.

4-27. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ДВУХ ПРОВОДЯЩИХ ШАРОВ

Измерение высоких напряжений в воздухе часто делается посредством постепенного приближения друг к другу двух металлических шаров, пока не произойдет между ними искровой заряд.

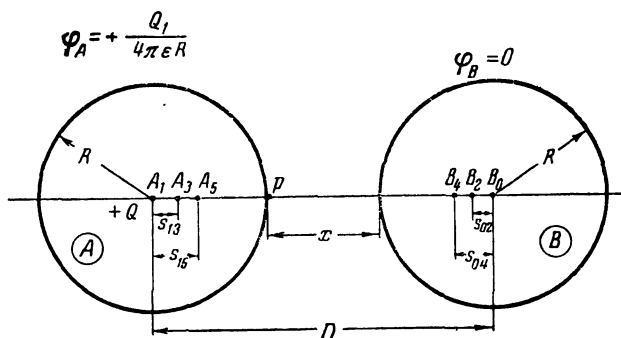


Рис. 4-29. К расчету электростатического поля двух заряженных проводящих шаров.

Задача о поле двух таких шаров может быть приближенно решена с помощью многократных электрических изображений (рис. 4-29). Предположим, что радиусы обоих шаров одинаковы и равны R .

Обозначим отношение расстояния между центрами шаров D к радиусу шара R через K

$$K = \frac{D}{R}. \quad (4-142)$$

Дадим шаровой поверхности A положительный потенциал, а поверхности B — потенциал, равный нулю; для этого сделаем серию операций:

а) Поместим заряд $+Q_1$ в центр шара A ; благодаря этому установятся потенциалы: на шаровой поверхности A

$$\varphi_A = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R};$$

на шаровой поверхности B

$$\varphi_B = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 D}.$$

б) Поместим внутрь шара B заряд Q_2 , являющийся изображением заряда Q_1 в поверхности шара B .

По уравнению (4-137) величина этого заряда $Q_2 = -Q_1/K$; этот заряд должен быть помещен в точку B_2 , находящуюся от центра шара B на расстоянии, определяемом по уравнению (4-135),

$$s_{02} = \frac{R^2}{D} = \frac{R}{K}.$$

Теперь потенциал φ_B делается равным нулю.

Потенциал же φ_A получит значение

$$\varphi_A = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 (D - R - s_{02})}.$$

в) Поместим внутрь шара A заряд Q_3 , являющийся изображением заряда Q_2 в поверхности шара A . Величина этого заряда должна быть:

$$Q_3 = -Q_2 \frac{R}{D - s_{02}} = Q_1 \frac{1}{K^2 - 1}.$$

Его следует поместить в точку A_3 , находящуюся от центра шара A на расстоянии

$$s_{13} = \frac{R^2}{D - s_{02}} = \frac{RK}{K^2 - 1} = \frac{D}{K^2 - 1}.$$

Теперь потенциал φ_A приобретает свое первоначальное значение

$$\varphi_A = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R};$$

потенциал же φ_B делается равным

$$\varphi_B = \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 (D - R - s_{13})}.$$

г) Чтобы сделать потенциал φ_B вновь равным нулю, внутри шара B поместим заряд Q_4 , являющийся изображением заряда Q_3 ,

$$Q_4 = -Q_3 \frac{R}{D - s_{13}} = -Q_1 \frac{1}{K(K^2 - 2)}.$$

Точка размещения этого заряда B_4 должна находиться на расстоянии s_{04} от центра шара B

$$s_{04} = \frac{R^2}{D - s_{13}} = \frac{R}{K} \frac{(K^2 - 1)}{(K^2 - 2)}.$$

Потенциал φ_A делается теперь равным

$$\varphi_A = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q_4}{4\pi\epsilon_0 (D - R - s_{04})}.$$

д) Для компенсации происшедшего увеличения φ_A внутри шара A помещается заряд Q_5 , являющийся изображением Q_4 , и т. д.

Для того чтобы получить $\varphi_A = Q_1/4\pi\epsilon_0 R$ и $\varphi_B = 0$, потребуется, вообще говоря, бесконечное число зарядов-изображений. Однако величины зарядов-изображений делаются все меньше и меньше; при значительном расстоянии между шарами D вполне достаточно учесть лишь небольшое число изображений и пренебречь всеми остальными.

Можно представить такую же систему изображений с обратными знаками зарядов, обеспечивающую потенциалы

$$\varphi_A = 0 \text{ и } \varphi_B = -\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Наложив друг на друга обе системы зарядов-изображений, получим, что напряжение между шарами будет равно:

$$U = \varphi_A - \varphi_B = \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 R}. \quad (4-143)$$

Полный заряд шара A представляет собой сумму зарядов-образжений $Q_1 + Q_3 + Q_5 + \dots$ и ^{взятых с обратными знаками} величин образжений $-Q_2 - Q_4 - Q_6 - \dots$. Такой же величины заряд обратного знака будет у шара B . Опуская громоздкие промежуточные вычисления, приведем окончательную формулу (по Аттвуду [Л. 70]):

$$Q_A = -Q_B = \\ = Q_1 \left(1 + \frac{1}{K} + \frac{1}{K^2} + \frac{1}{K^3} + \frac{2}{K^4} + \frac{3}{K^5} + \dots \right) = CU. \quad (4-144)$$

Отсюда определяется емкость системы двух шаров C .

Наибольшая напряженность поля получается в точке p (рис. 4-29); ее величина рассчитывается по методу наложения; однако при близости шаров друг к другу вычисления получаются громоздкими. Поэтому приводим одну из практических формул (по Пику):

$$E_p \approx \frac{U}{4x} \left(1 + \frac{x}{R} + \sqrt{\left(1 + \frac{x}{R} \right)^2 + 8} \right), \quad (4-145)$$

где $x = D - 2R$ — просвет между поверхностями шаров.
Формула действительна в пределах

$$0 \leq \frac{x}{R} \leq 2.$$

Более подробные расчеты электростатического поля двух заряженных проводящих шаров (включая общий случай шаров с разными радиусами) можно найти, например, в [Л. 10 и 43].

Приведем некоторые из формул для шаров с одинаковыми радиусами (в обозначениях рис. 4-29).

1) Частичные емкости (§ 3-11):

$$C_{AA} = C_{BB} = 4\pi\epsilon_a R \operatorname{sh} \mu \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} (2n+1) \mu} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} 2(n+1) \mu} \right); \quad (4-146)$$

$$C_{AB} = C_{BA} = 4\pi\epsilon_a R \operatorname{sh} \mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} 2(n+1) \mu}, \quad (4-147)$$

где

$$\mu = \frac{1}{2} \operatorname{Arsh} \left(\frac{D^2}{2R^2} - 1 \right). \quad (4-148)$$

2) Коэффициенты в формулах расчета наибольшей напряженности поля (приведенных ниже):

$$\psi_{11} = 1 + \operatorname{sh} \mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} (2n+1) \mu + \operatorname{sh} 2n\mu}{[\operatorname{sh} (2n+1) \mu - \operatorname{sh} 2n\mu]^2}; \quad (4-149)$$

$$\psi_{12} = \operatorname{sh} \mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} 2(n+1) \mu + \operatorname{sh} (2n+1) \mu}{[\operatorname{sh} 2(n+1) \mu - \operatorname{sh} (2n+1) \mu]^2}. \quad (4-150)$$

3) Емкость системы C и наибольшая напряженность поля на поверхности шара E_{\max} в отдельных случаях:

а) один из шаров заземлен ($\varphi_A = U$; $\varphi_B = 0$)

$$C = C_{AA} + C_{AB}; \quad (4-151)$$

$$E_{\max} = \frac{U}{R} \psi_{11}; \quad (4-152)$$

б) потенциалы шаров одинаковы по величине, но разных знаков ($\varphi_A = +\frac{U}{2}$; $\varphi_B = -\frac{U}{2}$)

$$C = \frac{1}{2} C_{AA} + C_{AB}; \quad (4-153)$$

$$E_{\max} = \frac{U}{2R} (\psi_{11} + \psi_{12}); \quad (4-154)$$

в) оба шара заряжены; их потенциалы одинаковы ($\varphi_A = \varphi_B = \varphi$; $Q_1 = Q_2 = Q$).

Собственная емкость системы (емкость по отношению к бесконечно удаленному другому электроду)

$$C = \frac{2Q}{\varphi} = 2C_{AA}. \quad (4-155)$$

Если шары соприкасаются, то $D = 2R$;

$$C = 8\pi\epsilon_0 R \ln 2; \quad (4-156)$$

$$E_{\max} = \frac{\varphi}{R} (\psi_{11} - \psi_{12}). \quad (4-157)$$

4-28. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ЛИНИИ ИЗ РАСЩЕПЛЕННЫХ ПРОВОДОВ

Пусть каждый составной провод состоит из двух цилиндрических проводников с одинаковым радиусом r и с расстоянием между осями $2H$ (рис. 4-30). Влиянием земли будем пренебрегать, полагая, что высота подвеса достаточно велика.

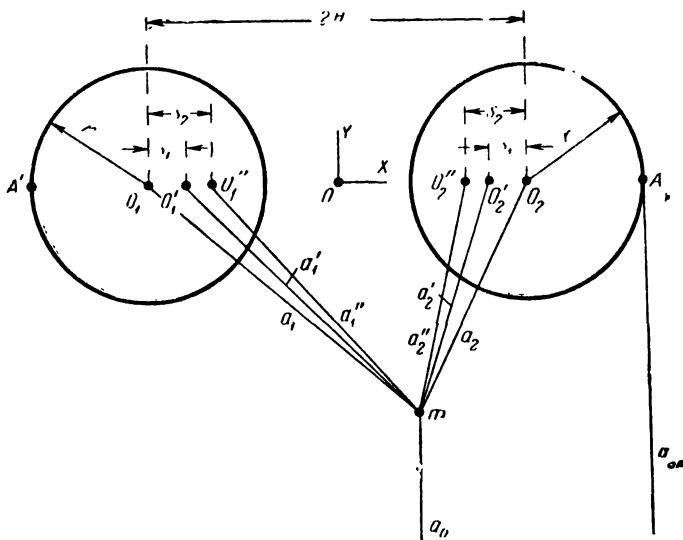


Рис. 4-30. К расчету электростатического поля линии из расщепленных проводов.

Расчет электростатического поля системы можно сделать с помощью многократных электрических изображений, использованных в задаче о поле двух проводящих шаров (§ 4-27). В данном случае придется рассматривать изображения линейных зарядов в цилиндрической поверхности. Можно доказать, что и в этом случае радиус отражающей поверхности должен быть средним геометрическим расстояний от ее оси до заряженной оси-оригинала и до оси-изображения. Величины заряда и его изображения одинаковы. Граничным условием является равенство и неизменность потенциалов обоих проводников. Поместим на оси каждого провода O_1 и O_2 некоторый заряд q_0 . Чтобы учесть взаимное влияние про-

водов, поместим в точку O'_2 в толще правого проводника след заряда-изображения $-\tau_0$ к заряду τ_0 левого проводника. Положение точки O'_2 находится из соотношения

$$s_1 = \frac{r^2}{2H}. \quad (4-158)$$

Для восстановления прежней величины общего заряда правого проводника придется поместить на его ось дополнительный заряд τ_0 . Получившаяся система зарядов: τ_0 на оси левого проводника O_1 , его изображение $-\tau_0$ в толще правого проводника и $2\tau_0$ — на оси последнего O_2 — обеспечит на поверхности правого проводника то же значение потенциала, которое существовало бы в отсутствие взаимного влияния проводников.

Поместим такие же заряды-изображения в левый проводник в целях компенсации влияния на него основного заряда правого проводника.

Система зарядов: $2\tau_0$ на оси каждого из проводников и $-\tau_0$ в побочных осях, следами которых являются точки O'_1 и O'_2 , будет первым приближением к решению поставленной задачи. Внесение зарядов-изображений нарушило условие неизменности потенциала проводников. Попытаемся это скомпенсировать помещением в проводники дополнительных зарядов-изображений к зарядам, вызвавшим нарушение.

Пусть точка O'_2 станет теперь следом заряда-изображения к полному заряду $2\tau_0$, имеющемуся на оси левого проводника, а точка O''_2 станет следом заряда-изображения к заряду $-\tau_0$, след которого находится в точке O'_1 в толще левого проводника. Аналогичные заряды-изображения следует внести и в толщу левого проводника.

Местоположение точки O''_2 находится из соотношения

$$s_2 = \frac{r^2}{2H - s_1} = \frac{r^2}{2H - \frac{r^2}{2H}}. \quad (4-159)$$

В результате в качестве второго приближения к условиям поставленной задачи следует учитывать заряды: $2\tau_0$ на геометрических осях обоих проводников, $-2\tau_0$ в точках O'_1 и O'_2 , τ_0 в точках O''_1 и O''_2 .

Продолжая подобные операции, можно получить более точные третье, четвертое и т. д. приближения.

Заметим, что практически достаточно ограничиться вторым, а иногда даже и первым приближением. Действительно, при $r/2H \approx 0,1$ разность расстояний $s_2 - s_1$ приблизительно равна:

$$s_2 - s_1 = \frac{r^2}{2H - \frac{r^2}{2H}} - \frac{r^2}{2H} \approx \frac{r^2}{2H} \frac{\frac{r^2}{4H^2}}{1 - \frac{r^2}{4H^2}} \approx$$

$$\approx 0,01 \frac{r^2}{2H} = 0,001r.$$

Столь небольшой величиной в большинстве практических расчетов можно пренебречь.

Потенциал в произвольной точке m (рис. 4-30) можно рассчитать по формуле, составленной на основе (4-9) и (4-39) с использованием принципа наложения (3-29):

$$\varphi_m = \frac{\tau_0}{2\pi\epsilon_a} \left(2 \ln \frac{a'_2}{a_1} + 2 \ln \frac{a'_1}{a_2} + \ln a''_1 + \ln a''_2 + \text{const} \right). \quad (4-160)$$

Величина постоянной зависит от выбора начала отсчета потенциала. Примем ее равной $-2 \ln a_0$, где a_0 — расстояние от рассматриваемой точки до поверхности земли или заземленного предмета, потенциал которого принимается равным нулю. Тогда

$$\varphi_m = \frac{\tau_0}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{a_2'^2 a_1'^2 a''_1 a''_2}{a_1^2 a_2^2 a_0^2}. \quad (4-161)$$

Применим эту формулу для записи значения потенциала в одной из точек на поверхности проводов, например в точке A ,

$$\varphi_A = \frac{\tau_0}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{(r + s_1)^2 (2H + r - s_1)^2 (2H + r - s_2) (r + s_2)}{(2H + r)^2 r^2 a_{oA}^2}. \quad (4-162)$$

Если величина потенциала на поверхности проводов задана, то из формулы (4-162) находится величина погонного заряда τ_0 .

Наибольшая напряженность поля будет в точке A (или в симметрично расположенной точке A'). Ее можно рассчитать на базе (4-8)

$$E_A = \frac{\tau_0}{2\pi\epsilon_a} \left(\frac{2}{r} + \frac{2}{2H+r} - \frac{2}{r+s_1} - \frac{2}{2H+r-s_1} + \frac{1}{r+s_2} + \frac{1}{2H+r-s_2} \right) i. \quad (4-163)$$

При $r < 0,1(2H)$ (4-163) можно значительно упростить, положив $s_2 \approx s_1$ и пренебрегая величинами s_1 и s_2 по сравнению с $2H+r$ в знаменателях четвертого и шестого членов в скобках.

Приближенное значение максимальной напряженности поля в точке A будет равным:

$$E_A \approx \frac{\tau_0}{2\pi\epsilon_a r} \left(2 - \frac{2H-r}{2H+r} \right) i. \quad (4-164)$$

При неограниченном увеличении отношения $2H/r$ выражение (4-164) стремится к формуле для напряженности поля на поверхности одиночного цилиндрического проводника. Поле на значительном удалении от расщепленного провода будет приближаться к полю одиночной заряженной оси, проходящей через центр системы — точку O и несущей заряд обоих проводников $2\tau_0$.

Глава пятая

ПОЛЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

5-1. ОСНОВНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ ПОЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

Плотность тока проводимости или переноса $\bar{\delta}$ — векторная величина, направленная по движению положительных зарядов; значение δ выражает количество зарядов, проходящих в течение 1 сек через малую площадку, перпендикулярную направлению движения зарядов, отнесенное к единице ее поверхности. Размерность плотности тока: $\left[\frac{\text{кул/сек}}{\text{м}^2} \right]$ или $[a/\text{м}^2]$.

Величиной электрического тока через какую-либо поверхность является поток вектора плотности тока, взятый по этой поверхности,

$$I = \int_s \bar{\delta} dS. \quad (5-1)$$

Ток является скалярной величиной.

5-2. ТОК ПРОВОДИМОСТИ. ЗАКОН ОМА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Ток проводимости понимается как движение «облака» свободных зарядов в проводящей среде под действием сил электрического поля сквозь ионную решетку, препятствующую движению зарядов; групповая скорость такого облака зарядов в металлических проводниках бывает порядка нескольких сантиметров в секунду; скорость отдельных заряженных частиц, составляющих облако, может быть довольно большой, порядка до 10^6 м/сек.

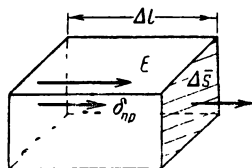


Рис. 5-1. Векторные величины поля электрического тока.

Представим себе малый параллелепипед с ребром Δl расположенным по направлению движения зарядов, имеющий площадь поперечного сечения Δs (рис. 5-1). Движение зарядов происходит под действием электрического поля. Вектор напряженности поля E совпадает по направлению с вектором плотности тока проводимости \bar{j}_{np} .

Выберем размеры параллелепипеда Δl и Δs настолько малыми, чтобы значения E и \bar{j}_{np} в его пределах можно было считать постоянными.

Тогда величина тока

$$\Delta I = \bar{j}_{np} \Delta s.$$

Напряжение, действующее вдоль ребра Δl ,

$$\Delta U = E \Delta l.$$

Проводимость параллелепипеда определится из соотношения

$$G = \frac{\Delta I}{\Delta U} = \frac{\bar{j}_{np} \Delta s}{E \Delta l}.$$

С другой стороны, проводимость можно определить по известной формуле

$$G = \frac{1}{R} = \gamma \frac{\Delta s}{\Delta l},$$

где γ — удельная проводимость материала, [1/ом·м].

Сравнение двух последних формул приводит к зависимости, называемой законом Ома в дифференциальной форме,

$$\bar{\delta}_{\text{пр}} = \gamma E. \quad (5-2)$$

Закон Ома применим к металлическим и многим жидкостным проводникам с постоянным значением удельной проводимости; однако его нельзя применять к нелинейным средам, как, например, карборунд, уголь; закон Ома нельзя также применять к прохождению электрических зарядов через газы и вакуум (к току переноса).

5-3. ПЕРВЫЙ ЗАКОН КИРХГОФА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Рассмотрим некоторый объем внутри проводника (рис. 5-2), окруженный замкнутой поверхностью s ; через одну часть этой поверхности s_1 заряды входят в объем, через другую ее часть s_2 такое же количество зарядов выходит из объема. В условиях установившегося режима общее количество зарядов, заключенных в рассматриваемом объеме, постоянно.

Следовательно, поток вектора плотности тока проводимости по замкнутой поверхности равен нулю

$$\oint \bar{\delta}_{\text{пр}} d\mathbf{s} = 0.$$

Применяем теорему Остроградского—Гаусса

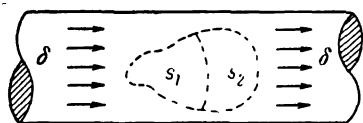


Рис. 5-2. К выводу уравнения непрерывности линий тока.

$$\oint \bar{\delta}_{\text{пр}} d\mathbf{s} = \int_V \nabla \bar{\delta}_{\text{пр}} dV = 0.$$

Поскольку интегрирование проводится по объему конечных размеров, причем равенство нулю сохраняется при любой конечной величине и форме объема, то подынтегральное выражение должно равняться нулю

$$\nabla \bar{\delta}_{\text{пр}} = 0. \quad (5-3)$$

Это первый закон Кирхгофа (точнее, закон Кирхгофа—Ленца) в дифференциальной форме. Он выражает

то, что линия поля плотности установившегося тока проводимости нигде не начинаются и не заканчиваются, т. е. всегда замкнуты; иначе говоря, поле плотности тока проводимости имеет либо соленоидальный, либо смешанный характер.

Уравнение (5-3) называется уравнением непрерывности.

5-4. ТОК СМЕЩЕНИЯ

Допустим, что плотность зарядов ρ внутри объема (рис. 5-2) возрастает по времени со скоростью $\partial\rho/\partial t$. Теперь дивергенция плотности тока проводимости не равна нулю, так как каждый новый элементарный заряд, входящий в объем, является концом или началом линии поля (в зависимости от знака заряда). Поток вектора плотности тока проводимости через замкнутую поверхность, ограничивающую объем, теперь будет равен увеличению количества зарядов в объеме

$$\oint_s \bar{\delta}_{\text{пр}} ds = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

Знак минус указывает, что при возрастании количества зарядов внутри объема поток вектора плотности тока, входящий в объем, больше выходящего.

Заменяем левый интеграл по теореме Остроградского—Гаусса

$$\int_V \nabla \bar{\delta}_{\text{пр}} dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

Оба равных интеграла взяты по одному и тому же объему. Равенство сохраняется при любой конечной величине и форме объема; следовательно, подынтегральные выражения равны друг другу

$$\nabla \bar{\delta}_{\text{пр}} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Применим теорему Гаусса в дифференциальной форме

$$\nabla \bar{\delta}_{\text{пр}} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \mathbf{D} = 0.$$

Поскольку порядок проведения операций дифференцирования не играет роли, меняем местами символ диф-

ференцирования по времени и символ дивергенции; последний выносим за скобки

$$\nabla \left(\bar{\delta}_{\text{пр}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0. \quad (5-4)$$

Это выражение является более общей формой первого закона Кирхгофа. Второй член в скобках представляет собой плотность тока смещения: ее величиной оценивается скорость изменения по времени электрического поля, сопровождаемого таким же магнитным эффектом, как и ток проводимости; в понятие тока смещения обычно включают и ток поляризации, которым оценивается изменение положения зарядов в атомах диэлектриков, происходящее вследствие изменения по времени электрического поля.

Применим формулу (5-2) и сделаем замену $\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}$

$$\nabla \left(\gamma \mathbf{E} + \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0.$$

Выражение в скобках представляет собой полную плотность тока

$$\bar{\delta} = \gamma \mathbf{E} + \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (5-5)$$

Ее поле является вихревым или смешанным, так как дивергенция равна нулю.

Линии полной плотности тока не имеют поэтому ни начал, ни концов, т. е. всегда образуют замкнутые кривые. Простым примером служит цепь зарядки конденсатора от источника постоянной э. д. с. (рис. 5-3). Ток проводимости в соединительных проводах, плотность которого $\bar{\delta}_{\text{пр}}$, доставляет заряды из источника на обкладки конденсатора; в диэлектрике конденсатора нарастает электрическое поле со скоростью $\partial \mathbf{D} / \partial t$, равной плотности тока смещения $\bar{\delta}_{\text{см}}$.

Полная величина тока проводимости в проводах $\int_{s_1} \bar{\delta}_{\text{пр}} d\mathbf{s}_1$ в любой момент времени равна полной величине тока смещения в диэлектрике $\int_{s_2} \bar{\delta}_{\text{см}} d\mathbf{s}_2$; здесь s_1 и s_2 — площади поперечного сечения соответственно проводов и диэлектрика

конденсатора. Ток смещения в диэлектрике замыкает цепь тока проводимости в проводах.

Действительная картина явлений обычно осложняется наличием небольшого тока смещения в несовершенных проводниках и небольшого тока проводимости в несовершенном диэлектрике конденсатора. Однако полный ток в проводах всегда равен полному току в диэлектрике.

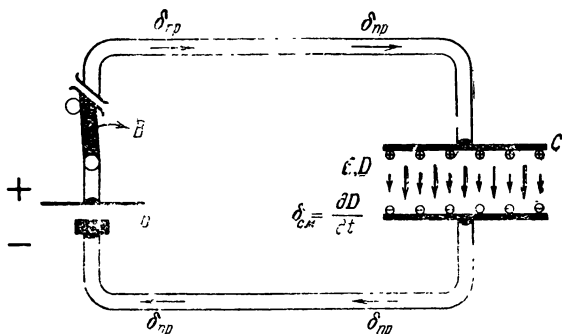


Рис. 5-3. Токи проводимости и смещения при замыкании цепи зарядки конденсатора.

Рассмотрим в качестве примера плоский конденсатор с двумя слоями диэлектрика, каждый толщиной n ; площадь обкладок пусть будет s . Слои диэлектрика имеют удельные проводимости γ_1 и γ_2 и абсолютные диэлектрические проницаемости ϵ_{a1} и ϵ_{a2} .

Геометрическая емкость равна:

$$C_d = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{s}{n} \frac{\epsilon_{a1} \epsilon_{a2}}{\epsilon_{a1} + \epsilon_{a2}}.$$

В начальный момент включения постоянного напряжения на обкладки конденсаторов никаких зарядов σ_{12} на поверхности раздела слоев диэлектрика не существует; векторы смещения в обоих слоях равны друг другу

$$D_1 = \epsilon_{a1} E_1 = D_2 = \epsilon_{a2} E_2.$$

Напряжение между обкладками

$$U = nE_1 + nE_2. \quad (5-6)$$

Решая совместно написанные уравнения, получаем начальные значения напряженности поля в обоих слоях:

$$E_1 = \frac{U}{n} \frac{\epsilon_{a2}}{\epsilon_{a1} + \epsilon_{a2}}; \quad E_2 = \frac{U}{n} \frac{\epsilon_{a1}}{\epsilon_{a1} + \epsilon_{a2}}.$$

Плотности токов проводимости δ_1 и δ_2 в начальный момент не равны друг другу:

$$\delta_1 = \gamma_1 E_1; \quad \delta_2 = \gamma_2 E_2.$$

Неравенство токов в слоях будет служить причиной появления поверхностного заряда σ_{12} (здесь не учитывались токи смещения; если же их принять во внимание, то общие значения токов в слоях равны друг другу в любой момент времени).

Ток зарядки конденсатора i_N быстро спадает до конечного значения i_c , определяемого целиком проводимостью составного диэлектрика (рис. 5-4).

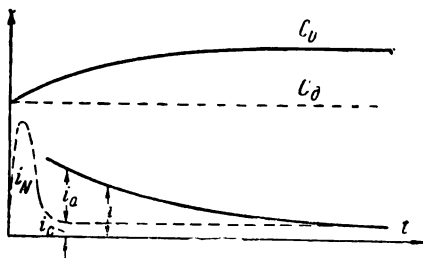


Рис. 5-4. Зарядка конденсатора при наличии проводимости в диэлектрике.

По истечении длительного времени плотности токов в слоях сравниваются, так что установится равенство

$$\gamma_1 E_1 = \gamma_2 E_2.$$

Приложенное напряжение по-прежнему определяется уравнением (5-6).

Совместное решение этих уравнений дает:

$$E_1 = \frac{U}{n} \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}; \quad E_2 = \frac{U}{n} \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2}.$$

Поверхностная плотность заряда на границе между слоями равна:

$$\sigma_{12} = D_2 - D_1 = \epsilon_{a2} E_2 - \epsilon_{a1} E_1 = \frac{U}{n} \frac{\epsilon_{a2} \gamma_1 - \epsilon_{a1} \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}. \quad (5-7)$$

Результирующая емкость C_0 больше геометрической емкости C_d

$$C_0 = C_d + \frac{S \sigma_{12}}{U}. \quad (5-8)$$

В процессе зарядки некоторое количество зарядов сравнительно медленно просачивается к пограничной поверхности, образуя так

называемый ток поглощения i_a , мгновенные значения которого выражаются разностью ординат сплошной и пунктирной линий на рис. 5-4.

Сплошная линия i изображает изменение во времени результирующего тока в конденсаторе. С течением времени ток поглощения прекращается и результирующий ток приближается по величине к установившемуся току проводимости i_c .

5-5. ТОК ПЕРЕНОСА

Примерами тока переноса (конвекции) служат движущийся ремень с зарядами в электростатическом генераторе Ван-де-Граафа и движение электронов от катода к аноду в электронном приборе. Плотность тока переноса равна произведению объемной плотности зарядов ρ на среднюю скорость их движения

$$\bar{\delta}_{\text{пер}} = \rho \mathbf{v}. \quad (5-9)$$

Полный ток в условиях установившегося режима может быть либо током проводимости, либо током переноса; в условиях переходного режима каждый из них может существовать совместно с током смещения. Таким образом, полная плотность тока выражается либо формулой (5-5), либо формулой

$$\bar{\delta} = \rho \mathbf{v} + \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (5-10)$$

Первый закон Кирхгофа $\nabla \bar{\delta} = 0$ сохраняет силу в любом случае.

5-6. ЗАКОН ЛЕНЦА—ДЖОУЛЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Пусть элементарный заряд Δq , содержащийся в параллелепипеде $\Delta l \Delta s$ (рис. 5-1), движется под действием сил электрического поля \mathbf{E} . Сила, движущая заряд, равна $\mathbf{E} dq$.

Работа, совершенная при перемещении заряда на расстояние Δl , равна:

$$\Delta W = E \Delta q \Delta l.$$

Мощность равна:

$$\Delta P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = E \frac{\Delta q}{\Delta t} \Delta l.$$

Отношение $\Delta q/\Delta t$ выражает ток, протекающий в рассматриваемом параллелепипеде и равный $\bar{\delta}\Delta s$.

Заменим также $\Delta/\Delta s = \Delta V$; тогда

$$\Delta P = E\bar{\delta}\Delta V.$$

Деля обе части выражения на объем ΔV и переходя к пределу при неограниченном уменьшении объема, получаем выражение для объемной плотности мощности

$$\lim \frac{\Delta P}{\Delta V} = E\bar{\delta} = \frac{\delta^2}{\gamma} = \gamma E^2. \quad (5-11)$$

Это уравнение выражает закон Ленца—Джоуля в дифференциальной форме.

Потери на тепло в проводящей среде пропорциональны удельной проводимости материала γ и квадрату напряженности электрического поля E^2 .

5-7. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ОСНОВНЫХ ЗАКОНОВ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Электрическое поле внутри проводника E может состоять из двух частей

$$E = E_{\text{стат}} + E_{\text{стор.}}$$

$E_{\text{стат}}$ определяется электрическими зарядами и соответствует электростатическому полю; $E_{\text{стор}}$ (индуктированная и сторонняя составляющая) наводится благодаря электромагнитной индукции или химическому процессу. Первое происходит в машинных генераторах, второе — в химических источниках тока. Кроме того, причинами $E_{\text{стор}}$ могут быть контактная разность потенциалов в месте соприкосновения двух разнородных материалов, термоэлектрический процесс и т. д.

Линейный интеграл вектора индуктированной и сторонней напряженности электрического поля $E_{\text{стор}}$ вдоль некоторого пути $A-B$ называется электродвижущей силой (э. д. с.), действующей на этом пути,

$$\mathcal{E} = \int_A^B E_{\text{стор}} dl. \quad (5-12)$$

Линейный интеграл вектора полной напряженности электрического поля вдоль пути $A—B$ называется электрическим напряжением между точками A и B

$$U = \int_A^B \mathbf{E} \, d\mathbf{l}. \quad (5-13)$$

Величины обоих интегралов зависят от пути интегрирования. Например, в простейшей электрической схеме,

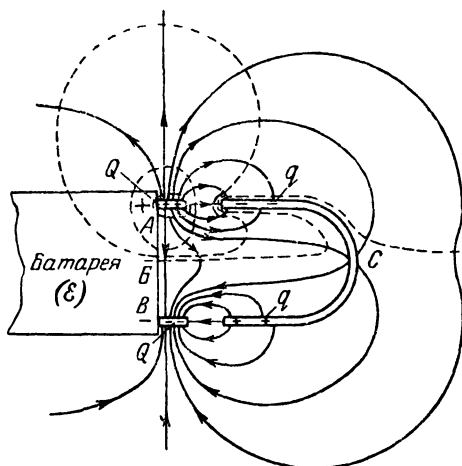


Рис. 5-5. Электрическое поле вблизи полюсов батареи.

содержащей источник э. д. с. \mathcal{E} в режиме холостого хода и показанной на рис. 5-5, значения величин между точками A и B равны:

а) по пути $A—B—B$

$$\mathcal{E} = \int_{A-(B)-}^{-(B)-B} \mathbf{E}_{\text{стор}} \, d\mathbf{l}; \quad U = 0$$

(стороннее поле скомпенсировано полем неподвижных зарядов, накопившихся на зажимах источника);

б) По пути $A-C-B$

$$\mathcal{E} = 0;$$

$$U = \int_{A-(C)-B}^{-(C)-B} E_{\text{стат}} dl.$$

При холостом ходе сторонняя напряженность поля вызывает аккумуляцию зарядов $+Q$ и $-Q$ соответственно на зажимах «+» и «-» источника. При этом создается электростатическое поле $E_{\text{стат}}$, пример которого показан на рис. 5-5. Введение проводника C в поле увеличивает емкость системы между зажимами A и B . Если бы количество зарядов на зажимах оставалось фиксированным, увеличение емкости повлекло бы уменьшение разности потенциалов между зажимами. Однако сторонняя напряженность поля $E_{\text{стор}}$ в источнике произведет дополнительное разделение зарядов и увеличит заряды $+Q$ и $-Q$ на зажимах, пока не установится прежняя разность потенциалов.

Проводник C имеет наведенные поверхностные заряды $+q$ и $-q$. Предположим, что проводник приближается к зажимам батареи. Заряды Q и q будут увеличиваться. Следовательно, в процессе движения проводника будут существовать переходные токи и в источнике и в проводнике. Их цепь замыкается посредством токов смещения в диэлектрике.

Как только проводник C прикоснется к зажимам источника, образуется цепь длительного тока проводимости; заряды $+Q$ и $-q$, а также $-Q$ и $+q$ стремятся взаимно скомпенсироваться. Возникает тенденция к уменьшению разности потенциалов на зажимах, но сторонняя напряженность поля в источнике продолжает продвигать заряды к зажимам. В проводнике C установится напряженность поля $E_{\text{внеш}}$, которая будет продвигать облако свободных зарядов от A через C к B (направление напряженности поля берется по движению положительных зарядов). Это явление считается током проводимости. Этот ток преодолевает препятствующую ему разность электрических потенциалов, определяемую сопротивлением проводника,

$$-\mathcal{E}_R = \int_A^B E_{\text{внеш}} dl = \int_A^B \frac{\bar{\delta}_{\text{нп}}}{\gamma} dl = I \int_A^B \frac{dl}{\gamma_s}. \quad (5-14)$$

Это уравнение выражает закон Ома в интегральной форме. Определенный интеграл в правой части представляет собой сопротивление проводника.

Интегрируя уравнение (5-11) в пределах всего объема проводника, получим:

$$P = \int_V \frac{\delta_{np}^2}{\gamma} dV = I^2 \int_A \frac{dl}{\gamma s}. \quad (5-15)$$

Это уравнение выражает закон Ленца—Джоуля в интегральной форме.

Умножим обе части выражения $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{стат}} + \mathbf{E}_{\text{стор}}$ на $d\mathbf{l}$ и проинтегрируем по всей длине электрической цепи (включая и источник); результат будет представлять собой сумму э. д. с., действующих в цепи, которая, в свою очередь, равна сумме падений напряжения на сопротивлениях,

$$\oint_l \mathbf{E}_{\text{стат}} d\mathbf{l} + \oint_l \mathbf{E}_{\text{стор}} d\mathbf{l} = IR = I \oint_l \frac{dl}{\gamma s}.$$

Электростатическое поле является безвихревым, следовательно, первый интеграл в левой части, представляющий собой циркуляцию вектора $\mathbf{E}_{\text{стат}}$, равен нулю. Таким образом,

$$\mathcal{E} = \oint_l \mathbf{E}_{\text{стор}} d\mathbf{l} = I \oint_l \frac{dl}{\gamma s}. \quad (5-16)$$

Это уравнение выражает второй закон Кирхгофа в интегральной форме. Из него следует, что длительное существование тока возможно только при приложении к цепи сторонней э. д. с. \mathcal{E} .

Распределение зарядов в проводнике, несущем постоянный ток, стационарно, т. е. не меняется по времени. Электрическое поле стационарно распределенных зарядов аналогично электростатическому полю неподвижных зарядов. В частности, вне источников тока электрическое поле имеет скалярный потенциал и подчиняется уравнению Лапласа.

Поле векторов напряженности поля и поле векторов плотности постоянного тока в областях вне источников тока носят смешанный характер.

В заключение отметим, что выражения (5-12), (5-13) и (5-16), вообще говоря, справедливы лишь для покоящихся или медленно движущихся сред, когда с релятивистскими эффектами можно не считаться. Дело в том, что напряженность электрического поля, по определению, характеризует силу, действующую на единичный заряд, покоящийся по отношению к наблюдателю.

В проводнике всегда устанавливается такое распределение тока проводимости, при котором выделяется наименьшее количество тепла. Это распределение определяется законом Ома [уравнение (5-2)]. Доказательство см. в [Л. 57].

5-8. РАСЧЕТ ПРОВОДИМОСТИ ПОЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

Закономерности электростатического поля и поля электрического тока внешне сходны друг с другом:

$Q = CU$ — в электростатическом поле;

$I = GU$ — в поле электрического тока.

В обеих формулах U выражает разность электрических потенциалов. Величина проводимости в поле электрического тока G занимает место, аналогичное емкости C в электростатическом поле. Расчет проводимости можно поэтому производить по формулам, выведенным ранее в гл. 4 для расчета емкости при условии замены величины заряда Q величиной тока I .

Рассмотрим некоторые примеры:

1. Проводимость изоляции коаксиального кабеля. В § 4-12 для емкости коаксиального кабеля была выведена формула (4-34). Проводимость изоляции (предполагая диэлектрик однородным) на 1 м длины кабеля может быть определена по аналогичной формуле

$$G' = \frac{2\pi\gamma}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad [1/\text{ом}\cdot\text{м}]. \quad (5-17)$$

2. Проводимость сферического заземлителя (рис. 5-6,а), зарытого глубоко под поверхностью земли, можно определить при помощи формулы типа (4-11) как

$$G = 4\pi\gamma r. \quad (5-18)$$

Если же электрод зарыт неглубоко, влиянием поверхности земли пренебречь нельзя. Расчет должен делаться по методу зеркальных изображений.

3. Полусферический заземлитель, погруженный вровень с поверхностью почвы (рис. 5-6,б). Проводимость такого заземлителя

будет в 2 раза меньше, чем глубоко зарытого сферического заземлителя с таким же радиусом,

$$G = 2\pi\gamma. \quad (5-19)$$

Вычислим так называемое напряжение шага $U_{ш}$, под которым может оказаться человек, приближающийся к заземлителю. $U_{ш}$ представляет собой разность потенциалов между двумя точками на поверхности почвы, отстоящими на 0,8 м друг от друга и расположенными на одном и том же радиусе, проведенном от центра заземлителя. Предельным значением $U_{ш}$ является напряжение прикосновения $U_{пр}$, под которым может оказаться человек, стоящий на расстоянии 0,8 м от центра заземлителя и касающийся рукой заземленного предмета (например, металлической опоры линии электропередачи).

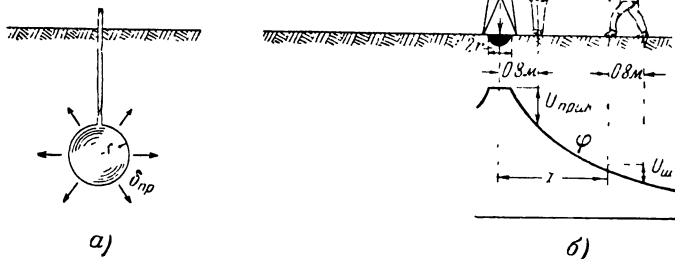


Рис. 5-6. Заземлители. Напряжение шага и напряжение прикосновения.

Положим, что ток растекается равномерно как вглубь, так и во все стороны от заземлителя; тогда плотность тока в какой-либо точке на расстоянии x от центра полусферы заземлителя равна:

$$\delta = \frac{I}{2\pi x^2},$$

где I — полное значение тока, проходящего в землю.

Напряженность поля в той же точке равна:

$$E = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{I}{2\pi\gamma x^2} \text{ [в/м]}.$$

Напряжение шага

$$U_{ш} = \int_x^{x+0,8} E dx = \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+0,8} \right) \text{ [в]}. \quad (5-20)$$

На рис. 5-6,б изображена кривая падения потенциала вдоль земной поверхности и показано графическое определение $U_{ш}$ и $U_{пр}$ по этой кривой.

5-9. РАСЧЕТ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ СОПРОТИВЛЕНИЯ

В ряде случаев вычисление точного значения сопротивления проводников затруднительно. Примерами служат цепи, содержащие жидкие электролиты в электрохимических производствах, «печатные схемы» в радиоаппаратуре, цепи в миниатюрной радиоэлектронной аппаратуре и др.

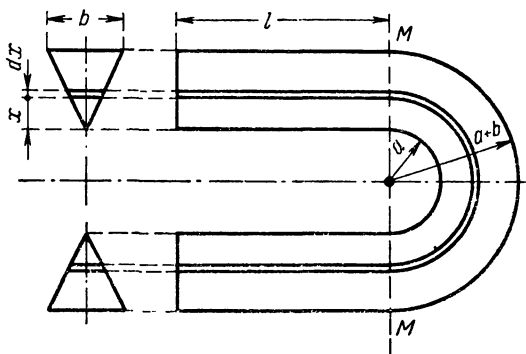


Рис. 5-7. К расчету предельных значений сопротивления.

Рассмотрим подковообразный проводник треугольного сечения из однородного материала с удельной проводимостью γ (рис. 5-7). Допустим для простоты, что по проводнику проходит постоянный ток. Плотность тока будет распределена по сечению равномерно лишь вдали от места изгиба. В закругленной части проводника (справа от линии MM') распределение плотности тока будет, очевидно, неравномерным вследствие того, что длины отрезков линий поля с меньшим радиусом короче соответствующих им отрезков с большими радиусами. Это, в свою очередь, вызовет в силу непрерывности линий поля неравномерность распределения плотности тока и в прямолинейных частях, прилегающих к закругленным. Последнее обстоятельство всего труднее поддается учету.

В подобных задачах нередко приходится довольствоваться расчетом верхнего и нижнего предельных значений, между которыми лежит истинное значение сопротивления.

Чтобы найти верхнее предельное значение сопротивления, вообразим, что проводник составлен из очень тонких проводящих слоев dx , разделенных бесконечно тонкими изолирующими прослойками.

Токи представляются протекающими по прямым линиям и полуокружностям. Из рис. 5-7 видно, что длина такого слоя равна $2l + \pi(a+x)$, а его сечение равно $x dx$.

Проводимость слоя составляет:

$$dg_b = \gamma \frac{x dx}{2l + \pi(a+x)}.$$

Все слои параллельны друг другу. Полная проводимость будет равна:

$$g_b = \gamma \int_0^b \frac{x dx}{2l + \pi(a+x)} = \frac{\gamma}{\pi^2} \left[\pi b - (2l + \pi a) \ln \frac{2l + \pi(a+b)}{2l + \pi a} \right]. \quad (5-21)$$

Обратная величина будет равна верхнему предельному значению сопротивления

$$r_b = \frac{1}{g_b}. \quad (5-22)$$

Для нахождения нижнего предельного сопротивления введем на границах MM между прямолинейными и закругленной частями проводника бесконечно тонкие сверхпроводящие слои. Распределение плотности тока в прямолинейных частях проводника станет равномерным. Сопротивление прямолинейных частей будет равно:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{2l}{b^2/2} = \frac{4l}{\gamma b^2}.$$

Расчет же проводимости и сопротивления закругленной части производим аналогично описанному выше, считая длину элементарного слоя равной $\pi(a+x)$.

В результате получится:

$$g_{\text{закр}} = \frac{\gamma}{\pi} \left(b - a \ln \frac{a+b}{a} \right); \quad (5-23)$$

$$r_{\text{н}} = \frac{1}{g_{\text{закр}}} + \frac{4l}{\gamma b^2}. \quad (5-24)$$

5-10. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЕЙ

Указанное в § 5-8 сходство закономерностей позволяет осуществить экспериментальное исследование электростатического поля, не поддающегося аналитическому расчету вследствие сложности границ, на модели, являющейся полем электрического тока в так называемой электролитической ванне [Л. 56].

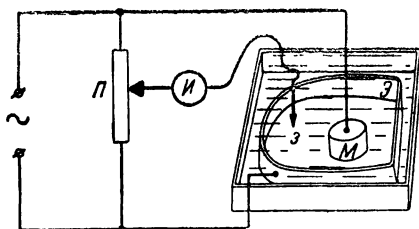


Рис. 5-8. Электролитическая ванна.

Исследование на подобной модели можно распространить и на магнитное поле и на другие виды полей.

Этим методом можно производить исследование двухмерных безвихревых полей, а также трехмерных полей с осевой симметрией.

Ванна (рис. 5-8) представляет собой мелкий сосуд с дном и стенками из непроводящего материала. Электролит — вода из водопровода. Во избежание нагревания электролита применяется низкое напряжение; питание подается от переменного напряжения, чтобы не сказывалось явление поляризации. Электроды Э и М — металлические пластины формы, соответствующей электродам или полюсам исследуемого поля. При исследовании трехмерного поля с осевой симметрией ванна наклоняется так, чтобы ось симметрии лежала на пересечении верхней и донной поверхностей электролита. Индикатором И служит обычно ламповый вольтметр, подключенный к зонду З, погруженному в ванну.

Часто применяется нулевой отсчет посредством потенциометра Π , положения ползунка которого градуированы. В таком случае вместо лампового вольтметра можно применять в качестве индикатора телефон.

Зонд можно прикрепить к подвижной каретке, над которой укрепляется прозрачная бумага для вычерчивания эквипотенциальных линий.

Размеры моделей не должны быть очень малыми, чтобы избежать искажений вследствие мениска.

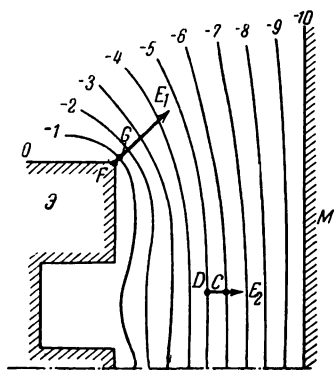


Рис. 5-9. Пример моделирования поля с эквипотенциальными границами.

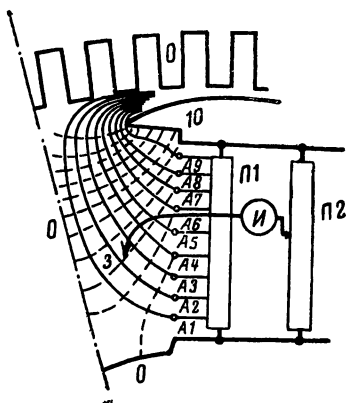


Рис. 5-10. Пример моделирования поля с неэквипотенциальными границами.

На рис. 5-9 показан пример моделирования электростатического поля между электродом \mathcal{E} фигурной формы, потенциал которого считается равным нулю, и плоским электродом M , потенциал которого принят -10 единиц. Промежуточные эквипотенциальные линии $-1, -2, \dots, -9$ получены посредством электролитической ванны.

На рис. 5-10 показано применение электролитической ванны в более сложном случае моделирования магнитного поля электрического генератора, одна из граничных поверхностей которого (боковая поверхность полюса ротора) не является эквипотенциальной. С этой целью, помимо электродов с потенциалами 0 и 10 , в ванну введены дополнительные точечные электроды $A1-A9$, потенциалы которых устанавливались посредством потенциометра $\Pi 1$ в соответствии с распределением на-

магничивающей силы (н. с.) вдоль покрытой обмоткой боковой поверхности полюса.

Линии напряженности поля, показанные на рис. 5-10 пунктиром, проводились от руки так, чтобы касательные к ним и к эквипотенциальным линиям в точках их пересечения были взаимно перпендикулярны.

Процесс исследования поля и вычерчивания эквипотенциальных линий может быть автоматизирован путем прикрепления зонда к специальной каретке, могущей перемещаться в двух направлениях посредством электродвигателей малой мощности. Включение и выключение электродвигателей делается автоматически. После вычерчивания одной эквипотенциальной линии каретка с зондом автоматически переходит на другую эквипотенциаль с заданным интервалом изменения потенциала.

В практике применяется ряд других способов экспериментального исследования, в принципе сходных с электролитической ванной.

Например, известно вырезание моделей полей из специальной бумаги, изготовляемой с однородной проводимостью. Переменная толщина модели может получаться при использовании нескольких слоев бумаги [Л. 66].

Основной причиной погрешностей в исследовании поля на модели служит ограниченность размеров модели (ванны, электропроводной бумаги и т. п.). Такого рода погрешности особо велики в случаях «открытых» полей, внешние границы которых лежат в бесконечности. Искажающее влияние краев модели в некоторых случаях может быть значительно уменьшено при практическом использовании теоремы Бутройда [Л. 71], гласящей, что если круглый проводящий лист присоединен по своей периферии к такому же другому листу, то первый лист оказывается электрически согласованным со вторым и ведет себя поэтому так, как будто его размеры бесконечны; при этом область бесконечности точно представляется центральной точкой второго листа. Применение теоремы Бутройда удобно по-видимому, в безжидкостных моделях.

5-11. ПОЛЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА НА ГРАНИЦЕ ДВУХ СРЕД

Закономерности и их доказательства аналогичны изложенным в § 3-12:

а) касательная составляющая напряженности поля на границе двух сред непрерывна;

б) нормальная составляющая плотности тока на границе двух сред непрерывна.

Рассмотрим электрическое поле на границе проводника с током и диэлектрика в случае однородной двухпроводной линии (рис. 5-11).

Вследствие падения напряжения на сопротивлении проводов их поверхность не является эквипотенциаль-

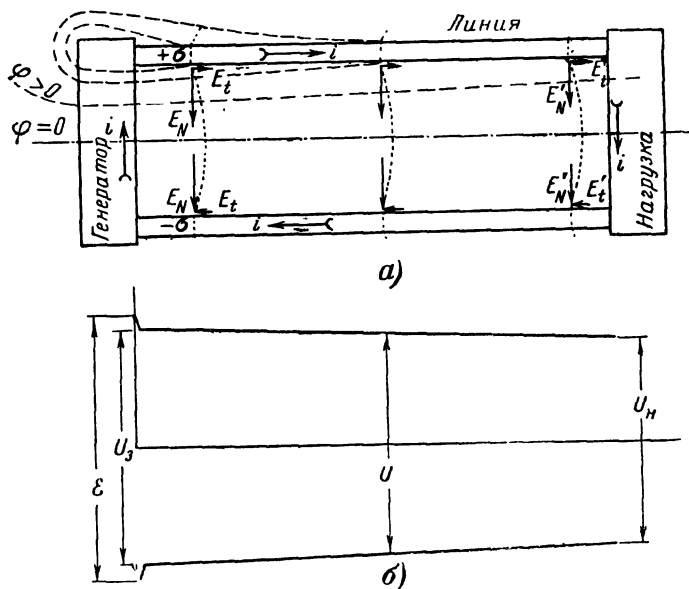


Рис. 5-11. Электрическое поле двухпроводной линии.

ной. Эквипотенциальные поверхности, проходящие через генератор, подходят к проводам или к нагрузке под углом и тут резко меняют направление, замыкаясь через последние. Разность потенциалов между проводами у зажимов генератора U_3 больше, чем у зажимов нагрузки U_H .

Следовательно, поверхностная плотность зарядов и нормальная составляющая напряженности электрического поля в начале линии E_N больше, чем в конце E'_N . Внутри проводов линии существуют лишь продольные составляющие плотности тока и напряженности поля. В силу непрерывности продольная касательная составляющая E_t существует и на поверхности провода.

Вследствие утечки ток и плотность тока в линии уменьшаются к ее концу; поэтому величина касательной составляющей напряженности поля у конца линии E'_t несколько меньше, чем у начала E_t .

Уравнение напряженности электрического поля на поверхности проводов имеет вид:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_a} \cdot \mathbf{1}_n + \frac{\delta_t}{\gamma} \cdot \mathbf{1}_t, \quad (5-25)$$

где σ — поверхностная плотность зарядов;

ϵ_a — диэлектрическая проницаемость диэлектрика;

δ_t — плотность тока у поверхности провода (касательная составляющая);

γ — удельная проводимость материала проводов;

$\mathbf{1}_n$ — единичный вектор по нормали к поверхности провода;

$\mathbf{1}_t$ — то же вдоль провода.

У обычных электрических линий касательная составляющая вектора E_t на поверхности проводов бывает очень малой по сравнению с нормальной составляющей E_N .

5-12. ПРИМЕР РАСЧЕТА ТОКА ПЕРЕНОСА В ВАКУУМЕ

Пусть имеется находящаяся в вакууме система электродов, показанная на рис. 5-12. Катодом, имеющим форму тонкой нити и расположенным по оси цилиндрического анода радиусом R , испускаются электроны без начальной скорости. Под действием электрического поля, установившегося между анодом и катодом благодаря подключению анода к положительному полюсу батареи, а катода — к отрицательному, электроны устремляются к аноду; таким образом, осуществляется замкнутая электрическая цепь.

Примем следующие допущения:

а) длина электродов велика, так что краевыми явлениями можно пренебречь;

б) электроны испускаются с нулевой начальной скоростью и получают ускорение только вследствие наличия электрического поля в пространстве между катодом и анодом;

в) все электроны, испускаемые катодом, в конце концов воспринимаются анодом; другими словами, отсутствуют явление насыщения и накопление зарядов в междуэлектродном пространстве;

г) рассматривается установившийся процесс; величина общего тока и пространственное распределение зарядов не меняются с течением времени, благодаря этому динамическая по существу задача может решаться как стационарная;

д) скорость движения электрона зависит только от значения потенциала в данной точке поля (потенциал катода принят равным нулю, потенциал анода U). Другими словами, кинетическая энергия

электрона $mv^2/2$ равна значению потенциала φ в точке поля, где электрон находится, умноженному на заряд электрона e ,

$$\frac{mv^2}{2} = e\varphi; \quad (5-26)$$

е) масса электрона остается практически постоянной, не зависящей от скорости его движения.

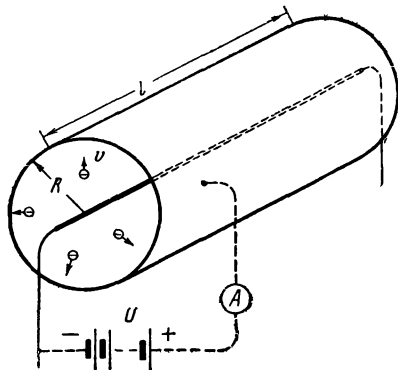


Рис. 5-12. К расчету поля тока переноса.

Из уравнения (5-26) следует:

$$v = \sqrt{\frac{2e}{m} \varphi}. \quad (5-27)$$

Значение плотности тока переноса δ по (5-9) равно:

$$\delta = -\rho v.$$

Знаком минус учитывается то, что направление плотности тока противоположно движению электронов.

Величина тока на единицу длины электродов равна:

$$\frac{I}{l} = \delta \cdot 2\pi r \cdot 1 = -\rho v \cdot 2\pi r, \quad (5-28)$$

где r — текущий радиус точки, в которой плотность тока равна δ ;
 l — длина электродов.

Объемная плотность зарядов определяется из выражений (5-27) и (5-28)

$$\rho = -\frac{I}{v \cdot 2\pi r l} = -\frac{I}{2\pi l \sqrt{\frac{2e}{m}}} \frac{1}{r \sqrt{\varphi}} = -\frac{C_1 I}{r \sqrt{\varphi}}, \quad (5-29)$$

где C_1 — постоянная.

Поскольку пространство между катодом и анодом сплошь заполнено зарядами, расчет поля следует произвести по уравнению Пуассона (3-16).

Применим цилиндрическую систему координат, совместив ее ось с катодом. На основании указанного выше допущения «а», а также в силу симметрии производные потенциала по углу θ и оси z обращаются в нуль. Выражение лапласиана сохраняет лишь производные по радиусу

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_a}.$$

Подставляя значение ρ из (5-29) и сокращая на $1/r$, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \frac{C_1 I}{\epsilon_a} \varphi^{-\frac{1}{2}}. \quad (5-30)$$

Найдем его интеграл в форме

$$\varphi = C_2 r^{C_3}.$$

Подставив это выражение в (5-30), найдем постоянные C_2 и C_3 путем сравнения показателей степени и коэффициентов:

$$C_2 = C_4 I^{\frac{2}{3}},$$

где

$$C_4 = \left(\frac{9}{4} \frac{C_1}{\epsilon_a} \right)^{\frac{2}{3}}; \quad C_3 = \frac{2}{3}.$$

Таким образом, распределение потенциала подчиняется закономерности

$$\varphi = C_4 I^{\frac{2}{3}} r^{\frac{2}{3}}. \quad (5-31)$$

Разность потенциалов анода (радиус которого равен R) и катода равна:

$$U = C_4 I^{\frac{2}{3}} R^{\frac{2}{3}};$$

отсюда следует:

$$I = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{C_4} \right)^{\frac{3}{2}} U^{\frac{3}{2}}. \quad (5-32)$$

Это выражение называют законом Чайлда.

Ток переноса в вакууме не подчиняется закону Ома. Величина тока здесь пропорциональна разности потенциалов, взятой в степени $3/2$.

Глава шестая
МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

6-1. ОСНОВНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Магнитная индукция \mathbf{B} — векторная величина, определяемая из закона Ампера о силе взаимодействия $d\mathbf{F}$ линейного элемента тока $I d\mathbf{l}$ с исследуемым магнитным полем (рис. 6-1),

$$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l} \times \mathbf{B}]. \quad (6-1)$$

Величина \mathbf{B} измеряется в $\text{н/а} \cdot \text{м} = \text{в} \cdot \text{сек/м}^2 = \text{тл}$.

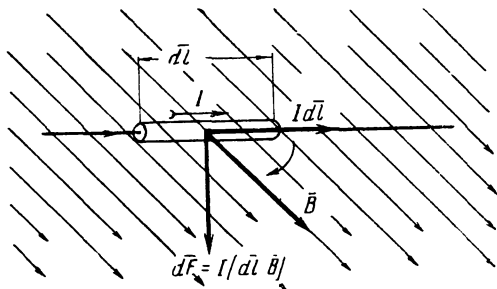


Рис. 6-1. Закон Ампера.

В физике часто оперируют с единицей, в 10 000 раз меньшей, называемой гауссом.

Для большей наглядности в описание магнитных процессов вводят понятие линий магнитной индукции, т. е. воображаемых линий в пространстве, проведенных так, что касательная к линии в каждой точке совпадает по направлению с вектором магнитной индукции.

Интеграл вектора магнитной индукции по некоторой поверхности называется магнитным потоком через эту поверхность

$$\Phi = \int_s \mathbf{B} ds. \quad (6-2)$$

Магнитный поток измеряется в вольт-секундах (веберах). Он является скалярной величиной. Величину магнитной индукции \mathbf{B} можно рассматривать как плотность магнитного потока.

Векторную величину $I d\mathbf{l}$ называют линейным элементом тока. Ее удобно применять в расчетах, относящихся

к длинным тонким проводникам. В случае же тока в жидкости и т. п. удобнее пользоваться так называемым объемным элементом тока $\bar{\delta} dV$, где $\bar{\delta}$ — плотность тока, а dV — элемент объема, занимаемого током (рис. 5-1).

Поскольку $I d\bar{l} = \bar{\delta} dV$, уравнение закона Ампера можно написать в форме

$$d\mathbf{F} = [\bar{\delta}\mathbf{B}]dV. \quad (6-3)$$

Элементарный вектор магнитной индукции в некоторой точке пространства, определяемый элементом тока $I d\bar{l} = \bar{\delta} dV$, по закону Био—Савара равен:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_a I}{4\pi} \frac{[d\bar{l} \cdot \mathbf{1}_r]}{r^2} = \frac{\mu_a}{4\pi} \frac{[\bar{\delta} \cdot \mathbf{1}_r]}{r^2} dV. \quad (6-4)$$

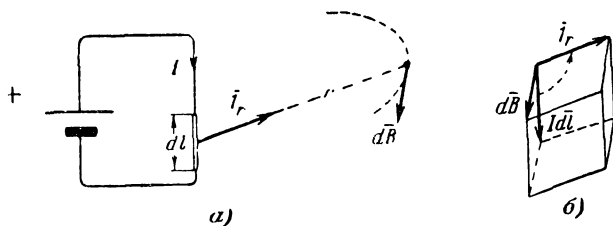


Рис. 6-2. Закон Био—Савара.

Здесь r — расстояние от элемента тока до точки, где определяется магнитная индукция; $\mathbf{1}_r$ — единичный вектор, направленный вдоль этого расстояния (рис. 6-2).

В эту формулу входит абсолютная магнитная проницаемость μ_a , характеризующая среду. Для вакуума, воздуха и подавляющего большинства материалов значение абсолютной магнитной проницаемости практически принимается равным магнитной постоянной

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ гн/м.}$$

Величина μ_0 равна отношению линейного интеграла вектора магнитной индукции по замкнутому контуру в вакууме к электрическому току, проходящему сквозь поверхность, ограниченную этим контуром.

Группа так называемых ферромагнитных материалов, играющих первостепенное значение в электромашиностроении и аппаратостроении (сталь, никель, кобальт и их сплавы), обладает иными значениями абсолютной

магнитной проницаемости; обычно ее выражают так:

$$\mu_a = \mu_0 \mu, \quad (6-5)$$

где μ — относительная магнитная проницаемость, т. е. безразмерный коэффициент, показывающий, во сколько раз магнитная проницаемость данного материала больше магнитной постоянной.

У некоторых материалов (сплавы железа с никелем, называемые пермаллоями, или железо, отожженное в водорододе) величина μ при определенных условиях достигает сотен тысяч.

Полная величина магнитной индукции в данной точке выражается интегралами

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_a}{4\pi} \oint_l \frac{[I d\mathbf{l} \cdot \mathbf{r}]}{r^2} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{[\bar{\delta} \cdot \mathbf{r}]}{r^2} dV. \quad (6-6)$$

Интегрирование производится в первом случае по всему замкнутому контуру тока, состоящему из элементов $I d\mathbf{l}$, а во втором случае — по всему объему V , занимаемому током, т. е. заполненному элементами $\bar{\delta} dV$.

Если хотят охарактеризовать магнитный эффект тока I вне зависимости от среды, то рассматривают векторную величину $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_a} \mathbf{B}$, называемую напряженностью магнитного поля,

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \oint_l \frac{[I d\mathbf{l} \cdot \mathbf{r}]}{r^2} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{[\bar{\delta} \cdot \mathbf{r}]}{r^2} dV. \quad (6-7)$$

Величина \mathbf{H} измеряется в амперах на метр.

Линия в пространстве, к которой вектор \mathbf{H} касателен в любой точке, называется линией напряженности магнитного поля. В неферромагнитной среде эти линии совпадают с линиями магнитной индукции.

6-2. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ЛИНИЙ МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

Многочисленные опыты позволили установить, что полный магнитный поток, пронизывающий замкнутую поверхность, всегда равен нулю

$$\oint_S \mathbf{B} ds = 0. \quad (6-8)$$

Применим теорему Остроградского—Гаусса

$$\int_V \nabla \mathbf{B} dV = 0.$$

Так как интегрирование делается по объему конечной величины, причем равенство интеграла нулю сохраняется при любой величине и форме этого объема, то подынтегральное выражение должно быть равно нулю

$$\nabla \mathbf{B} = 0. \quad (6-9)$$

Поле вектора магнитной индукции не имеет дивергенции, т. е. не имеет ни источников, ни стоков; линии магнитной индукции всегда непрерывны и образуют замкнутые петли; они нигде не начинаются и не заканчиваются. Следовательно, магнитное поле является либо вихревым, либо смешанным.

Уравнение (6-9) называется уравнением непрерывности.

6-3. ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Поскольку поле вектора \mathbf{B} носит вихревой или смешанный характер, оно имеет векторный потенциал \mathbf{A} , определяемый соотношением

$$[\nabla \mathbf{A}] = \mathbf{B}. \quad (6-10)$$

Из множества функций, удовлетворяющих этому соотношению [см. (2-33)], выбирается для случая стационарного (т. е. не зависящего от времени) магнитного поля такая функция, дивергенция которой равна нулю,

$$\nabla \mathbf{A} = 0. \quad (6-11)$$

Векторный потенциал измеряется в [$\text{в} \cdot \text{сек}/\text{м}$].

Подставим выражение (6-10) в уравнение (6-2) и применим теорему Остроградского—Стокса

$$\Phi = \int_S [\nabla \mathbf{A}] ds = \oint_l \mathbf{A} dl. \quad (6-12)$$

Эта зависимость позволяет рассчитывать величину магнитного потока и значения индуктивности или взаимной индуктивности посредством вычисления циркуляции векторного потенциала.

Выведем общие выражения для векторного потенциала.

Преобразуем векторное произведение, входящее в (6-6), для магнитной индукции $\frac{[Idl \cdot \mathbf{1}_r]}{r^2}$.

Поскольку $\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}$, величина $\mathbf{1}_r/r^2$ может быть представлена как градиент величины $1/r$, взятый с обратным знаком.

Аналогично формуле дифференциала произведения $(dy)x = d(xy) - y(dx)$ записываем (с сохранением порядка чередования векторов в векторном произведении):

$$\begin{aligned} -[Idl \nabla \left(\frac{1}{r}\right)] &= [\nabla (Idl) \left(\frac{1}{r}\right)] = \\ &= \left[\nabla \left(\frac{Idl}{r}\right)\right] - \left(\frac{1}{r}\right)[\nabla (Idl)]. \end{aligned}$$

Величина элемента тока Idl не зависит от координат точки, в которой определяется магнитная индукция. Поэтому ее производные по координатам равны нулю, в том числе и ротор, $[\nabla (Idl)] = 0$.

Подставив оставшийся член в (6-6), получим:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_a}{4\pi} \oint_l \left[\nabla \left(\frac{Idl}{r}\right)\right]. \quad (6-13)$$

Интегрирование по замкнутому контуру тока совершенно независимо от дифференцирования по координатам точки наблюдения, поэтому символы интегрирования и дифференцирования можно переставить

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_a}{4\pi} \left[\nabla \oint_l \left(\frac{Idl}{r}\right)\right]. \quad (6-14)$$

Сравнивая (6-10) и (6-14), получаем выражение для векторного потенциала.

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_a I}{4\pi} \oint_l \frac{dl}{r} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\delta dV}{r}. \quad (6-15)$$

Подынтегральное выражение однотипно с фундаментальным решением уравнения Лапласа (или Пуассона)

в пространстве (3-19). Следовательно, при соответствующей замене букв выражение (6-15) можно считать одним из решений дифференциального уравнения Пуассона или Лапласа

$$\nabla^2 A = -\mu_a \bar{\delta} \text{ или } 0. \quad (6-16)$$

Векторный потенциал магнитного поля подчиняется уравнениям Пуассона и Лапласа. Это обстоятельство облегчает расчеты магнитного поля благодаря возможности использования аналогий с решениями, полученными для электростатического поля.

6-4. ПЕРВОЕ УРАВНЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

Применим преобразование (2-26) к (6-16), используем (6-10) и (6-11) и разделим левую и правую части получившейся зависимости на μ_a ; получим первое уравнение Максвелла

$$\frac{1}{\mu_a} [\nabla B] = [\nabla H] = \bar{\delta}. \quad (6-17)$$

Подставим выражение полной плотности тока (5-5)

$$[\nabla H] = \gamma E + \epsilon_a \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (6-18)$$

В любом месте пространства, где существует ток проводимости или ток смещения (или оба тока совместно), имеется вихревое (имеющее ротор) магнитное поле.

Первое уравнение Максвелла распространяется и на ток переноса, если в (6-17) подставить выражение (5-10).

Проинтегрируем левую и правую части (6-17) по некоторой поверхности s :

$$\int_s [\nabla H] ds = \int_s \bar{\delta} ds. \quad (6-19)$$

Правая часть выражает величину тока I , проходящего через поверхность s ; к левой же части применим теорему Остроградского—Стокса; тогда

$$\oint_l H dl = I. \quad (6-20)$$

Линейный интеграл напряженности магнитного поля по замкнутому пути (т. е. циркуляция вектора \mathbf{H}) равен величине полного тока, проходящего через поверхность, ограниченную контуром циркуляции.

Это равенство называется законом полного тока.

6-5. ОБОБЩЕНИЕ ПЕРВОГО УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА НА СЛУЧАЙ ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЫ

Если электрическое поле перемещается относительно среды со скоростью \mathbf{v} , то в этой среде обнаруживается дополнительное магнитное поле \mathbf{H}_1 , определяемое уравнением

$$\mathbf{H}_1 = [\mathbf{vD}]. \quad (6-21)$$

Поле \mathbf{H}_1 можно объяснить как проявление магнитного эффекта токов, образованных движением поверхностных зарядов в пространстве.

Поле \mathbf{H}_1 может быть в равной мере обусловлено и движением связанных зарядов в движущихся поляризованных диэлектриках.

Первое уравнение Максвелла записывают в обобщенном виде в форме

$$[\nabla\mathbf{H}] = \bar{\delta} - [\nabla[\mathbf{vD}]]. \quad (6-22)$$

Первый член в правой части этого выражения определяет магнитное поле токов проводимости, переноса и смещения, а второй член — так называемое магнитное «поле движения».

6-6. СКАЛЯРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Из первого уравнения Максвелла видно, что в областях пространства, где токов нет, $[\nabla\mathbf{H}] = 0$, т. е. магнитное поле имеет смешанный характер и обладает, кроме векторного, также и скалярным потенциалом φ_m , определяемым соотношением

$$\mathbf{H} = -\nabla\varphi_m. \quad (6-23)$$

Примером служит диэлектрик, окружающий проводник с током.

Скалярный магнитный потенциал в однородной и изотропной среде ($\mu = \text{const}$) подчиняется уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \varphi_M = 0. \quad (6-24)$$

Это вытекает из (6-9) и (6-23).

6-7. ВЕКТОРНЫЙ И СКАЛЯРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛЫ ДВУХМЕРНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Двухмерным называется поле, изменения величин которого происходят в двух измерениях.

Такое магнитное поле устанавливается, в частности, вокруг прямых параллельных проводников с токами. Пусть векторы плотности тока $\vec{\delta}$ и векторного потенциала \mathbf{A} направлены по оси z . Совпадение их направлений для прямого тока вытекает из уравнения (6-15).

Раскрывая определитель ротора вектора \mathbf{A} в уравнении (6-10) при условиях $A_x = 0$; $A_y = 0$, имеем:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}; \quad B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x}. \quad (6-25)$$

Вектор \mathbf{B} лежит в плоскости xy .

Рассмотрим линию в этой плоскости, определяемую уравнением $A_z = \text{const}$. Полный дифференциал dA_z вдоль этой линии должен равняться нулю

$$dA_z = \frac{\partial A_z}{\partial x} dx + \frac{\partial A_z}{\partial y} dy = 0.$$

Отсюда следует:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial A_z}{\partial x}}{\frac{\partial A_z}{\partial y}} = \frac{B_y}{B_x}.$$

Наклон линии $A_z = \text{const}$ к оси x совпадает с наклоном вектора \mathbf{B} к той же оси. Таким образом, линия равного векторного потенциала в двухмерном магнитном поле является линией магнитной индукции. Вектор \mathbf{B} к ней касателен в любой точке.

Заменим теперь $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_a}$ и раскроем выражение градиента в (6-23)

$$\mathbf{B} = -\frac{\partial(\mu_a \varphi_M)}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial(\mu_a \varphi_M)}{\partial y} \mathbf{j}. \quad (6-26)$$

Сравнивая это выражение с (6-25), получаем связь между функциями векторного и скалярного потенциалов двухмерного магнитного поля

$$\frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial(\mu_a \varphi_M)}{\partial y}; \quad \frac{\partial A_z}{\partial y} = -\frac{\partial(\mu_a \varphi_M)}{\partial x}. \quad (6-27)$$

Эти выражения называются уравнениями Коши—Римана, а функции A_z и $(\mu_a \varphi_M)$ — сопряженными. Кривые $A_z = \text{const}$ и $(\mu_a \varphi_M) = \text{const}_1$ образуют ортогональную систему, т. е. пересекаются под прямыми углами (касательные к кривым в точке пересечения взаимно перпендикулярны). Линии магнитной индукции и эквипотенциальные линии магнитного поля должны всегда подчиняться этому условию.

6.8. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ НА ГРАНИЦЕ ДВУХ СРЕД

Вследствие непрерывности линий магнитной индукции нормальные к граничной поверхности составляющие вектора \mathbf{B} в соседних точках, лежащих соответственно по одну и другую сторону границы, должны быть равны (рис. 6-3)

$$B_{n1} = B_{n2}. \quad (6-28)$$

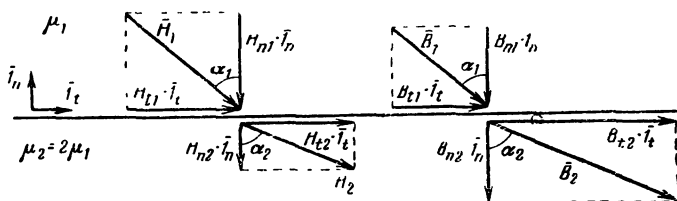


Рис. 6-3. Граничные условия для магнитного поля.

Согласно первому уравнению Максвелла ротор напряженности магнитного поля равен нулю, если в данной точке нет тока; следовательно, касательная составляющая вектора \mathbf{H} должна быть непрерывна в случае отсутствия тока на границе двух сред

$$H_{t1} = H_{t2}. \quad (6-29)$$

Закон преломления магнитных линий на границе

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (6-30)$$

Углы α_1 и α_2 отсчитываются от нормали к граничной поверхности (рис. 6-3).

Рассмотрим границу между ферромагнитным материалом и воздухом ($\mu_1 \gg \mu_2$). В этом случае $\operatorname{tg} \alpha_1 \gg \operatorname{tg} \alpha_2$; линия магнитной индукции, подходящая к границе под острым углом в стали, будет выходить в воздухе под углом α_2 , тангенс которого мал. Практически можно считать угол α_2 близким к нулю; другими словами, линии магнитной индукции выходят из стали в воздух практически по нормали к поверхности стали. Это правило, однако, нельзя распространять на современные материалы для постоянных магнитов, магнитная проницаемость которых мала.

Правило действительно лишь в случаях, когда прохода с токами, определяющими магнитное поле, расположены в воздухе, а не в стали.

6-9. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКЕ У ПОВЕРХНОСТИ ИДЕАЛЬНОГО ПРОВОДНИКА С ТОКОМ

Удельная проводимость идеального проводника равна бесконечности. Вследствие сил взаимного отталкивания свободные заряды в толще идеального проводника сохраняться не могут и мгновенно всплывают на его поверхность. Процесс прохождения тока в идеальном проводнике можно представлять лишь как движение зарядов в чрезвычайно тонкой поверхностной пленке, толщина которой dm приближается к нулю (рис. 6-4).

Понятие «объемной» плотности тока, измеряемой в a/m^2 и обращающейся здесь в бесконечность, теряет смысл.

Количественная оценка процесса может, однако, производиться посредством величины поверхностной плотности тока $\delta_{\text{пов}}$, измеряемой в амперах на метр.

Вычислим циркуляцию вектора напряженности магнитного поля \mathbf{H} по контуру $abvga$, элемент bv которого (равный dx) лежит в диэлектрике непосредственно у поверхности идеального проводника, а элемент ga — в толще идеального проводника бесконечно близко от его поверхности.

По закону полного тока эта циркуляция будет равна $\overline{\delta_{\text{пов}}} dx$; аналогичную величину будет иметь циркуляция вектора \mathbf{H} по соседнему контуру $gvejg$. Элементы обеих циркуляций по пограничному участку vg взаимно ком-

пенсуются; следовательно, нормальная к поверхности составляющая вектора напряженности магнитного поля повсюду равна нулю, т. е. магнитное поле не может проникнуть из диэлектрика в толщу идеального проводника.

Из условия непрерывности магнитных линий вытекает, что внутри идеального проводника отсутствует и касательная к границе составляющая вектора \mathbf{H} .

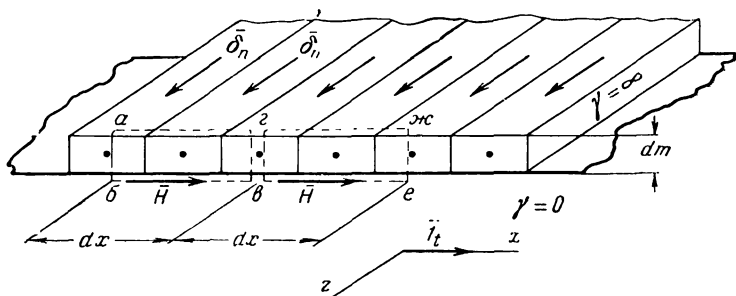


Рис. 6-4. Ограничение магнитного поля током на поверхности идеального проводника.

Таким образом, рассматриваемая циркуляция равна $\mathbf{H} dx$, где \mathbf{H} — величина напряженности магнитного поля в диэлектрике у поверхности идеального проводника. Вектор \mathbf{H} касателен к поверхности ($\mathbf{H} = H_t \cdot \mathbf{1}_t$).

Можно сказать, что ток на поверхности идеального проводника ограничивает магнитное поле в диэлектрике. Поверхностная плотность тока численно равна напряженности магнитного поля в диэлектрике у поверхности идеального проводника

$$H = H_t = j_{\text{пов}}. \quad (6-31)$$

Линии магнитной индукции у поверхности идеального проводника с током всегда параллельны поверхности, но остаются перпендикулярными к векторам поверхностной плотности тока.

6-10. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТОКА С ОДНОРОДНЫМ ПОСТОРОННИМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Пусть замкнутый плоский контур тока I находится в постороннем (т. е. определяемом другими токами) однородном магнитном поле с индукцией \mathbf{B} (рис. 6-5).

Предположим вначале, что плоскость контура расположена параллельно вектору \mathbf{B} .

По закону Ампера [формула (6-1)] силы $d\mathbf{F}_2$ и $d\mathbf{F}_3$, действующие на элементы тока $I d\mathbf{l}_2$ и $I d\mathbf{l}_3$, будут равны по величине, но направлены в противоположные стороны.

Эти силы образуют элементарную пару.

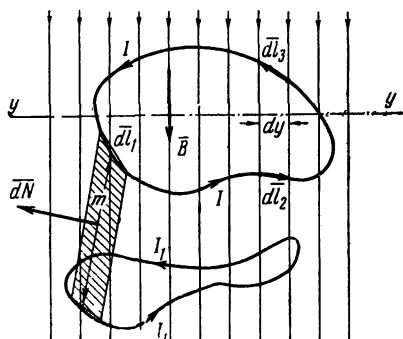


Рис. 6-5. Взаимодействие контура с током и постороннего магнитного поля.

Весь контур тока может быть представлен состоящим из подобных пар элементов.

Под действием всех элементарных пар сил контур будет стремиться повернуться в положение, при котором собственное магнитное поле его тока будет внутри контура совпадать с вектором \mathbf{B} внешнего магнитного поля.

После такого поворота элементарные силы, действующие на элементы тока $I d\mathbf{l}_2$ и $I d\mathbf{l}_3$, будут также равны по величине и противоположны по направлениям; однако эти силы будут в плоскости самого контура; они стремятся деформировать контур так, чтобы его площадь стала возможно больше, т. е. растянуть контур.

Если теперь направление тока в контуре изменить на обратное, то действующие на элементы тока силы станут стягивать контур, уменьшая внутри контура встречный внешнему полю магнитный поток, определяемый током в контуре.

Можно вывести правило:

силы взаимодействия магнитного поля с током или с другим магнитным полем всегда стремятся увеличить общее потокосцепление системы.

6-11. ВЗАИМНАЯ ЭНЕРГИЯ ТОКА И ПОСТОРОННЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Пусть контур с током I находится в постороннем магнитном поле \mathbf{B} (рис. 6-5). Выясним, какая должна быть затрачена энергия для такой деформации контура, чтобы он принял очертание I_1 . Предположим, что деформация делается без разрыва цепи и притом очень медленно; поэтому можно пренебречь индуктированной вследствие движения проводника э. д. с. и зависящими от последней эффектами. Пусть малый элемент тока $I d\mathbf{l}_1$ в процессе деформации контура переместился на малое расстояние \mathbf{m} ; совершаемая работа будет равна $dW = \mathbf{m} d\mathbf{F}$, где $d\mathbf{F}$ — сила взаимодействия элемента тока $I d\mathbf{l}_1$ и магнитного поля \mathbf{B} , определяемая уравнением (6-1),

$$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l}_1 \mathbf{B}]; \quad dW = I\mathbf{m}[d\mathbf{l}_1 \mathbf{B}] = I[\mathbf{m} d\mathbf{l}_1]\mathbf{B}.$$

Векторное произведение $[\mathbf{m} d\mathbf{l}_1]$ представляет собой элементарную площадку $d\mathbf{N}$, пройденную элементом проводника при перемещении; вектор площадки нормален к ней (рис. 6-5).

Скалярное произведение $d\mathbf{N} \mathbf{B}$ выразит собой изменение величины пронизывающего контур магнитного потока $d\Phi$, происшедшее из-за перемещения элемента тока $I d\mathbf{l}_1$; следовательно,

$$dW = I d\Phi.$$

Интегрируя, получаем:

$$W = \int_{\Phi_0}^{\Phi_k} I d\Phi = I(\Phi_k - \Phi_0) = I\Phi',$$

где Φ' представляет собой полное изменение величины магнитного потока, сцепленного с контуром.

Предположим, что до деформации контур совершенно не был сцеплен с посторонним магнитным полем ($\Phi_0 = 0$); это могло быть, например, в случае расположения контура в плоскости, параллельной линиям магнитной индукции. После деформации контур оказался сцепленным с потоком Φ ; деформация могла заключаться в простом поворачивании плоскости контура. Взаимная энергия контура с током и постороннего магнитного поля, таким образом, равна:

$$W = I\Phi. \tag{6-32}$$

Произведем преобразование в соответствии с уравнением (6-12); заменим для общности линейный элемент тока объемным элементом $I dl = \delta dV$

$$W = \oint_l IA dl = \int_V A \bar{\delta} dV. \quad (6-33)$$

Плотность взаимной энергии, т. е. энергия, приходящаяся на единицу объема, будет равна скалярному произведению плотности тока и векторного потенциала постороннего магнитного поля

$$\frac{dW}{dV} = A \bar{\delta}. \quad (6-34)$$

6-12. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ

Пусть постороннее магнитное поле определяется током I' в контуре, элемент длины которого обозначается символом dl_2 . Векторный потенциал этого поля в данной точке по уравнению (6-15) равен:

$$A = \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \oint_l \frac{dl_2}{r}.$$

Величину тока I' можно было вынести за знак интеграла, как не зависящую от положения элемента длины dl_2 проводника, несущего этот ток. По таким же соображениям при конечных размерах другого контура с током I можно вынести за знак интеграла величину I в уравнении (6-33). Тогда величину взаимной магнитной энергии двух контуров с токами можно выразить уравнением

$$W = II' \oint_l \frac{A}{I'} dl_1 = M II'.$$

Величина

$$M = \oint_l \frac{A}{I'} dl_1 = \frac{\Phi_{12}}{I'}, \quad (6-35)$$

зависящая от геометрических размеров и взаимного расположения контуров, а также от магнитной проницаемости среды называется взаимной индуктивностью.

$\Phi_{12} = \oint_l A dl_1$ — потокосцепление взаимной индукции

между контурами с токами, т. е. та часть магнитного потока тока I' , которая пронизывает контур с током I .

Таким образом, взаимная индуктивность выражает собой потокоцепление взаимной индукции, приходящееся на единицу тока.

С другой стороны, взаимная индуктивность численно равна величине э. д. с., индуцируемой в одном контуре, при изменении тока в другом контуре во времени со скоростью 1 а/сек.

Единица измерения взаимной индуктивности

$$\frac{в}{а/сек} = ом \cdot сек = гн.$$

6-13. СОБСТВЕННАЯ МАГНИТНАЯ ЭНЕРГИЯ ТОКА

При $\mu = \text{const}$ величины плотности тока и векторного потенциала магнитного поля взаимно пропорциональны; это следует из уравнения (6-15)

$$A = k\bar{\delta}, \quad (6-36)$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Малое приращение плотности тока $d\bar{\delta}$ повлечет малое изменение объемной плотности собственной магнитной энергии $A d\bar{\delta}$.

Полная величина плотности собственной магнитной энергии, устанавливающейся при нарастании плотности тока от 0 до $\bar{\delta}$, будет равна:

$$\frac{dW_c}{dV} = \int_0^{\bar{\delta}} A d\bar{\delta} = \int_0^{\bar{\delta}} k\bar{\delta} d\bar{\delta} = \frac{k}{2} \bar{\delta}^2 = \frac{1}{2} A\bar{\delta}. \quad (6-37)$$

Заменим по первому уравнению Максвелла (6-17) $\bar{\delta} = [\nabla H]$ и преобразуем произведение трех векторов

$$A [\nabla H] = - [\nabla A] H = - \nabla H.$$

Отрицательный знак свидетельствует о том, что плотность собственной магнитной энергии данного, ограниченного по размерам контура тока будет уменьшаться в случае расширения объема, занимаемого магнитным полем этого тока.

Абсолютная же величина объемной плотности собственной магнитной энергии тока равна:

$$\frac{dW_c}{dV} = \frac{BH}{2}. \quad (6-38)$$

Формула (6-38) удобна для практического расчета, когда основная часть магнитной энергии сосредоточена в некотором небольшом объеме пространства, причем энергией поля вне этого объема можно пренебречь. Примером служит магнитное поле в реле или в другом электромагнитном приборе; расчет силы притяжения якоря удобно производить исходя из магнитной энергии в воздушном промежутке между сердечником и якорем. Другим примером является поле в воздушном промежутке электрической машины.

Если же подлежащий учету объем, занимаемый магнитным полем, неограничен (например, при расчете поля катушки с током без стального сердечника или электронного луча) следует применять формулу (6-37); интегрирование придется производить по объему, занимаемому током.

6-14. ИНДУКТИВНОСТЬ

Полная собственная магнитная энергия тока определяется объемным интегралом выражения (6-37), в котором объемный элемент тока заменим линейным элементом

$$W = \frac{1}{2} \int_V A \bar{\delta} dV = \frac{1}{2} \oint_l AI dl. \quad (6-39)$$

Последний интеграл вычисляется по контуру линейного тока I , величина которого постоянна; вынесем поэтому I за знак интеграла и используем зависимость (6-12), тогда

$$W_c = \frac{I}{2} \oint_l A dl = \frac{I}{2} \Phi = \frac{I^2}{2} L, \quad (6-40)$$

где L — индуктивность данного контура с током,

$$L = \frac{\Phi}{I} = \oint_l \frac{A}{I} dl. \quad (6-41)$$

Индуктивность выражает собой величину магнитного потока, сцепленного с данным контуром тока и приходящегося на единицу тока.

Индуктивность численно равна величине э. д. с., индуцируемой в контуре при изменении тока по времени со скоростью 1 а/сек.

Индуктивность измеряется в генри.

В случае контура с током, имеющего ω витков, расположенных так, что поток Φ сцепляется со всеми витками, индуктивность определяется как потокосцепление самоиндукции, отнесенное к единице тока,

$$L = \omega \frac{\Phi}{I} = \frac{\Psi}{I}. \quad (6-42)$$

6-15. ИССЛЕДОВАНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПРИ ПОМОЩИ СТАЛЬНЫХ ОПИЛОК

Этим методом удобно пользоваться при получении качественной картины поля, как показано на рис. 6-6 и 6-7. Однако по расположению опилок нельзя судить о величине индукции в различных местах. Необходимы дополнительные измерения посредством маленькой испытательной катушки, замыкаемой на баллистический гальванометр.

Линии магнитной индукции и линии равного скалярного магнитного потенциала поля двухполюсного электромагнита, представленного на рис. 6-6, получены так: проведена очевидная эквипотенциальная линия CC точно посередине между полюсами. Очень маленькая испытательная катушка передвигалась вдоль этой линии; в результате получена кривая магнитной индукции B_{c-c} по линии CC ; линия CC является абсциссой этой кривой.

Выбирают исходную линию поля, определить которую можно с минимальной погрешностью. Это прямая θ , соединяющая середины полюсных наконечников. Интеграл $\int \mathbf{B} d\mathbf{l}$, взятый вдоль эквипотенциальной линии CC между любой парой соседних линий поля, должен иметь одну и ту же величину. Интегрируют графически кривую B_{c-c} , начиная с точки пересечения линий CC и θ ; как только величина интеграла достигла некоторого произвольно выбранного значения, отмечают на линии CC точку, через которую будет проходить линия поля 1; продолжая интегрирование, отмечают следующую точку на линии CC , при которой $\int \mathbf{B} d\mathbf{l}$, отсчитываемый теперь от точки пересечения линий CC и 1, получит то же значение; через эту точку будет проходить линия поля 2 и т. д. Направления линий поля 1, 2 ... слева и справа линии CC покажет расположение опилок.

Построение других эквипотенциальных линий (на рис. 6-6 показаны две, A и B) делается с соблюдением следующих условий:

а) линия поля и эквипотенциальная линия взаимно перпендикулярны в точке их пересечения; б) интеграл $\int \mathbf{B} d\mathbf{l}$, взятый вдоль

любой эквипотенциальной линии между двумя соседними линиями поля, всегда имеет одно и то же значение.

В некоторых случаях получить количественную картину поля не удастся; так обстоит дело на рис. 6-7, представляющем поле того же электромагнита в плоскости, параллельной поверхности полюсов.

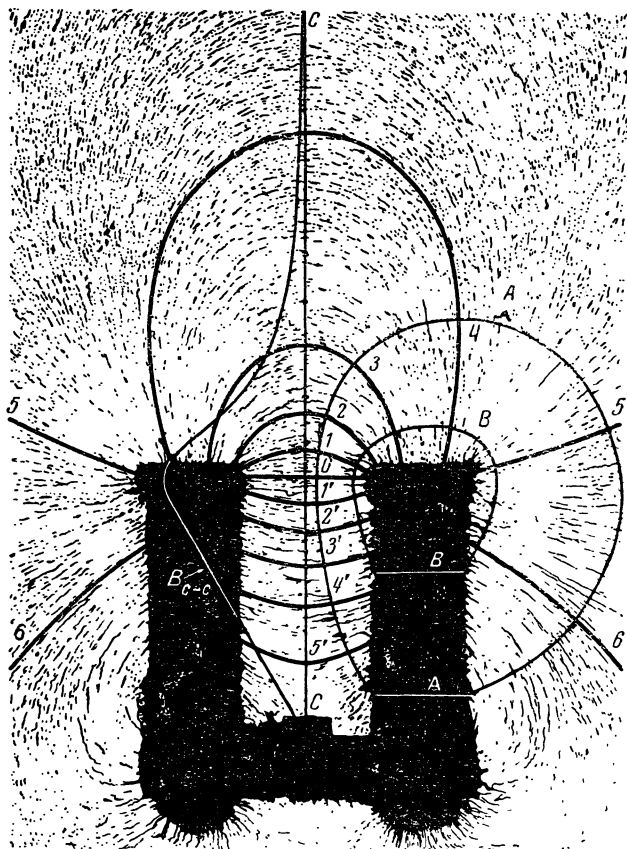


Рис. 6-6. Поле двухполюсного электромагнита (вид сбоку).

Здесь можно измерить лишь составляющие магнитной индукции в плоскости чертежа.

Эквипотенциальные линии A , B и C проведены исходя из условия их перпендикулярности направлениям линий поля, указываемым расположением опилок. Отметки на эквипотенциальных линиях соответствуют равным значениям $\int \mathbf{B}dl$ вдоль данной линии, однако

эти значения не одинаковы на линиях *A* и *B*, так как поле в данной области не двумерно; поэтому нельзя провести линий поля, пользуясь этими отметками.

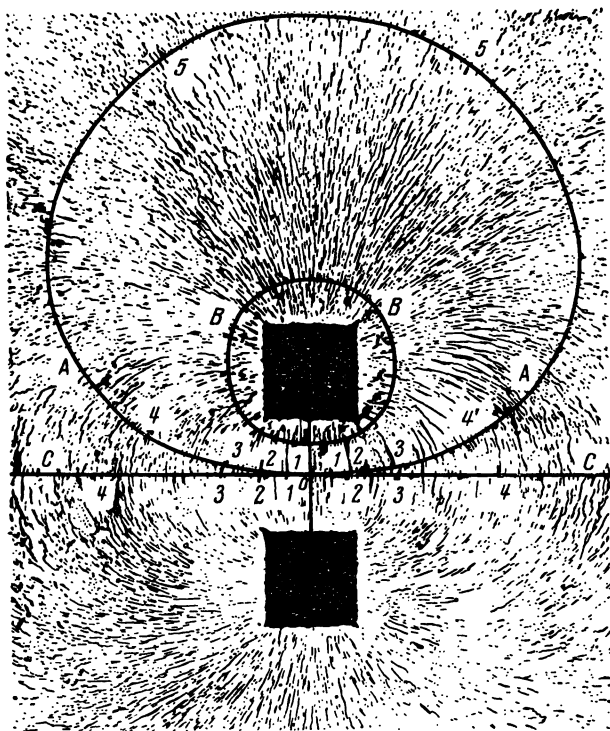


Рис. 6-7. Поле двухполюсного электромагнита (вид сверху).

Глава седьмая

НАМАГНИЧИВАНИЕ СРЕД

7-1. МАГНИТНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Ферромагнитные материалы делятся на две группы: мягкие и твердые (в магнитном отношении).

Сравнение их циклов перемагничивания представлено на рис. 7-1. Петля *a* относится к мягкому материалу, а петля *б* к твердому. Мягкие магнитные материалы

применяются в электрических машинах, электромагнитах и других устройствах, где желают получить высокие значения магнитной индукции при сравнительно невысоких значениях напряженности магнитного поля. Их относительная магнитная проницаемость μ велика. Мягкие материалы обычно подвергаются переменному намагничиванию, причем потери энергии от гистерезиса не должны быть большими. Следовательно, площадь

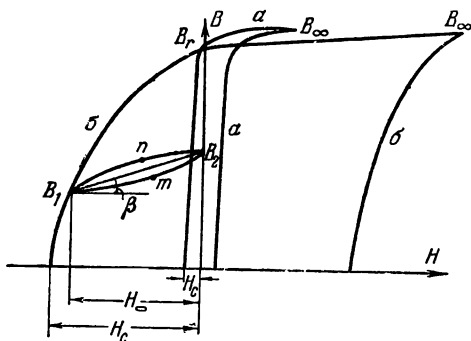


Рис. 7-1. Кривые циклов перемагничивания мягкого (а) и твердого (б) магнитных материалов.

петли, выражающая собой величину потерь W_h за один цикл перемагничивания, должна быть малой, т. е. петля должна быть узкой; это означает, что коэрцитивная сила H_c , т. е. напряженность поля, которую надо приложить для снятия остаточной индукции B_r , должна быть небольшой.

Для уменьшения потерь энергии от вихревых токов, возникающих в сердечниках электрических машин и приборов, подвергаемых переменному намагничиванию на низкой частоте, сердечники обычно собираются из листового мягкого магнитного материала; листы изолируются друг от друга тонкой бумагой или лаком. Такой материал должен обладать повышенным удельным электрическим сопротивлением ρ ; этому помогает, например, примесь кремния (2—4%), увеличивающая значение ρ в 4—5 раз.

Для работы на высоких частотах применяют материалы, спрессованные из порошков и обладающие высоким удельным сопротивлением (магнитодиэлектрики). К ним относятся, например, ферриты, прессуемые из

смеси окислов железа, никеля, цинка, марганца, меди и других металлов.

В приложении П-6 приведены примерные свойства некоторых мягких магнитных материалов.

Твердые магнитные материалы применяются для изготовления постоянных магнитов. Основные требования к таким материалам — возможно большая коэрцитивная сила H_c и возможно большая магнитная энергия $W_{\text{макс}}$, запасаемая в единице объема. В связи с этим петля цикла перемагничивания имеет весьма «раздутый» вид. Относительная магнитная проницаемость μ имеет сравнительно низкие значения.

В приложении П-7 приведены примерные свойства некоторых твердых магнитных материалов.

7-2. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ЦИКЛОВ ПЕРЕМАГНИЧИВАНИЯ

Пусть материал, бывший вначале совершенно размагниченным, т. е. состояние которого характеризовалось точкой 0, лежащей в начале координат на рис. 7-2, подвергся намагничиванию до некоторого предельного значения магнитной индукции B_{∞} . Процесс этого первоначального намагничивания проходит по пунктирной кривой OB_{∞} . Если теперь уменьшать напряженность намагничивающего поля до нуля, процесс идет по ветви $B_{\infty}B_r$. При $H=0$ в материале остается остаточная индукция B_r .

Продолжая процесс, т. е. давая H все большие и большие отрицательные значения, получаем ветвь $B_r m(-H_c)$. При приложении так называемой коэрцитивной силы (коэрцитивной напряженности поля) $-H_c$ величина магнитной индукции спадает до нуля. Увеличивая дальше отрицательные значения H , получаем намагничивание материала в отрицательном направлении по кривой $(-H_c)B_{-\infty}$.

Если, достигнув точки $B_{-\infty}$, начнем уменьшать отрицательные значения H , переходя затем через нуль в область положительных значений H , процесс пойдет по ветви $B_{-\infty}(-B_r)H_c B_{\infty}$.

Вычерченная на рис. 7-2 сплошной линией кривая называется предельным циклом перемагничивания.

Рассмотрим теперь ход процесса в случае отклонения от предельного цикла перемагничивания.

Пусть в некоторой точке m желают повернуть процесс, т. е. вместо дальнейшего увеличения отрицательных значений напряженности поля начинают уменьшать их. Процесс пойдет по ветви mpn и в конце концов может прийти в точку B_∞ , т. е. вернуться на предельный цикл. Если сделать какую-то точку n также поворотной, т. е. достигнув ее, уменьшать положительные значения H , процесс пойдет по новой ветви nq и т. д.

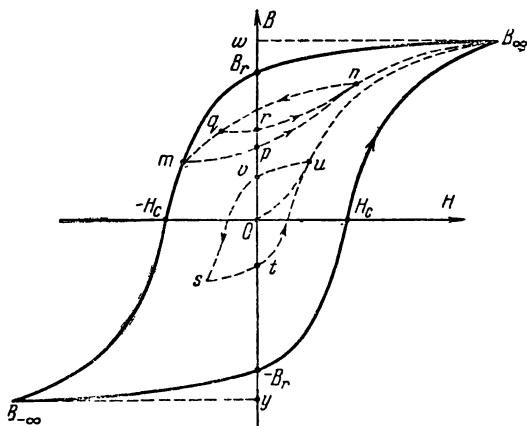


Рис. 7-2. Предельный цикл и частные циклы перемагничивания.

Из любой поворотной точки (например, q) кривая стремится прийти в предыдущую поворотную точку n ; если здесь опять сделать поворот, процесс пойдет по направлению к прежней поворотной точке q и т. д. В таком случае материал подвергается так называемому частному циклу перемагничивания $qrnpq$; таких частных циклов может существовать бесконечное множество. Они могут быть несимметричными (типа $qrnpq$) или симметричными (типа $stuv$). Если при возвращении к предыдущей поворотной точке (например, из n к q) последняя была пройдена (т. е. поворота в точке q не сделано), то материал как бы «забывает» предыдущий частный цикл $qrnpq$. Если новый поворот сделан в какой-то точке, лежащей между q и m , то процесс пойдет по новой ветви, также стремящейся в точку B_∞ , но не проходящей ни через одну из прежних поворотных точек.

Геометрическим местом вершин s и u симметричных

циклов перемагничивания является так называемая основная кривая намагничивания.

Процесс размагничивания, т. е. приведение материала в состояние, определяемое началом координат ($B=0$ при $H=0$), обычно производится путем периодического пере-

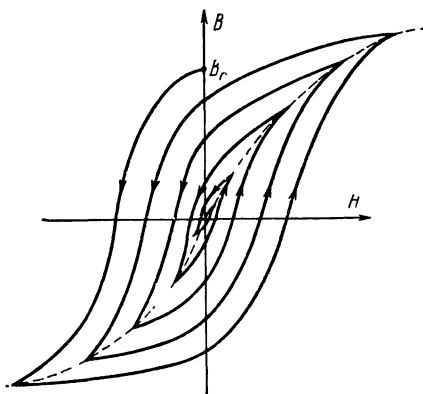


Рис. 7-3. Размагничивание ферромагнитного материала.

магничивания материала с постепенно уменьшающимися амплитудами напряженности поля. Графически этот процесс представлен на рис. 7-3.

7-3. НАМАГНИЧИВАНИЕ МАТЕРИАЛА

Причиной намагниченности считаются элементарные токи, существующие в молекулах и атомах ферромагнитного вещества (рис. 7-4). Каждый элементарный ток можно представить как магнитный листок (диполь) с северной полярностью на одной стороне и южной — на другой. Произведение $i\Delta s$ называют магнитным моментом элементарного тока. Это векторная величина, совпадающая по направлению с напряженностью магнитного поля элементарного тока. Здесь Δs — элементарная площадка, обтекаемая током i .

Намагниченность вещества оценивается пределом отношения суммы магнитных моментов в некотором объеме к величине этого объема при его неограниченном уменьшении

$$J = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum i \Delta s}{\Delta V}. \quad (7-1)$$

Эта векторная величина называется намагниченностью (или интенсивностью намагничивания).

Отдельные группы элементарных токов, соответствующие молекулам или группам молекул ферромагнитного вещества, всегда ориентированы так, что их магнитные моменты совпадают; таким образом, в материале существуют маленькие области спонтанного (самопроизвольного) намагничивания. В ненамагниченном веществе

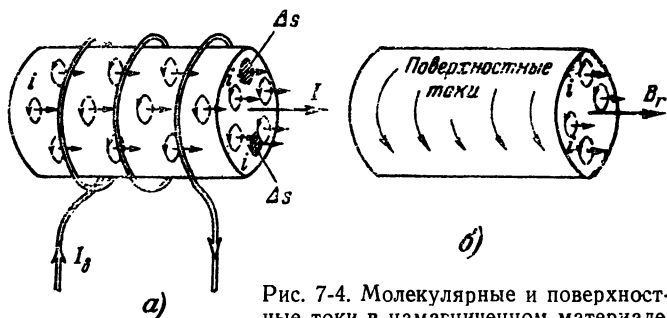


Рис. 7-4. Молекулярные и поверхностные токи в намагниченном материале.

намагниченности этих областей взаимно компенсируются. Если вещество подвергнуть воздействию магнитного поля, например обусловленного током I_B в катушке возбуждения (рис. 7-4,а), то в силу взаимодействия этого поля с элементарными токами (§ 6-10) возникнут механические моменты, стремящиеся ориентировать области самопроизвольного намагничивания по направлению внешнего поля. Вещество начинает намагничиваться скачками, по мере ориентации отдельных областей намагничивания. Интенсивность намагничивания \mathbf{J} возрастает; ее величина пропорциональна напряженности магнитного поля в веществе $H_{ст}$

$$\mathbf{J} = k_M \mathbf{H}_{ст}. \quad (7-2)$$

Коэффициент k_M называется магнитной восприимчивостью материала.

Величина магнитной индукции \mathbf{B} в намагниченном веществе будет равна:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H}_{ст} + \mathbf{J}) = \mu_0 H_{ст} (1 + k_M), \quad (7-3)$$

где μ_0 — магнитная постоянная, равная $4\pi \cdot 10^{-7}$ гн/м.

Величина в скобках представляет собой относительную магнитную проницаемость материала (см. § 6-1)

$$\mu = 1 + k_m; \quad k_m = \mu - 1. \quad (7-4)$$

После снятия возбуждающего внешнего поля ориентация многих из областей самопроизвольного намагничивания сохраняется; этим обуславливается наличие остаточной индукции B_r (рис. 7-4,б).

7-4. НАМАГНИЧИВАНИЕ ФЕРРОМАГНИТНЫХ ТЕЛ

Соотношения § 7-3 записаны для случая намагничивания очень длинного стержня или замкнутого сердечника тороидальной формы.

Если же ферромагнитное тело имеет такую форму, что линии магнитной индукции проходят часть пути по воздуху (короткие стержни, тороид с воздушным зазором и т. п.), намагниченность оказывается меньше величины J . Причина этого видна из рассмотрения группы элементарных токов, окружающих одну и ту же магнитную линию (имеющих общую ось на рис. 7-4).

Напряженность поля в точках магнитной линии, у которой лишь конечный участок окружен элементарными токами, будет меньше, чем у магнитной линии, окруженной элементарными токами по всей длине.

Поэтому в расчеты вводится величина NJ , где N — коэффициент, меньший единицы для всех случаев, когда при намагничивании ферромагнитного тела часть пути магнитных линий проходит по воздуху.

Уравнение (7-3) записывается в более общей форме

$$B = \mu_0 (H_{ст} + NJ). \quad (7-5)$$

Здесь $H_{ст}$ — действительная напряженность магнитного поля в ферромагнитном теле,

$$H_{ст} = \frac{B}{\mu_0} - NJ = H - H_0. \quad (7-6)$$

$H_{ст}$ меньше H на величину H_0 , называемую размагничивающим полем,

$$H_0 = NJ = N(\mu - 1)H_{ст}. \quad (7-7)$$

Коэффициент N называется размагничивающим фактором. Точный расчет N возможен лишь для некоторых

геометрических форм тел, при которых получается однородное намагничивание во внешнем однородном поле, в частности для эллипсоида вращения; частным случаем эллипсоида является шар; неограниченное увеличение одной из осей приводит к цилиндру, а неограниченное уменьшение одной из осей — тонкому диску. Для указанных форм величина N представляет собой числовой коэффициент, не зависящий ни от геометрических размеров, ни от материала тела.

В приложении П-8 приведены значения N для эллипсоидов с различным соотношением осей $\lambda = a/b$, где a — ось эллипсоида, направленная вдоль внешнего поля, b — ось, нормальная к внешнему полю.

7-5. РАЗМАГНИЧИВАЮЩИЙ ФАКТОР ТОРОИДА С МАЛЫМ ЗАЗОРОМ

В стальном тороиде сделан малый зазор длиной $l_{\text{в}}$ (рис. 7-5); полная длина линии магнитной индукции, измеренная по оси сечения, равна l ; тогда $l_{\text{ст}} = l - l_{\text{в}}$

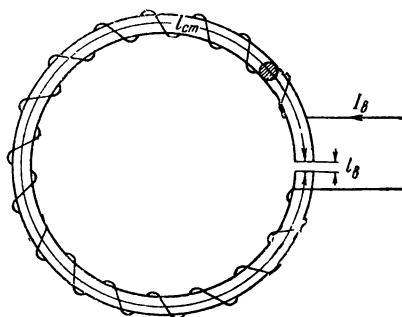


Рис. 7-5. К расчету размагничивающего фактора тороида с воздушным зазором.

будет длиной части линии магнитной индукции, лежащей в стали.

Обмотка возбуждения, имеющая ω витков, несущих ток I , создает однородное внешнее поле напряженностью

$$H = \frac{I\omega}{l}. \quad (7-8)$$

Напишем закон полного тока, делая обход по оси сечения тороида,

$$I\omega = Hl = H_{\text{ст}}l_{\text{ст}} + H_{\text{в}}l_{\text{в}}, \quad (7-9)$$

где $H_{\text{ст}}$ — напряженность поля в стали;

$H_{\text{в}}$ — напряженность поля в воздушном зазоре.

В правой части выражения (7-9) прибавим и вычтем член $H_{\text{ст}}l_{\text{в}}$; разделим обе части на $l = l_{\text{ст}} + l_{\text{в}}$ и запишем результат в форме

$$H_{\text{ст}} = H - (H_{\text{в}} - H_{\text{ст}}) \frac{l_{\text{в}}}{l}. \quad (7-10)$$

Если воздушный зазор мал ($l_{\text{в}} \ll l_{\text{ст}}$), то $B_{\text{ст}} \approx B_{\text{в}}$;

$$\mu_{\text{а}} H_{\text{ст}} \approx \mu_0 H_{\text{в}}; \quad H_{\text{в}} = \frac{\mu_{\text{а}}}{\mu_0} H_{\text{ст}} = \mu H_{\text{ст}}, \quad (7-11)$$

где μ — относительная магнитная проницаемость стали.

Подставив выражение (7-11) в (7-10) и сравнив результат с уравнениями (7-6) и (7-7), найдем, что размагничивающий фактор равен:

$$N = \frac{l_{\text{в}}}{l}. \quad (7-12)$$

7-6. МАГНИТНОЕ ЭКРАНИРОВАНИЕ

Пусть некоторую область пространства цилиндрической формы с радиусом r_1 (рис. 7-6) следует защитить от воздействия внешнего однородного постоянного магнитного поля H_0 . С этой целью применен трубчатый экран из ферромагнитного материала с абсолютной магнитной проницаемостью $\mu_{\text{а1}}$; внутренняя и наружная цилиндрические поверхности экрана имеют радиусы соответственно r_1 и r_2 .

Экранируемая область и наружное пространство (вне экрана) заполнены воздухом ($\mu_{\text{а}} = \mu_0$).

Совместим ось цилиндрических координат с осью экрана.

Уравнение Лапласа для скалярного магнитного потенциала в любой из трех областей будет иметь вид:

$$\nabla^2 \varphi_{\text{М}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_{\text{М}}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_{\text{М}}}{\partial \theta^2} = 0. \quad (7-13)$$

Это уравнение соответствует (4-73), рассмотренному в § 4-18. Его общее решение, найденное методом Фурье, будет однотипным с выражением (4-85). Постоянные интегрирования для каждой из областей будут различными:

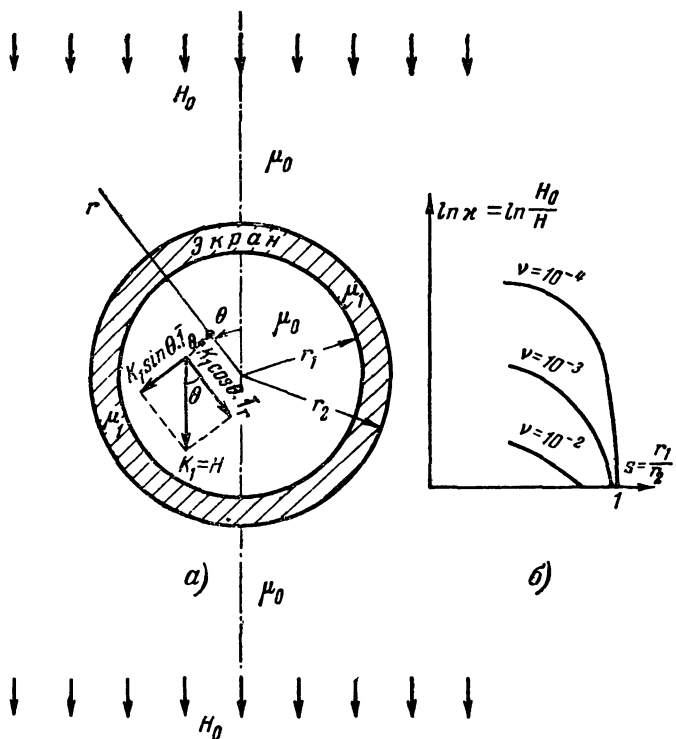


Рис. 7-6. Цилиндрический магнитный экран.

а) для экранируемой области

$$\varphi_M = \left(K_1 r + \frac{K_2}{r} \right) \cos \theta; \quad (7-14)$$

б) для толщи экрана

$$\varphi_{M.Э} = \left(K_{1Э} r + \frac{K_{2Э}}{r} \right) \cos \theta; \quad (7-15)$$

в) для наружного пространства

$$\varphi_{\text{м.н}} = \left(K_{1\text{н}} r + \frac{K_{2\text{н}}}{r} \right) \cos \theta. \quad (7-16)$$

Напряженность магнитного поля в каждой области найдется как взятый со знаком минус градиент скалярного магнитного потенциала:

а) в экранируемой области

$$\mathbf{H} = - \left(K_1 - \frac{K_2}{r^2} \right) \cos \theta \cdot \mathbf{1}_r + \left(K_1 + \frac{K_2}{r^2} \right) \sin \theta \cdot \mathbf{1}_\theta; \quad (7-17)$$

б) в толще экрана

$$\mathbf{H}_\text{э} = - \left(K_{1\text{э}} - \frac{K_{2\text{э}}}{r^2} \right) \cos \theta \cdot \mathbf{1}_r + \left(K_{1\text{э}} + \frac{K_{2\text{э}}}{r^2} \right) \sin \theta \cdot \mathbf{1}_\theta; \quad (7-18)$$

в) в наружном пространстве

$$\mathbf{H}_\text{н} = - \left(K_{1\text{н}} - \frac{K_{2\text{н}}}{r^2} \right) \cos \theta \cdot \mathbf{1}_r + \left(K_{1\text{н}} + \frac{K_{2\text{н}}}{r^2} \right) \sin \theta \cdot \mathbf{1}_\theta. \quad (7-19)$$

Определение постоянных интегрирования.

На очень большом расстоянии искажающее влияние экрана на поле в наружном пространстве не будет оказываться. Поэтому при $r \rightarrow \infty$ и, скажем, при $\theta = 0$

$$H_{\text{н}\infty} = -H_0 \cdot \mathbf{1}_r.$$

По уравнению же (7-19) эта величина равна $-K_{1\text{н}} \cdot \mathbf{1}_r$. Таким образом,

$$K_{1\text{н}} = H_0. \quad (7-20)$$

В экранируемой области напряженность магнитного поля имеет повсюду конечные значения, включая и районы около оси ($r \rightarrow 0$); по этой причине постоянная K_2 должна равняться нулю:

$$K_2 = 0. \quad (7-21')$$

Согласно граничным условиям для магнитного поля (§ 6-8) на внутренней ($r=r_1$) и на наружной ($r=r_2$) поверхностях экрана должны быть непрерывны касательные составляющие напряженности магнитного поля и нормальные, т. е. радиальные в данном случае, составляющие магнитной индукции.

Составляют уравнения, беря попарно соответствующие члены правых частей уравнений (7-17) — (7-19) с учетом выражений (7-20) и (7-21) и того, что $\mathbf{V} = \mu_0 \mathbf{H}$; $\mathbf{V}_a = \mu_{a1} \mathbf{H}_a$; $\mathbf{V}_H = \mu_0 \mathbf{H}_H$.

Решение этой системы алгебраических уравнений для экранируемой области будет иметь вид:

$$K_1 = 4H_0 \frac{\nu}{(1 + \nu)^2 - s^2(1 - \nu)^2}, \quad (7-22)$$

где

$$\nu = \frac{\mu_0}{\mu_{a1}} = \frac{1}{\mu_1}; \quad (7-23)$$

$$s = \frac{r_1}{r_2}. \quad (7-24)$$

Напряженность магнитного поля в экранируемой области равна:

$$\mathbf{H} = K_1 (-\cos \theta \cdot \mathbf{1}_r + \sin \theta \cdot \mathbf{1}_\theta). \quad (7-25)$$

Числовое значение вектора \mathbf{H} по всей экранируемой области постоянно и равно K_1 ; вектор \mathbf{H} повсюду направлен одинаково с полем \mathbf{H}_H в наружном пространстве вдали от экрана. Это видно из рис. 7-6. Другими словами, при однородном внешнем поле (вдали от экрана) в экранируемой области получается также однородное поле, напряженность которого в H_0/K_1 раз меньше напряженности внешнего поля.

Величину H_0/K_1 называют коэффициентом экранирования κ . В данном случае (цилиндрический экран) она равна:

$$\kappa = \frac{(1 + \nu)^2 - s^2(1 - \nu)^2}{4\nu}. \quad (7-26)$$

Кривые, рассчитанные по формуле (7-26), показаны на рис. 7-7, б. Хорошее экранирование получается при применении достаточно толстых экранов (отношение $s = r_1/r_2$ не должно приближаться к 1), изготовленных из материала с достаточно высокой магнитной проницаемостью (отношение $\mu_0/\mu_{a1} = \nu$ должно быть как можно меньше). Однако чрезмерное утолщение массивного экрана приносит мало пользы. Коэффициент экранирования возрастает очень слабо при уменьшении отношения r_1/r_2 ниже, скажем, 1/2.

Для достижения лучших результатов применяются многослойные экраны. Их эффект можно объяснить следующим образом.

В наружном слое, например, двухслойного экрана установится повышенная магнитная индукция по сравнению с поверхностными слоями сплошного экрана, поскольку проникновение магнитного поля во внутренний слой затруднено вследствие сравнительно высокого магнитного сопротивления неферромагнитной прослойки. Иначе говоря, экранирующее действие, оказываемое поверхностными слоями ферромагнитного материала по отношению к глубинным слоям, сказывается более резко при наличии промежуточного слоя с низкой магнитной проницаемостью.

Порядок расчета многослойного цилиндрического экрана в принципе не отличается от описанного. Однако количество постоянных интегрирования, которые придется определять из граничных условий, возрастает; поэтому будет необходимо решать более громоздкие системы алгебраических уравнений.

Наружный слой обычно рекомендуется изготавливать из материала с возможно высокой индукцией насыщения и высокими значениями проницаемости в этом режиме (ванадиевый пермендюр — сплав железа с кобальтом с примесью ванадия); второй же и последующие слои целесообразно изготавливать из материала с высокой проницаемостью в более слабых полях (железо-никелевые сплавы — пермаллой, мю-металл и др.).

7-7. ПРИНЦИП РАСЧЕТА ПОСТОЯННОГО МАГНИТА

Рабочим участком частного цикла возврата (§ 7-2) является «спинка» $B_2B_3B_mB_1$ (рис. 7-7). Введение воздушного зазора в магнитную цепь постоянного магнита вызывает уменьшение магнитной индукции от значения B_2 до некоторого меньшего значения B_3 . Это значение индукции в стали соответствует напряженности размагничивающего поля $-H_0 = -NJ$.

По уравнению (7-3)

$$B_3 = \mu_0 (-H_0 + J) = \mu_0 (1 - N) J. \quad (7-27)$$

Тангенс угла ψ между осью ординат и прямой, проведенной из данной рабочей точки кривой B_3 к началу

координат связан с величиной размагничивающего фактора соотношением

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{H_0}{B_3} \left(\frac{m_B}{m_B} \right) = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{N}{1-N} \right) \left(\frac{m_B}{m_B} \right),$$

где m_B и m_B — масштабы абсцисс и ординат кривой возврата;

$$\frac{N}{1-N} = \mu_0 \frac{H_0}{B_3}. \quad (7-28)$$

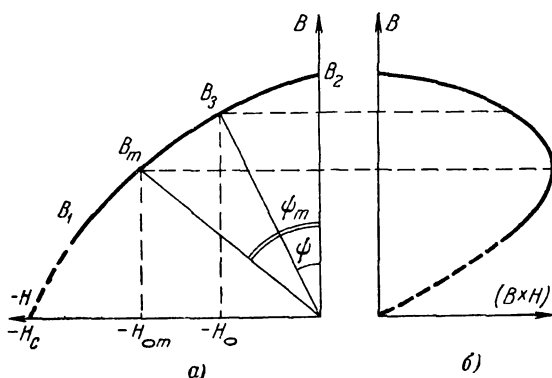


Рис. 7-7. К расчету постоянного магнита.

Энергия в малом воздушном зазоре может быть определена по (6-38)

$$W_B = \frac{B_B H_B}{2} l_B s, \quad (7-29)$$

где B_B и H_B — магнитная индукция и напряженность поля в воздушном зазоре;

l_B и s — длина и поперечное сечение воздушного зазора (принимаемое в первом приближении равным сечению стали магнита).

Заменим $B_B \approx B_{CT} = B_3$ и подставим значение H_B из уравнения второго закона Кирхгофа для цепи «тело магнита — воздушный зазор»

$$-H_0 l_{CT} + H_B l_B = 0.$$

В результате получим:

$$W_B = \frac{1}{2} (B_3 H_0) (l_{CT} s) = \frac{1}{2} (B_3 H_0) V_{CT}, \quad (7-30)$$

где V_{CT} — объем магнита.

Для лучшего использования материала следует поставить в такие условия, чтобы произведение (BH) было максимальным. На рис. 7-7,б, дана кривая $(BH) = f(B)$; из нее видно, что максимум энергии получается при некотором значении магнитной индукции B_m , соответствующем определенным наивыгоднейшим значениям $\text{tg } \psi_m$ и размагничивающего фактора N_m .

Значения $(BH)_{\text{макс}} = W_{\text{макс}}$ и B_m для некоторых твердых магнитных материалов приведены в приложении П-7.

Пример. Требуется сделать постоянный магнит с магнитной цепью кольцеобразной формы и воздушным зазором длиной $l_B = 0,25$ см; в воздушном зазоре нужно получить магнитный поток $\Phi = 1,4 \cdot 10^{-4}$ в·сек. Материал магнита — сплав альнико.

Из приложения П-7 находим:

$$\mu = 4; W_{\text{макс}} = 5\,500 \text{ Дж/м}^3$$

при

$$B_m = 0,45 \text{ в·сек/м}^2; H_{\circ} = \frac{5\,500}{0,45} = 12\,200 \text{ а/м.}$$

Сечение магнита

$$s = \frac{1,4 \cdot 10^{-4}}{0,45} = 3,11 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 3,11 \text{ см}^2.$$

Размагничивающий фактор [по (7-28)]:

$$\frac{N}{1-N} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{12\,200}{0,45} = 0,0344; N = 0,0332.$$

Длина и объем магнита:

$$l = \frac{0,25}{0,0332} = 7,52 \text{ см}; l_{\text{ст}} = 7,52 - 0,25 = 7,27 \text{ см};$$

$$V_{\text{ст}} = 3,11 \cdot 7,27 = 22,61 \text{ см}^3.$$

Магнитная энергия в воздушном зазоре

$$W_{\text{в}} = \frac{1}{2} \cdot 5\,500 \cdot 22,61 \cdot 10^{-6} = 0,062 \text{ Дж.}$$

Аналогичный расчет для магнита из вольфрамовой стали приводит к громоздкой конструкции объемом около 150 см^3 .

7-8. СИЛА ПРИТЯЖЕНИЯ МАГНИТА

Запас магнитной энергии в малом воздушном зазоре между сердечником и якорем электромагнита по уравнению (6-38) равен (рис. 7-8):

$$W_B = \frac{B_B H_B}{2} l_B S.$$

Пусть под действием магнитных сил якорь начал притягиваться, но прошел еще настолько малое расстояние dl_B , что величины поля B_B и H_B практически не изменились. Наступившее малое изменение в запасе магнитной энергии составит:

$$dW_B = \frac{B_B H_B}{2} S dl_B. \quad (7-31)$$

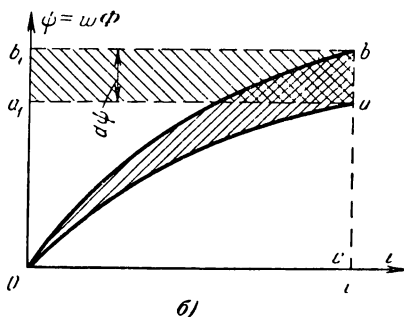
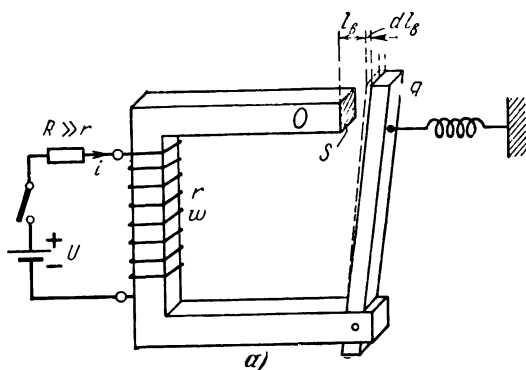


Рис. 7-8. К расчету силы притяжения электромагнита.

С другой стороны,

$$dW_B = F dl_B, \quad (7-32)$$

где F — сила, действующая на якорь.

Из уравнений (7-31) и (7-32) следует:

$$F = \frac{dW_B}{dl_B} = \frac{B_B H_B}{2} s = \frac{B_B^2}{2\mu_0} s. \quad (7-33)$$

Величина $p = B_B^2/2\mu_0$ выражает собой давление, т. е. силу, действующую на единицу поверхности якоря.

Более точное определение силы притяжения производится исходя из концепции коэнергии. Пусть питание током обмотки возбуждения электромагнита r происходит через большое дополнительное сопротивление R , так что ток в обмотке i практически постоянен как при якоре в покое, так и при якоре в движении (рис. 7-8,а).

Вычертим расчетную кривую намагничивания (OuB_∞ на рис. 7-2) в новых координатах: $\psi = \omega\Phi = f(i\omega)$ (кривая Oa на рис. 7-8,б). В результате малого перемещения якоря на расстояние dl_B воздушный зазор уменьшился, общее потокоцепление ψ увеличилось и расчетная кривая приняла вид Ob . Выпишем уравнение баланса энергии

$$dW_e = -ei dt = d\left(\int_0^\psi i d\psi\right) + r f dl_B, \quad (7-34)$$

где dW_e — малое приращение энергии, полученной из генератора, вычисленное в предположении, что напряжение на зажимах обмотки возбуждения практически равно индуктированной в обмотке э. д. с.,

$$u = -e = \frac{d\psi}{dt}. \quad (7-35)$$

Член с интегралом в правой части (7-34) выражает приращение запаса энергии в магнитном поле, а второй член — приращение так называемой коэнергии

$$dW_{coe} = f dl_B.$$

Последняя величина равна совершенной механической работе; буквой f обозначена сила, действующая на якорь в процессе его перемещения.

Подставим (7-35) в (7-34) и перегруппируем члены:

$$dW_{coe} = i d\psi - d \left(\int_0^\psi i d\psi \right). \quad (7-36)$$

Обратимся к рис. 7-8,б.

Площадь $(OcabO)$ равна площади $(Oc_1abb_1a_1O)$ минус площадь (Obb_1a_1O) .

Площадь $(OcaO)$ равна площади $(Ocaa_1O)$ минус площадь (Oaa_1O) .

Вычитая почленно второе равенство из первого, имеем:

Площадь $(OabO)$ равна площади $(a_1abb_1a_1)$ минус [площадь (Obb_1a_1O) минус площадь (Oaa_1O)]. (3-37)

Входящие в уравнение (7-37) площади соответствуют занимающим аналогичные места членам в уравнении (7-36). Действительно, площадь прямоугольника $(a_1abb_1a_1)$ (заштрихованная вправо на рис. 7-8,б) равна $i d\psi$ и выражает dW_e . Разность площадей в квадратных скобках уравнения (7-37) выражает приращение запаса магнитной энергии в системе dW_m . Следовательно, площадь $(OabO)$, заключенная между расчетными кривыми системы до и после перемещения, равна приращению коэнергии dW_{coe} . Величина же действующей на якорь силы равняется:

$$f = \frac{dW_{coe}}{dl_3}. \quad (7-38)$$

Для вычисления производной необходимо предварительно вычертить кривую $W_{coe} = f(l_3)$.

Глава восьмая

МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ ПРОСТЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФОРМ

8-1. ОБЗОР МЕТОДОВ РАСЧЕТА

Поскольку скалярный потенциал магнитного поля подчиняется уравнению Лапласа, а векторный потенциал — уравнениям Лапласа и Пуассона, большинство методов и приемов расчета электростатических полей распространяется и на магнитные поля.

Некоторые простейшие задачи, например о магнитных полях прямого проводника и коаксиального кабеля (§ 8-2, 8-3 и 8-6), решаются посредством закона пол-

ного тока и уравнения непрерывности, являющегося аналогией теоремы Гаусса.

Непосредственное применение закона Био-Савара показано на примерах магнитных полей отрезков тока конечной длины и кругового тока (§ 8-17 и 8-12), а также в вычислении скалярного магнитного потенциала замкнутого контура тока (§ 8-11).

Интегрирование уравнения Лапласа для магнитного поля методом Фурье-Ламе при двух независимых переменных описано ранее, в § 7-6 (расчет цилиндрического магнитного экрана).

Методом наложения удобно решаются задачи о магнитном поле в трубчатом проводнике коаксиального кабеля (§ 8-6) и двухпроводной линии (§ 8-8), о взаимной индуктивности двух двухпроводных линий (§ 8-21), о магнитном поле соленоида (§ 8-13), об индуктивности рамок (§ 8-22 и 8-23).

В § 8-10 показано несколько применений метода наложения к графическим построениям картин полей.

Частным случаем метода наложения является метод участков, обычно комбинируемый с методом средних потенциалов; в качестве примеров применения показано вычисление взаимной индуктивности двух прямых проводников конечной длины (§ 8-18), внешней индуктивности отрезка прямого цилиндрического провода (§ 8-19), прямоугольной рамки (§ 8-22) и короткой двухпроводной линии (§ 8-20).

Метод изображений удобен для расчета магнитных полей токов, протекающих вблизи границы двух сред (§ 8-24) и т. п.

Метод круговых гармоник показан на примерах расчета поля экранированной двухпроводной линии (§ 8-9) и поля цилиндрического электромагнита с сильно насыщенным сердечником (§ 8-16).

Задачи со сложными граничными условиями иногда успешно решаются посредством конформных преобразований, описанных в гл. 9, а чаще всего — приближенными методами. Они описаны ниже, в гл. 17.

8-2. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ВНУТРИ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОГО ПРЯМОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПРОВОДНИКА С ПОСТОЯННЫМ ТОКОМ

Совместим ось цилиндрических координат с осью проводника (рис. 8-1). Вектор плотности тока \vec{j} повсюду направлен по оси z ,

При постоянном токе распределение плотности тока по сечению проводника равномерно

$$\bar{\delta} = \delta_z K = \frac{I}{\pi r_0^2} \text{ К,}$$

где I — полное значение тока в проводнике;
 r_0 — радиус проводника.

Магнитная индукция \mathbf{B} в точке внутри проводника,

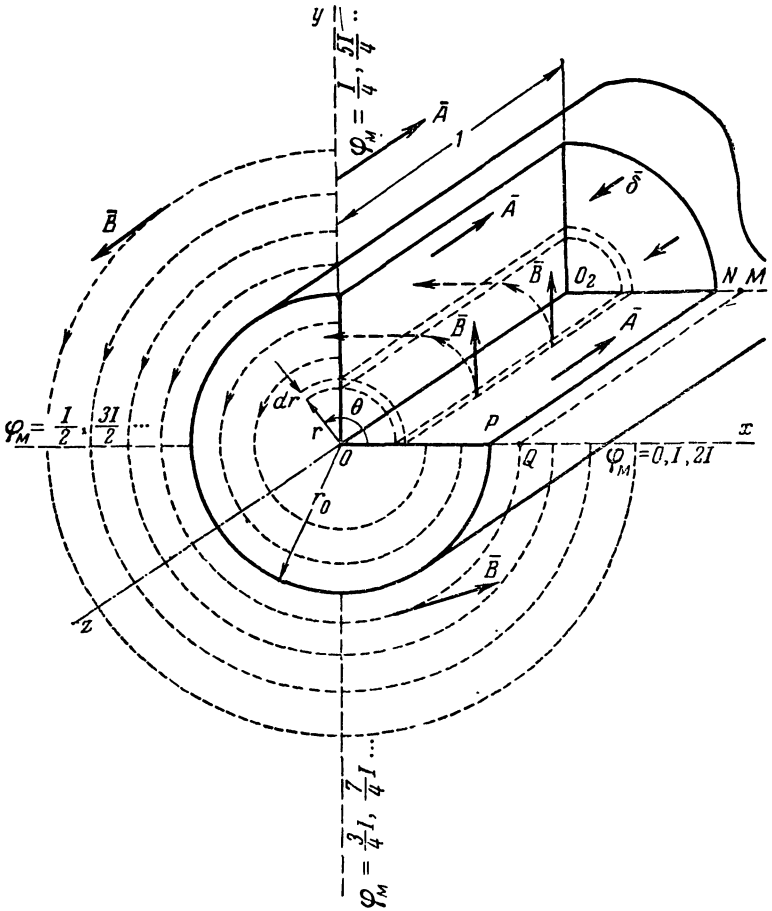


Рис. 8-1. Магнитное поле цилиндрического проводника с постоянным током.

находящейся на расстоянии r от оси, определится по закону полного тока

$$\oint_l \frac{1}{\mu_a} \mathbf{B} d\mathbf{l} = I_{0-r}. \quad (8-1)$$

Вследствие симметрии значение вектора \mathbf{B} не зависит от угла θ ; направление же вектора \mathbf{B} — везде по касательной к окружности радиусом r , проведенной из начала координат. $\mathbf{B} = B_\theta \cdot \mathbf{1}_\theta$. Интеграл (8-1) обращается в алгебраическое выражение

$$\oint_l \frac{1}{\mu_a} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \frac{B_\theta}{\mu_a} \int_0^{2\pi r} dl = \frac{B_\theta}{\mu_a} \cdot 2\pi r.$$

В правой части уравнения (8-1) стоит значение той части тока в проводнике I_{0-r} , которая оказывается обойденной в процессе вычисления интеграла левой части. При $\delta_z = \text{const}$ это значение равно:

$$I_{0-r} = \delta_z \pi r^2 = I \left(\frac{r}{r_0} \right)^2.$$

Таким образом,

$$\frac{B_\theta}{\mu_a} \cdot 2\pi r = I \left(\frac{r}{r_0} \right)^2,$$

откуда

$$B_\theta = \frac{\mu_a I}{2\pi r_0^2} r = \frac{\mu_a \delta_z r}{2}. \quad (8-2)$$

При равномерном распределении плотности тока по сечению значение магнитной индукции внутри цилиндрического проводника прямо пропорционально расстоянию от оси.

Согласно первому уравнению Максвелла (6-17) магнитное поле внутри проводника чисто вихревое; скалярного потенциала не существует. Векторный потенциал \mathbf{A} найдется из выражения ротора в цилиндрических координатах; поскольку вектор \mathbf{B} всегда расположен в плоскости, нормальной к оси проводника, вектор \mathbf{A} должен быть направлен вдоль оси, т. е. иметь только осевую

составляющую A_z . Таким образом,

$$\mathbf{B} = [\nabla A] = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \cdot \mathbf{1}_\theta = \frac{\mu_a \delta_z r}{2} \cdot \mathbf{1}_\theta.$$

Производные векторного потенциала по другим координатным направлениям отсутствуют вследствие симметрии.

Интегрируя, получаем:

$$A_z = -\frac{\mu_a \delta_z r^2}{4} + \text{const} = -\frac{\mu_a I}{4\pi} \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 + \text{const}.$$

Положим векторный потенциал на поверхности проводника ($r=r_0$) равным нулю, тогда

$$\text{const} = \frac{\mu_a \delta_z r_0^2}{4} = \frac{\mu_a I}{4\pi};$$

$$A_{z\text{внутри}} = \frac{\mu_a \delta_z}{4} (r_0^2 - r^2) = \frac{\mu_a I}{4\pi} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right); \quad \mathbf{A} = A_z \mathbf{k}. \quad (8-3)$$

Линии магнитной индукции являются линиями равного векторного потенциала (§ 6-7); уравнение линий магнитной индукции будет $r = \text{const}$; они будут окружностями, центрированными на оси проводника и расположенными в плоскостях, нормальных к оси.

Полное значение магнитного потока внутри проводника на единицу длины в осевом направлении z найдется по уравнению (6-12) путем вычисления циркуляции векторного потенциала по контуру OO_2NPO (рис. 8-1)

$$\Phi_{\text{внут}} = A_{z(r=0)} \cdot l = \frac{\mu_a \delta_z r_0^2}{4} = \frac{\mu_a I}{4\pi}. \quad (8-4)$$

Это выражение является составляющей линейного интеграла $\int \mathbf{A} d\mathbf{l}$ на осевом участке контура OO_2 ; остальные составляющие интеграла равны нулю, поскольку на поверхности проводника $A_z = 0$, а на радиальных участках контура O_2N и PO векторы \mathbf{A} и $d\mathbf{l}$ взаимно перпендикулярны.

При правильном вычерчивании картины поля между любой парой соседних линий магнитной индукции должна заключаться равная часть внутреннего магнитного потока; по (8-3) это сводится к условию, при котором

квадраты радиусов соседних линий следуют в арифметической прогрессии

$$r_{k+1}^2 - r_k^2 = \text{const.} \quad (8-5)$$

Если требуется разделить внутренний магнитный поток на n равных частей, радиусы линий магнитной индукции должны быть равными:

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{\frac{1}{n}} r_0; r_2 = \sqrt{\frac{2}{n}} r_0; \dots; r_k = \\ &= \sqrt{\frac{k}{n}} r_0; (k = 1, 2, \dots, n) \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (8-6)$$

Кольцеобразные части сечения проводника, разграниченные соседними линиями, равны друг другу и равны части сечения, окруженной линией магнитной индукции наименьшего радиуса (r_1).

8-3. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ СНАРУЖИ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОГО ПРЯМОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПРОВОДНИКА С ТОКОМ

Вектор \mathbf{B} и здесь имеет только касательную составляющую $\mathbf{B} = B_\theta \cdot \mathbf{1}_\theta$. Ее значение находится по закону полного тока (рис. 8-1)

$$\frac{1}{\mu_0} \oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = I.$$

Интегрируя по окружности радиусом r_1 ($r_1 > r_0$), имеем:

$$\frac{1}{\mu_0} B_\theta \cdot 2\pi r_1 = I,$$

откуда

$$\mathbf{B} = B_\theta \cdot \mathbf{1}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} \cdot \mathbf{1}_\theta. \quad (8-7)$$

Значение вектора магнитной индукции снаружи проводника обратно пропорционально расстоянию от оси. Внутри проводника оно было прямо пропорционально такому расстоянию. Другими словами, магнитные поля внутри и снаружи проводника с током не только количественно, но и качественно различны.

Дивергенция и ротор выражения (8-7) равны нулю. Значит, снаружи проводника имеются и скалярный и

векторный потенциалы магнитного поля. Скалярный потенциал φ_M находится с помощью выражения градиента в цилиндрических координатах:

$$-\frac{1}{r_1} \cdot \frac{\partial \varphi_M}{\partial \theta} = \frac{1}{\mu_0} B_\theta = H_\theta;$$

$$\varphi_M = -\frac{I}{2\pi} \theta + \text{const.}$$

Плоскости равного скалярного магнитного потенциала, очевидно, подчиняются уравнению $\theta = \text{const.}$ Это будут радиальные плоскости, проведенные через ось проводника. Физический смысл имеют лишь части плоскостей, расположенные снаружи проводника.

Считая скалярный магнитный потенциал одной из таких плоскостей, лежащей по радиусу (OPQ), равным нулю, получаем, что постоянная обратится в нуль и

$$\varphi_M = -\frac{I}{2\pi} \theta. \quad (8-8)$$

Угол θ отсчитывается от избранного радиуса OPQ (рис. 8-1). Заметим, что скалярный магнитный потенциал многозначен. Значение дуги θ может быть увеличено на произвольное число целых окружностей. В расчетах магнитных цепей всегда имеют дело с разностью скалярных магнитных потенциалов, измеряемой в ампер-витках ($ав$) и называемой намагничивающей силой (н. с.). Одна и та же н. с., скажем 1 000 $ав$, может быть получена либо от одного провода с током 1 000 a (однократный обход тока в 1 000 a), либо от пучка в 10 000 проводов, несущих ток 0,1 a (обход тока 0,1 a 10 000 раз).

Векторный потенциал \mathbf{A} находится из выражения ротора в цилиндрических координатах. Вектор \mathbf{A} направлен по оси проводника, т. е. имеет только одну осевую составляющую,

$$\mathbf{A} = A_z \mathbf{k}.$$

Ее величина определится из уравнения (см. § 8-2)

$$-\frac{\partial A_z}{\partial r_1} = B_\theta. \quad (8-9)$$

Подставляя значение B_0 из (8-7) и интегрируя, получаем:

$$A_{z \text{ внеш}} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r_1 + \text{const}_1. \quad (8-10)$$

На поверхности проводника ($r=r_0$) значение векторного потенциала должно быть равно нулю. Так было принято при исследовании магнитного поля внутри проводника. Поэтому

$$\text{const}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r_0 \text{ и } A_{z \text{ внеш}} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_0}. \quad (8-11)$$

Линии магнитной индукции (линии $A_{z \text{ внеш}} = \text{const}$) являются линиями постоянного радиуса ($r_1 = \text{const}$), т. е. окружностями, центрированными на оси проводника.

По (6-12) величина магнитного потока, заключенного между парой линий, имеющих радиусы r'_n и r'_{n+1} , и рассчитанного на единицу длины проводника, равна:

$$\Delta\Phi_n = \oint_l \mathbf{A} d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r'_{n+1}}{r'_n}.$$

Условию $\Delta\Phi_n = \text{const}$ соответствует

$$\frac{r'_{n+1}}{r'_n} = \text{const}' = a. \quad (8-12)$$

Следовательно, радиусы линий магнитной индукции снаружи проводника должны возрастать в геометрической прогрессии.

8-4. ВНУТРЕННЯЯ ИНДУКТИВНОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПРОВОДНИКА

Внутренняя индуктивность определяется величиной сцепления тока с магнитным потоком, заключенным внутри сечения проводника. Вычисление ее необходимо в случае постоянного тока или тока низкой частоты в проводниках, поперечные размеры которых не очень малы по сравнению с расстоянием между проводами или другими размерами контура. Например, это существенно в расчете кабелей. В расчете же воздушных электрических линий с медными или алюминиевыми проводами внутренней индуктивностью часто пренебрегают, так как

лишь незначительная часть общего магнитного потока заключена внутри проводов. Внутренняя индуктивность уменьшается при увеличении частоты вследствие поверхностного эффекта.

Рассмотрим цилиндрический проводник с постоянным током (рис. 8-1). Распределение плотности тока по всему сечению проводника равномерно. Значение магнитной индукции в тонком кольцевом слое dr , имеющем радиус r , определяется по уравнению (8-2).

Поток, пронизывающий тонкую площадку шириной dr и длиной l (в направлении, перпендикулярном чертежу),

$$d\Phi = B dr \cdot l = \frac{\mu_a I}{2\pi} \frac{r}{r_0^2} dr. \quad (8-13)$$

Этот элементарный поток сцеплен только с током I_{0-r} , составляющим (r^2/r_0^2) -ю часть общего тока; следовательно, обусловленное им элементарное потокосцепление равно:

$$d\psi = d\Phi \frac{r^2}{r_0^2} = \frac{\mu_a I}{2\pi} \frac{r^3}{r_0^4} dr.$$

Внутренняя индуктивность (на единицу длины провода в направлении, перпендикулярном чертежу)

$$L'_{\text{внут}} = \frac{\psi}{I} = \frac{\mu_a}{2\pi r_0^4} \int_0^{r_0} r^3 dr = \frac{\mu_a}{8\pi}. \quad (8-14)$$

8-5. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ДЛИННОГО ТРУБЧАТОГО ПРОВОДНИКА С ТОКОМ

Магнитное поле снаружи трубчатого проводника не отличается от магнитного поля тонкого одиночного проводника, проходящего по оси трубы и несущего такой же ток.

Заметим, что при наличии близко расположенных других проводников с токами эквивалентный тонкий одиночный проводник должен быть смещен от оси трубы.

При симметричном распределении тока по окружности трубы магнитное поле во внутренней полости трубы отсутствует. В доказательство проведем две плоскости,

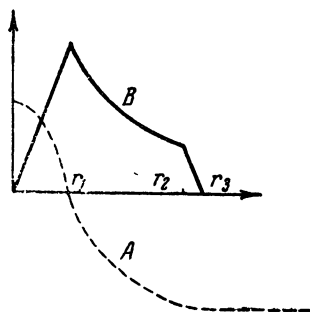
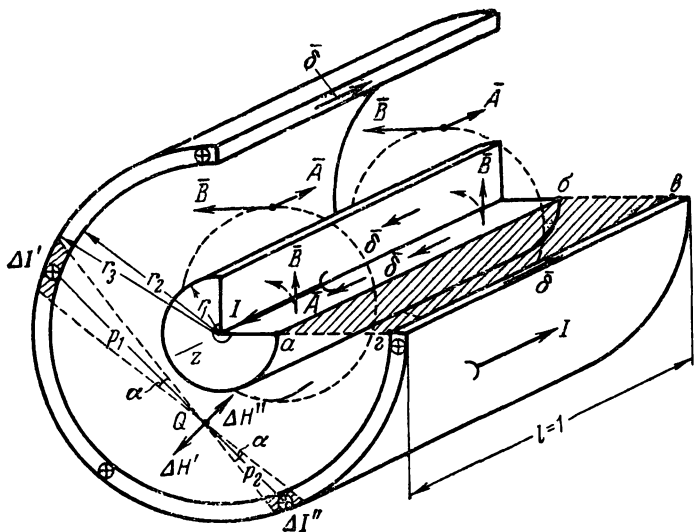


Рис. 8-2. Магнитное поле коаксиального кабеля.

параллельные оси трубы, под малым углом α друг к другу (рис. 8-2). Величины токов, проходящих в отсекаемых этими плоскостями волокнах трубы, пропорциональны расстояниям ρ_1 и ρ_2

$$\frac{\Delta I'}{\rho_1} = \frac{\Delta I''}{\rho_2}. \quad (8-15)$$

Определяемые токами этих волокон векторы напряженности поля в точке Q направлены в разные стороны

$$\Delta H' = \frac{\Delta I'}{2\pi r_1}; \quad \Delta H'' = \frac{\Delta I''}{2\pi r_2}.$$

Из (8-15) видно, что $\Delta H' = \Delta H''$ и $\Delta H = \Delta H' - \Delta H'' = 0$.

Следовательно, токи в двух рассмотренных волокнах трубы не имеют магнитного поля во внутренней полости. Поскольку всю трубу можно представить состоящей из таких пар волокон, убеждаемся, что магнитного поля во внутренней полости существовать не может.

8-6. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ КОАКСИАЛЬНОГО КАБЕЛЯ

Согласно выводам § 8-5 ток в наружном трубчатом проводнике кабеля не имеет никакого магнитного поля во внутренней полости и в толще центрального проводника.

Поэтому магнитное поле внутри центрального проводника (рис. 8-2) ничем не отличается от поля внутри уединенного цилиндрического проводника, рассмотренного в § 8-2.

Магнитное поле в пространстве между проводниками ничем не отличается от поля снаружи прямого тока, рассмотренного в § 8-3.

Расчет поля в толще наружного проводника проще всего произвести методом наложения, вычитая из величины индукции, рассчитанной по (8-7) для $r_2 < r < r_3$ (рис. 8-2), дополнительную слагающую индукции, обусловленную частью тока в толще наружного проводника, обходимой при вычислении циркуляции вектора \mathbf{B} по окружности радиусом r . При равномерном распределении тока по сечению проводников кабеля

$$\mathbf{B}_{\text{тр}} = \frac{\mu'_a I}{2\pi r} \left\{ 1 - \frac{\pi (r_3^2 - r_2^2)}{\pi (r_3^2 - r_2^2)} \right\} \mathbf{1}_\theta = \frac{\mu'_a I}{2\pi} \frac{(r_3^2 - r^2)}{r (r_3^2 - r_2^2)} \cdot \mathbf{1}_\theta. \quad (8-16)$$

Здесь μ'_a — абсолютная магнитная проницаемость материала трубы.

Магнитное поле в толще трубы чисто вихревое; скалярный потенциал не существует.

Векторный потенциал \mathbf{A} проще всего найти интегри-

рованием (8-9), подставив в него значение $V_{тр}$ из (8-16).

Постоянную интегрирования находят из условия непрерывности функции A_z на внутренней поверхности трубы; при $r=r_2$ значение A_z должно быть одинаковым с вычисленным по (8-11) (при замене $r_0=r_1$ по рис. 8-2). Опуская промежуточные выкладки, приводим результат

$$A_{z \text{ тп}} = -\frac{I}{2\pi} \left\{ \frac{\mu'_a r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \ln \frac{r}{r_2} + \mu_0 \ln \frac{r_2}{r_1} - \frac{\mu'_a (r^2 - r_2^2)}{2(r_3^2 - r_2^2)} \right\}. \quad (8-17)$$

Снаружи кабеля (т. е. при $r > r_3$, рис. 8-2) магнитное поле отсутствует. Это вытекает из закона полного тока. По какому бы пути ни был взят линейный интеграл напряженности магнитного поля снаружи кабеля, полная величина обойденного тока будет равна нулю, поскольку во внутреннем и наружном проводниках кабеля протекают равные токи различных направлений. Иначе говоря, интеграл типа (6-20) снаружи кабеля равен нулю при любых пределах. Следовательно, подынтегральное выражение равно нулю ($H_{нар} = 0$); поэтому и $V_{нар} = 0$.

Скалярный потенциал снаружи кабеля может быть равен любой постоянной.

Векторный потенциал также постоянен; его величина в любой точке будет равна вычисленной по (8-17) при $r=r_3$.

На рис. 8-2 показаны также кривые изменения величин магнитной индукции и векторного потенциала в зависимости от расстояния от оси кабеля.

8-7. ИНДУКТИВНОСТЬ КОАКСИАЛЬНОГО КАБЕЛЯ

Индуктивность коаксиального кабеля состоит из трех слагаемых:

а) внутренней индуктивности центрального проводника $L'_{внут}$, определяемой по (8-14);

б) внешней индуктивности, определяемой магнитным потоком между проводниками; она может быть рассчитана по формуле (6-41) при подстановке значений векторного потенциала из уравнения (8-11).

Контуром интегрирования является периметр прямоугольника *абвга* на рис. 8-2. Рабочей частью контура

является лишь сторона $вг$, где значение A_z равно:

$$A_{z(вг)} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (8-18)$$

Интегрирование по другим сторонам дает нулевые результаты, поскольку на участках $бв$ и $га$ \mathbf{A} и $d\mathbf{l}$ взаимно перпендикулярны, а на участке $аб$ ($r=r_1$) равно нулю значение векторного потенциала. Значение внешней индуктивности на единицу длины кабеля

$$L'_{\text{внеш}} = \frac{1}{l} A_{z(вг)} (-1) = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}; \quad (8-19)$$

в) внутренней индуктивности наружного трубчатого проводника, рассчитываемой исходя из вычисления потокосцепления (подобно расчету в § 8-4).

Опуская вычисления, приводим окончательный результат (на единицу длины кабеля)

$$L''_{\text{внут}} = \frac{\mu_a'}{2\pi (r_3^2 - r_2^2)} \left(\frac{r_3^4}{r_3^2 - r_2^2} \ln \frac{r_3}{r_2} - \frac{3r_3^2 - r_2^2}{4} \right). \quad (8-20)$$

Полное значение индуктивности на единицу длины кабеля

$$L' = L'_{\text{внут}} + L'_{\text{внеш}} + L''_{\text{внут}}. \quad (8-21)$$

8-8. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ДВУХПРОВОДНОЙ ЛИНИИ

Пусть линия состоит из очень длинных параллельных друг другу прямых проводов; допустим вначале, что радиус провода r мал по сравнению с расстоянием между центрами проводов $2H$ (рис. 8-3). Окружающая среда—воздух.

Поместим начало координат в точку O , находящуюся посредине линии, соединяющей центры сечений проводов.

Расчет векторного потенциала в некоторой точке m , лежащей вне сечений проводов, можно производить методом наложения, пользуясь (8-10) и имея в виду, что направления токов в проводах противоположны друг другу.

Вектор \mathbf{A} направлен вдоль токов в линии.

Расположим оси координат, как показано на рис. 8-3. Тогда $\mathbf{A} = A_z \mathbf{k}$;

$$A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} (\ln r_1 - \ln r_2) + \text{const}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} + \text{const}_1. \quad (8-22)$$

Здесь r_1 и r_2 — расстояния от заданной точки до осей проводов.

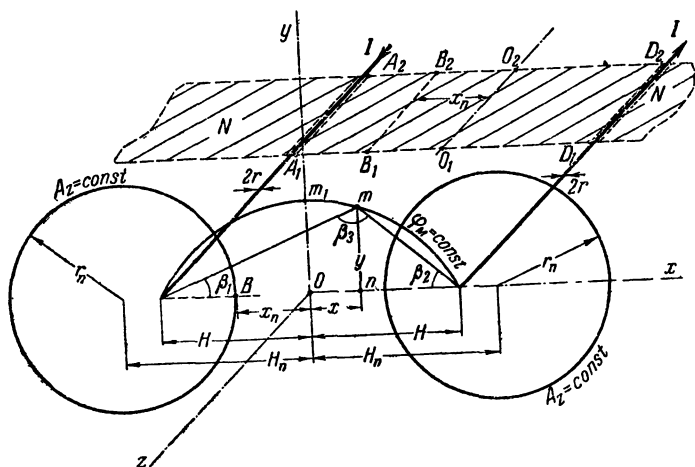


Рис. 8-3. К расчету магнитного поля двухпроводной линии из тонких проводов.

Используя аналогию с выражением (4-39), найдем, что кривые $A_z = \text{const}$, т. е. линии магнитной индукции, будут окружностями с центрами, лежащими на оси x . Они практически совпадут с эквипотенциальными линиями электростатического поля разноименно заряженных параллельных осей (§ 4-14).

Магнитная индукция \mathbf{B} в любой точке вне проводов может быть также найдена с помощью формулы (8-7) и метода наложения [Л. 15, задача 4,41].

Составим расчетные формулы для \mathbf{A} и \mathbf{B} в точках плоскости, проходящей через оси проводов,

$$\mathbf{A} = A_z \mathbf{k}; \quad \mathbf{B} = [\nabla A] = -\frac{\partial A_z}{\partial x} \mathbf{j} = B_y \mathbf{j}. \quad (8-23)$$

Положим $A_z=0$ в начале координат ($x=0$; $r_2=r_1$); тогда постоянная const_1 обращается в нуль и (8-22) принимает вид:

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{H-x}{H+x}. \quad (8-24)$$

Магнитная индукция в точках этой плоскости равна:

$$B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{H}{H^2 - x^2}. \quad (8-25)$$

Найдем уравнение линий скалярного магнитного потенциала Φ_M . Положим $\Phi_M=0$ на лежащих вне контура линии частях NN плоскости, проходящей через оси проводов. Применяя (8-8) и метод наложения, найдем, что значение Φ_M в точке m (рис. 8-3) равно:

$$\Phi_M = -\frac{I}{2\pi} \{\beta_1 - (\pi - \beta_2)\} = \frac{I}{2\pi} \beta_3. \quad (8-26)$$

Уравнение $\Phi_M = \text{const}$ сводится к условию $\beta_3 = \text{const}_1$. Линии $\Phi_M = \text{const}$ являются окружностями с центрами на оси; в случае тонких проводов они совпадают с линиями напряженности электростатического поля разноименно заряженных параллельных осей (§ 4-14).

Если радиус r проводов двухпроводной линии не является малым по сравнению с расстоянием между их осями $2H$, картины магнитного и электрического полей вне проводов будут отличаться друг от друга (рис. 8-4). Периметры сечения проводников не будут совпадать с линиями магнитной индукции; другими словами, вектор напряженности магнитного поля на поверхности проводника будет иметь не только касательную, но и нормальную составляющую. Точный учет этого фактора требует обременительных вычислений; ограничимся рассмотрением упрощенного случая, когда распределение плотности тока по сечению проводников можно считать равномерным и материал проводов не является ферромагнитным.

Линии магнитной индукции внутри проводника должны стягиваться к некоторой точке, характеризующейся значением магнитной индукции, равным нулю. Назовем линию, проходящую через эту точку и параллельную геометрической оси проводника, магнитной осью. Магнитная ось будет смещена от геометрической наружу на расстояние $\Delta = h' - H$, которое можно найти из уравнения $B=0$. Применяя (8-2) и (8-7), найдем:

$$\Delta = -\frac{H}{2} + \sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 + \frac{r^2}{2}}. \quad (8-27)$$

Различие в картинах магнитного и электрического полей вне проводов двухпроводной линии объясняется тем, что электрические

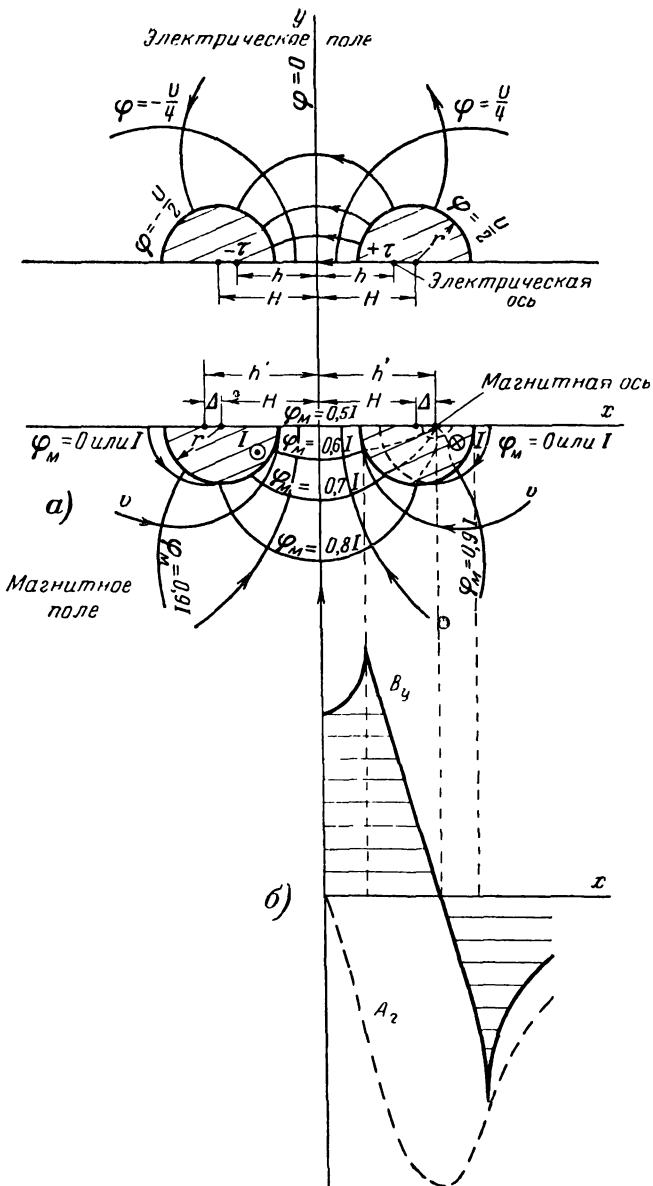


Рис. 8-4. Сравнение картин электрического и магнитного полей двухпроводной линии из толстых проводов.

оси смещаются внутрь (см. § 4-15), в то время как магнитные — наружу. В случае тонких проводов ($r \ll 0,2H$) оба смещения незначительны и соответствие картин полей можно считать практически точным.

Заметим, что и при очень высокой частоте, когда вследствие поверхностного эффекта ток локализуется в очень тонком поверхностном слое проводника, распределение поверхностной плотности тока по периметру сечения проводника будет неравномерным; следовательно, соответствие картин магнитного и электрического полей также остается лишь приближительным.

При высокой частоте магнитное поле внутри проводников можно считать практически отсутствующим.

Магнитное поле снаружи проводников можно практически рассчитывать при допущении, что токи сосредоточены в тонких нитях, совпадающих с магнитными осями.

На рис. 8-4,б приведены кривые изменения величин B_y и A_z вдоль оси x .

Внешний магнитный поток и внешнюю индуктивность определяют путем вычисления интеграла (6-12) по контуру $A_1A_2 D_2D_1A_1$ на рис. 8-3, используя значение $A_z(x=H-r)$ из (8-24),

$$L_{\text{внеш}} = \frac{\Phi_{\text{внеш}}}{I} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{2H-r}{r}. \quad (8-28)$$

При тонких проводах ($r \ll H$)

$$L_{\text{внеш}} \approx \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{2H}{r}. \quad (8-29)$$

К внешней индуктивности прибавляется внутренняя индуктивность обоих проводов, рассчитываемая по (8-14).

8-9. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ДВУХПРОВОДНОЙ ЛИНИИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ФЕРРОМАГНИТНОМ ЭКРАНЕ

Пусть двухпроводная линия из тонких проводов радиусом r_0 , отстоящих друг от друга на расстояние $2H \gg r_0$, проложена в цилиндрическом экране, имеющем соответственно внутренний и наружный радиусы R_1 и R_2 (рис. 8-5).

Магнитная проницаемость материала экрана равна $\mu_{\text{ав}}$, а магнитная проницаемость среды внутри и снаружи

экрана пусть будет μ_0 . Совместим ось цилиндрических координат с осью системы O .

Значение векторного потенциала магнитного поля, обусловленного током I в проводах линии, в некоторой точке m , находящейся на расстояниях r_1 и r_2 от осей

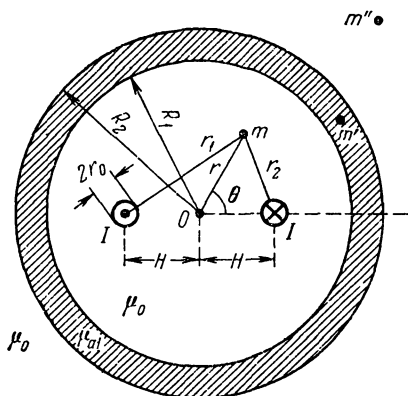


Рис. 8-5. К расчету магнитного поля экранированной двухпроводной линии.

проводов, можно определить по (8-22). Полагая $A_z=0$ в точке O , записываем:

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (8-30)$$

Решение задачи проведем методом круговых гармоник.

Из рис. 8-5 видно, что

$$r_2^2 = r^2 + H^2 - 2Hr \cos \theta. \quad (8-31)$$

Заменим $2 \cos \theta = e^{j\theta} + e^{-j\theta}$, вынесем за скобки r^2 и проведем разложение на множители

$$r_2^2 = r^2 \left(1 - \frac{H}{r} e^{j\theta}\right) \left(1 - \frac{H}{r} e^{-j\theta}\right). \quad (8-32)$$

Аналогично

$$r_1^2 = r^2 + H^2 + 2Hr \cos \theta = r^2 \left(1 + \frac{H}{r} e^{j\theta}\right) \times \\ \times \left(1 + \frac{H}{r} e^{-j\theta}\right). \quad (8-33)$$

Таким образом, логарифм в формуле (8-30) распадается на четыре слагаемых

$$\ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = \frac{1}{2} \left[\ln \left(1 - \frac{H}{r} e^{j\theta}\right) + \right. \\ \left. + \ln \left(1 - \frac{H}{r} e^{-j\theta}\right) - \ln \left(1 + \frac{H}{r} e^{j\theta}\right) - \right. \\ \left. - \ln \left(1 + \frac{H}{r} e^{-j\theta}\right) \right].$$

Каждый из этих логарифмов разлагается в ряд. Члены рядов с четными степенями сократятся. После замены $e^{jk\theta} + e^{-jk\theta} = 2 \cos k\theta$ получим:

$$\ln \frac{r_2}{r_1} = - \left[\frac{H}{r} \cos \theta + \frac{1}{3} \left(\frac{H}{r}\right)^3 \cos 3\theta + \right. \\ \left. + \frac{1}{5} \left(\frac{H}{r}\right)^5 \cos 5\theta + \dots \right] \quad (r > H). \quad (8-34)$$

Этот ряд сходится при $r > H$; для областей, где $r < H$, необходимо вместо r^2 выносить за скобки H^2 ; в результате получится разложение

$$\ln \frac{r_2}{r_1} = - 2 \left[\left(\frac{r}{H}\right) \cos \theta + \frac{1}{3} \left(\frac{r}{H}\right)^3 \cos 3\theta + \right. \\ \left. + \frac{1}{5} \left(\frac{r}{H}\right)^5 \cos 5\theta + \dots \right] \quad (r < H). \quad (8-35)$$

Для учета влияния экрана используем метод изображений. Примем, что токи-изображения, находящиеся в толще экрана, параллельны токам в проводах и что обусловленный ими дополнительный векторный потенциал A_{zu} также разлагается на круговые гармоники не-

четных порядков. Для области внутри экрана подойдет формула, содержащая ряд, аналогичный (8-35),

$$A_{zu} = -\frac{\mu_0 I}{\pi} \sum K_n r^n \cos n\theta \quad (n = 1, 3, 5 \dots), \quad (8-36)$$

где K_n — постоянные коэффициенты.

Для области вне экрана ($r > R_2$) потребуется формула, содержащая ряд, аналогичный (8-34). Она совпадет по виду с (8-36), лишь показатели степеней n будут отрицательными.

Полные значения векторного потенциала получатся путем суммирования выражений (8-36) и (8-30) при подстановке в последнее подходящего разложения (8-34) или (8-35).

Внутри экрана ($r \leq R_1$)

$$A_{z1} = -\frac{\mu_0 I}{\pi} \sum \left(\frac{1}{nH^n} + K_n \right) r^n \cos n\theta$$

$$(0 \leq r \leq H; n = 1, 3, 5 \dots) \quad (8-37)$$

или

$$A'_{z1} = -\frac{\mu_0 I}{\pi} \sum \left[\frac{1}{n} \left(\frac{H}{r} \right)^n + K_n r^n \right] \cos n\theta$$

$$(H \leq r \leq R_1; n = 1, 3, 5 \dots). \quad (8-38)$$

Формула типа (8-38) будет подходящей и для области в толще экрана ($R_1 \leq r \leq R_2$). Обозначим постоянные для этой области другими буквами (M_n и N_n)

$$A_{z2} = -\frac{\mu_{av} I}{\pi} \sum \left(\frac{M_n}{r^n} + N_n r^n \right) \cos n\theta$$

$$(R_1 \leq r \leq R_2; n = 1, 3, 5 \dots). \quad (8-39)$$

В области вне экрана ($r \geq R_2$) в выражении векторного потенциала должны присутствовать лишь члены, содержащие $1/r^n$, поскольку при $r \rightarrow \infty$ значение A_{z3} должно обращаться в нуль. Это вытекает из общей формулы (8-30); аргумент логарифма на больших расстояниях от проводов линии стремится к 1.

Постоянные для внешней области обозначим буквой P_n

$$A_{z3} = -\frac{\mu_0 I}{\pi} \sum \frac{P_n}{r^n} \cos n\theta \quad (r \geq R_2; n = 1, 3, 5 \dots). \quad (8-40)$$

Пользуясь выражением ротора в цилиндрических координатах (приложение П-1), устанавливаем, что магнитная индукция имеет две составляющие — радиальную B_r и касательную B_θ :

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta}; \quad B_\theta = -\frac{\partial A_z}{\partial r}. \quad (8.41)$$

Для определения постоянных K_n , M_n , N_n и P_n используются граничные условия (§ 6-8) — непрерывность радиальных составляющих магнитной индукции и касательных составляющих напряженности магнитного поля на внутренней и наружной поверхностях экрана. Граничные условия сохраняют силу для любых значений координатного угла θ . Это возможно лишь при подчинении им по отдельности каждой пары (соответствующих одному и тому же значению n) членов рядов, содержащихся в формулах магнитной индукции, получаемых путем дифференцирования выражений векторного потенциала (8-37) — (8-40) согласно закономерностям (8-41).

Из получаемых таким образом n систем алгебраических уравнений, содержащих по четыре уравнения с четырьмя искомыми постоянными в каждой, находятся значения K_n , M_n , N_n и P_n . После подстановки постоянных в формулы магнитной индукции получаются хорошо сходящиеся ряды. Во внешней области, при $r > 5H$ второй член ряда оказывается меньше 1% от первого члена; последующие члены ничтожны.

Величина магнитной индукции во внешней области оказывается равной

$$B_{r\text{внеш}} = B_n \sin \theta; \quad B_{\theta\text{внеш}} = -B_n \cos \theta, \quad (8.42)$$

где

$$B_n \approx \frac{4\mu_0\mu_a IH}{\pi r^2 \left[(\mu_a + 1)^2 - (\mu_a - 1)^2 \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right]}; \quad (8.43)$$

$\mu_a = \frac{\mu_{\text{аэ}}}{\mu_0}$ — относительная магнитная проницаемость материала экрана.

8-10. ГРАФИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ КАРТИНЫ ПОЛЯ ПО ПРИНЦИПУ НАЛОЖЕНИЯ

а) Рассмотрим сперва пример построения магнитного поля двухпроводной линии, имеющей тонкие провода (рис. 8-6).

В верхней части чертежа вычерчены окружности линий магнитной индукции каждого из тонких проводов в отдельности в соот-

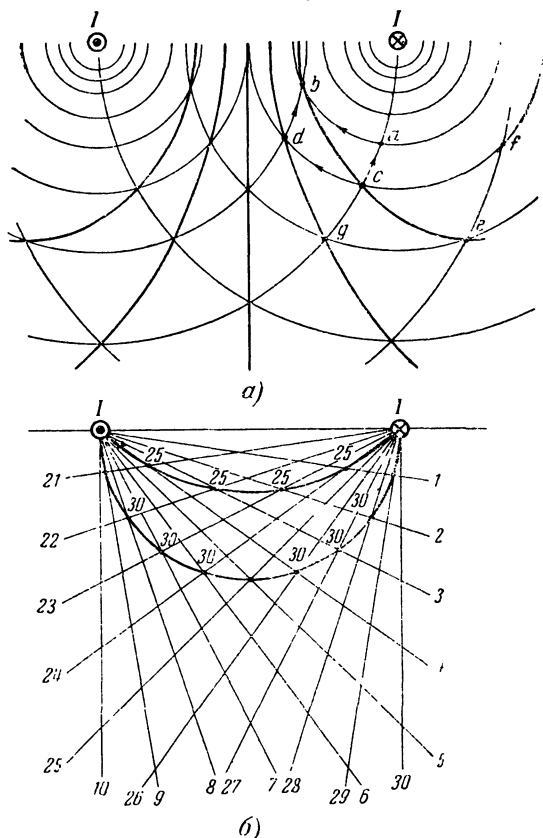


Рис. 8-6. Построение магнитного поля двухпроводной линии методом наложения.

ветствии с правилом геометрической прогрессии, установленным в § 8-3.

Вообразим второй точно такой же чертеж за рис. 8-6,а на расстоянии, равном единице длины (в масштабе чертежа).

Поток, обусловленный током в левом проводнике и пронизывающий площадку $(ab)l$, равен потоку, обусловленному током в правом проводнике и пронизывающему площадку $(ca)l$. Первый

из этих потоков можно считать пропорциональным произведению $H_{\pi} \frac{(ab) + (cd)}{2}$, где H_{π} — среднее значение напряженности поля в элементе площади $abcd$, обусловленной током в левом проводнике. Второй поток можно считать пропорциональным произведению $H_{\pi p} \frac{(ca) + (db)}{2}$, где $H_{\pi p}$ — среднее значение напряженности поля в

элементе площади $abcd$, обусловленной током в правом проводнике.

Если знаменатель прогрессии радиусов не очень велик, то криволинейный параллелограмм $abcd$ можно принять за обычный параллелограмм; тогда $ab=cd$ и $ca=db$.

Из равенства указанных потоков следует:

$$H_{\pi}(cd) = H_{\pi p}(ca); \quad \frac{H_{\pi}}{H_{\pi p}} = \frac{(ca)}{(cd)}. \quad (8-44)$$

Отрезок ca служит мерой H_{π} ; отрезок cd является мерой $H_{\pi p}$; диагональ параллелограмма cb будет мерой результирующей напряженности поля. Аналогично отрезок ec будет мерой результирующей напряженности поля в элементе площади cge и т. д.

При неограниченном уменьшении знаменателя прогрессии радиусов отрезок ломаной ecb превратится в дугу ecb , представляющую отрезок линии магнитной индукции рассматриваемой системы двух токов.

На рис. 8-6,б показано построение линий равного магнитного скалярного потенциала двухпроводной линии. Проводятся линии равного потенциала от каждого провода в отдельности; это будут лучи, радиально расходящиеся от проводов. Предположим, что величина $I=40$ условных единиц; тогда соседние лучи, проведенные под углом $\frac{360}{40} = 9^\circ$ друг к другу, будут иметь потенциалы, отличающиеся на единицу.

Разметка величин потенциалов на отдельных лучах должна быть сделана с учетом направления токов в проводах. Результирующий скалярный потенциал в любой точке равен алгебраической сумме скалярных потенциалов, определяемых токами в отдельных проводах.

Находим точки пересечения проведенных радиусов, в которых сумма потенциалов равна, например, 30; соединяющую их ломаную линию легко вписать в дугу окружности, выражающей линию равного скалярного потенциала $\Phi_{\Sigma}=30$.

Рассмотрим другие параметры картин магнитных полей, построенных по принципу наложения.

б) Магнитное поле двух параллельных прямых равных токов одного направления (рис. 8-7). Поле имеет две взаимно перпендикулярные плоскости симметрии; в одной из них лежат оба тока. Линии магнитной индукции непосредственно у поверхности проводов (Q, R) имеют вид, близкий к окружностям с центрами вблизи осей проводов.

По мере удаления от проводов линии магнитной индукции деформируются; одна из линий будет лемнискоидальной M , проходящей через точку ветвления O , в которой результирующая магнитная ин-

дукция равна нулю. При достаточно большом удалении, когда весь ток $2I$ можно сосредоточить в точке O , линии магнитной индукции (типа s) будут приближаться по форме к окружностям с центром в точке O .

Пусть интервал Φ_m будет $1/40$. В непосредственной близости к правому проводу потенциал, обусловленный током в левом проводе

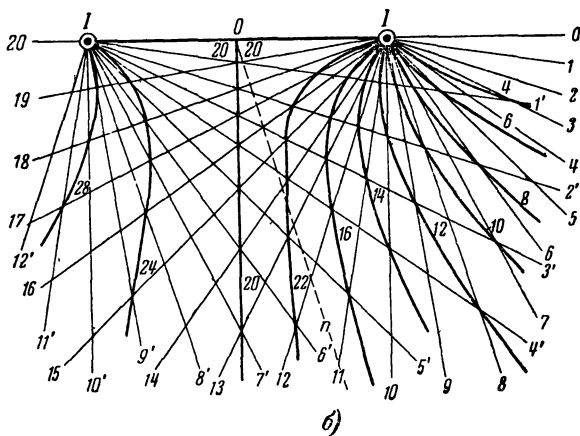
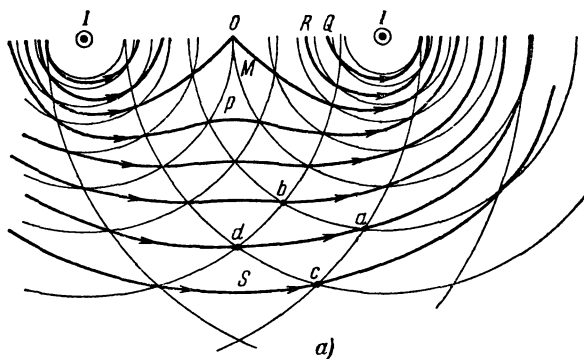


Рис. 8-7. Построение картины магнитного поля двух одинаковых параллельных токов одного направления.

де, равен нулю. Поэтому каждая линия, соответствующая $\Phi_m < 20$, должна выходить из правого провода по касательной к лучу с номером, равным данному значению Φ_m . Так, линия для $\Phi_m = 16$ выходит из правого провода по касательной к лучу 16 и т. д.

Вблизи левого провода потенциал, обусловленный током в правом проводе, равен 20. Поэтому из левого провода выходят эквипотенциальные линии для $\Phi_m > 20$; каждая из них выходит по касательной к лучу, имеющему номер со штрихом на 20 меньше значе-

ния Φ_m , например линия $\Phi_m=28$ выходит по касательной к лучу $8'$ и т. д.

На очень большом расстоянии от проводов магнитное поле будет по форме приближаться к полю одиночного проводника с двойным током $2I$, расположенного в центре тяжести системы, т. е. в точке O . Поэтому, например, эквипотенциальная линия $\Phi_m=16$

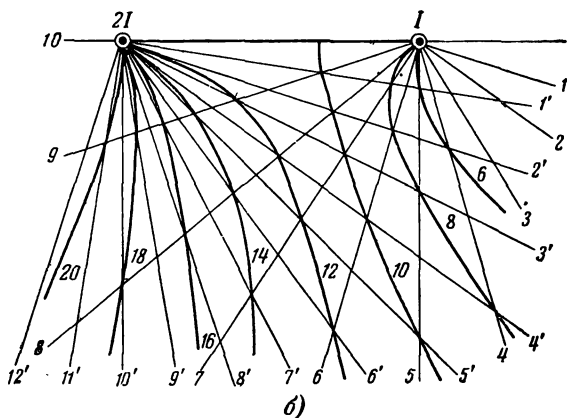
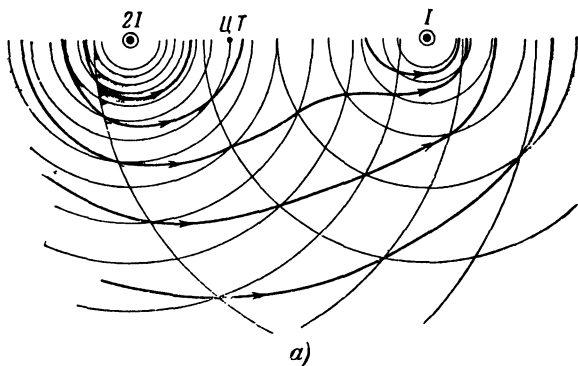


Рис. 8-8. Построение картины магнитного поля двух параллельных токов различных величин.

будет иметь асимптотой прямую On , проведенную из точки O под углом $\frac{16}{40} \pi = 0,4\pi = 72^\circ$ к линии $\Phi_m=0$.

Эквипотенциальная линия $\Phi_m=20$, соответствующая линиям симметрии системы, состоит из двух прямых, расположенных в виде буквы Γ .

в) Магнитное поле двух длинных параллельных между собой тонких проводов, в одном из которых ток равен I , а в другом $2I$ (рис. 8-8).

Здесь углы между лучами при построении эквипотенциальных линий следует брать соответствующими одинаковым интервалам изменения скалярного магнитного потенциала вокруг каждого из проводов. Если угол между соседними лучами, проводимыми от провода с током I , равен α , то угол между лучами, проводимыми от провода с током $2I$, должен быть $\alpha/2$.

Аналогичное условие равенства интервалов потока следует соблюдать при построении линий магнитной индукции. Поэтому знаменатель геометрической прогрессии для радиусов линий магнитной индукции вокруг тока I должен быть квадратом знаменателя для радиусов вокруг тока $2I$.

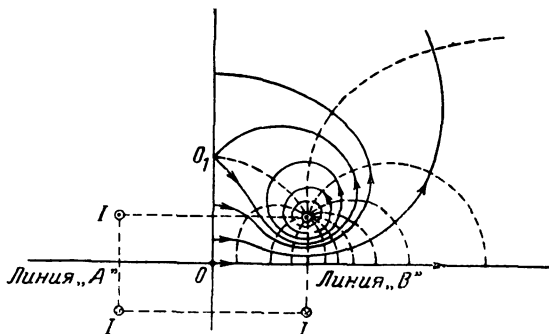


Рис. 8-9. Магнитное поле двух параллельных двухпроводных линий.

г) Магнитное поле двух двухпроводных линий, провода которых расположены по ребрам прямоугольной призмы, показано на рис. 8-9; магнитные поля линий складываются. Линия ветвления ($H_t=0$) проходит через точку O_1 .

д) Магнитные поля двух параллельных между собой плоских катушек с равными токами, находящихся на одной оси, в случаях одинакового и разного направлений токов показаны соответственно на рис. 8-10. В первом случае поле имеет линию ветвления ($H=0$), представляющую собой проходящую через точку O_1 окружность с центром на оси; во втором случае поле имеет лишь точку ветвления O , лежащую на оси посередине расстояния между катушками.

е) Магнитное поле прямолинейного проводника с током, находящегося во внешнем однородном магнитном поле, показано на рис. 8-11.

Предположим вначале, что тока в проводнике нет. Вектор магнитной индукции однородного внешнего поля направлен вниз; его выражение в полярных координатах:

$$\mathbf{B}_{\text{внеш}} = -B_z (\sin \theta \cdot \mathbf{1}_r + \cos \theta \cdot \mathbf{1}_\theta), \quad (8-45)$$

где B_z — модуль вектора $\mathbf{B}_{\text{внеш}}$.

Вектор магнитной индукции тока в проводнике

$$\mathbf{B}_t = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \mathbf{1}_\theta. \quad (8-46)$$

Полная величина вектора магнитной индукции по принципу наложения равна:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{внеш}} + \mathbf{B}_{\text{к}} = -B_{\text{в}} \sin \theta \cdot \mathbf{1}_r - \left(B_{\text{в}} \cos \theta + \frac{\mu_a I}{2\pi r} \right) \mathbf{1}_{\theta}. \quad (8-47)$$

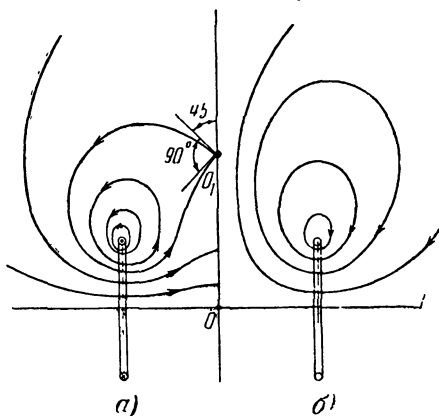


Рис. 8-10. Магнитное поле двух параллельных плоских катушек.

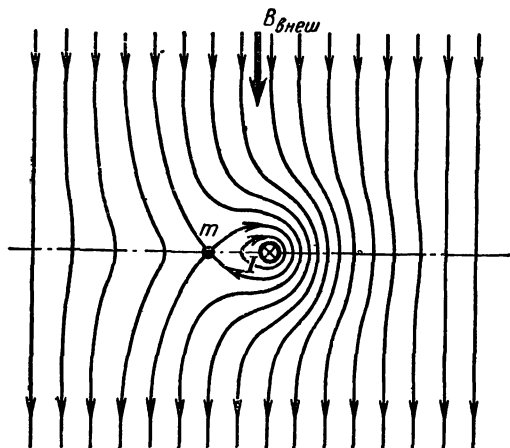


Рис. 8-11. Проводник с током в постороннем магнитном поле.

На малом расстоянии от проводника член $\mu_a I / 2\pi r$ велик, линии магнитной индукции замыкаются вокруг проводника. На большом расстоянии от проводника этот член мал; выражение для \mathbf{B} мало отличается от $\mathbf{B}_{\text{внеш}}$, т. е. внешнее поле искажено лишь в слабой степени.

В поле существует ось ветвления, проходящая через точку m с координатами $r = \mu_0 I / 2\pi B_z$ и $\theta = 180^\circ$; магнитная индукция во всех точках этой оси равна нулю. Линии поля пересекают здесь самих себя.

8-11. СКАЛЯРНЫЙ МАГНИТНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ЗАМКНУТОГО КОНТУРА ТОКА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Пусть вектор \mathbf{H} изображает напряженность магнитного поля в точке m , обусловленную током I в замкнутом контуре l (рис. 8-12); тогда

$$\mathbf{H} = -\nabla\varphi_M = -\frac{d\varphi_M}{dl_1} \cdot \mathbf{l}_1, \quad (8-48)$$

где l_1 — направление градиента скалярного магнитного потенциала φ_M в точке m ;

\mathbf{l}_1 — единичный вектор по этому направлению.

По закону Био — Савара [уравнение (6-7)] вектор \mathbf{H} равен:

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_l \frac{[d\mathbf{l} \cdot \mathbf{l}_r]}{r^2}, \quad (8-49)$$

где r — расстояние от точки m до элемента тока $I d\mathbf{l}$;

\mathbf{l}_r — единичный вектор по направлению этого расстояния.

Интеграл берется по всему контуру тока l .

Приравняем друг другу правые части уравнений (8-48) и (8-49), умножив их на $d\mathbf{l}$; этот множитель внесем под знак интеграла, что возможно, поскольку интегрирование делается по другой переменной $d\mathbf{l}$, не зависящей от $d\mathbf{l}_1$.

Преобразуем подынтегральное выражение

$$\frac{1}{r^2} d\mathbf{l}_1 [d\mathbf{l} \cdot \mathbf{l}_r] = \frac{\mathbf{l}_r}{r^2} [d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}] = \frac{\mathbf{l}_r}{r^2} ds = d\Omega. \quad (8-50)$$

Это преобразование можно истолковать следующим образом. Необходимое для определения величины \mathbf{H} по (8-48) малое перемещение точки m на расстояние $d\mathbf{l}_1$ равноценно малому перемещению элемента тока $I d\mathbf{l}$ на расстояние $-d\mathbf{l}_1$ из положения ab в положение $a'b'$; в последнем случае точка m остается неподвижной; ds будет малой площадкой, пройденной элементом тока при

этом перемещении, а $d\Omega$ — телесным углом, под которым малая площадка видна из точки m .

Таким образом,

$$\varphi_M = -\frac{I}{4\pi} \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} d\Omega = (\Omega_1 - \Omega_2) \frac{I}{4\pi}, \quad (8-51)$$

где Ω_1 и Ω_2 — телесные углы, под которыми виден весь контур тока до и после его перемещения из одного положения в другое.

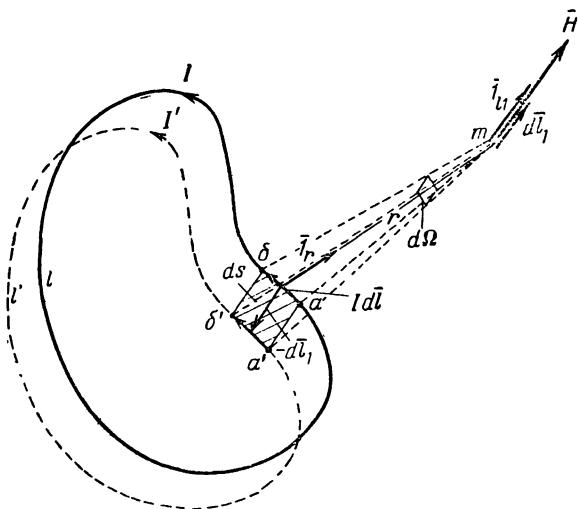


Рис. 8-12. К определению скалярного магнитного потенциала замкнутого контура тока.

Пусть $\Omega_2 = 0$ и $\Omega_1 = \Omega$, т. е. в конце перемещения контур оказался расположенным так, что значение φ_M в точке m стало равным нулю; это равноценно выключению тока в контуре.

Окончательное выражение для φ_M будет таким:

$$\varphi_M = \frac{\Omega}{4\pi} I. \quad (8-52)$$

Скалярный магнитный потенциал φ_M измеряется величиной телесного угла, под которым контур тока виден из точки наблюдения.

Например, в случае двухпроводной линии из тонких проводов величина φ_M в плоскости, проходящей через оси проводов (рис. 8-3), равна:

$$\left. \begin{array}{l} \text{а) между проводами } (\Omega = 2\pi) \quad \varphi_M = \frac{I}{2}; \\ \text{б) вне контура линии } (\Omega = 0) \quad \varphi_M = 0. \end{array} \right\} \quad (8-53)$$

Если контур тока состоит из w витков, плотно намотанных, его можно рассматривать как одновитковый контур с током wi ; скалярный магнитный потенциал будет равен:

$$\varphi_M = \frac{wi}{4\pi} \Omega. \quad (8-54)$$

8-12. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ КРУГОВОГО ТОКА

Поле симметрично относительно оси витка (рис. 8-13). Во всех точках в плоскости витка, лежащих вне его, $\varphi_M = 0$, поскольку телесный угол Ω равен нулю. Любая точка в плоскости витка, лежащая внутри его, имеет $\Omega = 2\pi$ и $\varphi_M = I/2$. Обозначим радиус витка буквой R .

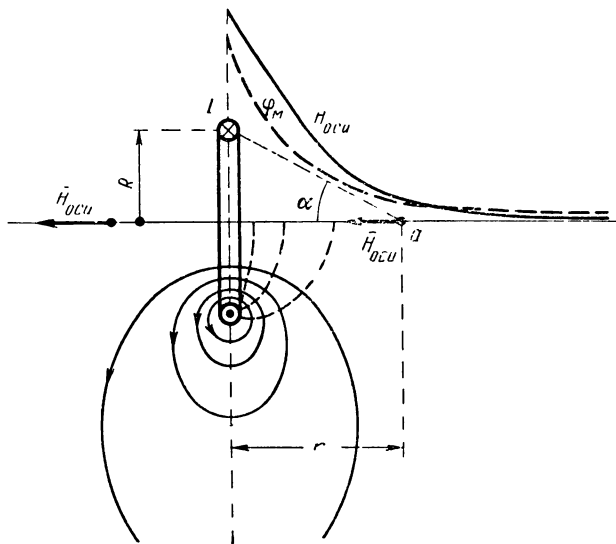


Рис. 8-13. Магнитное поле кругового тока.

Поле может быть рассчитано с помощью простых математических средств только в точках, лежащих на оси витка. Телесный угол Ω , под которым виток виден из точки a , лежащей на оси витка на расстоянии r от плоскости последнего, связан с плоским углом α соотношением (4-31).

Используя уравнение (8-52), получаем выражение скалярного магнитного потенциала в точке a

$$\varphi_M = \frac{I}{2} (1 - \cos \alpha) = \frac{I}{2} \left(1 - \frac{r}{\sqrt{R^2 + r^2}} \right). \quad (8-55)$$

Напряженность поля на оси имеет только одну составляющую, направленную вдоль оси,

$$H_{\text{оси}} = -|\nabla \varphi_M| = -\frac{\partial \varphi_M}{\partial r} = \frac{I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (8-56)$$

На рис. 8-13 показаны кривые изменения φ_M и $H_{\text{оси}}$ вдоль оси.

Расчет напряженности магнитного поля в какой-либо точке a , лежащей в плоскости витка внутри его, на расстоянии x от центра (рис. 8-14) делается следующим образом.

Поскольку плоскость витка эквипотенциальна, вектор напряженности поля в плоскости витка направлен повсюду по нормали к ней, т. е. имеет только одну осевую составляющую.

Она подсчитывается по уравнению (6-7)

$$H_z = \frac{1}{4\pi} \oint \frac{I dl \sin \theta}{t^2}. \quad (8-57)$$

Интеграл берется по всему контуру тока $I \cdot 2\pi R$. Из рис. 8-14 видно, что

$$dl \sin \theta \approx (mn) = t d\psi;$$

$$t \approx \sqrt{R^2 - (x \sin \psi)^2} + x \cos \psi.$$

Выполняя подстановки в уравнение (8-57) и заменяя $x/R = k$, причем $k < 1$, получаем:

$$H_z = \frac{I}{4\pi R (1 - k^2)} \left[\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - (k \sin \psi)^2} d\psi - k \int_0^{2\pi} \cos \psi d\psi \right].$$

Второй интеграл равен нулю. Значения величины $\sin^2 \psi$ повторяются во всех четырех квадрантах. Поэтому можно ограничиться интегрированием в пределах одной четверти окружности, умножив результат на 4, тогда

$$H_z = \frac{I}{\pi R (1 - k^2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - (k \sin \psi)^2} d\psi. \quad (8-58)$$

Стоящий в этом выражении определенный интеграл называется полным эллиптическим интегралом второго рода и обозначается через $E(k)$.

Несколько его значений приведено в приложении П-9.

Например, при $x=R/2$, т. е. в точке, находящейся посередине радиуса витка, $k=0,5$; $E(k)=1,467$;

$$\begin{aligned} H_z &= \frac{I \cdot 1,467}{\pi R (1 - 0,5^2)} = \\ &= 0,623 \frac{I}{R}. \end{aligned}$$

Это значение напряженности поля почти на 25% выше значения H_z в центре витка, равного $I/2R$.

Точный расчет индуктивности кругового витка с помощью эллиптических интегралов довольно сложен. Практический расчет можно сделать по формуле, выведенной Л. Р. Нейманом,

$$L = \mu_0 R \left(\ln 8 \frac{R}{a} - 1,75 \right), \quad (8-59)$$

где a — радиус сечения проводника; проводник предполагается из неферромагнитного материала. При высоких частотах вычитаемый член в скобках увеличивается до 2.

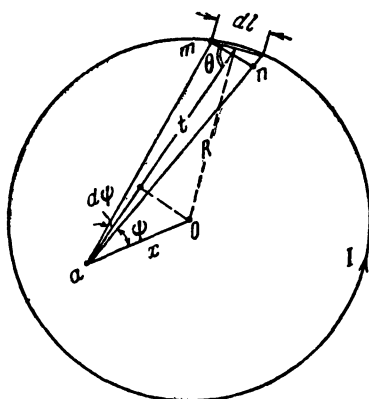


Рис. 8-14. К расчету магнитного поля вне центра плоскости кругового тока.

8-13. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ СОЛЕНОИДА

Заменим соленоид цилиндрическим листом, несущим ток ωI , где I — ток в витках соленоида, ω — число витков (рис. 8-15).

Вычисление напряженности поля на оси соленоида может быть сделано элементарными математическими средствами.

Кольцевой ток $\frac{\omega l}{l} dx$, протекающий в элементе dx соленоида, определяет в точке a , находящейся на расстоянии b от центра соленоида, элементарную напряженность поля, равную по уравнению (8-56)

$$dH_z = \frac{\omega l R^2}{2l} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Напряженность поля в точке a будет интегралом этого выражения, взятым по всей длине соленоида, в пределах

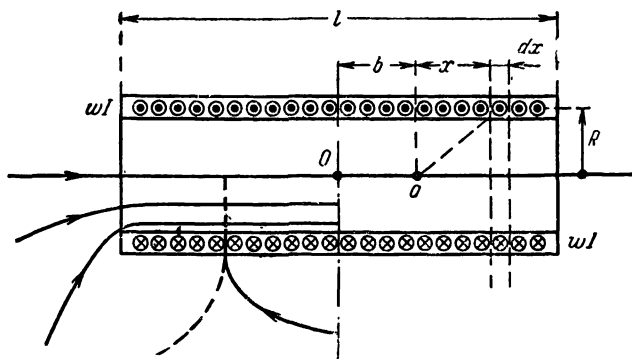


Рис. 8-15. К расчету магнитного поля соленоида.

от $x = -\left(\frac{l}{2} + b\right)$ до $x = \left(\frac{l}{2} - b\right)$

$$H_z = \frac{\omega l}{2l} \left[\frac{\frac{l}{2} - b}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{l}{2} - b\right)^2}} + \frac{\frac{l}{2} + b}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{l}{2} + b\right)^2}} \right]. \quad (8-60)$$

В центре соленоида ($b = 0$)

$$H_{ц} = \frac{\omega l}{l} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2R}{l}\right)^2}}. \quad (8-61)$$

Скалярный магнитный потенциал на оси соленоида находится из уравнения

$$\varphi_M = - \int H_z db + \text{const.}$$

Интегрируя и полагая скалярный потенциал в центре соленоида ($b=0$) равным нулю, получаем:

$$\varphi_M = \frac{\omega I}{2l} \left[\sqrt{R^2 + \left(\frac{l}{2} - b\right)^2} - \sqrt{R^2 + \left(\frac{l}{2} + b\right)^2} \right]. \quad (8-62)$$

Разность магнитных скалярных потенциалов на концах соленоида

$$U_M = \varphi'_M - \varphi''_M = \frac{\omega I}{l} (\sqrt{R^2 + l^2} - R), \quad (8-63)$$

где φ'_M — значение потенциала на оси соленоида при $b = -l/2$;

φ''_M — то же при $b = l/2$.

В случае очень длинного соленоида ($l \gg R$)

$$U_M = \omega I; \quad (8-64)$$

$$H_z = \frac{\omega I}{l}. \quad (8-65)$$

Величина ωI называется намагничивающей силой (н. с.).

Линии магнитной индукции внутри длинного соленоида практически параллельны друг другу. Следовательно, результирующее поле будет однородным и уравнение (8-65) можно распространить на все точки внутреннего объема длинного соленоида.

Благодаря этому расчет индуктивности облегчается. Величина потока находится из уравнения

$$\Phi = \mu_a H_z \pi R^2.$$

Считая приближенно, что поток сцепляется со всеми витками соленоида, получаем:

$$L = \frac{\Phi \omega}{I} = \mu_a \frac{\omega^2}{l} \pi R^2. \quad (8-66)$$

Индуктивность короткой катушки меньше рассчитанной по формуле (8-66). В формулу вводят коэффициент k_L , зависящий от отношения длины катушки к ее диаметру,

$$L = k_L \mu_a \frac{\omega^2}{l} \pi R^2. \quad (8-67)$$

Значения коэффициента k_L приведены в приложении П-10.

8-14. ИНДУКТИВНОСТЬ КАТУШКИ С ТОРОИДАЛЬНЫМ СЕРДЕЧНИКОМ

Если радиус сечения тороидального сердечника r_0 мал по сравнению со средним радиусом кольца R_{cp} , то для расчета индуктивности можно использовать формулу для длинного соленоида (8-66), заменив в ней R на r_0 и l на $2\pi R_{cp}$,

$$L = \mu_a \frac{\omega^2}{2} \frac{r_0^2}{R_{cp}}. \quad (8-68)$$

Здесь ω — полное число витков, предполагаемых равномерно распределенными по всему тороидальному сердечнику.

Для тороида с большим радиусом сечения можно вывести другую формулу. Предположим, что $\mu_a = \text{const}$ по всему сечению сердечника.

Индуктивность равна произведению квадрата числа витков на магнитную проводимость сердечника

$$L = \omega^2 G_M. \quad (8-69)$$

Представим толстый сердечник состоящим из отдельных тонких волокон; одно из них на рис. 8-16 заштриховано. Элементарная магнитная проводимость такого волокна равна:

$$dG_M = \mu_a \frac{r dr d\alpha}{2\pi (R_{cp} + r \cos \alpha)}.$$

Проинтегрировав это выражение дважды, по $d\alpha$ в пределах от $\alpha=0$ до π и по dr в пределах от 0 до r_0 , и удвоив результат, получим выражение для магнитной проводимости сердечника в целом

$$\begin{aligned} G_M &= \frac{\mu_a}{2\pi} \int_{r=0}^{r_0} r dr \int_{\alpha=0}^{\pi} \frac{d\alpha}{R_{cp} + r \cos \alpha} = \\ &= \mu_a (R_{cp} - \sqrt{R_{cp}^2 - r_0^2}). \end{aligned} \quad (8-70)$$

Затем индуктивность вычисляется по формуле (8-69).

При уменьшении r_0 результат расчета должен совпадать с получаемым из формулы (8-68). Чтобы в этом убедиться, следует

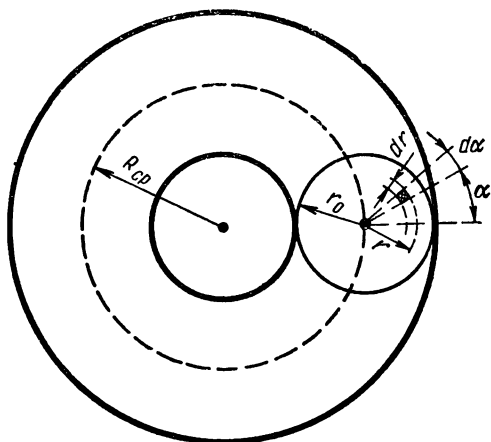


Рис. 8-16. К расчету индуктивности катушки с тороидальным сердечником.

умножить и разделить выражение (8-70) на $(R_{cp} + \sqrt{R_{cp}^2 - r_0^2})$, подставить результат в (8-69) и пренебречь величиной r_0^2 по сравнению с R_{cp}^2 .

8-15. ИНДУКТИВНОСТЬ КАТУШКИ С КОЛЬЦЕВЫМ СЕРДЕЧНИКОМ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Пусть w витков катушки равномерно распределены по кольцевому сердечнику с размерами, показанными на рис. 8-17.

Расчет индуктивности проще всего выполнить путем вычисления магнитной проводимости сердечника. Разобьем его сечение на эле-

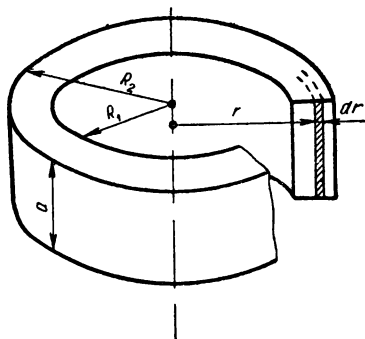


Рис. 8-17. К расчету индуктивности катушки с кольцевым сердечником прямоугольного сечения.

менты adr . Один такой элемент на рис. 8-17 заштрихован. Элементарная магнитная проводимость тонкого кольца с сечением adr равна:

$$dG_M = \mu_a \frac{adr}{2\pi r}.$$

Принтегрировав это выражение в пределах от R_1 до R_2 и умножив результат на ω^2 , получим, что индуктивность равна

$$L = \frac{\mu_a a^2}{2\pi} \omega^2 \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (8-71)$$

Заметим, что если витки катушки не распределены равномерно по всему сердечнику, то формула (8-71) становится лишь грубо приближенной.

Расчет в подобных случаях предпочтительнее вести методом круговых гармоник (см. § 8-16).

8-16. ПОЛЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТА С ВОЗДУШНЫМ ЗАЗОРОМ

Пусть у цилиндрического электромагнита имеется воздушный зазор в виде вырезки в пределах угла 2η (рис. 8-18). Предположим вначале электромагнит достаточно длинным в осевом направлении, перпендикулярном чертежу. Его внутренний и внешний радиусы равны R_1 и R_2 . Обмотка возбуждения состоит из тонких проводов, имеющих осевое направление и образующих ω достаточно плотно уложенных витков. Ток в проводах i можно заменить осевым поверхностным током, элемент которого имеет величину

$$Jd\theta = \frac{\omega i}{2(\pi - \eta)} d\theta. \quad (8-72)$$

При достаточной осевой длине цилиндра магнитное поле вдали от торцов можно считать двумерным. Векторный по-

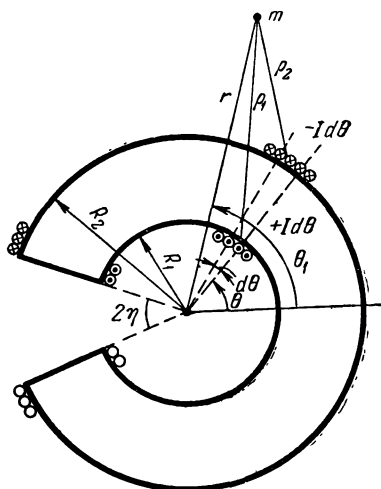


Рис. 8-18. Поле цилиндрического электромагнита с воздушным зазором.

тенциал в окрестностях цилиндра имеет осевое направление

$$\mathbf{A} = A_z \mathbf{k}.$$

Настоящую задачу решим методом круговых гармоник.

Элементы поверхностного тока $+Jd\theta$ и $-Jd\theta$ образуют элементарную «двухпроводную линию». Ее векторный потенциал в некоторой точке m с координатами r_1, θ_1 можно определить по (8-22)

$$dA_{z1} = \frac{\mu_0 J d\theta}{2\pi} \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} + \text{const.} \quad (8-73)$$

Примем постоянную равной нулю.

Разлагаем выражение (8-73) на круговые гармоники порядком, описанным в § 8-9, и интегрируем в пределах от $\theta = -(\pi - \eta)$ до $\theta = +(\pi - \eta)$.

Результаты вычислений:

а) внутри цилиндра ($r < R_1$)

$$A'_z = \frac{\mu_0 J}{\pi} \left\{ (\pi - \eta) \ln \frac{R_2}{R_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n^2} \left(\frac{1}{R_1^n} - \frac{1}{R_2^n} \right) \times \right. \\ \left. \times \sin [n(\pi - \eta)] \cos (n\theta_1) \right\}; \quad (8-74)$$

б) в толще цилиндрического сердечника ($R_1 < r < R_2$)

$$A''_z = \frac{\mu_0 J}{\pi} \left\{ (\pi - \eta) \ln \frac{R_2}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{R_1^n}{r^n} - \frac{r^n}{R_2^n} \right) \times \right. \\ \left. \times \sin [n(\pi - \eta)] \cos (n\theta_1) \right\}; \quad (8-75)$$

в) снаружи цилиндра ($r > R_2$)

$$A'''_z = \frac{\mu_0 J}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{R_1^n - R_2^n}{r^n} \right) \sin [n(\pi - \eta)] \cos (n\theta_1). \quad (8-76)$$

В этих рядах содержатся все гармоники, как четные, так и нечетные.

Магнитная проницаемость сердечника электромагнита принята равной μ_a , а окружающего пространства μ_0 .

Расчет величины векторного потенциала A_z в воздушном зазоре ($R_1 \leq r \leq R_2$); ($|\theta| \geq \pi - \eta$) производится по формуле (8-75) с заменой μ_a на μ_0 .

На рис. 8-19 показаны линии равного векторного потенциала (линии магнитной индукции, § 6-7), вычер-

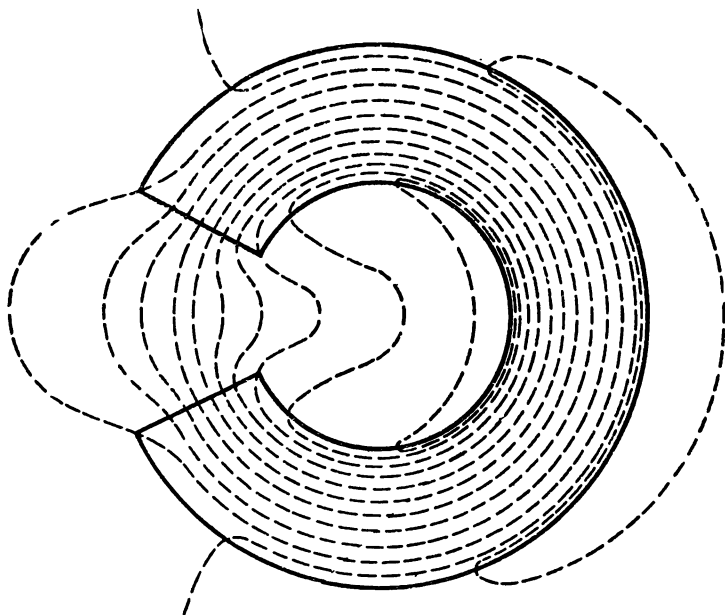


Рис. 8-19. Картина поля сильно насыщенного электромагнита.

ченные для случая $R_2 = 2R_1$; $2\eta = 53^\circ$; $\mu_a \approx \mu_0$ (очень сильное насыщение материала).

Полученные результаты позволяют найти так называемую среднюю линию поля, представляющую собой правильную окружность. Значение векторного потенциала вдоль такой окружности должно сохраняться неизменным при любом значении угла θ_1 . Из (8-75) видно, что входящий в нее ряд обращается в нуль при $r = \sqrt{R_1 R_2}$. Значит, радиус средней линии равен среднему геометрическому внешнего и внутреннего радиусов цилиндрического магнита. Величина векторного потенциала в любой

точке этой окружности (в толще сердечника) равна:

$$A''_{zcp} = \frac{\mu_a J}{2\pi} (\pi - \eta) \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (8-77)$$

Выведем формулу индуктивности электромагнита с сердечником, показанным на рис. 8-18. Пусть длина сердечника в направлении, перпендикулярном чертежу, равна b .

Малая часть витков обмотки $d\omega = \frac{\omega}{2(\pi - \eta)} d\theta$ сцеплена с магнитным потоком

$$\Phi = \oint A dl = \{A''_{z(r=R_1)} - A''_{z(r=R_2)}\} b.$$

Подставим значения A''_z из (8-75) и используем замену (8-72). Элементарное число потокосцеплений равно:

$$d\psi = d(\omega\Phi) = \frac{\mu_a i \omega^2 b}{4\pi (\pi - \eta)^2} \left\{ (\pi - \eta) \ln \frac{R_2}{R_1} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{R_1^n}{R_2^n} \right) \sin [n(\pi - \eta)] \cos (n\theta) \right\} d\theta.$$

Проинтегрируем это выражение в пределах от $-(\pi - \eta)$ до $+(\pi - \eta)$ и разделим результат на i

$$L = \frac{\psi}{i} = \frac{\mu_a \omega^2 b}{2\pi} \left\{ \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{2}{(\pi - \eta)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \times \right. \\ \left. \times \left(1 - \frac{R_1^n}{R_2^n} \right) \sin^2 [n(\pi - \eta)] \right\}. \quad (8-78)$$

8-17. МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ ОТРЕЗКОВ ТОКА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Вычисление магнитных величин B , H , A , Φ_M и индуктивностей M и L , вообще говоря, имеет физический смысл только применительно к замкнутым контурам токов. Однако для облегчения расчетов сложных контуров иногда полезны разбивка их периметров на участки простых геометрических форм (прямолинейные отрезки, ду-

ги окружностей и т. п.) и вычисление величин применительно к таким участкам.

Определим магнитную индукцию и векторный потенциал в точке m , отстоящей на расстоянии a от прямолинейного отрезка тонкого проводника длиной l . По проводнику протекает ток I (рис. 8-20).

Окружающая среда — воздух ($\mu_a = \mu_0$).

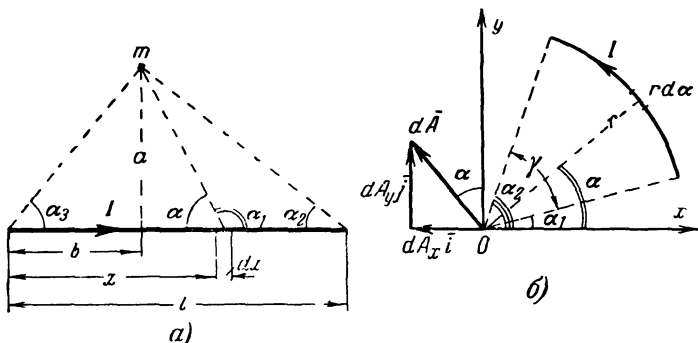


Рис. 8-20. К расчету магнитного поля прямого и дугового отрезков контура с током.

Элементарная составляющая магнитной индукции в точке m , определяемая элементом тока $I dx$, по закону Био — Савара равна:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx}{r^2} \cdot \sin \alpha,$$

где r — расстояние между $I dx$ и m .

Элементарная составляющая векторного потенциала в той же точке по (6-15) равна:

$$dA = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx}{r}.$$

Направление элементарного вектора $d\mathbf{B}$ определяется правилом штопора (из страницы — к читателю, рис. 8-20, а). Вектор $d\mathbf{A}$ направлен параллельно току и плотности тока.

Заменяя $r = \frac{a}{\sin \alpha}$; $x - b = a \operatorname{ctg} \alpha$ и $dx = -\frac{a d\alpha}{\sin^2 \alpha}$ и интегрируя, получаем:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha_2 + \cos \alpha_3); \quad (8-79)$$

$$A = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\operatorname{Arsh} \frac{l-b}{a} + \operatorname{Arsh} \frac{b}{a} \right) =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha_2}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha_3}{2} \right). \quad (8-80)$$

Если длина отрезка проводника с током неограниченно возрастает, то углы α_2 и α_3 стремятся к нулю; выражение для магнитной индукции (8-79) в пределе совпадает с (8-7).

Найдем также магнитную индукцию \mathbf{B} в центре окружности радиусом r , по дуге которой, измеряемой центральным углом γ , проложен тонкий проводник с током I (рис. 8-20,б).

Окружающая среда — воздух ($\mu_a = \mu_0$).

Элементарная составляющая dB в точке O , обусловленная элементом тока $I r d\alpha$, равна:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} d\alpha.$$

Интегрируя это выражение в пределах от α_1 до $\alpha_1 + \gamma = \alpha_2$, получаем:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \gamma. \quad (8-81)$$

Вектор \mathbf{B} направлен в точке O из страницы к читателю.

8-18. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОТРЕЗКОВ ТОНКИХ ПРОВОДОВ

Пусть расположение проводников будет таким же, как показано на рис. 4-24. Радиусы проводников малы по сравнению с их длинами.

Окружающая среда — воздух ($\mu_a = \mu_0$).

Положим, что нижний провод l_2 находится под током I . Значение векторного магнитного потенциала A в точке, лежащей в центре элемента db верхнего провода, определяется уравнением (8-80) при замене величин $a = 2H$; $l = l_2$.

Взаимная индуктивность определится по (6-35)

$$M = \int_0^{l_1} \frac{A}{I} db. \quad (8-82)$$

После подстановки выражения для A этот интеграл будет отличаться лишь постоянными множителями от интеграла, рассмотренного в § 4-22. Произведя необходимые замены, получим:

$$M = \frac{\mu_0 l_1}{4\pi} N, \quad (8-83)$$

где N — выражение в фигурных скобках в формуле (4-114).

Если провода одинаковой длины ($l_2 = l_1 = l$), выражение для M значительно упрощается

$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\operatorname{Arsh} \frac{l}{2H} + \frac{2H}{l} - \sqrt{\left(\frac{2H}{l}\right)^2 + 1} \right). \quad (8-84)$$

В случае, когда длина проводов намного больше расстояния между ними ($l \gg 2H$),

$$M \approx \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\operatorname{Arsh} \frac{l}{2H} - 1 \right) \approx \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\ln \frac{l}{H} - 1 \right). \quad (8-85)$$

8-19. ВНЕШНЯЯ ИНДУКТИВНОСТЬ ОТРЕЗКА ПРЯМОГО ПРОВОДА

Внешняя индуктивность цилиндрического проводника радиусом r_0 обуславливается внешним магнитным потоком тока, проходящего в этом проводнике; очевидно, что такой же величины магнитный поток был бы получен в случае, если бы такой же величины ток проходил в бесконечно тонком проводнике, уложенном на оси цилиндрического проводника (можно вообразить, что для этой цели просверлен цилиндрический канал очень малого радиуса). Таким образом, для вычисления внешней индуктивности можно применить формулы § 8-18, заменив расстояние $2H$ радиусом провода r_0 .

Для толстого проводника длиной l

$$L_{\text{внеш}} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\operatorname{Arsh} \frac{l}{r_0} + \frac{r_0}{l} - \sqrt{\left(\frac{r_0}{l}\right)^2 + 1} \right). \quad (8-86)$$

Для тонкого проводника ($r_0 \ll l$)

$$L_{\text{внеш}} \approx \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\operatorname{Arsh} \frac{l}{r_0} - 1 \right) \approx \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\ln \frac{2l}{r_0} - 1 \right). \quad (8-87)$$

8-20. ИНДУКТИВНОСТЬ ДВУХПРОВОДНОЙ ЛИНИИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Искомая индуктивность L равна $2L_1 - 2M$, где L_1 — индуктивность каждого провода, определяемая по (8-86), а M — взаимная индуктивность проводов, рассчитываемая по (8-84).

Обозначив магнитную проницаемость среды μ_0 , длину линии и радиус проводов l и r , расстояние между осями проводов $2H$, имеем:

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \left\{ \operatorname{Arsh} \frac{l}{r} - \operatorname{Arsh} \frac{l}{2H} + \sqrt{1 + \left(\frac{2H}{l}\right)^2} - \right. \\ \left. - \frac{2H}{l} - \sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2} + \frac{r}{l} \right\}. \quad (8-88)$$

При тонких проводах и достаточной длине линии ($l \gg r$ и $l \gg 2H$) разность аркасинусов стремится к $\ln \frac{2H}{r}$ и формула (8-88) в пределе переходит в выведенную ранее формулу (8-29).

8-21. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ДВУХПРОВОДНЫХ ЛИНИЙ

Расстояния между проводами пусть будут a_{11} , a_{12} , a_{21} и a_{22} (рис. 8-21). При изменениях тока I_1 в I линии в проводах II линии будут индуцироваться четыре э. д. с.:

e_{11} — индуцируется в первом проводе II линии за счет изменений тока в первом проводе I линии; эта э. д. с.

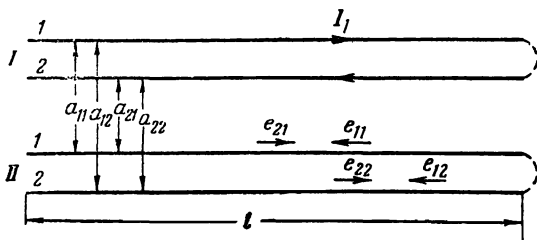


Рис. 8-21. К расчету взаимной индуктивности параллельных двухпроводных линий.

обусловливается взаимной индуктивностью между этими проводами M_{11} ;

e_{21} — индуцируется в первом проводе II линии за счет изменения тока во втором проводе I линии; эта э. д. с. обусловливается взаимной индуктивностью между этими проводами M_{21} ;

e_{12} — индуцируется во втором проводе II линии за счет изменений тока в первом проводе I линии; эта э. д. с. обусловливается взаимной индуктивностью между этими проводами M_{12} ;

e_{22} — индуцируется во втором проводе II линии за счет изменений тока во втором проводе I линии; эта э. д. с. обусловливается взаимной индуктивностью между этими проводами M_{22} . Электродвижущие силы e_{11} и e_{22} имеют одно направление вдоль цепи, а e_{12} и e_{21} — ему противоположное.

Поэтому взаимная индуктивность между линиями может быть представлена так:

$$M = M_{11} + M_{22} - (M_{12} + M_{21}).$$

Полагая, что расстояния a_{11} , a_{12} , a_{21} и a_{22} значительно меньше длины параллельного пробега линий l , составляющие взаимные индуктивности определяют по (8-85).

Проведя вычисления, получим:

$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{a_{12} a_{21}}{a_{11} a_{22}}. \quad (8-89)$$

8-22. ИНДУКТИВНОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ РАМКИ

Пусть рамка имеет стороны a и b ; радиус провода r_0 мал по сравнению с размерами рамки (рис. 8-22). Полная индуктивность рамки равна сумме индуктивностей четырех ее сторон: L_{A1} , L_{A2} , L_{B1} и L_{B2} и взаимных индуктивностей между сторонами: $2M_{A1-A2}$ и $2M_{B1-B2}$.

Рис. 8-22. К расчету индуктивности прямоугольной рамки.

Взаимные индуктивности M берутся с отрицательными знаками, поскольку э. д. с. самоиндукции и э. д. с. взаимоиндукции вычитаются друг из друга; взаимные индуктивности перпендикулярных друг другу сторон по (6-35) равны нулю (A и dI взаимно перпендикулярны).

Расчет указанных индуктивностей ведется по (8-84) и (8-87).

К результату прибавляется внутренняя индуктивность, рассчитанная по (8-14),

$$L = \frac{\mu_a}{\pi} \left\{ a \left(\ln \frac{2a}{r_0} - 1 \right) + b \left(\ln \frac{2b}{r_0} - 1 \right) - a \operatorname{Arsh} \frac{a}{b} - (a + b) + 2 \sqrt{a^2 + b^2} - b \operatorname{Arsh} \frac{b}{a} \right\} + \frac{\mu'_a}{4\pi} (a + b), \quad (8-90)$$

где μ_a — магнитная проницаемость среды;

μ'_a — магнитная проницаемость материала проводников рамки

8-23. ИНДУКТИВНОСТЬ РАМКИ СЛОЖНОГО ОЧЕРТАНИЯ

Принцип наложения позволяет иногда свести довольно сложные задачи к нескольким простым задачам.

Например, расчет индуктивности сложного контура $abcdefa$ (рис. 8-23) можно свести к расчету индуктивностей двух прямоугольных рамок $abgdefa$ и $bcdgb$. Токи в добавляемой ветви bgd взаимно компенсируются

$$L = L_{abgdefa} + L_{bcdgb} + 2M, \quad (8-91)$$

где M — взаимная индуктивность рамок $abgdefa$ и $bcdgb$.

Если $ab=bg$ и $gd=de$, то поток, сцепляющийся с контуром $bcdgb$ и обусловленный током в контуре $abgdefa$, составляет $1/4$ полного потока контура $abgdefa$, обуславливающего его индуктивность; поэтому

$$M = -\frac{1}{4} L_{abgdefa}$$

и

$$L = \frac{1}{2} L_{abgdefa} + L_{bcdgb}.$$

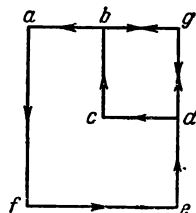


Рис. 8-23. К применению метода наложения к расчету индуктивности.

Знак минус указывает, что направления обхода контуров по условиям задачи приходится выбирать противоположными.

8-24. РАСЧЕТ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ТОКА ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ ДВУХ СРЕД

Эта задача решается методом изображений.

Пусть ток I проходит по тонкому проводнику, лежащему в воздухе, на расстоянии h от параллельной проводнику поверхности стали с магнитной проницаемостью μ_{1a} (рис. 8-24).

Магнитное поле в воздухе рассматривается как сумма полей действительного тока I и тока-изображения I_2 ; I и I_2 одинаковы по направлению, но различны по величине, поэтому поле в воздухе имеет сложную конфигурацию линий. Поле в стали определяется токами I и I_1 , разными по направлению и по величине, но проте-

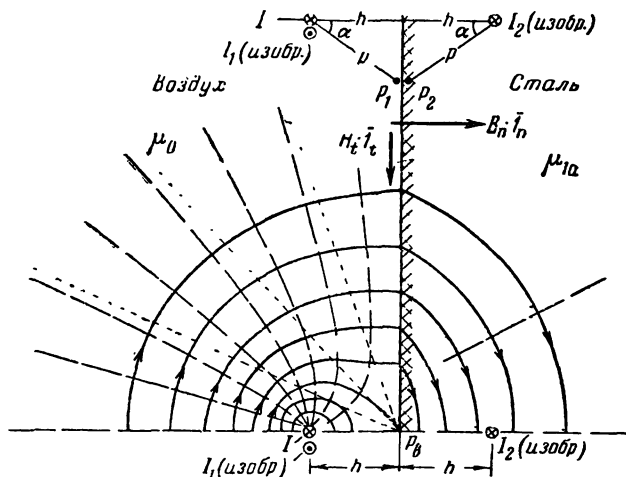


Рис. 8-24. Магнитное поле тока в проводнике, находящемся в воздухе вблизи стальной поверхности.

кающими по одному и тому же проводнику; поэтому линии магнитной индукции в стали являются дугами окружностей, центрированных в точке I .

Рассмотрим очень близкие друг к другу точки P_1 и P_2 , расположенные, однако, по разным сторонам поверхности раздела, и используем обычные граничные условия магнитного поля

$$H_{1t} = H_{2t}; \quad B_{1n} = B_{2n}. \quad (8-92)$$

Обозначим через p расстояния от точек P_1 и P_2 до тока I и его изображений:

В точке P_1

$$H_{1t} = (H - H_2) \cos \alpha = \frac{I - I_2}{2\pi p} \cos \alpha;$$

$$B_{1n} = \mu_0 (H + H_2) \sin \alpha = \mu_0 \frac{I + I_2}{2\pi p} \sin \alpha.$$

В точке P_2

$$H_{2t} = (H - H_1) \cos \alpha = \frac{I - I_1}{2\pi\rho} \cos \alpha;$$

$$B_{2n} = \mu_{1a} (H - H_1) \sin \alpha = \mu_{1a} \frac{I - I_1}{2\pi\rho} \sin \alpha.$$

Выполнив подстановки в (8-92), получим:

$$I_2 = I_1 = I \frac{\mu_{1a} - \mu_0}{\mu_{1a} + \mu_0}. \quad (8-93)$$

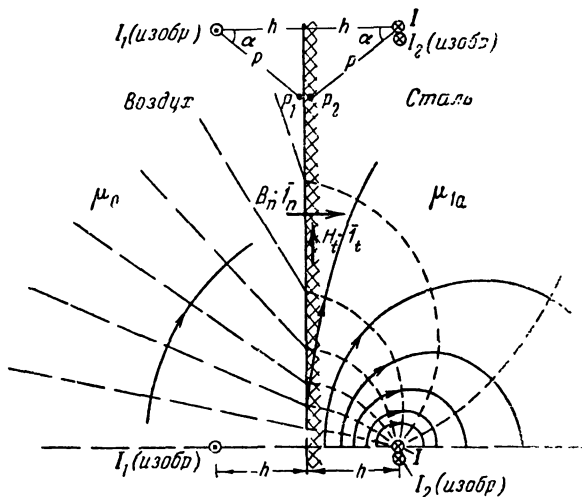


Рис. 8-25. Магнитное поле тока в проводнике, находящемся в стали вблизи поверхности раздела стали и воздуха.

Эквипотенциальные линии в воздухе на больших расстояниях от проводника стремятся принять направления, радиальные к центру тяжести $P_{\text{в}}$ системы токов I и I_2 .

Такую же формулу можно получить и для случая, когда проводник с током находится в стали (рис. 8-25). Заметим, что и в этом случае ток-изображение в воздухе I_1 имеет обратный знак по сравнению с действительным током; дополнительный же ток-изображение в стали совпадает по знаку с действительным током. Поля на рис. 8-24 и 8-25 вычерчены для случая $\mu_{1a} = 19\mu_0$.

МЕТОД КОНФОРМНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

9-1. КОНФОРМНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Двухмерные электрические и магнитные поля, подчиняющиеся уравнению Лапласа, могут быть исследованы посредством так называемых конформных преобразований, являющихся практическим применением теории функций комплексного переменного.

Конформное преобразование сводится к замене действительного поля, которое в силу сложности очертания его границ не поддается непосредственному расчету, другим полем, каждый бесконечно малый элемент площади которого подобен соответствующему ему бесконечно малому элементу заменяемого поля, но очертание границ имеет простую форму, для которой расчетные уравнения известны.

Подыскание функциональной зависимости, правильно отражающей замену поля, является основной трудностью.

Будем рассматривать плоскость, в которой расположены линии поля и эквипотенциальные линии, как плоскость комплексного переменного $z = x + jy$ (рис. 9-1,а); вещественные количества откладываются по оси x , а мнимые — по оси y . Каждой точке на этой плоскости соответствует определенное комплексное число z , каждой линии — определенное уравнение, связывающее координаты ее точек; например, точке a соответствует число $z = 1 + j$, точке e — число $z = 2 + j3$, прямой линии $u = 0$ (смысл этого символа выяснится позднее), проведенной из начала координат под углом 45° , соответствует уравнение $x = y$; гиперболы $u = 4$ соответствует уравнение $x^2 - y^2 = 4$; гиперболы $v = 16$ соответствует уравнение $2xy = 16$ и т. д.

Рассмотрим теперь другую комплексную величину $w = u + jv$, вещественная и мнимая составляющая которой являются однозначными функциями x и y . Каждому значению $z = x + jy$, определяющему положение некоторой точки на плоскости z , соответствует, таким образом, определенное значение $w = u + jv$. Последнему соответствует определенная точка на комплексной плоскости w (рис. 9-1,б).

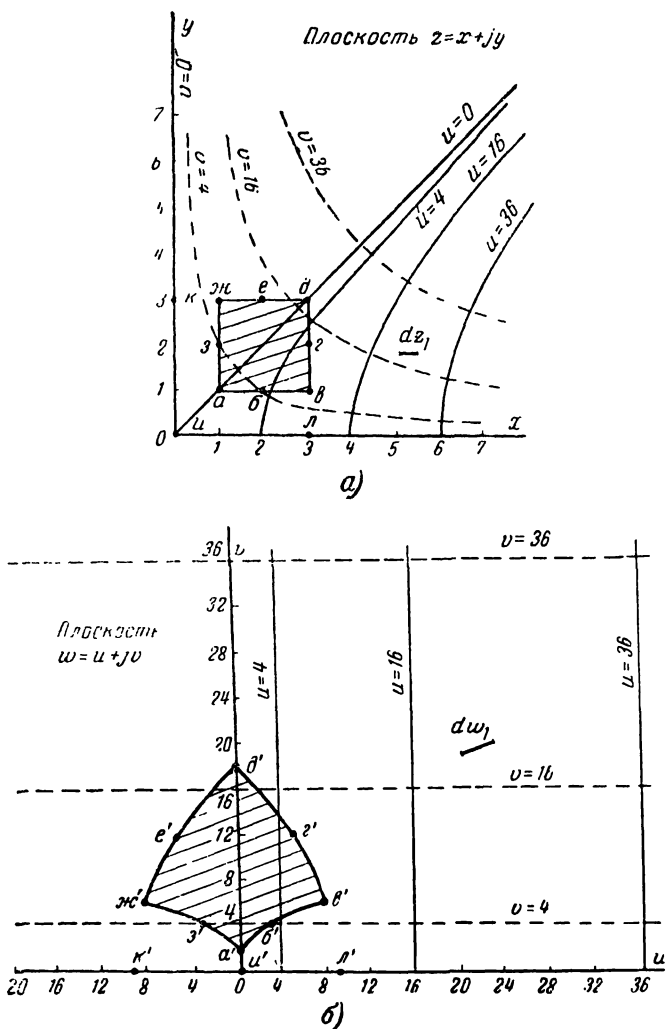


Рис. 9-1. Конформное преобразование $w = z^2$.

Рисунок 9-1 сделан для случая $w = z^2$, развернув комплексные выражения величин w и z , имеем:

$$u + jv = x^2 - y^2 + j2xy,$$

откуда

$$u = x^2 - y^2; \quad v = 2xy. \quad (9-1)$$

Точке a на плоскости z , имеющей координаты $x=1$; $y=1$, соответствует точка a' на плоскости w , координаты которой по формулам (9-1) равны: $u=0$; $v=2$; точке b на плоскости z с координатами $x=2$; $y=1$ соответствует точка b' на плоскости w с координатами $u=3$; $v=4$ и т. д.

Квадрат $abvгдежза$ на плоскости z преобразовался в криволинейный четырехугольник $a'b'v'z'd'e'ж'z'a'$ на плоскости w .

Оценка изменений формы, размера и ориентации преобразуемого элементарного отрезка делается с помощью линейного коэффициента преобразования, равного производной $d\omega/dz$,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega}{dz} &= \frac{d\omega}{dx} \frac{dx}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = Me^{j\vartheta} \\ \frac{d\omega}{dz} &= \frac{d\omega}{dy} \frac{dy}{dz} = \frac{\partial v}{\partial y} - j \frac{\partial u}{\partial y} = Me^{j\vartheta}, \end{aligned} \right\} \quad (9-2)$$

где

$$M = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}; \quad (9-3)$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial x}} = - \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial v}{\partial y}}. \quad (9-4)$$

Коэффициент преобразования является в общем случае комплексным числом. Преобразование малого отрезка dz при переносе его с плоскости z на плоскость w заключается в изменении его длины в M раз и в повороте против часовой стрелки на угол ϑ ; M и ϑ являются функциями координат преобразуемого малого отрезка. Однако коэффициент преобразования не зависит от ориентации преобразуемого отрезка на плоскости z .

Пусть в какой-либо точке на плоскости z пересекались под некоторым углом α два малых отрезка; после преобразования, т. е. переноса на плоскость w , каждый отрезок повернулся на одинаковый угол ϑ ; значит, угол α между ними сохранился. Линии $u=\text{const}$ и $v=\text{const}$ на плоскости w (рис. 9-1) повсюду пересекаются под прямым углом; следовательно, соответствующие им кривые $u=\text{const}$ и $v=\text{const}$ на плоскости z также образуют

ортогональную систему, т. е. касательные к кривым в точках их пересечения взаимно перпендикулярны.

Система таких кривых может представлять собой картину электрического или магнитного поля, поскольку линии напряженности поля (линии индукции) и эквипотенциальные линии всегда пересекаются под прямым углом.

Из выражений (9-2) вытекают так называемые уравнения Коши—Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (9-5)$$

Функции u и v , удовлетворяющие этим уравнениям, называются сопряженными. Каждая из них подчиняется уравнению Лапласа для двухмерного поля. В этом легко убедиться, продифференцировав одно из уравнений (9-5) по x , а другое — по y и либо сложив результаты, либо вычтя один из другого. Любое из семейств кривых ($u = \text{const}$ или $v = \text{const}$) может изображать либо линии поля, либо эквипотенциальные линии.

Каждый малый элемент площади на плоскости z после переноса на плоскость w изменит свой размер и ориентацию, но сохранит очертание: квадрат останется квадратом, кружок — кружком. Фигуры же конечных размеров могут подвергнуться большому искажению (рис. 9-1).

Пример. Рассчитаем линейный коэффициент преобразования $w = z^2$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y;$$

$$M = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2r; \quad \text{tg } \theta = \frac{y}{x}.$$

Длина преобразуемого малого отрезка при переносе с плоскости z на плоскость w увеличивается в $2r$ раз, где r — расстояние на плоскости z от центра отрезка до начала координат; увеличенный отрезок поворачивается на угол $\theta = \text{arctg } \frac{y}{x}$, т. е. происходит удвоение угла между лучом, соединяющим отрезок с началом координат и вещественной осью.

Мнимая ось на плоскости w , уравнение которой $u=0$ соответствует прямой линии $O\delta$ на плоскости z , являющейся биссектрисой прямого угла; вертикальные линии $u=4$; $u=16$ и т. д., на плоско-

сти w соответствуют гиперболам на плоскости z , выходящим из вещественной оси по нормальям.

Горизонтальным линиям $v=4$, $v=16$ и т. д. на плоскости w соответствуют гиперболы на плоскости z , асимптотами которых являются координатные оси. Вещественной оси на плоскости w ($v=0$) соответствуют на плоскости z координатные оси; их надо рассматривать как предельную гиперболу с бесконечной вогнутостью в начале координат.

С помощью формулы $w=z^2$ удается сложное поле прямого угла (рис. 9-1,а) преобразовать в простейшее поле (рис. 9-1,б), являющееся хорошо изученным полем плоского конденсатора (в областях далеких от краев обкладок).

9-2. СВЯЗЬ НАПРЯЖЕННОСТИ ПОЛЯ С ЛИНЕЙНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Заменяя производные в (9-3) в соответствии с уравнениями Коши—Римана (9-5), можно получить:

$$M = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2} = |\nabla u| = |\nabla v| = |F|. \quad (9-6)$$

Модуль линейного коэффициента преобразования M равен одинаковым абсолютным величинам градиентов функций u и v ; следовательно, он равен абсолютной величине напряженности поля $|F|$ (в относительных единицах) при выборе любой из функций (u или v) в качестве потенциала поля.

Пример. Преобразование $w=z^2$ (рис. 9-1). Функция u является потенциалом электрического поля ($\nabla u = -E$); масштаб потенциала 100 в/1, т. е. линия $u=4$ соответствует эквипотенциальной линии $\varphi=400$ в.

Пользуемся данными примера в § 9-1.

В точке l ($x=3$; $y=0$)

$$E = M = 100 \cdot 2 \sqrt{3^2 + 0} = 600 \text{ в/м};$$

вектор E направлен влево, к началу координат.

Если же электрическим потенциалом служит функция v (в масштабе 100 в/1), то в точке l $E=M=600$ в/м; вектор E направлен вниз.

9-3. НЕКОТОРЫЕ ПРОСТЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

I. Преобразование

$$w = K \ln z. \quad (9-7)$$

Введем полярные координаты на плоскости z ; $z = re^{j\theta}$; тогда

$$w = K \ln r + jK\theta; \quad u = K \ln r; \quad v = K\theta. \quad (9-8)$$

Линии $u = \text{const}$ являются дугами окружностей, проведенных из начала координат; линии $v = \text{const}$ являются радиусами (рис. 9-2). С помощью такого преобразования, можно, например, привести к однородному магнитное поле между полюсами, находящимися под углом, или поле электрического тока, растекающегося в большом металлическом листе от электрода с малым радиусом (при электросварке) и т. п.

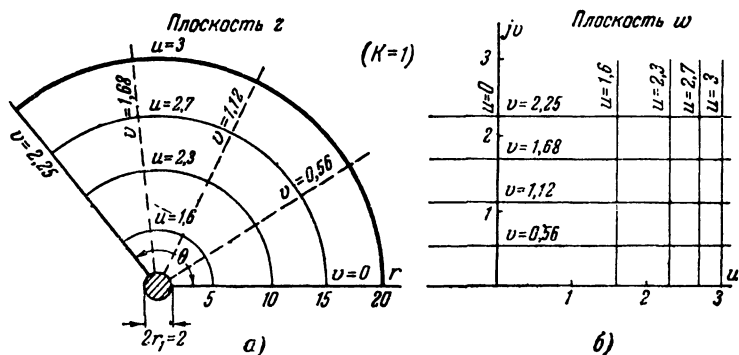


Рис. 9-2. Преобразование $w = K \ln z$.

Напряженность поля E в данном случае удобно рассчитывать в полярных координатах:

а) если эквипотенциальными служат линии $u = \text{const}$,

$$E = E_r = - \frac{\partial u}{\partial r} = - \frac{K}{r}; \quad E_\theta = 0; \quad (9-9)$$

вектор E направлен радиально;

б) если же эквипотенциальными служат линии $v = \text{const}$,

$$E_r = 0; \quad E = E_\theta = - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = - \frac{K}{r}; \quad (9-10)$$

вектор E направлен по касательной к дуге окружности в данной точке.

Порядок определения постоянной K виден из следующего примера. Пусть рассматривается поле электрического тока в однородном проводящем листе толщиной Δ . Ток поступает из листа в сварочный электрод с радиусом $r_1 = 1$, приложенный в месте, где край листа образует тупой угол θ (рис. 9-2, а). Второй электрод — хорошо проводящая скоба, зажимающая дугообразный край листа

$u=3$. Линии $u=\text{const}$ будут эквипотенциальными, а радиальные линии $v=\text{const}$ — линиями напряженности поля. Пусть величина тока равна I .

Плотность тока равна:

$$\delta_r = \gamma E_r = -\gamma \frac{K}{r},$$

где γ — удельная проводимость материала листа.

С другой стороны,

$$\delta_r = -\frac{I}{r\theta\Delta}.$$

Приравнявая правые части обоих выражений, получаем

$$K = \frac{I}{\gamma\theta\Delta}. \quad (9-11)$$

II. Преобразование

$$w = K \ln(z \pm h), \quad (9-12)$$

где K и h — постоянные, отличается от предыдущего сдвигом начала координат на плоскости z на расстояния $\mp h$ вдоль оси x .

III. Преобразование

$$w = K \ln \frac{z-h}{z+h} \quad (9-13)$$

можно применить к полю двух разноименно заряженных осей на плоскости z , имеющих абсциссы $\pm h$ (рис. 4-14).

IV. Преобразование

$$w = \sqrt{z} \quad (9-14)$$

применяется к семейству софокусных парабол на плоскости z , имеющих уравнения

$$\pm x + \sqrt{x^2 + y^2} = \text{const} = \left| \frac{2u^2}{2v^2} \right|; \quad (9-15)$$

они приближенно воспроизводят картину электрического поля около края тонкого заряженного листа A , являющегося фокусом парабол (рис. 9-3). Поверхности листа являются предельной параболой, обе ветви которой сливаются друг с другом.

V. Преобразование

$$w = e^z \quad (9-16)$$

служит для приближенного расчета поля у краев одноименно заряженных бесконечных параллельных между собой тонких листов AO и BO . Кривые $u = \text{const}$ являются линиями напряженности поля, а кривые $v = \text{const}_1$ — эквипотенциальными линиями (рис. 9-4); уравнения кривых на плоскости z :

$$e^x \cos y = \text{const} = u;$$

$$e^x \sin y = \text{const}_1 = v.$$



Рис. 9-3. Преобразование $w = \sqrt{z}$.

VI. Преобразование

$$z = w + e^w \quad (9-17)$$

применяется для исследования поля у краев плоского конденсатора (рис. 9-5). Выделяя вещественные и мнимые части, имеем:

$$x = u + e^u \cos v; \quad y = v + e^u \sin v.$$

При $v=0$: $x = u + e^u$; $y = 0$.

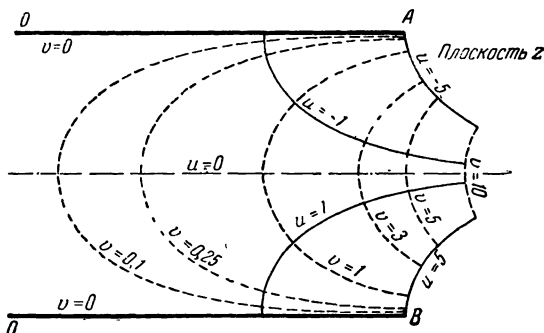


Рис. 9-4. Преобразование $w = e^z$.

Прямая $v=0$ на плоскости w преобразуется в ось абсцисс $y=0$ на плоскости z , которая может представлять собой линию симметрии, разделяющую диэлектрик конденсатора пополам.

При $v = \pm\pi$: $x = u - e^u$; $y = \pm\pi$.

Прямые $v = \pm\pi$ преобразуются в двойные отрезки $-\infty < x < -1$ прямых $y = \pi$ и $y = -\pi$ на плоскости z . Они могут представлять собой заряженные поверхности (обкладки конденсатора); края поверхностей имеют абсциссу -1 . Кривые $v = \text{const}$ представляют собой эквипотенциальные линии. Кривые $u = \text{const}$ выразят линии напряженности поля. Несколько линий напряженности поля и эквипотенциальных линий построено на рис. 9-5.

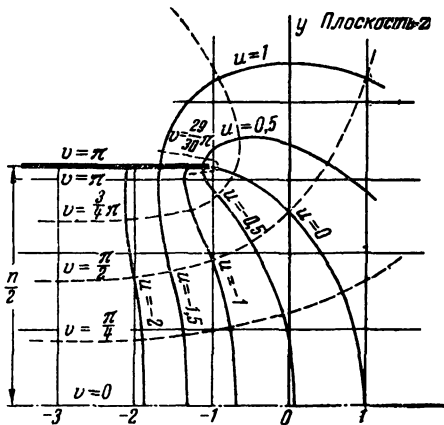


Рис. 9-5. Электрическое поле у края обкладки плоского конденсатора.

Линейный коэффициент преобразования определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\omega} &= 1 + e^w = 1 + e^u \cos v + j e^u \sin v = \\ &= \sqrt{1 + e^{2u} + 2e^u \cos v} \left| \operatorname{arctg} \left(\frac{e^u \sin v}{1 + e^u \cos v} \right) \right| = \frac{1}{M} e^{-j\theta}. \end{aligned} \quad (9-18)$$

Наибольшая напряженность поля будет у края обкладки ($u = 0$)

$$E_{\text{макс}} = |M|_{\text{макс}} = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos v)}}. \quad (9-19)$$

В действительности обкладка конденсатора имеет некоторую толщину и закругленный край. Ее поверхность эквипотенциальна. Поэтому следует подобрать од-

ну из эквипотенциальных линий, очертание которой подобно очертанию края обкладки (рис. 9-5); допустим, этому удовлетворяет линия

$$\alpha_{\text{пов}} = \text{const} = \frac{29}{30} \pi = 174^\circ,$$

тогда

$$E_{\text{макс}} = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos 174^\circ)}} = 10 \text{ относительных единиц.}$$

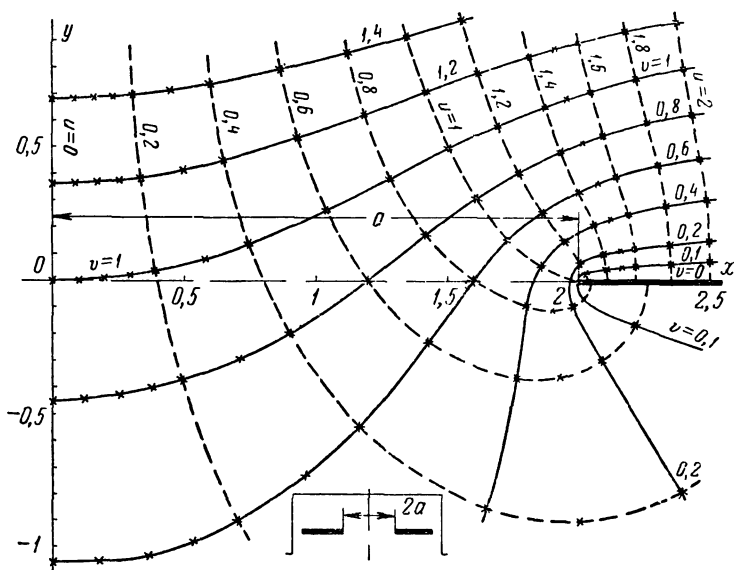


Рис. 9-6. Электрическое поле у щели в плоском экране.

Для установления относительной единицы положим u большим отрицательным числом; это соответствует внутренней поверхности обкладки на большом расстоянии от края, где поле однородно ($E = M \rightarrow 1$).

Из примера видно, что даже у довольно тупого края обкладки получилось удесятерение напряженности поля.

VII. Посредством преобразования

$$z = w_1 + \frac{k}{w_1}, \quad (9-20)$$

где k — постоянная, удобно исследовать электрическое поле у щели в плоском экране.

На рис. 9-6 приведен пример построения для $k=1$.
VIII. Посредством сложного преобразования

$$\omega = \text{Arch} \frac{z}{2} = \ln \left(\frac{z}{2} + \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - 1} \right), \quad (9-21)$$

где

$$z = \omega_1 + \frac{1}{\omega_1} \text{ (преобразование Жуковского),} \quad (9-22)$$

семейство софокусных эллипсов и гипербол на плоскости z преобразуется в систему окружностей и радиусов на вспомогательной плоскости $\omega_1 = r e^{i\theta}$ (рис. 9-7), а по-

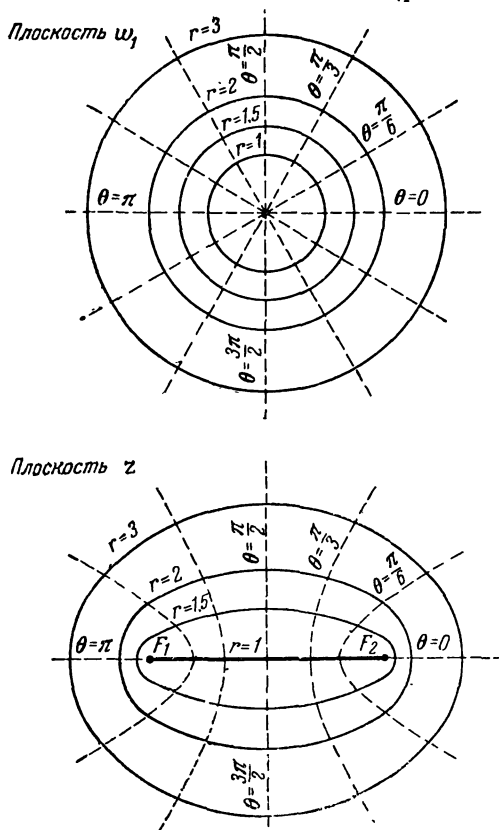


Рис. 9-7. Преобразование $z = \omega_1 + \frac{1}{\omega_1}$.

следняя — в однородное поле взаимно перпендикулярных прямых $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ на плоскости $w = u + jv$ (ср. § 4-19).

9-4. РАСЧЕТ ПОЛЯ, ОГРАНИЧЕННОГО ЛОМАНОЙ ЛИНИЕЙ

В точках, лежащих в углах граничной, ломаной линии, напряженность поля стремится либо к нулю, либо к бесконечности. Каждый угол должен рассматриваться как закругление с бесконечно малым радиусом; если сторонами угла являются эквипотенциальные линии, то расстояние между двумя эквипотенциальными линиями, соответствующими потенциалам, отличающимся друг от друга на какую-либо малую, но постоянную величину $\Delta\phi$, будет по мере приближения к углу увеличиваться, когда рассматривается поле внутри угла (рис. 9-1,а), или уменьшаться, когда рассматривается поле снаружи угла (см., например, рис. 9-5). В первом случае градиент потенциала в вершине угла стремится к нулю, во втором — к бесконечности.

Для того чтобы линейный коэффициент преобразования мог обращаться в нуль или в бесконечность в некоторой угловой точке D на плоскости z , необходимо, чтобы выражение его обратной величины dz/dw_1 содержало, например, множитель типа $(w_1 - d)^{m_d}$, где d — координата точки D' на плоскости w_1 , соответствующей точке D ; если показатель степени m_d положителен, то $(w_1 - d)^{m_d}$ будет стремиться к нулю по мере приближения w_1 к d ; если же m_d отрицательно, то $(w_1 - d)^{m_d}$ будет стремиться к бесконечности. Такого типа множитель должен содержаться в выражении для dz/dw_1 для каждого угла, кроме относящегося к $\pm\infty$ на плоскости w_1 .

Поэтому в примере, показанном на рис. 9-8 и изображающем поле электрического тока в ленточном проводнике, ширина которого резко изменяется от размера a до размера b , выражение обратной величины линейного коэффициента преобразования должно иметь вид:

$$\frac{dz}{dw_1} = K_1 (w_1 - c)^{m_c} (w_1 - d)^{m_d} (w_1 - f)^{m_f}, \quad (9-23)$$

где K — некоторая постоянная. Формула типа (9-23) называется в математике преобразованием Кристоффеля — Шварца.

Направление обхода ломаной показано на рис. 9-8 пунктирными стрелками. Точки B и C , лежащие на очень большом расстоянии слева от чертежа, считаются соответствующими углу поворота ломаной на $\pi=180^\circ$.

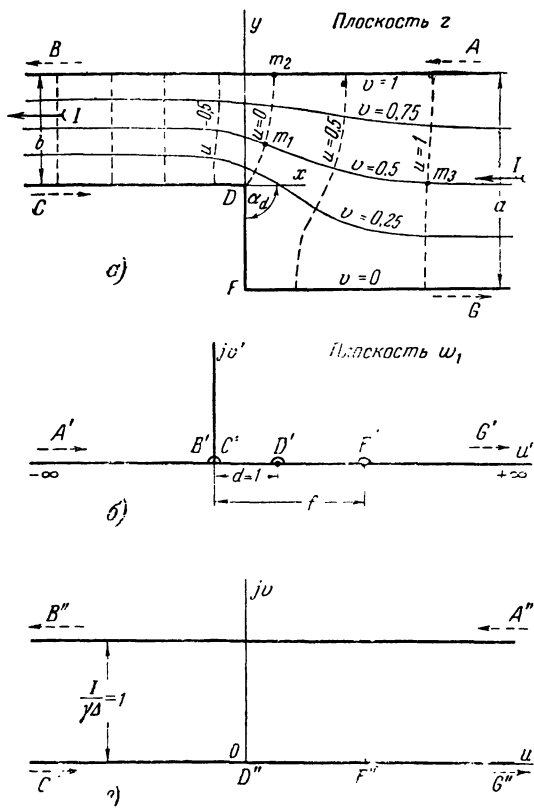


Рис. 9-8. К расчету поля плотности тока при изменении ширины проводника.

Если производить преобразование прямой $A'B'C'D'F'G'$ на плоскости w_1 в ломаную $ABCD\bar{F}G$ на плоскости z , то каждый малый элемент участка $C'D'$ переносится без изменения направления на участок CD ; иначе говоря, аргумент обратной величины линейного коэффициента преобразования dz/dw_1 на этом участке равен нулю ($\alpha_{CD}=0$); каждый же элемент участка $D'F'$

должен быть повернут на угол $\alpha_{DF} = -\frac{\pi}{2}$ для того чтобы лечь на линию DF ; аргумент dz/dw_1 здесь должен быть равен $-\frac{\pi}{2}$. В результате при прохождении угла D аргумент dz/dw_1 должен измениться на $\alpha_{DF} - \alpha_{CD} = \alpha_D$ (в данном случае $\alpha_D = -\frac{\pi}{2}$), с другой стороны, аргумент соответствующего множителя $(w_1 - d)^{m_d}$ изменится на $\pm\pi$, поскольку множитель меняет знак. Таким образом,

$$\alpha_D = \pm m_d \pi; \quad m_d = \pm \frac{\alpha_D}{\pi}. \quad (9-24)$$

Выбор знака делают исходя из следующих соображений: если угол выступает внутрь поля (таков угол D на рис. 9-8,а), то значение напряженности поля должно стремиться к бесконечности; оно определяется величиной модуля dw_1/dz ; следовательно, обратная величина dz/dw_1 должна стремиться к нулю; показатель степени m_d должен быть положительным. Если же угол выступает наружу (например, угол F), то показатель m_f должен быть отрицательным.

Начало координат на плоскости z помещено в точку D . Начало координат на плоскости w_1 пусть соответствует пункту слияния точек B' и C' ; следовательно, $c=0$. Координату точки D' выберем равной 1 ($d=1$). Координата точки F' пока неизвестна; обозначим ее буквой f .

После подстановок выражение (9-23) примет вид:

$$\frac{dz}{dw_1} = K_1 w_1^{-1} (w_1 - 1)^{\frac{1}{2}} (w_1 - f)^{-\frac{1}{2}} = \frac{K_1}{w_1} \sqrt{\frac{w_1 - 1}{w_1 - f}}. \quad (9-25)$$

Для определения постоянных K_1 и f выразим w_1 в полярной форме $w_1 = r_1 e^{j\theta}$, тогда $\frac{dw_1}{d\theta} = jr_1 e^{j\theta} = jw_1$.

При передвижении от точки, лежащей на малом расстоянии слева от начала координат в плоскости w_1 (рис. 9-8,в), к точке, лежащей на таком же расстоянии справа, аргумент w_1 изменяется на $\pm\pi = 180^\circ$. Такое же передвижение в плоскости z вызовет изменение z на величину $-jb$.

Отношение этих изменений в пределе стремится к $\frac{dz}{d\theta} = j \frac{b}{\pi}$ (выбираем положительный знак).

С другой стороны, при очень малой величине ω_1 уравнение (9-25) принимает простой вид:

$$\frac{dz}{d\omega_1} = \frac{K_1}{\omega_1 \sqrt{f}}. \quad (9-26)$$

Преобразуем это выражение

$$\frac{dz}{d\omega_1} = \frac{dz}{d\theta} \frac{d\theta}{d\omega_1} = \frac{b}{\pi\omega_1}.$$

Следовательно,

$$K_1 = \frac{b \sqrt{f}}{\pi}. \quad (9-27)$$

Обратимся теперь к области очень больших значений ω_1 (области точек A' и G' на плоскости ω_1). При передвижении на плоскости ω_1 от точки, лежащей на очень большом расстоянии слева от начала координат, к другой точке, лежащей на таком же расстоянии справа, аргумент ω_1 изменяется на $\pm\pi$; такое же передвижение на плоскости z вызовет изменение z на $-ja$; поэтому

$$\frac{dz}{d\theta} = j \frac{a}{\pi} \quad (9-28)$$

(выбираем также положительный знак).

Уравнение (9-25) при очень больших значениях ω_1 обращается в $\frac{dz}{d\omega_1} = \frac{K_1}{\omega_1}$.

Таким образом,

$$\frac{dz}{d\omega_1} = \frac{dz}{d\theta} \frac{d\theta}{d\omega_1} = \frac{a}{\pi\omega_1} = \frac{K_1}{\omega_1};$$

$$K_1 = \frac{a}{\pi}. \quad (9-29)$$

Из сравнения выражений (9-27) и (9-29) вытекает:

$$f = \frac{a^2}{b^2}. \quad (9-30)$$

Подставим значение K_1 из (9-29) в (9-25)

$$\frac{dz}{d\omega_1} = \frac{a}{\pi} \frac{1}{\omega_1} \sqrt{\frac{\omega_1 - 1}{\omega_1 - f}}.$$

Интегрируем это уравнение (например, путем замены радикала новой переменной)

$$z = \frac{a}{\pi} \left\{ \operatorname{Arch} \frac{2\omega_1 - f - 1}{f - 1} - \frac{1}{\sqrt{f}} \operatorname{Arch} \frac{(f + 1)\omega_1 - 2f}{(f - 1)\omega_1} \right\} + N. \quad (9-31)$$

Постоянная N находится из условия: при $z = 0$; $\omega_1 = 1$ (точка D)

$$N = -\frac{a}{\pi} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{f}} \right) \operatorname{Arch}(-1) = -ja \left(1 - \frac{1}{\sqrt{f}} \right). \quad (9-32)$$

Линии поля в плоскости ω_1 проходят из начала координат по радиусам. Такое поле легко преобразуется в простейшее поле (рис. 9-8,в) посредством уравнения (9-7)

$$\omega = u + jv = K \ln \omega_1.$$

Постоянная K находится из уравнения (9-11) при $\theta = \pi$

$$K = \frac{I}{\gamma \pi \Delta}, \quad (9-33)$$

где I — полная величина тока;

γ — удельная проводимость материала;

Δ — толщина проводника в направлении, перпендикулярном чертежу на рис. 9-8,а.

При $\omega_1 = 1$ (точка D' на плоскости ω_1) $\omega = 0$; следовательно, начало координат на плоскости ω будет в точке D'' (рис. 9-8,в).

Последнее преобразование свелось к тому, чтобы поднять отрезок $A'B'$ на рис. 9-8,б, повернуть его на угол π и поместить над осью $u = 0$ на расстоянии $I/\gamma\Delta$.

Сделав все подстановки в (9-31), получим расчетное уравнение преобразования поля, изображенного на рис. 9-8,а, в однородное поле на рис. 9-8,в

$$z = \frac{a}{\pi} \operatorname{Arch} \frac{-a^2 + \left(2e^{\frac{\omega}{K}} - 1 \right) b^2}{a^2 - b^2} - \frac{b}{\pi} \operatorname{Arch} \frac{\left(1 - 2e^{-\frac{\omega}{K}} \right) a^2 + b^2}{a^2 - b^2} - j(a - b). \quad (9-34)$$

На рис. 9-8,а изображены эквипотенциальные линии и линии поля, проведенные через точки пересечения, вычисленные по формуле (9-34).

9-5. УВЕЛИЧЕНИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ, ОБУСЛОВЛЕННОЕ ИЗМЕНЕНИЕМ ШИРИНЫ ПРОВОДНИКА

Разобранный в § 9-4 пример позволяет рассчитать увеличение сопротивления, возникающее при резком изменении ширины проводника. Физической причиной увеличения сопротивления является неравномерное распределение плотности тока.

Аналогичные задачи возникают при расчете магнитного поля, например, в воздушном зазоре электрической машины с зубчатым якорем.

Вдоль линии $C''D''F''G''$ (рис. 9-8,б) $v=0$; $w=u$.

Примем $I/\gamma\Delta=1$; тогда $K=1/\pi$.

Рассмотрим области проводника, удаленные от начала координат. Так, в области $A''G''$ значение u положительно и велико; уравнение (9-34) упростится

$$z_1 \approx \frac{a}{\pi} \operatorname{Arch} \frac{2e^{\pi u} b^2}{a^2 - b^2} - \frac{b}{\pi j} \operatorname{Arch} \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} - j(a - b). \quad (9-35)$$

При больших значениях u

$$\operatorname{Arch} \frac{2e^{\pi u} b^2}{a^2 - b^2} \approx \ln \frac{4b^2}{a^2 - b^2} + \pi u.$$

Вещественная часть (9-35) получит вид:

$$\operatorname{Re}(z_1) = x_1 = au + \frac{a}{\pi} \ln \frac{4b^2}{a^2 - b^2} - \frac{b}{\pi} \operatorname{Arch} \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}. \quad (9-36)$$

Если бы распределение плотности тока было равномерным, то второй и третий члены в (9-36) сократились бы; в этом нетрудно убедиться, предположив, что b стремится к a .

В таком случае

$$x'_1 = au. \quad (9-37)$$

Вычитая (9-36) из (9-37), получаем эффективное удлинение широкого проводника

$$\Delta x_1 = x'_1 - x_1 = \frac{b}{\pi} \operatorname{Arch} \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} - \frac{a}{\pi} \ln \frac{4b^2}{a^2 - b^2}. \quad (9-38)$$

Обратимся теперь к области $B''C''$, где u имеет большие отрицательные значения. Уравнение (9-34) примет для этой области вид:

$$z_2 \approx \frac{a}{\pi} \operatorname{Arch} \left(-\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \right) - \frac{b}{\pi} \operatorname{Arch} \left(-\frac{2a^2}{a^2 - b^2} \right) e^{-\pi u} - j(a - b). \quad (9-39)$$

Имея в виду, что $\operatorname{Arch}(-n) = \operatorname{Arch} n + j\pi$, и заменяя

$$\operatorname{Arch} \frac{2a^2 e^{-\pi u}}{a^2 - b^2} = \ln \frac{4a^2}{a^2 - b^2} - \pi u,$$

вещественную часть (9-39) можно представить в виде

$$\operatorname{Re}(z_2) = x_2 = bu + \frac{a}{\pi} \operatorname{Arch} \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} - \frac{b}{\pi} \ln \frac{4a^2}{a^2 - b^2}. \quad (9-40)$$

При равномерном распределении плотности тока второй и третий члены в скобках сокращаются; в этом можно убедиться, устремляя b к a .

Узкий проводник получает эффективное удлинение Δx_2 , определяемое вторым и третьим членами в правой части (9-40).

Введем понятие эффективного удлинения, отнесенного к широкому проводнику,

$$\lambda = \Delta x_1 + \Delta x_2 \frac{a}{b}. \quad (9-41)$$

Числовой подсчет показал, что при уменьшении ширины проводника вдвое, т. е. при $b = a/2$, $\lambda = 0,257a$.

Увеличение сопротивления подсчитывается по обычной формуле

$$\Delta R = \frac{1}{\epsilon \gamma} \frac{\lambda}{a \Delta}. \quad (9-42)$$

Глава десятая

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

10-1. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАГНИТНОГО ПОТОКА

При взаимном перемещении магнитных полей может происходить либо сращивание, либо разделение линий поля. Например, пусть два параллельных проводника с токами одного направления сближаются друг с другом (рис. 8-7). Когда проводники находились на очень большом расстоянии, линии магнитного поля каждого из них имели вид концентрических окружностей.

При сближении проводников происходит сращивание линий их магнитных полей, начиная с линий большого радиуса. Сложные кривые на рис. 8-7 являются продуктами такого сращивания.

Линии малого радиуса Q и R окружают свои проводники с токами. У линии R заметна тенденция к нарушению формы окружности. При дальнейшем сближении проводников линия R будет все более и более приближаться по форме к лемнискате M , стремясь срастись с такой же линией, окружающей другой проводник.

Лемниската M затем раздвоится по обе стороны линии, соединяющей центры проводов, и примет сперва форму, подобную P , затем S и т. д. Линии P и S при дальнейшем сближении проводников

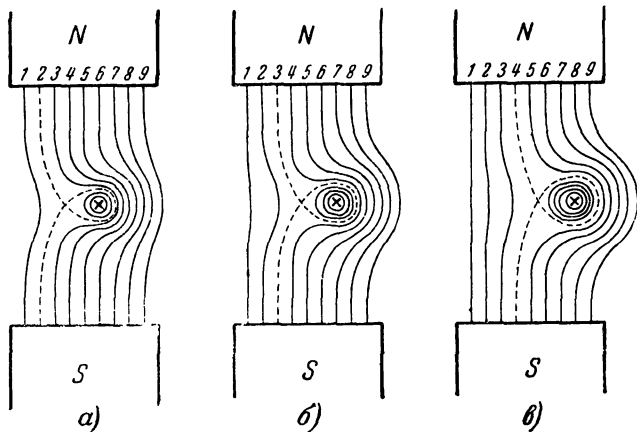


Рис. 10-1. Отпочкование замкнутых линий магнитного поля, вызываемое движением проводника.

тоже деформируются, приближаясь по форме к окружностям с центром в точке ветвления O , являющейся как бы «центром тяжести» поля.

Если те же проводники будут раздвигаться, процесс деформации линий поля пойдет в обратном порядке.

Точка ветвления, в которой линия поля пересекает саму себя и в которой величина магнитной индукции равна нулю, представляет собой место сращивания или разделения линий поля.

Точка t поля на рис. 8-11 является местом отпочкования от линии внешнего поля замкнутой линии, окружающей проводник, движущийся вправо. Если, наоборот, представить проводник движущимся влево, то та же точка ветвления становится местом слияния окружающей проводник замкнутой линии поля с линией внешнего поля.

Сращивание или разделение линий магнитного поля должно проходить без нарушения их замкнутости. Линии поля могут плавно изменять свою форму любым образом, могут «перехлестываться», образуя точку ветвления, в которой происходит отпочкование новой линии поля, принципиально замкнутой с момента своего зарождения. В другом случае две линии поля могут срастись в одну, причем этот процесс проходит через касание замкнутых линий в одной точке.

Академик В. Ф. Миткевич предложил для всех таких деформаций магнитных полей термин «непрерывные преобразования магнитного потока».

Процесс электромагнитной индукции связан с отпочкованием (при движении проводника) новых и новых замкнутых линий от внешнего поля (рис. 10-1).

На рис. 10-2 представлен другой случай электромагнитной индукции. Ряд постоянных магнитов расположен вокруг проводника, показанного на рис. 10-2 в разрезе. Пусть все магниты движутся

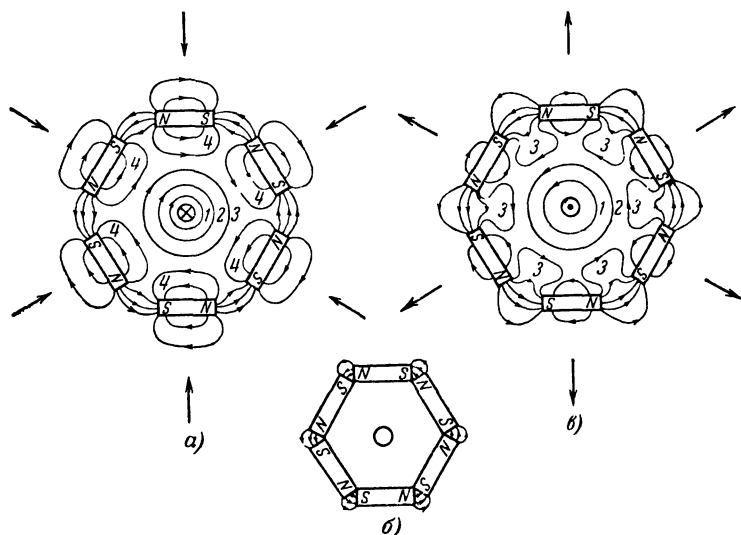


Рис. 10-2. Пример симметричного преобразования магнитного потока.

к проводнику, как показано стрелками на рис. 10-2,а; линии потоков отдельных магнитов стремятся к сращиванию; в момент, показанный на этом рисунке, линии 4 стремятся срастись друг с другом, чтобы образовать линию поля, окружающую проводник. Таким путем образовались в предыдущие моменты времени линии 3, 2 и 1. Направление этих линий обратное направлению линий поля сближающихся магнитов. Это соответствует закону Ленца.

Когда магниты займут положение, показанное на рис. 10-2,б, дальнейшее движение их прекратится; э. д. с. в проводнике будет равна нулю. Если теперь начать раздвигать магниты, как показано на рис. 10-2,в, отпочкование линий поля магнитов будет происходить снова. Показанные на этом рисунке линии 3 находятся в состоянии, близком к сращиванию друг с другом. Окружающие проводник линии 2 и 1 образовались ранее в порядке подобного сращивания. Заметим, что отпочковавшиеся при сращивании линии теперь имеют то же направление, что и линии основного поля системы магнитов; иначе говоря, в цепи проводника будет индуцированный ток, стремящийся по закону Ленца задержать спадание поля, вызываемое удалением магнитов от проводника.

Итак, формулировка закона электромагнитной индукции с помощью концепции пересечения проводником линий поля недостаточна и неудовлетворительна. Правильное описание и анализ явления в настоящее время производятся с позиций релятивистской электродинамики, основанной на уравнениях Максвелла — Минковского [Л. 40].

10-2. ВТОРОЕ УРАВНЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

Второе уравнение Максвелла выражает закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме.

Выразим по (5-12) индуктируемую э. д. с. \mathcal{E} как линейный интеграл индуктированного электрического поля E по замкнутому пути (например, по контуру на рис. 10-3). Используем (6-2):

$$\mathcal{E} = \int_l E dl = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_s B ds. \quad (10-1)$$

Полная производная заменена частной, поскольку величина магнитной индукции B может в общем случае изменяться не только по времени, но и по расстоянию.

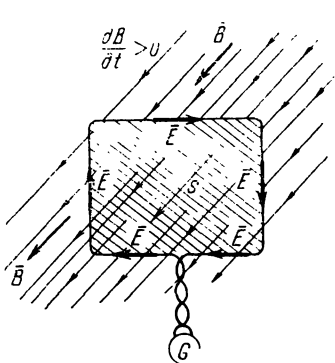


Рис. 10-3. Электромагнитная индукция.

Применим теорему Остроградского — Стокса к левой части (10-1), в правой же части переменим местами символ дифференцирования по времени и символ интегрирования по поверхности; это допустимо в силу полной независимости операций

$$\int_s [\nabla E] ds = - \int_s \frac{\partial B}{\partial t} ds.$$

Оба интеграла взяты по одной и той же поверхности s , причем равенство сохраняет силу при любой величине и форме этой поверхности. Следовательно, подынтегральные выражения равны:

$$[\nabla E] = - \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (10-2)$$

Это второе уравнение Максвелла; оно выражает в математической форме факт индуктирования вихревого

электрического поля в любой среде изменяющимся по времени магнитным полем. Присутствие проводящего контура, показанного на рис. 10-3, не является поэтому обязательным.

10-3. ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

Если магнитное поле \mathbf{B} перемещается относительно среды со скоростью \mathbf{v} , то в среде возникает дополнительное электрическое поле, определяемое уравнением

$$\mathbf{E}' = [\mathbf{v}\mathbf{B}]. \quad (10-3)$$

Второе уравнение Максвелла (закон электромагнитной индукции) в таком случае записывают в обобщенной форме

$$[\nabla\mathbf{E}] = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + [\nabla[\mathbf{v}\mathbf{B}]]. \quad (10-4)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (10-4) называется «трансформаторным полем», а второе слагаемое — «полем движения».

Оба поля являются индуктированными; первое из них имеет место в проводах обмоток и в сердечнике трансформатора, а второе — в обмотках и магнитных цепях электрических генераторов и двигателей.

В некоторых электрических машинах (коллекторные электродвигатели переменного тока) оба вида поля встречаются совместно; рассматривая работу таких машин, говорят о двух видах индуктированной э. д. с. — «трансформаторной э. д. с.» и «э. д. с. вращения (движения)».

Векторные величины \mathbf{E} и \mathbf{B} в уравнении (10-4) предполагаются измеренными в одной и той же системе отсчета.

Разделение индуктируемого электрического поля (и определяемой им э. д. с.) на трансформаторную составляющую и составляющую (относительного) движения зависит от системы координат, в которой производятся измерения [Л. 40].

Во всех случаях вычисления э. д. с. как линейного интеграла напряженности электрического поля $\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}d\mathbf{l}$ по контуру, одна часть которого лежит в неподвижной среде, а другая — в движущейся среде, под величиной \mathbf{E} надо понимать значение, обнаруживаемое в системе ко-

ординат, которая мгновенно связана с элементом среды, центрированным в данной точке, и определяемое по воздействию на покоящийся в этой системе единичный заряд.

10-4. РОЛЬ МАГНИТНЫХ ЭКРАНОВ В ПРОЦЕССЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

Опыт показывает, что в проводнике, заключенном в стальную трубу и движущемся в магнитном поле (рис. 10-4), индуцируется э. д. с. той же величины, что и в незранированном проводнике, движущемся с той же скоростью в том же поле (рис. 10-1). Следовательно, экранирующее действие стальной трубы заключается толь-

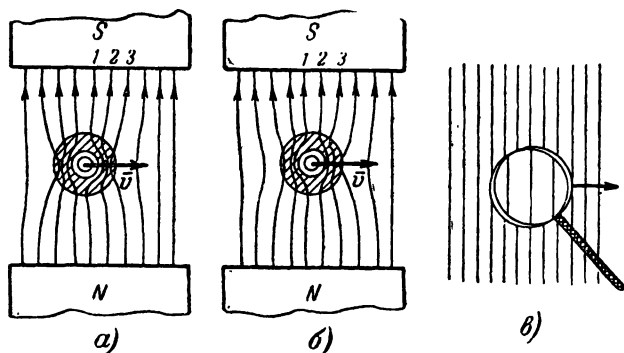


Рис. 10-4. Отсутствие влияния магнитного экранирования на величину индуцированной э. д. с.

ко в уменьшении величины индукции в ее полости. Скорость же движения экранированного проводника относительно поля, проникшего внутрь экрана, будет выше скорости проводника относительно полюсов во столько раз, во сколько экран ослабил поле в окрестностях проводника. Например, линия 1 задержится на некоторое время в правой части стенки трубы (рис. 10-4,а), однако она с большей скоростью пересечет внутреннюю полость трубы, чтобы оказаться позднее в левой части стенки (рис. 10-4,б).

Некоторое представление о характере этой дополнительной скорости может дать рис. 10-4,в, хотя он и не является удовлетворительной аналогией разбираемого явления. Если передвигать лупу относительно разлинованной бумаги, то линии на увеличенном изображении кажутся перемещающимися против направления движения лупы.

Возможно иное объяснение явления. Магнитное поле в полости экрана \mathbf{B} можно рассматривать как сумму внешнего поля, которое установилось бы в отсутствие экрана, \mathbf{B}_0 и дополнительного поля \mathbf{B}_1 , обусловленного намагниченностью материала экрана («магнитной поляризацией»),

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1.$$

При идеальном экранировании $\mathbf{B}=0$, следовательно, $\mathbf{v}_J = -\mathbf{v}_0$.

При применении второго уравнения Максвелла к расчету индуцированной э. д. с. теперь следовало бы учитывать две составляющие индуцированного электрического поля движения $[\mathbf{v}\mathbf{B}_0] + [\mathbf{v}_J\mathbf{B}_J]$, где \mathbf{v} и \mathbf{v}_J — скорости движения проводника соответственно относительно внешнего магнитного поля и дополнительного магнитного поля. Однако проводник относительно экрана не перемещается; следовательно, $\mathbf{v}_J = 0$.

Магнитное экранирование движущегося проводника не изменило величины индуцированной в нем э. д. с., но уменьшило механическое усилие, испытываемое проводником при наличии в нем тока, так как величина усилия пропорциональна магнитной индукции [по (6-1)].

Это обстоятельство позволило конструкторам электрических машин применить зубчатую форму якорей (рис. 10-5), не опасаясь влияния экранирования пазов зубцами на величину э. д. с., с другой стороны, изоляция проводников не нуждается в особой механической прочности, так как большая часть механических усилий приходится на зубцы, а не на проводники.

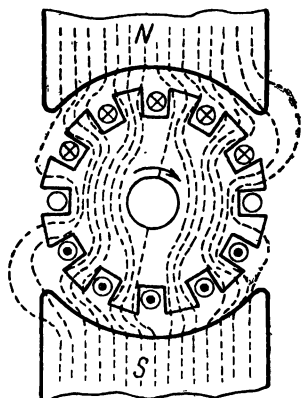


Рис. 10-5. Отсутствие влияния экранирования зубцами проводов в пазах на э. д. с., индуцируемую в обмотке якоря электрической машины.

Глава одиннадцатая

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ (Общие закономерности)

11-1. СИСТЕМА ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Неразрывная связь электрического и магнитного компонентов электромагнитного поля выражается в форме уравнений Максвелла; совместно с двумя уравнениями Максвелла рассматриваются теорема Гаусса в дифференциальной форме [уравнение (3-15)] и уравнение непрерывности линий магнитного поля (6-9), служащее аналогом теоремы Гаусса для магнитного поля,

$$[\nabla \mathbf{H}] = \gamma \mathbf{E} + \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad (11-1)$$

$$[\nabla \mathbf{E}] = -\mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad (11-2)$$

$$\nabla \mathbf{D} = \rho; \quad (11-3)$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0. \quad (11-4)$$

В этих уравнениях подразумевается постоянство характеризующих среду величин диэлектрической ϵ_a и магнитной μ_a проницаемостей и удельной проводимости γ .

В практике особо важен случай гармонического изменения величин электромагнитного поля во времени

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_m e^{j(\omega t + \psi_1)} = \dot{\mathbf{E}}_m e^{j\omega t}; \quad (11-5)$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_m e^{j(\omega t + \psi_2)} = \dot{\mathbf{H}}_m e^{j\omega t}. \quad (11-6)$$

Величины $\dot{\mathbf{E}}_m = \mathbf{E}_m e^{j\psi_1}$ и $\dot{\mathbf{H}}_m = \mathbf{H}_m e^{j\psi_2}$ называются комплексными амплитудами соответственно напряженности электрического и магнитного полей.

При гармоническом процессе первые два уравнения Максвелла принимают вид:

$$[\nabla \dot{\mathbf{H}}] = (\gamma + j\omega\epsilon_a) \dot{\mathbf{E}}; \quad (11-7)$$

$$[\nabla \dot{\mathbf{E}}] = -j\omega\mu_a \dot{\mathbf{H}}. \quad (11-8)$$

11-2. ТЕОРЕМА УМОВА—ПОЙНТИНГА

Посредством электромагнитного поля может осуществляться передача энергии на расстояние. Примерами служат распространение света и радиоволн.

Исследование таких процессов передачи энергии производится на основе учения о движении энергии, разработанного Н. А. Умовым к 1874 г. Аналогичное исследование электромагнитного поля было сделано Пойнтингом в 80-х годах XIX в.

Электромагнитное поле в некотором объеме пространства имеет запас электрической и магнитной энергии, определяемый (3-43) и (6-38),

$$W = \int_V \frac{\mathbf{D}\mathbf{E}}{2} dV + \int_V \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}}{2} dV = \int_V \left(\frac{\epsilon_a \mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mu_a \mathbf{H}^2}{2} \right) dV.$$

Электромагнитное поле и его запас энергии непрерывно изменяются во времени. Допустим, что происходит убывание количества энергии в объеме V со скоростью

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = - \int \left(\epsilon_a E \frac{\partial E}{\partial t} + \mu_a H \frac{\partial H}{\partial t} \right) dV.$$

Из уравнений Максвелла (11-1) и (11-2) следует:

$$\epsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} = [\nabla H] - \gamma E; \quad \mu_a \frac{\partial H}{\partial t} = -[\nabla E].$$

Подынтегральное выражение можно поэтому представить в виде

$$-\left(\epsilon_a E \frac{\partial E}{\partial t} + \mu_a H \frac{\partial H}{\partial t} \right) = \gamma E^2 + H[\nabla E] - E[\nabla H].$$

Последние два члена в правой части этого равенства являются результатом взятия дивергенции векторного произведения $[EH]$; действительно, рассматривая оператор ∇ как символ дифференцирования и обращаясь с ним формально как с вектором, можно получить:

$$\nabla [EH] = E[H\nabla] + H[\nabla E] = H[\nabla E] - E[\nabla H].$$

Выражение скорости убывания энергии принимает форму

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \int_V \gamma E^2 dV + \int_V \nabla [EH] dV. \quad (11-9)$$

Согласно (5-11) член $\int_V \gamma E^2 dV$ выражает энергию, преобразовываемую в тепло за единицу времени. Второй член преобразуем по теореме Остроградского — Гаусса

$$\int_V \nabla_i [EH] dV = \oint_{s_{\rightarrow}} [EH] ds.$$

Этот интеграл представляет собой поток энергии, уходящей в единицу времени через замкнутую поверхность s , ограничивающую объем V . Плотность потока энергии в единицу времени (т. е. количество энергии, протекающей в единицу времени через единичную площадку, пер-

пендикулярную направлению потока энергии) выражается векторной величиной

$$\mathbf{P} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]. \quad (11-10)$$

Это положение называется теоремой Умова — Пойнтинга.

Величина \mathbf{P} называется вектором Пойнтинга. Его направление показывает направление движения энергии. Оно определяется поступательным движением штопора, рукоятка которого вращается в плоскости векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} , от вектора \mathbf{E} к вектору \mathbf{H} .

При гармоническом изменении величин электромагнитного поля во времени вектор Пойнтинга можно выразить в комплексной форме как векторное произведение комплекса напряженности электрического поля на сопряженный комплекс напряженности магнитного поля (аналогично комплексу мощности в электротехнике переменного тока)

$$\tilde{\mathbf{P}} = [\dot{\mathbf{E}}\mathbf{H}^*]. \quad (11-11)$$

Вещественная часть комплекса $\text{Re } \tilde{\mathbf{P}}$ определяет плотность потока активной энергии в единицу времени, а мнимая часть $\text{Im } \tilde{\mathbf{P}}$ — плотность потока реактивной энергии (попеременно переходящей из электрической формы в магнитную или обратно).

11-3. ВЕКТОР ПОЙНТИНГА ПРИ ПЕРЕДАЧЕ ЭНЕРГИИ ПО КОАКСИАЛЬНОМУ КАБЕЛЮ

Положим, что внутренний проводник кабеля заряжен положительно относительно наружного (трубы). Вектор \mathbf{E} в пространстве между проводниками кабеля практически лежит в плоскости, нормальной к оси кабеля (рис. 11-1). Его продольная составляющая мала по сравнению с нормальной и может в первом приближении не учитываться.

Направление вектора \mathbf{H} связывается с током во внутреннем проводнике правилом штопора. Вектор Пойнтинга \mathbf{P} определяется по (11-10). На рис. 11-1 показано расположение векторов \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{P} в трех точках пространства между проводниками кабеля. Здесь вектор \mathbf{P} направлен вдоль кабеля, выражая процесс передачи энергии от генератора к приемнику.

Элементарное количество энергии, проходящей в 1 сек через кольцеобразный элемент сечения радиусом r и шириной dr , равно:

$$dP = EH \cdot 2\pi r dr.$$

Подставим значения E и $H=B/\mu_0$ из (4-36) и (8-7):

$$E = \frac{U}{r \ln \frac{r_2}{r_1}}; \quad H = \frac{I}{2\pi r}; \quad dP = \frac{UI}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \frac{dr}{r},$$

где U — напряжение между проводниками;
 I — ток в проводах кабеля.

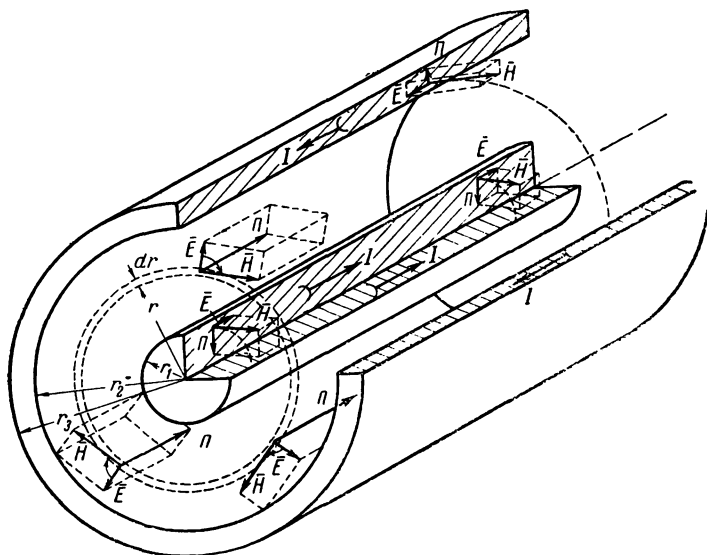


Рис. 11-1. Вектор Пойнтинга в коаксиальном кабеле.

Полное количество проходящей в 1 сек вдоль кабеля энергии находится путем интегрирования последнего выражения в пределах от r_1 до r_2 .

$$P = UI. \quad (11-12)$$

Оно равно передаваемой по кабелю мощности. В толще внутреннего и наружного проводников вектор E имеет только продольную составляющую, направление которой совпадает с направлением тока. Расположение векторов E , H и P показано на рис. 11-1 в двух точках внутри внутреннего проводника и в одной точке внутри трубы. Направление вектора P — радиальное, что выражает движение энергии из пространства между проводниками кабеля внутрь проводников.

Беря значения касательных составляющих векторов E и $H=B/\mu_0$ на поверхности внутреннего проводника ($r=r_1$) из (5-25)

и (8-7), найдем количество энергии, входящей в 1 сек в этот проводник (на единицу длины),

$$E = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{I}{\gamma \pi r_1^2}; \quad H = \frac{I}{2\pi r_1};$$

$$P_1 = EH \cdot 2\pi r_1 \cdot 1 = I^2 \frac{1}{\gamma \pi r_1^2} = I^2 R_1, \quad (11-13)$$

где $R_1 = 1/\gamma \pi r_1^2$ — электрическое сопротивление внутреннего проводника на единицу длины.

Аналогичным путем можно рассчитать, что энергия, входящая в наружный проводник в 1 сек, равна потере мощности на его нагрев.

Передача энергии вдоль электрической линии происходит не внутри проводников, а через диэлектрик. Проводники лишь обеспечивают движение энергии в требуемом направлении. Часть энергии поступает внутрь проводников для компенсации потерь на нагрев.

11-4. ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

Совместное решение уравнений Максвелла заключается прежде всего в исключении одной из зависимых переменных (\mathbf{E} или \mathbf{H}); это может быть сделано, например, следующим образом.

Возьмем ротор от обеих частей (11-1):

$$[\nabla [\nabla \mathbf{H}]] = \gamma [\nabla \mathbf{E}] + \epsilon_a \left[\nabla \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] = \gamma [\nabla \mathbf{E}] + \epsilon_a \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \mathbf{E}]. \quad (11-14)$$

Перестановка местами символа дифференцирования по времени и символа ротора в последнем члене правой части допустима в силу независимости операций одна от другой.

Подставим значение $[\nabla \mathbf{E}]$ из уравнения (11-2) в выражение (11-14), применим к левой части последнего преобразование (2-26), имея в виду, что дивергенция напряженности магнитного поля равна нулю ($\nabla \mathbf{H} = 0$). Это вытекает из (11-4) при принятии $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_a$.

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \gamma \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \quad (11-15)$$

Аналогичным путем, взяв ротор от обеих частей (11-2), подставив в результат значение $[\nabla \mathbf{H}]$ из (11-1) и

приняв $\nabla \mathbf{E} = 0$, что соответствует как случаю идеального диэлектрика, так и случаю проводящей среды (в обоих случаях свободные заряды в толще среды отсутствуют), получают уравнение для напряженности электрического поля

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \gamma \mu_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (11-16)$$

При гармоническом изменении величин поля по времени (11-15) и (11-16) могут быть написаны в комплексном виде; имея в виду, что $\partial/\partial t \doteq j\omega$ и $\partial^2/\partial t^2 \doteq -\omega^2$, получаем:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} = (\rho^2 - \beta^2) \dot{\mathbf{E}}; \quad (11-17)$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} = (\rho^2 - \beta^2) \dot{\mathbf{H}}, \quad (11-18)$$

где

$$\rho = \sqrt{j\omega\gamma\mu_a} = \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu_a}{2}} (1 + j); \quad (11-19)$$

$$\beta = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}. \quad (11-20)$$

В случае проводящей среды вторые члены правых частей (11-15) — (11-18) малы по сравнению с первыми и могут быть отброшены; физически это означает, что токами смещения в проводниках пренебрегают ввиду их малости по сравнению с токами проводимости; тогда

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \gamma \mu_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad (11-21)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \gamma \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (11-22)$$

или при гармоническом изменении величин по времени ($\rho^2 \gg \beta^2$)

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} = \rho^2 \dot{\mathbf{E}}; \quad (11-23)$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} = \rho^2 \dot{\mathbf{H}}. \quad (11-24)$$

Эти уравнения распространения электромагнитного поля в проводящей среде совпадают по типу с известным в математической физике уравнением теплопроводности.

В случае же диэлектрической среды, когда удельная проводимость γ достаточно мала, можно пренебречь токами проводимости; это означает, что первые члены в правых частях (11-15)—(11-18) малы по сравнению со вторыми и могут быть отброшены

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}; \quad (11-25)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (11-26)$$

или при гармоническом изменении величин по времени ($p^2 \ll \beta^2$)

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} = -\beta^2 \dot{\mathbf{E}}; \quad (11-27)$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} = -\beta^2 \dot{\mathbf{H}}. \quad (11-28)$$

Уравнения (11-15)—(11-18) и (11-21)—(11-28) называются волновыми уравнениями. Их решения описывают волнообразно распространяющиеся в пространстве процессы изменения величин напряженностей электрического и магнитного поля. Эти процессы называют электромагнитными волнами.

Электромагнитная волна называется поперечной, если векторы напряженности электрического и магнитного поля \mathbf{E} и \mathbf{H} во всех точках пространства перпендикулярны направлению распространения волны. Составляющих \mathbf{E} и \mathbf{H} в направлении распространения не имеется.

Простейшими типами поперечных волн являются плоская, цилиндрическая и сферическая волны.

Примеры их рассмотрены ниже, в гл. 12—14.

Помимо поперечных находят технические применения волны, имеющие составляющую поля в направлении распространения. Такие волны называются направленными. Простейшие типы их рассмотрены в гл. 15 и 16.

В заключение отметим, что классификация сред как проводников и диэлектриков в отношении распространения электромагнитного поля условна.

Поскольку отношение

$$\left| \frac{p^2}{\beta^2} \right| = \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a}$$

зависит от частоты ω , один и тот же материал может по своим свойствам оказаться при низкой частоте проводником (например, когда $\gamma/\omega\epsilon_a > 100$), а при достаточной высокой частоте — диэлектриком (например, при $\gamma/\omega\epsilon_a < 0,01$). Некоторые примеры приведены в табл. 11-1.

Таблица 11-1

Среда	γ , 1/ом·м	ϵ_a , ф/м	Частота, гц, при которой среда может считаться	
			проводником	диэлектриком
Морская вода . . .	4	$7,1 \cdot 10^{-10}$	$< 9 \cdot 10^8$	$> 9 \cdot 10^{10}$
Пресная вода . . .	10^{-3}	$7,1 \cdot 10^{-10}$	$< 2\,200$	$> 2,2 \cdot 10^7$
Сырая почва . . .	10^{-2}	$0,9 \cdot 10^{-10}$	$< 18\,000$	$> 18 \cdot 10^7$
Сухая почва . . .	10^{-5}	$0,45 \cdot 10^{-10}$	< 360	$> 3,6 \cdot 10^8$

11-5. ПОЛЕ ЗАРЯДА, ДВИЖУЩЕГОСЯ ПРЯМОЛИНЕЙНО С НЕВЫСОКОЙ ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ

Предположим, что малый заряд $+q$ равномерно распределен по сферической поверхности частицы вещества, имеющей диаметр $2a_1$.

Частица движется прямолинейно в направлении y с постоянной скоростью v , значительно меньшей скорости света c (например, $v < 0,1c$, рис. 11-2).

Напряженность электрического поля в точке p при невысокой скорости частицы определяется по (4-1)

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{q}{4\pi\epsilon_a r^2} \cdot \mathbf{i}_r = \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_a (x^2 + y^2)} \cdot \mathbf{i}_r = \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_a} \left\{ \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{i} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{j} \right\}. \quad (11-29)
 \end{aligned}$$

Напряженность магнитного поля в той же точке p находят по уравнению Био—Савара, представляя произ-

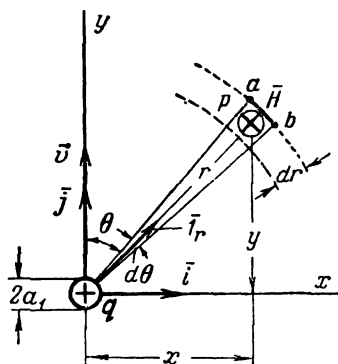


Рис. 11-2. К расчету электромагнитного поля движущегося заряда.

ведение qv как элемент тока,

$$\mathbf{H} = \frac{q [\mathbf{v} \cdot \mathbf{1}_r]}{4\pi r^2} = \frac{qv \sin \theta}{4\pi r^2} \cdot \mathbf{1}_\psi. \quad (11-30)$$

Единичный вектор $\mathbf{1}_\psi$ в точке p направлен от читателя в страницу.

Связь между числовыми величинами E и H :

$$H = E \varepsilon_a v \sin \theta. \quad (11-31)$$

Линии тока смещения выходят из лицевой поверхности движущейся частицы и проходят по криволинейным путям в окружающем частицу пространстве к ее тыловой поверхности.

Наиболее простое представление об этих линиях можно получить, рассматривая поле в точках, имеющих фиксированные относительно заряда положения и движущихся вместе с зарядом и его частицей-носителем.

Это равноценно допущению, что окружающее пространство движется относительно заряженной частицы назад со скоростью $-v = \partial y / \partial t$.

Плотность тока смещения равна:

$$\bar{\delta}_{\text{см}} = \varepsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} = \varepsilon_a \frac{\partial E}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = -\varepsilon_a v \frac{\partial E}{\partial y}. \quad (11-32)$$

Подставим сюда результат дифференцирования по y уравнения (11-29)

$$\bar{\delta}_{\text{см}} = \frac{qv}{4\pi (x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} \{3xy \mathbf{i} + (2y^2 - x^2) \mathbf{j}\}. \quad (11-33)$$

Выведем уравнение линий тока смещения.

Наклон линии к оси x по (11-33) равен:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\delta_{\text{см}(y)}}{\delta_{\text{см}(x)}} = \frac{2y^2 - x^2}{3xy}.$$

Это однородное дифференциальное уравнение проще всего интегрируется посредством подстановки

$$y = r \cos \theta; \quad x = r \sin \theta.$$

Результат интегрирования:

$$K = \frac{\sin^2 \theta}{r}. \quad (11-34)$$

На рис. 11-3 показаны линии, вычерченные для $K = 1, 2, 3$ и 4.

Из расположения векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} видно, что вектор Пойнтинга \mathbf{P} в любой точке имеет меридианное направ-

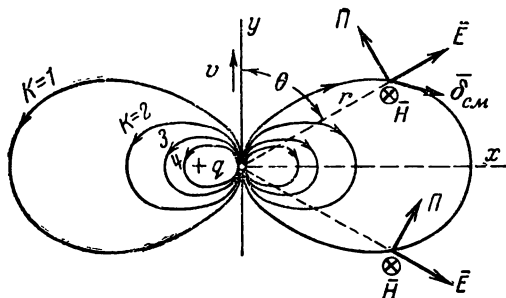


Рис. 11-3. Электромагнитное поле движущегося заряда.

ление; следовательно, поток вектора \mathbf{P} через любую замкнутую поверхность, окружающую заряженную частицу, движущуюся с постоянной скоростью, равен нулю.

Другими словами, излучения энергии не происходит. Однако посредством вектора Пойнтинга можно отметить местные перемещения энергии по замкнутым кривым. Они связаны с происходящим перед движущимся зарядом частичным преобразованием электрического поля в магнитное и обратным преобразованием сзади заряда.

11-6. ЗАВИСИМОСТЬ НАБЛЮДАЕМЫХ СВОЙСТВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ОТ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Пусть в электромагнитном поле помещены две системы координат (две системы отсчета) xuz и $x_1y_1z_1$, находящиеся в относительном движении друг относительно друга с постоянной скоростью v , с направлением которой совмещены оси y и y_1 (рис. 11-4).

В любой системе отсчета напряженность электрического поля \mathbf{E} определяется как предел отношения силы, действующей на покоящийся в системе изме-

рения малый испытательный заряд, к величине этого заряда при неограниченном его уменьшении (§ 2-2).

Аналогично вектор магнитной индукции \mathbf{B} определяется исходя из измерения силы, действующей на единичный элемент тока, протекающего в системе измерения (§ 6-1). Соотношения между величинами электромагнитного поля, измеренными в системах xuz и

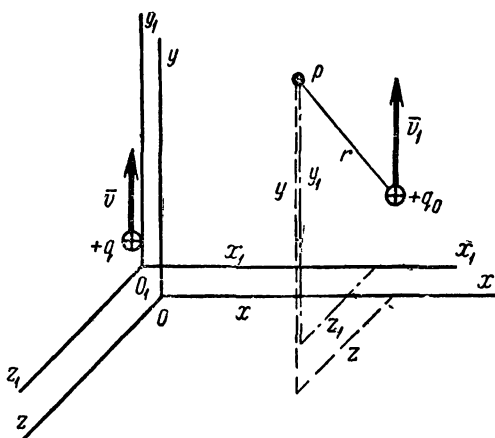


Рис. 11-4. Измерение составляющих электромагнитного поля в различных системах отсчета, движущихся одна относительно другой.

$x_1 y_1 z_1$, удобнее всего выражаются через составляющие величин, соответственно параллельные и перпендикулярные направлению скорости относительного движения систем измерения [Л. 40]. Обозначив параллельные составляющие индексом \parallel и перпендикулярные — индексом \perp , имеем:

$$E_{1\parallel} = E_{\parallel}; \quad E_{1\perp} = \alpha_p (E_{\perp} + [\mathbf{v} \mathbf{B}_{\perp}]); \quad (11-35)$$

$$\mathbf{B}_{1\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}; \quad \mathbf{B}_{1\perp} = \alpha_p (\mathbf{B}_{\perp} - \epsilon_0 \mu_0 [\mathbf{v} \mathbf{E}_{\perp}]); \quad (11-36)$$

$$\mathbf{D}_{1\parallel} = \mathbf{D}_{\parallel}; \quad \mathbf{D}_{1\perp} = \alpha_p (\mathbf{D}_{\perp} + \epsilon_0 \mu_0 [\mathbf{v} \mathbf{H}_{\perp}]); \quad (11-37)$$

$$\mathbf{H}_{1\parallel} = \mathbf{H}_{\parallel}; \quad \mathbf{H}_{1\perp} = \alpha_p (\mathbf{H}_{\perp} - [\mathbf{v} \mathbf{D}_{\perp}]); \quad (11-38)$$

$$\bar{\delta}_{1\parallel} = \alpha_p (\bar{\delta}_{\parallel} - \rho \mathbf{v}); \quad \bar{\delta}_{1\perp} = \bar{\delta}_{\perp}; \quad (11-39)$$

$$\rho_1 = \alpha_p (\rho - \epsilon_0 \mu_0 \bar{\delta} \mathbf{v}); \quad (11-40)$$

$$\alpha_p = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ — релятивистский коэффициент, } (11-41)$$

где c — скорость света; v — скорость движения системы $x_1 y_1 z_1$ относительно системы xyz .

Уравнения (11-35) и (11-36) совпадают с так называемыми преобразованиями Лоренца.

В случаях медленного движения ($v < 0,1c$) релятивистский коэффициент α_p отличается от единицы не более чем на 0,5%. Уравнения (11-35)—(11-40) значительно упрощаются. Однако относительность наблюдаемых величин электромагнитного поля сохраняется и при медленном движении. В качестве примера рассмотрим случай, когда для целей измерения в поле помещен малый испытательный заряд $+q$, движущийся вместе с системой отсчета $x_1 y_1 z_1$ (рис. 11-4). Наблюдения производятся в идеальном диэлектрике ($\epsilon_a = \epsilon_0$; $\mu_a = \mu_0$).

Полная сила, действующая на этот заряд, оказалась равной \mathbf{F} . В координатной системе $x_1 y_1 z_1$, по отношению к которой заряд $+q$ неподвижен, вся эта сила \mathbf{F} может рассматриваться как результат электростатического взаимодействия поля заряда с исследуемым полем; поэтому измеренная в этой системе напряженность электрического поля равна:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{F}}{q}.$$

В другой системе координат xyz , относительно которой заряд $+q$ находится в движении, эту же силу можно рассматривать как сумму двух сил \mathbf{F}' и \mathbf{F}'' , где $\mathbf{F}' = q\mathbf{E}$ — сила электростатического взаимодействия заряда с исследуемым полем; $\mathbf{F}'' = q[\mathbf{v}\mathbf{B}]$ — сила Лоренца, с которой движущийся заряд взаимодействует с магнитным компонентом исследуемого поля \mathbf{B} ; отсюда и определяется величина \mathbf{B} в системе xyz .

Из сказанного видно, что

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E} + [\mathbf{v}\mathbf{B}]. \quad (11-42)$$

Найденная вышеуказанным путем величина магнитной индукции \mathbf{B} в координатной системе xyz по закону Био — Савара может быть представлена в общем случае

как результат наличия тока в системе xuz , образованного движением некоторого заряда q_0 (иного, чем q), происходящим со скоростью v_1 (иной, чем v) относительно этой координатной системы,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q_0}{4\pi r^2} [\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{1}_r],$$

где r — расстояние от этого заряда до точки наблюдения в системе xuz ;

$\mathbf{1}_r$ — единичный вектор вдоль этого расстояния.

По закону Кулона величина

$$\frac{q_0}{4\pi\epsilon_a r^2} \cdot \mathbf{1}_r = \mathbf{E}$$

выражает напряженность электрического поля в системе xuz .

Из сравнения формул вытекает:

$$\mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 [\mathbf{v}_1 \mathbf{E}]. \quad (11-43)$$

Измеренная в координатной системе $x_1 y_1 z_1$ величина магнитной индукции \mathbf{B}_1 окажется отличающейся от \mathbf{B} .

Действительно, скорость перемещения заряда q_0 относительно координатной системы $x_1 y_1 z_1$ равна:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}.$$

Следовательно, величина магнитной индукции в системе $x_1 y_1 z_1$ окажется равной:

$$\mathbf{B}_1 = \epsilon_0 \mu_0 [\mathbf{v}' \mathbf{E}] = \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 [\mathbf{v} \mathbf{E}]. \quad (11-44)$$

Полученные уравнения (11-42) и (11-44) совпадают с общими уравнениями (11-35) и (11-36) при $\alpha_p \approx 1$, т. е. при невысокой скорости движения.

Электромагнитное поле в целом является объективной реальностью, т. е. видом движущейся материи. Отдельным его компонентам \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} , \mathbf{H} , $\bar{\delta}$, ρ нельзя приписывать каких-либо «истинных» значений, так как отдельные компоненты нельзя рассматривать вне связи с другими компонентами, вытекающей из условий наблюдения и измерения.

В только что рассмотренном примере два экспериментатора, находящихся с одинаковыми измерительными приборами в различных системах xuz и $x_1 y_1 z_1$, движущихся

щихся с равномерной скоростью v одна относительно другой, получили совершенно различные результаты измерения отдельных компонентов одного и того же исследуемого электромагнитного поля.

11-7. ИНВАРИАНТЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Инвариантами электромагнитного поля называются величины, остающиеся неизменными при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Единственно независимыми являются два инварианта [Л. 35]:

$$\frac{\mu_a}{\epsilon_a} H^2 - E^2 = \text{inv}_1; \quad EH = \text{inv}_2. \quad (11-45)$$

Из первого выражения вытекает, что если в какой-нибудь инерциальной системе $E^2 > H^2 \frac{\mu_a}{\epsilon_a}$, то не существует какой-либо другой инерциальной системы, в которой напряженность электрического поля E равнялась бы нулю.

В примере, рассмотренном в предыдущем параграфе, мы допустили возможность системы отсчета, в которой работал один из экспериментаторов, совершенно не обнаруживший магнитного компонента поля. Это означает, что во всех инерциальных системах исследуемое поле характеризуется особенностью $E^2 > H^2 \frac{\mu_a}{\epsilon_a}$. Бесплезно искать какую-либо иную инерциальную систему для третьего экспериментатора, который не обнаружил бы электрический компонент поля. Такой системы для данного поля не существует.

Аналогично если в какой-нибудь инерциальной системе $H^2 \frac{\mu_a}{\epsilon_a} > E^2$, то не существует никакой иной инерциальной системы, в которой не наблюдалось бы магнитного компонента поля ($H \neq 0$).

Из второго выражения видно, что если в одной из инерциальных систем векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} взаимно перпендикулярны ($\mathbf{E}\mathbf{H}=0$), то и в любой другой системе они также будут перпендикулярны один другому.

В книге Э. А. Мееровича [Л. 40] продемонстрирована, помимо изложенного, инвариантность величины заряда, распределенного по элементарному объему пространства, $\Delta q = \rho dV$. Она одинакова во всех системах отсчета, как в неподвижной относительно заряда, так и в любой другой, движущейся с постоянной скоростью относительно

первой. Это положение распространимо и на точечные заряды. Однако объемная плотность заряда ρ инвариантом не является [см. (11-40)].

11-8. СОБСТВЕННОЕ ПОЛЕ ЗАРЯДА, ДВИЖУЩЕГОСЯ ПРЯМОЛИНЕЙНО С ОЧЕНЬ ВЫСОКОЙ ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ

Пусть скорость движущейся в вакууме ($\epsilon_a = \epsilon_0$; $\mu_a = \mu_0$) заряженной частицы, рассмотренной в § 11-5, равна значительной части скорости света $v = \beta c$, причем $\beta >$

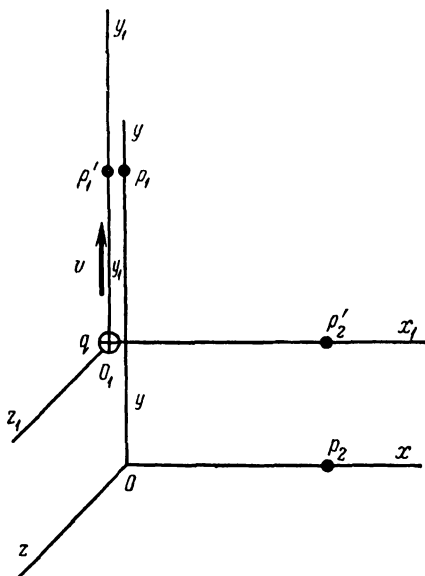


Рис. 11-5. К определению составляющих электромагнитного поля заряда, движущегося с очень высокой постоянной скоростью.

$> 0,1$. Релятивистский коэффициент α_p теперь больше единицы [формула (11-41)].

Если приборы наблюдения и координатная система $x_1 y_1 z_1$ движутся вместе с зарядом, т. е. являются по отношению к заряду неподвижными, то картины, показанные на рис. 11-2 и 11-3, сохранятся.

Предположим вначале, что приборы наблюдения расположены в точке P_1' , лежащей на оси y_1 на расстоянии

y_1 от заряда, находящегося в начале координат O_1 системы $x_1y_1z_1$ (рис. 11-5). Ими будет обнаружено электрическое поле с напряженностью

$$E_1 = E_{1\parallel} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y_1^2} \mathbf{j}. \quad (11-46)$$

Обратимся к другим приборам наблюдения, находящимся в системе xyz , условно считаемой неподвижной.

Моменту времени t_1 и точке p'_1 в системе $x_1y_1z_1$ соответствуют в системе xyz момент времени t и точка p_1 с координатами, определяемыми по формулам, известным из теории относительности,

$$x_1 = x; \quad y_1 = \alpha_p (y - vt); \quad z_1 = z; \quad t_1 = \alpha_p \left(t - \frac{v}{c^2} y \right). \quad (11-47)$$

Рассмотрим момент $t=0$, в который начала координат обеих систем отсчета совпадают. Тогда

$$x = x_1; \quad y = \frac{y_1}{\alpha_p}; \quad z = z_1; \quad t_1 = -\frac{v}{c^2} y_1, \quad (11-48)$$

где t_1 — время в системе $x_1y_1z_1$, соответствующее моменту $t=0$ в системе xyz .

Измеряемое в точке p_1 системы xyz электрическое поле имеет также только компонент $E_{1\parallel}$, параллельный вектору скорости v движения системы $x_1y_1z_1$ относительно системы xyz .

Согласно уравнениям (11-35) параллельные компоненты имеют в разных, неускоренно движущихся системах отсчета одинаковые величины. Следовательно, с учетом преобразования (11-48) и инвариантности величины элементарного заряда

$$E = E_{\parallel} = E_{1\parallel} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y_1^2} \mathbf{j} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y^2 \alpha_p^2} \mathbf{j}. \quad (11-49)$$

Из этого выражения видно, что в точках, расположенных вдоль линии равномерного движения заряда, вектор напряженности электрического поля, измеряемый в относительно неподвижной системе отсчета, уменьшен в α_p^2 раз по сравнению со значением, соответствующим закону Кулона (действительному для неподвижных зарядов).

Обратимся теперь к другой точке p'_2 в системе $x_1y_1z_1$, лежащей в плоскости x_1z_1 , допустим, на оси x_1 .

Вектор $E_{1\perp}$ в такой точке перпендикулярен направлению вектора скорости v относительного движения системы $x_1y_1z_1$. Из преобразований (11-47) видно, что расстояния в поперечных к вектору скорости направлениях сохраняются неизменными. Из уравнений же (11-35) видно, что перпендикулярный компонент напряженности

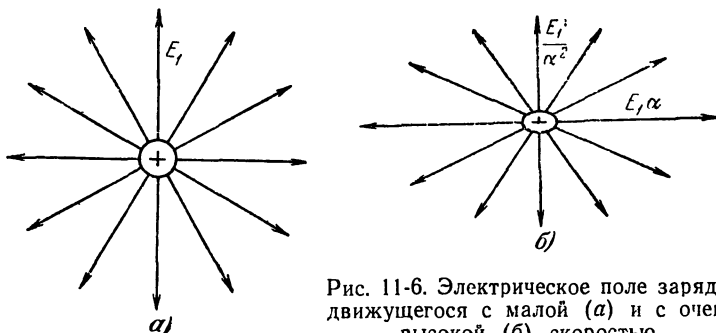


Рис. 11-6. Электрическое поле заряда, движущегося с малой (а) и с очень высокой (б) скоростью.

электрического поля движущегося заряда, измеряемый в относительно неподвижной системе, увеличен в α_p раз по сравнению с соответствующим закону Кулона. Магнитное же поле не оказывает силового воздействия на неподвижный испытательный заряд в точке p_2 системы xuz .

Таким образом, картина пространственного распределения векторов напряженности поля точечного заряда, совершенно симметричная при наблюдении в системе отсчета, движущейся вместе с зарядом, оказывается сплюсненной в направлении движения, если ее наблюдать в относительно неподвижной системе (рис. 11-6).

Глава двенадцатая

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКЕ

12-1. ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ИДЕАЛЬНОМ ДИЭЛЕКТРИКЕ

Будем называть «идеальным» диэлектриком гипотетическую среду, совершенно не обладающую проводимостью и не содержащую свободных зарядов. Распространение электромагнитных волн в такой среде происходит без потерь энергии.

Расположим декартовы прямоугольные координаты так, чтобы ось y совпала по направлению с вектором E , тогда

$$E = E_y j; E_x = 0; E_z = 0. \quad (12-1)$$

Пусть изменение величин поля происходит лишь в одном направлении вдоль координаты x ; волновое уравнение (11-25) примет вид:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}. \quad (12-2)$$

Общий интеграл (12-2) равен сумме двух функций

$$E_y = f_1(t - \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} x) + f_2(t + \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} x). \quad (12-3)$$

В этом легко убедиться, продифференцировав (12-3) дважды по x и дважды по t и подставив результаты в (12-2).

Первая из функций $f_1(t - \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} x)$ выражает волнообразное изменение напряженности электрического поля, распространяющееся в сторону положительного направления оси x со скоростью $v_\phi = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ (рис. 12-1); действительно, предположим, что в момент t напряженность поля в какой-либо точке с абсциссой x численно равна E' .

Спустя некоторый отрезок времени Δt такая же величина напряженности поля E' окажется в точке с абсциссой $x + \Delta x$, причем $\Delta x = \frac{\Delta t}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$, поскольку аргумент функции и сама функция f_1 должны сохранить прежние значения; другими словами, точка с данным значением $E_y = E'$ переместилась вдоль направления оси x на расстояние Δx со скоростью $v_\phi = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$.

Скорость распространения волны в идеальном диэлектрике равна скорости света

$$v_\phi = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/сек} = c.$$

Вторая функция $f_2(t + \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} x)$, входящая в (12-3), определяет собой волну, движущуюся в сторону отрицательного направления оси x . Физическое существование волны обратного направления может объясняться

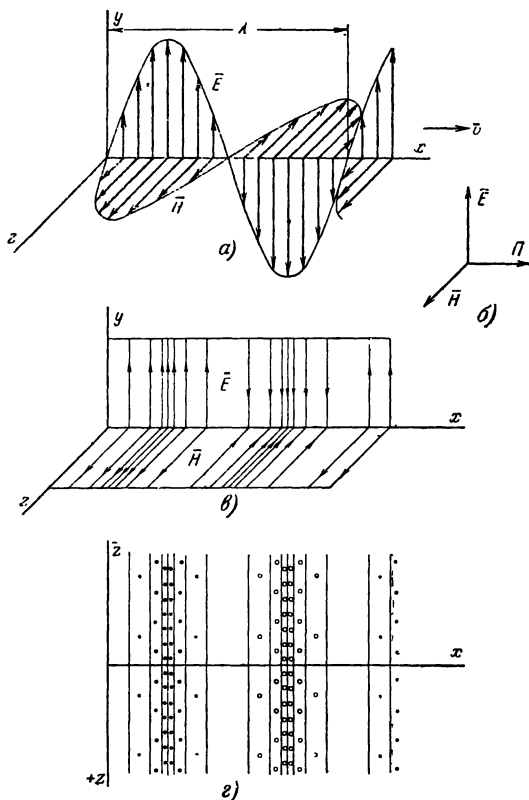


Рис. 12-1. Различные способы изображения плоской электромагнитной волны в идеальном диэлектрике.

рядом причин; так, она может представлять волну, отраженную от поверхности проводника.

Общий интеграл (11-26) для напряженности магнитного поля сходен по типу с (12-3).

Применим второе уравнение Максвелла для определения связи между общими интегралами уравнений для

Е и Н. При принятых выше ограничениях получим:

$$[\nabla \mathbf{E}] = \frac{\partial E_y}{\partial x} \mathbf{k} = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \{ -f'_1(t - \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} x) + f'_2(t + \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} x) \} \mathbf{k}. \quad (12-4)$$

Это выражение должно равняться $-\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$.

Интегрируя по времени, получаем:

$$\mathbf{H} = H_z \mathbf{k} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \{ f_1(t - \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} x) - f_2(t + \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} x) \} \mathbf{k}. \quad (12-5)$$

Постоянная интегрирования может быть отброшена в силу произвольности выбора функций f_1 и f_2 . Из сравнения (12-3) и (12-5) следует:

1) векторы **Е** и **Н** взаимно перпендикулярны;

2) соотношение между величинами векторов **Е** и **Н**

любой момент времени для прямых волн равно $\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$, а для

обратных равно $-\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$; эта величина имеет размерность

электрического сопротивления; ее называют характеристическим или волновым сопротивлением среды Z_c . Для идеального диэлектрика оно вещественно и равно:

$$z_{c0} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}} = 120\pi = 377 \text{ ом}. \quad (12-6)$$

Волны могут быть любой формы; на характер функций f_1 и f_2 не наложено никаких ограничений, кроме возможности двукратного дифференцирования по x и t .

В частном случае волна может быть синусоидальной; тогда функция f_1 имеет вид:

$$E_{1m} \sin \omega(t - \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} x) \mathbf{j} = E_{1m} \sin(\omega t - \beta x) \mathbf{j}, \quad (12-7)$$

где E_{1m} — амплитуда волны, т. е. наибольшее мгновенное значение вектора **Е**;

ω — угловая частота.

Величина β называется коэффициентом фазы или волновым числом. Она показывает, насколько изменяется фаза волны на единичном расстоянии.

Расстояние, на котором фаза волны изменяется на 2π , называется длиной волны λ

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}. \quad (12-8)$$

Длина волны равна произведению фазовой скорости волны на период колебаний T .

Действительно,

$$\beta = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{\omega}{v_\phi} = \frac{2\pi}{v_\phi T}; \quad \lambda = v_\phi T. \quad (12-9)$$

На рис. 12-1 показаны различные формы изображения волн \mathbf{E} и \mathbf{H} для случая гармонического изменения величин и наличия только прямых волн ($f_1 \neq 0$; $f_2 = 0$).

Изменение величин показано на рис. 12-1,а путем изменения длин векторов, а на рис. 12-1, в и г — путем изменения условной густоты линий поля; на рис. 12-1,в представлен вид поля как бы «в перспективе», на рис. 12-1,г — вид сверху, как бы «в плане»; в этом чертеже магнитное поле изображено параллельными линиями, в то время как электрическое поле — точками (когда линии направлены из страницы к читателю) или маленькими кружками (когда линии направлены от читателя в страницу).

Как линии электрического поля, так и линии магнитного поля расположены в плоскостях, нормальных к направлению распространения волн (оси x на рис. 12-1).

Плоскость, в которой лежат вектор \mathbf{E} и направление распространения, называют плоскостью поляризации волны. Если эта плоскость сохраняет свое положение в пространстве по мере распространения волны, то говорят, что волна линейно поляризована.

В результате наложения двух плоских линейно поляризованных волн одинаковой частоты и распространяющихся в одном и том же направлении, векторы \mathbf{E} которых взаимно перпендикулярны и отличаются друг от друга по фазе, получается эллиптически поляризованная волна. Если амплитуды одинаковы, а сдвиг фаз составляет четверть периода, то говорят, что результирующая волна поляризована по кругу.

12-2. ПЕРЕНОС ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНОЙ

Рассмотрим прямую плоскую гармоническую электромагнитную волну в диэлектрике, определяемую уравнением (12-7).

Вектор Пойнтинга равен:

$$\mathbf{P} = [EH] = \frac{E_m^2}{z_c} \sin^2(\omega t - \beta x) \mathbf{i} = \frac{E_m^2}{2z_c} \{1 - \cos 2(\omega t - \beta x)\} \mathbf{i}. \quad (12-10)$$

Его среднее значение

$$P_{cp} = \frac{E_m^2}{2z_c} = \frac{E_m H_m}{2} = \frac{H_m^2 z_c}{2}. \quad (12-11)$$

Он направлен по оси x , т. е. совпадает с направлением движения электромагнитной волны (рис. 12-1,б).

Величина \mathbf{P} выражает собой плотность потока мощности через поверхность, нормальную к направлению распространения энергии; она изменяется по времени с двойной частотой. Количество энергии, запасенной в любом малом объеме пространства, периодически изменяется от 0 до некоторого максимума. Однако среднее значение энергии, имеющейся в каком-либо конечном объеме пространства V , определится уравнениями:
электрическая часть

$$W_e = \int_V \frac{\mathbf{D}\mathbf{E}}{2} dV; \quad (12-12)$$

магнитная часть

$$W_m = \int_V \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}}{2} dV \quad (12-13)$$

(величины \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{B} и \mathbf{H} входят в эти формулы в действующих значениях). С помощью соотношений $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$; $\mathbf{E} = \mu_0 \mathbf{H}$ и $\mathbf{H} = \frac{E}{z_{c0}} = E \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}$ нетрудно установить, что $W_e = W_m$, т. е. энергия электромагнитной волны в идеальном диэлектрике состоит из двух равных частей, представляющих соответственно энергию электрической и магнитной составляющих поля.

12-3. ПЛОСКАЯ ГАРМОНИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ВОЛНА В НЕСОВЕРШЕННОМ ДИЭЛЕКТРИКЕ

Общие волновые уравнения (11-17) и (11-18) можно представить в форме

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} = -\omega^2 \mu_a \left(\epsilon_a - j \frac{\gamma}{\omega} \right) \dot{\mathbf{E}}; \quad (12-14)$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} = -\omega^2 \mu_a \left(\epsilon_a - j \frac{\gamma}{\omega} \right) \dot{\mathbf{H}}. \quad (12-15)$$

Сравнивая эти уравнения с (11-27) и (11-28) и учитывая, что $\beta^2 = \omega^2 \epsilon_a \mu_a$, видим, что среда, обладающая проводимостью, может рассматриваться как диэлектрик, обладающий комплексной диэлектрической проницаемостью,

$$\tilde{\epsilon}_c = \epsilon_a - j \frac{\gamma}{\omega} = \epsilon_a - j\epsilon'. \quad (12-16)$$

Общее решение волновых уравнений для гармонических волн будет такого же типа, как и (12-7); в символическом изображении оно примет форму (для прямых волн, если опустить обратные)

$$\dot{E}_y = E_m e^{j\omega \left(t - \sqrt{\tilde{\epsilon}_c \mu_a} x \right)} = E_m e^{-\alpha x} e^{j\omega \left(t - \frac{x}{v_1} \right)}; \quad (12-17)$$

$$\dot{H}_z = H_m e^{j \left[\omega \left(t - \sqrt{\tilde{\epsilon}_c \mu_a} x \right) + \vartheta \right]} = H_m e^{-\alpha x} e^{j \left[\omega \left(t - \frac{x}{v_1} \right) + \vartheta \right]}. \quad (12-18)$$

В правых частях этих выражений комплексный показатель степени разложен на вещественную и мнимую составляющие. Смысл постоянного угла ϑ объяснен ниже [уравнение (12-24)].

По мере продвижения электромагнитной волны в направлении оси x амплитуды электрической и магнитной составляющих затухают по показательному закону $e^{-\alpha x}$. Величина α называется коэффициентом затухания; если $\alpha=1$, амплитуды волн затухают на единичном расстоянии в $e=2,71828$ раза.

Величина переносимой волной энергии, определяемая значением вектора Пойнтинга \mathbf{P} , затухает по закону $e^{-2\alpha x}$

$$\dot{\mathbf{P}} = [\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}] = \dot{E}_y \dot{H}_z [\mathbf{j}\mathbf{k}] = E_m H_m e^{-2\alpha x} e^{j \left[2\omega \left(t - \frac{x}{v_1} \right) + \theta \right]} \mathbf{i}. \quad (12-19)$$

Причиной затухания является рассеивание энергии вследствие наличия в среде проводимости.

Фаза волны на единичном расстоянии изменяется на $\beta_1 = \omega/v_1$ [рад], где v_1 — скорость распространения волны в рассматриваемой среде. Величина β_1 является коэффициентом фазы.

Вычисление величин α_1 , β_1 и v_1 с помощью выражения (12-16) приводит к следующим результатам (при $\mu_a = \mu_0$):

$$\alpha = \frac{\beta_0}{\sqrt{2}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon'}{\epsilon_a} \right)^2}}; \quad (12-20)$$

$$\beta_1 = \frac{\beta_0}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon'}{\epsilon_a} \right)^2}}; \quad (12-21)$$

$$v_1 = \frac{\omega}{\beta_1} = v_0 \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon'}{\epsilon_a} \right)^2}}}, \quad (12-22)$$

где $\beta_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ и $v_0 = c = \frac{\omega}{\beta_0} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ — коэффициент фазы и скорость распространения электромагнитной волны в случае идеального диэлектрика.

Скорость распространения электромагнитной волны в несовершенном диэлектрике v_1 зависит от частоты; это видно из уравнения (12-22), если учесть, что $\epsilon' = \gamma/\omega$ обратно пропорционально частоте.

Величина v_1 представляет собой так называемую фазовую скорость, т. е. скорость перемещения точек, сохраняющих одну и ту же фазу волны (например, положительный максимум напряженности электрического поля).

Величина фазовой скорости может не совпадать со скоростью распространения энергии волны.

Явление зависимости фазовой скорости волны v_1 от частоты называется дисперсией. Фазовая скорость электромагнитных волн в несовершенном диэлектрике меньше, чем в идеальном диэлектрике. Это хорошо видно из (12-22). Следовательно, длина волны в несовершенном диэлектрике короче, чем в идеальном (при той же частоте).

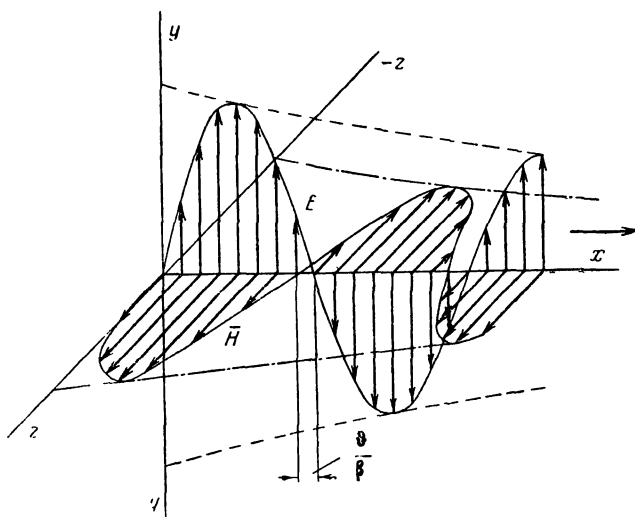


Рис. 12-2. Затухающая плоская электромагнитная волна.

Электрический и магнитный компоненты волны **E** и **H** различаются по фазе, поскольку характеристическое сопротивление $Z_c = \sqrt{\frac{\mu_a}{\tilde{\epsilon}_c}}$ является в несовершенном диэлектрике комплексным числом; из (12-16) нетрудно вывести, что его модуль равен

$$z_c = \sqrt{\frac{\mu_a}{\sqrt{\epsilon_a^2 + \epsilon'^2}}}, \quad (12-23)$$

а аргумент

$$\vartheta = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\epsilon'}{\epsilon_a}. \quad (12-24)$$

На рис. 12-2 показана плоская электромагнитная волна в несовершенном диэлектрике.

12-4. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ДЛЯ ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЫ

Пусть система координат $x_1y_1z_1$ связана со средой, имеющей диэлектрическую и магнитную проницаемости $\epsilon_a = \epsilon_0\epsilon$ и $\mu_a = \mu_0\mu$. В этой среде отсутствуют токи проводимости и свободные заряды. В ней распространяется со скоростью $\mathbf{v}_{\phi 1} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \mathbf{i}$ плоская электромагнитная

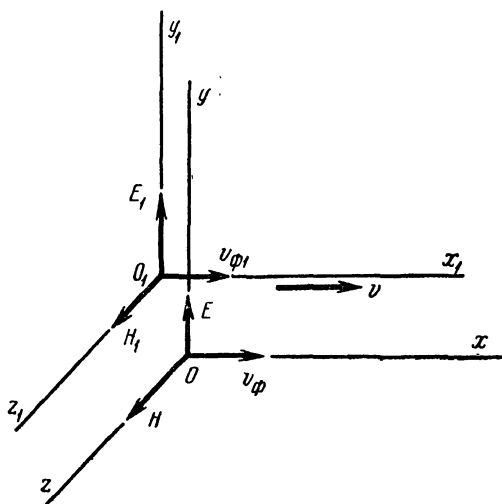


Рис. 12-3. К выводу уравнений электромагнитного поля для движущейся среды.

волна, описываемая уравнениями Максвелла для покоящейся среды:

$$[\nabla \mathbf{H}_1] = \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t_1}; \quad [\nabla \mathbf{E}_1] = -\mu_a \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t_1}. \quad (12-25)$$

В нашем случае (рис. 12-3)

$$\mathbf{E}_1 = E_{1y} \mathbf{j}; \quad \mathbf{H}_1 = H_{1z} \mathbf{k}; \quad \mathbf{v}_{\phi 1} = v_{\phi 1} \mathbf{i}. \quad (12-26)$$

Это величины, измеренные приборами наблюдения, находящимися в той же среде, с которой связана система координат $x_1y_1z_1$. Символ t_1 обозначает время, отсчитываемое в этой системе.

Подставим (12-26) в систему (12-25)

$$-\frac{\partial H_{1z}}{\partial x_1} = \varepsilon_a \frac{\partial E_{1y}}{\partial t_1}; \quad \frac{\partial E_{1y}}{\partial x_1} = -\mu_a \frac{\partial H_{1z}}{\partial t_1}. \quad (12-27)$$

Перенесем приборы наблюдения в другую систему координат xuz , относительно которой рассматриваемая среда и связанная с ней система отсчета $x_1y_1z_1$ движутся в направлении x с постоянной скоростью $v=vi$. Скорости v и $v_{\Phi 1}$ совпадают по направлению. Векторы поля E_1 и H_1 (измеряемые в системе $x_1y_1z_1$) или E и H (измеряемые в системе xuz) имеют лишь компоненты, перпендикулярные направлению скорости относительного движения системы v .

Соотношения между ними определяются уравнениями (11-35) и (11-38), принимающими следующий вид при расположении координат по рис. 12-3:

$$\left. \begin{aligned} E &= E_y j = \alpha_p (E_{1y} - \mu_a v H_{1z}) j; \\ H &= H_z k = \alpha_p (H_{1z} + \varepsilon_a v E_{1y}) k, \end{aligned} \right\} \quad (12-28)$$

где $\alpha_p = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon_0 \mu_0 v^2}}$ — релятивистский коэффициент для вакуума.

(12-29)

Используем известные из теории относительности связи между частными производными физической величины в системах отсчета, движущихся одна относительно другой,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \alpha_p \left(\frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon_0 \mu_0 v \frac{\partial}{\partial t} \right); \quad \frac{\partial}{\partial t_1} = \alpha_p \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right). \quad (12-30)$$

Подставим соотношения (12-30) и (12-28) в систему (12-27):

$$\begin{aligned} - (1 - \varepsilon_a \mu_a v^2) \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \varepsilon_a (1 - \varepsilon_0 \mu_0 v^2) \frac{\partial E_y}{\partial t} - \\ &- \varepsilon_a \mu_a v \left(1 - \frac{1}{\varepsilon \mu} \right) \frac{\partial H_z}{\partial t}; \end{aligned} \quad (12-31)$$

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon_a \mu_a v^2) \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\mu_a (1 - \varepsilon_0 \mu_0 v^2) \frac{\partial H_z}{\partial t} + \\ &+ \varepsilon_a \mu_a v \left(1 - \frac{1}{\varepsilon \mu} \right) \frac{\partial E_y}{\partial t}. \end{aligned} \quad (12-32)$$

Эти уравнения получают более удобный вид, если подставить из (12-31) в (12-32) величину $\frac{\partial E_y}{\partial t}$ и из (12-32) в (12-31) величину $\frac{\partial H_z}{\partial t}$,

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon_a \left\{ \left[\frac{\alpha_a^2}{\alpha_p^2} - \alpha_p^2 (\alpha_a^2 - 1) k_f^2 \right] \frac{\partial E_y}{\partial t} + \alpha_p^2 k_f v \frac{\partial E_y}{\partial x} \right\}; \quad (12-33)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_a \left\{ \left[\frac{\alpha_a^2}{\alpha_p^2} - \alpha_p^2 (\alpha_a^2 - 1) k_f^2 \right] \frac{\partial H_z}{\partial t} + \alpha_p^2 k_f v \frac{\partial H_z}{\partial x} \right\}, \quad (12-34)$$

где $\alpha_a = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon_a \mu_a v^2}}$ — релятивистский коэффициент для среды $\varepsilon_a \mu_a$; (12-35)

$$k_f = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon \mu} \right). \quad (12-36)$$

Коэффициент k_f называется коэффициентом увлечения Френеля. В его выражение входят относительные значения проницаемостей ε и μ .

Для всех технических диэлектриков k_f меньше единицы. Физический смысл этого коэффициента описан ниже (стр. 277).

При медленном относительном движении систем отсчета релятивистские коэффициенты α_p и α_a практически равняются единице. Уравнения Максвелла для медленно движущейся среды в частной форме, соответствующей расположению координат, принятому на рис. 12-3, примут вид:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial H_z}{\partial x} &= \varepsilon_a \left(\frac{\partial E_y}{\partial t} + k_f v \frac{\partial E_y}{\partial x} \right); \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\mu_a \left(\frac{\partial H_z}{\partial t} + k_f v \frac{\partial H_z}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (12-37)$$

Каждый из вихревых компонентов электромагнитного поля (\mathbf{E} , \mathbf{H}), распространяющегося в среде с отличающимися от единицы относительными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей ($\varepsilon \neq 1$; $\mu \neq 1$), измеряемый приборами, находящимися в движении с по-

стойкой скоростью относительно этой среды, определяется не только изменением второго компонента во времени, но и в пространстве. Влияние последнего фактора отсутствует в идеальном диэлектрике ($\epsilon=1$; $\mu=1$; $k_f=0$).

Фазовая скорость распространения волны, измеренная в системе отсчета $x_1y_1z_1$, равна $v_{\phi_1} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}$.

Определим фазовую скорость распространения той же волны v_{ϕ} , измеряемую приборами, находящимися в системе отсчета xuz . Используем известное из теории относительности правило сложения скоростей, имея в виду, что в рассматриваемом на рис. 12-3 случае скорости v_{ϕ_1} и v совпадают по направлению,

$$v_{\phi} = \frac{v_{\phi_1} + v}{1 + \epsilon_0 \mu_0 v_{\phi_1} v}. \quad (12-38)$$

При медленном относительном движении систем отсчета ($v \ll c$, $\alpha_p \approx 1$) второе слагаемое в знаменателе является небольшой дробью. Поэтому (12-38) приближенно можно заменить более простой зависимостью

$$v_{\phi} \approx (v_{\phi_1} + v) (1 - \epsilon_0 \mu_0 v_{\phi_1} v) = \frac{v_{\phi_1}}{\alpha_p^2} + k_f v \approx v_{\phi_1} + k_f v. \quad (12-39)$$

В идеальном диэлектрике $k_f=0$ и $v_{\phi}=v_{\phi_1}$. Наблюдаемая в идеальном диэлектрике скорость распространения электромагнитных волн не зависит от системы отсчета. Влияние относительного движения приборов наблюдения в идеальном диэлектрике сказывается лишь в отношении измерения отдельных компонентов поля.

Связывающие же эти компоненты закономерности, выражаемые уравнениями Максвелла, сохраняются одними и теми же независимо от того, движутся или покоятся приборы.

Во всех других средах ($\epsilon \neq 1$ или $\mu \neq 1$), включая технические диэлектрики, имеет место влияние движения приборов наблюдения как на соотношения между наблюдаемыми величинами (уравнения поля для движущейся среды), так и на наблюдаемую фазовую скорость электромагнитной волны. Относительная скорость движения приборов наблюдения v влияет не полностью,

а частично, в доле, определяемой коэффициентом увеличения k_f (12-39). Найдем предельные значения наблюдаемой фазовой скорости:

при $v=0$

$$v_\phi = v_{\phi_1} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_\mu}} = (1 - k_f) c; \quad (12-40)$$

при $v=c$

$$v_\phi = k_f c. \quad (12-41)$$

Наблюдаемая фазовая скорость плоской электромагнитной волны ни при каких обстоятельствах не превосходит скорости света c .

Коэффициент увлечения k_f равен отношению предельной наблюдаемой фазовой скорости плоской электромагнитной волны в данной среде, измеряемой приборами наблюдения, движущимися относительно среды со скоростью света, к скорости света в идеальном диэлектрике $c = 3 \cdot 10^8$ м/сек.

Глава тринадцатая

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

13-1. ПЛОСКАЯ ГАРМОНИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ВОЛНА В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

Все технические проводники можно рассматривать как очень плохие диэлектрики, обладающие большой проводимостью. Токи смещения в них весьма малы по сравнению с токами проводимости. Мнимая часть комплексной диэлектрической проницаемости в (12-16) велика по сравнению с вещественной частью

$$\epsilon' = \frac{\gamma}{\omega} \gg \epsilon_a.$$

Коэффициенты затухания и фазы α и β_1 в (12-20) и (12-21) при $\epsilon' \gg \epsilon_a$ делаются почти равными друг другу

$$\alpha \approx \beta_1 \approx \frac{\beta_a}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\epsilon'}{\epsilon_a}} = \sqrt{\frac{\omega \gamma \mu_a}{2}}; \quad (13-1)$$

где $\beta_a = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$.

Электромагнитные волны при сколь-либо значительных частотах не могут проникнуть глубоко в проводник

вследствие сильного затухания. Примерная картина бегущей волны напряженности электрического поля в проводнике показана на рис. 13-1.

Фазовая скорость и длина электромагнитной волны в проводнике определяются по (12-22)

$$v_1 \approx \frac{\sqrt{2} v_a}{\sqrt{\frac{\epsilon'}{\epsilon_a}}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_a \gamma}}, \quad (13-2)$$

где $v_a = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}$;

$$\lambda = v_1 T = \frac{2\pi}{\beta_1} \approx \frac{2\pi}{\alpha}. \quad (13-3)$$

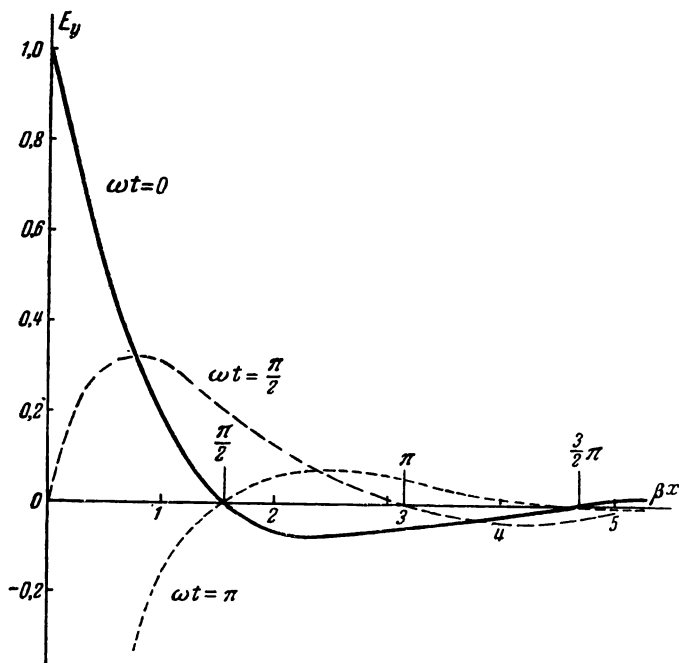


Рис. 13-1. Плоская электромагнитная волна в проводящей среде.

Их значения весьма малы по сравнению с аналогичными величинами в диэлектриках на той же частоте.

На небольшом расстоянии, равном длине волны, электромагнитная волна в проводнике практически исчезает. Действительно, отношение амплитуды волны при $x = \lambda$

к начальной амплитуде (при $x=0$), с которой электромагнитная волна входит в проводник, равно:

$$e^{-\alpha\lambda} = e^{-2\pi} = 0,00185 = \frac{1}{535}.$$

Характеристическое сопротивление проводящей среды находится из (12-23) и (12-24) при $\epsilon' = \frac{\gamma}{\omega} \gg \epsilon_a$

$$Z_c = \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{\gamma}} \angle 45^\circ = \frac{\rho}{\gamma}. \quad (13-4)$$

Величина модуля z_c мала. Магнитный компонент волны отстает по фазе от электрического на $1/8$ периода.

Электромагнитная волна в проводящей среде сопровождается током проводимости; плотность тока может быть найдена по закону Ома в дифференциальной форме [по (5-2)].

При ориентации векторов напряженности электрического и магнитного поля, принимавшейся в гл. 12 [§(12-1) — (12-4)], ток проводимости будет изменяться по расстоянию и времени согласно уравнению

$$\delta_y = \gamma E_y = \delta_{ym} e^{-\beta_1 x} \sin(\omega t - \beta_1 x) \approx \delta_{ym} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \alpha x). \quad (13-5)$$

Читателю рекомендуется в качестве упражнения вывести самостоятельно все уравнения настоящего параграфа из общих уравнений электромагнитного поля (11-21) — (11-24).

На рис. 13-2 показано уменьшение действующих значений величин поля (E_y и δ_y) по мере погружения в проводящую среду.

13-2. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭФФЕКТ. ЭКВИВАЛЕНТНАЯ ГЛУБИНА ПРОНИКНОВЕНИЯ ПОЛЯ В МАССИВНЫЙ ПРОВОДНИК

Проникая извне в проводящую среду, электромагнитное поле очень быстро затухает. Наружные слои материала экранируют глубинные слои от проникновения поля. Это явление называется поверхностным эффектом (скин-эффектом).

Пусть электромагнитное поле распространяется в массивном проводнике в направлении x (рис. 13-2). Направление тока показано стрелками.

Пользуясь (13-5), напишем мгновенное значение элементарного тока, пронизывающего площадку $mnpq$ размером adx ,

$$di = a\delta_{ym}e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \alpha x) dx. \quad (13-6)$$

Интегрируем это выражение в пределах от 0 до ∞ ; в результате получим мгновенное значение тока в мас-

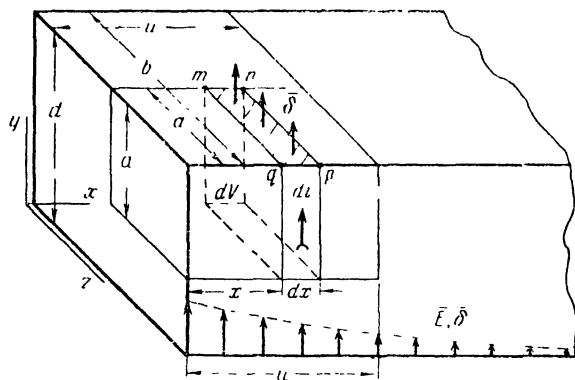


Рис. 13-2. К определению эквивалентной глубины проникновения поля в проводящую среду.

сивном проводнике бесконечной толщины в направлении x и ширины a в направлении z

$$i = \frac{a\delta_{ym}}{\sqrt{2}\alpha} \sin(\omega t - 45^\circ). \quad (13-7)$$

Такой же величины ток протекал бы в плоском проводнике шириной a в направлении z и толщиной $u = 1/\alpha$ в направлении x , если бы амплитудное значение плотности тока не спадало по показательному закону, а сохранялось неизменным и равным $\delta_{ym}/\sqrt{2}$ по всей толщине u , обращаясь в нуль при $x > u$.

Таким фиктивным равномерно распределенным током часто заменяют фактическое распределение тока в проводнике.

Величину u называют эквивалентной глубиной проникновения тока (а следовательно, и электромагнитного поля вообще) в массивный проводник.

По (13-1)

$$u = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\gamma\mu_a}}. \quad (13-8)$$

На этой глубине величины поля E , H и δ затухают в $e^{\alpha u} = e^1 = 2,71828$ раза.

В приложении П-11 приведены некоторые данные о свойствах проводящих материалов на сверхвысокой частоте.

13-3. УДЕЛЬНОЕ ПОВЕРХНОСТНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ПРОВОДНИКА

Элемент объема $dV = aadx$, ограниченный сверху площадкой $mnop$ (рис. 13-2), обладает проводимостью для тока di , равной

$$dg = \frac{\gamma a dx}{a} = \gamma dx.$$

Действующее значение тока в этом элементе объема по (13-6) равно:

$$dI = \frac{a\delta_{ym}}{\sqrt{2}} e^{-\alpha x} dx.$$

Мощность, расходуемая на нагрев элемента объема,

$$dP_1 = \frac{(dI)^2}{dg} = \frac{a^2\delta_{ym}^2}{2\gamma} e^{-2\alpha x} dx.$$

Интеграл этого выражения, взятый в пределах от 0 до ∞ , будет представлять собой мощность, расходуемую на нагрев массивного проводника с размерами a в поперечных направлениях y и z и с бесконечной толщиной в направлении x , в котором распространяется поле

$$P_1 = \frac{a^2\delta_{ym}^2}{2\gamma} \int_0^{\infty} e^{-2\alpha x} dx = \frac{a^2\delta_{ym}^2}{4\gamma\alpha}. \quad (13-9)$$

Разделив величину мощности P_1 на квадрат действующего значения тока в этом массивном проводнике получают так называемое удельное поверхностное сопротивление R'

$$R' = \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{1}{\gamma u} = \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2\gamma}} \text{ [ом]}. \quad (13-10)$$

Этой же величине равно сопротивление проводника, имеющего размеры a в направлениях y и z и толщину u в направлении x , равную эквивалентной глубине проникновения поля. Расчет мощности, расходуемой на нагрев проводника при проникновении в него электромагнитной волны, можно свести к вычислению произведения квадрата действующего значения тока, протекающего в наружном слое проводника толщиной u , на сопротивление этого слоя $R'_{\text{пов}}$

$$P_1 = I_1^2 R'_{\text{пов}}. \quad (13-11)$$

Если поверхность проводника имеет в направлении поверхностного тока (ось y) размер d , а в поперечном направлении z размер b (рис. 13-2), то поверхностное сопротивление равно:

$$R'_{\text{пов}} = R' \frac{d}{b}. \quad (13-12)$$

13-4. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭФФЕКТ В ЛЕНТОЧНОМ ПРОВОДНИКЕ В УСТАНОВИВШЕМСЯ СИНУСОИДАЛЬНОМ РЕЖИМЕ

Длинный проводник имеет форму широкой и тонкой ленты ($2a \gg 2b$, рис. 13-3). В целях наглядности размер $2b$ на рисунке преувеличен. Проводник является частью цепи переменного тока I с угловой частотой ω ; обратный провод предположим находящимся на значительном расстоянии, так что его магнитное поле практически не влияет на поле в рассматриваемом проводнике. Иначе говоря, эффект близости проводников считается незначительным.

Расположим оси координат, как показано на рис. 13-3; начало координат поместим в центре сечения проводника.

В любом пункте сечения (кроме районов, прилегающих к углам, которые мы исключаем из рассмотрения) напряженность электрического поля имеет только осевую составляющую $E = E_y j$, а напряженность магнитного поля — только составляющую $H = H_z k$, направленную по оси z .

Обе эти величины практически являются функциями только координаты x .

Электромагнитное поле в ленточном проводнике является суммой двух плоских волн, одна из которых вхо-

дит в проводник через левую поверхность и распространяется в направлении $+x$, а другая входит через правую поверхность и распространяется в направлении $-x$.

Уравнения поля сохраняют тип волновых уравнений (11-23) и (11-24). При ориентации векторов по рис. 13-3 их интегралы для установившегося синусоидального режима будут следующего типа:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_y &= \dot{E}_1 e^{-px} + \dot{E}_2 e^{px}; \\ \dot{H}_z &= \dot{H}_1 e^{-px} + \dot{H}_2 e^{px}. \end{aligned} \right\} \quad (13-13)$$

Для определения постоянных интегрирования \dot{E}_1 , \dot{E}_2 , \dot{H}_1 и \dot{H}_2 учтем, что характеристическое сопротивление равно [по (13-4)]:

$$Z_c = \frac{\dot{E}_1}{\dot{H}_1} = \frac{p}{\gamma} = \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\gamma}} \angle 45^\circ = -\frac{\dot{E}_2}{\dot{H}_2}. \quad (13-14)$$

Вследствие симметрии (рис. 13-3)

$$\dot{E}_{y(x=b)} = \dot{E}_{y(x=-b)}; \quad \dot{H}_{z(x=b)} = -\dot{H}_{z(x=-b)}.$$

Выполнение этих условий требует равенств

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_2 = \dot{E}; \quad (13-15)$$

$$\dot{H}_1 = -\dot{H}_2 = \dot{H}. \quad (13-16)$$

Наконец, по закону полного тока

$$\dot{I} = 2a\dot{H}_{z(x=b)} + 2a\dot{H}_{z(x=-b)} = 8a\dot{H} \operatorname{sh} pb. \quad (13-17)$$

Определив из системы (13-14)–(13-17) постоянные интегрирования и подставив их в (13-13), получим закономерности распределения напряженностей электрического и магнитного поля вдоль оси x :

$$\dot{E}_y = \frac{\dot{I}}{4a} \frac{p}{\gamma} \frac{\operatorname{ch} px}{\operatorname{sh} pb}; \quad (13-18)$$

$$\dot{H}_z = -\frac{\dot{I}}{4a} \frac{\operatorname{sh} px}{\operatorname{sh} pb}. \quad (13-19)$$

Уравнение для плотности тока составляется на основании закона Ома в дифференциальной форме

$$\delta_y = \gamma \dot{E}_y = \frac{i}{4a} \rho \frac{\operatorname{ch} \rho x}{\operatorname{sh} \rho b}. \quad (13-20)$$

Для практического расчета гиперболических функций комплексного переменного используются выражения, приведенные в приложении П-12.

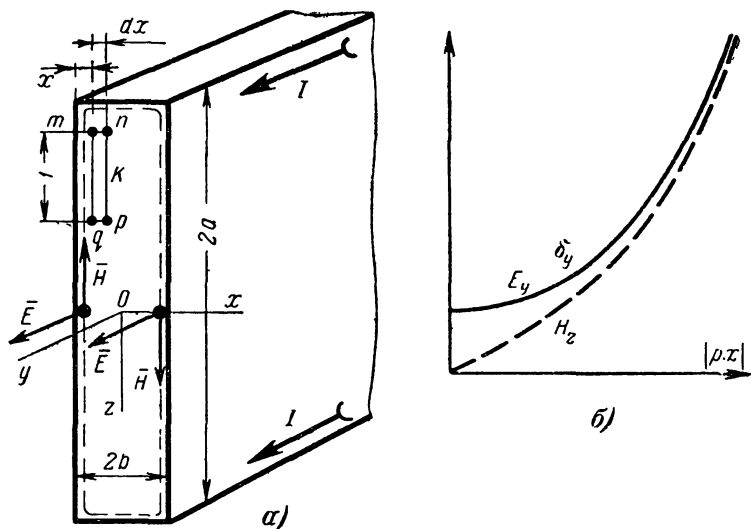


Рис. 13-3. Электромагнитное поле в ленточном проводнике.

На рис. 13-3 показаны кривые изменения модулей величин E_y , δ_y и H_z по расстоянию x от оси проводника.

Поток вектора Пойнтинга через обе боковые поверхности ленточного проводника на единицу длины в направлении y , равен:

$$\tilde{S}_1 = 2 \cdot 2a \cdot 1 \dot{E}_{y(x=b)} \dot{H}_{z(x=b)}^* = \frac{I^2}{4a} Z_c' \operatorname{cth} \rho b \quad (13-21)$$

(звездочкой обозначен сопряженный комплекс).

Вещественная часть комплекса \tilde{S}_1 выразит активную мощность, поступающую в проводник извне на покрытие потерь на нагрев.

Мнимая часть определит скорость изменения по времени запаса энергии электромагнитного поля внутри проводника.

Отношение потока вектора Пойнтинга через стенки проводника к квадрату величины тока называется внутренним сопротивлением проводника Z_i (поверхностным импедансом). Величина Z_i может быть определена иначе, как отношение напряженности электрического поля на поверхности проводника к величине тока

$$Z_i = \frac{1}{4a} Z_c \operatorname{cth} pb. \quad (13-22)$$

Мнимая часть этого выражения $\operatorname{Im} Z_i = (\omega L_i)$ представляет собой индуктивное сопротивление на единицу длины, обусловленное только внутренним магнитным потоком в проводнике. К нему надо добавлять внешнее индуктивное сопротивление, определяемое магнитным потоком снаружи проводника; величина последнего зависит от взаимного расположения прямого и обратного проводов электрической линии. Вещественная часть выражения $R_i = \operatorname{Re} Z_i$ представляет собой активное сопротивление на единицу длины проводника.

Эквивалентная глубина проникновения электромагнитного поля в ленточный проводник может быть рассчитана исходя из соотношения

$$u = \frac{1}{4a\gamma R_i} = \frac{1}{\operatorname{Re}(p \operatorname{cth} pb)}. \quad (13-23)$$

При $pb > 5 \sqrt{j}$ гиперболический котангенс стремится к единице и (13-23) обращается в (13-8) для массивного проводника.

Пример. Проводником является медная лента; $2a = 2$ см; $2b = 0,1$ см; $\gamma = 5,6 \cdot 10^7$ 1/ом·м; сопротивление постоянному току равно $8,91 \cdot 10^{-4}$ ом/м; угловая частота $\omega = 10^5$ 1/сек.

Согласно (13-1) и (11-19)

$$\beta_1 = \alpha = \sqrt{\frac{10^5 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5,6 \cdot 10^7}{2}} = 1875 \text{ 1/м};$$

$$p = \beta_1 (1 + j) = 2650 \angle 45^\circ;$$

$$\operatorname{cth} pb = 0,911 \angle -16^\circ 40'.$$

Характеристическое сопротивление по (13-14) равно

$$Z_c = \frac{2650}{5,6 \cdot 10^7} \angle 45^\circ = 4,74 \cdot 10^{-5} \angle 45^\circ \text{ [Ом]}.$$

Внутреннее сопротивление проводника по (13-22)

$$\begin{aligned} Z_{\text{в}} &= \frac{1}{4 \cdot 10^{-2}} \cdot 4,74 \cdot 10^{-5} \cdot 0,911 e^{j45^\circ} e^{-j16^\circ 40'} = \\ &= 1,08 \cdot 10^{-3} e^{j28^\circ 20'} \text{ [Ом/м]}; \end{aligned}$$

$$R_i = 1,08 \cdot 10^{-3} \cos 28^\circ 20' = 9,49 \cdot 10^{-4} \text{ [Ом/м]}.$$

Активное сопротивление проводника увеличилось вследствие поверхностного эффекта на 6,5%. Сравнительно небольшое увеличение объясняется невысокой частотой, а также формой проводника (тонкая лента, $a=20$ в).

Эквивалентная глубина проникновения поля в проводник находится по (13-23)

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\operatorname{Re}(2650 \angle 45^\circ \cdot 0,911 \angle -16^\circ 40')} = 4,69 \cdot 10^{-4} \text{ м} = \\ &= 0,469 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Эта величина немногим меньше половины толщины ленты. Если бы проводник был массивным, то

$$u_{\text{масс}} = \frac{1}{\alpha} = 0,533 \text{ мм}.$$

Такое значение $u_{\text{масс}}$ в данном случае абсурдно, поскольку оно больше b . Иначе говоря, нельзя применять (13-8) для тонкой ленты.

13-5. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭФФЕКТ В ЛЕНТОЧНОМ ПРОВОДНИКЕ В ПЕРЕХОДНОМ РЕЖИМЕ

Применим метод пространственных гармоник.

Вычисление следует начинать с общих уравнений (11-21) и (11-22). Они одностипны. Следовательно, одностипными будут и их интегралы. Выпишем для примера (11-22) в соответствии с расположением координат, принятым на рис. 13-3,

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \gamma^2 u \frac{\partial H_z}{\partial t}. \quad (13-24)$$

Общий интеграл этого уравнения можно выписать в форме

$$H_z = \sum_{n=1,3,\dots} A_n \sin(nkx) e^{-n^2 \frac{t}{\tau}} + A_0 x + A, \quad (13-25)$$

где $k = \frac{\pi}{2b}$; $\tau = \frac{\mu_0 a}{k^2}$.

По условиям симметрии $H_{z(x=b)} = -H_{z(x=-b)} (\neq 0)$. Нарушающая это условие постоянная A должна быть положена равной нулю. Не зависящий от времени член $A_0 x$ представляет собой установившийся процесс (при включении постоянного тока).

Величина kx изменяется от $-\pi/2$ на одной из сторон ленты до $+\pi/2$ на другой стороне.

Входящие под знак суммы синусы не должны обращаться в нуль. Поэтому сумма должна содержать лишь члены с нечетными $n=1, 3 \dots$; ($A_2=A_4=\dots=0$).

Электромагнитное поле всегда связано с определенным запасом энергии. Следовательно, его величины не могут изменяться внезапно. При $t=0$ $H_{z0}=0$. Поэтому

$$\sum_{n=1,3,\dots} A_n \sin(nkx) = -A_0 x.$$

Это выражение представляет собой развертку функции $-A_0 x$ в ряд, содержащий синусы. Коэффициенты ряда находятся из интеграла

$$A_n = -\frac{2A_0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} x \sin(nkx) d(kx) = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{4A_0}{\pi k n^2} \\ (n=1, 3 \dots).$$

При $t=\infty$ все члены суммы в (13-25) затухают до нуля. Установившееся же значение напряженности магнитного поля определяется по закону полного тока; например, на правой боковой поверхности ленты ($x=b$)

$$H_{zby} = A_0 b = -\frac{I}{4a}, \quad (13-26)$$

где I — установившееся значение постоянного тока в ленточном проводнике.

Таким образом, коэффициенты ряда равны:

$$A_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2I}{\pi^2 n^2 a}. \quad (13-27)$$

Выражение напряженности магнитного поля в ленточном проводнике в переходном режиме включения постоянного тока имеет вид:

$$H_z = \frac{I}{a} \left\{ \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{e^{-n^2 \frac{t}{\tau}} \sin(nkx)}{n^2} - \frac{x}{4b} \right\}. \quad (13-28)$$

На боковых поверхностях ленты ($x = \pm b$)

$$H_{zb} = \frac{I}{a} \left\{ \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{n^2} e^{-n^2 \frac{t}{\tau}} - \frac{1}{4} \right\}. \quad (13-29)$$

Члены рядов (13-28) и (13-29) быстро убывают (обратно пропорционально n^2); поэтому в практическом расчете достаточно ограничиться небольшим количеством начальных членов.

13-6. ЭФФЕКТ БЛИЗОСТИ ДВУХ ЛЕНТОЧНЫХ ПРОВОДНИКОВ

Эффектом близости называется взаимное влияние близлежащих проводников с токами, сказывающееся в изменении распределения электрического и магнитного поля по сечению проводников и в дополнительном увеличении их внутреннего активного сопротивления.

Пусть рассматриваемая система представляет собой прямой и обратный провода ленточной электрической линии (рис. 13-4), по которой происходит передача синусоидального тока. Токи в проводах равны по величине и противоположны по знаку. Предположим, что толщина лент

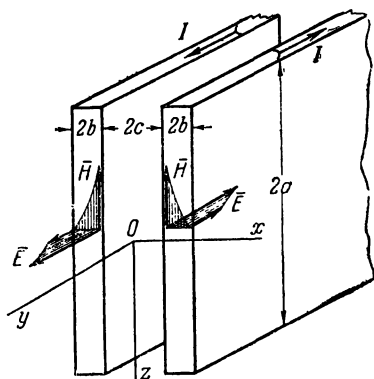


Рис. 13-4. К расчету эффекта близости двух параллельных ленточных проводников.

$2b$ и расстояние между ними $2c$ малы по сравнению с шириной ленты $2a$ ($2b \ll 2a$; $2c \ll 2a$).

При этих обстоятельствах магнитное поле в промежутке между ленточными проводниками можно считать практически однородным с напряженностью, равной

$$\dot{H}_{z(x=c)} = -\frac{i}{2a}. \text{ Магнитное поле снаружи проводов}$$

$[x \geq c + 2b \text{ и } x \leq -(c + 2b)]$ будет очень слабым.

Расположим оси координат, как показано на рис. 13-4.

Электромагнитное поле имеет следующие составляющие:

$$E = E_y \mathbf{j}; \quad \mathbf{H} = H_z \mathbf{k}; \quad E_x = 0; \quad E_z = 0; \quad H_y = 0; \quad H_x = 0.$$

Общие интегралы уравнений поля одинаковы с выражениями (13-13). Однако постоянные интегрирования изменятся. Они определяются из подстановок граничных значений $\dot{H}_{z(x=\pm c)} = -\frac{i}{2a}$; $\dot{H}_{z(x=\pm(c+2b))} = 0$ во второе уравнение системы (13-13):

$$\dot{H}_1 = -\frac{i e^{p(c+4b)}}{2a (e^{4pb} - 1)}; \quad (13-30)$$

$$\dot{H}_2 = \frac{i e^{-pc}}{2a (e^{4pb} - 1)}.$$

Постоянные \dot{E}_1 и \dot{E}_2 определяются посредством сохранивших силу уравнений типа (13-14)

$$\frac{\dot{E}_1}{\dot{H}_1} = -\frac{\dot{E}_2}{\dot{H}_2} = Z_c = \frac{\rho}{\gamma}.$$

После подстановки значений постоянных в (13-13) величины электромагнитного поля в правом ленточном проводнике оказываются равными:

$$\dot{E}_y = -\frac{i\rho}{2a\gamma (e^{4pb} - 1)} \{e^{p[4b-(x-c)]} + e^{p(x-c)}\}; \quad (13-31)$$

$$\dot{H}_z = -\frac{i}{2a (e^{4pb} - 1)} \{e^{p[4b-(x-c)]} - e^{p(x-c)}\}. \quad (13-32)$$

Характер кривых изменения величин E и H по направлению x показан на рис. 13-4.

Поток вектора Пойнтинга на обращенных друг к другу поверхностях проводников на единицу длины в направлении y равен:

$$\tilde{S}' = (\dot{E}_y \dot{H}_z)_{x=c} 2a \cdot 1 \cdot 2.$$

Разделив эту величину на квадрат тока, получают внутреннее сопротивление обоих проводов линии на единицу длины

$$Z_i = \frac{p(e^{4pb} + 1)}{a\gamma(e^{4pb} - 1)} = \frac{p}{a\gamma} \operatorname{cth} 2pb = \frac{Z_c}{a} \operatorname{cth} 2pb. \quad (13-33)$$

Внешнее реактивное сопротивление рассматриваемой линии рассчитывается следующим образом. Поскольку магнитное поле в пространстве между проводниками практически однородно, то

$$x_{\text{внеш}} = \omega L_{\text{внеш}} = \frac{\omega \Phi_{\text{внеш}}}{I} = \omega \mu_0 \frac{c}{a}. \quad (13-34)$$

Полное сопротивление линии, состоящей из двух ленточных проводников, равно (на единицу длины):

$$Z = Z_i + jx_{\text{внеш}}. \quad (13-35)$$

Пример. Пусть линия составлена из двух лент, размеры и материал которых те же, что и в примере § 13-4. Расстояние между лентами $2c = 1$ мм:

$$\operatorname{cth} 2pb = \operatorname{cth} 2,65 \angle 45^\circ = 0,962 \angle 1^\circ 30';$$

$$Z_c = 4,74 \cdot 10^{-5} \angle 45^\circ \text{ [ом]}.$$

По (13-33)

$$Z_i = \frac{4,74 \cdot 10^{-5}}{1 \cdot 10^{-2}} \cdot 0,962 e^{j45^\circ} e^{j1^\circ 30'} =$$

$$= (3,14 + j3,31) 10^{-3} \text{ [ом/м]}.$$

По (13-34)

$$x_{\text{внеш}} = 10^5 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-4}}{10^{-2}} = 6,28 \cdot 10^{-3} \text{ ом/м}.$$

Полное сопротивление линии на 1 м длины

$$Z = (3,14 \cdot 10^{-3} + j9,59 \cdot 10^{-3}) \text{ [ом/м]}.$$

Активное сопротивление одного провода на l м длины стало равным $\frac{1}{2} \cdot 3,14 \cdot 10^{-8} = 1,57 \cdot 10^{-8}$ Ом/м; оно на 65% выше вычисленного в § 13-4.

Таков результат эффекта близости ленточных проводов.

13-7. МАГНИТНЫЙ ПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭФФЕКТ В ЛИСТАХ СТАЛЬНОГО СЕРДЕЧНИКА С ПОСТОЯННОЙ МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ

Если рассматривать какой-либо лист в середине пакета (например, лист II на рис. 13-5) и пренебречь эффектом близости удаленных листов, то эффект близости соседних листов (I и III) будет в листе II практически скомпенсирован.

Ширина листа $2a$ во много раз больше толщины $2b$.

Положим, что все величины электромагнитного поля гармонически изменяются по времени.

Расположив оси координат, как показано на рис. 13-5, получим, что общие интегралы уравнений электромагнитного поля сохранят вид уравнений (13-13).

Граничные условия отличаются от рассмотренных в § 13-4 и 13-6. Поэтому постоянные интегрирования примут новые значения.

Вследствие симметрии

$$\dot{E}_{y(x=b)} = -\dot{E}_{y(x=-b)}; \quad \dot{H}_{z(x=b)} = \dot{H}_{z(x=-b)};$$

поэтому

$$\dot{E}_1 = -\dot{E}_2 = \dot{E}_m; \quad \dot{H}_1 = \dot{H}_2 = \dot{H}_m; \quad (13-36)$$

$$\dot{E}_y = -2\dot{E}_m \operatorname{sh} px; \quad \dot{H}_z = 2\dot{H}_m \operatorname{ch} px. \quad (13-37)$$

Среднее значение магнитной индукции в листе B_{cp} обычно задают исходя из получения нужной величины

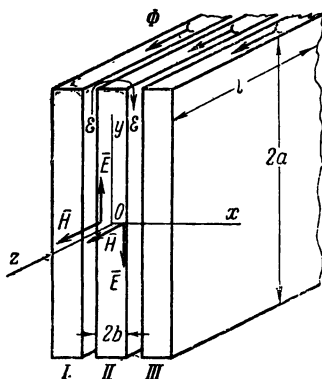


Рис. 13-5. Электромагнитное поле в стальном листе расщеленного магнитопровода.

магнитного потока

$$\dot{B}_{cp} = \frac{\mu_a}{2b} \int_{-b}^{+b} H_z dx = \frac{2\mu_a}{pb} \dot{H}_m \operatorname{sh} pb.$$

Отсюда находится постоянная \dot{H}_m

$$\dot{H}_m = B_{cp} \frac{pb}{2\mu_a \operatorname{sh} pb}. \quad (13-38)$$

Постоянную \dot{E}_m проще всего найти из сохраняющего силу (13-4)

$$\dot{E}_m = \frac{p}{\gamma} \dot{H}_m = j \frac{\omega b}{2 \operatorname{sh} pb} B_{cp}. \quad (13-39)$$

Подстановка найденных постоянных в (13-37) приводит к следующим уравнениям электромагнитного поля в толще листа:

$$\dot{E}_y = -j\omega b B_{cp} \frac{\operatorname{sh} px}{\operatorname{sh} pb}; \quad (13-40)$$

$$\dot{H}_z = \frac{pb}{\mu_a} B_{cp} \frac{\operatorname{ch} px}{\operatorname{sh} pb}. \quad (13-41)$$

Вычислив поток вектора Пойнтинга по обеим поверхностям листа и разделив результат на объем листа, получим комплекс мощности, потребляемой на единицу объема стали (удельной мощности),

$$\tilde{S} = \frac{2l \cdot 2a (\dot{E}_y \dot{H}_z^*)_{x=\pm b}}{l \cdot 2a \cdot 2b} = -j\omega \frac{B_{cp}^2}{\mu_a} \frac{pb}{\operatorname{th} pb} = P_B - jQ_M. \quad (13-42)$$

Вещественная часть комплекса P_B представляет собой удельные потери на вихревые токи; действительная величина потерь будет несколько больше вследствие неучтенных здесь потерь на гистерезис.

Величина

$$\mu_{2a} = \frac{P_B}{\omega H_{z(x=b)}^2} \quad (13-43)$$

называется проникаемостью потерь.

Мнимая часть комплекса Q_M называется удельной намагничивающей мощностью.

Величина

$$\mu_{1a} = \frac{Q_m}{\omega H_{z(x=b)}^2} \approx \frac{B_{1cp}}{H_{cp}} \quad (13-44)$$

называется упругой (или квазиупругой) проницаемостью. B_{1cp} — среднее значение составляющей магнитной индукции, совпадающей по фазе с напряженностью магнитного поля. При низкой частоте она мало отличается от отношения $\mu_a = B_{cp}/H_{cp}$. Профессорами В. К. Аркадьевым и К. М. Поливановым предложена концепция комплексной магнитной проницаемости, удобно описывающая процесс переменного намагничивания стали,

$$\tilde{\mu}_a = \mu_{1a} - j\mu_{2a}. \quad (13-45)$$

Пример. Среднее значение индукции в стальном листе толщиной $2b = 0,5$ мм $= 5 \cdot 10^{-4}$ м составляет $B_{cp} = 1$ в.сек/м², $\gamma = 0,2 \times 10^7$ 1/ом·м; $\omega = 314$ 1/сек.

По кривой намагничивания материала на постоянном токе найдено, что при $B = 1$ в.сек/м², $H = 185$ а/м; следовательно, упругая составляющая магнитной проницаемости равна:

$$\mu_{1a} = \frac{1}{185} = 5,4 \cdot 10^{-3} \text{ гн/м.}$$

Ее величина считается в дальнейшем постоянной. По (11-19)

$$p = \sqrt{j314 \cdot 0,2 \cdot 10^7 \cdot 5,4 \cdot 10^{-3}} = 1840 \angle 45^\circ [1/м];$$

$$pb = 0,46 \angle 45^\circ;$$

$$\text{th } pb = \frac{1 - e^{-2pb}}{1 + e^{-2pb}} = 0,459 \angle 41^\circ 05'.$$

По (13-42)

$$\tilde{S} = \frac{314 \cdot 1^2}{5,4 \cdot 10^{-3}} \frac{0,46 \angle 45^\circ}{0,459 \angle 41^\circ 05'} \angle -90^\circ = 3970 - j58000.$$

Удельные потери от вихревых токов

$$P_w = 3970 \text{ вт/м}^3.$$

Удельная намагничивающая мощность

$$Q_m = 58000 \text{ ва/м}^3.$$

Значение напряженности магнитного поля на поверхности листа определяется по (13-41) при $x = b$

$$\dot{H}_{zb} = \frac{1}{5,4 \cdot 10^{-4}} \frac{0,46 \angle 45^\circ}{0,459 \angle 41^\circ 55'} = 185,5 \angle 3^\circ 55' \text{ [a/м]}.$$

Проницаемость потерь по (13-43)

$$\mu_{2a} = \frac{3970}{314 \cdot 185,5^2} = 3,67 \cdot 10^{-4} \text{ гн/м}.$$

Величина угла потерь от вихревых токов $\alpha_v = \operatorname{arctg} \frac{\mu_{2a}}{\mu_{1a}}$ мала.

Этим оправдывается упрощающая вычисления подстановка в (11-19) и (13-1) значения μ_{1a} вместо μ_a .

Заметим, что при $B_{cp} = 1 \text{ в.сек/м}^2$ и при низкой частоте ($\omega = = 314 \text{ 1/сек}$) стальной лист толщиной 0,5 мм намагничен практически равномерно; действительно, $\operatorname{sh} pb = 0,459 \angle 47^\circ$. В середине листа $\dot{H}_z (x=0) = 2\dot{H}_m = 185 \angle -2^\circ$.

Ее модуль почти не отличается от $|H_{zb}|$; различие в аргументе также невелико — всего около 6° . Этим в данном случае оправдывается допущение $\mu_{1a} = \operatorname{const}$.

13-8. ПРОНИКНОВЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ЛИСТЫ СЕРДЕЧНИКА С «ПРЯМОУГОЛЬНЫМ» ЦИКЛОМ ПЕРЕМАГНИЧИВАНИЯ

Пусть материал листа (рис. 13-6) характеризуется так называемым «прямоугольным» циклом перемагничивания, показанным сплошной линией на рис. 13-6.

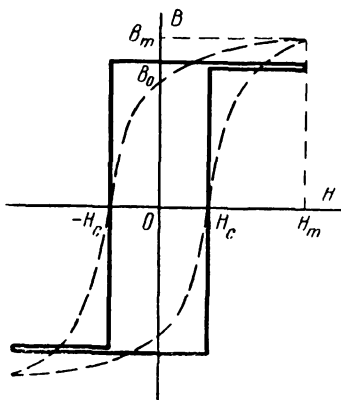


Рис. 13-6. «Прямоугольный» цикл перемагничивания.

Скачкообразное изменение магнитной индукции от $-B_0$ до $+B_0$ происходит в момент перехода возрастающей напряженности магнитного поля через положительное значение H_c , равное коэрцитивной силе. В момент же перехода убывающей напряженности магнитного поля через отрицательное значение $-H_c$ величина магнитной индукции внезапно изменяется от $+B_0$ до $-B_0$. Подобной формой цикла обладают некоторые современные магнитные ма-

териалы (ферриты, металлокерамические пермаллои).

При периодическом изменении намагниченности материала кривая изменения магнитной индукции по времени будет «прямоугольной» формы, показанной на рис. 13-7.

Совместим начало отсчета времени с моментом установления положительного значения магнитной индукции $+B_0$ на боковых поверхностях листа.

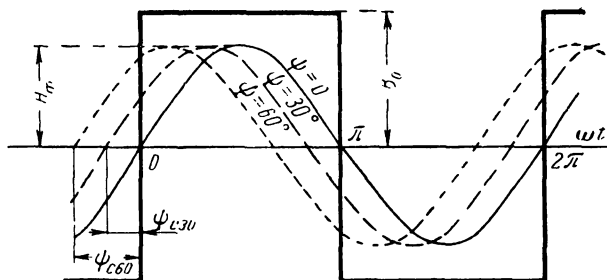


Рис. 13-7. Кривые мгновенных значений B и H при синусоидальном токе возбуждения и при «прямоугольном» цикле перемагничивания.

Кривую изменения по времени напряженности магнитного поля в воздухе и на боковых поверхностях листа примем синусоидальной формы

$$H = H_m \sin(\omega t + \psi_c). \quad (13-46)$$

Угол начальной фазы ψ_c определяется условием

$$H_{t=0} = H_m \sin \psi_c = H_c. \quad (13-47)$$

В двух плоскостях, лежащих в толще листа, параллельных его боковым поверхностям и отстоящих на некоторое расстояние соответственно от левой и правой поверхностей, происходит внезапное изменение магнитной индукции от значения $-B_0$ (установившегося в предыдущий полупериод) до значения $+B_0$. Движение этих плоскостей внезапного изменения магнитной индукции можно назвать волнами с «крутым фронтом» (рис. 13-8).

Могут быть два случая:

а) При достаточно тонких листах обе волны успевают дойти до середины листа в течение времени t_m , меньшего полупериода ($\omega t_m < \pi$; $t_m < \pi/\omega$); в момент $t = t_m$ обе волны сливаются в середине листа ($x = b$), по-

сле чего до прибытия в следующем полупериоде новой волны магнитной индукции противоположного направления $\left(t_m \leq t \leq \frac{\pi + \psi_c}{\omega}\right)$ во всей толще листа будет сохраняться постоянное значение магнитной индукции B_0 [рис. 13-8,а и б].

б) При достаточно толстых листах (а также в случае сплошного сердечника) в некоторый момент времени раньше окончания полупериода ($t_k < \pi/\omega$) скорость движения волн v уменьшается до нуля; при этом каждая волна смогла углубиться в лист лишь на некоторое расстояние u , меньшее половины толщины листа ($u < b$, рис. 13-8,в). В этом положении процесс как бы застывает вплоть до прибытия следующей волны магнитной индукции противоположного направления.

Расположим оси координат, как показано на рис. 13-8. Отсчет расстояния x будет от одной из поверхностей листа.

Во время движения магнитного поля в глубь листа в толще последнего индуцируется электрическое поле движения с напряженностью

$$E = -2[vB_0] = 2vB_0j = 2B_0 \frac{dx}{dt} j. \quad (13-48)$$

Множителем 2 учитывается то, что внезапное изменение величины индукции происходит от $-B_0$ до $+B_0$.

Величина E в какой-либо момент времени неизменна во всем слое листа толщиной x_1 , заключенном между поверхностью и фронтом волны магнитной индукции. Поэтому ток проводимости в этом слое будет распределен с равномерной плотностью $\delta = \gamma E$, где γ — удельная проводимость материала. Рассмотрим контур интегрирования K единичной длины в направлении z и малой ширины dx в направлении движения фронта волны (рис. 13-8,а).

В течение малого промежутка времени dt фронт волны успевает передвинуться на малое расстояние $vdt = dx = (mn) = (qp)$. Напряженность магнитного поля H вдоль отрезка np еще равна нулю, а вдоль отрезка mq она возросла до некоторой малой величины dH . Линейный интеграл напряженности магнитного поля по контуру $mnpqt$ будет равен $dH \cdot 1$.

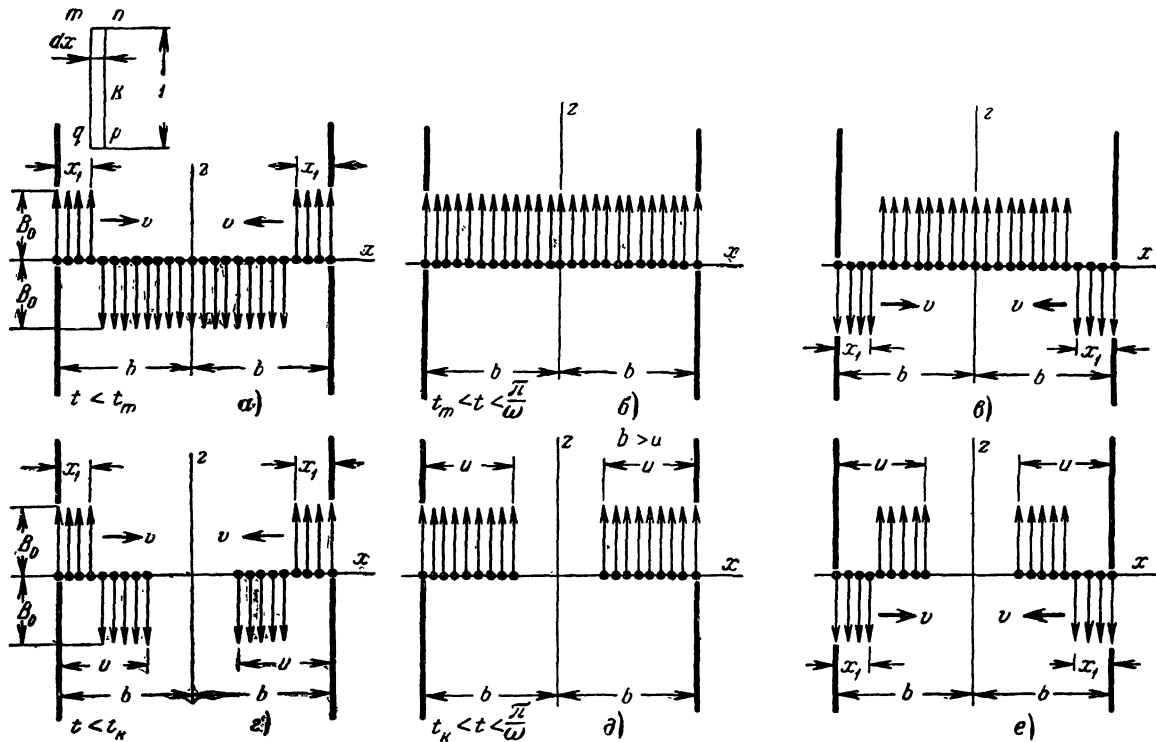


Рис. 13-8. Два случая проникновения волны магнитной индукции с «крутым фронтом» в толщу ферромагнитного листа.

По закону полного тока эта величина равна индуцированному (вихревому) току di , протекающему через площадку $dx \cdot l$, ограниченную контуром $mnpqm$,

$$dH = di = \delta dx \cdot l = \gamma E dx, \quad (13-49)$$

где δ — плотность тока проводимости, равна γE .

Поскольку величина E не зависит от пройденного фронтом волны расстояния x , уравнение (13-49) можно интегрировать, полагая $E = \text{const}$,

$$H = \gamma E x + \text{const}_1. \quad (13-50)$$

Определим постоянную const_1 . В самом начале движения фронта волны магнитной индукции ($t=0$; $x=0$) напряженность магнитного поля на поверхности листа равнялась коэрцитивной силе H_c .

Следовательно,

$$\text{const}_1 = H_{x=0} = H_c.$$

Подставим сюда числовое значение E из (13-48) и перейдем к новой независимой переменной ωt , разделив обе части выражения на величину угловой частоты ω ,

$$\frac{H - H_c}{\omega \gamma B_0} = 2x \frac{dx}{dt} \frac{1}{\omega} = \frac{d(x^2)}{d(\omega t)}.$$

Заменим H и H_c их выражениями из (13-46) и (13-47); проинтегрируем полученное уравнение в пределах от 0 до ωt

$$x_1^2 = \frac{H_m}{\omega \gamma B_0} \int_0^{\omega t} [\sin(\omega t + \psi_c) - \sin \psi_c] d(\omega t).$$

В результате получится зависимость пройденного фронтом волны расстояния от времени

$$x = \frac{u_0}{\sqrt{2}} \sqrt{\cos \psi_c - \cos(\omega t + \psi_c) - \omega t \sin \psi_c}, \quad (13-51)$$

где

$$u_0 = \sqrt{\frac{2H_m}{\omega \gamma B_0}}. \quad (13-52)$$

Положим $\psi_c = 0$ (гистерезис отсутствует) и $\omega t = \pi$ (конец полупериода):

$$x_{\psi_c=0} = \left(\frac{u_0}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \cos \omega t} \right)_{\omega t=\pi} = u_0.$$

Величина u_0 представляет собой наибольшую глубину проникновения поля в сплошной сердечник (или в достаточно толстые листы) в отсутствие гистерезиса.

Скорость движения фронта волны равна:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega u_0}{2\sqrt{2}} \frac{\sin(\omega t + \psi_c) - \sin \psi_c}{\sqrt{\cos \psi_c - \cos(\omega t + \psi_c) - \omega t \sin \psi_c}}. \quad (13-53)$$

Итак, все величины, характеризующие проникновение поля в ферромагнитный материал с «прямоугольной» кривой перемагничивания (x , v , E , δ), являются сложными функциями времени.

13-9. МАГНИТНЫЙ ПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭФФЕКТ В ЛИСТАХ С «ПРЯМОУГОЛЬНЫМ» ЦИКЛОМ ПЕРЕМАГНИЧИВАНИЯ

Магнитный поверхностный эффект наблюдается в толстых листах и в сплошных сердечниках даже при невысоких звуковых частотах.

При повышении частоты магнитный поверхностный эффект начинает проявляться и в тонких листах.

Пусть половина толщины ферромагнитного листа b больше наибольшей возможной глубины проникновения магнитного поля $u = x_{\text{макс}}$ (рис. 13-8, z , δ , e).

На рис. 13-9 приведены кривые изменения величин поля по времени, построенные по (13-51), (13-53) и (13-48) при различных углах начальной фазы ψ_c . Скорость продвижения волны магнитной индукции v сохраняет один и тот же знак в обеих половинах периода. Направление же вектора магнитной индукции во второй половине периода противоположно имевшемуся в первой половине.

Поэтому знак индуктированной напряженности электрического поля E изменяется через каждые полпериода.

Из кривых и формул видно, что:

а) при синусоидальном изменении по времени намагничивающего тока в обмотке катушки и пропорциональных ему величин намагничивающей силы и напряженности магнитного поля получаются несинусоидальные кривые индуктированной напряженности электрического поля и плотности индуктированного тока (вихревого тока). Их форма существенно зависит от величины угла начальной фазы ψ_c , определяемого отношением величин

коэрцитивной силы и амплитуды напряженности магнитного поля (13-47);

в) в отсутствие гистерезиса вихревые токи протекают в толстом листе или в сплошном сердечнике в течение всего цикла перемагничивания (кривая $\psi_c=0$ на рис. 13-9).

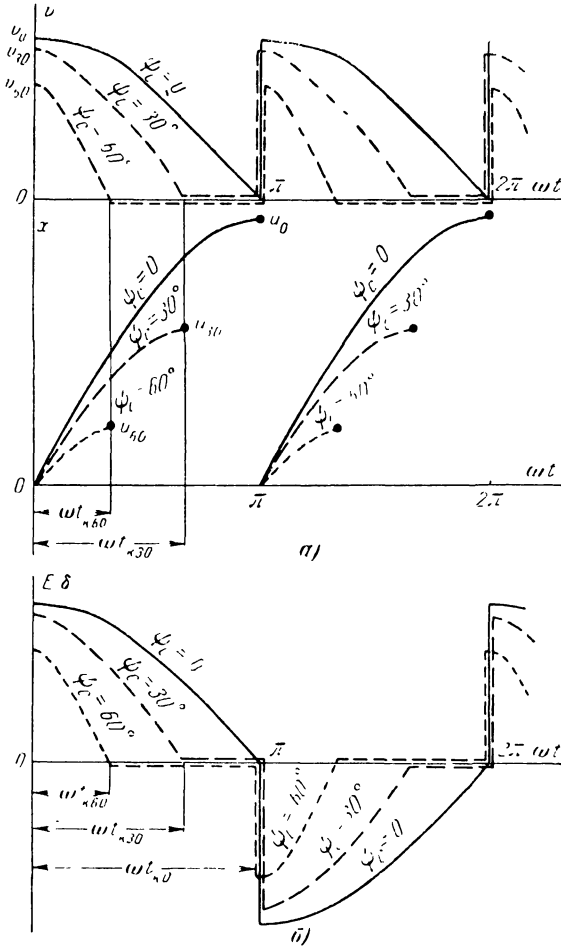


Рис. 13-9. Кривые мгновенных значений.

а — скорости и глубины проникновения фронта волны магнитной индукции в толстый ферромагнитный лист; б — индуцируемого электрического поля и плотности тока.

При наличии же гистерезиса ($\psi_c > 0$) вихревые токи протекают лишь в течение части каждого полупериода t_k , до момента времени, в который скорость движения фронта волны v и пропорциональные ей величины E и δ становятся равными нулю; обращаясь к (13-53), видим, что $v=0$ при $\sin(\omega t_k + \psi_c) - \sin \psi_c = 0$. Отсюда следует:

$$\omega t_k = \pi - 2\psi_c; \quad (13-54)$$

в) магнитное поле проникает наиболее глубоко в сплошной сердечник (или в достаточно толстый лист) в случае отсутствия гистерезиса на расстояние u_0 , определяемое по уравнению (13-52);

г) магнитный поверхностный эффект усиливается из-за явления гистерезиса; наибольшая глубина проникновения магнитного поля при наличии гистерезиса меньше, чем в отсутствие гистерезиса [см. конечные точки кривых $x=f(\omega t)$ на рис. 13-9];

д) скорость движения фронта волны магнитной индукции и пропорциональные ей величины индуктированной напряженности электрического поля E и плотности индуктированного (вихревого) тока δ имеют наибольшие значения в начале полупериода.

Однако (13-53) при $\omega t=0$ приводит к неопределенности типа $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия проще всего найти по правилу Лопиталя предел, к которому стремится при $\omega t \rightarrow 0$ квадрат дробного множителя, содержащего тригонометрические функции,

$$\lim_{\omega t \rightarrow 0} \left\{ \frac{[\sin(\omega t + \psi_c) - \sin \psi_c]^2}{\cos \psi_c - \cos(\omega t + \psi_c) - \omega t \sin \psi_c} \right\} = 2 \cos \psi_c.$$

Следовательно,

$$v_{\text{макс}} = \frac{\omega u_0}{2} \sqrt{\cos \psi_c}; \quad (13-55)$$

$$E_{\text{макс}} = 2B_0 v_{\text{макс}} = \omega u_0 B_0 \sqrt{\cos \psi_c}. \quad (13-56)$$

13-10. ВРЕМЯ ПРОНИКНОВЕНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ТОНКИЙ ФЕРРОМАГНИТНЫЙ ЛИСТ

Лист считается тонким, если половина его толщины меньше наибольшей глубины проникновения магнитного поля (при учете гистерезиса, $b < u$, рис. 13-8). Дви-

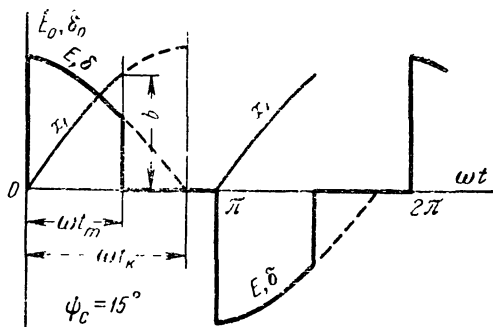


Рис. 13-10. Кривые мгновенных значений глубины проникновения фронта волны магнитной индукции в тонкий ферромагнитный лист и индуктируемого электрического поля и плотности тока.

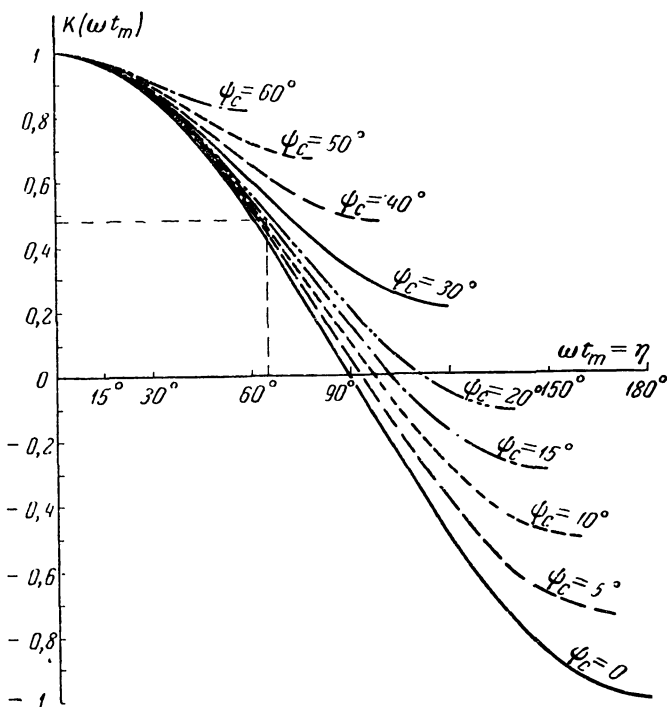


Рис. 13-11. Кривые вспомогательной функции $K(\omega t_k)$.

жение фронтов волн магнитной индукции, индуктирование электрического поля и токов в листе внезапно прекращаются в момент $t_m (< t_h)$, когда оба фронта встречаются друг с другом в середине листа.

Кривые изменения величин по времени при $\psi_c = 15^\circ$ показаны на рис. 13-10.

Время t_m определяется из (13-51) при подстановке $x = b$.

Для облегчения расчета на рис. 13-11 представлены кривые вспомогательной функции

$$K(\omega t_m) = \cos \omega t_m + (\omega t_m - \sin \omega t_m) \operatorname{tg} \psi_c = \\ = 1 - \frac{2}{\cos \psi_c} \left(\frac{b}{u_0} \right)^2. \quad (13-57)$$

Порядок пользования ими виден из примера.

Пример. Пусть $b/u_0 = 0,5$ и $H_c/H_m = \sin \psi_c = 0,259$;

$$\psi_c = 15^\circ; \cos \psi_c = 0,966; \operatorname{tg} \psi_c = 0,268.$$

По уравнению (13-57) вычисляется функция $K(\omega t_m)$

$$K(\omega t_m) = 1 - \frac{2}{0,966} \cdot 0,5^2 = 0,482.$$

Проводим на рис. 13-11 прямую, параллельную оси абсцисс, ординаты всех точек которой равны 0,482.

Абсцисса точки пересечения этой прямой с кривой, соответствующей углу начальной фазы $\psi = 15^\circ$, равна $\omega t_m = 65,5^\circ$, т. е. оба фронта волн магнитной индукции встречаются друг с другом спустя немногим более одной трети периода.

13-11. ПОТЕРИ В СЕРДЕЧНИКЕ ПРИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЕ ПЕТЛИ ПЕРЕМАГНИЧИВАНИЯ

а) Потери энергии на гистерезис за один полный цикл перемагничивания, отнесенные к единице объема ферромагнитного материала, выражаются площадью петли гистерезиса.

Площадь прямоугольной петли (типа рис. 13-6) равна $2B_0 \cdot 2H_c$. Мощность потерь на гистерезис на единицу объема сердечника при частоте $f = \omega/2\pi$ в случаях, когда магнитный поверхностный эффект не сказывается, равна:

$$P_{e(\text{тонк})} = \frac{2}{\pi} \omega H_c B_0. \quad (13-58)$$

При наличии магнитного поверхностного эффекта следует принимать в расчет лишь часть объема сердечника (или его листов) V_1 , фактически подвергающуюся перемагничиванию. Если полный объем сердечника равен V , то отношение V_1/V равно u/b , где $u = x_{\text{макс}}$ — наибольшая глубина проникновения магнитного поля в толщу листа, определяемая путем подстановки предельного значения времени распространения магнитного поля t_k из (13-54) в (13-51); b — половина толщины листа.

Мощность потерь на гистерезис на единицу объема сердечника в этих случаях равна:

$$P_{z(\text{толст})} = \frac{2}{\pi} \omega H_c B_0 \frac{u}{b}. \quad (13-59)$$

Мощность потерь на гистерезис в отсутствие магнитного поверхностного эффекта (низкая частота, тонкие листы) прямо пропорциональна частоте; при наличии же магнитного поверхностного эффекта (толстые листы, сплошной сердечник или повышенная частота) мощность потерь на гистерезис пропорциональна квадратному корню из частоты [поскольку входящая в (13-59) величина u обратно пропорциональна корню из частоты].

б) Потери на вихревые токи. Мгновенное значение индуктированного тока на единицу длины листа в направлении оси z на рис. 13-3 и 13-8 равно:

$$i_1 = \delta x \cdot l.$$

Цепь тока замыкается через другую половину листа. Пренебрежем малыми участками пути тока поперек листа (у его краев).

Сечение пути тока (на единицу длины листа) равно в данный момент времени $x \cdot l$.

При удельной проводимости материала γ электрическое сопротивление пути (на единицу поверхности листа) составляет:

$$r_1 = \frac{l}{\gamma x}.$$

Энергия, преобразуемая в тепло в течение очень малого промежутка времени dt (начавшегося в момент t),

отнесенная к единице длины листа в направлении z , равна:

$$dW_1 = i_1^2 r_1 dt = \frac{\delta^2 x}{\gamma} dt.$$

Подставим сюда выражения мгновенных значений плотности тока δ и глубины проникновения магнитного поля в толщу листа x (по 13-51), затем заменим величины v и u_0^2 по (13-53) и (13-52). Перейдем к новой переменной интегрирования ωt , внося ω под знак дифференциала. После сокращений получим:

$$dW_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} B_0 H_m u_0 \frac{[\sin(\omega t + \psi_c) - \sin \psi_c]^2}{\sqrt{\cos \psi_c - \cos(\omega t + \psi_c) - \omega t \sin \psi_c}}. \quad (13-60)$$

В случае отсутствия магнитного поверхностного эффекта (тонкие листы) индуктированные токи протекают в течение лишь части t_m каждого полупериода, пока не произошла встреча фронтов волн магнитной индукции посредине листа сердечника.

Потери энергии на вихревые токи за полпериода на единицу поверхности листа определяются путем интегрирования (13-60) в пределах от 0 до $\omega t_m = \eta$. Мощность потерь (потери энергии за 1 сек) получится путем умножения результата на удвоенную частоту $2f = \omega/\pi$.

Для определения мощности удельных потерь P_B (отнесенной к единице объема ферромагнитного листа) результат интегрирования разделим на объем части листа, имеющей единичную поверхность.

Проведя вычисления, получим:

$$P_B = \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \omega B_0 H_m \frac{u_0}{b} P' [\text{вт/м}^3] \quad (b \leq u), \quad (13-61)$$

где

$$P' = \int_0^{\eta} \frac{[\sin(\omega t + \psi_c) - \sin \psi_c]^2}{\sqrt{\cos \psi_c - \cos(\omega t + \psi_c) - \omega t \sin \psi_c}} d(\omega t). \quad (13-62)$$

Значение этого интеграла можно найти из кривых на рис. 13-12.

Верхний предел интегрирования $\eta = \omega t_m$ должен быть найден предварительно посредством кривых на рис. 13-11.

В случае толстых листов, когда имеет место магнитный поверхностный эффект, интегрирование (13-60) сле-

дует производить в пределах всего времени распространения магнитного поля в толще листа от $\omega t = 0$ до $\omega t = \omega t_k = \pi - 2\psi_c$, где $\psi_c = \arcsin \frac{H_c}{H_m}$.

Вместо половины толщины листа b здесь следует принимать в расчет в качестве предельной толщины пу-

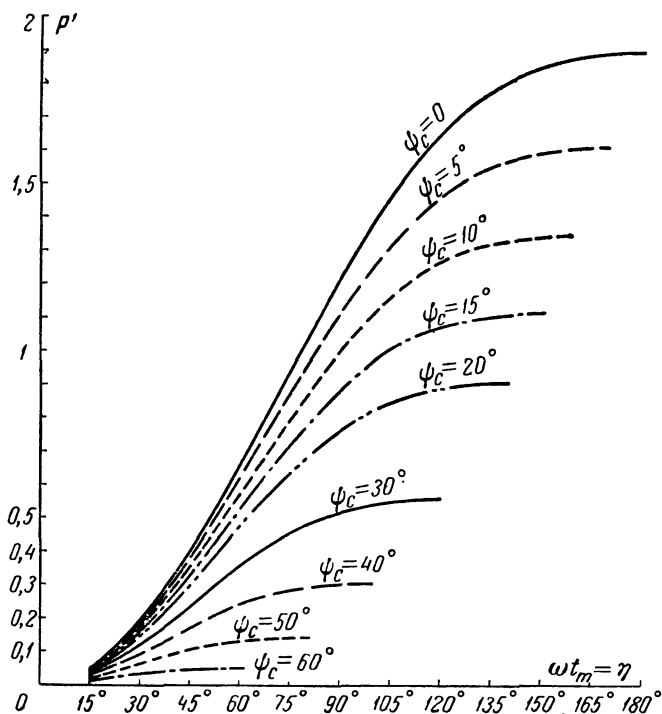


Рис. 13-12. Кривые к расчету потерь на вихревые токи в тонких листах.

ти индуцированного тока фактическую наибольшую глубину проникновения магнитного поля $u = x_{\text{макс}}$, определяемую из (13-51) при $t = t_k$.

Расчетная формула для мощности удельных потерь на вихревые токи при наличии магнитного поверхностного эффекта (толстые листы, $b > u$) получает вид:

$$P_{\text{в}} = \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \frac{\omega}{a_c} B_0 H_m P'' [\text{вт}/\text{м}^3], \quad (13-63)$$

где

$$a_c = \sqrt{\cos \psi_c - \left(\frac{\pi}{2} - \psi_c\right) \sin \psi_c} \quad (13-64)$$

и

$$P'' = \int_0^{\pi-2\psi_c} \frac{[\sin(\omega t + \psi_c) - \sin \psi_c]^2}{\sqrt{\cos \psi_c - \cos(\omega t + \psi_c) - \omega t \sin \psi_c}} d(\omega t). \quad (13-65)$$

Кривая значений интеграла P'' в функции от ψ_c приведена на рис. 13-13.

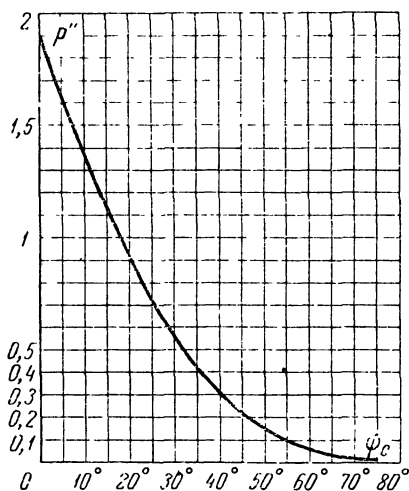


Рис. 13-13. Кривая к расчету потерь на вихревые токи в толстых листах.

Уравнение (13-63) выражает величину мощности удельных потерь на вихревые токи, отнесенную к единице части объема ферромагнитного материала V_1 , фактически подвергающейся перемагничиванию.

Для сердечника, собранного из толстых листов, эта часть объема равна:

$$V_1 = \frac{x_{\text{макс}}}{b} V, \quad (13-66)$$

где V — полный объем сердечника.

Поскольку величина μ_0 , входящая в выражение для $x_{\text{макс}}$, в свою очередь обратно пропорциональна квадрат-

ному корню из частоты [уравнение (13-52)], полная величина потерь на вихревые токи в толстых листах (или в массивном сердечнике) из материала с «прямоугольной» петлей перемангничивания оказывается пропорциональной квадратному корню из частоты.

В тонких же листах нет магнитного поверхностного эффекта и зависимость потерь на вихревые токи от частоты сильнее. Она выражается сложной функцией (13-61), в которую входит зависящий от частоты множитель P' . О характере зависимости можно получить более ясное представление в случае сильного намагничивания, когда влиянием гистерезиса можно пренебречь, поскольку отношение H_c/H_m будет малой дробью, $\sin \psi_c = 0$, а $\cos \psi_c \approx 1$. Опустив промежуточные выкладки, приведем результат.

Мощность удельных потерь на вихревые токи в тонких сильно намагничиваемых листах при низких частотах (когда $b < 0,3u_0$) приближенно равна:

$$P_{\text{в(тонк.л.ч)}} \approx \frac{\sqrt{2}}{\pi} (\gamma H_m)^{1/2} (\omega B_0)^{3/2} b \text{ [вт/м}^3\text{]}. \quad (13-67)$$

Итак, зависимость потерь на вихревые токи от частоты и толщины листа в материале с «прямоугольной» формой петли перемангничивания существенно отличается от квадратичной, имеющей место в синусоидальном режиме при низких частотах и при предполагаемом постоянстве магнитной проницаемости.

13-12. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭФФЕКТ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ПРОВОДНИКЕ

Предположим, что величины электромагнитного поля гармонически изменяются по времени.

Совместим ось z цилиндрической системы координат с осью проводника (рис. 13-14). Проводник достаточно длинен, так что изменений величин поля вдоль оси z не происходит. Напряженность электрического поля имеет только осевую составляющую \dot{E}_z , а напряженность магнитного поля — только касательную составляющую \dot{H}_θ . В силу симметрии очевидно, что величины поля не зависят от угла θ . Подставляем выражения векторных лапласианов в цилиндрической систе-

ме координат из приложения П-1 в (11-23) и (11-24):

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} = p^2 \dot{E}_z; \quad (13-68)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_\theta}{\partial r} = \left(p^2 + \frac{1}{r^2} \right) \dot{H}_\theta, \quad (13-69)$$

где

$$p = \sqrt{j\omega\gamma\mu_a}; \quad (13-70)$$

r — расстояние от оси проводника по радиусу.

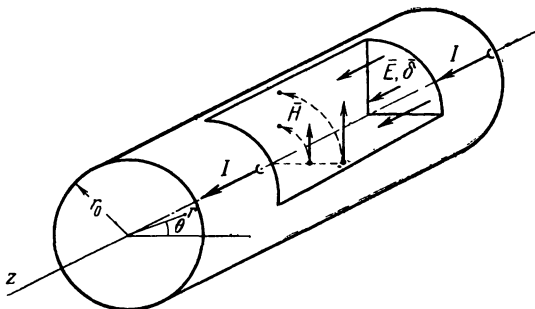


Рис. 13-14. Электромагнитное поле в цилиндрическом проводнике.

Интегралами уравнений являются цилиндрические функции $I_0(pr)$ и $I_1(pr)$:

$$\dot{E}_z = a_0 I_0(pr); \quad (13-71)$$

$$\dot{H}_\theta = b_0 I_1(pr). \quad (13-72)$$

Функция $I_0(pr)$ называется модифицированной бесселевой функцией первого рода нулевого порядка от комплексного аргумента, а функция $I_1(pr)$ — модифицированной бесселевой функцией первого рода первого порядка от комплексного аргумента; она равна первой производной функции $I_0(pr)$ по всему аргументу pr

$$I_1(pr) = I'_0(pr).$$

Обе функции являются комплексными величинами. Таблицы их значений даны в приложении П-13.

Кривые их модулей и аргументов в зависимости от модуля аргумента $|pr|$ представлены на рис. 13-15.

В измененном масштабе эти кривые показывают изменение величин \dot{E}_z и \dot{H}_θ вдоль радиуса проводника.

Плотность тока δ_z изменяется пропорционально \dot{E}_z . a_0 и b_0 — постоянные интегрирования; поскольку $I_0(0) = 1$, то a_0 представляет собой напряженность электриче-

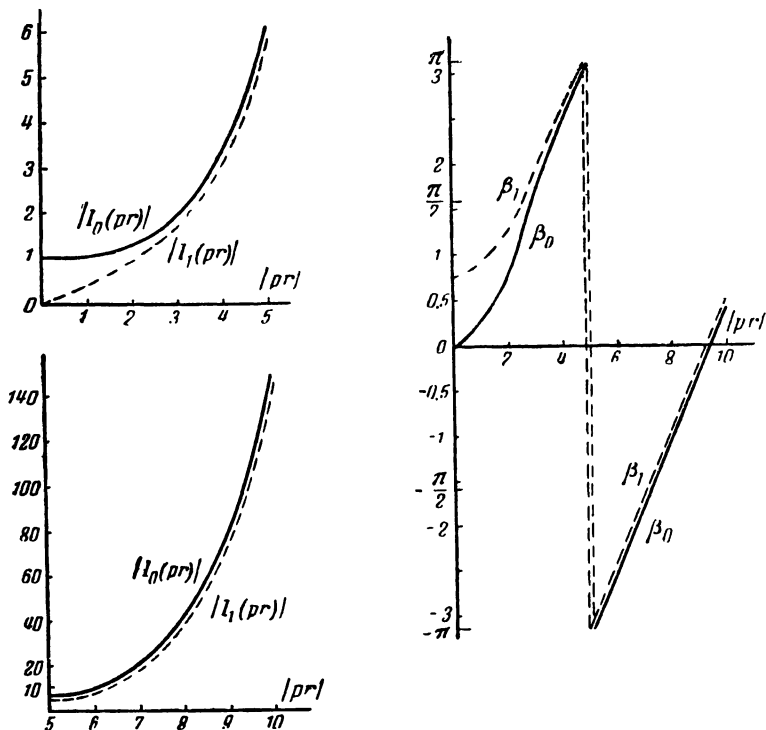


Рис. 13-15. Модули и аргументы модифицированных бesselевых функций нулевого и первого порядков от комплексного аргумента.

ского поля в центре сечения проводника ($r=0$); связь между постоянными a_0 и b_0 может быть установлена при помощи второго уравнения Максвелла (11-8)

$$[\nabla \dot{E}] = -j\omega\mu_a \dot{H}_\theta \cdot \mathbf{1}_\theta = -\frac{p^2}{\gamma} b_0 I_1(pr) \mathbf{1}_\theta. \quad (13-73)$$

Поскольку

$$E_r = 0; E_\theta = 0; \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \theta} = 0 \text{ и } \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial z} = 0,$$

выражение ротора в цилиндрических координатах (приложение П-1) принимает простой вид:

$$[\nabla \dot{E}] = -\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} \mathbf{1}_\theta = -a_0 \rho I'_0(\rho r) \mathbf{1}_\theta = -a_0 \rho I_1(\rho r) \mathbf{1}_\theta. \quad (13-74)$$

Сравнивая это выражение с (13-73), получаем:

$$a_0 = \frac{\rho}{\gamma} b_0. \quad (13-75)$$

Для определения постоянной b_0 применим закон полного тока к периметру сечения проводника

$$\dot{H}_{\theta(r=r_0)} \cdot 2\pi r_0 = \dot{I}, \quad (13-76)$$

где r_0 — радиус проводника;

\dot{I} — величина тока (комплексное выражение).

Подстановка выражения (13-72) при $r=r_0$ в (13-76) дает:

$$b_0 = \frac{\dot{I}}{2\pi r_0 I_1(\rho r_0)}. \quad (13-77)$$

Внутреннее сопротивление проводника на единицу длины (поверхностный импеданс) можно найти как отношение напряженности электрического поля на поверхности проводника $\dot{E}_{z(r=r_0)}$ к величине тока \dot{I} .

Выполнив подстановку постоянных из (13-77) и (13-75) в (13-71), получим:

$$Z_i = R_i + jx_i = \frac{\rho I_0(\rho r_0)}{\gamma \cdot 2\pi r_0 I_1(\rho r_0)}. \quad (13-78)$$

На рис. 13-16 представлены кривые изменения относительных величин активного R_i/R_0 и внутреннего реактивного сопротивлений x_i/R_0 , а также внутренней индуктивности L_i/L_{i0} в зависимости от модуля величины $|\rho r_0|$. В качестве относительных единиц измерения приняты значения величин R_0 и L_{i0} при постоянном токе ($\omega \rightarrow 0$).

Расчет эквивалентной глубины проникновения электромагнитного поля в цилиндрический проводник u можно производить по (13-8) лишь при достаточно высоких частотах, когда $|\rho r_0| > 10$.

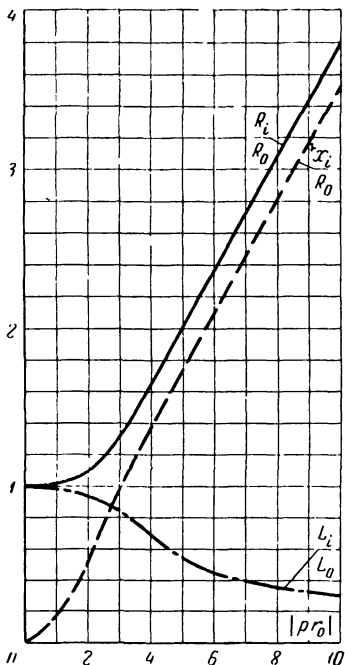


Рис. 13-16. Кривые поверхностного эффекта в цилиндрическом проводнике.

При меньших значениях аргумента $|pr_0|$ вычисление u следует делать из найденного по (13-78) значения R_i .

Из элементарного равенства

$$R_i = \frac{1}{\gamma S_d} = \frac{1}{\gamma \pi [r_0^2 - (r_0 - u)^2]} \quad (13-79)$$

следует:

$$u = r_0 - \sqrt{r_0^2 - \frac{1}{\pi \gamma R_i}}. \quad (13-80)$$

Второй корень квадратного уравнения (13-79) не имеет физического смысла, поскольку $u < r_0$.

При достаточно высоких частотах, когда величина $|pr_0|$ превосходит, например, 10, отношение функций $I_0(pr_0)$ и $I_1(pr_0)$ стремится к единице

$$Z_{i(|pr| \geq 10)} \approx \frac{p}{\gamma \cdot 2\pi r_0} = \frac{1}{2\pi r_0} \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\gamma}} < 45^\circ; \quad (13-81)$$

$$R_i = x_i = \frac{1}{2\pi r_0} \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{2\gamma}}. \quad (13-82)$$

В практических расчетах следует помимо x_i учитывать внешнее индуктивное сопротивление линии, определяемое магнитным полем в пространстве между рассматриваемым проводом и обратным проводом той же линии (см., например, § 8-8).

В заключение отметим, что формулы настоящего параграфа описывают цилиндрическую электромагнитную волну, несущую извне энергию на компенсацию тепловых потерь в толще проводника.

Вектор Пойнтинга повсюду направлен радиально, в глубь проводника. Поток вектора Пойнтинга через

поверхность отрезка проводника единичной длины равен:

$$\tilde{S}_1 = (\dot{E} \dot{H})_{r=r_0} \cdot 2\pi r_0 \cdot 1 = 2\pi r_0 a_0 b_0 I_0(pr_0) I_1(pr_0). \quad (13-83)$$

Подставив значения входящих в эту формулу величин, легко убедиться, что

$$\tilde{S}_1 = I^2 Z_i. \quad (13-84)$$

Вещественная часть этого комплекса выражает мощность тепловых потерь на единицу длины провода, а мнимая часть — скорость изменения по времени энергии, запасаемой во внутреннем магнитном поле проводника.

Пример. Медный провод диаметром $2r_0 = 3$ мм.
 $\mu_a = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ гн/м; $\gamma = 5,6 \cdot 10^7$ 1/ом·м; угловая частота $\omega = 57 \cdot 10^3$ 1/сек; сопротивление постоянному току $R_0 = 2,54 \times 10^{-3}$ ом/м.

$$p = \sqrt{j 57 \cdot 10^3 \cdot 5,6 \cdot 10^7 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} \approx \\ \approx 2000 \sqrt{j}; \quad pr_0 = 3 \sqrt{j}.$$

По таблице приложения П-13

$$I_0(pr_0) = 1,9502 \angle 96,52^\circ; \quad I_1(pr_0) = 1,8 \angle 105,71^\circ.$$

Внутреннее сопротивление по (13-78)

$$Z_{\text{вн}} = \frac{2000 \angle 45^\circ \cdot 1,9502 \angle 96,52^\circ}{5,6 \cdot 10^7 \cdot 2\pi \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 1,8 \angle 105,71^\circ} \approx \\ \approx (3,35 + j2,42) \cdot 10^{-3} \text{ ом/м.}$$

Активное сопротивление увеличилось вследствие поверхностного эффекта в $3,35/2,54 = 1,32$ раза.

Эквивалентная глубина проникновения поля равна по (13-80) $u = 0,76 \cdot 10^{-3}$ м.

13-13. ПРОВОДЯЩАЯ СРЕДА, ТЕКУЩАЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ. ПОНЯТИЕ О МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ВОЛНАХ АЛЬФВЕНА

Этот вопрос представляет интерес в связи с расчетами электромагнитных насосов, магнитогиродинамических генераторов, а также для электрометаллургии, космических исследований и пр.

Расположим декартовы прямоугольные координаты, как показано на рис. 13-17.

В постоянном магнитном поле $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{k}$ движется со средней скоростью $\mathbf{v} = v_0 \mathbf{i}$ жидкая или газообразная ионизированная среда (плазма) с параметрами γ , $\epsilon_a = \epsilon_0 \epsilon$ и $\mu_a = \mu_0 \mu$.

В этой среде могут возникать и распространяться различные виды колебаний и волн по разнообразным причинам, в частности вследствие случайных электромагнитных возмущений. Углубленный анализ этих волн не входит в рамки настоящей книги и является предметом специальных руководств по теоретической физике и магнитогидродинамике.

Ограничимся лишь приближенным описанием одного вида колебаний, получившего название волн Альфвена по имени шведского астрофизика, предсказавшего их существование.

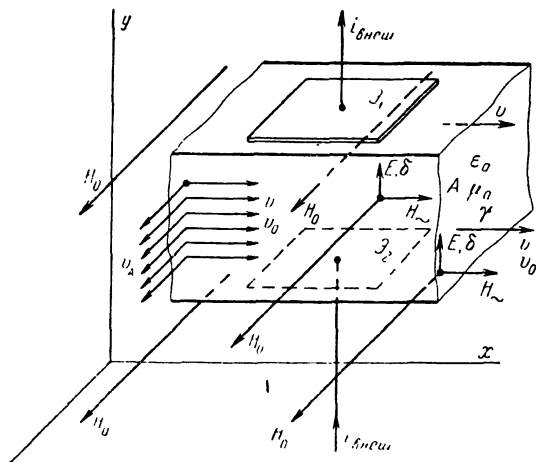


Рис. 13-17. К объяснению волн Альфвена.

Поскольку среда не является твердым телом, скорость движения отдельных ее частиц \mathbf{v} непостоянна и в общем случае является функцией координат и времени. Простоты ради предположим, что размеры канала A , в котором движется среда, очень велики в направлениях координат x и y (т. е. в плоскости чертежа), так что производные скорости \mathbf{v} и величин электромагнитного поля по координатам x и y можно положить равными нулю.

Таким образом, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(z, t)$. Вследствие движения среды в магнитном поле \mathbf{H}_0 возникает индуктированное электрическое поле $\mathbf{E}_{\text{инд}}$. Интеграл величины последнего по произвольному пути между электродами Z_1 и Z_2 выразит э. д. с. машины (если внешняя цепь разомкнута). Допустим для общности, что внешняя цепь замкнута и в ней протекает ток $i_{\text{внеш}}$. Тогда в каждой точке движущейся среды будет наблюдаться ток проводимости с плотностью $\bar{\mathbf{j}} = \gamma \bar{\mathbf{E}}$.

При наличии токов проводимости в рассматриваемой среде будет наблюдаться, помимо \mathbf{H}_0 , еще и продольная составляющая магнитного поля $\mathbf{H}_{\sim} = H_{\sim} \mathbf{i}$.

Предположим, что система координат $x y z$ в среднем неподвижна относительно среды, т. е. сама находится в движении со скоростью v_0 . Пусть величина v будет представлять собой относительную скорость движения среды, т. е. отклонение от скорости v_0 .

Каждая из величин электромагнитного поля имеет два слагаемых — одно, определяемое средней скоростью v_0 , а другое — относительной скоростью v . Вторые слагаемые обозначаем индексом \sim

$$\mathbf{E} = (E_0 + E_{\sim}) \mathbf{j}. \quad (13-85)$$

Оба слагаемых вектора \mathbf{E} совпадают по направлению. Так же направлены и слагаемые вектора плотности тока

$$\bar{\delta} = \gamma (E_0 + E_{\sim}) \mathbf{j} = (\delta_0 + \delta_{\sim}) \mathbf{j}. \quad (13-86)$$

Слагаемые же вектора \mathbf{H} имеют разные направления

$$\mathbf{H} = H_0 \mathbf{k} + H_{\sim} \mathbf{i}. \quad (13-87)$$

Уравнения электромагнитного поля в системе $x y z$ можно записать по образцу уравнений Максвелла для движущейся среды (12-31) и (12-32). В данной задаче $v \ll c$ и релятивистские коэффициенты практически равны единице. Примем вытекающие из показанного на рис. 13-17 расположения координат выражения роторов \mathbf{E} и \mathbf{H} . Добавим, наконец, к первому уравнению Максвелла член, содержащий плотность тока проводимости.

Поскольку $\mathbf{H}_0 = \text{const}$, то

$$[\nabla \mathbf{H}] = [\nabla (H_{\sim} \mathbf{i})] = \frac{\partial H_{\sim}}{\partial z} \mathbf{j}; \quad (13-88)$$

$$[\nabla E_{\sim}] = - \frac{\partial E_{\sim}}{\partial z} \mathbf{i}. \quad (13-89)$$

По выполнению подстановок получим:

$$\frac{\partial H_{\sim}}{\partial z} = \epsilon_a \frac{\partial}{\partial t} (E_{\sim} - v k_f \mu_a H_0) + \gamma (E_{\sim} - \mu_a v H_0); \quad (13-90)$$

$$\frac{\partial E_{\sim}}{\partial z} = \mu_a \frac{\partial H_{\sim}}{\partial t}. \quad (13-91)$$

Кроме того, составим приближенное уравнение динамического баланса сил, действующих на малый элемент объема среды и отнесенных к единице объема,

$$\rho_{ж} \mathbf{a} = [\bar{\delta}_{\sim} \mathbf{B}_{\sim}] = \gamma \mu_a [(E_{\sim} + \mu_a [\mathbf{v} H_0]) H_0], \quad (13-92)$$

где $\mathbf{a} = \partial \mathbf{v} / \partial t$ — ускорение движения данного элемента;

$\rho_{ж}$ — объемная плотность среды, $\text{дж} \cdot \text{сек}^2 / \text{м}^5$.

Составляющая H_{\sim} учащая в ускорении движения элемента вдоль направления x не принимает.

Подставив в (13-92) значения векторных величин и сократив единичные векторы, получим:

$$\rho_{ж} \frac{\partial v}{\partial t} = \gamma \mu_a H_0 (E_{\sim} - \mu_a v H_0)^* \quad (13-93)$$

Предположим, что происходящее в текущей среде электромагнитное возмущение характеризуется синусоидальным характером изменения величин поля и скорости v во времени с угловой частотой ω . Тогда (13-90), (13-91) и (13-93) можно выписать в комплексной форме, после чего эта система уравнений решается без затруднений, если положить, что среда несжимаема, т. е. ее объемная плотность $\rho_{ж}$ приблизительно постоянна,

$$\frac{d\dot{H}_{\sim}}{dz} = j\omega \epsilon_a (\dot{E}_{\sim} - \mu_a k_f \dot{v} H_0) + \gamma (\dot{E}_{\sim} - \mu_a \dot{v} H_0); \quad (13-94)$$

$$\frac{d\dot{E}_{\sim}}{dz} = j\omega \mu_a \dot{H}_{\sim}; \quad (13-95)$$

$$j\omega \rho_{ж} \dot{v} = \gamma \mu_a H_0 (\dot{E}_{\sim} - \mu_a \dot{v} H_0). \quad (13-96)$$

Дифференцируем (13-95) по z и подставим в результат (13-94), а также значение скорости из (13-96). Получим:

$$(A_1 + jA_2) \frac{d^2 \dot{E}_{\sim}}{dz^2} + (A_3 + jA_4) \dot{E}_{\sim} = 0, \quad (13-97)$$

где

$$A_1 = \gamma \mu_a^2 H_0^2, \quad (13-98)$$

$$A_2 = \omega \rho_{ж}; \quad (13-99)$$

$$A_3 = \omega^2 \mu_a \gamma \{ \rho_{ж} + (1 - k_f) \epsilon_a \mu_a^2 H_0^2 \}; \quad (13-100)$$

$$A_4 = \omega^3 \epsilon_a \mu_a \rho_{ж}. \quad (13-101)$$

Уравнение (13-97) является волновым уравнением в комплексной форме. Его общее решение можно записать в виде

$$\dot{E}_{\sim} = E_{\sim} e^{j(\beta_A + j\alpha_A)z} = E_{\sim} e^{-\alpha_A z} e^{j\beta_A z}, \quad (13-102)$$

где

$$(\beta_A + j\alpha_A)^2 = \frac{A_3 + jA_4}{A_1 + jA_2}.$$

* Более строгий вывод (13-90)—(13-93) приведен в книге Э. А. Мееровича [Л. 40].

Разделяя вещественные и мнимые слагаемые, получаем:

$$\alpha_A = \sqrt{\frac{1}{2} \left(-\frac{A_1 A_3 + A_2 A_4}{A_1^2 + A_2^2} + \sqrt{\frac{A_3^2 + A_4^2}{A_1^2 + A_2^2}} \right)}; \quad (13-103)$$

$$\beta_A = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{A_1 A_3 + A_2 A_4}{A_1^2 + A_2^2} + \sqrt{\frac{A_3^2 + A_4^2}{A_1^2 + A_2^2}} \right)}. \quad (13-104)$$

Полученные уравнения описывают поперечную (т. е. распространяющуюся вдоль оси z , перпендикулярно направлению движения среды) волну. Величина α_A является коэффициентом затухания, а β_A — коэффициентом фазы. Скорость ее распространения равна:

$$v_A = \frac{\omega}{\beta_A}. \quad (13-105)$$

Такого рода волну называют волной Альфвена.

Подставив полученное решение (13-102) во второе уравнение Максвелла (13-95), легко установить, что и составляющая напряженности магнитного поля \dot{H}_z изменяется в поперечном направлении z также по закону затухающей волны

$$\dot{H}_z = H_z e^{-\alpha_A z} e^{j\beta_A z}. \quad (13-106)$$

Характеристическое сопротивление среды для волн Альфвена оказывается равным:

$$\begin{aligned} Z_c(A) &= \frac{\dot{E}_z}{\dot{H}_z} = \omega \mu_a \frac{\beta_A - j\alpha_A}{\beta_A^2 + \alpha_A^2} = \\ &= \frac{\omega \mu_a}{\sqrt{\beta_A^2 + \alpha_A^2}} \left| -\operatorname{arctg} \frac{\alpha_A}{\beta_A} \right|. \end{aligned} \quad (13-107)$$

Скорость основного движения среды v (в направлении оси x) оказывается в свою очередь изменяющейся в поперечном направлении z по закономерности волны Альфвена; действительно, величина v может быть определена из (13-96), (13-98) и (13-99) в следующей форме:

$$\dot{v} = \frac{\dot{E}_z}{\mu_a H_0} \frac{A_1}{A_1 + jA_2}. \quad (13-108)$$

Подставим общее решение для \dot{E}_z из уравнения (13-102)

$$\dot{v} = \dot{E}_z \frac{A_1}{\mu_a H_0 \sqrt{A_1^2 + A_2^2}} e^{-\alpha_A z} e^{j \left(\beta_A z - \operatorname{arctg} \frac{A_2}{A_1} \right)}. \quad (13-109)$$

Итак, явление волн Альфвена заключается в возникновении в жидкой или газообразной ионизированной среде, движущейся во внешнем магнитном поле, поперечных волнообразных изменений напряженностей электрического и магнитного поля и скорости продольного движения частиц среды. Эти изменения распространяются в поперечном направлении со скоростью, зависящей от свойств среды γ , ϵ_a , μ_a и от величины внешнего магнитного поля H_0 .

Обратимся к частному случаю, когда удельная проводимость среды γ достаточно высока и объемная плотность среды не очень мала, так что соблюдаются неравенства

$$(1 - k_f) \epsilon_a \ll \frac{\rho_{ж}}{\mu_a^2 H_0^2} \ll \frac{\gamma}{\omega}. \quad (13-110)$$

Теперь $A_2 \ll A_1$ и $A_4 \ll A_3$; кроме того, можно пренебречь вторым слагаемым в квадратных скобках выражения для A_3 (13-100).

Уравнение (13-97) обратится в волновое уравнение для незатухающего процесса

$$\frac{d^2 \dot{E}_z}{dz^2} + \beta'_A{}^2 \dot{E}_z = 0, \quad (13-111)$$

где

$$\beta'_A = \frac{\omega}{H_0} \sqrt{\frac{\rho_{ж}}{\mu_a}} - \text{коэффициент фазы}. \quad (13-112)$$

Скорость распространения и характеристическое сопротивление среды для незатухающих волн Альфвена равны:

$$v'_A = \frac{\omega}{\beta'_A} = H_0 \sqrt{\frac{\mu_a}{\rho_{ж}}}; \quad (13-113)$$

$$Z'_{c(A)} = \frac{\omega \mu_a}{\beta'_A} = \mu_a H_0 \sqrt{\frac{\mu_a}{\rho_{ж}}}. \quad (13-114)$$

В (13-96) левая часть будет мала по сравнению с коэффициентом перед скобкой в правой части. Поэтому приближенное значение относительной скорости продольного движения частиц среды v будет обратно пропорциональным напряженности внешнего магнитного поля H_0 . Незатухающие колебания происходят, конечно, при условии, что тепловые потери непрерывно компенсируются за счет притока энергии из внешнего поля H_0 .

Изложенное описание волн Альфвена носит лишь ознакомительный характер, так как оно базируется на грубо приближенном уравнении (13-92) вместо базисного в гидродинамике уравнения Навье — Стокса. Не учтены вязкость среды и термодинамические зависимости между давлением, плотностью и температурой среды*.

* Глубокое изложение проблемы см. в книгах Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [Л. 34], Д. Данжи [Л. 18] и др.

ПОНЯТИЕ ОБ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ИЗЛУЧЕНИИ

14-1. ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Для исследования переменного электромагнитного поля становится непригодной функция скалярного потенциала электрического поля, градиент которой, взятый с обратным знаком, равен напряженности электрического поля. Ротор градиента всегда равен нулю. В переменном же электромагнитном поле ротор напряженности электрического поля равен согласно второму уравнению Максвелла не нулю, а взятой со знаком минус скорости изменения магнитной индукции по времени $-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$.

Поэтому взамен «статического» скалярного электрического потенциала ввели новую функцию скалярного электродинамического потенциала.

Представим второе уравнение Максвелла в следующей форме:

$$[\nabla \mathbf{E}] = -\frac{\partial}{\partial t} [\nabla \mathbf{A}],$$

откуда

$$\left[\nabla \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \right] = 0. \quad (14-1)$$

Ротор векторной величины $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ равен нулю; ее можно представить как взятый с отрицательным знаком градиент скалярной величины φ_{∂} , называемой электродинамическим скалярным потенциалом,

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi_{\partial}. \quad (14-2)$$

Если поле не меняется по времени, то $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0$; тогда электродинамический скалярный потенциал обращается в статический, определяемый уравнением $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$.

Написав уравнение (14-2) в виде $\mathbf{E} = -\nabla \varphi_{\partial} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, от-

метим, что член $-\nabla\varphi_{\partial}$ выражает составляющую напряженности электрического поля, определяемую мгновенным расположением зарядов, а член $-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$ — составляющую, индуктированную измеряющимся по времени магнитным потоком.

Действительно, проинтегрировав обе части этого уравнения по замкнутой кривой, в левой части получим э. д. с. $\mathcal{E} = \oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l}$; циркуляция вектора безвихревого поля

$$\oint_l \nabla\varphi_{\partial} d\mathbf{l} \text{ равна нулю; интеграл же } - \oint_l \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} d\mathbf{l} \text{ равен}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \oint_l \mathbf{A} d\mathbf{l} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}.$$

Функцию магнитного векторного потенциала \mathbf{A} в отличие от зависимости (6-11), принятой для стационарного магнитного поля, для переменного электромагнитного поля выбирают с поправкой, связывая величины \mathbf{A} и φ_{∂} соотношением, называемым уравнением Лоренца

$$\nabla\mathbf{A} = -\varepsilon_a\mu_a \frac{\partial\varphi_{\partial}}{\partial t}. \quad (14-3)$$

Новый выбор функции \mathbf{A} не противоречит прежнему. При отсутствии изменений во времени (14-3) совпадает с (6-11).

14-2. УРАВНЕНИЯ Д'АЛАМБЕРА

Беря дивергенцию от обеих частей (14-2), подставляя туда (14-3) и пользуясь (3-15), приходим к уравнению

$$\nabla^2\varphi_{\partial} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a} + \varepsilon_a\mu_a \frac{\partial^2\varphi_{\partial}}{\partial t^2}. \quad (14-4)$$

Можно вывести уравнение векторного потенциала, однотипное с (14-4).

Для этого подставим (14-2) в первое уравнение Максвелла и заменим $\gamma\mathbf{E} = \bar{\delta}$ (плотность тока проводимости) и $[\nabla\mathbf{H}] = \frac{1}{\mu_a} [\nabla\mathbf{B}] = \frac{1}{\mu_a} [\nabla[\nabla\mathbf{A}]]$. Последнее выра-

жение развернем в соответствии с (2-26) и подставим в него (14-3); после несложных сокращений получим:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_a \bar{\delta} + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}. \quad (14-5)$$

Уравнения (14-4) и (14-5) называются уравнениями Д'Аламбера. Уравнения Пуассона и Лапласа и волновые уравнения являются их частными случаями.

14-3. ЗАПАЗДЫВАЮЩИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

В стационарном случае, когда величины поля не изменяются по времени, оба уравнения Д'Аламбера обращаются в уравнения Пуассона и Лапласа; их общие интегралы в случае объемного распределения зарядов и плотностей тока имели бы вид:

$$\varphi_{\partial} = \int_V \frac{\rho dV}{4\pi\varepsilon_a r} \quad \text{и} \quad \mathbf{A} = \int_V \frac{\mu_a \bar{\delta} dV}{4\pi r}, \quad (14-6)$$

сходный с (3-19) и (6-15).

В другом крайнем случае, когда электромагнитный процесс происходит в идеальном диэлектрике, не содержащем зарядов и проводимостей, уравнения Д'Аламбера принимают вид волновых уравнений типов (11-25) и (11-26). Их общие интегралы для случая прямой волны могут принять вид, сходный с (12-3),

$$\varphi_{\partial} = f_1 \left(t - \frac{r}{v} \right) \quad \text{и} \quad \mathbf{A} = \psi_1 \left(t - \frac{r}{v} \right) \mathbf{1}_A, \quad (14-7)$$

где r — расстояние;

$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}$ — скорость распространения электромагнитной волны.

В общем случае интегралы уравнений Д'Аламбера должны удовлетворять требованиям обоих предельных случаев. Например, если где-то появился новый заряд ρdV , то повсюду возникнут изменения электродинамических скалярных потенциалов; однако изменение потенциала в точке, находящейся на расстоянии r от места появления нового заряда, произойдет не сразу, а спустя некоторое время, равное r/v , требующееся для распро-

странения электромагнитного возмущения в данной материальной среде.

Аналогично изменение векторного потенциала в какой-либо точке поля вследствие изменения величины элемента тока $\bar{\delta} dV$ в другой точке поля, удаленной на расстояние r от первой точки, произойдет с опозданием, определяемым временем r/v , требующимся для распространения электромагнитного возмущения.

Электродинамические скалярный и векторный потенциалы запаздывают в своих изменениях по времени от причин, вызывающих эти изменения, потому что электромагнитные процессы распространяются с конечной скоростью $v = 1/\sqrt{\epsilon_a \mu_a}$, зависящей от свойств материальной среды. Их называют поэтому запаздывающими потенциалами. Математически явление запаздывания отражается в следующей записи общих интегралов уравнений Д'Аламбера:

$$\varphi_{\partial} = \int_V \frac{\rho \left(t - \frac{r}{v} \right)}{4\pi\epsilon_a r} dV; \quad (14-8)$$

$$\mathbf{A} = \int_V \frac{\mu_a \bar{\delta} \left(t - \frac{r}{v} \right)}{4\pi r} dV. \quad (14-9)$$

14-4. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЛИНИЕЙ

Электрические устройства, работающие в переменном во времени режиме, способны при определенных условиях излучать энергию.

При излучении энергии электрической линией вектор Пойнтинга должен быть направлен от проводов линии наружу. Это становится принципиально возможным, если вектор напряженности электрического поля (индуцированного вследствие изменения магнитного потока по времени) будет отставать по фазе от тока и магнитного потока более чем на четверть периода.

Пусть в линию, частью которой является отрезок проводника, показанный на рис. 14-1, включен генератор синусоидальной э. д. с. большой частоты. Линия имеет достаточную длину, так что заметно сказывается запаз-

дывание изменений электродинамических потенциалов и зависящей от них напряженности электрического поля, вызванных изменениями по времени тока в других отрезках проводов, удаленных от рассматриваемого отрезка. Результирующее индуктированное электрическое поле в данном отрезке будет поэтому отставать по фазе более чем на четверть периода от тока и магнитного поля в районе отрезка (отставание ровно на четверть пе-

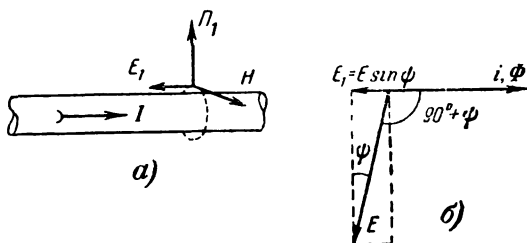


Рис. 14-1. К объяснению принципа излучения.

риода обуславливается при отсутствии запаздывания закономерностью $\mathcal{E} = \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$).

Появится составляющая поля $E_1 = E \sin \psi$, направленная против тока в данном отрезке проводника (отстающая от тока по фазе на 180°).

В результате ее взаимодействия с магнитным полем возникнет составляющая вектора Пойнтинга Π_1 , направленная от проводника наружу.

Если форма линии такова, что среднее за период значение интеграла $\int \Pi_1 ds$, взятого по некоторой окружающей линию поверхности, больше нуля, то будет иметь место излучение энергии в окружающую среду.

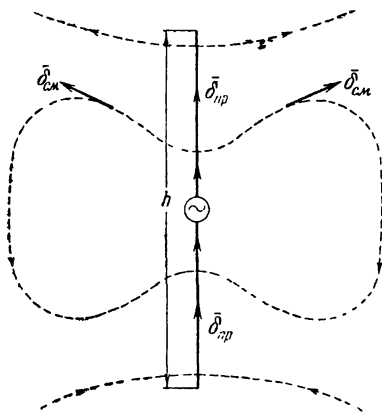


Рис. 14-2. Вибратор.

Излучение энергии обычными двухпроводными линиями при низких частотах незначительно, так как расстояние между проводами мало по сравнению с длиной волны, а токи в них сдвинуты по фазе на полпериода. Эффекты излучения проводов благодаря этому взаимно компенсируются практически в любой точке среды, более или менее удаленной от линии. Для увеличения излучения линиям придают особую форму, например см. рис. 14-2, изображающий так называемый электрический вибратор. Ток проводимости в проводниках вибратора замыкается токами смещения в окружающей среде. Действительное устройство излучающих систем (антенн) имеет ряд усложнений, вводимых как с целью увеличения излучения, так и для получения требуемого в ряде случаев направленного излучения.

14-5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ВИБРАТОРА

Исследуем электромагнитное поле в точке M , находящейся на расстоянии r от вибратора, несущего ток $i = I_m \sin \omega t$. Это расстояние значительно больше длины

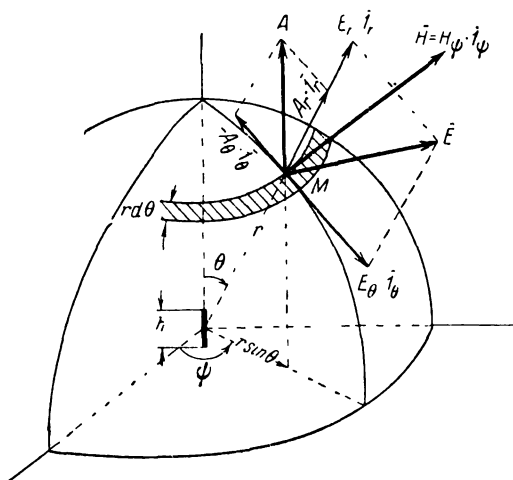


Рис. 14-3. Электромагнитное поле вибратора.

вибратора, $r \gg h$ (рис. 14-3). Поместим центр сферических координат в середину вибратора. Координаты точки M будут r, θ, ϕ . На рис. 14-3 показаны векторы \mathbf{A}, \mathbf{E}

и \mathbf{H} в точке M и их составляющие по координатным направлениям.

Мгновенное значение запаздывающего векторного потенциала \mathbf{A} находится по (14-9).

Вибратор сделан из тонкого проводника; поэтому объемный элемент тока $\frac{\bar{\delta}}{\left(t - \frac{r}{v}\right)} dV$ можно заменить линейным

$$i \frac{dh}{\left(t - \frac{r}{v}\right)} = I_m \sin \omega \left(t - \frac{r}{v}\right) dh \cdot \mathbf{1}_A,$$

где v — скорость распространения электромагнитных волн в данной среде. Будем считать ее идеальным диэлектриком ($\epsilon_a = \epsilon_0$; $\mu_a = \mu_0$; $\gamma = 0$; $v = c = 3 \cdot 10^8$ м/сек). $\mathbf{1}_A$ — единичный вектор, направленный вдоль вибратора.

Заменим

$$\frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{Tv} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (14-10)$$

где λ — длина волны, а T — период колебаний.

Комплексная амплитуда элемента тока получит форму

$$i e^{-j \frac{2\pi r}{\lambda}} dh.$$

Интеграл (14-9) обращается из объемного в линейный

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{1}{r} e^{-j \frac{2\pi r}{\lambda}} dh \cdot \mathbf{1}_A.$$

Если $r \gg h$, то расстояние r от точки M до любой точки на вибраторе практически постоянно, т. е. не зависит от h . Интеграл легко вычисляется.

Разложим единичный вектор по координатным направлениям

$$\mathbf{1}_A = \cos \theta \cdot \mathbf{1}_r - \sin \theta \cdot \mathbf{1}_\theta.$$

Тогда

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{\mu_0 I h}{4\pi r} e^{-j \frac{2\pi r}{\lambda}} (\cos \theta \cdot \mathbf{1}_r - \sin \theta \cdot \mathbf{1}_\theta). \quad (14-11)$$

Величина Ih называется электрическим моментом диполя.

Комплексная амплитуда напряженности магнитного поля найдется из соотношения

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_0} [\nabla \dot{\mathbf{A}}].$$

Вычислив ротор в сферических координатах, имея в виду, что производные по параллели $\partial/\partial\psi$ в силу симметрии равны нулю, находим, что вектор $\dot{\mathbf{H}}$ целиком направлен по параллели и равен:

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{Ih \sin \theta}{4\pi r^2} \left(1 + j \frac{2\pi r}{\lambda}\right) e^{-j \frac{2\pi r}{\lambda}} \cdot \mathbf{1}_\psi. \quad (14-12)$$

Комплексная амплитуда напряженности электрического поля $\dot{\mathbf{E}}$ найдется из первого уравнения Максвелла для идеального диэлектрика в комплексной форме (11-7)

$$\dot{\mathbf{E}} = -j \frac{1}{\omega \epsilon_0} [\nabla \dot{\mathbf{H}}]. \quad (14-13)$$

Вектор $\dot{\mathbf{E}}$ имеет две составляющие — радиальную \dot{E}_r и меридианную \dot{E}_θ . Их значения приведены в следующем параграфе.

14-6. БЛИЖНЯЯ И ДАЛЬНЯЯ ЗОНЫ

Ближней зоной называют ближайшую к вибратору область пространства, для которой отношение $2\pi r/\lambda$ значительно меньше единицы. (Однако простоты ради оставим в силе условие малости размеров самого вибратора, $h \ll r$.) Для ближней зоны можно пренебречь мнимой частью выражения, стоящего в скобках в (14-12), и положить множитель $e^{-j \frac{2\pi r}{\lambda}}$ равным единице

$$\dot{\mathbf{H}}_{\text{ближ}} \approx \frac{Ih \sin \theta}{4\pi r^2} \cdot \mathbf{1}_\psi. \quad (14-14)$$

Это выражение совпадает с (6-7), выражающим закон Био — Савара.

Напряженность электрического поля в ближней зоне определится после подстановки значения \dot{N} из (14-14) в (14-13)

$$\dot{E}_{\text{ближ}} \approx -j \frac{Ih}{4\pi\omega\epsilon_0 r^2} (2 \cos \theta \cdot 1_r + \sin \theta \cdot 1_\theta). \quad (14-15)$$

При замене выражения заряда $-j \frac{I}{\omega}$ буквой Q и обозначения размера h на $2h$ уравнение (14-15) сводится к уравнению напряженности электрического поля диполя, расположенного в идеальном диэлектрике [$\epsilon_a = \epsilon_0$, ср. (4-23)].

Явление запаздывания распространения электромагнитного возмущения в ближней зоне не играет роли вследствие малости расстояний.

Вектор Пойнтинга в ближней зоне $\mathbf{P}_{\text{ближ}}$ имеет две составляющие — радиальную и меридианную. Обе они реактивны, поскольку $E_{\text{ближ}}$ и $H_{\text{ближ}}$ сдвинуты по фазе на четверть периода. На это указывает множитель $-j$ в (14-15). В ближней зоне происходят преимущественно местные перемещения энергии, связанные с периодическими преобразованиями электрической энергии в магнитную и обратно. Составляющие поля, выражаемые (14-14) и (14-15), называются индукционными. Они не определяют излучения, т. е. непрерывного переноса энергии от вибратора во внешнее пространство, если оно заполнено идеальным диэлектриком. Однако если вблизи вибратора находятся проводники, то в них будут индуцироваться токи, энергия на поддержание которых будет доставляться именно индукционными составляющими поля. В этом случае вектор Пойнтинга $\mathbf{P}_{\text{ближ}}$ будет содержать активную составляющую и сдвиг фаз между $E_{\text{ближ}}$ и $H_{\text{ближ}}$ будет меньше четверти периода.

Так происходит передача энергии электромагнитным путем из ротора в статор электрической машины — генератора или обратно в электродвигателе, в трансформаторе и других электрических аппаратах и приборах.

Однако помимо индукционных составляющих поля существуют и составляющие излучения, обеспечивающие непрерывный перенос энергии от вибратора в окружающее пространство. Составляющие излучения определяются пренебрегавшимися в ближней зоне членами уравнений для напряженностей электрического и магнитного

поля. Составляющие излучения в ближней зоне очень малы по сравнению с индукционными составляющими, особенно при низких частотах. Поэтому, например, в расчетах электрических машин и энергетических (силовых) трансформаторов составляющими излучения пренебрегают.

По мере удаления от источника электромагнитных колебаний — вибратора положение изменяется.

Из (14-14) и (14-15) легко вывести, что индукционная составляющая вектора Пойнтинга очень быстро убывает обратно пропорционально пятой степени расстояния (r^5), и на известном расстоянии, в так называемой дальней зоне, становится пренебрежимо малой по сравнению с составляющей излучения, которая хотя и имела сравнительно малую величину в ближней зоне, но убывает с расстоянием более медленно.

Назовем дальней зоной области пространства, в которых расстояние от вибратора существенно превышает длину волны ($r \gg \lambda$). Для этой зоны можно в (14-12) пренебречь единицей по сравнению с $2\pi r/\lambda$, так что

$$\dot{H}_{\text{дальн}} = j \frac{ih \sin \theta}{2\lambda r} e^{-j \frac{2\pi r}{\lambda}} \cdot \mathbf{1}_{\phi} = H_{\text{фдальн}} \cdot \mathbf{1}_{\phi}. \quad (14-16)$$

Напряженность электрического поля в дальней зоне после подстановки ротора выражения (14-16) в (14-13) окажется равной:

$$\dot{E}_{\text{дальн}} = \frac{ih}{\omega \epsilon_0 \lambda r} e^{-j \frac{2\pi r}{\lambda}} \left(\frac{\cos \theta}{r} \cdot \mathbf{1}_r + j \frac{\pi}{\lambda} \sin \theta \cdot \mathbf{1}_{\theta} \right).$$

Первым членом в скобках при не очень малых значениях угла θ можно пренебречь. Следовательно, напряженность электрического поля в дальней зоне имеет практически только одну меридианную составляющую

$$\dot{E}_{\theta \text{ дальн}} = j \frac{\pi ih \sin \theta}{\omega \epsilon_0 \lambda^2 r} e^{-j \frac{2\pi r}{\lambda}} \cdot \mathbf{1}_{\theta}. \quad (14-17)$$

В дальней зоне E_{θ} и H_{ϕ} совпадают по фазе. Действительно, отношение их комплексов

$$\frac{\dot{E}_{\theta \text{ дальн}}}{\dot{H}_{\phi \text{ дальн}}} = \frac{2\pi}{\omega \epsilon_0 \lambda} = \frac{1}{\epsilon_0 c} = \frac{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{\epsilon_0} = z_{c0} = 377 \text{ ом} \quad (14-18)$$

вещественно и равно характеристическому сопротивлению идеального диэлектрика.

Вектор Пойнтинга в дальней зоне имеет радиальное направление. Перейдем от комплексов к мгновенным значениям величин. Тогда

$$\begin{aligned} P_r &= (E_{\text{дальн}} H_{\text{дальн}}) = \\ &= \frac{I_m^2 h^2 z_{c0}}{4\lambda^2 r^2} \sin^2 \theta \cos^2 \left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} \right). \end{aligned} \quad (14-19)$$

Среднее значение квадрата косинуса равно половине. Таким образом, среднее значение мощности, излучаемой с единицы шаровой поверхности в дальней зоне, составляет:

$$P_{rcp} = \frac{I_m^2 h^2 z_{c0}}{8\lambda^2 r^2} \sin^2 \theta. \quad (14-20)$$

Составляющая излучения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния.

Ниже приведены значения индукционной составляющей и составляющей излучения вектора Пойнтинга (в условных единицах) в ближней и дальней зонах при отношении расстояний 1 : 100

	Ближняя зона	Дальняя зона
Индукционная составляющая	10^{11}	10
Составляющая излучения	10^8	10^4
Отношение составляющих	1 000:1	1:1 000

14-7. СОПРОТИВЛЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ

Полная мощность, излучаемая вибратором, $P_{\text{изл}}$ может быть определена как произведение квадрата действующего значения тока $I_{\text{д}}^2 = \frac{1}{2} I_m^2$ на так называемое сопротивление излучения R_{Σ} .

С другой стороны, $P_{\text{изл}}$ можно подсчитать как поток вектора \mathbf{P}_{rcp} по шаровой поверхности радиусом r . Часть элемента поверхности $ds = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta$ на рис. 14-3 заштрихована

$$P_{\text{изл}} = \oint_s \mathbf{P}_{rcp} ds = \frac{I_m^2 h^2 z_{c0} \pi}{4\lambda^2} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta.$$

Интеграл равен $4/3$. Подставив значение $z_{c_0} = 120\pi$ ом и разделив величину $P_{\text{изл}}$ на $\frac{1}{2} I_m^2$ найдем, что сопротивление излучения равно:

$$R_z = 80\pi^2 \left(\frac{\hbar}{\lambda} \right)^2 [\text{ом}]. \quad (14-21)$$

Сопротивление излучения обратно пропорционально квадрату длины волны. Другими словами, излучение достаточного количества энергии при прочих равных условиях легче обеспечивается на коротких волнах, т. е. на высоких частотах.

14-8. ЕДИНЫЕ ВЕКТОРЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Можно ввести в расчеты единую векторную величину Γ , являющуюся функцией координат и времени, которая будет полностью описывать электрическую и магнитную стороны волнового процесса.

Возможны два варианта вектора, называемые соответственно электрическим вектором Герца Γ или же магнитным вектором Герца Γ^* .

Выбор того или иного варианта определяется способом возбуждения электромагнитных волн — от электрического диполя (или системы диполей) или же от так называемого магнитного диполя, представляющего собой виток, по которому циркулирует ток высокой частоты.

Электрический вектор Герца определяют так:

$$\Gamma = c^2 \int \mathbf{A} dt, \quad (14-22)$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/сек — скорость света.

Все другие величины, характеризующие электромагнитный процесс, определяются вектором Γ .

Действительно

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Gamma}{\partial t}; \quad (14-23)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \left[\nabla \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right]. \quad (14-24)$$

В идеальном диэлектрике [по (14-3)]

$$-\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi_{\partial}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi_{\partial}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Gamma).$$

Полагая постоянную интегрирования равной нулю, получаем:

$$\varphi_{\partial} = -\nabla\Gamma; \quad (14-25)$$

$$E = -\nabla\varphi_{\partial} - \frac{\partial A}{\partial t} = \nabla(\nabla\Gamma) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2}. \quad (14-26)$$

Вектор Γ подчиняется волновому уравнению. Это вытекает из первого уравнения Максвелла для случая идеального диэлектрика, если в него подставить (14-24) и вынести символ дифференцирования по времени за символ ротора,

$$\frac{1}{\mu_0 c^2} \frac{\partial}{\partial t} [\nabla [\nabla\Gamma]] = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Заметив, что в случае идеального диэлектрика $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$, после интегрирования получим:

$$[\nabla [\nabla\Gamma]] = E + \text{const.} \quad (14-27)$$

Это уравнение должно сохранять силу для любой точки пространства и для любого момента времени, включая и периоды времени, пока электромагнитная волна еще не достигла рассматриваемой точки. При $\Gamma=0$, должно быть $E=0$; следовательно, постоянная интегрирования равна нулю.

Применяя (2-26) к (14-27) и подставляя последнее в (14-26), получаем:

$$\nabla^2 \Gamma = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2}. \quad (14-28)$$

Решение будет однотипным с решением волнового уравнения для электрической составляющей поля (12-3).

Источником электрического вектора Герца Γ могут быть и связанные заряды поляризации диэлектрика. Поэтому вектор Γ иногда называют поляризационным потенциалом.

Разность вектора Γ — вольт×метр.

Магнитный вектор Герца Γ^* можно определить исходя из так называемого принципа двойственности, вытекающего из симметрии уравнений Максвелла для идеального диэлектрика по отношению к электрическим и магнитным компонентам поля,

$$[\nabla H] = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

и

$$[\nabla E] = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Одно уравнение получается из другого при замене H на E и ϵ_0 на $-\mu_0$ и наоборот.

Аналогично зависимости $[\nabla A] = \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ можно ввести в расчеты электрический векторный потенциал A_0 , определяемый уравнением

$$[\nabla A_0] = -\epsilon_0 E.$$

Тогда формулы, связывающие величины поля с магнитным векторным потенциалом Γ^* , можно выписать по аналогии с (14-22) — (14-24) и (14-26):

$$\Gamma^* = -c^2 \int A_0 dt; \quad (14-29)$$

$$A_0 = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Gamma^*}{\partial t}; \quad (14-30)$$

$$\epsilon_0 E = \mathbf{D} = -\frac{1}{c^2} \left[\nabla \frac{\partial \Gamma^*}{\partial t} \right]; \quad (14-31)$$

$$\mathbf{H} = \nabla(\nabla \Gamma^*) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Gamma^*}{\partial t^2}. \quad (14-32)$$

Размерность вектора Γ^* — ампер×метр.

Можно доказать, что вектор Γ^* также подчиняется волновому уравнению, аналогичному (14-28).

Векторы Герца являются математическим выражением идеи физического единства электромагнитного поля.

С помощью векторов Герца удобно решаются некоторые сложные задачи распространения электромагнитных волн.

Глава пятнадцатая

НАПРАВЛЕННЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

15-1. ПЕРЕХОД ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ИЗ ОДНОЙ СРЕДЫ В ДРУГУЮ ПО НОРМАЛИ К ГРАНИЧНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В общем случае происходят частичное отражение волн и частичное прохождение их сквозь поверхность раздела сред. Пусть поверхность раздела перпендикулярна направлению распространения электромагнитной волны (рис. 15-1).

Допустим также, что обе среды простираются от поверхности раздела на очень большие расстояния; этим исключим осложнения из-за многократных отражений электромагнитных волн. Среды отличаются друг от друга волновыми (характеристическими) сопротивлениями Z_{c1} и Z_{c2} .

Обозначим напряженность электрического поля падающей волны через $\vec{E}_{\text{пад}}$, отраженной волны через $\vec{E}_{\text{отр}}$ и волны, проникшей сквозь поверхность раздела в другую среду, через $\vec{E}_{\text{пр}}$.

Аналогичные обозначения примем для векторов напряженности магнитного поля.

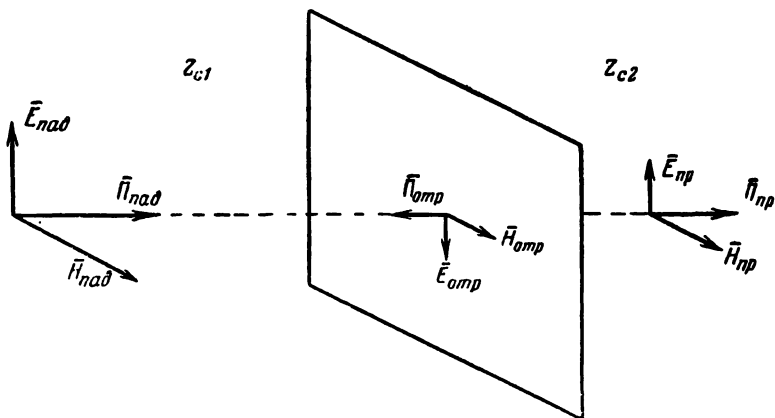


Рис. 15-1. Падающая, отраженная и проникающая через поверхность раздела электромагнитные волны.

Соотношения между значениями падающих, отраженных и проникающих через поверхность раздела величин выводятся из граничных условий для электрического и магнитного поля [по (3-31) и (6-29)]:

$$\dot{E}_{\text{пад}} + \dot{E}_{\text{отр}} = \dot{E}_{\text{пр}}; \quad (15-1)$$

$$\dot{H}_{\text{пад}} + \dot{H}_{\text{отр}} = \dot{H}_{\text{пр}}. \quad (15-2)$$

Выписываем также соотношения между электрическими и магнитными величинами (характеристические сопротивления):

$$\frac{\dot{E}_{\text{пад}}}{\dot{H}_{\text{пад}}} = Z_{c1}; \quad (15-3)$$

$$\frac{\dot{E}_{\text{пр}}}{\dot{H}_{\text{пр}}} = Z_{c2}; \quad (15-4)$$

$$\frac{\dot{E}_{\text{отр}}}{\dot{H}_{\text{отр}}} = -Z_{c1}. \quad (15-5)$$

Последнее соотношение было установлено в § 12-1.

Совместное решение написанных уравнений приводит к выражениям:

$$\dot{E}_{\text{тпр}} = \dot{E}_{\text{тпад}} \frac{2Z_{c2}}{Z_{c1} + Z_{c2}}; \quad (15-6)$$

$$\dot{E}_{\text{тотр}} = \dot{E}_{\text{тпад}} \frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c1} + Z_{c2}}; \quad (15-7)$$

$$\dot{H}_{\text{тпр}} = \dot{H}_{\text{тпад}} \frac{2Z_{c1}}{Z_{c1} + Z_{c2}}; \quad (15-8)$$

$$\dot{H}_{\text{тотр}} = \dot{H}_{\text{тпад}} \frac{Z_{c1} - Z_{c2}}{Z_{c1} + Z_{c2}}. \quad (15-9)$$

Эти выражения являются частными случаями так называемых формул Френеля.

На рис. 15-1 показаны векторы падающих, отраженных и проникших волн для случая $|Z_{c1}| > |Z_{c2}|$.

Отраженные волны отсутствуют, когда волновые сопротивления сред одинаковы (среды «согласованы»).

15-2. ОТРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ОТ ПОВЕРХНОСТИ ИДЕАЛЬНОГО ПРОВОДНИКА ПРИ ПАДЕНИИ ПО НОРМАЛИ

Электромагнитное поле не может существовать в идеальном проводнике с бесконечно большой удельной проводимостью. Уравнения (13-1) и (13-3) показывают, что при $\gamma = \infty$, $\alpha = \infty$ и $\lambda = 0$.

Существование токов любой конечной величины в идеальном проводнике возможно в отсутствие электрического поля ($E=0$). Вследствие поверхностного эффекта ток сосредоточен в бесконечно тонкой поверхностной пленке; внутри идеального проводника не существует ни токов, ни магнитного поля. Уравнения Максвелла подтверждают, что при $H=0$, $E=0$. Таким образом, в толще идеального проводника нет и электрической составляющей электромагнитного поля.

Энергия, приносимая электромагнитной волной в диэлектрике, падающей на поверхность идеального проводника, должна отражаться от поверхности. В дополнение к падающей должна появиться отраженная от поверхности проводника волна.

В этом физический смысл двух функций f_1 и f_2 , входящих в общие интегралы уравнений электромагнитного поля в диэлектрике (§ 12-1).

Характеристическое сопротивление идеального проводника равно нулю. Это видно из (13-4). Из формул § 15-1 следует, что (при $Z_{c2}=0$) $E_{t \text{ отр}} = -E_{t \text{ пад}}$; $H_{t \text{ отр}} = H_{t \text{ пад}}$. Положим, что функции f_1 и f_2 в (12-3) и (12-5)

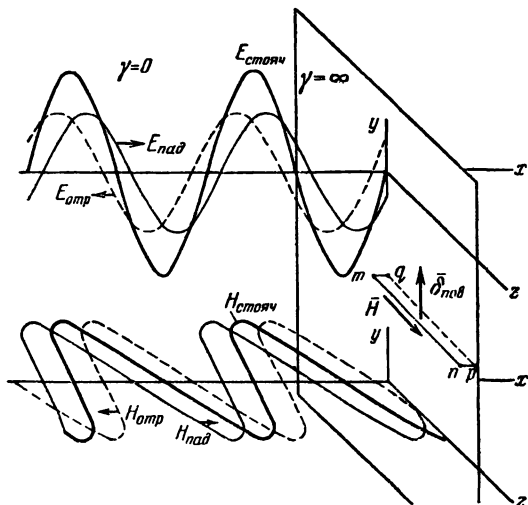


Рис. 15-2. Отражение электромагнитной волны от поверхности идеального проводника.

являются синусоидами

$$f_1 = E_m \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \text{ и } f_2 = E_m \sin \omega \left(t + \frac{x}{v} \right). \quad (15-10)$$

Заменяв $\frac{\omega}{v} = \beta$, легко вывести:

$$E = E_{\text{пад}} + E_{\text{отр}} = -2E_m \sin \beta x \cos \omega t \mathbf{j}; \quad (15-11)$$

$$H = H_{\text{пад}} + H_{\text{отр}} = 2 \frac{E_m}{Z_c} \cos \beta x \sin \omega t \mathbf{k} \quad (15-12)$$

(координата x отсчитывается от поверхности проводника).

Эти уравнения показывают, что результирующие волны являются стоячими (рис. 15-2). Магнитная и элект-

трическая составляющие стоячей волны не только перпендикулярны друг другу в пространстве, но и отличаются на четверть периода по фазе изменений по времени. Следовательно, вектор Пойнтинга $\mathbf{P} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]$ будет реактивным. Непрерывное поступательное движение энергии отсутствует; путь прегражден поверхностью идеального проводника. Энергия лишь периодически переходит из одного вида в другой, т. е. из энергии электрического поля в энергию магнитного поля и обратно.

Непосредственно над поверхностью сверхпроводника \mathbf{H} имеет конечную величину, а под поверхностью равна нулю; иначе говоря, на поверхности сверхпроводника происходит скачкообразное изменение напряженности магнитного поля.

Как сказано в § 6-9, магнитное поле в диэлектрике у поверхности идеального проводника ограничено поверхностным током; поверхностная плотность тока равна значению напряженности магнитного поля у поверхности (при $x=0$)

$$\bar{\delta}_{\text{пов}} = \frac{2E_m}{Z_c} \sin \omega t \mathbf{j}. \quad (15-13)$$

Направление вектора $\bar{\delta}_{\text{пов}}$ связывается с направлением вектора $\mathbf{H}_{\text{пов}}$ правилом штопора (см. контур $mnpqt$ на рис. 15-2).

15-3. ПРОЗРАЧНОСТЬ ПРОСЛОЕК

Пусть плоская электромагнитная волна проходит из среды с характеристическим сопротивлением Z_{c1} через прослойку толщиной d из материала с характеристическим сопротивлением Z_{c2} в среду с характеристическим сопротивлением Z_{c3} (рис. 15-3). Обе поверхности раздела сред $ab\gamma\alpha$ и $a_1b_1\theta_1\gamma_1\alpha_1$ перпендикулярны направлению распространения волны x . Вследствие отражений от поверхностей раздела в средах Z_{c1} и Z_{c2} будут существовать как падающие, так и отраженные волны. Среда Z_{c3} простирается в бесконечность, так что в ней отраженная волна отсутствует. На рис. 15-3 показаны векторы \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{P} результирующих волн. Обозначим величины падающих и отраженных составляющих напряженностей электрического и магнитного полей на граничной поверхности между средами Z_{c1} и Z_{c2} символами

$$\begin{aligned} & \dot{E}_{1\text{пад}}; \dot{E}_{1\text{отр}}; \dot{E}_{2\text{пад}}; \dot{E}_{2\text{отр}}; \\ \dot{H}_{1\text{пад}} &= \frac{\dot{E}_{1\text{пад}}}{Z_{c1}}; \dot{H}_{1\text{отр}} = -\frac{\dot{E}_{1\text{отр}}}{Z_{c1}}; \\ \dot{H}_{2\text{пад}} &= \frac{\dot{E}_{2\text{пад}}}{Z_{c2}}; \dot{H}_{2\text{отр}} = -\frac{\dot{E}_{2\text{отр}}}{Z_{c2}}. \end{aligned}$$

Пусть прослойка Z_{c2} является хорошим диэлектриком. Распространение волн происходит в ней без затухания. Величины поля на граничной поверхности между средами Z_{c2} и Z_{c3} станут такими:

$$\dot{E}'_{2\text{пад}} = \dot{E}_{2\text{пад}} \frac{1}{q}; \quad \dot{E}'_{2\text{отр}} = \dot{E}_{2\text{отр}} q;$$

$$\dot{E}_3 = \dot{E}_{3\text{пад}}; \quad \dot{E}_{3\text{отр}} = 0 \text{ (по условию);}$$

$$\dot{H}'_{2\text{пад}} = \frac{\dot{E}_{2\text{пад}}}{q Z_{c2}}; \quad \dot{H}'_{2\text{отр}} = -\frac{\dot{E}_{2\text{отр}} q}{Z_{c2}}; \quad \dot{H}_3 = \frac{\dot{E}_3}{Z_{c3}}.$$

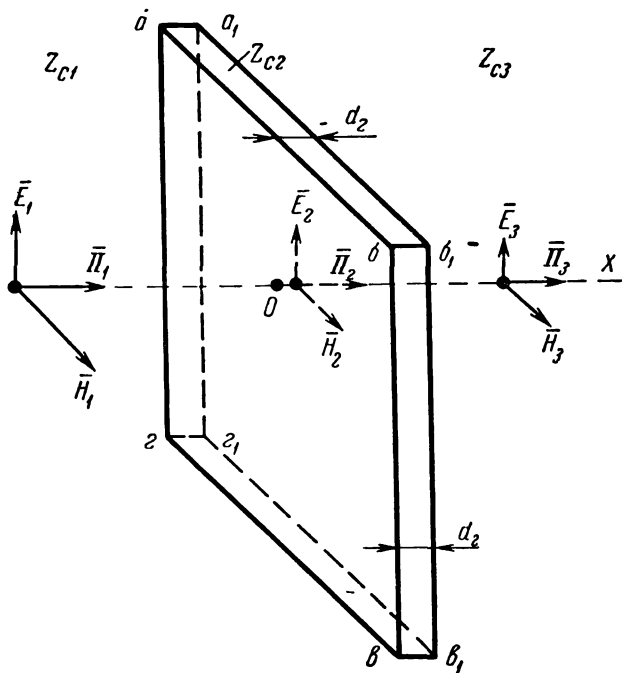


Рис. 15-3. Прохождение электромагнитной волны сквозь тонкую прослойку.

Буквой q обозначен множитель

$$q = e^{j\beta_2 d} = e^{j2\pi \frac{d}{\lambda_2}}, \quad (15-14)$$

в котором β_2 и λ_2 — соответственно коэффициент фазы и длина волны в среде Z_{c2} на данной частоте. На обеих граничных поверхностях должны соблюдаться условия непрерывности касательных составляющих результирующих напряженностей электрического и маг-

нитного полей. На этом основании составляется система уравнений:

$$\dot{E}_{1\text{пад}} + \dot{E}_{1\text{отр}} = \dot{E}_{2\text{пад}} + \dot{E}_{2\text{отр}}; \quad (15-15)$$

$$\frac{\dot{E}_{1\text{пад}}}{Z_{c1}} - \frac{\dot{E}_{1\text{отр}}}{Z_{c1}} = \frac{\dot{E}_{2\text{пад}}}{Z_{c2}} - \frac{\dot{E}_{2\text{отр}}}{Z_{c2}}; \quad (15-16)$$

$$\frac{\dot{E}_{2\text{пад}}}{q} + \dot{E}_{2\text{отр}}q = \dot{E}_3; \quad (15-17)$$

$$\frac{\dot{E}_{2\text{пад}}}{qZ_{c2}} - \frac{\dot{E}_{2\text{отр}}q}{Z_{c2}} = \frac{\dot{E}_3}{Z_{c3}}. \quad (15-18)$$

Из решения этой системы уравнений следует:

$$E_3 = \dot{E}_{1\text{пад}} \frac{4Z_{c2}Z_{c3}q}{(q^2 + 1)Z_{c2}(Z_{c1} + Z_{c3}) + (q^2 - 1)(Z_{c1}Z_{c3} + Z_{c2}^2)}; \quad (15-19)$$

$$\dot{E}_{1\text{отр}} = \dot{E}_{1\text{пад}} \frac{(q^2 + 1)Z_{c2}(Z_{c3} - Z_{c1}) - (q^2 - 1)(Z_{c1}Z_{c3} - Z_{c2}^2)}{(q^2 + 1)Z_{c2}(Z_{c1} + Z_{c3}) + (q^2 - 1)(Z_{c1}Z_{c3} + Z_{c2}^2)}. \quad (15-20)$$

Условие прозрачности прослойки находится из приравнения $E_{1\text{отр}}$ нулю. Остановимся на частных случаях.

1) Пусть

$$q^2 = e^{j2\beta_2 d} = -1,$$

т. е. $2\beta_2 d = m\pi$, или же

$$d = \frac{m\pi}{2\beta_2} = m \frac{\lambda}{4} \quad (m = 1, 3, 5 \dots). \quad (15-21)$$

По толщине прослойки укладывается целое нечетное число m четвертей длины волны.

Выражение (15-20) обратится в нуль при соотношении характеристических сопротивлений

$$Z_{c1}Z_{c3} = Z_{c2}^2. \quad (15-22)$$

При таком подборе величины Z_{c2} величины поля в среде Z_{c3} будут равны:

$$\dot{E}_3 = \dot{E}_{1\text{пад}} \left(-j \frac{Z_{c2}}{Z_{c1}} \right) = -j \dot{E}_{1\text{пад}} \frac{Z_{c3}}{Z_{c2}}; \quad (15-23)$$

$$\dot{H}_3 = -j \dot{H}_{1\text{пад}} \frac{Z_{c1}}{Z_{c2}} = -j \dot{H}_{1\text{пад}} \frac{Z_{c2}}{Z_{c3}}. \quad (15-24)$$

Легко заметить, что $\dot{E}_3 \dot{H}_3 = -\dot{E}_{1\text{пад}} \dot{H}_{1\text{пад}}$. Иначе говоря, прослойка толщиной в нечетное число четвертей длин волны работает аналогично трансформатору, если ее характеристическое сопротивление выбрано по (15-22).

Такие прослойки иногда называют согласующими прослойками. Их назначение — согласование характеристических сопротивлений — аналогично назначению четвертьволновых отрезков линий без потерь, применяемых в технике сверхвысоких частот для согласования сопротивлений.

Пусть $q^2 = +1$, т. е. $2\beta_2 d = 2n\pi$, или же

$$d = n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, 3, 4 \dots). \quad (15-25)$$

По толщине прослойки укладывается любое целое число полу-волн. Теперь $\dot{E}_{1\text{отр}}$ будет равно нулю при $Z_{c1} = Z_{c3}$

$$\dot{E}_3 = \pm \dot{E}_{1\text{пад}}. \quad (15-26)$$

Полуволновая прослойка прозрачна, но свойствами «трансформатора» не обладает.

15-4. ПАДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТЬ С КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

Рассматриваем случай падения плоской волны по нормали к поверхности проводника. Большая часть энергии волны отражается, как показано в § 15-2. Однако небольшая часть волны проникает в проводник; это видно из (15-6) и (15-8). Энергия проникшего поля израсходуется на нагрев проводника.

Расчеты проводят, как показано в § 13-2 и 13-3. Величина потерь мощности на нагрев единичной проводящей поверхности P' принимается равной произведению квадрата действующего значения поверхностной плотности тока (15-13) на удельное поверхностное сопротивление проводника R'

$$P' = \frac{2E_m^2}{Z_{c1}^2} R', \quad (15-27)$$

где E_m — амплитуда бегущей волны напряженности электрического поля в диэлектрике у поверхности проводника;

Z_{c1} — характеристическое сопротивление диэлектрика (модуль).

Электромагнитное поле в диэлектрике перед поверхностью определяется наложением стоячей и бегущей

волн; последняя является носителем энергии, поступающей на нагрев проводника.

Изменение действующего значения напряженности электрического поля в диэлектрике в зависимости от расстояния от поверхности проводника будет происходить по кривой на рис. 15-4. Минимумы не доходят до нулевых значений вследствие бегущей волны. Величина $E_{\text{мин}}$ определяется условием непрерывности касания

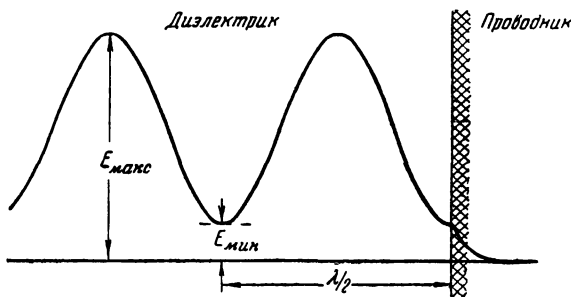


Рис. 15-4. Действующее значение напряженности электрического поля вблизи границы диэлектрика и проводника.

тельной составляющей вектора E на поверхности проводника и из (15-6)

$$E_{\text{мин}} = \frac{E_{\text{тп}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} E_m \left| \frac{Z_{c2}}{Z_{c1} + Z_{c2}} \right| \approx \approx \sqrt{2} E_m \left| \frac{Z_{c2}}{Z_{c1}} \right|, \quad (15-28)$$

где Z_{c1} и Z_{c2} — характеристические сопротивления соответственно диэлектрика и проводника.

Формула (15-28) выражает так называемое граничное условие Леонтовича.

Отношение $E_{\text{мин}}/E_{\text{макс}}$ называется коэффициентом бегущей волны (КБВ). Обратную величину $E_{\text{макс}}/E_{\text{мин}}$ называют коэффициентом стоячей волны (КСВ).

Отношение $\rho = \dot{E}_{\text{отр}}/\dot{E}_{\text{пад}}$ называется коэффициентом отражения. По (15-7) он равен:

$$\rho = \frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}}. \quad (15-29)$$

Максимумы кривой на рис. 15-4 получаются там, где действующие значения падающей и отраженной волн складываются, а минимумы — там, где они вычитаются одна из другой,

$$E_{\text{макс}} = E_{\text{пад}} + E_{\text{отр}} = E_{\text{пад}}(1 + |\rho|);$$

$$E_{\text{мин}} = E_{\text{пад}} - E_{\text{отр}} = E_{\text{пад}}(1 - |\rho|).$$

Отсюда находятся зависимости

$$КБВ = \frac{1}{(КСВ)} = \frac{1 - |\rho|}{1 + |\rho|}; \quad (15-30)$$

$$|\rho| = \frac{1 - (КБВ)}{1 + (КБВ)}. \quad (15-31)$$

Величина ρ , вообще говоря, является комплексной; однако в случае падения волн на поверхности технических проводников (например, металлов) мнимая часть мала, так что практически ρ можно считать вещественным числом.

15-5. ОБРАЗОВАНИЕ ПОПЕРЕЧНО-ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

Пусть плоская волна ($E_{\text{пад}}$, $H_{\text{пад}}$, $P_{\text{пад}}$) падает на проводящую поверхность ag под углом ϕ к поверхности (рис. 15-5), причем вектор $E_{\text{пад}} = E_y j$ параллелен поверхности, а вектор $H_{\text{пад}} = H_x i + H_z k$ находится под углом ϕ к ней.

Разложим волну на два компонента:

а) Один из них образуется касательными к отражающей проводящей поверхности составляющими напряженностей электрического магнитного поля $E_y j$ и $H_x i$; его вектор Пойнтинга $P_z k$ направлен по нормали к проводящей поверхности; взаимодействие этого компонента с волной, отраженной от проводящей поверхности, образует стоячую волну типа рассмотренной в § 15-2 или 15-4.

б) Другой компонент волны образуется той же (единственной в данном случае) составляющей напряженности электрического поля $E_y j$ и нормальной к сверхпроводящей поверхности составляющей напряженности магнитного поля $H_z k$; его вектор Пойнтинга $P_x i = E_y H_z [j k]$ направлен вдоль поверхности.

Этот компонент будет распространяться вдоль поверхности проводника (в направлении x на рис. 15-5).

Проводящая поверхность оказывает направляющее действие: падавшая на нее под углом электромагнитная волна изменяет направление распространения и продолжает двигаться вдоль поверхности.

На проводящей поверхности должны соблюдаться граничные условия, описанные в § 15-2 и 15-4.

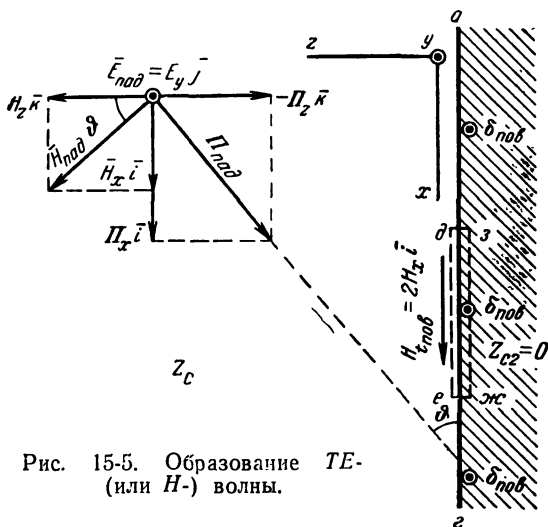


Рис. 15-5. Образование TE - (или H -) волны.

Напряженность электрического поля, являющегося результатом взаимодействия падающей и отраженной волн, на идеально проводящей поверхности равна нулю; при конечной проводимости ее величина определяется по (15-28).

Поверхностные токи, векторы плотности которых $\bar{\delta}_{\text{пов}}$ перпендикулярны плоскости рис. 15-5, ограничивают касательную к сверхпроводящей поверхности составляющую напряженности магнитного поля.

По (6-31) и (15-8)

$$\delta_{\text{пов}} = 2H_x = 2H_{\text{над}} \sin \theta \quad (15-32)$$

направление вектора $\bar{\delta}_{\text{пов}}$ определяется правилом штопора (см. контур $deжзд$ на рис. 15-5).

Нормальная к проводящей поверхности составляющая напряженности магнитного поля H_z не нуждается

в ограничении поверхностными токами, поскольку мгновенное значение H_z на самой поверхности всегда равно нулю (см. § 6-9).

Получившуюся волну называют магнитной (H -волной) или поперечно-электрической (TE -волной), так как в направлении ее распространения (x на рис. 15-5) имеется составляющая напряженности магнитного поля $H_x i$; вектор же напряженности электрического поля $E = E_y j$ находится в плоскости, поперечной к направлению распространения x .

15-6. ОБРАЗОВАНИЕ ПОПЕРЕЧНО-МАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Пусть напряженность магнитного поля падающей на сверхпроводящую поверхность az плоской электромагнитной волны ($E_{пад}$, $H_{пад}$, $P_{пад}$) имеет только одну со-

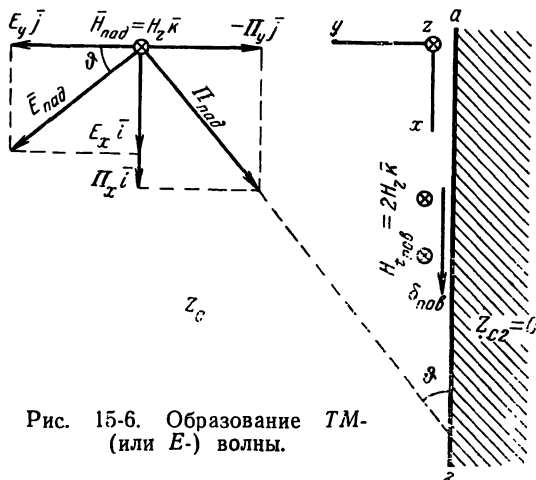


Рис. 15-6. Образование TM - (или E -) волны.

ставляющую, параллельную поверхности; напряженность же электрического поля имеет две составляющие — параллельную и нормальную к поверхности (рис. 15-6):

$$H_{пад} = H_z k; \quad E_{пад} = E_x i + E_y j.$$

Падающая волна может быть разложена на два компонента:

а) образуемый $E_x i$ и $H_z k$; его вектор Пойнтинга $P_y j$ нормален к проводящей поверхности; взаимодействие

этого компонента с отраженной от поверхности волной имеет результатом стоячую волну типа описанной в § 15-2 или 15-4;

б) образуемый $E_y j$ и $H_z k$; его вектор Пойнтинга $P_x i$ направлен параллельно поверхности; этот компонент распространяется вдоль поверхности.

Проводящая поверхность оказывает направляющее действие и в данном случае; волна, падавшая под углом к ней, изменяет направление и продолжает двигаться вдоль поверхности.

Такая направленная волна называется электрической (E -волной) или поперечно-магнитной (TM -волной), поскольку в направлении ее распространения (x на рис. 15-6) имеется составляющая напряженности электрического поля $E_x i$; вектор же напряженности магнитного поля $H_z k$ находится в плоскости, поперечной к направлению распространения x .

Токи на проводящей поверхности здесь будут прежде всего полностью ограничивать магнитное поле, поскольку вектор его напряженности \mathbf{H} повсюду касателен к поверхности. Направление вектора поверхностной плотности тока $\delta_{\text{пов}}$ определяется правилом штопора

$$\delta_{\text{пов}} = 2H_z = 2H_{\text{пад}}; \quad (15-33)$$

Роль поверхностных токов этим не исчерпывается. Электрическое поле при TM -волне имеет составляющую $E_y j$, нормальную к проводящей поверхности. Линии электрического поля должны заканчиваться зарядами на проводящей поверхности. Вследствие того что электромагнитное поле переменное и по времени и по расстоянию, эти заряды перемещаются, образуя рассмотренные поверхностные токи.

Пусть на малом участке проводящей поверхности в данный момент происходит накопление положительных зарядов; поверхностная плотность заряда σ увеличивается. Если ток, приносящий заряды, течет при этом в положительном направлении оси x и доставляет положительные заряды, то его величина несколько уменьшится после прохождения рассматриваемого малого участка поверхности, поскольку некоторый положительный заряд будет здесь оставлен. Уменьшение поверхностной плотности тока по расстоянию будет равно увеличению поверх-

ностной плотности заряда во времени; учитывая (3-38), можно написать:

$$-\frac{[\partial \delta_x]}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial D_n}{\partial t} = \epsilon_a \frac{\partial E_y(\text{пов})}{\partial t}. \quad (15-34)$$

Из этих равенств видна еще одна роль токов проводимости — они замыкают токи смещения в диэлектрике, плотность которых у проводящей поверхности равна $\epsilon_a \frac{\partial E_y(\text{пов})}{\partial t}$.

15-7. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ДЛЯ НАПРАВЛЕННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Обозначим символом Z_{c0} характеристическое сопротивление среды для падающей плоской волны:

$$Z_{c0} = \frac{\dot{E}_{\text{пад}}}{H_{\text{пад}}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}, \quad (15-35)$$

где μ_a и ϵ_a — соответственно абсолютная магнитная и абсолютная диэлектрическая проницаемости среды.

Характеристическое сопротивление для направленных волн определяется как отношение электрической и магнитной составляющих бегущей направленной электромагнитной волны.

Для поперечно-электрической волны (§ 15-5)

$$Z_{cTE} = \frac{\dot{E}_y}{H_z} = \frac{\dot{E}_{\text{пад}}}{H_{\text{пад}} \cos \vartheta} = \frac{Z_{c0}}{\cos \vartheta}. \quad (15-36)$$

Для поперечно-магнитной волны (§ 15-6)

$$Z_{cTM} = \frac{\dot{E}_y}{H_z} = \frac{\dot{E}_{\text{пад}} \cos \vartheta}{H_{\text{пад}}} = Z_{c0} \cos \vartheta. \quad (15-37)$$

Характеристическое сопротивление зависит не только от свойств среды, но и от типа распространяющейся волны.

15-8. ФАЗОВАЯ И ГРУППОВАЯ СКОРОСТИ НАПРАВЛЕННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Назовем гребнем падающей волны геометрическое место точек, в которых $E_{\text{пад}}$ и $H_{\text{пад}}$ имеют в данный момент времени амплитудные значения (линия AB на рис. 15-7).

Спустя 1 сек гребень волны переместился параллельно самому себе в положение A_1B_1 .

Точка B переместилась в положение B_2 . Отрезок BB_2 выражает фазовую скорость падающей волны v_0 . Точка B на гребне волны, расстояние d от которой до поверхности сохраняется неизменным, будет казаться переместившейся в положение B_1 . На такое же расстояние AA_1

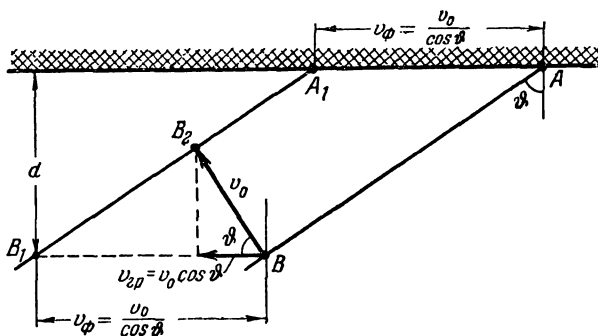


Рис. 15-7. Фазовая и групповая скорости направленной электромагнитной волны.

переместится точка стыка гребня волны с отражающей поверхностью A . Расстояние

$$(AA_1) = (BB_1) = v_\phi = \frac{v_0}{\cos \vartheta} \quad (15-38)$$

определяет фазовую скорость распространения направленной волны вдоль отражающей поверхности; она больше скорости распространения падающей волны. Поэтому длина направленной волны $\lambda_H = v_\phi T = \frac{2\pi v_\phi}{\omega}$ больше

длины плоской волны при той же частоте. Фазовая скорость направленной волны не определяет фактического перемещения переносимой волной энергии. Перемещение энергии оценивается групповой скоростью $v_{гр}$, являющейся проекцией скорости падающей волны на направление, параллельное отражающей поверхности. Из рис. 15-7 видно, что

$$v_{гр} = v_0 \cos \vartheta. \quad (15-39)$$

Произведение фазовой и групповой скоростей направленной волны равно квадрату фазовой скорости плоской

волны в данной среде в отсутствие направляющих поверхностей

$$v_{\text{ф}}v_{\text{гв}} = v_0^2. \quad (15-40)$$

15-9. ПЛОСКАЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ВОЛНА МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРОВОДЯЩИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Распространение плоской электромагнитной волны, рассмотренное в § 12-1 для неограниченного пространства, возможно и в случае ограничения поля двумя параллельными поверхностями из идеального проводника, рас-

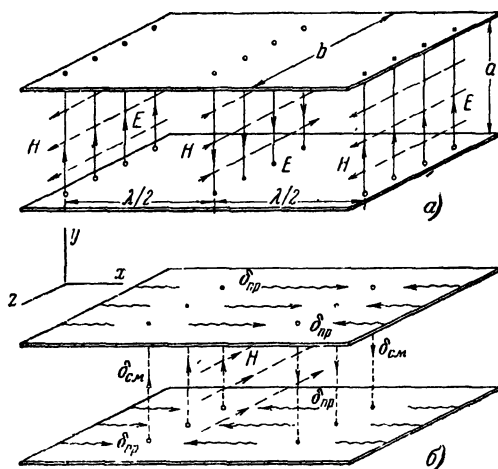


Рис. 15-8. Плоская электромагнитная волна между параллельными проводящими плоскостями.

положенными нормально к линиям электрического поля (рис. 15-8). Уравнения величин поля сохранятся такими же, как в § 12-1. Граничные условия на проводящих поверхностях будут такими же, как в § 15-6 [см. (15-33) и (15-34)]. Токи проводимости будут замыкать токи смещения в диэлектрике между поверхностями; эти замкнутые токи окружают линии магнитного поля (рис. 15-8,б). Заметим, что векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} в идеальном диэлектрике совпадают по фазе; вектор же $\bar{\delta}_{\text{см}} = \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ опережает их по фазе на четверть периода. Характеристическое сопро-

тивление и фазовая скорость распространения плоской волны, ограниченной параллельными проводящими поверхностями, те же, что и при распространении в неограниченном пространстве (см. формулы в § 12-1).

Если направляющие поверхности сделаны из обычных металлов, в проводниках будут потери энергии на нагрев; следовательно, вектор Пойнтинга электромагнитной волны вблизи направляющей поверхности должен иметь составляющую, нормальную к поверхности, т. е. быть несколько наклонным к ней.

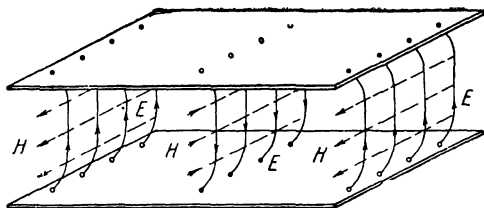


Рис. 15-9. Искажение формы линий электрического поля вследствие конечной проводимости ограничивающих поле плоскостей.

Это обстоятельство потребует некоторого искривления линий вектора E , как показано на рис. 15-9.

Группа направляющих поверхностей, расположенных определенным образом так, чтобы заставить электромагнитную волну в диэлектрике распространяться в заданном направлении, называется волноводом. Вообще говоря, поверхности волновода могут быть из любого материала, отличного от материала диэлектрика, в котором распространяется электромагнитная волна.

Наиболее важное значение имеют волноводы, содержащие хорошо проводящие направляющие поверхности. Любую электрическую линию можно рассматривать как волновод, состоящий из деформированных определенным образом проводящих плоскостей. Так, свертывая систему поверхностей на рис. 15-8 в трубу, можно получить коаксиальный кабель (рис. 15-10, *а*, *б* и *в*). Свертывая поверхности в разные стороны, можно получить систему параллельных цилиндров, т. е. двухпроводную линию (рис. 15-10, *г*, *д* и *е*).

В обоих случаях уравнения Максвелла удовлетворяются и сохраняются условия для существования плоской

волны с векторами \mathbf{E} и \mathbf{H} , нормальными к направлению распространения волны, т. е. к направлению линии.

Электромагнитная волна коаксиального кабеля ограничена пространством между его внутренним проводом и наружной трубкой; волна же двухпроводной линии занимает безграничное пространство.

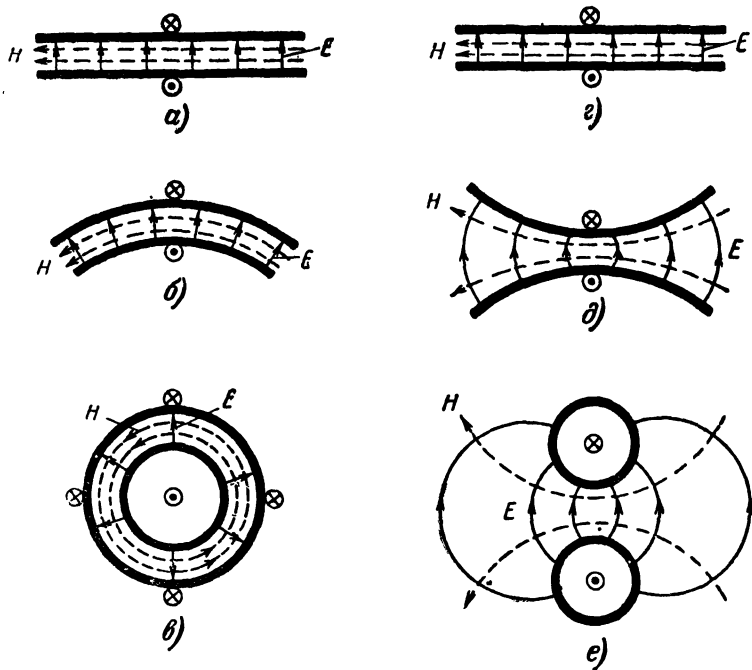


Рис. 15-10. Переход от параллельных ограничивающих плоскостей к коаксиальному кабелю и к двухпроводной линии.

Вблизи концов линии, а также мест неоднородности (повороты линии, изменение размера проводов или расстояния между ними) волна теряет характер поперечной волны; часть энергии может излучаться; на низких частотах эти эффекты незначительны.

Вдоль электрической линии возможно распространение плоских волн любой частоты без ограничений. Линии напряженности электрического поля разомкнуты, каждая из них начинается на положительном заряде на одном из проводов (т. е. на одной из ограничивающих поле по-

верхностей) и заканчивается на отрицательном заряде на другом проводе. Линии магнитной индукции являются замкнутыми кривыми, окружающими токи.

15-10. ВОЛНЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЛИНИЯХ

Кроме основного типа — плоских волн, в электрических линиях могут существовать волны высших порядков, типа *TE* или *TM*.

Например, в ленточной линии можно представить две волны S_1 и S_2 , каждая из которых распространяется под углом θ к оси линии; одна из волн является отражением

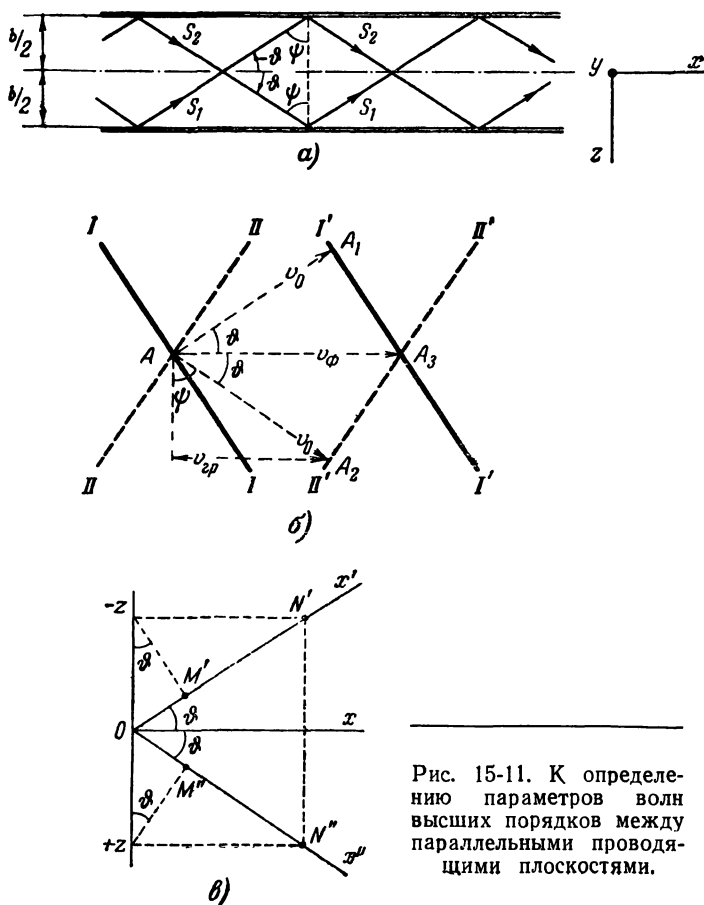


Рис. 15-11. К определению параметров волн высших порядков между параллельными проводящими плоскостями.

другой от верхней или нижней проводящей поверхности (рис. 15-11,а).

В результате наложения этих волн друг на друга получится сложная волна. Сказанное поясняется рис. 15-11,б. Пусть $I—I$ и $II—II$ — положения гребней составляющих волн в некоторый момент времени. Через 1 сек эти гребни переместятся в положение $I'—I'$ и $II'—II'$. Отрезки $AA_1=AA_2$ выражают собой скорость распространения составляющих волн v_0 . Наивысшая же точка результирующей волны A , образовавшаяся при наложении волн I и II друг на друга, займет положение A_3 ; расстояние AA_3 выразит фазовую скорость результирующей волны v_ϕ . Однако перенос энергии, как описано в § 15-8, будет происходить с групповой скоростью $v_{гр}$, являющейся проекцией v_0 на направление оси линии.

Аналогичные волны высших порядков могут существовать в открытых электрических линиях и в кабелях. Изучаемая в электротехнике теория электрических линий, учитывающая только плоские волны, является приближенной.

15-11. КРИТИЧЕСКАЯ ЧАСТОТА И КРИТИЧЕСКАЯ ДЛИНА ВОЛНЫ

Вдоль данной линии могут распространяться лишь некоторые волны высших порядков, соответствующие определенным частотам. Ограничения объясняются граничными условиями.

Пусть составляющие плоские волны S_1 и S_2 распространяются вдоль ленточной линии по направлениям x' и x'' , находящимся соответственно под углами ϑ и $-\vartheta$ к оси x (рис. 15-11,а и в). Уравнения этих волн будут типа выражения (12-7).

Электрический и магнитный компоненты одной из этих волн будут содержать множитель $\sin(\omega t - \beta x')$, а другой $\sin(\omega t - \beta x'')$.

Из рис. 15-11,в видно, что

$$x' = (OM') + (M'N') = -z \sin \vartheta + x \cos \vartheta;$$

$$x'' = (OM'') + (M''N'') = +z \sin \vartheta + x \cos \vartheta.$$

Указанные тригонометрические множители примут поэтому вид

$$\sin(\omega t - \beta x \cos \vartheta \pm \beta z \sin \vartheta) \quad (15-41)$$

и

$$\sin(\omega t - \beta x \cos \vartheta - \beta z \sin \vartheta). \quad (15-42)$$

Обозначим расстояние между ленточными проводниками буквой b .

Граничные условия: на обеих проводящих ограничивающих поверхностях ($z = -\frac{b}{2}$ и $z = +\frac{b}{2}$, рис. 15-11,а) нормальная составляющая напряженности магнитного поля и касательная составляющая напряженности электрического поля равны нулю. Оба условия сводятся к тому, что сумма обоих синусов при $z = \pm \frac{b}{2}$ должна быть равна нулю при любой паре значений t и x . Это удовлетворяется, если разность аргументов синусов остается равной $\psi = \pi, 2\pi, \dots, n\pi$, где n — целое число (0, 1, 2, 3 ...)*.

Это возможно лишь при условии

$$\beta b \sin \vartheta = n\pi. \quad (15-43)$$

Целое число n характеризует вид (мод) волны. Оно называется характеристическим числом.

Из (15-43) вытекает:

$$\beta = \frac{n\pi}{b \sin \vartheta}. \quad (15-44)$$

Величина β является коэффициентом фазы составляющих плоских волн; по (12-8) и (12-9) она прямо пропорциональна частоте или обратно пропорциональна длине волны в неограниченном пространстве

$$\beta = \frac{\omega}{v_0} = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

При $n=0$ и $\vartheta=0$ выражение (15-44) обращается в неопределенность; это случай плоской волны между проводящими поверхностями, рассмотренный в § 15-9, когда возможно распространение переменного электромагнитного поля с любым коэффициентом фазы, т. е. при любой частоте и с любой длиной волны.

При $n=1, 2, 3, 4 \dots$ возможно распространение волн лишь с коэффициентом фазы не ниже так называемого

* При n нечетном обе составляющие волны должны иметь при $z=0$ одинаковые знаки, а при n четном — разные знаки.

критического коэффициента, получаемого при наибольшем возможном значении $\sin \theta = 1$,

$$\beta > \beta_{кр}; \quad \beta_{кр} = \frac{n\pi}{b}. \quad (15-45)$$

Величине $\beta_{кр}$ соответствуют критическая частота

$$\omega_{кр} = \beta_{кр} v_0 = \frac{\beta_{кр}}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \quad (15-46)$$

и критическая длина составляющих волн

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{\beta_{кр}} = \frac{2b}{n}. \quad (15-47)$$

Таким образом, между параллельными проводящими поверхностями могут распространяться помимо плоской волны, не имеющей ограничений, электромагнитные волны высших порядков (поперечно-электрические и поперечно-магнитные), соответствующие достаточно высоким частотам, не ниже критической; длины волн должны быть меньше критической длины волны.

Наибольшее возможное значение критической длины волны высшего порядка получается при наименьшем значении характеристического числа $n = 1$

$$\lambda_{кр.наиб} = 2b. \quad (15-48)$$

Оно равно удвоенному расстоянию между проводящими поверхностями.

15-12. КОЭФФИЦИЕНТ ФАЗЫ И ДЛИНА ВОЛНЫ В ВОЛНОВОДЕ

В технические расчеты вводят понятия коэффициента фазы и длины волны в волноводе $\beta_{вв}$ и $\lambda_{вв}$:

$$\beta_{вв} = \frac{\omega}{v_\phi}; \quad (15-49)$$

$$\lambda_{вв} = \frac{2\pi}{\beta_{вв}}. \quad (15-50)$$

Подставим значение фазовой скорости из уравнения (15-38) и используем замены по (15-44)—(15-47):

$$\sin \vartheta = \frac{n\pi}{\beta b} = \frac{\beta_{кр}}{\beta} = \frac{\lambda}{\lambda_{кр}}; \quad (15-51)$$

$$\cos \vartheta = \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_{кр}}{\beta}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}. \quad (15-52)$$

Эти уравнения связывают отношения рабочих и критических величин с углом наклона направления распространения составляющих волн к оси линии.

Тогда

$$\beta_{вв} = \beta \cos \vartheta = \sqrt{\beta^2 - \beta_{кр}^2}; \quad (15-53)$$

$$\lambda_{вв} = \frac{\lambda}{\cos \vartheta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}. \quad (15-54)$$

Величины без индексов β и λ относятся к распространению плоских составляющих волн в свободном пространстве без ограничивающих проводящих поверхностей.

Взаимную зависимость величин, характеризующих распространение электромагнитных волн в волноводе и в свободном пространстве, можно иллюстрировать «треугольником коэффициентов фазы», показанным на рис. 15-12.

Величина коэффициента фазы в волноводе $\beta_{вв}$ показывает, насколько изменяется фаза результирующей волны в волноводе на единичном расстоянии вдоль направления ее распространения (вдоль оси волновода). Коэффициент фазы в волноводе всегда меньше коэффициента фазы в неограниченном пространстве при той же частоте.

Длина волны в волноводе $\lambda_{вв}$ — расстояние вдоль оси волновода, на котором фаза результирующей волны изменяется на 2π . Длина волны в волноводе всегда больше длины волны в неограниченном пространстве при той же частоте*.

С помощью рис. 15-12 и формул § 15-7 можно вывести полезные соотношения:

* Для более детального ознакомления с направленными электромагнитными волнами читателю рекомендуется разобрать в [Л. 15, решения задач 7,14; 7,16; 7,18 и 7,19].

а) для поперечно-электрических (TE) волн

$$\beta_{\text{вв}} Z_{\text{сTE}} = \beta Z_{\text{с0}} = \omega \mu_a; \quad (15-55)$$

б) для поперечно-магнитных (TM) волн

$$\frac{Z_{\text{сTM}}}{\beta_{\text{вв}}} = \frac{Z_{\text{с0}}}{\beta} = \frac{1}{\omega \epsilon_a}. \quad (15-56)$$

Концепции коэффициента фазы в волноводе и длины волны в волноводе позволяют рассматривать как электрическую линию волновод, работающий в режиме волн высших порядков и, использовать (с видоизменениями непринципиального характера) формулы теории линий для описания и анализа работы волноводных устройств (см., например [Л. 37]). Однако соответствующие аналогии ограничены. Например, работа волновода, замкнутого на конце хорошо проводящей пластинкой, вполне аналогична работе короткозамкнутого отрезка электрической линии. Но работу волновода с открытым выходным концом нельзя сравнивать с режимом холостого хода линии, поскольку при сверхвысоких частотах будет иметь место излучение энергии в открытое пространство и работа такого волновода не будет характеризоваться режимом стоячей волны.

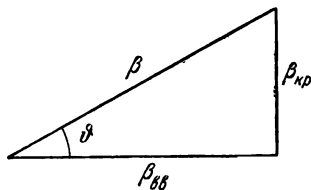


Рис. 15-12. Треугольник коэффициентов фазы.

15-13. ПОНЯТИЕ О ПРЕДЕЛЬНОМ ОСЛАБИТЕЛЕ

Предельным ослабителем называют волновод, работающий на частоте, при которой коэффициент фазы меньше критического ($\beta < \beta_{\text{кр}}$) или длина волны в свободном пространстве превышает критическую длину волны ($\lambda > \lambda_{\text{кр}}$).

В таком режиме коэффициент фазы в волноводе (15-53) будет мнимым

$$\begin{aligned} \beta_{\text{вв}} &= \pm j \sqrt{\beta_{\text{кр}}^2 - \beta^2} = \\ &= \pm j \beta_{\text{кр}} \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\beta_{\text{кр}}}\right)^2} = \pm j \alpha_n. \end{aligned} \quad (15-57)$$

При расположении координат по рис. 15-11 физический смысл имеет отрицательный знак перед радикалом.

Геометрическая интерпретация процесса посредством треугольника коэффициентов фазы теперь невозможна, поскольку $\cos \phi$ также имеет мнимую величину. По (15-36) и (15-37) видно, что характеристическое сопротивление становится в случае TE -волн мнимым и отрицательным («емкостным»), а в случае TM -волн мнимым и положительным («индуктивным»). Это означает, что поперечные электрический и магнитный компоненты поля сдвинуты по фазе на четверть периода (при достаточной длине ослабителя, когда характеристическое сопротивление практически равно «входному», т. е. отношению величин $\dot{E}_{\text{поп}}$ и $\dot{H}_{\text{поп}}$ на входе). В ослабителе будет существовать затухающее электромагнитное поле, описываемое в случае TE -волн уравнениями

$$\dot{E}_y = \dot{E} e^{-\alpha_n x}; \quad H_z = j \frac{E}{|Z_{CTE}|} e^{-\alpha_n x}. \quad (15-58)$$

Величина α_n будет коэффициентом затухания.

Затухание целиком определяется отражением волн.

Если $\left(\frac{\beta}{\beta_{кр}}\right)^2 \ll 1$, то коэффициент затухания α_n приближенно

равен критическому коэффициенту фазы $\beta_{кр}$ и почти не зависит от частоты. Такой ослабитель является широкополосным.

Предельные ослабители могут работать в качестве реактивных сопротивлений на сверхвысоких частотах. Через предельные ослабители производятся присоединение откачивающих насосов к работающему в обычном режиме волноводу с вакуумом в полости, введение в волновод рукояток для механического управления и т. п.

15-14. НЕКОТОРЫЕ ПРОСТЕЙШИЕ ТИПЫ ВОЛНОВОДОВ

Чтобы избежать значительного излучения энергии в пространство в боковых направлениях, свойственного ленточным линиям типа показанных на рис. 15-8, для передачи малых мощностей применяются «полосковые» волноводы, принцип устройства которых показан на рис. 15-13. Картина электрического поля показана на эскизе b рис. 15-13 для случая плоской волны (TEM).

При $b < \lambda/2$ поле спадает в сечении волновода в обе стороны по экспоненциальному закону. Боковые участки подобны предельному ослабителю, возбуждаемому на низшей волне TM . При $a > 5b$ излучением энергии в боковых направлениях можно пренебречь. Наиболее короткая рабочая длина волны равна $2b$. Волн высших порядков избегают.

В практике полосковые волноводы часто изготавливаются из тонкой металлической фольги, наносимой на листы диэлектрика методами печатных схем. Основные достоинства такой конструкции — простота, компактность и низкая стоимость.

Уменьшение бокового излучения в полосковом волноводе достигнуто путем концентрации поля в центральных областях сечения благодаря наличию узкого центрального проводника.

Аналогичная концентрация поля может быть получена и иначе, например посредством продольного стержня из материала с высокой диэлектрической проницаемостью (рис. 15-14).

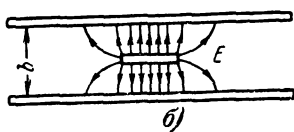
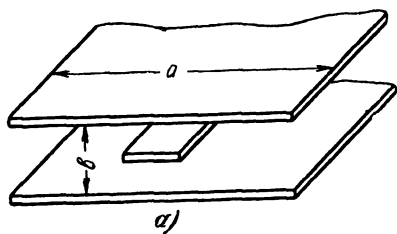


Рис. 15-13. Полосковый волновод.

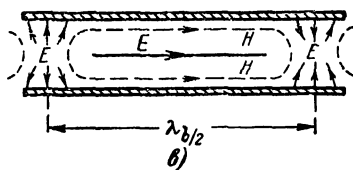
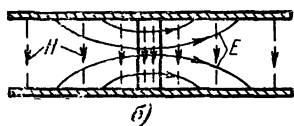
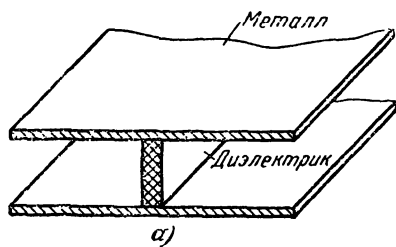


Рис. 15-14. H-образный волновод.

В таком Н-образном волноводе возможна работа на так называемых продольных волнах LE или LM . В случае волны LM вектор напряженности магнитного поля \mathbf{H} повсюду расположен в продольной плоскости и не имеет поперечных компонентов (см. картину поля при волне $LM_{1,1}$ на рис. 15-14, б и в). В случае волны LE вектор \mathbf{E} повсюду расположен в продольных плоскостях. Продольные волны можно рассматривать как результат наложения волн TE и TM , связав их некоторым дополнительным условием.

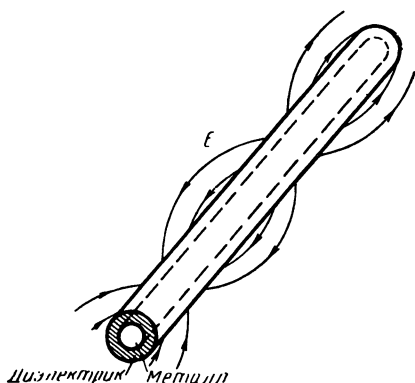


Рис. 15-15. Поверхностная электромагнитная волна.

Другим примером сверхвысокочастотной линии может служить одиночный провод с конечной проводимостью, покрытый тонким слоем диэлектрика с высокой проницаемостью (рис. 15-15). Волны, распространяющиеся вдоль такой линии, называются поверхностными.

Глава шестнадцатая

ТРУБЧАТЫЕ ВОЛНОВОДЫ И ПОЛЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

16-1. ТРУБЧАТЫЕ ВОЛНОВОДЫ

Волновод представляет собой металлическую трубу прямоугольного или круглого сечения, в полости которой происходит распространение электромагнитной волны.

Для снижения потерь энергии внутренние поверхности стенок покрываются тонким слоем серебра или другого хорошо проводящего материала. Диэлектриком обычно служит воздух.

Волноводная линия при прочих равных условиях дешевле кабельной, поскольку в волноводе отсутствует второй провод и не требуется дорогостоящей изоляции. По

этим же причинам потери энергии в волноводе меньше, чем в кабеле.

Основным недостатком волноводов является невозможность распространения плоских волн, которые требуют наличия по крайней мере двух изолированных проводов (направляющих проводящих поверхностей).

В волноводах возможно распространение лишь направленных волн, имеющих составляющие поля в направлении распространения, т. е. поперечно-электрических (*ТЕ*- или *H*-волн), поперечно-магнитных (*ТМ*- или *Е*-волн) и других волн более сложных типов. Длины волн должны быть короче критических, определяемых размерами волновода.

Передача энергии на низких, средних и высоких частотах производится плоскими волнами, направляемыми двухпроводными, трехфазными и тому подобными открытыми линиями и кабелями; волноводы в этих случаях не применяются, поскольку требуемые размеры их сечений оказываются слишком большими.

Однако при сверхвысоких частотах (выше 10^9 гц) передача энергии направленными волнами в волноводах становится более экономичной и технически целесообразной, чем по линиям. Волноводы являются одним из основных элементов техники сверхвысоких частот.

Подобно направленным волнам в линиях, описанным в гл. 15, волны в волноводах могут рассматриваться как результат наложения двух или более плоских волн, распространяющихся зигзагообразным путем под углом к стенкам и испытывающих многократные отражения от последних. Однако описание процессов с этой точки зрения получается громоздким. Их проще изучать непосредственно из уравнений Максвелла с граничными условиями, определяемыми конструкцией и размерами волновода.

16-2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВОЛНОВОДЕ

Анализ работы и расчет волновода удобно производить, считая основным продольный компонент электромагнитного поля и выражая остальные (поперечные) компоненты как функции продольного.

Выведем выражения для составляющих электромагнитного поля в волноводе при поперечно-электрических (*ТЕ*) волнах. Расположим ось *x* декартовых прямоуголь-

ных координат вдоль оси волновода; тогда поперечное сечение будет лежать в плоскости yz .

Электромагнитное поле в волноводе будет иметь следующие составляющие: E_y, E_z, H_x, H_y, H_z . Составляющая E_x равна нулю по условию задачи.

Развертываем уравнения Максвелла в символическом виде (11-7) и (11-8) в декартовых прямоугольных координатах:

$$\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = (\gamma + j\omega\epsilon_a) \dot{E}_y; \quad (16-1)$$

$$\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} = (\gamma + j\omega\epsilon_a) \dot{E}_z; \quad (16-2)$$

$$-\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = -j\omega\mu_a \dot{H}_y; \quad (16-3)$$

$$\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} = -j\omega\mu_a \dot{H}_z; \quad (16-4)$$

$$\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} = -j\omega\mu_a \dot{H}_x. \quad (16-5)$$

Выразим поперечные магнитные составляющие поля \dot{H}_y и \dot{H}_z в виде функций продольной составляющей \dot{H}_x . С этой целью продифференцируем по x выражения (16-1) и (16-2) и подставим в результаты соответственно (16-4) и (16-3):

$$(\beta^2 - p^2) \dot{H}_z + \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial x} \right); \quad (16-6)$$

$$(\beta^2 - p^2) \dot{H}_y + \frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial x} \right), \quad (16-7)$$

где

$$\beta = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}; \quad p = \sqrt{j\omega\gamma\mu_a}.$$

Ограничимся практически наиболее важным случаем заполнения полости волновода хорошим диэлектриком, у которого величиной $|p^2|$ можно пренебречь по сравнению с β^2 .

Пусть все составляющие поля в волноводе изменяются в направлении распространения (ось x) по закону бе-

гущей волны (пренебрежем затуханием в первом приближении):

$$\dot{H}_x = \dot{H}_x e^{j(\omega t - \beta_{\text{вв}} x)}; \quad \dot{H}_y = \dot{H}_y e^{j(\omega t - \beta_{\text{вв}} x)} \text{ и т. д.} \quad (16-8)$$

Их модули H_x , H_y и т. д. остаются функциями координат y и z .

Величина $\beta_{\text{вв}}$ является коэффициентом фазы в волноводе; его расчет см. ниже, § 16-4, уравнение (16-32).

Дифференцирование по x теперь сводится к умножению дифференцируемой величины на $-j\beta_{\text{вв}}$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \doteq -j\beta_{\text{вв}}; \quad \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial x} = -j\beta_{\text{вв}} \dot{H}_x \text{ и т. д.} \quad (16-9)$$

Применив замену (16-9) к (16-6) и (16-7), получим, что поперечные составляющие магнитного поля \dot{H}_y и \dot{H}_z пропорциональны скорости изменения продольной составляющей по соответствующим направлениям:

$$\dot{H}_y = -j \frac{\beta_{\text{вв}}}{\beta_{\text{кр}}^2} \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y}; \quad (16-10)$$

$$H_z = -j \frac{\beta_{\text{вв}}}{\beta_{\text{кр}}^2} \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z}, \quad (16-11)$$

где $\beta_{\text{кр}} = \sqrt{\beta^2 - \beta_{\text{вв}}^2}$ — критический коэффициент фазы (см. рис. 15-12).

Они образуют вектор $\dot{H}_{\text{поп}}$, равный градиенту в поперечной плоскости от скалярной величины продольной составляющей \dot{H}_x , умноженному на постоянный коэффициент $-j \frac{\beta_{\text{вв}}}{\beta_{\text{кр}}^2}$ (рис. 16-1),

$$\dot{H}_{\text{поп}} = \dot{H}_y \mathbf{j} + \dot{H}_z \mathbf{k} = -j \frac{\beta_{\text{вв}}}{\beta_{\text{кр}}^2} (\nabla_{yz} \dot{H}_x), \quad (16-12)$$

где

$$\nabla_{yz} \doteq \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (16-13)$$

Применяя замену (16-9) к (16-3) и (16-4), получим связь между поперечными составляющими магнитного и элект-

трического поля

$$\frac{\dot{E}_y}{\dot{H}_z} = -\frac{\dot{E}_z}{\dot{H}_y} = \frac{\omega \mu_a}{\beta_{\text{ВВ}}} = Z_{\text{СТЕ}}. \quad (16-14)$$

Величина $Z_{\text{СТЕ}}$ является характеристическим (волновым) сопротивлением волновода при данной поперечно-электрической волне. Его расчет см. ниже, § 16-4, уравнение (16-36).

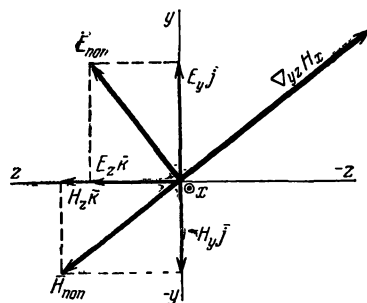


Рис. 16-1. Поперечные составляющие поля и градиент продольной составляющей при ТЕ-волне.

Из (16-14) и рис. 16-1 видно, что вектор напряженности электрического поля $\dot{E}_{\text{поп}}$, расположенный по условиям волны ТЕ в поперечной плоскости yz , также пропорционален градиенту от \dot{H}_x ($\nabla'_{yz} \dot{H}_x$), но повернут на 90° против часовой стрелки, если смотреть на плоскость yz со стороны положительных x (навстречу распространению волны).

Это можно записать в следующей форме:

$$\dot{E}_{\text{поп}} = \dot{E}_y \mathbf{j} + \dot{E}_z \mathbf{k} = j \frac{\beta_{\text{ВВ}}}{\beta_{\text{кр}}^2} Z_{\text{СТЕ}} (\nabla'_{yz} \dot{H}_x), \quad (16-15)$$

где

$$\nabla'_{yz} \doteq -\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{k}. \quad (16-16)$$

Линии $H_x = \text{const}$ являются линиями электрического поля, поскольку векторы $\dot{H}_{\text{поп}}$ и $\dot{E}_{\text{поп}}$ образуют ортогональную систему, т. е. повсюду взаимно перпендикулярны.

Посредством (16-12) и (16-15) поперечные составляющие поля выражены как функции продольной составляющей напряженности поля H_x .

Поведение \dot{H}_x описывается общим волновым уравнением (11-28)

$$\nabla^2 \dot{H}_x = -\beta^2 \dot{H}_x. \quad (16-17)$$

Заменим оператор ∇^2 с учетом (16-9)

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \doteq -\beta_{\text{вв}}^2 + \nabla_{yz}^2, \quad (16-18)$$

где

$$\nabla_{yz}^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (16-19)$$

— двумерный скалярный лапласиан (в поперечной плоскости yz).

Продольный компонент поля изменяется в поперечной плоскости yz в соответствии со специфическим двумерным волновым уравнением

$$\nabla_{yz}^2 \dot{H}_x + \beta_{\text{кр}}^2 \dot{H}_x = 0. \quad (16-20)$$

Аналогичные уравнения для волн TM выведены в [Л. 15, решение задачи 7, 30].

16-3. ВЫБОР ФУНКЦИЙ ДЛЯ СОСТАВЛЯЮЩИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

Рассмотрим случай TE -волн. Обозначим размеры сечения прямоугольного волновода буквами a и b (рис. 16-2). Расположим декартовы прямоугольные оси

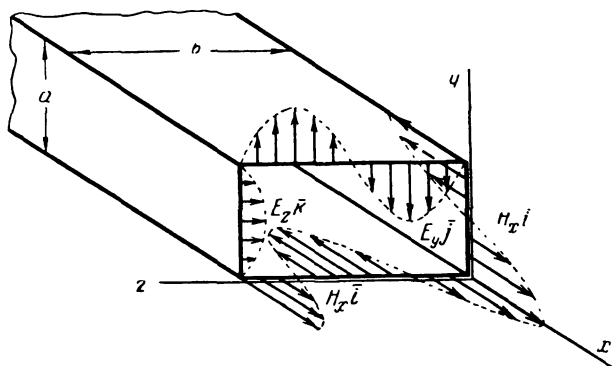


Рис. 16-2. Часть составляющих электромагнитного поля в прямоугольном волноводе при волне $TE_{1,2}$.

координат, как показано на этом рисунке. Для соблюдения граничных условий — равенства нулю касательных составляющих напряженности электрического поля и

нормальных составляющих напряженности магнитного поля у поверхностей всех четырех стенок волновода — по (16-10), (16-11) и (16-14) необходимо, чтобы

$$E_y = 0, H_z = 0 \text{ и } \frac{\partial H_x}{\partial z} = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } z = b; \quad (16-21)$$

$$E_z = 0, H_y = 0 \text{ и } \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } y = a. \quad (16-22)$$

При гармоническом изменении величин поля по времени естественным будет принять синусоидальное изменение их и по координатным направлениям.

Другими словами, решение волнового уравнения (16-20) может содержать тригонометрические функции. Условие (16-21) потребует ввести в выражение для \dot{H}_x множитель

$$\cos\left(\frac{n\pi}{b} z\right) = \cos Nz, \quad (16-23)$$

где n — любое целое число (0, 1, 2, 3 ...).

Аналогично условие (16-22) требует множителя

$$\cos\left(\frac{m\pi}{a} y\right) = \cos My, \quad (16-24)$$

где m — также любое целое число. Учитываем также закономерность (16-8).

Тогда выражение для продольной составляющей напряженности магнитного поля при TE -волнах должно быть вида

$$\dot{H}_x = H_m \cos(My) \cos(Nz) e^{j(\omega t - \beta_{вв} x)}, \quad (16-25)$$

где H_m — амплитудное значение.

Поперечные составляющие поля теперь легко находятся из (16-10), (16-11), и (16-14):

$$\dot{H}_y = j \frac{\beta_{вв}}{\beta_{кр}^2} M H_m \sin(My) \cos(Nz) e^{j(\omega t - \beta_{вв} x)}; \quad (16-26)$$

$$\dot{H}_z = j \frac{\beta_{вв}}{\beta_{кр}^2} N H_m \cos(My) \sin(Nz) e^{j(\omega t - \beta_{вв} x)}; \quad (16-27)$$

$$\dot{E}_y = j \frac{\beta_{\text{ВВ}}}{\beta_{\text{КР}}^2} Z_{\text{сТЕ}} N H_m \cos(My) \sin(Nz) e^{j(\omega t - \beta_{\text{ВВ}} x)}; \quad (16-28)$$

$$\dot{E}_z = -j \frac{\beta_{\text{ВВ}}}{\beta_{\text{КР}}^2} Z_{\text{сТЕ}} M H_m \sin(My) \cos(Nz) e^{j(\omega t - \beta_{\text{ВВ}} x)}. \quad (16-29)$$

Во все формулы входят характеристические целые числа m и n , определяющие мод волны.

Общеприняты обозначения типа $TE_{m,n}$ (или $H_{m,n}$); так, волна $TE_{1,2}$ имеет характеристические числа $m=1$, $n=2$; это означает, что в сечении волновода укладывается одна целая полуволна в направлении координаты y и две полуволны в направлении координаты z (рис. 16-2).

Величины

$$M = \frac{m\pi}{a}$$

и

$$N = \frac{n\pi}{b} \quad (16-30)$$

называются производными характеристическими числами волновода.

16-4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ВОЛНЫ В ВОЛНОВОДЕ

Рассмотрим TE -волны; во всех выражениях для составляющих поля (16-25) — (16-29) участвуют синусы и косинусы от аргументов My и Nz . Поскольку

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \cos(My) = -M^2 \cos(My)$$

и т. д., двукратное дифференцирование по y сводится к умножению дифференцируемой величины на $-M^2$, а двукратное дифференцирование по z — на $-N^2$.

Волновое уравнение (16-20) принимает простой вид, связывающий значение критического коэффициента фазы $\beta_{\text{КР}}$ с размерами волновода,

$$M^2 + N^2 = \beta_{\text{КР}}^2. \quad (16-31)$$

Теперь определяется коэффициент фазы в волноводе $\beta_{\text{ВВ}}$ (при идеальном диэлектрике, $p=0$)

$$\beta_{\text{ВВ}} = \sqrt{\beta^2 - \beta_{\text{КР}}^2}. \quad (16-32)$$

Длина волны в волноводе определяется по (15-54)

$$\lambda_{\text{вв}} = \frac{2\pi}{\beta_{\text{вв}}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}}. \quad (16-33)$$

Бегущая волна возможна при условии, когда коэффициент фазы в волноводе $\beta_{\text{вв}}$ — вещественное число, т. е. при $\beta_{\text{кр}} < \beta$.

При $\beta_{\text{кр}} = \beta$ наступает критический случай. Критическая частота и критическая длина волны находятся из выражений

$$\omega_{\text{кр}} = c\beta_{\text{кр}}; \quad (16-34)$$

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2\pi}{\beta_{\text{кр}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{M^2 + N^2}}; \quad (16-35)$$

где c — скорость света в диэлектрике волновода.

Характеристическое сопротивление волновода для волн TE находится по (15-36) и (15-52)

$$Z_{cTE} = \frac{Z_{c0}}{\cos \vartheta} = \frac{Z_{c0}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}}, \quad (16-36)$$

где Z_{c0} — характеристическое сопротивление для плоской волны в свободном пространстве, равное при идеальном диэлектрике $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$;

ϑ — угол наклона к стенкам волновода направлений распространения составляющих плоских волн, результатом наложения которых друг на друга явилась рассматриваемая волна типа TE .

Выбор функций для волн TM и определение их характеристик описаны в [Л. 15, решение задачи 7,30]; там же в решении задач 7,32, 7,38 и др. показан расчет характеристик волн, могущих распространяться в прямоугольном волноводе заданных размеров.

Заметим, что формулы для $\beta_{\text{кр}}$, $\beta_{\text{вв}}$, $\lambda_{\text{вв}}$, $\omega_{\text{кр}}$ и $\lambda_{\text{кр}}$ (16-31) — (16-35) сохраняют силу как для TE -, так и для TM -волн. Формулы для характеристического сопротивления при TE - и TM -волнах различны (см. § 15-7).

Токи проводимости в стенках волновода всегда протекают в направлении, перпендикулярном вектору напряженности магнитного поля у стенки.

Значит, при TM -волнах в стенках существуют только продольные токи. Это позволяет прорезывать в стенках продольные щели как для излучения энергии во внешнее пространство, так и для целей измерений. В частности, при волне $TM_{1,1}$ продольные токи в ребрах волновода равны нулю; поэтому отпадает необходимость в хорошем электрическом контакте между стенками.

При TE -волнах в стенках могут протекать как продольные, так и поперечные токи. Продольные прорезы возможны лишь в местах, где нет поперечных токов, например при волне $TE_{0,1}$ (рис. 16-3) — посредине широкой стенки.

16-5. ВОЛНА ТИПА $TE_{0,1}$ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

В качестве примера рассмотрим распространение в волноводе поперечно-электрической волны типа $TE_{0,1}$ (или $H_{0,1}$). Полость заполнена сухим воздухом ($\gamma=0$; $\epsilon_a=\epsilon_0$; $\mu_a=\mu_0$).

Характеристические числа:

$$m = M = 0; n = 1; N = \frac{\pi}{b}. \quad (16-37)$$

Критический коэффициент фазы находится по (16-31)

$$\beta_{кр} = N = \frac{\pi}{b}. \quad (16-38)$$

Критическая длина волны по (16-35) равна удвоенной ширине волновода

$$\lambda_{кр} = 2b. \quad (16-39)$$

Совпадение этой формулы с (15-48) объясняется тем, что волновод, работающий на волне $TE_{0,1}$, является развитием ленточной линии, работающей в режиме поперечно-электрической волны наименьшего типа, поле которой ограничено с боков двумя проводящими стенками, поставленными при $z=0$ и $z=b$. Наличие боковых стенок повлекло следующие характеристические черты электромагнитного поля:

1) Величина вектора $\mathbf{E} = E_y \mathbf{j}$ стала изменяться вдоль ширины волновода; у боковых стенок она равна нулю; в середине сечения ($z = b/2$) она максимальна.

2) Вектор \mathbf{H} в случае прямоугольного волновода имеет не одну, а две составляющие $\mathbf{H} = H_x \mathbf{i} + H_z \mathbf{k}$; линии магнитной индукции образуют замкнутые кривые, уместающиеся в полости волновода и окружающие токи смещения (рис. 16-3).

Уравнения для мгновенных значений составляющих электромагнитного поля при волне $TE_{0,1}$ находятся из (16-25) — (16-29) с учетом (16-37), (16-38) и (15-55):

$$H_x = H_m \cos\left(\frac{\pi}{b} z\right) \sin(\omega t - \beta_{\text{ВВ}} x); \quad (16-40)$$

$$H_z = \frac{\beta_{\text{ВВ}} b}{\pi} H_m \sin\left(\frac{\pi}{b} z\right) \cos(\omega t - \beta_{\text{ВВ}} x); \quad (16-41)$$

$$E_y = \frac{\omega \mu_0 b}{\pi} H_m \sin\left(\frac{\pi}{b} z\right) \cos(\omega t - \beta_{\text{ВВ}} x); \quad (16-42)$$

$$H_y = 0; E_x = 0; E_z = 0. \quad (16-43)$$

Величины коэффициента фазы в волноводе $\beta_{\text{ВВ}}$ и характеристического сопротивления рассчитываются по общим уравнениям (16-32) и (16-36).

Плотность тока смещения в диэлектрике волновода равна:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_{\text{см}} &= \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \mathbf{j} = \\ &= -\frac{\beta^2 b}{\pi} H_m \sin\left(\frac{\pi}{b} z\right) \sin(\omega t - \beta_{\text{ВВ}} x) \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (16-44)$$

По внутренним поверхностям стенок протекают токи проводимости.

В боковых стенках они ограничивают x -ю составляющую магнитного поля при $z=0$ и при $z=b$.

Применим закон полного тока к контуру K_1 (рис. 16-3) и используем (6-31)

$$\bar{\delta}_{\text{бок}} = -H_x(z=b) \mathbf{j} = H_m \sin(\omega t - \beta_{\text{ВВ}} x) \mathbf{j}. \quad (16-45)$$

Такова же величина $\bar{\delta}_{\text{бок}}$ в правой боковой стенке.

Поверхностная плотность тока проводимости в верхней стенке находится аналогично, посредством контуров K_2 и K_3

$$\bar{\delta}_B = (-H_z \mathbf{i} + H_x \mathbf{k})_{y=a}. \quad (16-46)$$

В нижней стенке направления векторов $\bar{\delta}_B$ изменяются на обратные.

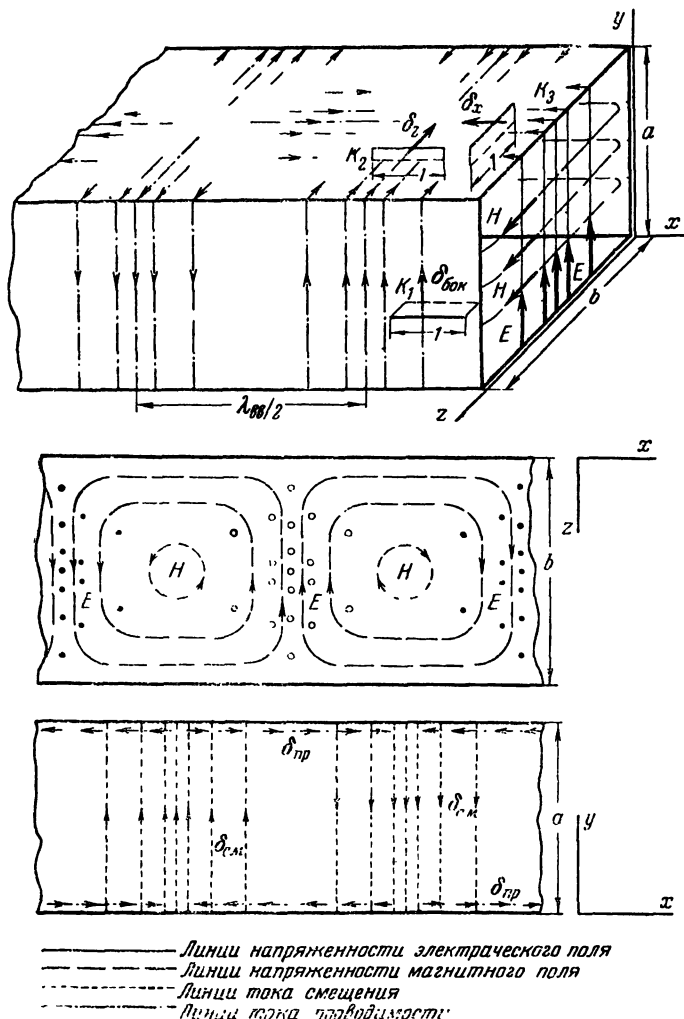


Рис. 16-3. Волна $TE_{0,1}$ в прямоугольном волноводе.

На рис. 16-3 показаны:

а) общий вид линий электрического и магнитного полей, а также линий токов проводимости на внутренних поверхностях стенок;

б) расположение «в плане» линий магнитного и электрического полей; последние направлены по нормали к чертежу; маленькими кружками показаны линии, направленные от читателя за чертеж, точками — от чертежа к читателю;

в) вид сбоку линий токов смещения и продольных составляющих тока проводимости.

16-6. ПЕРЕДАЧА ЭНЕРГИИ В ВОЛНОВОДЕ

При волне $TE_{0,1}$ вектор Пойнтинга имеет две составляющие: продольную P_x и поперечную P_z :

$$P_x = E_y H_z; \quad P_z = -E_y H_x$$

(расположение координат — по рис. 16-2 или 16-3).

Подставим выражения составляющих поля из (16-40) — (16-42):

$$P_x = \frac{\omega \mu_0 b^2 \beta_{\text{ВВ}}}{\pi^2} H_m^2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{b} z \right) \cos^2 (\omega t - \beta_{\text{ВВ}} x); \quad (16-47)$$

$$P_z = -\frac{\omega \mu_0 b}{4\pi} H_m^2 \sin \left(2 \frac{\pi}{b} z \right) \sin 2 (\omega t - \beta_{\text{ВВ}} x). \quad (16-48)$$

Составляющая P_x активна. Среднее значение квадрата косинуса равно $\frac{1}{2}$; поэтому

$$P_{x \text{ cп}} = \frac{\omega \mu_0 b^2 \beta_{\text{ВВ}}}{2\pi^2} H_m^2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{b} z \right). \quad (16-49)$$

Вдоль волновода происходит постоянное перемещение энергии. Передаваемая мощность равна интегралу от (16-49), взятому по площади поперечного сечения волновода. В данном случае величины поля не зависят от координаты y ; поэтому

$$P = a \int_0^b P_{x \text{ cп}} dz = \frac{ab}{4} \omega \mu_0 \beta_{\text{ВВ}} \left(\frac{H_m b}{\pi} \right)^2. \quad (16-50)$$

Поперечная составляющая P_z реактивна; ее среднее значение по (16-48) равно нулю. Она соответствует местным перемещениям энергии в полости волновода, связанным с периодическими преобразованиями электромагнитного поля из одной формы в другую (из электрической в магнитную и обратно).

Величина передаваемой мощности ограничена вследствие опасности пробоя диэлектрика волновода. Например, при волне типа $TE_{0,1}$ в прямоугольном волноводе максимум напряженности электрического поля $E_{\text{макс}}$ находится посередине сечения волновода при $z = \frac{b}{2}$.

Связь между $E_{\text{макс}}$ и амплитудой продольной составляющей напряженности магнитного поля H_m видна из (16-42)

$$H_m = \frac{\pi E_{\text{макс}}}{\omega \mu_0 b}.$$

Подставив это значение H_m в (16-50), получим связь между передаваемой мощностью и максимальной напряженностью электрического поля

$$P = \frac{ab\beta_{\text{вв}}}{4\omega\mu_0} E_{\text{макс}}^2 = \frac{\pi ab}{2\omega\mu_0\lambda_{\text{вв}}} E_{\text{макс}}^2. \quad (16-51)$$

Пример. Прямоугольный волновод типа МЭК-100 по стандарту Международной электротехнической комиссии. Размеры (рис. 16-3): $a = 10,16$ мм; $b = 22,86$ мм. Полость заполнена воздухом ($\mu_a = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ гн/м; $E_{\text{проб}} = 3 \cdot 10^8$ в/м).

Определим максимально допустимую передаваемую мощность при угловой частоте $\omega = 5,89 \cdot 10^{10}$ 1/сек и при трехкратном запасе электрической прочности ($E_{\text{макс}} = 1 \cdot 10^8$ в/м).

Определяем длину волны

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = 3,2 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

По (16-39) $\lambda_{\text{кр}} = 4,57 \cdot 10^{-2}$ м.

По (16-33) $\lambda_{\text{вв}} = 4,50 \cdot 10^{-2}$ м.

По (16-51) $P = 1,09 \cdot 10^5$ вт = 109 квт.

16-7. КОЭФФИЦИЕНТ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ЗАТУХАНИЯ ВОЛНОВОДА

Вследствие наличия токов в стенках волновода будут иметь место потери мощности, равные произведению квадратов действующего значения тока в каждой стенке на поверхностное сопротивление ее материала (§ 13-3).

При заполнении полости техническим диэлектриком к потерям в стенках следует добавить потери в диэлектрике.

Передача мощности будет происходить с затуханием. По аналогии с теорией электрических линий можно записать, что в отсутствие отраженных волн среднее значение передаваемой мощности будет уменьшаться вдоль волновода по показательному закону

$$P = P_0 e^{-2\alpha x}, \quad (16-52)$$

где α — коэффициент характеристического («собственного») затухания волновода;

P_0 — мощность в начале волновода.

Потери мощности на единицу длины волновода P_1 (вт/м) равны отношению малой убыли передаваемой мощности $-dP$, происшедшей на малом отрезке длины волновода dx , к величине этого отрезка

$$P_1 = -\frac{dP}{dx} = 2\alpha P_0.$$

Следовательно, коэффициент характеристического затухания равен:

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{P_1}{P_0} [\text{бел/м}]. \quad (16-53)$$

В практике обычно оперируют с единицей, в 10 раз меньшей (децибел на метр)*.

В приложении П-14 приведены конструктивные и электрические данные некоторых стандартных прямоугольных волноводов.

16-8. ПОПЕРЕЧНО-МАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

Общие определения и соотношения, выведенные в предыдущих параграфах для декартовых прямоугольных координат, могут быть выражены в цилиндрических координатах r, θ, z посредством обычных формул преобразования координат.

Совместим ось цилиндрических координат с осью волновода (рис. 16-4). Продольная составляющая поля теперь будет направлена по оси z .

В случае поперечно-магнитных (ТМ или Н) волн продольной будет электрическая составляющая E_z .

* Примеры расчета см. [Л. 15, решения задач 7,18; 7,19; 7,41].

Для \dot{E}_z можно вывести волновое уравнение, описывающее ее изменения в поперечной плоскости $r\theta$; оно будет однотипным с (16-20) и в развернутом виде получится таким:

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{r^2 \partial \theta^2} + \beta_{кр}^2 \dot{E}_z = 0, \quad (16-54)$$

где $\beta_{кр}$ — критический коэффициент фазы.

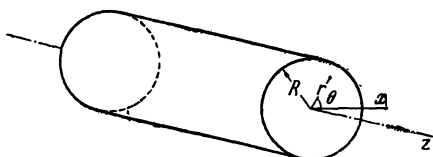


Рис. 16-4. Цилиндрический волновод (обозначения).

Интегралом (16-54) служит произведение круговых функций на цилиндрические

$$\dot{E}_z = \begin{cases} \sin(n\theta) \\ \cos(n\theta) \end{cases} [\dot{E}'_0 J_n(\beta_{кр} r) + \dot{E}'_0 N_n(\beta_{кр} r)],$$

где $J_n(\beta_{кр} r)$ и $N_n(\beta_{кр} r)$ — функции Бесселя и Неймана первого рода n -го порядка.

Выбор круговой функции $\sin(n\theta)$ или $\cos(n\theta)$ зависит от выбора начального радиуса для отсчета углов и вследствие легкой взаимозаменяемости обеих функций не имеет принципиального значения.

Функция Неймана $N_n(\beta_{кр} r)$ обращается в бесконечность при $r=0$ и, таким образом, не удовлетворяет условиям задачи. Ее поэтому отбросим, положив постоянную \dot{E}'_0 равной нулю.

Следовательно,

$$\dot{E}_z = \begin{cases} \sin(n\theta) \\ \cos(n\theta) \end{cases} \dot{E}'_0 J_n(\beta_{кр} r) e^{j(\omega t - \beta_{вв} z)}. \quad (16-55)$$

Множителем $e^{j(\omega t - \beta_{вв} z)}$ учитывается, что все составляющие поля, в том числе и \dot{E}_z , изменяются вдоль волновода (в направлении z) по закону бегущей волны с коэффициентом фазы $\beta_{вв}$.

Возможен ряд решений, содержащих бesselевы функции первого рода n -го порядка $J_n(\beta_{кр}r)$ от аргумента $\beta_{кр}r$. Граничное условие в данной задаче: на поверхности сверхпроводящей оболочки волновода ($r=R$) касательная составляющая напряженности электрического поля равна нулю

$$\dot{E}_z(r=R) = 0.$$

В качестве решений подойдут те из бesselевых функций, значения которых для аргумента $\beta_{кр}R$ равны нулю*.

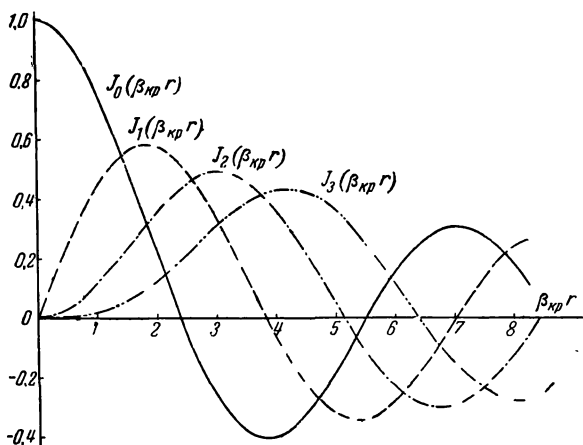


Рис. 16-5. Кривые функций Бесселя первого рода.

На рис. 16-5 показаны кривые некоторых бesselевых функций первого рода; в табл. 16-1 даны значения аргументов, при которых функции принимают нулевые значения.

Если решением выбирается функция Бесселя первого рода n -го порядка, переходящая через нуль s -й раз (не считая оси, т. е. $r=0$), соответствующую волну относят к типу $TM_{n,s}$. Первая цифра в индексе указывает количество вариаций поля по полупериметру сечения, а вторая цифра — по радиусу.

* Таблицы функций Бесселя и их производных напечатаны в ряде справочников, например в книге Е. Янке и Ф. Эмде «Таблицы функций».

Таблица 16-1

Тип волны	Бесселевы функции	Корни ($\beta_{кр}R$)			
		$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$
$TM_{0,s}$	$J_0(\beta_{кр}R) = 0$	2,405	5,520	8,654	11,791
$TM_{1,s}$	$J_1(\beta_{кр}R) = 0$	3,832	7,016	10,173	13,324
$TM_{2,s}$	$J_2(\beta_{кр}R) = 0$	5,136	8,417	11,620	14,796
$TM_{3,s}$	$J_3(\beta_{кр}R) = 0$	6,380	9,761	13,015	16,223
$TM_{4,s}$	$J_4(\beta_{кр}R) = 0$	7,588	11,065	14,373	17,616

Взяв из таблицы значение аргумента ($\beta_{кр}R$), рассчитывают величину критического коэффициента фазы

$$\beta_{кр} = \frac{(\beta_{кр}R)}{R}.$$

Затем по (16-32)—(16-35), (15-52) и (15-37) определяют коэффициент фазы и длину волны в волноводе $\beta_{вв}$ и $\lambda_{вв}$, критическую частоту и критическую длину волны $\omega_{кр}$ и $\lambda_{кр}$, вспомогательную функцию $\cos \theta$ и характеристическое сопротивление $Z_{стм}$.

Составляющие электромагнитного поля находятся так же, как и в случае прямоугольного волновода.

Поперечные составляющие напряженности электрического поля образуют вектор, лежащий в плоскости, нормальной к оси волновода, и являющийся градиентом E_z , умноженным на $-j \frac{\beta_{вв}}{\beta_{кр}^2}$, аналогично (16-12).

Радиальная составляющая

$$\begin{aligned} \dot{E}_r &= -j \frac{\beta_{вв}}{\beta_{кр}^2} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} = \\ &= -j \left\{ \begin{array}{l} \sin(n\theta) \\ \cos(n\theta) \end{array} \right\} \frac{\beta_{вв}}{\beta_{кр}^2} \dot{E}_0 J'_n(\beta_{кр}r) e^{j(\omega t - \beta_{вв}z)}. \end{aligned} \quad (16-56)$$

Символом J'_n обозначена производная функции J_n по ее аргументу ($\beta_{кр}r$).

Касательная составляющая

$$\begin{aligned} \dot{E}_\theta &= -j \frac{\beta_{вв}}{\beta_{кр}^2} \frac{\partial \dot{E}_z}{r \partial \theta} = \\ &= j \left\{ \begin{array}{l} -\cos(n\theta) \\ \sin(n\theta) \end{array} \right\} \frac{\beta_{вв} n}{r \beta_{кр}^2} \dot{E}_0 J_n(\beta_{кр}r) e^{j(\omega t - \beta_{вв}z)}. \end{aligned} \quad (16-57)$$

Развертывая уравнения Максвелла в цилиндрических координатах, можно доказать, что поперечные составляющие электрического и магнитного полей в цилиндрическом волноводе находятся в соотношениях, аналогичных (16-14),

$$\frac{\dot{E}_r}{\dot{H}_\theta} = -\frac{\dot{E}_\theta}{\dot{H}_r} = Z_{сTM} = \frac{\beta_{зв}}{\omega \epsilon_a}; \quad (16-58)$$

$$Z_{сTM} = Z_{с0} \cos \vartheta = Z_{с0} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}. \quad (16-59)$$

Из этих уравнений определяются поперечные составляющие напряженности магнитного поля.

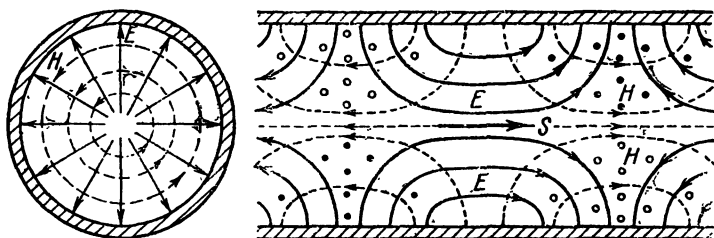


Рис. 16-6. Электромагнитная волна $TM_{0,1}$ в цилиндрическом волноводе.

На рис. 16-6 показана картина электромагнитного поля в цилиндрическом волноводе при волне типа $TM_{0,1}$.

Сплошными показаны линии электрического поля, крупным пунктиром — линии магнитного поля, мелким пунктиром — линии тока смещения.

16.9. ПОПЕРЕЧНО-ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

Волновое уравнение (16-20) в цилиндрических координатах при замене \dot{H}_x на \dot{H}_z имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{r^2 \partial \theta^2} + \beta_{кр}^2 \dot{H}_z = 0. \quad (16-60)$$

Общий интеграл этого уравнения

$$\dot{H}_z = \left\{ \begin{array}{l} \sin(n\theta) \\ \cos(n\theta) \end{array} \right\} [\dot{H}_0 J_n(\beta_{кр} r) + \dot{H}_0 N_n(\beta_{кр} r)],$$

где $J_n(\beta_{кр}r)$ и $N_n(\beta_{кр}r)$ — функции Бесселя и Неймана первого рода n -го порядка.

Отбрасываем решение с функцией Неймана $N_n(\beta_{кр}r)$ как не подходящее к условию задачи, поскольку $N_n \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$. Тогда

$$\dot{H}_z = \left\{ \begin{array}{l} \sin(n\theta) \\ \cos(n\theta) \end{array} \right\} \dot{H}_0 J_n(\beta_{кр}r) e^{j(\omega t - \beta_{вв}z)}, \quad (16-61)$$

где $\beta_{вв}$ — коэффициент фазы в волноводе.

Как и ранее, допущено, что все составляющие поля, в том числе и \dot{H}_z , изменяются в направлении распространения z по закону бегущей волны с коэффициентом фазы $\beta_{вв}$.

Поперечные составляющие напряженности магнитного поля находятся из (16-12) в цилиндрических координатах.

Радиальная составляющая

$$\begin{aligned} \dot{H}_r &= -j \frac{\beta_{вв}}{\beta_{кр}^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} = \\ &= -j \left\{ \begin{array}{l} \sin(n\theta) \\ \cos(n\theta) \end{array} \right\} \frac{\beta_{вв}}{\beta_{кр}} \dot{H}_0 J'_n(\beta_{кр}r) e^{j(\omega t - \beta_{вв}z)}. \end{aligned} \quad (16-62)$$

Касательная составляющая

$$\begin{aligned} \dot{H}_\theta &= -j \frac{\beta_{вв}}{\beta_{кр}^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{r \partial \theta} = \\ &= j \left\{ \begin{array}{l} -\cos(n\theta) \\ \sin(n\theta) \end{array} \right\} \frac{\beta_{вв} n}{r \beta_{кр}^2} \dot{H}_0 J_n(\beta_{кр}r) e^{j(\omega t - \beta_{вв}z)}. \end{aligned} \quad (16-63)$$

Поперечные составляющие напряженности электрического поля находятся из соотношений, аналогичных (16-58),

$$\frac{\dot{E}_r}{\dot{H}_\theta} = -\frac{\dot{E}_\theta}{\dot{H}_r} = Z_{СТЕ} = \frac{\omega \mu_a}{\beta_{вв}}, \quad (16-64)$$

где $Z_{СТЕ}$ — характеристическое сопротивление волновода при TE -волнах.

Граничное условие для выбора бесселевых функций: на поверхности цилиндрического волновода нормальная составляющая напряженности магнитного поля обращается

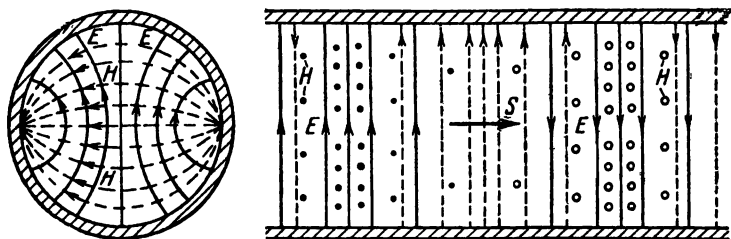


Рис. 16-7. Электромагнитная волна $TE_{1,1}$ в цилиндрическом волноводе.

ется в нуль ($H_r=0$ при $r=R$). Это означает, что производная $J'_n(\beta_{кр}R)$ должна равняться нулю, а сама функция J_n должна иметь максимум или минимум.

Подходящие аргументы можно найти из табл. 16-2, где приведены значения аргументов, соответствующих экстремальным значениям бесселевых функций. Если решением является функция Бесселя n -го порядка, s -й раз принимающая экстремальное значение, соответствующую волну относят к типу $TE_{n,s}$.

Таблица 16-2

Тип волны	Производные бесселевых функций	Значение аргументов при экстремумах			
		$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$
$TE_{0,s}$	$J'_0(\beta_{кр}R) = 0$	3,832	7,016	10,173	13,324
$TE_{1,s}$	$J'_1(\beta_{кр}R) = 0$	1,841	5,331	8,536	11,706
$TE_{2,s}$	$J'_2(\beta_{кр}R) = 0$	3,054	6,706	9,969	13,170
$TE_{3,s}$	$J'_3(\beta_{кр}R) = 0$	4,201	8,015	11,346	—
$TE_{4,s}$	$J'_4(\beta_{кр}R) = 0$	5,317	9,282	12,682	—

Взяв из таблицы значение аргумента ($\beta_{кр}R$), рассчитывают величину критического коэффициента фазы

$$\beta_{кр} = \frac{(\beta_{кр}R)}{R}.$$

Дальнейший расчет величин $\beta_{вв}$ и $\lambda_{вв}$, $\omega_{кр}$ и $\lambda_{кр}$, $\cos \vartheta$ и $Z_{СТЕ}$ проводят по общим формулам (16-32) — (16-36).

На рис. 16-7 показана картина электромагнитного поля в цилиндрическом волноводе при волне типа $TE_{1,1}$. Обозначения те же, что и на рис. 16-6.

16-10. ПОНЯТИЕ О ВОЗБУЖДЕНИИ ВОЛНОВОДОВ

Возбуждение электромагнитной волны в волноводе может осуществляться одним из следующих способов:

1) с помощью возбуждающего стержня (антенны), размещенного в месте максимума электрического поля и ориентированного по направлению последнего (рис. 16-8,а, возбуждение волны $TM_{0,1}$ в цилиндрическом волноводе).

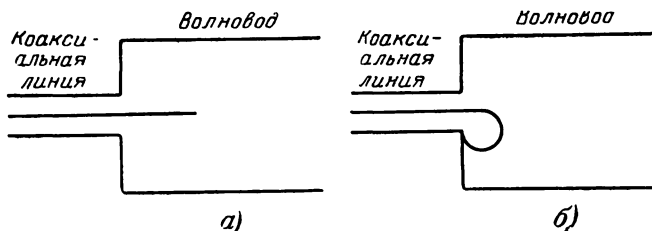


Рис. 16-8. Способы возбуждения волновода.

2) с помощью петли с током, помещенной в месте максимума магнитного поля и ориентированной нормально к нему (рис. 16-8,б, возбуждение волны $TE_{0,1}$ в прямоугольном волноводе; на фигуре показан его продольный разрез по оси);

3) путем введения извне в стенки волновода токов нужных направлений.

Прием волны может осуществляться теми же способами. В зоне, ближайшей к возбуждающему элементу, обычно возникает электромагнитное поле сложной структуры, не соответствующей какому-либо простейшему типу (моду) направленной волны.

Наиболее надежный путь получения волны желаемого мода лежит в выборе размеров поперечного сечения волновода так, чтобы его критический коэффициент фазы был больше коэффициента фазы каждого из нежелательных модов.

16-11. ПОЛЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

Способность излучения энергии при достаточно высоких частотах начинает заметно сказываться не только у электрических линий, но и в цепях с сосредоточенными

постоянными, когда их размеры становятся одного порядка с длиной волны.

Явление запаздывания делает невозможным применение к расчету обычной теории электрических цепей, основанной на законах Кирхгофа. Ток не будет иметь одно и то же значение во всей цепи в любой момент времени.

Поперечные размеры проводников нельзя будет считать малыми. Токи смещения в окружающих проводники диэлектриках будут значительны, и ими нельзя будет пренебрегать. Таким образом, расчет линейной цепи при

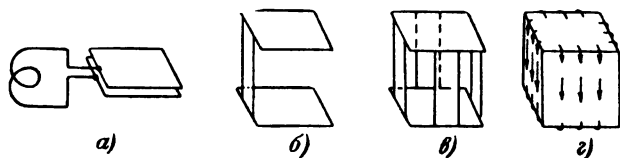


Рис. 16-9. Переход от контура с сосредоточенными постоянными к полному резонатору.

очень высоких частотах переходит в расчет электромагнитного поля в пространстве на базе уравнений Максвелла.

Излучение энергии цепью с сосредоточенными постоянными может быть сведено к нулю, если поместить цепь внутрь замкнутой оболочки, сделанной из очень хорошего проводника (электромагнитное экранирование).

Явление отражения электромагнитных волн от поверхности проводника не позволит электромагнитной энергии покидать область внутри такого «экрана». Можно сказать, что благодаря отражательному действию проводящих поверхностей внутри экрана будет создаваться дополнительное поле, компенсирующее запаздывающие составляющие электромагнитного поля, обуславливающие излучение.

Электрическое поле внутри экрана будет отличаться по фазе от тока в цепи и от магнитного поля на 90° . Такие индукционные составляющие поля не создают условий для излучения энергии наружу.

Высокочастотная цепь может быть составлена из малых емкостей и индуктивностей. Во многих случаях можно удовлетвориться емкостью между отдельными стен-

ками экрана и индуктивностью, обусловленной токами в других его стенках и относящимся к ним магнитным полем. Такое устройство называется полым резонатором.

На рис. 16-9 представлен постепенный переход от цепи с сосредоточенными постоянными к полному резонатору. Приспосабливая цепь (а) с сосредоточенными емкостью и индуктивностью для работы на очень высокой частоте, уменьшают емкость путем раздвижения обкладок конденсатора; одновременно уменьшают индуктивность путем замены катушки прямым проводом, соединяющим обкладки конденсатора; получается устройство б.

В целях дальнейшего уменьшения индуктивности устраивают дополнительные параллельные друг другу соединительные проводники (в), пока не придут к устройству замкнутой коробки, представляющей полый резонатор (г).

Полые резонаторы изготавливаются различных форм в зависимости от типа волны, на которую проектируется резонатор.

16-12. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПОЛОМ РЕЗОНАТОРЕ

Рассмотрим резонатор волноводного типа, представляющий собой отрезок прямоугольного волновода, закрытый с обоих концов хорошо проводящими поверхностями (рис. 16-10).

Ограничимся электромагнитными волнами, у которых по крайней мере одна составляющая (электрическая или магнитная) в направлении одного из ребер резонатора отсутствует. Условимся считать это направление продольным; расположим вдоль него ось x декартовой прямоугольной системы координат. Плоскость yz будем называть поперечной.

Образующаяся в резонаторе стоячая электромагнитная волна может рассматриваться как результат наложения падающей волны, распространяющейся в направлении x , и отраженной волны, распространяющейся в направлении $-x$.

Волны, поле которых не имеет составляющей H_x , будем называть поперечно-магнитными (ТМ); волны же, у которых отсутствует составляющая E_x , будем называть поперечно-электрическими (ТЕ).

Эта классификация условна; одна и та же волна иногда может быть отнесена к различным типам в зависимости от выбора положения координатных осей.

Однако эта классификация волн позволяет воспользоваться общими уравнениями волноводов (§ 16-2—16-4).

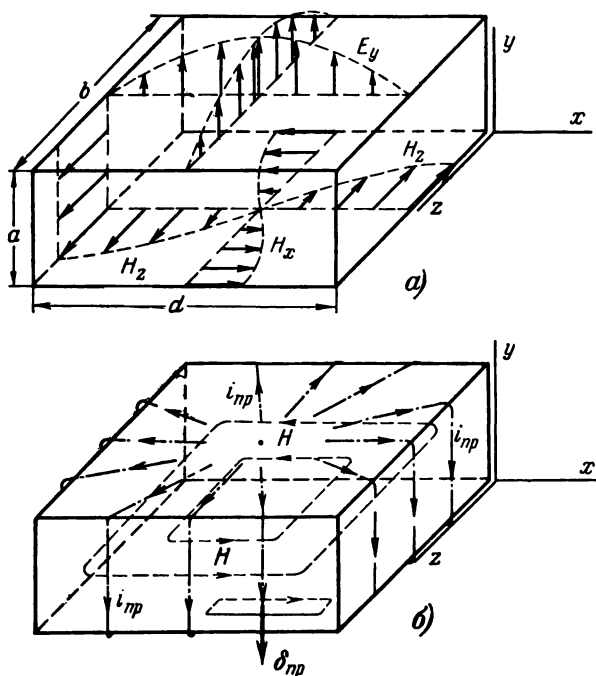


Рис. 16-10. Электромагнитная волна $TE_{1,1}$ (или $TM_{0,1,1}$) в полном резонаторе в форме параллелепипеда.

Любая составляющая поля резонатора в форме параллелепипеда может в простейших случаях собственных колебаний изменяться вдоль координатных направлений по закону синуса или косинуса от аргументов Lx , My и Nz ; коэффициенты L , M и N определяются размерами резонатора и характеристическими целыми числами l , m и n :

$$L = \frac{l\pi}{d}; \quad M = \frac{m\pi}{a}; \quad N = \frac{n\pi}{b}.$$

Двухкратное дифференцирование по x сводится теперь к умножению дифференцируемой величины на $-L^2$, поскольку

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \sin(Lx) &= -L^2 \sin(Lx); \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cos(Lx) &= -L^2 \cos(Lx).\end{aligned}\quad (16-65)$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \doteq -M^2; \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \doteq -N^2. \quad (16-66)$$

Волновое уравнение типа (16-20) для продольной составляющей поля \dot{H}_x (или \dot{E}_x) в резонаторе принимает вид:

$$L^2 + M^2 + N^2 = \beta^2. \quad (16-67)$$

При идеальном диэлектрике в полости резонатора величина β будет коэффициентом фазы собственных колебаний резонатора.

Резонансная длина волны резонатора

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}. \quad (16-68)$$

При TE -волнах связь поперечных магнитных составляющих поля H_y и H_z с продольной H_x остается соответствующей (16-6) и (16-7); при использовании замен (16-65) и (16-66) и при $p=0$ получаем:

$$\dot{H}_y = \frac{1}{\beta^2 - L^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial x} \right); \quad (16-69)$$

$$\dot{H}_z = \frac{1}{\beta^2 - L^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial x} \right). \quad (16-70)$$

Заменяв буквы H на E , можно написать аналогичные закономерности для поперечно-магнитных волн.

Связь между поперечными электрическими и поперечными магнитными составляющими поля выясняется из развернутых уравнений Максвелла. Так, для TE -волн можно использовать (16-3) и (16-4), подставив в них значения \dot{H}_y и \dot{H}_z из (16-69) и (16-70) и проинтегрировав по dx ; постоянные интегрирования могут быть при-

пяты равными нулю вследствие очевидного отсутствия постоянных компонент в переменном электромагнитном поле резонатора:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_y &= -j \frac{\omega \mu_a}{\beta^2 - L^2} \left(\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} \right); \\ E_z &= j \frac{\omega \mu_a}{\beta^2 - L^2} \left(\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} \right), \end{aligned} \right\} \quad (16-71)$$

где

$$\omega = \frac{\beta}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}.$$

16-13. ВЫБОР ФУНКЦИЙ ДЛЯ СОСТАВЛЯЮЩИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПОЛОМ РЕЗОНАТОРЕ В ФОРМЕ ПАРАЛЛЕПИПЕДА

Выбор делается на основании граничных условий: у сверхпроводящих стенок резонатора касательные составляющие напряженности электрического поля и нормальные составляющие напряженности магнитного поля равны нулю.

Поэтому для TE -волн $E_y = 0$ при $x=0$ и $x=d$, а также при $z=0$ и $z=b$ (рис. 16-10); в выражение для E_y должны входить множители $\sin(Lx)$ и $\sin(Nz)$, удовлетворяющие такому условию; из первого уравнения (16-71) видно, что эти множители сохраняются и в выражении производной $\partial \dot{H}_x / \partial z$; следовательно, выражение для продольной составляющей поля H_x должно содержать множители $\sin(Lx)$ и $\cos(Nz)$.

Аналогично $E_z = 0$ при $x=0$ и $x=d$, а также при $y=0$ и $y=a$; поэтому в выражение для E_z должны входить множители $\sin(Lx)$ и $\sin(My)$; по второму уравнению (16-71) эти же множители сохраняются в выражении производной $\partial \dot{H}_x / \partial y$; следовательно, в выражение для \dot{H}_x должен входить еще множитель $\cos(My)$.

Введем, наконец, множитель $e^{j\omega t}$, учитывающий гармоническое изменение величин поля по времени.

Таким образом,

$$\dot{H}_x = \dot{H}_m \sin(Lx) \cos(My) \cos(Nz) e^{j\omega t}. \quad (16-72)$$

Поперечные составляющие поля теперь находятся из (16-69) — (16-71):

$$\dot{H}_y = -\frac{LM}{\beta^2 - L^2} \dot{H}_m \cos(Lx) \sin(My) \cos(Nz) e^{j\omega t}; \quad (16-73)$$

$$\dot{H}_z = -\frac{LN}{\beta^2 - L^2} \dot{H}_m \cos(Lx) \cos(My) \sin(Nz) e^{j\omega t}; \quad (16-74)$$

$$\dot{E}_y = \frac{\omega\mu_a N}{\beta^2 - L^2} \dot{H}_m \sin(Lx) \cos(My) \sin(Nz) e^{j\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}; \quad (16-75)$$

$$\dot{E}_z = \frac{\omega\mu_a M}{\beta^2 - L^2} \dot{H}_m \sin(Lx) \sin(My) \cos(Nz) e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}. \quad (16-76)$$

По внутренним поверхностям проводящих стенок резонатора протекают токи. Их назначения одинаковы с назначениями токов в стенках волновода:

а) ограничивать магнитное поле [условие (6-31)];

б) обеспечивать движение зарядов, необходимое для поддержания изменений по времени нормальных составляющих электрического поля [условие (15-34)];

в) замыкать токи смещения, существующие в полости резонатора.

На рис. 16-10 показаны для случая волны $TE_{1,0,1}$ * ($l=1$; $m=0$; $n=1$):

а) изменение векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} в направлениях x и z ;

б) токи проводимости на внутренних поверхностях стенок.

16-14. ЭНЕРГИЯ В ПОЛОМ РЕЗОНАТОРЕ И ЕГО ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПАРАМЕТРЫ

Максимум энергии, запасаемой в электромагнитном поле полого резонатора, можно определить либо как максимум энергии электрического поля, либо как максимум энергии магнитного поля.

* Если повернуть оси координат так, чтобы ось x заняла на рис. 16-10 вертикальное положение, то ту же самую волну можно будет характеризовать как $TM_{0,1,1}$.

Например, в случае волны мода $TE_{1,0,1}$ (или $TM_{0,1,1}$, рис. 16-10) по первому определению

$$W_{\text{макс}} = \int_0^d \int_0^a \int_0^b \frac{\epsilon_a E_{ym}^2}{2} \sin^2(Lx) \sin^2(Nz) dx dy dz = \\ = \frac{\epsilon_a E_{ym}^2}{8} dab, \quad (16-77)$$

где согласно (16-75) при $\beta^2 = L^2 + N^2$

$$E_{ym} = \frac{\omega \mu_a H_m}{N}; \quad (16-78)$$

$\omega = \beta \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}$ — угловая частота колебаний. Такой же результат можно получить и по второму определению; однако вычисления будут сложнее, поскольку магнитное поле имеет два координатных компонента.

При синусоидальном изменении во времени величин поля в резонаторе (E и H) запасаемая энергия изменяется во времени по закону

$$W = W_{\text{макс}} \sin^2 \omega t. \quad (16-79)$$

Мощность электромагнитного поля в резонаторе равна:

$$P = \frac{dW}{dt} = \omega W_{\text{макс}} \sin 2\omega t.$$

Собственной (характеристической) добротностью резонатора называется отношение максимума мощности поля к мощности потерь в стенках и в диэлектрике резонатора

$$Q_{\text{соб}} = \frac{P_{\text{макс}}}{P_{\text{пот}}} = \frac{\omega W_{\text{макс}}}{P_{\text{пот}}}. \quad (16-80)$$

Этот параметр аналогичен добротности колебательного контура в режиме холостого хода.

Собственная добротность современных резонаторов достигает нескольких десятков тысяч.

Столь высокая добротность недостижима в контурах с сосредоточенными постоянными. В этом важное достоинство полых резонаторов, обеспечившее их широкое

применение в устройствах, работающих на сверхвысоких частотах.

В практике полые резонаторы редко работают в режимах, близких к холостому ходу; обычно они излучают электромагнитное поле через отверстия или щели в ту или иную «нагрузку» (устройство, поглощающее электромагнитную энергию). Поэтому рабочая добротность $Q_{\text{раб}}$ оказывается значительно ниже собственной

$$Q_{\text{раб}} = \frac{\omega W_{\text{макс}}}{P_{\text{от}} + P_{\text{изл}}}. \quad (16-81)$$

Здесь $P_{\text{изл}}$ — мощность, излучаемая в «нагрузку».

В целях получения аналогии с колебательным контуром в расчеты часто вводят три эквивалентных параметра полого резонатора.

Эквивалентная индуктивность $L'_{\text{экр}}$ может определяться из энергетической зависимости

$$L'_{\text{экр}} = \frac{2W_{\text{макс}}}{I_m^2}, \quad (16-82)$$

где I_m — амплитуда полного тока в стенках. В примере волны $TE_{1,0,1}$ (рис. 16-10) эта величина равна амплитуде полного вертикального тока, протекающего по передней, задней и двум боковым стенкам резонатора.

Другое определение эквивалентной индуктивности можно сделать исходя из амплитудного значения полного магнитного потока в полости резонатора Φ_m

$$L''_{\text{экр}} = \frac{\Phi_m}{I_m}. \quad (16-83)$$

Результаты расчетов по (16-82) и (16-83) обычно не совпадают. Поэтому в каждом отдельном случае необходимо указывать, которое из определений имеется в виду.

В случаях колебаний более сложных модов установление полной величины тока далеко не всегда является определенной задачей. Поэтому концепция эквивалентной индуктивности также лишается определенности.

Эквивалентной активной проводимостью резонатора $g_{\text{экр}}$ считают величину

$$g_{\text{экр}} = \frac{2P_{\text{от}}}{U_m^2}, \quad (16-84)$$

где U_m — амплитуда напряжения между любой парой фиксированных точек на внутренних поверхностях стенок резонатора, рассчитываемого как линейный интеграл напряженности электрического поля между заданными точками.

Величины U_m и $g_{\text{экв}}$ оказываются зависящими от выбора точек отсчета, а иногда и пути интегрирования.

Эквивалентная емкость резонатора $C_{\text{экв}}$ может быть найдена из соотношений

$$C'_{\text{экв}} = \frac{2W_{\text{макс}}}{U_m^2} \quad (16-85)$$

или

$$C''_{\text{экв}} = \frac{q_{\text{ст(макс)}}}{U_m}, \quad (16-86)$$

где $q_{\text{ст(макс)}}$ — амплитудное значение полного заряда одного знака на стенках резонатора.

Эквивалентные параметры резонатора $L_{\text{экв}}$, $g_{\text{экв}}$, $C_{\text{экв}}$ не обладают достаточной определенностью, поскольку нет абсолютной аналогии в работе резонатора и колебательного контура.

Единственным «инвариантным» параметром резонатора является его характеристическая добротность $Q_{\text{соб}}$.

Глава семнадцатая

РАСЧЕТЫ СТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ МЕТОДОМ СЕТОК

17-1. ПОНЯТИЕ О РАЗНОСТНОМ ИСЧИСЛЕНИИ

Пусть независимая переменная величина (например, координата x) получает малое конечное приращение $\Delta x = a$.

Соответствующее приращение функции $\varphi(x)$ называется разностью первого порядка или первой разностью функции

$$\delta^I = \Delta\varphi = \varphi(x+a) - \varphi(x). \quad (17-1)$$

Величина

$$\frac{\delta^I}{a} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} \quad (17-2)$$

называется разностным отношением первого порядка. Оно приближенно равно первой производной $d\varphi/dx$.

Первая разность является в свою очередь функцией независимой переменной x . Вычисленная аналогично (17-1) разность первой разности называется разностью второго порядка или второй разностью первоначальной функции $\varphi(x)$; обозначим ее символом $\Delta^2\varphi = \delta^{\text{II}}$.

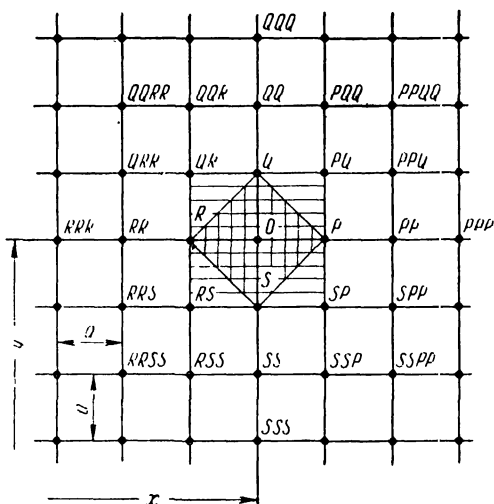


Рис. 17-1. Расположение и обозначения расчетных точек при квадратной сетке.

Разностное отношение второго порядка

$$\frac{\delta^{\text{II}}}{a^2} = \frac{\Delta^2\varphi}{(\Delta x)^2} \quad (17-3)$$

приближенно равно второй производной $d^2\varphi/dx^2$ и т. д.

Значения производных выражаются более точно в виде рядов, составленных из разностей различных порядков. Эти выражения выводятся из известной в математике интерполяционной формулы Стирлинга:

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{a} \left(\delta^{\text{I}} - \frac{1}{6} \delta^{\text{III}} + \frac{1}{30} \delta^{\text{V}} - \dots \right); \quad (17-4)$$

$$\varphi'' = \frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{1}{a^2} \left(\delta^{\text{II}} - \frac{1}{12} \delta^{\text{IV}} + \frac{1}{90} \delta^{\text{VI}} - \dots \right). \quad (17-5)$$

Индексом (римской цифрой) отмечается порядок разности.

Во многих практических расчетах бывает достаточно ограничиться первыми членами рядов.

В двумерных задачах величины поля являются функциями координат x и y . Сделаем приращения координат одинаковыми и равными a — стороне ячейки квадратной сетки, помещенной на плоскость рис. 17-1. Обозначим символами $\varphi_O, \varphi_P, \varphi_Q \dots$ значения рассчитываемой функции в точках $O, P, Q \dots$

Значения так называемых центральных разностей функции $\varphi(x, y)$ по осям x и y в произвольной точке O будут:

$$\delta_x^I = \frac{1}{2} (\varphi_P - \varphi_R); \quad (17-6)$$

$$\delta_y^I = \frac{1}{2} (\varphi_Q - \varphi_S); \quad (17-7)$$

$$\delta_x^{II} = (\varphi_P - \varphi_O) - (\varphi_O - \varphi_R) = \varphi_P + \varphi_R - 2\varphi_O; \quad (17-8)$$

$$\delta_y^{II} = (\varphi_Q - \varphi_O) - (\varphi_O - \varphi_S) = \varphi_Q + \varphi_S - 2\varphi_O; \quad (17-9)$$

$$\begin{aligned} \delta_x^{III} &= \frac{1}{2} [(\varphi_{(PP)} + \varphi_O - 2\varphi_P) - (\varphi_O + \varphi_{(RR)} - 2\varphi_R)] = \\ &= -(\varphi_P - \varphi_R) + \frac{1}{2} (\varphi_{(PP)} - \varphi_{(RR)}); \end{aligned} \quad (17-10)$$

$$\delta_y^{III} = -(\varphi_Q - \varphi_S) + \frac{1}{2} (\varphi_{(QQ)} - \varphi_{(SS)}); \quad (17-11)$$

$$\begin{aligned} \delta_x^{IV} &= (\varphi_{(PP)} + \varphi_O - 2\varphi_P) + (\varphi_O + \varphi_{(RR)} - 2\varphi_R) - \\ &- 2(\varphi_P + \varphi_R - 2\varphi_O) = -4(\varphi_P + \varphi_R - 2\varphi_O) + \\ &+ (\varphi_{(PP)} + \varphi_{(RR)} - 2\varphi_O); \end{aligned} \quad (17-12)$$

$$\delta_y^{IV} = -4(\varphi_Q + \varphi_S - 2\varphi_O) + (\varphi_{(QQ)} + \varphi_{(SS)} - 2\varphi_O). \quad (17-13)$$

17-2. УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА И ПУАССОНА В РАЗНОСТНОЙ ФОРМЕ

Пусть рассчитываемая область двумерного поля разбита на ячейки квадратной сеткой типа показанной на рис. 17-1. Распределение потенциала подчиняется двумерному уравнению Лапласа [по (3-17)]

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Подставим значения производных из выражений типа (17-5), принимая во внимание лишь первые члены рядов (т. е. только вторые разности). В свою очередь заменим значения вторых разностей по (17-8) и (17-9).

После сокращения на a^2 получим расчетное уравнение Лапласа в разностной форме для некоторой узловой точки сетки O

$$\varphi_P + \varphi_Q + \varphi_R + \varphi_S - 4\varphi_O = 0. \quad (17-14)$$

Подобным же путем легко вывести расчетное уравнение Пуассона (3-16) в разностной форме

$$\varphi_P + \varphi_Q + \varphi_R + \varphi_S - 4\varphi_O = -2a^2 \frac{\rho}{\epsilon_a}. \quad (17-15)$$

Буквой ρ обозначен заряд на единицу площади двумерного поля.

Величина $\nabla^2\varphi$ и ее разностный эквивалент $(\varphi_P + \varphi_Q + \varphi_R + \varphi_S - 4\varphi_O)$ не зависят от ориентации координатных осей.

Повернув, например, координатные оси на рис. 17-1 на 45° , вместо (17-14) можно записать

$$\varphi_{(PQ)} + \varphi_{(QR)} + \varphi_{(RS)} + \varphi_{(SP)} - 4\varphi_O = 0, \quad (17-16)$$

а вместо (17-15)

$$\varphi_{(PQ)} + \varphi_{(QR)} + \varphi_{(RS)} + \varphi_{(SP)} - 4\varphi_O = -4a^2 \frac{\rho}{\epsilon_a}. \quad (17-17)$$

Коэффициентом 4 в правой части (17-17) учитывается, что расстояние между центральной точкой O и окружающими точками типа PQ в $\sqrt{2}$ раз больше, чем между O и, например, P . Расчет по (17-14) или (17-15) охватывает на рис. 17-1 вертикально заштрихованный квад-

рат площадью $2a^2$; расчет же по (17-16) или (17-17) охватывает горизонтально заштрихованный квадрат вдвое большей площади и несущий в случае пуассоновского поля в два раза больший заряд.

Формулы (17-14)—(17-17) называются формулами «4». В большинстве технических расчетов они являются основными. Погрешность расчета по формуле «4» тем меньше, чем мельче сетка, т. е. чем короче расстояние между соседними точками поля. Поэтому расчет по (17-14) будет точнее, чем по (17-16). Аналогично формула Пуассона (17-15) точнее, чем (17-17). Ниже будут приведены более точные формулы «больших молекул» (§ 17-5).

17-3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ МЕТОДОМ ЛИКВИДАЦИИ ОСТАТКОВ

В зарубежной литературе этот метод называют релаксационным.

Операции, связанные с нахождением распределения потенциала, легко освоить на простейшем примере рис. 17-2, изображающего одиночный паз статора электрической машины, отделенный широкими зубцами от соседних пазов. Поверхность полюса ротора является гладкой. Поле разделено на ячейки квадратной сеткой. Вследствие симметрии потенциал узловой точки e одинаков с потенциалом точки c ; потенциал точки m одинаков с потенциалом точки b и т. д.

Поле подчиняется уравнению Лапласа.

Предположим следующие граничные условия: магнитный скалярный потенциал всех точек, лежащих на поверхности паза, равен нулю. Потенциал всех точек на поверхности полюса ротора равен 100 условным единицам.

Подобного рода задачи, в которых заданы значения рассчитываемой функции на границах поля, называются задачами Дирихле.

Зададимся каким-либо распределением потенциала, например показанным верхними цифрами, стоящими слева от каждой точки на рис. 17-2, a (50 — у точек a , b , c и d ; 10 — у точки f ; 5 — у точки g ; 3 — у точки h и 1 — у точки i). Проверим все точки по уравнению (17-14). Точки a , b и c удовлетворяют ему полностью. Записываем справа от каждой из этих точек остаток 0 (верхние

«заряды» величин и знаков, соответствующих уравнению Пуассона (17-15).

В действительности этих «зарядов» нет; поэтому следует произвести перераспределение потенциалов узловых точек сетки так, чтобы свести остатки к нулю или минимуму, которым можно пренебречь.

По (17-14) может показаться, что для снятия остатка $+10$ в точке d ее потенциал следует увеличить на $10 : 4 = 2,5$; однако в начальной стадии расчета нет смысла оперировать с дробями. Следует также иметь в виду, что увеличение потенциала точки d повлечет увеличение остатков в соседних точках c , e и f ; снятие последних вызовет появление нового остатка в точке d , для снятия которого потенциал точки d придется еще раз повысить, и т. д.

Очевидно, что изменение потенциала в данной точке поля нужно делать с учетом состояния соседних точек и возможных его изменений; часто полезна «перерелаксация» или «недорелаксация».

В рассматриваемом случае увеличим потенциал точки d на 4 единицы, записав это изменение потенциала слева от узловой точки (нижняя цифра на рис. 17-2,а). Предположенные изменения потенциалов других точек записаны слева от них; у точки g сделана «недорелаксация»: при остатке -7 изменение потенциала сделано всего на -1 ; учитывалось, что отрицательный остаток подвергнется значительному уменьшению вследствие повышения потенциала соседней точки f на $+5$ единиц.

Теперь делается новая проверка остатков по (17-14). Для облегчения вычислений в уме можно оперировать не с новыми значениями потенциалов точек, а только со сделанными изменениями потенциалов и с остатками. Например, в точке d был остаток $+10$; увеличение потенциала соседней точки f на $+5$ единиц вызовет появление нового остатка $+5$ в точке d ; увеличение потенциала соседней точки c на $+1$ также придаст точке d дополнительный остаток $+1$; такой же остаток появится в ней и вследствие увеличения на 1 потенциала точки e , симметричной с c ; общая величина остатка в точке d достигнет теперь $+10 + 5 + 1 + 1 = +17$. Вместе с тем мы увеличим потенциал самой точки d на $+4$; это даст снижение ее остатка на $+4 \cdot 4 = +16$. Результирующая величина остатка в точке d будет $+17 - 16 = +1$; записываем

ее справа от точки d , ниже отметки о прежней величине остатка.

Описанным порядком расчет ведется по всем точкам, пока ни один остаток не будет превышать, например, 2

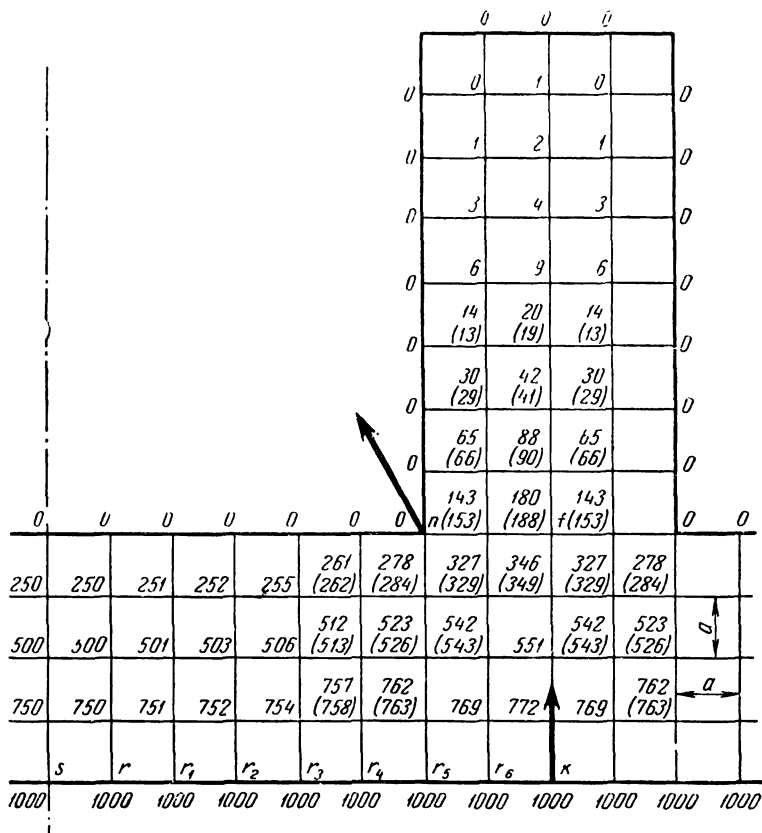


Рис. 17-3. Уточнение расчета распределения магнитного скалярного потенциала путем перехода к более мелкой сетке (цифры без скобок) и последующим расчетом по формуле «20» (цифры в скобках).

по абсолютной величине. В данном случае нужные изменения потенциалов найдены сразу; результирующие значения потенциалов и остатков перенесены для ясности на рис. 17-2,б. Возможная погрешность полученного распределения потенциала в любой точке составляет $\pm \frac{1}{2}$.

Если хотят получить большую точность расчета, увеличивают все значения потенциала на рис. 17-2,б в 10 раз; во столько же раз увеличиваются и остатки. Затем производят новое перераспределение потенциалов, пока не получают снижение всех остатков до 0, или 1, или 2 по абсолютной величине; результат этого расчета приведен на рис. 17-2,в.

Дальнейшее уточнение расчета можно сделать путем перехода к более мелкой сетке (рис. 17-3, числа без скобок).

Предварительные значения потенциала в «новых» точках находятся путем грубого интерполирования, проводимого обычно в уме. При последующей проверке всех точек по (17-14) понадобится исправление значений потенциала не только в новых точках, но и в «старых», которые являлись узлами грубой сетки. Следует помнить, что крупная сетка типа показанной на рис. 17-2 была весьма грубым приближением.

Наиболее значительная поправка в данном случае понадобилась в точке f , лежащей в месте наибольшей неоднородности поля (вблизи углов).

Проведение расчетов по уравнению Пуассона (17-15) практически не отличается от описанного.

17-4. УСКОРЕНИЕ РАСЧЕТА МЕТОДОМ ЛИКВИДАЦИИ ОСТАТКОВ

Наиболее простой процедурой расчета распределения потенциала (или другой искомой функции) по узловым точкам сетки является работа «шаг за шагом». Разыскивается точка, имеющая наибольший по абсолютной величине остаток. Ее потенциал увеличивается или уменьшается (смотря по знаку остатка) на величину, равную $\frac{1}{4}$ этого остатка, с округлением до ближайшего целого числа. Это изменение потенциала снизит остаток в данной точке до нуля или до малой величины (± 1 или ± 2). При этом возрастут остатки в соседних точках на величину произведенного изменения потенциала. На рис. 17-4,а показан простейший расчетный шаблон для квадратной сетки. Увеличение потенциала центральной точки на $+1$, записанное слева от кружка, вызвало снижение остатка в данной точке на -4 ; это вытекает из расчетной формулы (17-14) или (17-15). Одновременно увеличились на $+1$ остатки в четырех соседних точках. Изменения остатков записаны в кружках.

Затем расчетчик переходит к другой точке сетки, где теперь оказался наибольший остаток, и «ликвидирует» последний изменением потенциала этой точки приблизительно на $\frac{1}{4}$ величины остатка и т. д. После каждой такой операции абсолютная величина наибольшего на всей сетке остатка уменьшается. Процесс расчета является

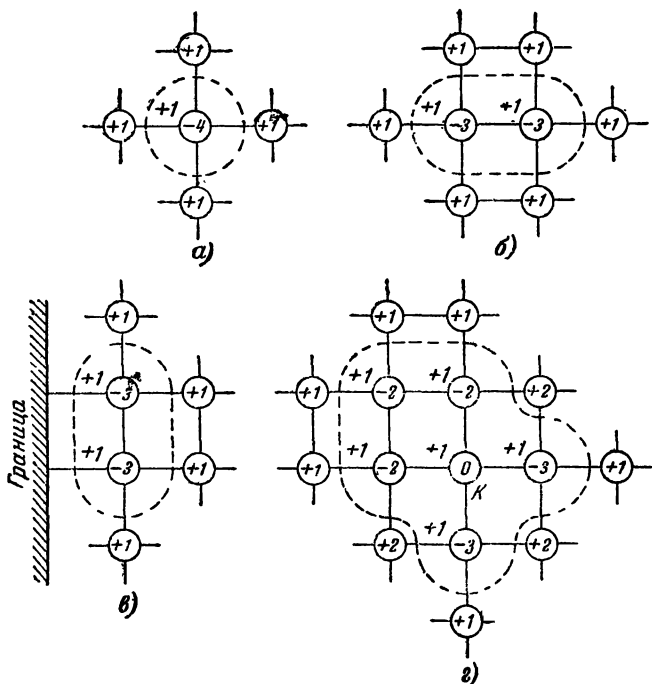


Рис. 17-4. Лапласиановские шаблоны.

сходящимся, и расчетчик в конце концов придет к цели, когда все остатки станут нулями, единицами или двойками. Последующее уточнение расчета делается путем перехода к десятичным дробям (или путем увеличения всех значений потенциалов и остатков в 10 раз с последующей ликвидацией увеличенных остатков и т. д.).

Описанная процедура работы «шаг за шагом» является, однако, слишком медленной. Причина лежит в том, что при изменении потенциала в какой-либо точке, находящейся вдалеке от границ поля, так что ни одна из соседних точек не является граничной, общая сумма остатков в системе не изменяется. Это видно как из

рис. 17-4,а, где изменение потенциала на +1 сделано в одной лишь точке, так и из рис. 17-4,б, где изменение потенциала на +1 произведено сразу в двух точках; то же следует и из рис. 17-4,г, где изменения потенциала на +1 сделаны сразу в группе из шести точек. Во всех этих случаях сумма уменьшений остатков в точках, где был изменен потенциал (сумма отрицательных чисел в кружках), равна сумме положительных приращений остатков в соседних точках.

Общая сумма остатков изменится лишь при изменениях потенциала в точках, прилегающих к границе рассчитываемой области поля (в задаче Дирихле). Это видно из рис. 17-4,в, где сделано изменение на +1 потенциалов двух прилегающих к границе точек. Уменьшение остатков этих точек произошло на —6 единиц; увеличение же остатков в соседних точках получилось на +4 единицы. Общая сумма остатков в системе в данном случае уменьшилась на 2.

Необходимы мероприятия, ускоряющие процедуру расчета.

Огромное значение имеет возможно близкое к действительности предварительное задание значений рассчитываемой функции (например, потенциала) в узловых точках сетки. Внимательный расчетчик должен использовать весь свой опыт и интуицию.

Если начальный остаток в одной или нескольких точках получился очень велик, то, может быть, целесообразнее не приступать сразу к последовательной ликвидации остатков, а попробовать изменить в ту или иную сторону начальные значения функции.

При ликвидации остатков желательно разумное применение перерелаксаций и недорелаксаций (см. § 17-3), при которых заранее учитываются возможные последствия проектируемых шагов расчета. Очень важно научиться производить групповые изменения — сразу в нескольких точках — по расчетным шаблонам типа показанных на рис. 17-4.

Комбинирование групповых изменений с перерелаксациями и недорелаксациями при хорошо развитом «предвидении» у расчетчика может сократить работу в десятки раз по сравнению с процедурой расчета «шаг за шагом».

Общие правила

1. Начинать расчет следует с двухзначными величинами, чтобы большинство операций можно было производить «в уме». Получив,

таким образом, первое приближение к распределению рассчитываемой функции, переходят к трехзначным величинам или к более мелкой сетке.

2. Подсчет новых значений остатков обычно легче делать исходя из сделанных изменений функции, а не из полных значений (см. § 17-3).

3. Однако время от времени следует делать полную проверку всех остатков по имеющимся полным значениям функции.

В конце расчета такая проверка обязательна.

4. В первую очередь ликвидируются остатки в тех точках, где их знаки отличаются от знаков остатков в окружающих точках.

5. Целью расчета является ликвидация остатков во всех узловых точках сетки. Поэтому нельзя увлекаться работой в какой-либо одной части сетки, не следя за изменениями остатков во всех точках других частей. Не принесет пользы, например, попытка ликвидации остатков в большинстве точек за счет накопления большого остатка в одной или двух точках, даже лежащих в области поля, мало интересующей расчетчика.

Большой остаток хотя бы в одной точке свидетельствует о том, что распределение рассчитываемой функции еще далеко от действительного во всем рассчитываемом поле.

6. Изменение остатка в какой-либо точке вне области изменения значений функции численно равно сумме приращений функции в узловых точках, непосредственно соединенных с данной точкой линиями — сторонами ячеек сетки.

7. Изменение остатка в какой-либо точке, лежащей внутри области изменения функции, численно равно взятому с обратным знаком учетверенному изменению функции в данной точке плюс сумма приращений в соседних точках.

8. Если во всех точках области изменения функции производится равное изменение ее значений, то изменений остатков в точках, лежащих внутри области и не прилегающих непосредственно к ее границам, не происходит (точка K шаблона на рис. 17-4,2).

При умелом применении указанных правил работа на сетке по методу ликвидации остатков отнюдь не является многократным исполнением однообразных арифметических операций; открыто широкое поле для изобретательности работника и использования накопленного им опыта для скорейшего достижения цели.

Можно сказать, что работа на сетке обладает некоторыми спортивными качествами, напоминающими настольные игры.

Процедура расчета методом ликвидации остатков наиболее удобна при работе «вручную» с помощью простейших вычислительных средств (настольная клавишная счетная машина или конторские счеты).

Количество расчетных точек не должно быть очень большим, превышающим, например, несколько десятков. Поэтому стремятся применять возможно крупную сетку, переходя в процессе расчета к более сложным расчетным формулам, нежели формулы «4». При этом может быть достигнуто не только ускорение расчета, но даже и повышение точности (§ 17-5).

17-5. ФОРМУЛЫ «БОЛЬШИХ МОЛЕКУЛ»

Формулы «4» [(17-14) — (17-17)] были первыми приближениями в замене частных производных разностями по уравнению (17-5), в которой принимались во внима-

ние лишь вторые разности по координатным направлениям.

Следующей ступенью в уточнении расчетов будет использование в (17-5) членов, содержащих четвертые разности.

Подставив выражения (17-8) и (17-12) в (17-5) и пренебрегая разностями шестого порядка и выше, получим уточненное приближение для второй производной в направлении x

$$a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{4}{3} (\varphi_P + \varphi_R - 2\varphi_O) - \frac{1}{12} (\varphi_{(PP)} + \varphi_{(RR)} - 2\varphi_O). \quad (17-18)$$

Номенклатура точек показана на рис. 17-1.

Учет четвертой разности сведен, таким образом, к учету влияния на рассчитываемую точку поля O , оказываемого точками PP и RR , удаленными на вдвое большее расстояние, нежели ближайшие точки P и R . Отношение коэффициентов влияния точек обоих видов равно

$$\frac{4}{3} : \frac{1}{12} = 16 = 2^4.$$

Поскольку уравнения Лапласа и Пуассона, а также и приближения к ним не зависят от ориентации координатных осей, знаки влияния тех или иных точек не имеют значения.

Учтем влияние на точку O всех точек поля, входящих в горизонтально заштрихованный на рис. 17-1 квадрат, как лежащих в серединах сторон P, Q, R и S , так и находящихся в углах $(PQ), (QR), (RS)$ и (SP) . Расстояния от угловых точек до центральной точки O в $\sqrt{2}$ раз больше расстояний от точек P, Q, R и S . Поэтому влияние угловых точек будет в $(\sqrt{2})^4 = 4$ раза меньше влияния точек P, Q, R и S . Коэффициент при φ_0 всегда равен сумме коэффициентов при значениях φ окружающих точек.

Таким образом, можно написать:

$$4(\varphi_P + \varphi_Q + \varphi_R + \varphi_S) + (\varphi_{(PQ)} + \varphi_{(QR)} + \varphi_{(RS)} + \varphi_{(SP)}) - 20\varphi_O = 0. \quad (17-19)$$

Эта формула называется формулой «20». Она относится к группе так называемых формул больших молекул, выведенных иными путями Либманном, Бикли, Томом и другими авторами [Л. 63].

Для проверочных расчетов полезны более сложные формулы, охватывающие точки, лежащие на сторонах и в углах большого квадрата на рис. 17-1:

а) формула «100»

$$\begin{aligned}
 & 10 (\varphi_{(PP)} + \varphi_{(QQ)} + \varphi_{(RR)} + \varphi_{(SS)}) + \\
 & + 7 (\varphi_{(PPQ)} + \varphi_{(PQQ)} + \varphi_{(QQR)} + \varphi_{(QRR)} + \\
 & + \varphi_{(RRS)} + \varphi_{(RSS)} + \varphi_{(SSP)} + \varphi_{(SPP)}) + \\
 & + (\varphi_{(PPQQ)} + \varphi_{(QQRR)} + \varphi_{(RRSS)} + \varphi_{(SSPP)}) - 100\varphi_0 = 0;
 \end{aligned}
 \tag{17-20}$$

б) формула «92», рекомендуемая вместо формулы «100» в случаях, когда вблизи одного из углов большого квадрата находится сингулярность (резкий скачок в величине рассчитываемой функции [Л. 63]),

$$\begin{aligned}
 & 7 (\varphi_{(PP)} + \varphi_{(QQ)} + \varphi_{(RR)} + \varphi_{(SS)}) + 8 (\varphi_{(PPQ)} + \varphi_{(PQQ)} + \\
 & + \varphi_{(QQR)} + \varphi_{(QRR)} + \varphi_{(RRS)} + \varphi_{(RSS)} + \varphi_{(SSP)} + \\
 & + \varphi_{(SPP)}) - 92\varphi_0 = 0.
 \end{aligned}
 \tag{17-21}$$

Применение формул «больших молекул» может принести значительное сокращение числа расчетных операций. По Тому [Л. 63] расчет полей квадратной формы при одной и той же заданной точности проходит по формуле «100» впятеро быстрее, чем по формуле «4», и вдвое быстрее, нежели по формуле «20». При этом еще не полностью оценены преимущества формулы «100», вытекающие из того, что в ее выводе сохранены члены более высоких порядков и сокращены так называемые «ошибки округления».

На рис. 17-3 числа в скобках представляют результат уточненного расчета по формуле «20» (17-19).

17-6. ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД

При программировании расчета на высокоскоростной вычислительной машине наиболее важно разбить процедуру расчета на возможно простейшие «рутинные» операции, проводимые в одном и том же возможно простейшем порядке от точки к точке. При высокой скорости работы машины количество рутинных операций не играет существенной роли при расчете полей со сравнительно небольшим числом точек*. Такой метод проведения расчета называется итерационным.

Порядок работы итерационным методом:

а) Задаются некоторыми предварительными значениями рассчитываемой функции в каждой точке поля (аналогично началу расчета методом ликвидации остатков).

б) Выбирают порядок обхода точек сетки одна за другой; этот порядок в дальнейшем соблюдается до конца расчета.

в) Производится систематическая проверка величин рассчитываемой функции в каждой точке по избранной расчетной формуле «4» или «20» (или какой-либо другой). В результате получают улучшенные значения функции в каждой точке.

В расчетах всегда участвуют новейшие значения функции в соседних точках.

г) После обработки всех точек возвращаются к начальной точке и начинают второй круг расчета всех точек по очереди, затем третий круг и т. д.

Расчет считается законченным, когда значения функции во всех точках остались (с заданной степенью точности) теми же, что были в предыдущем круге.

* Электронные вычислительные машины позволяют проводить расчеты полей с большими числами точек, например 40×80 и выше. Однако при применении метода итераций к расчету обширного поля могут оказаться недостаточными машинная память и скорость работы, особенно в случаях полей с источниками (расчет по уравнению Пуассона) и при смешанных краевых (граничных) условиях, когда на большей части границы требуется равенство нулю нормальной производной рассчитываемой функции (задача Неймана, см. § 17-10). В течение последних двух десятилетий математиками разработаны более эффективные методы расчета, например метод матричной факторизации (см. книгу Г. И. Марчука «Методы расчета ядерных реакторов», Атомиздат, 1961, стр. 214) (прим. проф. А. С. Кронрода).

Итерационный метод непрактичен при проведении расчета «вручную» вследствие слишком медленного продвижения к конечной цели.

17-7. ФОРМУЛЫ ЛАГРАНЖА

При числовом расчете электрических и магнитных полей нередко приходится проводить приближенное интерполирование, приближенное численное дифференцирование и приближенное численное интегрирование. Эти операции могут выполняться помощью формул Лагранжа, получаемых из разностных соотношений.

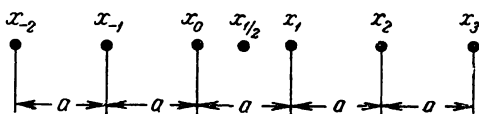


Рис. 17-5. Обозначения точек (к формулам Лагранжа).

Пусть известны значения исследуемой функции φ в точках $\dots x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3 \dots$, расположенных вдоль оси x на равных интервалах расстояния a одна от другой (рис. 17-5).

а) Интерполяция посередине интервала. Значение функции в точке $x_{1/2}$ приближенно равно:

$$\varphi_{1/2} = \frac{1}{16} (-\varphi_{-1} + 9\varphi_0 + 9\varphi_1 - \varphi_2). \quad (17-22)$$

Если же числовые значения функции известны лишь в трех ближайших точках, то

$$\varphi_{1/2} = \frac{1}{8} (3\varphi_0 + 6\varphi_1 - \varphi_2). \quad (17-23)$$

б) Дифференцирование. Первая производная функция по направлению x в точке x_0 приближенно равна:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_0 = \frac{1}{a} \left\{ \frac{2}{3} (\varphi_1 - \varphi_{-1}) - \frac{1}{12} (\varphi_2 - \varphi_{-2}) \right\}. \quad (17-24)$$

В (17-24) учтены первые и третьи разности.

В пограничных точках применяются „концевые“ формулы вида

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_0 = \frac{1}{2a} \{ 3(\varphi_1 - \varphi_0) - (\varphi_2 - \varphi_1) \}. \quad (17-25)$$

Вторая производная в точке x_0 приближенно равна:

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{1}{a^2} \left\{ -\frac{5}{2} \varphi_0 + \frac{4}{3} (\varphi_1 + \varphi_{-1}) - \frac{1}{12} (\varphi_2 + \varphi_{-2}) \right\}. \quad (17-26)$$

„Концевая“ формула

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{1}{a^2} (2\varphi_0 - 5\varphi_1 + 4\varphi_2 - \varphi_3). \quad (17-27)$$

Концевые формулы должны применяться лишь при неизбежной необходимости.

в) Интегрирование. В пределах одного интервала

$$\int_0^{a=1} \varphi dx = \frac{a}{24} [13(\varphi_0 + \varphi_1) - (\varphi_2 + \varphi_{-1})]. \quad (17-28)$$

Концевая формула

$$\int_0^{a=1} \varphi dx = \frac{a}{2} (\varphi_0 + \varphi_1). \quad (17-29)$$

В пределах двух интервалов (правило Симпсона)

$$\int_0^{2a} \varphi dx = \frac{a}{3} (\varphi_0 + 4\varphi_1 + \varphi_2). \quad (17-30)$$

17-8. РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННОСТИ ПОЛЯ

Если на сетке рассчитано распределение скалярного потенциала, то расчет напряженности поля проводят исходя из формулы градиента потенциала, пользуясь формулами численного дифференцирования.

Наибольший интерес обычно представляет вычисление напряженности поля на границе.

Пример. Действительная разность скалярных магнитных потенциалов между границами поля на рис. 17-3 составляет 150 ав ; в расчете же она принята равной 1000 условных единиц. Расчетный масштаб равен $m=0,15$. Сторона ячейки сетки a равна $1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м}$.

Напряженность магнитного поля в точке k по формуле (17-2б) равна:

$$\begin{aligned} H_k &= -\frac{0,15}{2 \cdot 10^{-3}} [3(772 - 1000) - (551 - 772)] \mathbf{j} - \\ &= 34,7 \cdot 10^3 \mathbf{j} \text{ [a/m]}. \end{aligned}$$

В угловой точке n

$$H_n = -\frac{0,15}{2 \cdot 10^{-3}} \{ [3(153 - 0) - (188 - 153)] \mathbf{i} -$$

$$- [3(284 - 0) - (526 - 284)] \mathbf{j} \} = (-31,8 \cdot 10^3 \mathbf{i} + 45,7 \cdot 10^3 \mathbf{j}) \text{ [a/m]}.$$

Векторы H_k и H_n показаны на рис. 17-3.

Если на сетке было рассчитано распределение векторного потенциала, например, перпендикулярной чертежу составляющей (являющейся единственной в двумерном магнитном поле), то расчет напряженности поля производят исходя из формулы ротора; например, для точки O на рис. 17-1

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_a} = \frac{m}{\mu_a} [\nabla A] = \frac{m}{\mu_a} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial A_x}{\partial x} \mathbf{j} \right), \quad (17-31)$$

где m — расчетный масштаб.

Частные производные вычисляются по (17-24); для точек, лежащих на границе, применяется конечная формула (17-25). При расположении точек по рис. 17-1 и при $a=1$ по (17-24) имеем:

$$H_x = \frac{m}{\mu_a} \left[\frac{2}{3} (A_{zQ} - A_{zS}) - \frac{1}{12} (A_{zQQ} - A_{zSS}) \right];$$

$$H_y = \frac{m}{\mu_a} \left[\frac{2}{3} (A_{zP} - A_{zR}) - \frac{1}{12} (A_{zPP} - A_{zRR}) \right].$$

17-9. РАСЧЕТ ПРОВОДИМОСТИ ИЛИ ЕМКОСТИ ОБЛАСТИ ПОЛЯ

Для расчета проводимости или емкости вычисляется поток вектора индукции, проходящий через граничную поверхность,

$$\Phi = \int_s kH ds, \quad (17-32)$$

где k — характеризующий среду коэффициент (удельная проводимость, магнитная проницаемость или диэлектрическая проницаемость).

Значение проводимости (или емкости) находится затем из уравнения

$$G \text{ (или } C) = \frac{\Phi}{U_r}, \quad (17-33)$$

где U_r — разность скалярных потенциалов граничных поверхностей.

В качестве примера рассчитаем магнитную проводимость поля на рис. 17-3 на участке sk и на единицу длины (1 м) в направлении, перпендикулярном чертежу, считая, что цифры, поставленные слева от узловых точек сетки, выражают значения скалярного магнитного потенциала.

Подсчитываем числовые значения напряженности поля на поверхности полюса по (17-25), принимая масштаб $m=0,15$ и длину стороны ячейки сетки $a=1 \text{ мм}=10^{-3} \text{ м}$.

Таблица 17-1

Точки	s	r	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	k
10^{-3} Н а/м	37,5	37,5	37,3	37,1	36,7	36,1	35,5	35,0	34,7
$10^{-3} \text{ Н}_{\text{сред}} \text{ а/м}$	37,5	37,4	37,2	36,9	36,4	35,8	35,2	34,9	

Результаты расчета сводим в табл. 17-1.

Коэффициент k в (17-32) представляет собой в данном случае магнитную проницаемость воздуха $\mu_0=4\pi \cdot 10^{-7} \text{ гн/м}$.

Величина потока индукции через поверхность $sk \times 1$ равна сумме чисел, стоящих в нижней графе табл. 17-1, умноженной на $ka \times 1 = 4\pi \cdot 10^{-10} \text{ гн}$,

$$\Phi = 36,6 \cdot 10^{-5} \text{ в} \cdot \text{сек.}$$

Магнитная проводимость [по (17-33)] равна (при $U_r=150 \text{ ав}$):

$$G'_m = 2,44 \cdot 10^{-6} \text{ гн.}$$

17-10. ЗАДАЧА НЕЙМАНА

Иногда в качестве граничного условия задается не сама функция, а ее нормальная производная на границе. Такой случай называется задачей Неймана.

Рассмотрим в качестве примера распределение потенциала в проводнике в виде плоской ленты, изогнутой под прямым углом, причем ширина ленты в месте изгиба изменяется (рис. 17-6). К границам AE и $BГ$

подведено напряжение, равное 100 условным единицам. Поскольку переход тока через границы $АВВ$ и $ЕДГ$ не происходит, производная потенциала по нормали к этим границам должна равняться нулю.

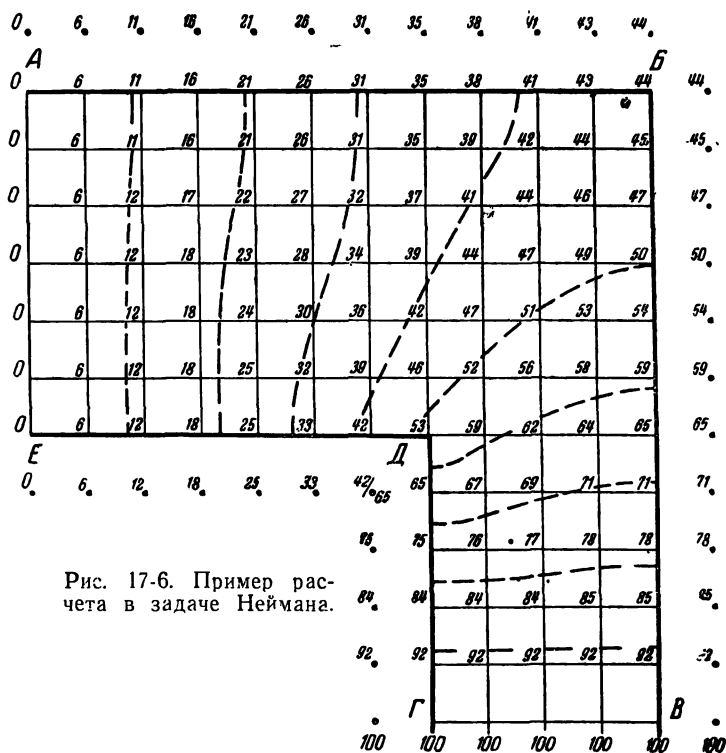


Рис. 17-6. Пример расчета в задаче Неймана.

Расчет производится с помощью фиктивных точек, расположенных в окружающей среде; значение потенциала в каждой из этих фиктивных точек поддерживается равным с потенциалом ближайшей точки, лежащей на границе. Процедура нахождения распределения потенциала в остальном не отличается от описанной в § 17-3; однако расчету подвергаются не только внутренние точки сетки, но и точки, лежащие на границах $АВВ$ и $ЕДГ$. Введение в расчет фиктивных точек равноценно сдвигу границы на расстояние $a/2$, равное половине стороны ячейки сетки. Этим вносится в расчет

дополнительная погрешность, которая при достаточно мелкой сетке будет, однако, небольшой.

Возможен другой способ расчета, не требующий фиктивных точек. Внутренние (не лежащие на границе) точки рассчитываются, как обычно, по формуле «4» или «20». Потенциалы же граничных точек определяются в процессе расчета по формуле (17-25). Например, в случае равенства нулю производной потенциала по нормали к границе потенциал граничной точки x_0 равен:

$$\varphi_0 = \varphi_1 + \frac{1}{3}(\varphi_1 - \varphi_2),$$

где φ_1 — потенциал ближайшей внутренней точки x_1 , а φ_2 — потенциал следующей внутренней точки x_2 .

Результаты расчета обоими способами задачи, показанной на рис. 17-6, мало отличаются один от другого.

17-11. ИРРЕГУЛЯРНЫЕ ТОЧКИ

Иногда граничная линия не совпадает с точками сетки. Одним из возможных путей разрешения такого затруднения будет составление специальных расчетных формул для точек сетки, имеющих неодинаковые расстояния до соседних точек (рис. 17-7).

Значения первых производных по оси x в промежуточных точках при учете только первых разностей будут:

а) в точке, лежащей посередине отрезка a_P ,

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{O-P} = \frac{\varphi_P - \varphi_O}{a_P}; \quad (17-34)$$

б) в точке, лежащей посередине отрезка a_R ,

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{R-O} = \frac{\varphi_O - \varphi_R}{a_R}. \quad (17-35)$$

Рис. 17-7. Иррегулярная точка.

Первая производная в самой точке O может быть вычислена по интерполяционной формуле вида

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_O &= \frac{a_R \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{O-P} + a_P \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{R-O}}{a_P + a_R} = \\ &= \frac{\frac{a_R}{a_P} (\varphi_P - \varphi_O) - \frac{a_P}{a_R} (\varphi_R - \varphi_O)}{a_P + a_R}. \end{aligned} \quad (17-36)$$

По этой формуле рассчитывается x -я составляющая напряженности поля.

Вторая производная по оси x в точке O находится как разностное отношение, составленное из выражений (17-34) и (17-35),

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_O = \frac{2}{a_P + a_R} \left(\frac{\varphi_P - \varphi_R}{a_P} + \frac{\varphi_R - \varphi_O}{a_R} \right). \quad (17-37)$$

Аналогичные формулы легко составить и для производных по оси y .

Уравнение Лапласа или Пуассона для иррегулярной точки O на рис. 17-7 получит следующую форму:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_P + a_R} \left(\frac{\varphi_P - \varphi_O}{a_P} + \frac{\varphi_R - \varphi_O}{a_R} \right) + \\ & + \frac{1}{a_Q + a_S} \left(\frac{\varphi_Q - \varphi_O}{a_Q} + \frac{\varphi_S - \varphi_O}{a_S} \right) = 0 \text{ или } -g \frac{\rho}{\epsilon_0 a}, \end{aligned} \quad (17-38)$$

где

$$g = \frac{1}{2} (a_P + a_R) (a_Q + a_S).$$

Если точка регулярна, т. е. все расстояния от нее до соседних точек сетки одинаковы $a_P = a_Q = a_R = a_S = a$, то уравнение (17-38) обращается в (17-14) или (17-15).

Формулы больших молекул для иррегулярных точек обычно не применяются вследствие их непрактичности.

Применение различных расчетных формул к точкам одной и той же сетки затрудняет процедуру расчета, особенно итерационным методом. Поэтому, если имеется поле, подчиняющееся уравнению Лапласа, может быть целесообразным отказаться от иррегулярных точек и перейти к инверсионному способу расчета (§ 17-18).

17-12. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОДКОВООБРАЗНОГО ПОСТОЯННОГО МАГНИТА

На рис. 17-8 показано распределение скалярного магнитного потенциала, рассчитанное на квадратной сетке. Пунктиром показано несколько эквипотенциальных линий. В качестве граничных условий предположено: а) нарастание скалярного магнитного потенциала вдоль ножки магнита по линейному закону; б) якорь не насыщен, так что потенциал его поверхности одинаков с потенциалом нейтральной линии, принятым равным нулю.

Четыре точки поля не удовлетворяют условиям применения уравнения (17-14); для них составлялись уравнения на базе уравнения (17-38). Например, для точки с потенциалом 30 расчетное уравнение после подстановки расстояний в уравнение (17-38) приняло вид:

$$\varphi_P + 1,27\varphi_Q + \varphi_R + 2,18\varphi_S - 5,45\varphi_O = 0.$$

Индекс P относится к точке, лежащей под точкой 30.

На рис. 17-8,б и в показаны кривые распределения магнитной индукции вдоль нейтральной линии и по поверхности якоря. Кривые подсчитаны по формуле (17-25). Заштрихованные площади изображают в масштабе значения потока, пронизывающего нейтральную линию и поверхность якоря.

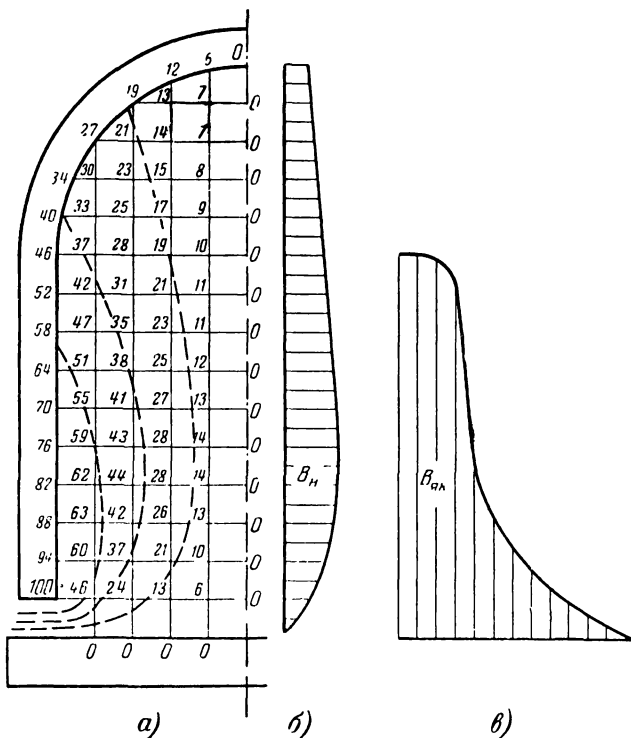


Рис. 17-8. Поле постоянного магнита.

17-13. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СЕТКА

Если ожидается, что рассчитываемая величина поля значительно изменится вдоль одного из координатных направлений (например, x) и менее изменчива вдоль другого (y), может быть выгодным с точки зрения сокращения числа расчетных точек применение прямоугольной сетки (рис. 17-9).

Расчетное уравнение Лапласа или Пуассона легко составляется на базе (17-38). Например, в частном случае, когда $a_Q = a_S = a$ и $a_P = a_R = 2a$, расчетная формула будет такой:

$$\frac{1}{4} (\varphi_P + \varphi_R) + (\varphi_Q + \varphi_S) - 2,5\varphi_O = 0 \text{ или } -4a^2 \frac{\rho}{\epsilon_a}. \quad (17-39)$$

На рис. 17-9 рассчитано по этой формуле распределение потенциала в однородном плоском проводящем листе прямоугольной формы, к правому нижнему углу которого приложен тонкий сварочный электрод с потенциалом в 100 условных единиц. Вторым электродом является хорошо проводящая полоса с потенциалом 0, которой зажат верхний край листа. Граничное условие на прочих сторонах листа — равенство нулю нормальных к границе составляющих градиента потенциала и напряженности поля.

Для проведения расчета вдоль этих границ поставлены фиктивные точки, потенциалы которых поддерживаются равными с потенциалами ближайших точек на границе.

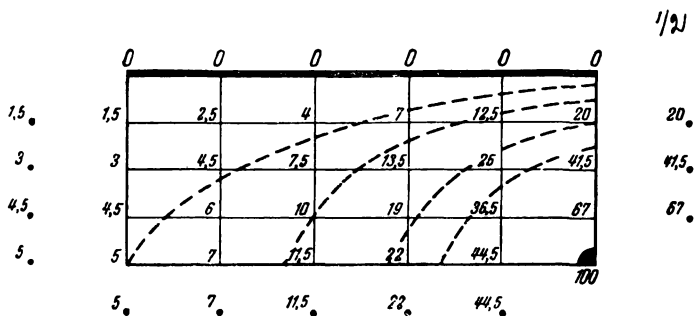


Рис. 17-9. Прямоугольная сетка.

Это пример смешанной задачи, в которой на одной части границ задается значение рассчитываемой функции (как в задаче Дирихле), а на другой — значение нормальной производной (как в задаче Неймана).

Пунктиром показано несколько эквипотенциальных линий.

17-14. ПОЛЯРНАЯ СЕТКА

В ряде расчетов целесообразно пользоваться полярными координатами. Таковы, например, расчеты магнитного поля вращающейся электрической машины или электрического поля в ряде электронных приборов и т. п.

Допустим, что расчет производится по уравнению Лапласа, которое в полярных координатах содержит не только вторые производные по r и θ , но и первую производную по r ,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (17-40)$$

Для системы точек O , P , Q , R и S , показанных на рис. 17-10, расчетная формула составляется путем подстановки в (17-40) вместо производных соответствующих разностных выражений, вычисляемых аналогично (17-36) и (17-37) в предположении, что дуга ROP мало

отличается от прямолинейного отрезка. Это практически верно при малых центральных углах α_P и α_R :

$$\frac{1}{a_P + a_R} \left(\frac{\varphi_P - \varphi_O}{a_P} + \frac{\varphi_R - \varphi_O}{a_R} \right) + \frac{1}{a_Q + a_S} \left[\frac{\varphi_Q - \varphi_O}{a_Q} \left(1 + \frac{a_S}{2r} \right) + \frac{\varphi_S - \varphi_O}{a_S} \left(1 - \frac{a_Q}{2r} \right) \right] = 0. \quad (17-41)$$

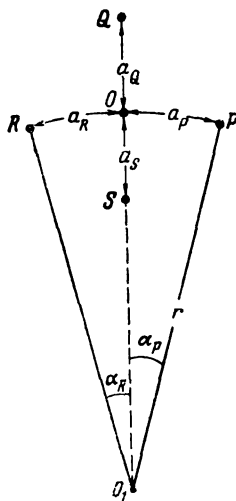


Рис. 17-10. Полярная сетка.

Для областей поля, достаточно удаленных от начала координат O_1 , выражение (17-41) можно существенно упростить путем рационального подбора радиусов точек и углов.

Пусть $a_P = a_R = a = ra$. Если величины радиусов точек S , O , Q и т. д. выбраны в геометрической прогрессии со знаменателем, определяемым выражением

$$\beta = \frac{r + a_Q}{r} = \frac{r}{r - a_S} \approx 1 + \alpha \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right), \quad (17-42)$$

то уравнение (17-41), связывающее потенциалы соседних точек в полярных координатах, примет простой вид [Л. 13]:

$$\varphi_P + \varphi_Q + \varphi_R + \varphi_S - 4\varphi_O = 0. \quad (17-43)$$

Это уравнение совершенно одинаково с формулой «4», выведенной для прямоугольных декартовых координат. Следовательно, операции по практическому расчету могут быть сделаны одинаковыми в обеих системах координат.

Величина погрешности получается при этом равной:

при $\alpha = 15^\circ = 0,2618 \text{ рад}$ — не более 0,4%;

при $\alpha = 7,5^\circ = 0,1309 \text{ рад}$ — не более 0,034%;

при $\alpha = 3,75^\circ = 0,06545 \text{ рад}$ — не более 0,003%.

17-15. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ РАССЕЯНИЯ МЕЖДУ ПОЛЮСАМИ МАШИНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Распределение скалярного магнитного потенциала показано на рис. 17-11; пунктиром показаны эквипотенциальные линии. Граничные условия:

а) линейное нарастание потенциала вдоль части поверхности полюса, покрытой обмоткой возбуждения.

б) отсутствие существенного падения магнитного напряжения в стали якоря, полюсного башмака и ярма; потенциал их поверхностей равен потенциалу нейтральной линии, принятому за нуль. Имеются семь узловых точек, к которым уравнение (17-43) непри-

Задача расчета превращается в двухмерную с сеткой в плоскости rz . Если рассчитываемая область поля достаточно удалена от оси (например, в случае поля электрического тока в трубчатом проводнике, с полостью значительного радиуса, заполненной диэлектриком), можно воспользоваться сеткой со специально подобранными радиусами узловых точек, как показано в § 17-14, и применить простую расчетную формулу (17-43).

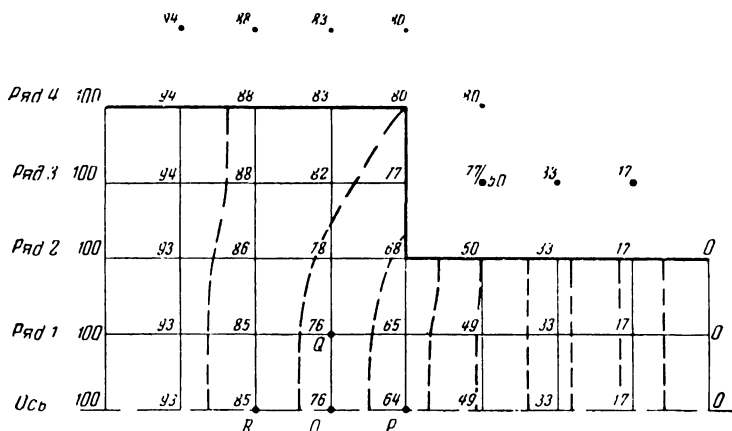


Рис. 17-12. Расчет распределения потенциала в окрестностях стыка двух цилиндрических проводников разных радиусов.

Однако при расчете поля в областях, прилегающих к оси, этот прием неэффективен. Сетка получается чрезмерно мелкой и обременительной для вычислений.

Здесь следует работать на простой квадратной сетке ($a_P = a_Q = a_R = a_S = a$) и пользоваться расчетными уравнениями с неодинаковыми коэффициентами при значениях рассчитываемой функции φ для различных рядов узловых точек. Эти уравнения легко выводятся из полного уравнения типа (17-41). Они служат необходимыми модификациями лапласовского уравнения «4» [(17-14)].

В первом (считая от оси симметрии) ряду $r=a$ (рис. 17-12) и

$$\varphi_P + \frac{3}{2} \varphi_Q + \varphi_R + \frac{1}{2} \varphi_S - 4\varphi_O = 0. \quad (17-44)$$

Для узловых точек второго ряда $r = 2a$ и

$$\varphi_P + \frac{5}{4} \varphi_Q + \varphi_R + \frac{3}{4} \varphi_S - 4\varphi_O = 0 \quad (17-45)$$

и т. д.

Для точек n -го ряда $r = na$ и

$$\varphi_P + \frac{2n+1}{2n} \varphi_Q + \varphi_R + \frac{2n-1}{2n} \varphi_S - 4\varphi_O = 0. \quad (17-46)$$

При $n > 10$ (примерно) эта формула стремится к выражению (17-43).

Для точек, лежащих на самой оси симметрии, уравнение Лапласа в цилиндрических координатах нуждается в модификации.

Член $\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}$ при $r=0$ обращается в неопределенность,

поскольку при наличии осевой симметрии функция φ имеет на оси экстремальное значение и ее производная по r равна нулю. Эта неопределенность легко раскрывается по правилу Лопиталья

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}, \quad (17-47)$$

и уравнение Лапласа для осевых точек становится таким:

$$2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (17-48)$$

Поскольку в силу симметрии $\varphi_Q = \varphi_S$, расчетное разностное уравнение (полагая точки R , O и P лежащими на оси, рис. 17-12) для осевых точек таково:

$$\varphi_P + 4\varphi_Q + \varphi_R - 6\varphi_O = 0. \quad (17-49)$$

На рис. 17-12 представлен пример расчета распределения потенциала поля электрического тока в диаметральной плоскости цилиндрического проводника, радиус которого внезапно изменяется. Расчет проведен в условных единицах потенциала, величина которого принята равной 100 в поперечном сечении широкой части проводника, отстоящем от места иррегулярности на расстояние, равное радиусу. На таком же расстоянии в другую сторону находится поперечное сечение узкой

части проводника, в которой потенциал принят за нуль. Граничное условие на боковых поверхностях и на торцевой поверхности в месте иррегулярности сводится к равенству нулю производной потенциала (а следовательно, и составляющей напряженности поля) по нормали к границе. Пунктиром показаны эквипотенциальные линии.

17-17. ИНВЕРСИЯ ОТКРЫТОГО ПОЛЯ

Если граница рассчитываемой области поля находится в бесконечности, может быть целесообразной инверсия области поля, подчиняющегося уравнению Лапласа.

Инверсия является простейшим случаем конформного преобразования (гл. 9), при котором рассматриваемое

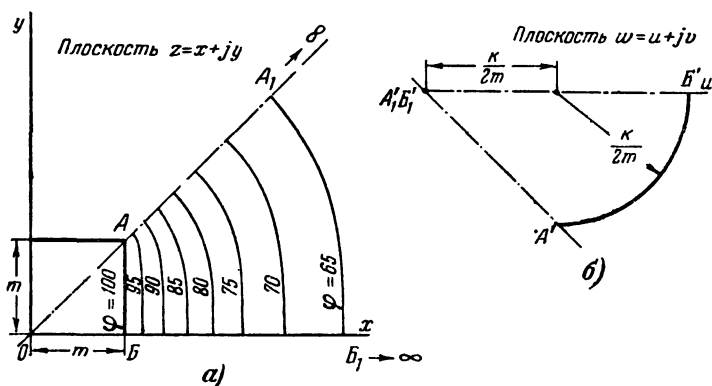


Рис. 17-13. Пример инверсии области поля.

мая открытая (т. е. не имеющая границы на конечном расстоянии) область заменяется другой, закрытой областью, окруженной границами, находящимися на конечных расстояниях друг от друга.

Рассмотрим пример расчета электрического поля в окрестностях очень длинного прямого проводника квадратного сечения $2m \times 2m$ (рис. 17-13), заряженного до потенциала в 100 условных единиц. В силу симметрии достаточно ограничиться полем снаружи октанта AOB . Рассчитываемая область поля ограничена слева линией AB , являющейся $\frac{1}{8}$ периметра сечения проводника, сверху и снизу — уходящими в бесконечность ли-

ниями симметрии AA_1 и BB_1 ; вправо область поля простирается безгранично.

Представим рассчитываемую область как плоскость комплексного переменного $z = x + jy$ и применим преобразование

$$\omega = \frac{k}{z + z_0}, \quad (17-50)$$

где k — постоянное вещественное число, определяющее отношение масштабов;

z_0 — постоянное комплексное число, определяющее положение начала координат на плоскости z .

Число z_0 вводится в знаменатель формулы преобразования для того, чтобы число ω всегда было конечным, т. е. для получения на плоскости ω закрытой области, все точки которой лежат на конечных расстояниях друг от друга. Это необходимо в случаях, когда начало координат на плоскости z лежит внутри преобразуемой области или на ее границе.

В данном примере начало координат на плоскости z (рис. 17-13,а) находится вне преобразуемой области. Поэтому число z_0 можно положить равным нулю.

Формула преобразования получит вид:

$$\omega = u + jv = \frac{k}{z} = \frac{k}{x + jy} = \frac{kx}{x^2 + y^2} - j \frac{ky}{x^2 + y^2}. \quad (17-51)$$

Аналогичным путем можно получить обратное преобразование (с плоскости ω на плоскость z)

$$z = x + jy = \frac{ku}{u^2 + v^2} - j \frac{kv}{u^2 + v^2}. \quad (17-52)$$

Линия AB на плоскости z ($x = \text{const} = m$) преобразуется на плоскости ω в дугу окружности $A'B'$, определяемую уравнением

$$\frac{ku}{u^2 + v^2} = m,$$

которое легко приводится к виду

$$\left(u - \frac{k}{2m}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{k}{2m}\right)^2. \quad (17-53)$$

Радиус окружности равен $k/2m$; ее центр находится на оси u на расстоянии $k/2m$ от начала координат $A'_1B'_1$ на плоскости ω .

Находящаяся в бесконечности правая граница области поля на плоскости z оказалась на плоскости ω сжавшейся в точку $A'_1B'_1$, лежащую в начале координат.

Расчет распределения потенциала на плоскости ω по формуле «4» или «20» не вызовет затруднений, поскольку количество расчетных точек ограничено; потенциал точки $A'_1B'_1$ равен нулю, потенциал любой точки дуги $A'B'$ задан и равен $\varphi=100$; потенциалы в точках, лежащих на линиях симметрии $A'A'_1$ и $B'B'_1$, определяются в процессе расчета из условий симметрии точек рассчитываемой области с точками прилегающих соседних областей.

Затем рассчитанные на сетке плоскости ω значения потенциала переносятся с помощью (17-52) в соответствующие точки на плоскости z .

На рис. 17-13,а показано несколько эквипотенциальных линий, построенных на основании такого расчета.

При применении инверсии может получиться значительная погрешность расчета в областях поля, прилегающих к началу координат на плоскости ω , соответствующих удаленным от заряженного проводника областям на плоскости z . Причина в том, что ячейки сетки в этих областях соответствуют слишком большим действительным расстояниям.

Однако это обстоятельство не имеет практического значения, поскольку в таких областях поле может быть легко рассчитано другими путями. В рассматриваемом примере поле на достаточно большом расстоянии от заряженного проводника квадратного сечения будет мало отличаться от поля заряженной оси, рассмотренного в § 4-4; эквипотенциальные линии будут приближаться к окружностям с центром на оси проводника.

На рис. 17-13 уже заметна такая тенденция.

17-18. ИНВЕРСИОННЫЙ СПОСОБ РАСЧЕТА

В ряде расчетов желательно сразу получить координаты точек, в которых функция имеет то или иное заданное значение. Этим облегчается графическое построение линий поля и эквипотенциальных линий, обеспечивающее наглядность, столь необходимую для глубокого понимания сложных процессов в электрических и магнитных полях.

Такие задачи для полей, подчиняющихся уравнению Лапласа, удобно решаются инверсионным способом, не требующим операций с иррегулярными точками.

Скалярный потенциал φ двумерного поля является функцией координат на плоскости комплексного переменного $z = x + jy$. С другой стороны, потенциал φ можно рассматривать как вещественную (или мнимую) составляющую обобщенной функции комплексного переменного $\Phi = \varphi + j\psi$ (или $\Phi_1 = \psi + j\varphi$), называемой комплексным потенциалом поля. Сопряженная функция ψ называется функцией потока. Итак, можно записать:

$$\Phi = \varphi + j\psi = f(z) = f(x + jy). \quad (17-54)$$

Это выражение является общей формой преобразований, рассматривавшихся в гл. 9. Обе составляющие комплексного потенциала (φ и ψ) подчиняются уравнению Лапласа на плоскости z .

Справедливы и обратные заключения. Если $\Phi = f(z)$, то $z = f_1(\Phi)$ или в развернутом виде

$$x + jy = f_1(\varphi + j\psi). \quad (17-55)$$

Координаты точек на плоскости двумерного поля x и y в свою очередь являются функциями комплексного потенциала Φ и подчиняются уравнению Лапласа на плоскости $\Phi = \varphi + j\psi$. Следовательно, уравнение Лапласа можно решать как в отношении распределения значений скалярного потенциала φ (или функции потока ψ) на физической плоскости поля $z = x + jy$, так и в отношении распределения значений координат x и y точек в физической плоскости поля на математической плоскости комплексного потенциала $\Phi = \varphi + j\psi$. В практическом расчете используются свойства обратной величины линейного коэффициента преобразования

$$\frac{dz}{d\Phi} = \frac{1}{M} e^{j\theta}. \quad (17-56)$$

Поскольку $\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 1$, то

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\Phi} &= \frac{dz}{d\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \frac{dz}{\partial \varphi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \\ &+ j \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\cos \theta}{M} + j \frac{\sin \theta}{M}. \end{aligned} \quad (17-57)$$

Прологарифмируем обе части (17-56)

$$\ln \frac{dz}{d\Phi} = \ln \frac{1}{M} + j\theta; \quad (17-58)$$

$\ln \frac{dz}{d\Phi}$ является аналитической функцией; поэтому $\ln \frac{1}{M}$ и θ представляют собой сопряженные функции; каждая из них удовлетворяет уравнению Лапласа как в плоскости комплексного переменного $z = x + jy$, так и в плоскости комплексного потенциала $\Phi = \varphi + j\psi$.

Геометрический смысл обратной величины линейного коэффициента преобразования $dz/d\Phi$ виден из (17-56). Малый отрезок на плоскости Φ при переносе его на плоскость z изменяется по величине в $1/M$ раз и поворачивается на угол θ .

Значения угла θ на границах плоскости Φ легко определяются из картины поля на плоскости z . Записав их, производят посредством формулы «20» (или «4») расчет значений θ в узловых точках сетки на плоскости Φ . Затем по уравнениям Коши—Риманна в разностной форме находятся в точках этой же сетки значения сопряженной функции $\ln \frac{1}{M}$ и ее потенцированные значения $1/M$.

После этого поступают к расчету координат x и y точек на плоскости z , характеризуемых той или иной величиной комплексного потенциала Φ , пользуясь соотношениями (17-57),

$$x = \int \frac{\cos \theta}{M} d\varphi + \text{const}_1; \quad (17-59)$$

$$y = \int \frac{\sin \theta}{M} d\varphi + \text{const}_2. \quad (17-60)$$

Постоянные определяются из свойств поля в процессе расчета (см. числовой пример в § 17-20).

Инверсионный способ применим только к «лапласовским» полям.

17-19. ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОЙ ИЗ СОПРЯЖЕННЫХ ФУНКЦИЙ ПО ИЗВЕСТНЫМ ЗНАЧЕНИЯМ ДРУГОЙ

В уравнениях Коши — Риманна (9-5)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (17-61)$$

заменяем частные производные разностными отношениями, развернув последние в ряды Тэйлора. Пренебрегая

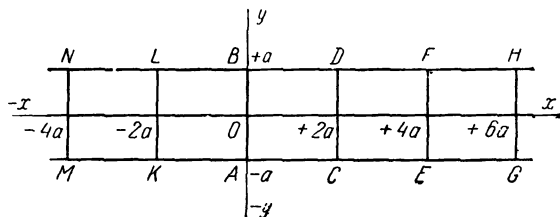


Рис. 17-14. Обозначения точек (в уравнениях Коши — Риманна в разностной форме).

членами, содержащими производные пятого и более высоких порядков, можно получить следующую формулу (при обозначении точек по рис. 17-14):

$$v_O = \frac{7}{24} (u_C - u_K + u_D - u_L) - \frac{1}{48} (u_E - u_M + u_F - u_N). \quad (17-62)$$

Буквенным индексом обозначено, в какой точке на рис. 17-14 берется значение функции v или функции u .

В случаях недоступности значений функции u в равном числе точек по обе стороны от точки O , в которой желают рассчитать значение функции v_0 , приходится применять несимметричные формулы. Так, в случае «односторонности»

$$v_O = \frac{23}{24} (u_C - u_A + u_D - u_B) - \frac{2}{3} (u_E - u_C + u_F - u_D) + \frac{5}{24} (u_G - u_E + u_H - u_F). \quad (17-63)$$

При „частичной односторонности“

$$v_0 = \frac{3}{16} (u_C - u_K + u_D - u_L) + \\ + \frac{5}{96} (u_E - u_K + u_F - u_L) - \\ - \frac{1}{32} (u_G - u_E + u_H - u_F). \quad (17-64)$$

Метод подробного вывода формул см. [Л. 63].

Уравнения Коши — Риманна сохраняют силу при добавлении произвольной постоянной к любой из сопряженных функций. Поэтому к результатам вычислений по формулам (17-62) — (17-64) может быть прибавлена постоянная, определяемая в процессе расчета из свойств и формы исследуемого поля (см. пример в § 17-20).

17-20. ЧИСЛОВОЙ ПРИМЕР РАСЧЕТА ИНВЕРСИОННЫМ СПОСОБОМ

Рассмотрим расчет магнитного поля в угловой части сердечника реактивной катушки с размерами, показанными на рис. 17-15. Такая задача имеет аналитическое решение*. Здесь она выбрана для демонстрации того, что приближенный расчет методом сеток может скорее привести к цели, чем аналитический расчет, и притом с меньшей точностью.

Не показанная на рисунке обмотка возбуждения считается равномерно распределенной по длине сердечника; рассеяние практически отсутствует. Магнитная проницаемость материала сердечника предполагается постоянной (слабое насыщение).

В силу симметрии при расчете достаточно ограничиться $1/8$ сердечника ($OABC$). Преобразуем область $OABC$ на плоскости $z = x + jy$ (рис. 17-15,а) в прямоугольную область $O_1A_1B_1C_1$ на плоскости комплексного потенциала $\Phi = \phi + j\psi$ (рис. 17-15,б).

Записываем на плоскости Φ граничные значения угла θ . Линии AB , BC и CO при переносе с плоскости z на плоскость Φ не изменяют своих направлений, занимая соответственно положения A_1B_1 , B_1C_1 и C_1O_1 . Значение угла θ вдоль этих линий равно нулю. Линия же OA на плоскости z при переносе в положение O_1A_1

на плоскости Φ поворачивается на угол $\theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4} = 0,785$. Такие значения угла θ поставлены в узловых точках, лежащих на линии O_1A_1 на плоскости Φ , за исключением угловых точек O_1 и A_1 , в которых помещены половинные значения 0,393, соответствующие среднему значению угла θ для двух сторон, прилегающих к углам A_1 и O_1 квадратных ячеек сетки.

Посредством формулы «20» (17-19) рассчитываются значения θ во всех узловых точках сетки на плоскости Φ . Результаты записаны

* [Л. 15], задачи 8,34 и 8,37.

на рис. 17-15,б. Средней линии поля DE на плоскости z соответствует прямая D_1E_1 на плоскости Φ . Поле величины θ симметрично относительно прямой D_1E_1 ; значит, производная $\partial\theta/\partial\Phi$ во всех точках этой прямой равна нулю. Из уравнений Коши — Риманна выте-

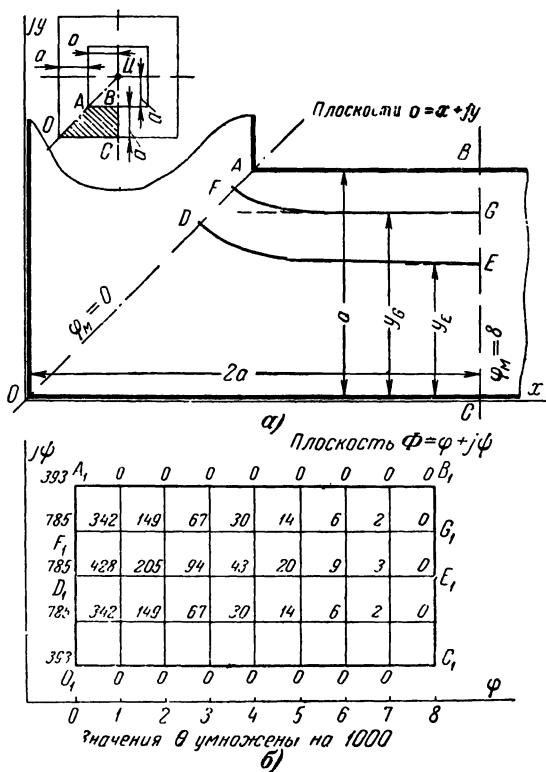


Рис. 17-15. Инверсионный способ расчета (пример).

кает, что вдоль этой линии равна нулю и производная сопряженной функции $\ln \frac{1}{M}$ по другой координате ϕ

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \ln \left(\frac{1}{M_{DE}} \right) = 0. \quad (17-65)$$

Модуль линейного коэффициента преобразования M_{DE} вдоль средней линии поля DE равен постоянной величине, пока неизвестной. Постоянная const_2 в (17-60) выражает ординату точки E на рис. 17-15,а (y_E), поскольку величины θ и $\text{sign} \theta$ в этой точке равны нулю.

По закону полного тока примем, что вектор напряженности магнитного поля, направленный во всех точках линии CB параллельно оси x , изменяется вдоль линии CB обратно пропорционально расстоянию $2a - y$ от геометрического центра, от значения $H_C = I\omega/8a$ в точке C до значения $H_B = I\omega/4a$ в точке B . Через $I\omega$ обозначена намагничивающая сила, развиваемая обмоткой возбуждения. Пусть она равна 64 условным единицам.

Средняя линия поля, проходящая через точку E , делит пополам поток вектора H , пронизывающий площадку, перпендикулярную плоскости чертежа и равную $(BC) \times 1$, где 1 — единичное расстояние в глубину чертежа.

Значит,

$$\int_0^{y_E} H dy = \int_{y_E}^a H dy.$$

Сократив постоянный множитель $\frac{I\omega}{4}$, получим:

$$\int_0^{y_E} \frac{dy}{2a - y} = \int_{y_E}^a \frac{dy}{2a - y}.$$

После интегрирования и подстановки пределов окажется, что

$$y_E = (2 - \sqrt{2}) a = 0,586 a. \quad (17-66)$$

Расчетное уравнение (17-60) для ординат средней линии поля DE принимает вид:

$$y = 0,586a + \frac{1}{M_{DE}} \int_{\varphi_m=8}^{\varphi} \sin \theta d\varphi. \quad (17-67)$$

Нижний предел $\varphi_m = 8$ выражает в условных единицах значение скалярного магнитного потенциала вдоль линии CB . Вдоль линии OA $\varphi_m = 0$.

На плоскости Φ между линиями C_1B_1 и O_1A_1 уложилось в последовательном порядке восемь ячеек сетки. Поэтому интервал численного интегрирования по $d\varphi$ равен в данном случае единице.

Абсциссы и ординаты точек, лежащих на линии OA , равны друг другу (рис. 17-15,а). Поэтому в точке D

$$x_D = y_D = 0,586a + \frac{1}{M_{DE}} \int_8^0 \sin \theta d\varphi.$$

Эта величина равна постоянной const_1 в (17-59).

Абсциссы точек средней линии поля DE рассчитывают по (17-59), проводя интегрирование от точки D вправо,

$$x = 0,586a + \frac{1}{M_{DE}} \left(\int_8^0 \sin \theta d\varphi + \int_0^\varphi \cos \theta d\varphi \right). \quad (17-68)$$

Абсцисса точки E будет равна:

$$x_E = 0,586a + \frac{1}{M_{DE}} \left(\int_8^0 \sin \theta d\varphi + \int_0^8 \cos \theta d\varphi \right).$$

С другой стороны, $x_E = 2a$ (рис. 17-15,а). Следовательно,

$$M_{DE} = \frac{1}{1,414a} \left(\int_8^0 \sin \theta d\varphi + \int_0^8 \cos \theta d\varphi \right). \quad (17-69)$$

Определив величину M_{DE} , приступают к числовому расчету абсцисс и ординат промежуточных точек линии DE , пользуясь (17-67) и (17-68).

Вычисления сведены в табл. 17-2.

Таблица 17-2

Вычисления для точек вдоль линии DE на рис. 17-15

	D $\varphi_M=0$	1	2	3	4	5	6	7	E $\varphi_M=8$
θ	0,785	0,428	0,205	0,094	0,043	0,020	0,009	0,003	0
$\sin \theta$	0,707	0,411	0,200	0,093	0,043	0,020	0,009	0,003	0
$\cos \theta$	0,707	0,912	0,980	0,996	0,999	1	1	1	1
$\int_8^\varphi \sin \theta d\varphi$	1,126	0,546	0,249	0,110	0,045	0,019	0,007	0,001	0
$\int_0^\varphi \cos \theta d\varphi$	0	0,844	1,798	2,788	3,785	4,784	5,784	6,784	7,784
$a M_{DE}$	6,29	6,29	6,29	6,29	6,29	6,29	6,29	6,29	6,29
$\frac{y}{a}$	0,765	0,672	0,626	0,603	0,593	0,589	0,587	0,586	0,586
$\frac{x}{a}$	0,765	0,899	1,050	1,207	1,365	1,523	1,682	1,841	2

Расчет координат точек линии поля FG на рис. 17-15,а, отграничивающей $1/4$ общего потока, прилегающего к граничной линии AB , немного сложнее.

Поле величины θ на рис. 17-15,б несимметрично относительно линии F_1G_1 . Величина модуля линейного коэффициента преобразования M_{FG} в точках линии FG не является постоянной.

Значение $\ln \frac{1}{M_{FG}}$ в каждой точке рассчитывается по (17-64) на

основе имеющихся значений сопряженной функции θ . К значению логарифма прибавляется постоянная. Это равноценно умножению величины M_{FG} на постоянный множитель; обозначим его символом K_{FG} . Величина K_{FG} определяется из сравнения известного из рис. 17-15,а значения абсциссы точки G , равного $2a$, с результатом интегрирования, проводимого от точки G по направлению к точке F по (17-60) и обратно по (17-59). Вычисление интегралов делается с учетом среднего значения величины M_{FG} в каждом интервале интегрирования, находимого по (17-22) или (17-23).

Детальный расчет предоставляется читателям в качестве полезного упражнения.

17-21. РАСЧЕТ ПОЛЯ НА ГРАНИЦЕ ДВУХ СРЕД

Пусть точки квадратной сетки O , Q и S лежат на границе двух сред с проницаемостями соответственно ϵ_1 и ϵ_2 (рис. 17-16,а).

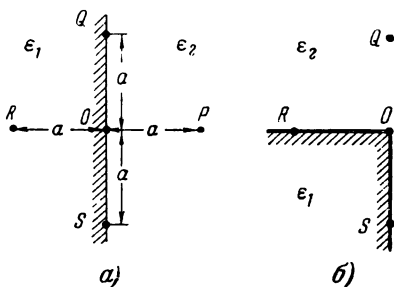


Рис. 17-16. К выводу расчетных формул для точек на границе двух сред.

Обозначим потенциалы точек в среде ϵ_1 символом φ , а в среде ϵ_2 — символом ψ . Если бы вся группа точек O , P , Q , R и S находилась в среде ϵ_1 , то расчетное уравнение «4» для точки O имело бы вид:

$$\varphi_P + \varphi_Q + \varphi_R + \varphi_S - 4\varphi_O = 0. \quad (17-70)$$

Нормальная к границе составляющая напряженности поля была бы приближенно равна:

$$F_{1n} = \frac{\varphi_P - \varphi_R}{2a}, \quad (17-71)$$

где a — сторона ячейки сетки.

Если бы та же группа точек находилась в среде ϵ_2 , аналогичные уравнения были бы вида

$$\psi_P + \psi_Q + \psi_R + \psi_S - 4\psi_O = 0; \quad (17-72)$$

$$F_{2n} = \frac{\psi_P - \psi_R}{2a}. \quad (17-73)$$

Граничное условие требует, чтобы нормальные составляющие напряженности поля на границе были в отношении

$$\epsilon_1 F_{1n} = \epsilon_2 F_{2n}, \quad (17-74)$$

откуда следует:

$$\epsilon_1 \varphi_P + \epsilon_2 \psi_R = \epsilon_1 \varphi_R + \epsilon_2 \psi_P. \quad (17-75)$$

Умножим все члены (17-70) на ϵ_1 и все члены (17-72) на ϵ_2 ; сложим результаты и подставим в (17-75) для исключения не имеющих физического значения величин φ_P и ψ_R ; учтем, что вследствие непрерывности функции потенциала для точек O , Q и S , лежащих непосредственно на границе, имеют место равенства

$$\varphi_O = \psi_O; \quad \varphi_Q = \psi_Q; \quad \varphi_S = \psi_S.$$

Обозначим потенциалы этих точек новыми символами ϑ_O , ϑ_Q и ϑ_S .

Расчетное уравнение для пограничной точки O примет окончательный вид:

$$2 \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \psi_P + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \varphi_R \right) + \vartheta_Q + \vartheta_S - 4\vartheta_O = 0. \quad (17-76)$$

Расчетная формула для точки, лежащей в вершине прямого угла границы (рис. 17-16,б)*,

$$\begin{aligned} \varphi_P + \varphi_Q + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right) (\vartheta_R + \vartheta_S) - \\ - \left(3 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right) \vartheta_O = 0. \end{aligned} \quad (17-77)$$

Пример расчета см. [Л. 15, задача 9, 54].

* Ее вывод см. [Л.15, задача 9,52].

17-22. УРАВНЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО ПОЛЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЫ

Основой расчета избираются не имеющие ограничений зависимости:

а) теорема Гаусса для электрического поля — уравнение (3-15)

$$\nabla \mathbf{D} = \rho \text{ или } 0;$$

б) уравнение первого закона Кирхгофа (5-3) для поля электрического тока проводимости

$$\nabla \bar{\delta}_{\text{пр}} = 0;$$

в) уравнение непрерывности линий магнитного поля (6-9)

$$\nabla \mathbf{B} = 0. \quad (17-78)$$

Ввиду одинаковости форм этих уравнений дальнейшее изложение ограничим случаем двухмерного магнитного поля, вектор \mathbf{B} которого повсюду лежит в плоскости xy . Выразим вектор \mathbf{B} через функцию скалярного магнитного потенциала φ_M

$$\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H} = -\mu_a \nabla \varphi_M = -\left(\mu_a \frac{\partial \varphi_M}{\partial x} \mathbf{i} + \mu_a \frac{\partial \varphi_M}{\partial y} \mathbf{j} \right).$$

Подставим это выражение в (17-78)

$$\nabla \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_a \frac{\partial \varphi_M}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_a \frac{\partial \varphi_M}{\partial y} \right) = 0. \quad (17-79)$$

Выполним дифференцирование произведений, разделим все члены на $-\mu_a$ и заменим:

$$\frac{\partial^2 \varphi_M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_M}{\partial y^2} = \nabla^2 \varphi_M; \quad (17-80)$$

$$-\frac{\partial \varphi_M}{\partial x} = H_x; \quad -\frac{\partial \varphi_M}{\partial y} = H_y \quad (17-81)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_a} \frac{\partial \mu_a}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \ln \mu_a; \\ \frac{1}{\mu_a} \frac{\partial \mu_a}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \ln \mu_a. \end{aligned} \quad (17-82)$$

В результате получим модифицированное уравнение Лапласа для магнитного поля в нелинейной среде

$$\nabla^2 \varphi_m = H_x \frac{\partial}{\partial x} \ln \mu_a + H_y \frac{\partial}{\partial y} \ln \mu_a. \quad (17-83)$$

Аналогичным путем выводятся модифицированные уравнения Лапласа и Пуассона для электрического поля.

В случае линейной среды ($\mu_a = \text{const}$) правая часть (17-83) обращается в нуль и оно становится обычным уравнением Лапласа (3-17).

17-23. РАСЧЕТ СТАЦИОНАРНОГО МАГНИТНОГО ИЛИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

В первой стадии расчета пренебрегают нелинейностью и при заданных граничных условиях рассчитывают потенциалы всех точек поля, как описано в § 17-3, по уравнению «4» или «20» [(17-14) или (17-19)].

Затем по (17-81) находят предварительные значения составляющих напряженности поля H_x и H_y .

По кривой намагничивания находят предварительные значения μ_a для каждой узловой точки сетки, соответствующие предварительным значениям напряженности поля

$$H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2}.$$

После этого вычисляют для каждой точки сетки так называемую поправку на нелинейность, выражающую собой значение правой части (17-83),

$$\eta = H_x \frac{\partial}{\partial x} \ln \mu_a + H_y \frac{\partial}{\partial y} \ln \mu_a. \quad (17-84)$$

Эта поправка, взятая с обратным знаком, рассматривается как дополнительный остаток, подлежащий ликвидации обычным путем, как описано в § 17-3. В результате получают исправленные значения потенциалов в каждой точке сетки.

Из них находят по (17-81) и по кривой намагничивания исправленные значения H_x , H_y , H и μ_a ; проверяют каждую точку, удовлетворяется ли теперь в ней модифицированное уравнение Лапласа (17-83) при подстановке в левую часть выражения лапласиана в разностной форме (17-14).

Если удовлетворительное совпадение не получено, вносят дополнительные поправки к значениям потенциала с последующей проверкой по (17-83).

Процедура расчета в нелинейной среде не всегда быстро сходится на практике.

Глава восемнадцатая

РАСЧЕТ ПЕРЕМЕННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ МЕТОДОМ СЕТОК

18-1. ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ В РАЗНОСТНОЙ ФОРМЕ В ДЕКАРТОВЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

Вторые производные по координатным направлениям и времени заменяются разностными отношениями по уравнениям типа (17-5). В большинстве случаев достаточно ограничиться первыми членами этих разложений. Первые производные по времени заменяются простейшими разностными отношениями, составленными на основе так называемых «разностей вперед». Малые интервалы времени Δt выбираются в определенных соотношениях с малыми интервалами расстояния a (равными стороне ячейки сетки в двухмерных задачах).

Расположение расчетных точек в двухмерных задачах принимается по рис. 17-1, а в одномерных задачах — вдоль оси x этого же рисунка [точки ... (RR) , R , O , P , (PP) ...].

Рассматриваемый момент времени указывается индексом t , предыдущий и последующий моменты — соответственно индексами $t-\Delta t$ и $t+\Delta t$.

Запись вида $E_{P(t)}$ относится к значению функции E в точке P в момент t , а запись $E_{Q(t-\Delta t)}$ — к значению в точке Q в момент $t-\Delta t$ и т. п.

I. Двухмерная задача для проводящей среды.

Пусть электрическое поле имеет только одну y -ю составляющую E_y , изменяющуюся в координатной плоскости xz , в которой и располагается расчетная сетка.

Волновое уравнение (11-21) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \gamma \mu_a \frac{\partial E_y}{\partial t},$$

или в разностной форме

$$\frac{E_P(t) + E_Q(t) + E_R(t) + E_S(t) - 4E_O(t)}{a^2} = \\ = \gamma \mu_a \frac{E_O(t+\Delta t) - E_O(t)}{\Delta t}. \quad (18-1)$$

По Порицкому и Батлеру [Л. 83] стабильность решения достигается при выборе не слишком больших интервалов времени

$$\Delta t < \frac{1}{2} \gamma \mu_a a^2. \quad (18-2)$$

Примем соотношение

$$\Delta t = \frac{1}{4} \gamma \mu_a a^2. \quad (18-3)$$

Расчетная формула получится из решения уравнения (18-1) относительно $E_{O(t+\Delta t)}$ при подстановке (18-3)

$$E_{O(t+\Delta t)} = \frac{1}{4} (E_P(t) + E_Q(t) + E_R(t) + E_S(t)). \quad (18-4)$$

II. Одномерная задача для проводящей среды.

В (18-1) выпадают разности по одному из координатных направлений. При выборе интервала времени по (18-3) получится следующая расчетная формула:

$$E_{O(t+\Delta t)} = \frac{1}{4} (E_P(t) + E_R(t)) + \frac{1}{2} E_O(t). \quad (18-5)$$

III. Расчеты распространения электромагнитного поля в идеальном диэлектрике по методу сеток не всегда стабильны. Ограничимся одномерной задачей, когда волновое уравнение (11-25) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

или в разностной форме

$$\frac{E_P(t) + E_R(t) - 2E_O(t)}{a^2} = \varepsilon_a \mu_a \frac{E_O(t+\Delta t) + E_O(t-\Delta t) - 2E_O(t)}{(\Delta t)^2}. \quad (18-6)$$

Связав интервалы расстояния и времени соотношением

$$\Delta t = \frac{a}{v} = \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} a, \quad (18-7)$$

получим расчетную формулу

$$E_{O(t+\Delta t)} = E_{P(t)} + E_{R(t)} - E_{O(t-\Delta t)}. \quad (18-8)$$

IV. Специфическое волновое уравнение типа (16-20), описывающее изменение продольной составляющей поля (например, H_x) в поперечной плоскости волновода или полого резонатора, имеет следующие разностные формы (сетка расположена в поперечной плоскости):

а) при учете разностей по вторые включительно

$$(H_{xP} + H_{xQ} + H_{xR} + H_{xS}) - (4 - a^2 k^2) H_{xO} = 0; \quad (18-9)$$

б) при учете разностей по четвертые включительно

$$\begin{aligned} & (H_{xP} + H_{xQ} + H_{xR} + H_{xS}) - (4 - a^2 k^2) H_{xO} - \\ & - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4} (H_{x(PP)} + H_{x(QQ)} + H_{x(RR)} + H_{x(SS)}) - \right. \\ & \left. - (1 - a^2 k^2) H_{xO} \right] = 0. \quad (18-10) \end{aligned}$$

В случае расчета волновода $k = \beta_{кр}$ (критический коэффициент фазы). В случае расчета резонатора $k = \sqrt{\beta^2 - L^2}$, где β — коэффициент фазы собственных колебаний и $L = l\pi/d$ — производное характеристическое число, которое учитывает влияние продольного размера резонатора на мод колебаний (см. § 16-12).

Первые два члена в левой части (18-10) совпадают с левой частью (18-9); поэтому предварительный расчет следует делать по формуле (18-9); затем вычисляется разностная поправка Δ , равная оставшимся членам (18-10).

При расчете методом ликвидации остатков разностная поправка рассматривается как дополнительный остаток, подлежащий последующей ликвидации с помощью расчетной формулы (18-10).

В следующих параграфах показаны примеры применения составных формул к расчету установившихся и переходных волновых процессов.

18-2. ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЫ — ПРЕНИКНОВЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ИМПУЛЬСА ПОЛЯ

Пусть на плоской поверхности массивного проводящего предмета ($\gamma = 5,6 \cdot 10^7$ 1/ом·м; $\mu_a = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ гн/м) возбужден прямоугольный импульс напряженности электрического поля, равный 1 000 кв/м при $0 \leq t \leq t_1$ (рис. 18-1,а при $x=0$). Длительность импульса $t_1 = 10^{-3}$ сек.

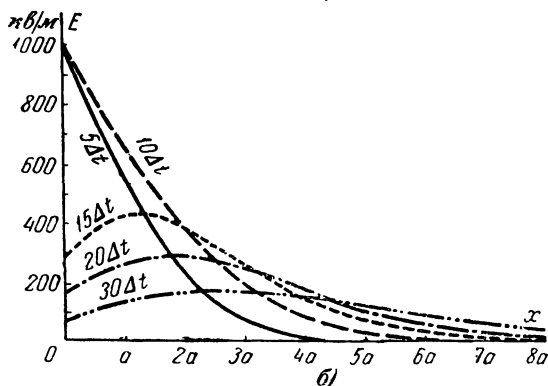
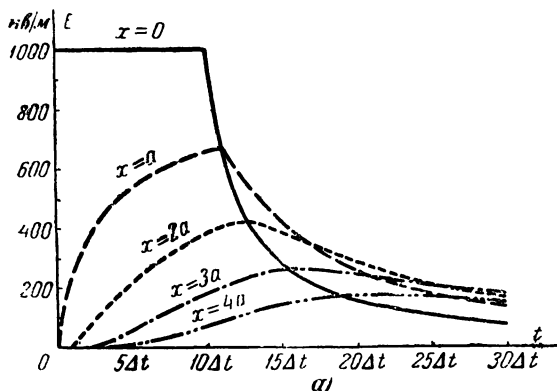


Рис. 18-1. Проникновение прямоугольного импульса электрического поля в массивный проводник.

Рассмотрим проникновение электромагнитного поля в глубину проводника, выбрав интервал времени $\Delta t = 10^{-4}$ сек. Данная задача является одномерной.

Интервал расстояния по (18-3) оказался равным

$$a = 2,39 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Расчет проникновения поля в глубь проводника по (18-5) сведен в табл. 18-1.

Таблица 18-1

E, кв/м

Глубины	Интервалы времени													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	1 000	1 000	1 000	1 000	1 000	1 000	1 030	1 000	1 000	1 000	1 000	666	502	403
<i>a</i>	0	250	375	452	577	548	580	606	628	647	663	677	607	535
<i>2a</i>	0	0	62*	125	179	226	266	301	331	358	382	404	423	420
<i>3a</i>	0	0	0	15	39	65	92	118	143	166	188	209	228	246
<i>4a</i>	0	0	0	0	4	12	22	35	49	63	78	90	106	120
<i>5a</i>	0	0	0	0	0	1	3	7	12	19	26	34	42	51
<i>6a</i>	0	0	0	0	0	0	0	1	2	4	7	10	14	18
<i>7a</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	5
<i>8a</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
вт. д.														

По данным табл. на рис. 18-1 показаны:

а) изменение величины *E* во времени на поверхности ($x=0$) и на глубинах $x=a$, $x=2a$ и $x=3a$;

б) изменение величины *E* по мере погружения в глубину проводника: в середине и в конце импульса ($t=5\Delta t$ и $t=10\Delta t$), а также для трех моментов времени по окончании импульса ($t=15\Delta t$, $t=20\Delta t$, $t=30\Delta t$).

На графиках отчетливо видна деформация волны как с течением времени, так и по мере проникновения электромагнитного поля в глубь проводника.

18-3. ДВУХМЕРНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЫ — ПРЕНИКНОВЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПРОВОДНИК КВАДРАТНОГО СЕЧЕНИЯ

В момент времени $t=0$ к поверхности медного проводника квадратного сечения $b \times b = 4 \times 4$ мм приложено постоянное электрическое поле, касательная к поверхности составляющая которого равна 100 *мв/м*.

Исследуем проникновение поля в толщу проводника, взяв сторону ячейки квадратной сетки $a = b/8 = 0,5 \cdot 10^{-3}$ м.

Интервал времени по (18-3) при $\gamma = 5,6 \cdot 10^7$ 1/ом·м и $\mu_a = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ гн/м равен $\Delta t = 0,44 \cdot 10^{-5}$ сек.

Расчет проникновения поля по (18-4) представлен на рис. 18-2 для первых пяти интервалов времени. Столбцы цифр около каждой узловой точки сетки выражают мгновенные значения *E* [*мв/м*] в моменты времени, следующие друг за другом через интервал Δt .

В силу симметрии расчет сделан для одного октанта сечения.

На рис. 18-3 представлены графики изменения поля по времени на различных глубинах $x=a$; $x=2a$ и т. д.

100	100	100	100	100
100	100	100	100	100
100	100	100	100	100
100	100	100	100	100
100	100	100	100	100
0	0	0	0	100
15	25	25	50	100
27	37	44	62	100
45	47	53	72	100
51	53	61	76	100
56	58	65	80	100
0	0	0		100
0	0	0		100
6	6	12		100
12	14	25		100
18	22	33		100
25	28	41		100
0	0			100
0	0			100
0	0			100
1	3			100
4	7			100
8	13			100
0				100
0				100
0				100
0				100
1				100
4				100

Рис. 18-2. Таблица расчета проникновения электрического поля в проводник квадратного сечения.

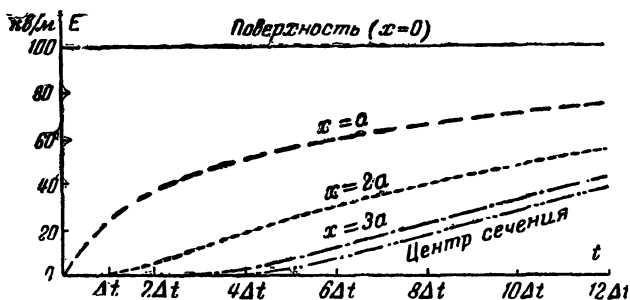


Рис. 18-3. Проникновение электрического поля в проводник квадратного сечения.

18-4. ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИЭЛЕКТРИКА. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОЛУСИНУСОИДАЛЬНОГО ИМПУЛЬСА НАПРЯЖЕНИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЛИНИИ

К началу отрезка электрической линии без потерь, находящегося в режиме холостого хода, применен полусинусоидальный импульс напряжения с амплитудой $U=100$ в. Длина отрезка линии равна $1/8$ длины волны, соответствующей частоте генератора. По окончании полусинусоидального импульса генератор мгновенно отключается и от-

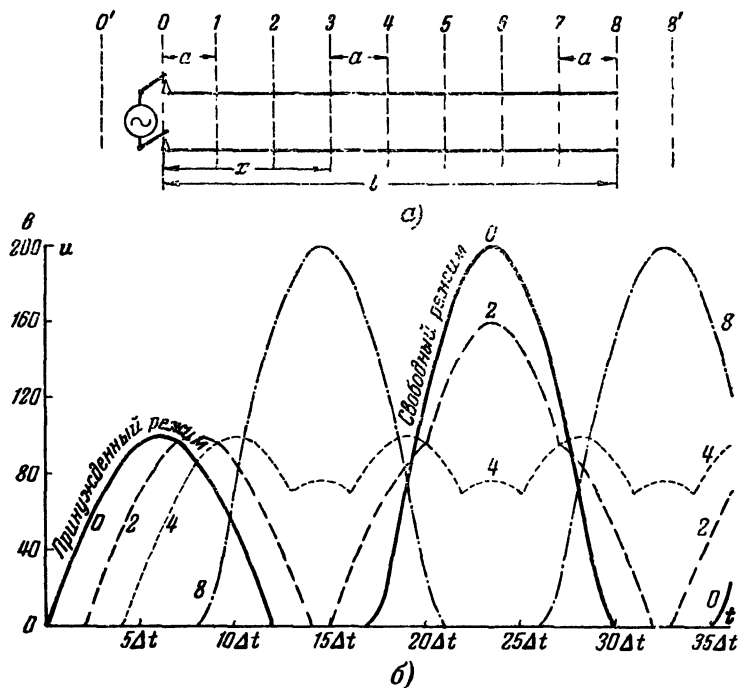


Рис. 18-4. Распространение полусинусоидального импульса напряжения вдоль отрезка электрической линии без потерь.

резок линии остается разомкнутым с обоих концов на неопределенное время. Требуется исследовать распространение волны напряжения и электрического поля вдоль отрезка линии.

Выберем интервал расстояния равным $1/8$ длины отрезка линии ($a=l/8$, рис. 18-4). Интервал времени находится по (18-7). Расчет производится по (18-8) и сведен в табл. 18-2, где мгновенные значения напряжения в различных точках линии приведены в вольтах.

У разомкнутого конца линии будет узел тока ($i \equiv 0$); следовательно, $\partial i / \partial t \equiv 0$; из известного уравнения для линии без потерь

Таблица 18-2

Моменты времени	Расчетные точки вдоль линии (рис. 18-4)											
	0'	0	1	2	3	4	5	6	7	8	8'	
0	—	0										
1 Δt	—	26	0									
2 Δt	—	50	26	0								
3 Δt	—	71	50	26	0							
4 Δt	—	87	71	50	26	0						
5 Δt	—	97	87	71	50	26	0					
6 Δt	—	100	97	87	71	50	26	0				
7 Δt	—	97	100	97	87	71	50	26	0			
8 Δt	—	87	97	100	97	87	71	50	26	0		0
9 Δt	—	71	87	97	100	97	87	71	50	26	26	26
10 Δt	—	50	71	87	97	100	97	87	71	76	76	76
11 Δt	—	26	50	71	87	97	100	97	113	121	121	121
12 Δt	—	0	26	50	71	87	97	126	147	158	158	158
13 Δt	0	0	0	26	50	71	113	147	171	184	184	184
14 Δt	0	0	0	0	26	76	121	158	184	197	197	197
15 Δt	0	0	0	0	26	76	121	158	184	197	197	197
16 Δt	0	0	0	26	50	71	113	147	171	184	184	184
17 Δt	0	0	26	50	71	87	97	126	147	158	158	158
18 Δt	26	26	50	71	87	97	100	97	113	121	121	121
19 Δt	76	76	71	87	97	100	97	87	71	76	76	76
20 Δt	121	121	113	97	100	97	87	71	50	26	26	26

Примечание. Рамкой обведены цифры, соответствующие принужденному режиму в точке 0 в течение времени 0—12 Δt.

$\frac{\partial u}{\partial x} = -L \frac{di}{dt}$ видно, что граничные условия для напряжения в данной задаче соответствуют задаче Неймана:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \text{ в любой момент времени;}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \text{ по окончании импульса.}$$

В связи с этим в расчетной таблице участвуют две фиктивные точки 0' и 8' (см. § 17-10).

На рис. 18-4 показаны кривые изменения напряжения во времени $u=f(t)$ в отдельных точках линии (0, 2, 4, 8). Ясно видно удвоение напряжения при отражении волны от разомкнутого конца линии (8 и 0). Кривые напряжения в точках, удаленных от концов отрезка (2 и 4), имеют усложненную форму в результате интерференции падающей и отраженной волн.

Следует иметь в виду, что возбуждающий импульс был одиночным, а не периодически повторяющимся, и что отрезок не настроен, т. е. не был ни четвертьволновым, ни полуволновым.

На рис. 18-5 показаны кривые распределения напряжения вдоль линии $u=f_1(x)$ в различные моменты времени.

На кривых рис. 18-5,а видно продвижение к концу линии первоначальной падающей волны напряжения, обусловленной возбуждающей

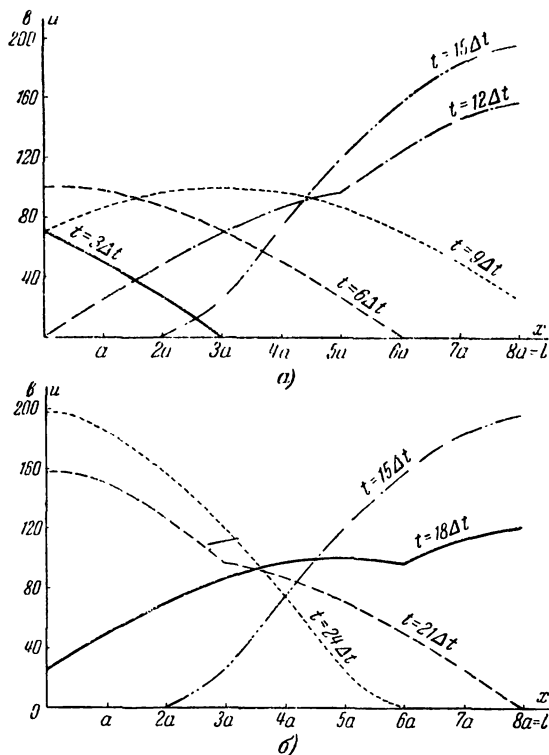


Рис. 18-5. Образование стоячей волны в отрезке линии.

щим импульсом, и постепенное нарастание напряжения у разомкнутого конца 8 . На кривых рис. 18-5,б показано продвижение волны, отраженной от конца 8 , и постепенное нарастание напряжения у конца 0 , также оказавшего к этому времени разомкнутым.

В дальнейшем процесс будет повторяться, т. е. наступит режим свободных незатухающих колебаний.

Период свободных колебаний оказался равным $T_{св} = 18\Delta t$; следовало бы получить свободные колебания с периодом в $16\Delta t$, равным удвоенному времени пробега электромагнитной волны вдоль отрезка линии. Ошибка объясняется введением в расчет фиктивных

точек δ' и δ'' , необходимых для численного решения задачи Неймана.

Введение двух фиктивных точек эквивалентно удлинению каждого конца отрезка линии на половину интервала расстояния $a/2$; таким образом, расчетная длина отрезка стала $9a$ вместо $8a$.

Подобная ошибка может быть как угодно уменьшена, если брать меньшие интервалы расстояния и соответственно меньшие интервалы времени.

18-5. ОБЩИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКОЙ ДЛИНЫ ВОЛНЫ ВОЛНОВОДА

Расчет производится для продольной составляющей электромагнитного поля (H_x при TE -волнах, E_x при TM -волнах) при обычных граничных условиях; у хорошо проводящей стенки равны нулю: а) касательная составляющая напряженности электрического поля и б) нормальная составляющая напряженности магнитного поля.

В случае декартовых прямоугольных координат из условия «а» и из первого уравнения Максвелла вытекает условие в) производная напряженности магнитного поля по нормали к границе равна нулю. Заметим, что в других системах координат условие «в» теряет силу (см. § 18-10).

Сперва задаются некоторым предварительным значением $\beta_{кр} = \beta_1$ и проводят расчет H_x или E_x по всем узловым точкам сетки по (18-9).

В случае TE -волны в расчет вводятся фиктивные точки за пределами границ сечения, необходимые для решения задачи Неймана (§ 17-10).

Полная ликвидация всех остатков у всех точек окажется при этом невозможной, поскольку предварительное значение $\beta_{кр} = \beta_1$ в общем случае не удовлетворяет волновому уравнению (18-9).

Путем изменения значений E_x или H_x в узловых точках сетки следует привести остатки во всех точках (или по крайней мере в большинстве их) к одному и тому же знаку. Если этот знак отрицателен, то коэффициент $4 - a^2\beta_1^2$ в последнем члене расчетного уравнения (18-9) слишком велик; предварительно выбранное значение β_1 преуменьшено. Если же подавляющее большинство остатков положительно, то коэффициент $4 - a^2\beta_1^2$ слишком мал; β_1 преувеличено.

Вычисляется поправка к величине $a^2\beta_1^2$ по формуле

$$\Delta(a^2\beta_1^2) = -\frac{\sum H_x H'}{\sum H_x^2} \left(\text{или} -\frac{\sum E_x E'}{\sum E_x^2} \right), \quad (18-11)$$

где H_x (или E_x) — имеющееся значение рассчитываемой составляющей поля в некоторой узловой точке сетки;

H' (или E') — имеющееся значение остатка в этой же точке.

Суммирование делается по всем узловым точкам сетки.

Вывод формулы поправки приведен в § 18-6.

Затем расчет повторяется при новом значении коэффициента

$$a^2\beta_2^2 = a^2\beta_1^2 + \Delta(a^2\beta_1^2).$$

Получившиеся в точках сетки остатки приводятся к одному знаку (не обязательно все из них, но хотя бы большая часть). Вычисляется новая поправка по (18-11) и т. д. Обычно удается удовлетворить (18-9) во всех узловых точках сетки после второй или третьей поправки. Затем рекомендуется уточнить расчет, вычислив в каждой точке разностную поправку Δ , и внести ее в качестве дополнительного остатка, подвергнув последующей ликвидации, пользуясь (18-10).

18-6. ВЫВОД ПОПРАВКИ К ПРЕДВАРИТЕЛЬНОМУ ЗНАЧЕНИЮ КРИТИЧЕСКОГО КОЭФФИЦИЕНТА ФАЗЫ

Пусть для предварительного расчета было принято некоторое неточное значение квадрата критического коэффициента фазы

$$\beta_1^2 = \beta_{кр}^2 + \Delta(\beta_1^2).$$

Вследствие этой неточности в правой части специфического волнового уравнения (16-20) для рассчитываемой продольной составляющей поля (допустим, для H_x) возникнет некоторый остаток H'

$$\nabla_{yz}^2 H_x + \beta_1^2 H_x = H'. \quad (18-12)$$

При точном же значении $\beta^2 = \beta_{кр}^2$ остатка не будет

$$\nabla_{yz}^2 H_x + \beta_{кр}^2 H_x = 0. \quad (18-13)$$

Вычтем почленно (18-13) из (18-12) и умножим обе части полученного уравнения на $H_x dy dz$, где $dy dz =$

$= ds$ — малая площадка в поперечном сечении волновода, центрированная в рассматриваемой точке; проинтегрируем результат по всему поперечному сечению волновода, имея в виду, что поправка $\Delta(\beta_1^2)$ является постоянной величиной

$$\Delta(\beta_1^2) \int_s H_x^2 ds = \int_s H_x H' ds,$$

откуда

$$\Delta(\beta_1^2) = \frac{\int_s H_x H' ds}{\int_s H_x^2 ds}. \quad (18-14)$$

Поскольку поправка $\Delta(\beta_1^2)$ должна вычитаться из предварительного значения β_1^2 , придадим ей в последующем отрицательный знак.

В числовом расчете все поперечное сечение волновода представляется состоящим из квадратных ячеек со стороной a ; в центре каждой ячейки лежит расчетная точка.

Тогда интегралы в (18-14) заменяют суммами, и оно обратится в (18-11).

18-7. ДВУХМЕРНАЯ ЗАДАЧА УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА В ДИЭЛЕКТРИКЕ. РАСЧЕТ КРИТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ В ВОЛНОВОДЕ СО СЛОЖНОЙ ФОРМОЙ СЕЧЕНИЯ

Пусть поперечное сечение волновода имеет форму, показанную на рис. 18-6. Диэлектрик — воздух.

Рассмотрим поперечно-магнитную волну низшего типа, которую обозначим условным символом $TM_{1, \ast}$. Продольную составляющую имеет электрическое поле (E_x). Первая стадия расчета проводится на грубой сетке рис. 18-6 со стороны ячейки $a=1$ см; цель — нахождение распределения величины E_x по поперечному сечению волновода. Граничное условие: у стенок волновода $E_x=0$.

Назначаем некоторой узловой точке сетки Π , расположенной в районе центра тяжести сечения, постоянное значение $E_x=100$ условных единиц. В последующем расчете это значение оставляется неизменным. Записываем некоторые предполагаемые значения E_x для всех прочих узловых точек (верхние цифры слева от каждой точки). В последующем расчете эти значения будут корректироваться.

Выберем некоторое предварительное значение величины $a\beta_1$, допустим

$$a\beta_1 = 0,5; a^2\beta_1^2 = 0,25.$$

Расчетное уравнение (18-9) примет вид:

$$E_{xP} + E_{xQ} + E_{xR} + E_{xS} - 3,75E_{xO} = 0.$$

Проверяем все точки сетки по этой формуле и записываем получающиеся вместо нуля остатки (верхние цифры справа от каждой узловой точки на рис. 18-6).

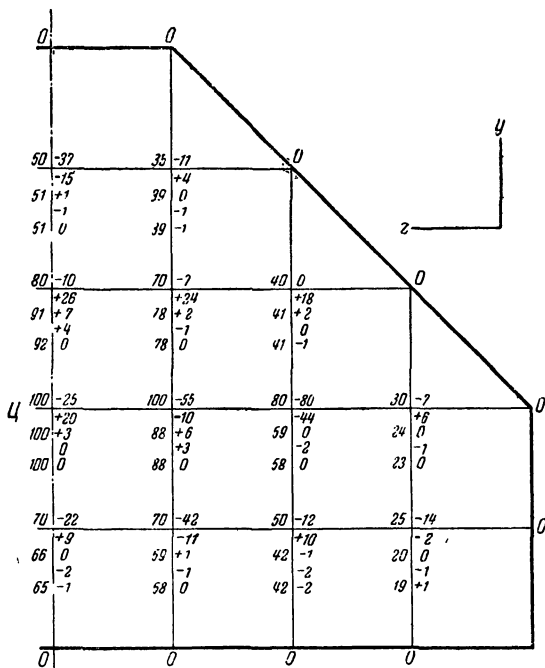


Рис. 18-6. Начальная стадия расчета критической длины волны в волноводе сложного сечения.

Все остатки получились одного знака (отрицательными); следовательно, коэффициент 3,75 перед величиной E_{xO} в расчетном уравнении слишком велик; предварительное значение $a^2\beta_1^2 = 0,25$ уменьшено.

Рассчитываем поправку $\Delta (a^2\beta_1^2)$ по (18-11)

$$\Delta (a^2\beta_1^2) = \frac{\Delta_1}{\Delta_2},$$

где

$$\Delta_1 = 50 \cdot 37 + 80 \cdot 10 + 100 \cdot 25 + 70 \cdot 22 + 2(35 \cdot 11 + 70 \cdot 7 + \\ + 100 \cdot 55 + 70 \cdot 42 + 40 \cdot 0 + 80 \cdot 80 + 50 \cdot 12 + 30 \cdot 7 + 25 \cdot 14) = \\ = 40\,440;$$

$$\Delta_2 = 50^2 + 80^2 + 100^2 + 70^2 + 2(35^2 + 70^2 + 100^2 + 70^2 + 40^2 + \\ + 80^2 + 50^2 + 30^2 + 25^2) = 89\,900;$$

$$\Delta(a^2\beta_1^2) = \frac{40\,440}{89\,900} = 0,45.$$

Значение $a^2\beta_1^2$ следует в дальнейшем взять увеличенным на 0,45, т. е. равным $0,25 + 0,45 = 0,7$.

Расчетная формула примет вид:

$$E_{xP} + E_{xQ} + E_{xR} + E_{xS} - 3,3E_{xO} = 0.$$

Рассчитываем во всех точках остатки по этой формуле и записываем их под прежними остатками (вторые строчки записей на рис. 18-6).

Изменяя значения E_x в отдельных точках, пытаемся свести все остатки к возможно малым значениям.

Результаты показаны на рис. 18-6 в третьих строчках записей около каждой точки. Получившееся преобладание положительных остатков свидетельствует о том, что значение коэффициента 3,3 в последнем члене расчетной формулы мало; иначе говоря, значение $a^2\beta_1^2 = 0,7$ несколько преувеличено. Вычисляем по (18-11) новую поправку; она оказалась равной $-0,034$. Уточненное значение $a^2\beta_1^2$ равно $0,7 - 0,034 = 0,666$.

Расчетная формула становится такой:

$$E_{xP} + E_{xQ} + E_{xR} + E_{xS} - 3,334E_{xO} = 0.$$

Найденные по этой формуле остатки приведены в четвертых строчках записей на рис. 18-6. Ликвидация этих остатков до значений, не превышающих 2 по абсолютной величине, потребовала небольшой регулировки значений E_x в узловых точках (пятые строчки записей).

Можно сделать еще одно уточнение величины $a^2\beta_{кр}^2$ по (18-11), подставив в нее последние найденные значения E_x и остатков. Эта поправка оказывается равной 0,004.

Таким образом, уточненное значение $a^2\beta_{кр}^2 = 0,666 + 0,004 = 0,670$;

$$a\beta_{кр} = \sqrt{0,670} = 0,8185.$$

По условию сторона ячейки сетки $a = 1$ см. Следовательно, $\beta_{кр} = 0,8185$ 1/см.

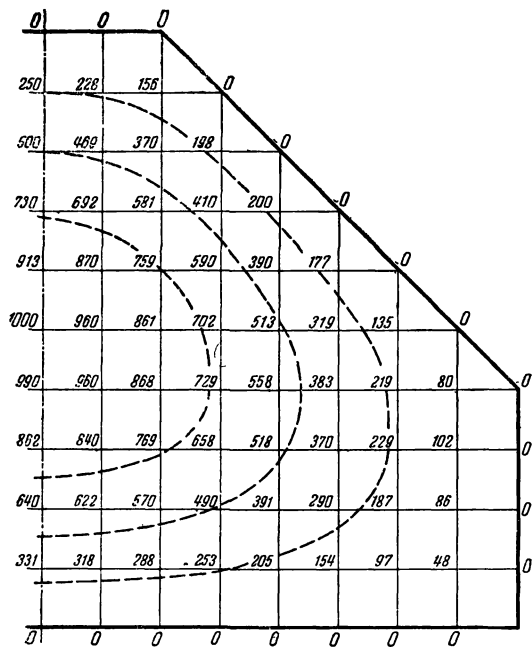


Рис. 18-7. Уточнение расчета, начатого на рис. 18-6.

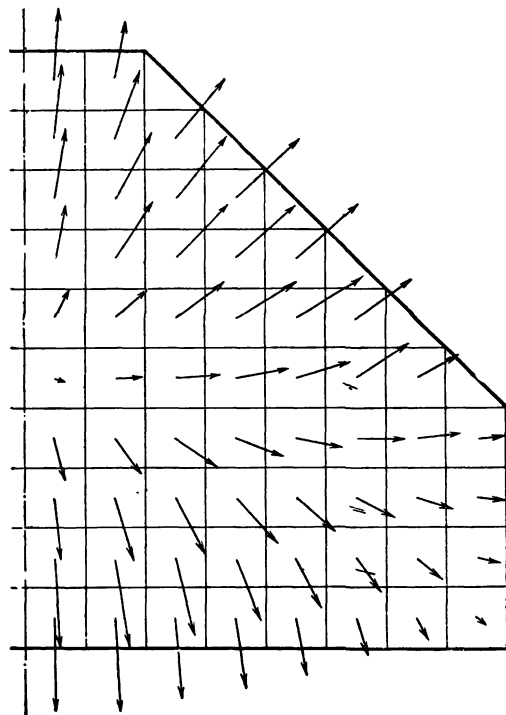


Рис. 18-8. Векторы электрического поля в волноводе сложного сечения.

Критическая длина волны исследуемого волновода равна:

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{0,8185} = 7,68 \text{ см.}$$

Дальнейшее уточнение расчета делается путем перехода к более мелкой сетке со стороной ячейки $a/2=0,5 \text{ см.}$

Используются более точная расчетная формула (18-10) и трехзначные числа. Результат уточненного расчета показан на рис. 18-7. Значение $\beta_{кр}$ оказалось равным $0,7 \text{ 1/см}^2$; $\lambda_{кр}=7,51 \text{ см.}$

На рис. 18-7 показано несколько линий магнитного поля (их уравнение $E_x = \text{const}$).

На рис. 18-8 показаны в масштабе векторы поперечного компонента напряженности электрического поля $E_{\text{поп}}$, рассчитанные по уравнению типа (16-12) (с заменой символа H на E).

18-8. ПРИМЕР РАСЧЕТА РЕЗОНАНСНОЙ ДЛИНЫ ВОЛНЫ ПОЛОГО РЕЗОНАТОРА

Расчет ведется по волновым уравнениям в разностной форме (18-9) и (18-10). Пусть размеры поперечного сечения полого резонатора (рис. 18-9) одинаковы с размерами волновода, рассмотренного в § 18-7. Длина резонатора $d=9a$, где a — сторона ячейки сетки на рис. 18-6.

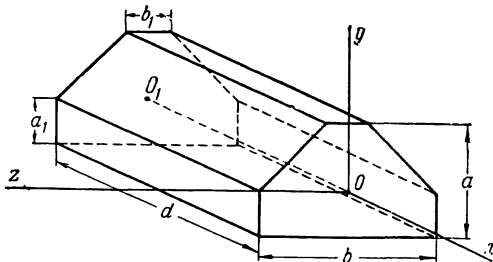


Рис. 18-9. К расчету полого резонатора сложной формы.

Наиболее точное значение величины $\beta_{кр}^2 = k^2$ было найдено в § 18-7 равным $0,7 \text{ 1/см}^2$.

При наимизшем типе колебаний в резонаторе, обозначаемом условно символом $TM_{0,1,*}$, характеристическое число $l=0$, следовательно, $L=0$; квадрат коэффициента фазы собственных колебаний равен $\beta^2=0,7 \text{ 1/см}^2$.

Резонансная длина волны равна:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{0,7}} = 7,51 \text{ см.}$$

Частота собственных колебаний резонатора составит:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{7,51} = 4 \cdot 10^9 \text{ гц.}$$

При другом типе колебаний, когда характеристическое число $l = 1$,

$$L = 1 \frac{\pi}{d} = \frac{3,14}{9} = 0,349 \text{ 1/см}^2;$$

$$\beta^2 = k^2 + L^2 = 0,7 + 0,349^2 = 0,822 \text{ 1/см}^2;$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{0,822}} = 6,93 \text{ см}; f = 4,33 \cdot 10^9 \text{ гц}$$

и т. д.

18-9. ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ В РАЗНОСТНОЙ ФОРМЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Цилиндрические координаты важны для расчета трехмерных задач распределения электромагнитного поля и распространения электромагнитных волн в областях, имеющих симметрию относительно некоторой оси, с которой совмещается ось цилиндрических координат.

Если рассматривается электромагнитное поле в областях, достаточно удаленных от оси цилиндрических координат, то расчет как в плоскости $r\theta$ (нормальной к оси), так и в плоскости rz (проходящей через ось) удобнее делать на полярной сетке (§ 17-14), используя волновые уравнения в разностной форме, приведенные в § 18-1.

В случае же расчетов в областях, прилегающих к оси симметрии, приходится работать на сетке, отдельные узловые точки которой лежат непосредственно на оси симметрии. Выражения лапласиана в разностной форме оказываются различными для каждого ряда точек сетки.

I. Подставляя в волновое уравнение для проводящей среды (11-21) или (11-22) развернутые выражения векторного и скалярных лапласианов в цилиндрических координатах, замечаем, что для составляющей H_r при

наличии осевой симметрии $\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \doteq 0\right)$ уравнение приобретает вид:

$$\frac{\partial^2 H_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial r} - \frac{H_r}{r^2} + \frac{\partial^2 H_r}{\partial z^2} = \gamma \mu_a \frac{\partial H_r}{\partial t}. \quad (18-15)$$

Совершенно такую же форму будет иметь уравнение для составляющей H_θ .

Заменим производные разностными отношениями по (17-4) — (17-9), пренебрегая членами, содержащими разности порядка выше второго.

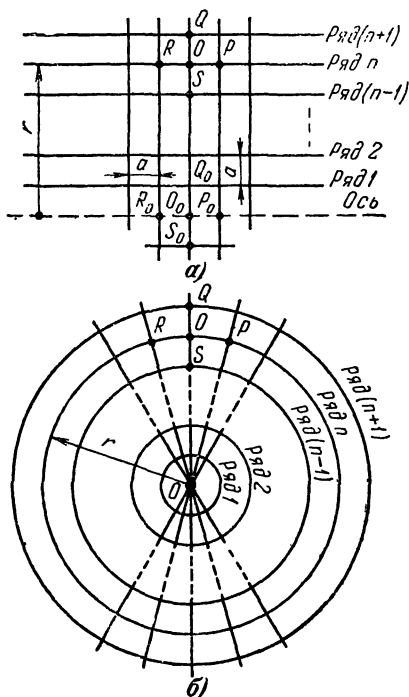


Рис. 18-10. Обозначение точек в выводе расчетных формул в полярных координатах.

На квадратной сетке в плоскости rz интервалы расстояния повсюду одинаковы: $a_P = a_Q = a_R = a_S = a$ (рис. 18-10, а).

Обозначим интервал времени через Δt . Волновое уравнение типа (18-15) для радиальной или касательной составляющей поля примет следующую разностную форму:

$$\frac{1}{a^2} \left[H_{P(t)} + \left(1 + \frac{a}{2r} \right) H_{Q(t)} + H_{R(t)} + \right.$$

$$\begin{aligned} & + \left(1 - \frac{a}{2r}\right) H_{St} - \left(4 + \frac{a^2}{r^2}\right) H_{O(t)} \Big] = \\ & = \frac{\gamma \mu_a}{\Delta t} (H_{O(t+\Delta t)} - H_{O(t)}). \end{aligned} \quad (18-16)$$

Свяжем интервалы расстояния и времени соотношением

$$\Delta t = \frac{1}{4} \gamma \mu_a a^2. \quad (18-17)$$

Расчетная формула получится в результате решения (18-16) относительно $H_{O(t+\Delta t)}$ при подстановке (18-17)

$$\begin{aligned} H_{O(t+\Delta t)} = & \frac{1}{4} \left(H_{P(t)} + qH_{Q(t)} + H_{R(t)} + \right. \\ & \left. + sH_{S(t)} - \frac{1}{n^2} H_{O(t)} \right), \end{aligned} \quad (18-18)$$

где

$$q = 1 + \frac{a}{2r} = 1 + \frac{1}{2n}; \quad (18-19)$$

$$s = 1 - \frac{a}{2r} = 1 - \frac{1}{2n}; \quad (18-20)$$

n — номер ряда, в котором находится рассчитываемая точка O (считая от оси, $r = na$).

В точках, лежащих непосредственно на оси цилиндрических координат, радиальная и касательная составляющие отсутствуют ($H_r = 0$ и $H_\theta = 0$).

II. В уравнении типа (18-15) для осевой составляющей поля (E_z или H_z) отсутствует член вида H_z/r^2 . Соответственно расчетная формула [типа (18-18)] для точек, не лежащих на оси симметрии, не должна содержать члена вида $\frac{1}{n^2} H_{O(t)}$

$$H_{O(t+\Delta t)} = \frac{1}{4} (H_{P(t)} + qH_{Q(t)} + H_{R(t)} + sH_{S(t)}). \quad (18-21)$$

III. В отличие от радиальной и касательной составляющих осевая составляющая поля (H_z или E_z) может иметь ненулевое значение в точках, лежащих на оси;

однако в силу симметрии это значение будет экстремальным

$$\left(\frac{\partial H_z}{\partial r}\right)_{r=0} = 0 \quad \left[\text{или} \quad \left(\frac{\partial E_z}{\partial r}\right)_{r=0} = 0\right]. \quad (18-22)$$

В волновом уравнении (18-15) второй член в левой части принимает при $r=0$ неопределенное значение. Третий член отсутствует.

Раскрывая неопределенность, получаем:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r}\right) = \left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2}\right)_{r=0}. \quad (18-23)$$

Таким образом, уравнение для H_z в точках, лежащих на оси ($r=0$), имеет вид:

$$2 \left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2}\right)_{r=0} + \left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2}\right)_{r=0} = \gamma^2 \mu_a \left(\frac{\partial H_z}{\partial t}\right)_{r=0}. \quad (18-24)$$

Его разностная форма, если принять во внимание, что в силу симметрии $H_{Q(t)} = H_{S(t)}$, такова (рис. 18-10,а):

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} [H_{P0(t)} + 4H_{Q(t)} + H_{R0(t)} - 6H_{O0(t)}] = \\ = \gamma^2 \mu_a \frac{H_{O0(t+\Delta t)} - H_{O0(t)}}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (18-25)$$

При связи интервалов времени и расстояния по (18-17) расчетная формула для точек сетки, лежащих на оси симметрии, имеет вид:

$$H_{O0(t+\Delta t)} = \frac{1}{4} [H_{P0(t)} + 4H_{Q(t)} + H_{R0(t)} - 2H_{O0(t)}]. \quad (18-26)$$

IV. При проведении расчета в плоскости $r\theta$, перпендикулярной оси симметрии (рис. 18-10,б), сетка не будет квадратной. В таких случаях необходимо составлять специальные расчетные формулы взамен (18-18) и (18-26), пользуясь принципами, описанными в § 17-11 или в § 17-14.

V. В расчетах полей в волноводах и резонаторах на базе специфического волнового уравнения [типа (16-20)] целесообразно составлять специфическое волновое уравнение для касательной составляющей напряженности магнитного или электрического поля (H_θ или E_θ); в это

уравнение входит лапласиан в осевой плоскости rz

$$\nabla_{rz}^2 H_\theta + \left(k^2 - \frac{1}{r^2} \right) H_\theta = 0. \quad (18-27)$$

Смысл величины k указан в объяснении к (18-9) и (18-10).

Вывод этого уравнения нетруден для электромагнитных полей, имеющих какую-нибудь одну касательную составляющую (либо магнитную, либо электрическую). Остальные составляющие поля могут быть выражены через эту касательную составляющую посредством уравнений, в общих чертах сходных с уравнениями § 16-2, за исключением поправок, вносимых заменой прямоугольных декартовых координат цилиндрическими. Здесь выкладки опускаются.

При расположении точек сетки по рис. 18-10 специфическое волновое уравнение (18-27) записывается в разностной форме так:

$$H_P + qH_Q + H_R + sH_S - (u - a^2k^2)H_O = 0, \quad (18-28)$$

где q и s — коэффициенты, определяемые по (18-19) и (18-20).

Коэффициент u для точек, не лежащих на оси, равен:

$$u = 4 + \frac{a^2}{r^2} = 4 + \frac{1}{n^2}. \quad (18-29)$$

18-10. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПРИ РАСЧЕТЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

В любой системе координат сохраняют силу общие граничные условия: а) касательная составляющая напряженности электрического поля и б) нормальная составляющая напряженности магнитного поля — у хорошо проводящей поверхности практически равны нулю.

Упомянутое в § 18-5 дополнительное граничное условие (в) — равенство нулю производной напряженности магнитного поля по нормали к хорошо проводящей граничной поверхности — в цилиндрических координатах действительно только у торцовых поверхностей (нормальных к оси цилиндрических координат). У боковых же цилиндрических поверхностей условие (в) становится неверным. Действительно, из разворачивания первого

уравнения Максвелла для идеального диэлектрика в цилиндрических координатах вытекает:

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r H_{\theta}) - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] = \epsilon_a \frac{\partial E_z}{\partial t}. \quad (18-30)$$

По вышеуказанным общим граничным условиям «а» и «б» у боковой стенки H_r , E_z и производные $\partial H_r / \partial \theta$ и

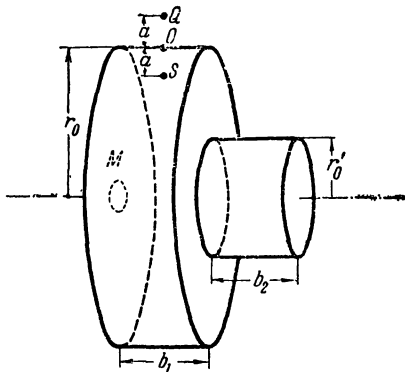


Рис. 18-11. Полый резонатор в виде тела вращения сложной формы.

$\partial E_z / \partial t$ равны нулю. Следовательно, должна равняться нулю и производная $\frac{\partial}{\partial r} (r H_{\theta})$, т. е.

$$r \frac{\partial H_{\theta}}{\partial r} = -H_{\theta}. \quad (18-31)$$

Уравнение в разностной форме получит следующий вид для какой-либо точки O , лежащей на боковой хорошо проводящей поверхности волновода или полого резонатора (рис. 18-11):

$$r_0 \frac{H_Q - H_S}{2a} = -H_O.$$

Отсюда получается искомое граничное условие для магнитного поля у боковой цилиндрической хорошо проводящей поверхности

$$H_Q = H_S - H_O \frac{2a}{r} = H_S - H_O \frac{2}{n}. \quad (18-32)$$

Здесь H_O , H_Q , H_S — значения напряженности магнитного поля соответственно в точках O , Q и S .

Точка Q является, очевидно, фиктивной, поскольку она лежит вне полости резонатора; a — сторона ячейки сетки в плоскости rz ; $r_0 = na$ — радиус боковой поверхности; n — число ячеек сетки, уложившихся вдоль радиуса r_0 .

18-11. ПРИМЕР РАСЧЕТА РЕЗОНАНСНОЙ ДЛИНЫ ВОЛНЫ ПОЛОГО РЕЗОНАТОРА В ВИДЕ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Рассмотрим наименьший мод собственных колебаний $TM_{0,1,*}$ в полом резонаторе сложной формы (рис. 18-11). Сторона ячейки сетки принята за единицу расстояния ($a=1$); размеры резонатора: $r_0=5a$; $r'_0=2a$; $b_1=3a$; $b_2=3a$.

Ось цилиндрических координат совмещается с осью резонатора. При рассматриваемом моде колебаний магнитное поле имеет только одну касательную составляющую H_θ . В силу симметрии величины поля не зависят от угла θ , т. е. одинаково распределены во всех плоскостях rz , проходящих через ось резонатора. Общий порядок нахождения распределения величины H_θ в одной из плоскостей сходен с описанным в § 18-7, однако расчет производится по (18-28).

Граничные условия на торцовых и боковых поверхностях берутся, как указано в § 18-10.

Для их обеспечения в расчет введены фиктивные точки (рис. 18-12). Значение H_θ в фиктивной точке, лежащей около торцовой поверхности, поддерживается одинаковым со значением в ближайшей точке на торцовой части границы. Значение H_θ в фиктивной точке, лежащей около боковой поверхности, поддерживается связанным уравнением (18-32) с ближайшей точкой на границе (типа O) и со следующей за ней точкой (типа S), находящейся внутри полости.

Масштаб выбран так, чтобы величина H_θ в точке K_1 на большой торцовой поверхности, лежащей на расстоянии a от оси, равнялась 100 условным единицам.

На рис. 18-12 представлено окончательное распределение значений H_θ по узловым точкам сетки; оно соответствует величине члена $a^2 k^2$ в (18-28), равной 0,2455.

Поэтому резонансная длина волны составляет:

$$\lambda_{рсз} = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{0,2455}} a = 12,7 a.$$

Сравним этот результат с расчетом резонансной длины волны цилиндрического резонатора при простейшем моде колебаний (когда отсутствуют вариации величин электромагнитного поля как по периметру сечения, так и в осевом направлении).

Аналогично изложенному в § 16-11, определение параметра $k = \sqrt{\beta^2 - L^2}$, где L — производное характеристическое число, зависящее от продольного (осевого) размера резонатора, не отличается

от расчета критической длины волны цилиндрического волновода при волнах $TM_{0,1}$.

Обращаясь к табл. 16-1, находим, что наименьшее произведение $\beta_{кр} r_0$ равно 2,405. Такой же величине должно равняться произведение βr_0 в цилиндрическом резонаторе при колебаниях мода $TM_{0,1,0}$; при $L=0$ величина β является коэффициентом фазы собственных колебаний резонатора. Следовательно, резонансная длина волны

$$(166) \cdot (164) \cdot (160) \cdot (157) \cdot$$

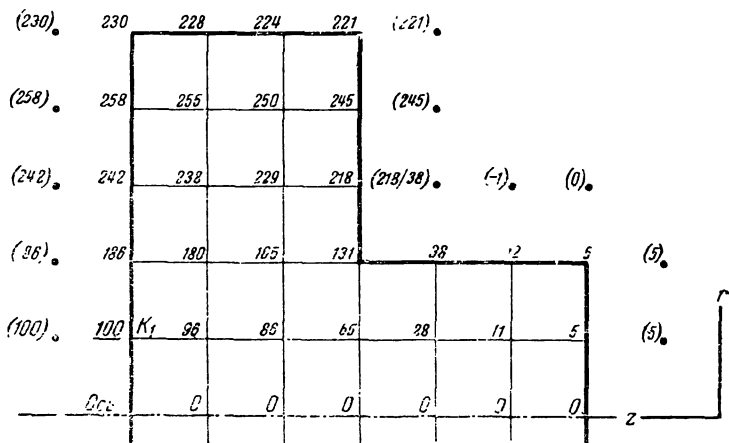


Рис. 18-12. Расчет резонансной длины волны полого резонатора сложной формы с осевой симметрией.

цилиндрического полого резонатора с радиусом r_0 при колебаниях мода $TM_{0,1,0}$ равна:

$$\lambda_{рез} = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{2,405} r_0 = 2,615 r_0.$$

Если бы рассматриваемый резонатор был правильным цилиндром с радиусом $r_0=5a$, его резонансная длина волны равнялась бы 13,075 a ; в приведенном ранее расчете получено значение $\lambda_{рез} = 12,7 a$; влияние уступа в радиусе сечения сказалось лишь в небольшом укорочении $\lambda_{рез}$. При этом, однако, поле величины H_θ получило некоторые изменения в осевом направлении, видные из рис. 18-12. Получившуюся волну нельзя точно отнести к моду $TM_{0,1,0}$; поэтому для нее и введено условное обозначение $TM_{0,1,*}$.

Если, с другой стороны, сравнить рассматриваемый резонатор с цилиндрическим резонатором с радиусом $r'_0=2a$, у которого $\lambda_{рез}$ равняется 5,23 a , можно заключить, что увеличение радиуса полости даже на части длины резонатора вызвало значительное возрастание

$\lambda_{рез}$; причина в том, что в добавляемой части полости в процессе свободных поперечно-магнитных колебаний устанавливается сильное магнитное поле. Это также хорошо видно из рис. 8-12.

18-12. ПРОНИКНОВЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ДЛИННЫЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ПРОВОДНИК ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ В ВИДЕ ОДИНОЧНОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ИМПУЛЬСА

Пусть в момент $t=0$ к поверхности проводника с радиусом r_0 приложен прямоугольный импульс электрического поля с напряженностью $E=E_z k=1000$ условных единиц. Выберем интервал времени равным 0,1 продолжительности импульса.

Интервал радиального расстояния a , определенный по (18-17), оказался равным $0,2r_0$. По окончании импульса ($t > 10\Delta t$) значение E_z на поверхности проводника ($r=r_0$) спадает не мгновенно в силу наличия в проникшем в глубь проводника поле некоторого запаса энергии. Плавная кривая спада (E_z) $_{r=r_0}$ получена в процессе расчета (рис. 18-13,а).

Расчет проводится в поперечной плоскости $r\theta$. Вследствие симметрии производные по θ равны нулю. Поэтому расчетные формулы (18-21) и (18-26) изменились:

для точек, не лежащих на оси,

$$E_{O(t+\Delta t)} = \frac{1}{4} (qE_Q(t) + sE_S(t) + 2E_O(t)); \quad (18-33)$$

для точек, расположенных на оси,

$$E_{O(t+\Delta t)} = E_Q(t). \quad (18-34)$$

Расположение точек O , Q и S сохранено, как показано на рис. 18-10,б.

Расчетная таблица сходна с табл. 18-1 и здесь не приводится. Результаты расчета приведены в виде кривых на рис. 18-13,а.

Затем по интерполяционным формулам (17-22) и (17-23) находились средние значения величины E_z ср в каждом поясе сечения проводника. Умножив их на площадь соответствующего пояса и удельную проводимость материала γ были найдены мгновенные значения тока проводимости.

Мгновенные значения напряженности магнитного поля на поверхности проводника $H_{r=r_0} = H_{\theta(r=r_0)} \cdot 1_{\theta}$ находились по закону полного тока. Они показаны в условных единицах сплошной кривой на рис. 18-13,б.

После этого рассчитывалось проникновение магнитного поля в глубь проводника при полученных граничных условиях на поверхности.

Расчетная формула составлена на базе (18-18) с учетом симметрии

$$H_{O(t+\Delta t)} = \frac{1}{4} \left[qH_Q(t) + sH_S(t) + \left(2 - \frac{1}{n^2}\right) H_O(t) \right]. \quad (18-35)$$

На оси проводника

$$H_{\theta} = 0.$$

Результаты приведены в виде кривых на рис. 18-13,б.

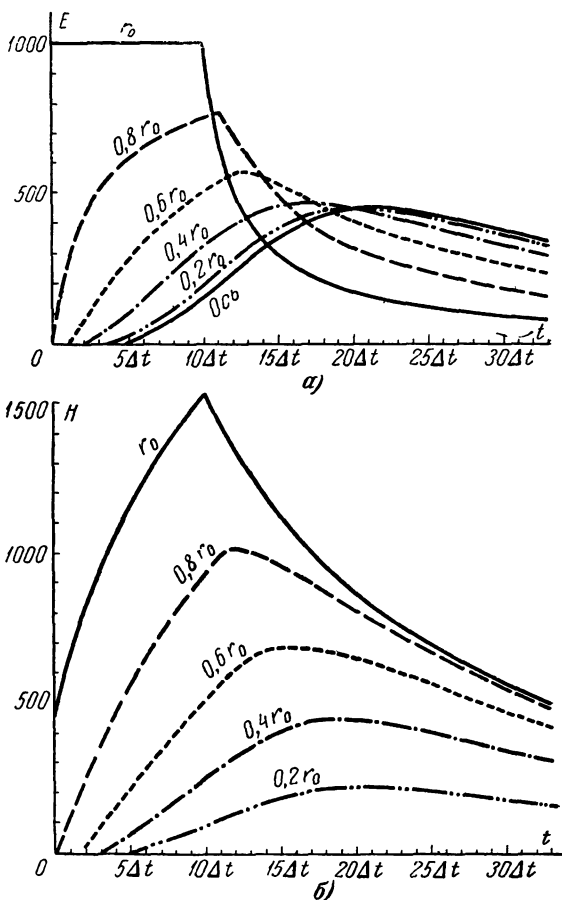


Рис. 18-13. Проникновение прямоугольного импульса электромагнитного поля в длинный цилиндрический проводник.

18-13. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЫ

Волновые уравнения, выведенные в § 11-4, пригодны для линейной среды, параметры которой ϵ , μ , γ постоянны. Уравнения для нелинейной среды подлежат модифи-

кации. Порядок ее осуществления рассмотрим для случая проводящей среды с постоянной γ и переменной μ (электротехническая сталь).

Во втором уравнении Максвелла теперь нельзя выносить μ_a за знак производной

$$[\nabla \mathbf{E}] = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} (\mu_a \mathbf{H}).$$

Выполняем дифференцирование произведения:

$$\begin{aligned} [\nabla \mathbf{E}] &= - \frac{\partial \mu_a}{\partial t} \mathbf{H} - \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = - \frac{\partial \mu_a}{\partial H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \mathbf{H} - \\ &- \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = - \left(\mu_a + H \frac{\partial \mu_a}{\partial H} \right) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = - \mu_\partial \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (18-36)$$

Величину

$$\mu_\partial = \mu_a + H \frac{\partial \mu_a}{\partial H} \quad (18-37)$$

назовем нелинейной магнитной проницаемостью.

Для практического проведения расчетов необходимо заготовить кривую $\mu_\partial = f(H)$. Для этого на основании известной кривой намагничивания материала $B = f_1(H)$ строится кривая относительной магнитной проницаемости $\mu = f_2(H)$. Ее ординаты получаются следующим путем (рис. 18-14).

Пусть, например, при $H = H_1 = 300$ а/м индукция равна $B = B_1 = 0,99$ в·сек/м²; относительная проницаемость при этом значении H равна $\mu = \frac{B_1}{\mu_0 H_1} = \frac{0,99}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 300} = 2630$; соответствующую ординату имеет точка p кривой $f_2(H)$.

Построив по точкам кривую $\mu = f_2(H)$, переходят к нахождению ординат кривой $\mu_\partial = f_3(H)$. Производная $\frac{\partial \mu}{\partial H}$ в какой-либо точке p находится как тангенс угла наклона касательной к кривой $\mu = f_2(H)$ к оси H , умноженный на отношение масштабов величин μ и H ,

$$\frac{\partial \mu}{\partial H} = \frac{m_\mu}{m_H} \operatorname{tg} \alpha.$$

Для точки p на рис. 18-14 $\alpha = 131^\circ$; $\operatorname{tg} \alpha = -1,15$. Масштабы m_μ и m_H равны (принимая за единицу длины на чертеже отрезок l_i):

$$m_\mu = 1\,250; m_H = 250.$$

Таким образом,

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial H}\right)_p = -\frac{1\,250}{250} \cdot 1,15 = -5,75 \text{ гн/а.}$$

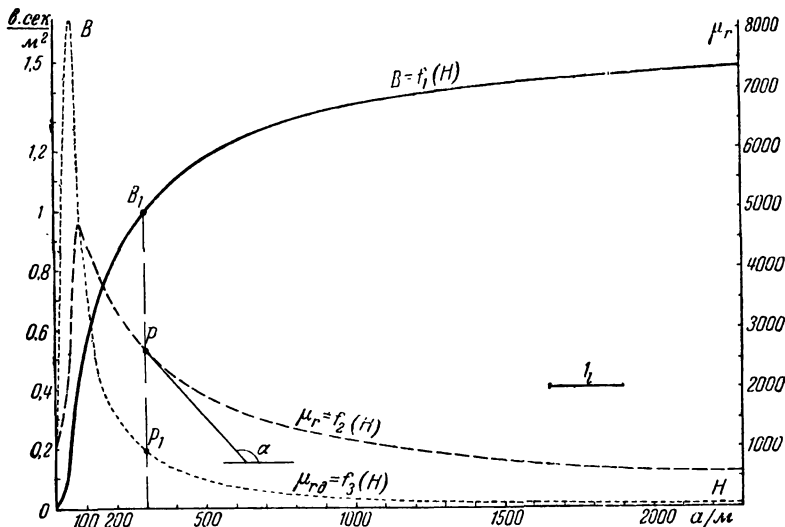


Рис. 18-14. Построение кривой нелинейной проницаемости стали.

Величина нелинейной относительной проницаемости μ_∂ при $H_1 = 300 \text{ а/м}$ по (18-37) равна:

$$\mu_\partial = \frac{\mu_{a\partial}}{\mu_0} = \mu + H_1 \left(\frac{\partial \mu}{\partial H}\right)_p = 2\,630 - 300 \cdot 5,75 = 905.$$

Это ордината точки p_1 на рис. 18-14.

Таким путем находятся ординаты достаточного количества точек, по которым проводится кривая $\mu_\partial = f_3(H)$.

Заметим, что кривые $\mu = f_2(H)$ и $\mu_\partial = f_3(H)$ начинаются из одной и той же точки, поскольку $\mu_\partial = \mu$ при $H = 0$.

Кроме того, кривая $\mu_0 = f_3(H)$ проходит через точку максимума кривой $\mu = f_2(H)$, поскольку величина $\partial\mu/\partial H$ в этой точке равна нулю.

Если точность описанного графо-аналитического расчета представляется недостаточной, оперируют не с кривыми, а с подробными таблицами намагничивания; тогда производная $\partial\mu/\partial H$ вычисляется по (17-24) и (17-25).

В первом уравнении Максвелла для проводящей среды можно пренебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости

$$[\nabla\mathbf{H}] = \gamma\mathbf{E}. \quad (18-38)$$

Совместное решение обоих уравнений Максвелла [(18-36) и (18-38)], порядком, описанным в § 11-4, приводит к следующему виду волнового уравнения для напряженности магнитного поля в нелинейной проводящей среде:

$$\nabla^2\mathbf{H} = \gamma\mu_0 \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}. \quad (18-39)$$

В этом волновом уравнении содержится переменный коэффициент μ_0 .

18-14. ПРИМЕР СОСТАВЛЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЫ В РАЗНОСТНОЙ ФОРМЕ

Рассмотрим одномерную задачу плоской электромагнитной волны в проводящей нелинейной среде — проникновение электромагнитного поля в лист II, находящийся внутри пакета стального сердечника (рис. 13-5).

В координатах этого рисунка волновое уравнение (18-39) для областей вдали от краев листа получает вид:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \gamma\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}. \quad (18-40)$$

Располагая расчетные точки... R, O, P ... вдоль оси x по рис. 13-5, выражаем (18-40) в разностной форме

$$\frac{H_P(t) + H_R(t) - 2H_O(t)}{a^2} = \gamma \mu_0 \frac{H_{O(t+\Delta t)} - H_{O(t)}}{\Delta t},$$

где a — сторона ячейки сетки (расстояние между двумя соседними расчетными точками).

Решая это уравнение относительно $H_{O(t+\Delta t)}$, получаем расчетную формулу

$$H_{O(t+\Delta t)} = \frac{k_1}{\mu_0} (H_P(t) + H_R(t)) + \left(1 - \frac{2k_1}{\mu_0}\right) H_{O(t)}, \quad (18-41)$$

где

$$k_1 = \frac{\Delta t}{a^2 \gamma \mu_0}. \quad (18-42)$$

Порядок проведения расчета показан в § 18-15.

Волновые уравнения в разностной форме для двухмерной задачи в проводящей среде, для задач с осевой симметрией и, наконец, для распространения электромагнитных волн в нелинейных диэлектриках составляют подобным же путем.

18-15. РАСЧЕТ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СТАЛЬНОМ ЛИСТЕ СЕРДЕЧНИКА С ПЕРЕМЕННОЙ МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ

Пусть в момент $t=0$ к поверхности листа приложено постоянное поле с $H=1000$ а/м; толщина листа $2b=0,5$ мм; это расстояние разбиваем на 10 интервалов; $a=0,05$ мм $=5 \cdot 10^{-5}$ м.

Удельная проводимость стали $\gamma=2 \cdot 10^6$ 1/ом·м.

Кривые намагничивания и проницаемостей представлены на рис. 18-14. Выбираем интервал времени $\Delta t=10^6$ сек. Величина k_1 по (18-42) равна:

$$k_1 = \frac{10^{-6}}{25 \cdot 10^{-10} \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = 159.$$

Расчетная формула (18-41) будет такова:

$$H_{O(t+\Delta t)} = \frac{159}{\mu_0} (H_P(t) + H_R(t)) + \left(1 - 2 \frac{159}{\mu_0}\right) H_{O(t)}. \quad (18-43)$$

При расчете напряженности поля в какой-либо точке O в конце интервала времени $H_0(t+\Delta t)$ приближенно принимается значение нелинейной проницаемости μ_0 в той же точке в начале этого же интервала времени.

Начало расчета показано в табл. 18-3.

На рис. 18-15 показаны сплошными линиями рассчитанные кривые возрастания магнитной индукции $B = \mu H = f(t)$ на различных

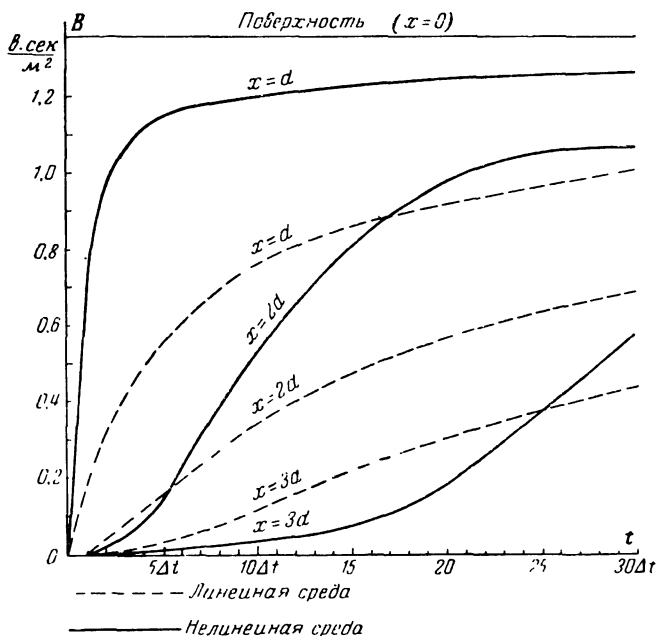


Рис. 18-15. Рассчитанные методом сеток кривые проникновения поля в лист расслоенного стального сердечника с учетом нелинейности (сплошные линии) и без учета нелинейности (пунктир).

глубинах от поверхности листа; пунктирными линиями показаны те же кривые в случае линейной среды при $\mu = \text{const}$, равной магнитной проницаемости материала на поверхности листа.

Из кривых ясно видно, например, экранирующее действие, оказываемое наружными слоями листа в первые моменты времени по отношению к глубинным слоям; причина в том, что в начале намагничивания наружные слои обладают высокими значениями проницаемостей μ и μ_0 (рис. 18-14).

Таблица 18-3

Расстояние от поверхности листа	Интервалы времени				
	0	1	2	3	4 и т. д.
<i>O</i> (поверхность) $\frac{H}{\mu_{\partial}}$	1 000	1 000	1 000	1 000	1 000
$\frac{k_1}{\mu_{\partial}}$					
<i>a</i> $\frac{H}{\mu_{\partial}}$	0	159	291	363	429
$\frac{k_1}{\mu_{\partial}}$	1 000	1 915	987	740	587
$\frac{k_1}{\mu_{\partial}}$	0,159	0,083	0,161	0,215	0,271
<i>2a</i> $\frac{H}{\mu_{\partial}}$		0	25	32	39
$\frac{k_1}{\mu_{\partial}}$		1 000	5 300	6 500	7 720
$\frac{k_1}{\mu_{\partial}}$		0,159	0,03	0,0244	0,0206
<i>3a</i> $\frac{H}{\mu_{\partial}}$			0	4	6
$\frac{k_1}{\mu_{\partial}}$			1 000	1 700	2 030
$\frac{k_1}{\mu_{\partial}}$			0,159	0,0935	0,0783
и т. д.					

ЛИТЕРАТУРА

1. Алехин В. М., Мушенко С. В., Граничные условия и интегральное уравнение для трехмерного векторного потенциала, Известия вузов, «Электромеханика», 1966, № 4.
2. Аркадьев В. К., Электромагнитные процессы в металлах, ч. I и II, ОНТИ, 1935, 1936.
3. Батыгин В. В., Топтыгин И. Н., Сборник задач по электродинамике, Физматгиз, 1962.
4. Беккер, Электронная теория, ОНТИ, 1936.
5. Белоруссов Н. И. и Гроднев И. И., Радиочастотные кабели, Госэнергоиздат, 1959.
6. Бессонов Л. А., Теоретические основы электротехники, изд-во «Высшая школа», 1961.
7. Боголюбов В. Е., Шамаев Ю. М., Электролитическая ванна с минимально искажающими стенками, «Электричество», 1954, № 10.
8. Бодякшин А. И., Метод расчета магнитного поля, Уч. зап. Мордовского ун-та, 1961, № 18.
9. Брунов Б. Я., Гольденберг Л. М., Кляцкин И. Г., Цейтлин Л. А., Теория электромагнитного поля, Госэнергоиздат, 1962.
10. Бухгольц Г., Расчет электрических и магнитных полей, Изд-во иностранной литературы, 1961.
11. Вазов В., Форсайт Дж., Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, Изд-во иностранной литературы, 1963.
12. Вайнштейн Л. А., Электромагнитные волны, изд-во «Советское радио», 1957.
13. Говорков В. А., Электрические и магнитные поля, Госэнергоиздат, 1960.
14. Говорков В. А., Расчет распространения электромагнитных волн методом сетки, «Электричество», 1958, № 4.
15. Говорков В. А. и Купалян С. Д., Теория электромагнитного поля в упражнениях и задачах, изд-во «Высшая школа», 1963.
16. Гольдштейн Л. Д. и Зернов Н. В., Электромагнитные поля и волны, изд-во «Советское радио», 1956.
17. Гринберг Г. А., Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений, изд. АН СССР, 1948.
18. Данжи Дж., Космическая электродинамика, Госатомиздат, 1961.
19. Даревский А. И., Кухаркин Е. С., Теоретические основы электротехники, ч. II. Основы теории электромагнитного поля, изд-во «Высшая школа», 1965.
20. Дружкин Л. А., Задачи теории поля, ч. I—IV, изд. Мос-

ковского института радиоэлектроники и горной электромеханики, 1964.

21. Егоров П. М., Экспериментальное исследование потенциальных полей, «Электричество», 1954, № 3.

22. Егоров П. М., Применение метода конформных преобразований к моделированию трехмерных потенциальных и вихревых полей, «Электричество», 1956, № 5.

23. Займовский А. С. и Усов В. В., Металлы и сплавы в электротехнике, Госэнергоиздат, 1957.

24. Зоммерфельд А., Электродинамика, Изд-во иностранной литературы, 1958.

25. Каден Г., Электромагнитные экраны, Госэнергоиздат, 1957.

26. Канторович Л. В. и Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, Гостехиздат, 1949.

27. Каценеленбаум Б. З., Высокочастотная электродинамика, изд-во «Наука», 1966.

28. Коллатц Г., Численные методы решения дифференциальных уравнений, Изд-во иностранной литературы, 1953.

29. Коппенфельс В., Штальман Ф., Практика конформных отображений, Изд-во иностранной литературы, 1963.

30. Круг К. А., Основы электротехники, Госэнергоиздат, 1946.

31. Круг К. А., Ломоносов В. Ю., Перекалин М. А. и Поливанов К. М., Задачник по теоретическим основам электротехники, Госэнергоиздат, 1948.

32. Купалян С. Д., Теоретические основы электротехники, ч. III, Госэнергоиздат, 1963.

33. Лавров В. М., Теория электромагнитного поля и основы распространения радиоволн, изд-во «Связь», 1964.

34. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Электродинамика сплошных сред, Изд-во технико-теорет. литературы, 1957.

35. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, Физматгиз, 1960.

36. Ланс Дж. Н., Численные методы для быстродействующих вычислительных машин, Изд-во иностранной литературы, 1962.

37. Лебедев И. В., Техника и приборы сверхвысоких частот, Госэнергоиздат, 1961.

38. Лорентц Г. А., Теория электромагнитного поля, Гостехиздат, 1933.

39. Максвелл Дж. К., Избранные сочинения по теории электромагнитного поля, Гостехиздат, 1954.

40. Меерович Э. А., Методы релятивистской электродинамики в электротехнике, изд-во «Энергия», 1966.

41. Микеладзе Ш. Е., Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными, изд. АН СССР, 1936.

42. Милн В. Э., Численное решение дифференциальных уравнений, Изд-во иностранной литературы, 1955.

43. Миролюбов Н. Н., Костенко М. В., Левинштейн М. Л., Тиходеев Н. Н., Методы расчета электростатических полей, изд-во «Высшая школа», 1963.

44. Миткевич В. Ф., Магнитный поток и его преобразование, изд. АН СССР, 1946.

45. Нейман Л. Р., Поверхностный эффект в ферромагнитных телах, Госэнергоиздат, 1949.

46. Нейман Л. Р., Руководство к лаборатории электромагнитного поля, Госэнергоиздат, 1950.
47. Нейман Л. Р. и Калантаров П. Л., Теоретические основы электротехники, изд-во «Энергия», 1967.
48. Нетушил А. В. и Поливанов К. М., Основы электротехники, ч. III, Госэнергоиздат, 1956.
49. Нетушил А. В., Электрические поля в анизотропных сферах, «Электричество», 1950, № 3.
50. Никольский В. В., Теория электромагнитного поля, изд-во «Высшая школа», 1961.
51. Панов Д. Ю., Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных, Гостехиздат, 1949.
52. Поливанов К. М., Ферромагнетики, Госэнергоиздат, 1957.
53. Поль Р. В., Учение об электричестве, Физматгиз, 1962.
54. Рамо С. и Уиннери Дж., Поля и волны в современной радиотехнике, Гостехиздат, 1948.
55. Ротерс Г., Электромагнитные механизмы, Госэнергоиздат, 1949.
56. Рязанов Г. А., Опыты и моделирование при изучении электромагнитного поля, изд-во «Наука», 1966.
57. Смайт В., Электростатика и электродинамика, Изд-во иностранной литературы, 1954.
58. Смирнов В. И., Курс высшей математики, Гостехиздат, 1949—1951.
59. Стрэттон Дж. А., Теория электромагнетизма, Гостехиздат, 1948.
60. Тамм И. Е., Основы теории электричества, изд-во «Наука», 1966.
61. Тильвикас, Расчет электростатических полей, ограниченных плоскими электродами, Научные труды ВНИИЭ, 1964, № 12.
62. Тихонов А. Н. и Самарский А. А., Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1953.
63. Том А., Эйплт К., Числовые расчеты полей в технике и физике, изд-во «Энергия», 1964.
64. Фарадей М., Экспериментальные исследования по электричеству, изд. АН СССР, 1947.
65. Фельдштейн А. Л., Явич Л. Р., Смирнов В. П., Справочник по элементам волноводной техники, Госэнергоиздат, 1963.
66. Фильчаков П. Ф., Панчишин В. И., Интеграторы ЭГДА, Моделирование потенциальных полей на электропроводной бумаге, Киев, Изд. АН УССР, 1961.
67. Хэг Б., Электромагнитные расчеты, Госэнергоиздат, 1934.
68. Цейтлин Л. А., Индуктивности проводов и контуров, Госэнергоиздат, 1950.
69. Agarwal P. D., Eddy Current Losses in Solid and Laminated Iron. Communications & Electronics, 1959, № 42.
70. Attwood Stephen S., Electric and Magnetic Fields, John Wiley, N. Y., 1941.
71. Boothroyd A. R., Cherry E. C., Makar R., An Electrolytic Tank for Measurement of Steady State Response and Allied Properties of Networks, Proc. IEE, 96, 1949, p. 1.

72. Calvert J. F. and Harrison A. M., Graphical Flux Mapping, *El. Journal*, vol. XXV, 1928, p. 3—5.
73. Cullwick E. G., An Experiment on Electromagnetic Induction by Linear Motion, *Journal of the IEE*, vol. 85, Aug. 1939.
74. Dwight H. B., *Electrical Coils and Conductors*, McGraw-Hill, N. Y., 1945.
75. Fox L., Some Improvements in the Use of Relaxation Methods, *Proc. Roy. Soc., A*, 1947, p. 190.
76. Green P. E. Jr., Automatic Plotting of Electrostatic Fields, *Rev. of Sci. Instr.*, vol. 19, Oct. 1948, № 10.
77. Hickling G. H., The Activities and Equipment of an Industrial Electronics Laboratory, *Electronic Eng.*, vol. 70, Febr. 1952.
78. Howe G. W. O., Some Electromagnetic problems, *Proc. IEE*, vol. 97, July 1960, № 106, p. 1.
79. Kao K. C., Harker T., The Calculation of the Electric Field for an Infinite Dielectric Plate Between Two Spherical Electrodes, *Proc. IEE, C*, 1961, № 492M.
80. Mawardi, On the Concept of Coenergy. *Journ. Franklin Inst.*, 1957, № 4.
81. Moon P. and Spencer A. E., Some Electromagnetic Paradoxes, *Journ. Franklin Inst.* Nov. 1955, № 5.
82. Moore A. D., Fields from Fluid Flow Mappers, *Journ. Appl. Phys.*, Aug. 1949, № 20.
83. Poritsky H., Butler J. M., A. C. Flux Penetration into Magnetic Materials with Saturation, *IEEE Trans. Commun. and Electron.* 1964, № 70.
84. Soutwell R. V., *Relaxation Methods in Theoretical Physics*, Clarendon Press, Oxford, 1946.
85. Walker G. B., Magnetostatic Field of Electric Currents, *Proc. Inst. El. Engin.*, 1964, vol. 111, № 5.
-

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ П-1

Сводка формул векторного анализа

Наименования операций и символов	Прямоугольные декартовы координаты x, y, z	Цилиндрические координаты r, θ, z	Сферические координаты r, θ, ψ
Единичные векторы	$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	$\mathbf{1}_r, \mathbf{1}_\theta, \mathbf{k}$	$\mathbf{1}_r, \mathbf{1}_\theta, \mathbf{1}_\psi$
Градиент $\nabla\varphi =$	$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}$	$\frac{\partial\varphi}{\partial r}\mathbf{1}_r + \frac{\partial\varphi}{r\partial\theta}\mathbf{1}_\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}$	$\frac{\partial\varphi}{\partial r}\mathbf{1}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\mathbf{1}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\mathbf{1}_\psi$
Дивергенция $\nabla\mathbf{D} =$	$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(rD_r) + \frac{\partial D_\theta}{\partial\theta}\right\} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2D_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\times$ $\times\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}(D_\theta\sin\theta) + \frac{\partial D_\psi}{\partial\psi}\right\}$

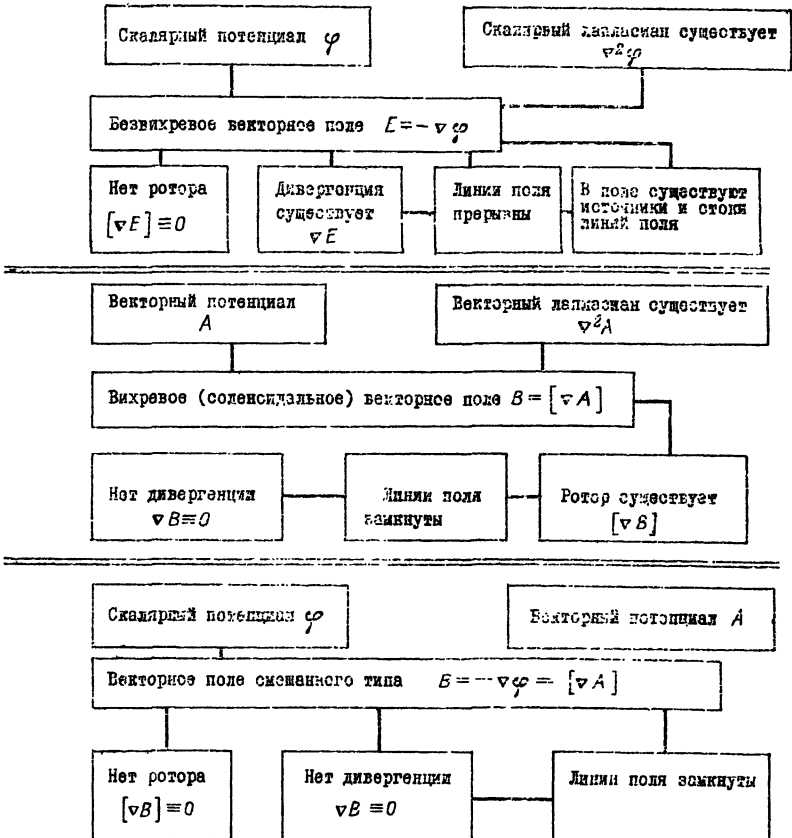
Наименования операций и символов	Прямоугольные декартовы координаты x, y, z	Цилиндрические координаты r, θ, z	Сферические координаты r, θ, ψ
Ротор $[\nabla B]=$	$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{\mathbf{1}_r}{r} & \mathbf{1}_\theta & \frac{\mathbf{k}}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_r & rB_\theta & B_z \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{\mathbf{1}_r}{r^2 \sin \theta} & \frac{\mathbf{1}_\theta}{r \sin \theta} & \frac{\mathbf{1}_\psi}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \psi} \\ B_r & rB_\theta & rB_\psi \sin \theta \end{vmatrix}$
Лапласиан (скалярный) $\nabla^2 \varphi =$	$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \sin \theta \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} \right\}$
Лапласиан (векторный) $\nabla^2 A = \nabla(\nabla A) - [\nabla[\nabla A]]$	$\nabla^2 A_x \mathbf{i} + \nabla^2 A_y \mathbf{j} + \nabla^2 A_z \mathbf{k}$	$\left\{ \nabla^2 A_r - \frac{1}{r^2} \left(A_r + 2 \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right) \right\} \mathbf{1}_r + \left\{ \nabla^2 A_\theta - \frac{1}{r^2} \left(A_\theta - 2 \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \right\} \mathbf{1}_\theta + \nabla^2 A_z \mathbf{k}$	

Сводка применений дифференциального оператора ∇

Вид операции	Обозначение	Применяется к величине	В результате получается величина
Градиент	$\nabla\varphi$	Скалярной	Векторная
Дивергенция	∇D	Векторной	Скалярная
Ротор	$[\nabla A]$	Векторной	Векторная
Лапласиан (скалярный) (дивергенция градиента)	$\nabla^2\varphi$	Скалярной	Скалярная
Лапласиан (векторный)	$\nabla^2 A$	Векторной	Векторная
Градиент дивергенции	$\nabla(\nabla A)$	Векторной	Векторная
Ротор ротора	$[\nabla[\nabla A]]$	Векторной	Векторная
Ротор градиента	$[\nabla(\nabla\varphi)]$	Скалярной	Нуль
Дивергенция ротора	$\nabla[\nabla A]$	Векторной	Нуль

приложение П-3

СХЕМЫ ПОЛЕЙ



Свойства некоторых технических диэлектриков

Наименование материала	ε	E _{проб.} в/м	ρ, ом·м	Тангенс угла потерь tg δ	
				низкие частоты	f=10 ¹⁰ гц
Бумага конденсаторная (пропитанная)	37	2,5·10 ⁸	10 ¹⁰	0,0025	—
Вода дистиллированная	83,7	—	10 ⁸	—	0,46
Воздуха (при атмосферном давлении)	1,00058	3,2·10 ⁸	—	—	—
Гетинакс	5—6	2·10 ⁷	10 ⁷	0,1—1,0	—
Дерево сухое (красный бук)	2,5—3,6	4·10 ⁶	—	—	—
Кабельное масло	2,2	2·10 ⁷	10 ¹³	0,0003	—
Кварц	4,5	3·10 ⁷	10 ¹⁶	—	—
Керамика конденсаторная	12—170	8·10 ⁸	10 ⁹	0,0008	—
Метатитанат бария	1 000—1 500	—	—	—	—
Метатитанат бария (с добавками)	До 9 000	—	—	—	—
Органическое стекло	2,6—3,4	2·10 ⁷	10 ¹¹	0,08	0,0084
Парафин	2	2·10 ⁷	10 ¹⁴	0,0005	—
Полихлорвинил	3,3	5·10 ⁷	10 ¹⁰	—	—
Полистирол	2,5	2,5·10 ⁷	10 ¹⁵	—	0,0007
Слюда	5,5—9,5	2·10 ⁸	10 ¹²	—	0,0003
Стеатит	6	2·10 ⁷	10 ⁸ —10 ¹¹	0,0025	—
Стекло чистое	3,1—4,4	10 ⁸	10 ⁸ —10 ¹⁵	—	0,002
Стекло конденсаторное (минос)	7,5	До 3·10 ⁸	До 10 ¹⁵	0,0009	—
Фарфор изоляционный	5,5—6,0	До 2·10 ⁷	10 ⁸ —10 ⁹	—	—
Эбонит	2,67	—	—	—	0,006

Размеры и электрические параметры некоторых стандартных высокочастотных коаксиальных кабелей
(по Белоруссову и Гродневу [Л. 5])

а) Коаксиальные кабели со сплошной полиэтиленовой изоляцией

Марка кабеля	Внутренний проводник		Оболочка, диаметр, мм		Максимальная емкость, пф/м	Минимальное напряжение начала короны, кв действ	Характеристическое сопротивление, ом	Максимальное характеристическое затухание, дБ/м, на частоте, Мгц		
	Конструкция	Диаметр, мм	внутренний	наружный				45	3·10 ³	10 ⁴
РК-101	1×0,68	0,68	4,5	7,3	68	3	75—80	0,08	1,3	3,0
РК-102	1×0,68	0,68	6,8	9,6	57	4,5	90—95	0,06	1,1	2,6
РК-103	1×1,37	1,37	8,8	13	71	5,5	72—77	0,05	0,9	2,5
РК-106	7×0,85	2,55	9,2	12,4	102	5	50—56	0,05	0,9	2,8
РК-120	7×0,37	1,11	7,0	10,4	69	3	74—80	0,05	1,1	2,7
РК-129	1×1,37	1,37	4,7	9,8	106	3	48—53	0,08	1,3	3,0
РК-149	7×0,26	0,78	4,1	6,8	76	2	67—73	0,09	1,4	3,3

б) Коаксиальные кабели со сплошной теплостойкой изоляцией из политетрафторэтилена (фторопласта-4)

Марка кабеля	Внутренний проводник		Оболочка, диаметр, мм		Максимальная емкость, пф/м	Напряжение короны, кв действ	Характеристическое сопротивление, ом	Максимальное характеристическое затухание на длине волны 3,2 см при температуре	
	Конструкция	Диаметр, мм	внутренний	наружный				+20°С	+200°С
РКТФ-1	1×0,68	0,68	4,1	5,9	68	3	75—80	2,3	3,1
РКТФ-2	1×0,68	0,68	5,9	7,9	57	4,5	90—95	1,9	2,2
РКТФ-3	1×1,37	1,37	7,8	10	71	5,5	72—77	1,7	1,9
РКТФ-6	7×0,85	2,55	8,4	9,5	101	6	50—55	1,8	1,9
РКТФ-19	1×0,68	0,68	2,1	3,9	105	1,5	48—54	3,5	4,3
РКТФ-20	7×0,37	1,11	6,3	8,3	69	3	74—80	1,9	2,2
РКТФ-29	1×1,37	1,37	4,5	6,3	106	3	48—53	2,3	2,7
РКТФ-47	7×0,71	2,13	6,8	8,8	101	4	50—55	1,9	2,2
РКТФ-48	7×1,03	3,09	9,7	11,7	106	5,5	48—53	1,7	1,9
РКТФ-49	7×0,26	0,78	3,7	5,5	76	2	67—73	2,6	3,1

Свойства мягких магнитных материалов

Наименование материала	μ		B_{∞} , в.сек/м ²	$W_{h\infty}$, дж/м ³	B_r , в.сек/м ²	H_c , а/м	$\rho \cdot 10^7$, ом.м	Характерные свойства
	начальная	максимальная						
Чугун	—	600	—	2 000	0,53	367	3	—
Мягкая магнитная сталь	250	5 500	2,15	500	1,3	80	1	—
То же, обработанная в водороде	25 000	275 000	2,15	30	1,36	4	1	Высокая проницаемость
4%-ная кремнистая сталь (электротехническая сталь)	400	7 500	2	350	1,2	32	6	Повышенное удельное электрическое сопротивление
50%-ный пермаллой	1 000	80 000	1,55	—	—	16	5	Повышенная проницаемость
65%-ный пермаллой	1 500	400 000	1,35	—	—	4	2	} Высокая проницаемость; уменьшенные потери
Суперпермаллой	100 000	800 000	0,75	—	—	0,32	6,5	
Пермендюр	1 100	4 000	2,45	1 200	1,4	144	1,7	Повышенная магнитная индукция насыщения
Перминвар	850	4 000	1,25	—	0,24	48	1,6	Постоянная проницаемость на широком диапазоне
Феррит	2 500	8 000	0,24	—	—	8	—	Для частот до $4 \cdot 10^5$ гц Для частот до $2 \cdot 10^6$ гц
Оксифер-200	200	350	0,33	—	—	96	10^4	

Обозначения: B_{∞} —максимальная магнитная индукция; $W_{h\infty}$ —потери от гистерезиса за один полный цикл перемагничивания между значениями индукции $B_{-\infty}$ и B_{∞} . Остальные обозначения см. в § 7-1.

Свойства твердых магнитных материалов

Наименование материала	μ		B _r , в.сек/м ³	H _c , а/м	W _{макс} , дж/м ³	B _m , в.сек/м ³	ρ·10 ⁷ , ом·м
	начальная	возвратная					
Хромистая сталь	—	—	0,9	4 800	850	0,64	—
Вольфрамовая сталь	—	32	1,08	4 800	1 175	0,64	—
Кобальтовая сталь	—	—	0,92	19 000	3 700	—	—
Сплав „альнико“	—	4	0,73	34 000	5 500	0,45	6
Платино-кобальтовый сплав . . .	1,1	1,1	0,45	208 000	15 000	0,25	5
Магнито	—	—	1,23	47 000	19 000*	—	—
Феррит бария . .	—	—	0,2	120 000	6 400	—	—

* В направлении текстуры, т. е. преимущественной ориентировки кристаллитов при обработке материала.

Об о з н а ч е н и я : B_r —остаточная магнитная индукция; B_m —значение магнитной индукция, соответствующее максимуму энергии в единице объема W_{макс}.

ПРИЛОЖЕНИЕ П-8

Значения размагничивающего фактора для эллипсоидов

Геометрическая форма	λ	N
Очень тонкий диск, расположенный нормально к полю	0	1
Очень длинный цилиндр с осью по нормали к полю	—	0,5
Шар	1	0,333
Эллипсоид	2	0,173
То же	3,2	0,1
То же	16	0,01
То же	61,7	0,001
Очень длинный цилиндр, расположенный вдоль поля	→∞	0

П р и м е ч а н и е. λ = $\frac{a}{b}$ —отношение осей (см. § 7-6).

ПРИЛОЖЕНИЕ П-9

Значения эллиптического интеграла второго рода $E(k)$

k	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$E(k)$	1,571	1,537	1,554	1,534	1,504	1,467	1,416	1,351	1,277	1,165	1

ПРИЛОЖЕНИЕ П-10

Значения коэффициента k_L в расчете индуктивности катушек [формула (8-67)]

$l/2R$	0,05	0,1	0,2	0,5	1	1,5	2	3	4	5	10
k_L	0,1	0,2	0,31	0,5	0,66	0,73	0,8	0,84	0,88	0,91	0,96

ПРИЛОЖЕНИЕ П-11

Свойства проводящих материалов на сверхвысоких частотах

Наименование материалов	Удельная проводимость γ , 1/ом·м	При частоте 10^{10} гц		
		Длина волны λ , м	Модуль характеристического сопротивления Z_c , ом	Эквивалентная глубина проникновения поля u , м
Медь отожженная	$5,8 \cdot 10^7$	$4,2 \cdot 10^{-6}$	0,037	$66 \cdot 10^{-8}$
Латунь, 90% Cu	$2,52 \cdot 10^7$	$6,28 \cdot 10^{-6}$	0,056	$100 \cdot 10^{-8}$
Латунь, 60% Cu	$1,65 \cdot 10^7$	$7,77 \cdot 10^{-6}$	0,069	$124 \cdot 10^{-8}$
Серебро чистое	$6,28 \cdot 10^7$	$3,95 \cdot 10^{-6}$	0,035	$63 \cdot 10^{-8}$
Алюминий	$3,72 \cdot 10^7$	$5,14 \cdot 10^{-6}$	0,046	$82 \cdot 10^{-8}$
Золото чистое	$4,1 \cdot 10^7$	$4,95 \cdot 10^{-6}$	0,044	$79 \cdot 10^{-8}$
Платина	$0,997 \cdot 10^7$	$10 \cdot 10^{-6}$	0,090	$160 \cdot 10^{-8}$
Вольфрам	$1,81 \cdot 10^7$	$7,41 \cdot 10^{-6}$	0,066	$118 \cdot 10^{-8}$
Олово	$0,654 \cdot 10^7$	$12,3 \cdot 10^{-6}$	0,110	$197 \cdot 10^{-8}$
Никель	$1,28 \cdot 10^7$	$8,8 \cdot 10^{-6}$	0,077	$140 \cdot 10^{-8}$
Нихром	$0,1 \cdot 10^7$	$31,5 \cdot 10^{-6}$	0,281	$503 \cdot 10^{-8}$
Инвар	$0,143 \cdot 10^7$	$26,4 \cdot 10^{-6}$	0,235	$420 \cdot 10^{-8}$
Графит	$0,0125 \cdot 10^7$	$89,5 \cdot 10^{-6}$	0,795	$1425 \cdot 10^{-8}$

ПРИЛОЖЕНИЕ П-12

Модули и аргументы гиперболических функций комплексного переменного $pb = \beta b(1+j)$

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} pb &= \sqrt{\operatorname{sh}^2 \beta b + \sin^2 \beta b} & \left| \operatorname{arctg} (\operatorname{tg} \beta b \operatorname{cth} \beta b) \right. \\ \operatorname{ch} pb &= \sqrt{\operatorname{sh}^2 \beta b + \cos^2 \beta b} & \left. \operatorname{arctg} (\operatorname{tg} \beta b \operatorname{th} \beta b) \right. \\ \operatorname{tn} pb &= \sqrt{\frac{\operatorname{sh}^2 \beta b + \sin^2 \beta b}{\operatorname{sh}^2 \beta b + \cos^2 \beta b}} & \left. \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin 2 \beta b}{\operatorname{sh} 2 \beta b} \right) \right. \end{aligned}$$

Таблица значений модифицированных бesselевых функций нулевого и первого порядков от комплексной величины

$$pr = |pr| e^{j45^\circ}$$

Модуль $ pr $	$I_0(pr)$		$I_1(pr)$	
	Модуль $ I_0(pr) $	Аргумент β_0^0	Модуль $ I_1(pr) $	Аргумент β_1^0
0	1	0	0	+45
0,5	1,001	+3,62	0,2500	+46,79
1	1,0155	+14,22	0,5014	+52,16
1,5	1,0768	+31,18	0,7599	+61,05
2	1,2286	+52,28	1,0411	+73,27
2,5	1,5111	+74,65	1,374	+88,39
3	1,9502	+96,52	1,800	+105,71
3,5	2,5759	+117,60	2,377	+124,44
4	3,4391	+138,19	3,173	+143,90
4,5	4,6180	+158,59	4,278	+163,67
5	6,2312	+178,93	5,812	-176,45
5,5	8,4470	-160,72	7,925	-156,52
6	11,501	-140,38	10,850	-136,55
6,5	15,717	-120,04	14,896	-116,54
7	21,548	-99,71	20,500	-96,49
7,5	29,622	-79,39	28,270	-76,41
8	40,817	-59,08	39,070	-56,31
8,5	56,359	-38,78	54,080	-36,18
9	77,957	-18,48	74,971	-16,05
9,5	108,00	+1,81	104,06	+4,10
10	149,83	+22,10	144,59	+24,27

Примечание. При $|pr| = x > 10$: $J_0(x) \approx I_0(pr) \approx \frac{x}{2\pi x} e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}$ $\left| \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \approx I_1(x) \right.$

Конструктивные и электрические данные некоторых стандартных прямоугольных волноводов, принятые Международной электротехнической Комиссией

Тип	Полоса пропускания (рабочий диапазон волн), см	Внутренние размеры, мм	Толщина стенок, мм	Предельная мощность, Вт	Максимальное (характеристическое) затухание при частоте, равной 1,5-кратной предельной частоте, дБ/м
МЭК-32	7,60—11,55	72,14×34,04	2,03	10,5	0,0236
МЭК-48	5,01—7,62	47,55×22,15	1,63	4,86	0,0443
МЭК-70	3,67—5,58	34,85×15,80	1,63	2,29	0,0720
МЭК-81	3,00—4,56	28,50×12,62	1,63	1,77	0,0993
МЭК-100	2,50—3,66	22,86×10,16	1,27	0,99	0,127
МЭК-220	1,12—1,70	10,67×4,32	1,02	0,22	0,463

Примечание. Допуск на внутренние размеры не должен превышать 1:500 наибольшего размера с абсолютным максимумом 0,4 мм и абсолютным минимумом 0,02 мм.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Абсолютная диэлектрическая про-
ницаемость 10, 35
— магнитная проницаемость 10, 142
Альфена волны 317
Ампера закон 141
Антенна 324

Б

Безвихревое поле 13, 26
Био—Савара закон 142, 326
Ближняя зона 326
Близости эффект 288
Больших молекул формулы 399

В

Векторный лапласиан 25
— потенциал 10, 27, 144
Взаимная индуктивность 11, 154, 219
Вибратор 324
Вихревое поле 20, 26, 144
Вихревые токи 304
Внешняя индуктивность 187, 192,
218
Внутреннее сопротивление 311
Внутренняя индуктивность 183
Возбуждение волноводов 379
Волновод 348, 353, 356, 358, 441
Волновое сопротивление 267
— число 267
Волновые уравнения 252, 430
Высших порядков волны (Е и Н)
350
— — разности 390

Г

Гаусс 141
Гаусса теорема 38, 40
Гаусса—Остроградского теорема 28
Герца вектор 330
Гистерезис 38, 160, 303
Глубина проникновения поля 279,
285, 299
Градиент 13
Граничные условия 49, 51, 136, 149,
341, 392, 406
Грина теорема 31
Грина формулы 44
Групповая скорость 345

Д

Д'Аламбера уравнения 320
Дальняя зона 328
Двухмерная задача 42, 148, 390
Двухмерное волновое уравнение 363
— поле 148, 224, 390
Двухмерный скалярный лапласиан
363
Двухпроводная линия 80, 84, 188,
192, 197, 219, 349
Двухслойный диэлектрик 78
Джоуля—Ленца закон 125, 129
Дивергенция 17
Диполь 70, 327
Дирихле задача 58, 392

Дисперсия 272
Дифференциальная проницаемость
456
Дифференциальный оператор 15
Диэлектрики 35, 264, 469
Диэлектрическая восприимчивость
37
Диэлектрическая проницаемость 35,
37
Диэлектрические потери 38
Длина волны 268
— — в волноводе 353

Е

Е-волны 344
Единичные векторы 11
Емкость 10, 47, 64, 405

З

Заземлители 131
Закон Ампера 141
— полного тока 147
— трех вторых Чайлда 140
— электромагнитной индукции 241
Запаздывающий потенциал 321
Заряд 7, 10, 31
Затухание волны 270, 277
— собственное (характеристиче-
ское) 371

И

Излучение 319, 322, 329
Изображений метод 45, 90, 103, 221
Инварианты электромагнитного по-
ля 261
Инверсионный способ 418
Инверсия 416
Индуктивность 11, 156, 187
Индуктированная и сторонняя на-
пряженность электрического по-
ля 126
Индукционные составляющие 327
Интервал времени 430
— расстояния 430
Ирншоу теорема 32
Иррегулярные точки 408
Итерационный метод 402

К

Квадратная сетка 390
Кирхгофа второй закон 129
Кирхгофа—Ленца закон (первый за-
кон Кирхгофа) 120
Кистевой разряд 53
Коаксиальный кабель 76, 130, 186,
349
Кольцевой заряд 96
Комплексная проницаемость 270,
293
Комплексный потенциал 419
Конденсаторный ввод 78
Конденсаторы 63, 67
Конические группы потока 75
Конформные преобразования 224
Короны явление 53

Коши—Римана уравнения 149, 227, 421
Коэнергия 175
Коэрцитивная сила 160, 294
Коэффициент бегущей волны 340
— затухания 270, 277
— отражения 340
— преобразования, линейный 226, 419
— увлечения 275
— фазы 267, 277
— — в волноводе 353
— характеристического затухания 371
Критическая длина волны 351
— частота 351
Критический коэффициент фазы 353
Кругового тока магнитное поле 205
Круговых гармоник метод 193, 213
Кулона закон 32

Л

Лагранжа формулы 403
Лапласа уравнение 40, 145, 391, 429
Лапласиан векторный 25
— скалярный 24
Лапласиановские шаблоны 397
Ленца—Джоуля закон 125, 129
Линейная плотность заряда 65, 105
Линейный коэффициент преобразования 226, 419
Линия ветвления 105, 109, 201
— магнитной индукции 141
— поля (напряженности поля) 15, 143, 369
— (поля) плотности тока 122, 369
— скалярного магнитного потенциала 149, 190
Лоренца преобразования 258
— сила 245, 259
— уравнение 320

М

Магнитная восприимчивость 164
— индукция 10, 141
— постоянная 10, 142
— проводимость 10, 210, 406
— проницаемость 10, 143, 165
Магнитное поле рассеяния, расчет методом сеток 412
— сопротивление 10
— экранирование 167, 192
Магнитные материалы 159, 471, 472
Магнитный момент 163
— поверхностный эффект 291, 299
— поток 11, 141
— скалярный потенциал 10, 147, 203
Магнитогидродинамические волны 313
Магнитодвижущая сила (намагничивающая сила) 10, 209
Максвелла уравнения 146, 244, 247, 248, 360
— — движущейся среды 275, 315
Методов расчета полей обзоры 58, 176
Множественные электрические изображения 110, 115
Моделирование полей 134
Мощность 11, 251, 371, 386

Н

Наложения метод 46, 70, 186
Намагниченность 10, 163
Намагничивания кривая 160—163, 457
Намагничивающая сила 10, 209
Направленные электромагнитные волны 341
Напряжение прикосновения 131
— шага 131
— электрическое 10, 27
Напряженность магнитного поля 10, 143, 369
— электрического поля 10, 14, 33, 369
N-волны 341, 359, 367, 376
Недорелаксация 394, 398
Неймана задача 58, 406
Нелинейная магнитная проницаемость 456
— среда 428, 455
Непрерывности уравнение 121, 144

О

Объемная плотность заряда 39
Одномерная задача 42, 63, 431
Однопроводная линия 90
Ома закон 120
Основная кривая намагничивания 163
Остаток 392
Остаточная магнитная индукция 161
Остроградского—Гаусса теорема 28
Остроградского—Стокса теорема 29
Ось заряженная 42, 65
Отражение электромагнитных волн 266, 334

П

Падающая волна 333
Перемагничивание 161, 294
Перерелаксация 394, 398
Переходный процесс, расчет 286, 294, 433
Плоская электромагнитная волна 264, 270, 277, 347
Плоский конденсатор 63
Плотность заряда 39, 50, 65, 105
— тока 118, 121, 125, 147, 164, 344
Поверхностная плотность заряда 50, 98
— поляризация 35
Поверхностный эффект 279, 308, 433
Пойнтинга вектор 250
Поле движения 245
Полного тока закон 147
Полуволновая прослойка 339
Полый резонатор 379
Поляризация диэлектриков 35
Полярзованность 10, 35
Полярная сетка 411
Перпендикулярная электромагнитная волна 254
Перпендикулярно-магнитные волны 343, 372
Перпендикулярно-электрические волны 341, 359, 367, 376
Поправка к предварительному значению критического коэффициента фазы 440

Поправка на нелинейность 429
Постоянный магнит 161, 171
Потенциал векторный 10, 27, 144
— запаздывающий 321
— скалярный 10, 13, 33, 147, 203
— электродинамический 319
Потенциальное поле 13, 25
Потенциальные коэффициенты 46
Потери на вихревые токи и гистерезис 292, 303
Поток вектора 16
Пределный цикл перемангничивания 161
Преобразования магнитного потока 241
Проводимость области поля 405
Производные характеристические числа 365
Проницаемость потерь 292
Прямоугольная сетка 410
Прямоугольный волновод 367
Прямоугольный цикл перемангничивания 294
Пуассона уравнение 40, 145, 391, 429
Пьезоэлектрики 38

Р

Разделение линий поля 242, 243
Размагничивающий фактор 165
Разностное исчисление 388
Резонансная длина волны 383
Резонатор полый 379
Релаксационный метод 392
Ротор 20

С

Свободные заряды 32
Связанные заряды 35
Сегнетоэлектрики 38
Сеток метод 388
Сила взаимодействия магнитного поля с током 141
Сила притяжения 55, 174
Скалярный / магнитный потенциал 147, 203
— потенциал 10, 13, 33, 147, 203
Скин-эффект 279, 308, 433
Скорость распространения волны 265, 271, 278, 317, 345
Смешанное векторное поле 27
Собственная емкость 65, 76, 405
— магнитная энергия тока 155
Согласующие прослойки 339
Соленоид 207
Соленоидальное поле 20, 26, 144
Спротивление излучения 329
Сопряженные функции 149, 227, 419, 421
Специфическое волновое уравнение 363, 432
Сращивание линий поля 242, 243
Средних потенциалов метод 100
Стокса—Остроградского теорема 29
Сторонняя напряженность электрического поля 126
Сферическая волна 324—329
Сферический конденсатор 67

478

Т

ТЕ-волны 341, 359, 367, 376
ТМ-волны 343, 372
Ток переноса (конвекции) 125
— поглощения 123—125
— проводимости 119
— смещения 121
Точечный заряд 60
Точка ветвления 72, 198
Трансформаторное поле 245
Трансформирующие прослойки 337—339
Треугольник коэффициентов фазы 355
Трех вторых закон 140
Трехмерное поле 41, 60

У

Удельная намагничивающая мощность 292
Удельное поверхностное сопротивление 281
Удельные потери 306—308
Умова—Пойнтинга теорема 248
Упругая проницаемость 293
Участков метод 94, 215

Ф

Фазовая скорость 265, 271, 278, 317, 345
Формула «4» 391
Формула «20» 400
Френеля коэффициент увлечения 275
Фурье—Ламе метод 91, 167

Х

Характеристическое затухание 371
Характеристическое сопротивление 267, 272, 279, 318, 345
— число 352

Ц

Центр тяжести системы зарядов 75
Цикл перемангничивания 161, 294
Цилиндрическая волна 308—313
Цилиндрический волновод 372, 376
— конденсатор 77
Циркуляция вектора 21

Ч

Частичные емкости 47
Частный цикл перемангничивания 162
Четвертьволновые прослойки 338

Ш

Шаблоны лапласановские 397
«Шаг за шагом», процедура расчета 396

Э

Эквивалентная глубина проникновения поля 280
Эквипотенциальные линии и поверхности 13

- Экранирование 52, 167, 192, 246, 460
- Электреты 38
- Электрическая индукция 10, 35
 - постоянная 10, 35
 - проводимость 10, 119, 123, 130, 405
 - прочность 37
- Электрические изображения 45, 90, 105, 118
 - линии 15, 122, 369
- Электрический момент 35
 - потенциал 10, 14
- Электрическое напряжение 127
 - смещение 10, 35
 - сопротивление 128
- Электродвижущая сила (э. д. с.) 126
- Электродинамический потенциал 319
- Электролитическая ванна 134
- Электромагнитная индукция 241
- Электромагнитное поле 247
- Электромагнитные волны 254
- Электростатический вольтметр 57
- Электростатическое экранирование 52
- Элемент тока 141, 142
- Энергия магнитного поля 153, 155, 269
 - электрического поля 54, 269
- Эффект близости 288
- Эффективное удлинение 240

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие	3
Глава первая. Введение	7
1-1. Основные определения	7
1-2. Скалярные и векторные величины в электротехнике	9
Глава вторая. Понятия из векторного анализа	11
2-1. Единичные векторы	11
2-2. Потенциал. Градиент потенциала. Эквипотенциальные поверхности и линии. Линии поля	13
2-3. Дифференциальный оператор	15
2-4. Поток вектора	16
2-5. Дивергенция вектора	17
2-6. Вихревое поле. Ротор вектора	20
2-7. Скалярный лапласиан	24
2-8. Векторный лапласиан	25
2-9. Условия существования потенциального поля	25
2-10. Условия существования вихревого поля	26
2-11. Векторный потенциал	27
2-12. Смешанные векторные поля	27
2-13. Теоремы Остроградского — Гаусса и Остроградского — Стокса	28
2-14. Теорема Грина	31
Глава третья. Электростатическое поле	31
3-1. Свободные и связанные заряды	32
3-2. Основные величины электростатического поля	33
3-3. Поляризация диэлектриков	35
3-4. Теорема Гаусса	38
3-5. Дифференциальные уравнения электростатического поля	40
3-6. Фундаментальные решения уравнения Лапласа	41
3-7. Формулы Грина	44
3-8. Теорема единственности	44
3-9. Замена эквипотенциальной поверхности бесконечно тонким проводящим листом	45
3-10. Метод изображений	45
3-11. Применение принципа наложения. Электростатическое поле нескольких заряженных проводников	46
3-12. Электростатическое поле на границе двух диэлектриков	49
3-13. Проводники в электростатическом поле. Граничные условия	51
3-14. Электростатическое экранирование	52

3-15. Распределение зарядов на поверхности заряженного проводника	52
3-16. Энергия электростатического поля	54
3-17. Силы, развиваемые в электростатическом поле	55
Глава четвертая. Электростатические поля простых геометрических форм	58
4-1. Обзор методов расчета	58
4-2. Поле уединенного точечного заряда	60
4-3. Поле плоского конденсатора	63
4-4. Поле длинной заряженной оси	65
4-5. Поле заряженного проводящего шара	66
4-6. Сферический конденсатор	67
4-7. Поле шара из диэлектрика, имеющего постоянную объемную плотность заряда	67
4-8. Электростатическое поле диполя	70
4-9. Поле двух равных одноименных точечных зарядов	72
4-10. Электростатическое поле коаксиального кабеля	76
4-11. Цилиндрический конденсатор	77
4-12. Конденсаторный ввод	78
4-13. Конденсатор с двухслойным диэлектриком	78
4-14. Электростатическое поле длинных разноименно-заряженных параллельных осей	79
4-15. Электростатическое поле двухпроводной линии	84
4-16. Поле параллельных проводящих цилиндров	87
4-17. Поле однопроводной линии и земли	90
4-18. Длинный проводящий цилиндр во внешнем электростатическом поле, нормальном к оси цилиндра	91
4-19. Поле равномерно заряженной оси конечной длины	94
4-20. Поле кольцевого заряда	96
4-21. Поле заряженного диска	98
4-22. Емкость двух прямых параллельных цилиндрических проводов конечной длины	100
4-23. Собственная емкость уединенного проводящего цилиндра	103
4-24. Электростатическое поле двухпроводной линии, подвешенной вблизи земной поверхности	103
4-25. Поле линейного заряда, расположенного вблизи плоской границы двух сред	105
4-26. Поле точечного заряда, находящегося вблизи проводящей сферы	107
4-27. Электростатическое поле двух проводящих шаров	110
4-28. Электростатическое поле линии из расщепленных проводов	115
Глава пятая. Поле электрического тока	118
5-1. Основные величины поля электрического тока	118
5-2. Ток проводимости. Закон Ома в дифференциальной форме	119
5-3. Первый закон Кирхгофа в дифференциальной форме	120
5-4. Ток смещения	121
5-5. Ток переноса	125
5-6. Закон Ленца — Джоуля в дифференциальной форме	125
5-7. Интегральные формы основных законов электротехники	126

5-8. Расчет проводимости поля электрического тока	130
5-9. Расчет предельных значений сопротивления	132
5-10. Моделирование полей	134
5-11. Поле электрического тока на границе двух сред	136
5-12. Пример расчета тока переноса в вакууме	138
Глава шестая. Магнитное поле	141
6-1. Основные величины магнитного поля	141
6-2. Непрерывность линий магнитной индукции	143
6-3. Векторный потенциал магнитного поля	144
6-4. Первое уравнение Максвелла	146
6-5. Обобщение первого уравнения Максвелла на случай движущейся среды	147
6-6. Скалярный потенциал магнитного поля	147
6-7. Векторный и скалярный потенциалы двухмерного магнитного поля	148
6-8. Магнитное поле на границе двух сред	149
6-9. Магнитное поле в диэлектрике у поверхности идеального проводника с током	150
6-10. Взаимодействие тока с однородным посторонним магнитным полем	151
6-11. Взаимная энергия тока и постороннего магнитного поля	153
6-12. Взаимная индуктивность	154
6-13. Собственная магнитная энергия тока	155
6-14. Индуктивность	156
6-15. Исследование магнитного поля при помощи остальных опилок	157
Глава седьмая. Намагничивание сред	159
7-1. Магнитные материалы	159
7-2. Основные закономерности циклов перемагничивания	161
7-3. Намагничивание материала	163
7-4. Намагничивание ферромагнитных тел	165
7-5. Размагничивающий фактор тороида с малым зазором	166
7-6. Магнитное экранирование	167
7-7. Принцип расчета постоянного магнита	171
7-8. Сила притяжения магнита	174
Глава восьмая. Магнитные поля простых геометрических форм	176
8-1. Обзор методов расчета	176
8-2. Магнитное поле внутри бесконечно длинного прямого цилиндрического проводника с постоянным током	177
8-3. Магнитное поле снаружи бесконечно длинного прямого цилиндрического проводника с током	181
8-4. Внутренняя индуктивность цилиндрического проводника	183
8-5. Магнитное поле длинного трубчатого проводника с током	184
8-6. Магнитное поле коаксиального кабеля	186
8-7. Индуктивность коаксиального кабеля	187
8-8. Магнитное поле двухпроводной линии	188
8-9. Магнитное поле двухпроводной линии в цилиндрическом ферромагнитном экране	192

8-10. Графическое построение картины поля по принципу наложения	197
8-11. Скалярный магнитный потенциал замкнутого контура тока произвольной формы	203
8-12. Магнитное поле кругового тока	205
8-13. Магнитное поле соленоида	207
8-14. Индуктивность катушки с тороидальным сердечником	210
8-15. Индуктивность катушки с кольцевым сердечником прямоугольного сечения	211
8-16. Поле цилиндрического электромагнита с воздушным зазором	212
8-17. Магнитные поля отрезков тока конечной длины	215
8-18. Взаимная индуктивность двух параллельных отрезков тонких проводов	217
8-19. Внешняя индуктивность отрезка прямого провода	218
8-20. Индуктивность двухпроводной линии конечной длины	219
8-21. Взаимная индуктивность двух параллельных двухпроводных линий	219
8-22. Индуктивность прямоугольной рамки	220
8-23. Индуктивность рамки сложного очертания	221
8-24. Расчет магнитного поля тока вблизи границы двух сред	221
Глава девятая. Метод конформных преобразований	224
9-1. Конформные преобразования	224
9-2. Связь напряженности поля с линейным коэффициентом преобразования	228
9-3. Некоторые простые преобразования	228
9-4. Расчет поля, ограниченного ломаной линией	235
9-5. Увеличение сопротивления, обусловленное изменением ширины проводника	240
Глава десятая. Электромагнитная индукция	241
10-1. Преобразования магнитного потока	241
10-2. Второе уравнение Максвелла	244
10-3. Обобщенный закон электромагнитной индукции	245
10-4. Роль магнитных экранов в процессе электромагнитной индукции	246
Глава одиннадцатая. Электромагнитное поле	257
(Общие закономерности)	
11-1. Система основных уравнений электромагнитного поля	247
11-2. Теорема Умова — Пойнтинга	248
11-3. Вектор Пойнтинга при передаче энергии по коаксиальному кабелю	250
11-4. Волновые уравнения	252
11-5. Поле заряда, движущегося прямолинейно с невысокой постоянной скоростью	255
11-6. Зависимость наблюдаемых свойств электромагнитного поля от относительного движения	257
11-7. Инварианты электромагнитного поля	261
	483

11-8. Собственное поле заряда, движущегося прямолинейно с очень высокой постоянной скоростью	262
Глава двенадцатая. Электромагнитное поле в диэлектрике	264
12-1. Плоские электромагнитные волны в идеальном диэлектрике	264
12-2. Перенос энергии электромагнитной волны	269
12-3. Плоская гармоническая электромагнитная волна в несовершенном диэлектрике	270
12-4. Уравнения электромагнитного поля для движущейся среды	273
Глава тринадцатая. Электромагнитное поле в проводящей среде	277
13-1. Плоская гармоническая электромагнитная волна в проводящей среде	277
13-2. Поверхностный эффект. Эквивалентная глубина проникновения поля в массивный проводник	279
13-3. Удельное поверхностное сопротивление проводника	281
13-4. Поверхностный эффект в ленточном проводнике в установившемся синусоидальном режиме	282
13-5. Поверхностный эффект в ленточном проводнике в переходном режиме	286
13-6. Эффект близости двух ленточных проводников	288
13-7. Магнитный поверхностный эффект в листах стального сердечника с постоянной магнитной проницаемостью	291
13-8. Проникновение магнитного поля в листы сердечника с «прямоугольным» циклом перемагничивания	294
13-9. Магнитный поверхностный эффект в листах с «прямоугольным» циклом перемагничивания	299
13-10. Время проникновения магнитного поля в тонкий ферромагнитный лист	301
13-11. Потери в сердечнике при прямоугольной форме петли перемагничивания	303
13-12. Поверхностный эффект в цилиндрическом проводнике	308
13-13. Проводящая среда, текущая в магнитном поле. Понятие о магнитогидродинамических волнах Альфвена	313
Глава четырнадцатая. Понятие об электромагнитном излучении	319
14-1. Электродинамические потенциалы	319
14-2. Уравнения Д'Аламбера	320
14-3. Запоздывающие потенциалы	321
14-4. Излучение энергии электрической линией	322
14-5. Электромагнитное поле вибратора	324
14-6. Ближняя и дальняя зоны	326
14-7. Сопротивление излучения	329
14-8. Единые векторы электромагнитного поля	330
Глава пятнадцатая. Направленные электромагнитные волны	332

15-1. Переход электромагнитной волны из одной среды в другую по нормали к граничной поверхности . . .	332
15-2. Отражение электромагнитной волны от поверхности идеального проводника при падении по нормали . .	334
15-3. Прозрачность прослоек	336
15-4. Падение электромагнитной волны на поверхность с конечной проводимостью	339
15-5. Образование поперечно-электрической волны . . .	341
15-6. Образование поперечно-магнитной волны	343
15-7. Характеристическое сопротивление для направленных электромагнитных волн	345
15-8. Фазовая и групповая скорости направленных электромагнитных волн	345
15-9. Плоская электромагнитная волна между параллельными проводящими поверхностями	347
15-10. Волны высших порядков в электрических линиях . .	350
15-11. Критическая частота и критическая длина волны . .	351
15-12. Коэффициент фазы и длина волны в волноводе . . .	353
15-13. Понятие о предельном ослабителе	355
15-14. Некоторые простейшие типы волноводов	356
Глава шестнадцатая. Трубочатые волноводы и полые резонаторы	358
16-1. Трубочатые волноводы	358
16-2. Основные уравнения электромагнитного поля в волноводе	359
16-3. Выбор функций для составляющих электромагнитного поля в прямоугольном волноводе	363
16-4. Определение характеристик волны в волноводе . .	365
16-5. Волна типа $TE_{0,1}$ в прямоугольном волноводе . . .	367
16-6. Передача энергии в волноводе	370
16-7. Коэффициент характеристического затухания волновода	371
16-8. Поперечно-магнитные волны в цилиндрическом волноводе	372
16-9. Поперечно-электрические волны в цилиндрическом волноводе	376
16-10. Понятие о возбуждении волноводов	379
16-11. Полые резонаторы	379
16-12. Основные уравнения электромагнитного поля в полном резонаторе	381
16-13. Выбор функций для составляющих электромагнитного поля в полном резонаторе в форме параллелепипеда	384
16-14. Энергия в полном резонаторе и его эквивалентные параметры	385
Глава семнадцатая. Расчеты стационарных электрических и магнитных полей методом сеток	388
17-1. Понятие о разностном исчислении	388
17-2. Уравнения Лапласа и Пуассона в разностной форме . .	391
17-3. Решение задачи Дирихле методом ликвидации остатков	392
17-4. Ускорение расчета методом ликвидации остатков . .	396
17-5. Формулы «больших молекул»	399

17-6. Итерационный метод	402
17-7. Формулы Лагранжа	403
17-8. Расчет напряженности поля	404
17-9. Расчет проводимости или емкости области поля	405
17-10. Задача Неймана	406
17-11. Иррегулярные точки	408
17-12. Магнитное поле подковообразного постоянного магнита	409
17-13. Прямоугольная сетка	410
17-14. Полярная сетка	411
17-15. Магнитное поле рассеяния между полюсами машины постоянного тока	412
17-16. Расчет трехмерных полей с осевой симметрией	413
17-17. Инверсия открытого поля	416
17-18. Инверсионный способ расчета	418
17-19. Приближенное определение значений одной из сопряженных функций по известным значениям другой	421
17-20. Числовой пример расчета инверсионным способом	422
17-21. Расчет поля на границе двух сред	426
17-22. Уравнения стационарного поля для нелинейной среды	428
17-23. Расчет стационарного магнитного или электрического поля в нелинейной среде	429
Глава восемнадцатая. Расчет переменных электромагнитных процессов методом сеток	430
18-1. Волновые уравнения в разностной форме в декартовых прямоугольных координатах	430
18-2. Одномерная задача для проводящей среды — проникновение прямоугольного импульса поля	433
18-3. Двухмерная задача для проводящей среды — проникновение электромагнитного поля в проводник квадратного сечения	434
18-4. Одномерная задача для диэлектрика. Распространение полусинусоидального импульса напряжения в электрической линии	436
18-5. Общий метод определения критической длины волны волновода	439
18-6. Вывод поправки к предварительному значению критического коэффициента фазы	440
18-7. Двухмерная задача установившегося режима в диэлектрике. Расчет критических параметров и распределения поля в волноводе со сложной формой сечения	441
18-8. Пример расчета резонансной длины волны полого резонатора	445
18-9. Волновые уравнения в разностной форме в цилиндрических координатах	446
18-10. Граничные условия при расчете в цилиндрических координатах	450
18-11. Пример расчета резонансной длины волны полого резонатора в виде тела вращения сложной формы	452
18-12. Проникновение электромагнитного поля в длинный цилиндрический проводник при воздействии в виде одиночного прямоугольного импульса	454

18-13. Волновое уравнение для пелинейной проводящей среды	455
18-14. Пример составления волнового уравнения для нелинейной среды в разностной форме	458
18-15. Расчет распространения электромагнитного поля в стальном листе сердечника с переменной магнитной проницаемостью	459
Приложения	466
Литература	462

Говорков Владимир Александрович
Электрические и магнитные поля

Редактор *С. Д. Купалян*
Технический редактор *Н. С. Мазурова*
Корректор *Шилова Р. К.*

Сдано в набор 27/V 1958 г.
Подписано к печати 17/X 1958 г. Т-14842
Формат 84×108^{1/32} Бумага типографская № 2
Усл. печ. л. 25,62 Уч.-изд. л. 26,18
Тираж 20 000 экз. Цена 1 р. 42 к. Зак. 1283

Издательство „Энергия“. Москва, Ж-114,
Шлюзовая наб., 10.

Московская типография № 10 Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Шлюзовая наб., 10.

ИСПРАВЛЕНО
ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
44	Формула (3-26)	$\oint_S \varphi \frac{\partial \phi}{\partial n}$	$\oint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} ds$
113	2 сверху	обратных	взятых с обратными знаками
124	9 снизу	(3-47)	(5-6)
140	13 сверху	интервал	интеграл
147	7 снизу	$[H] = 0,$	$[\nabla H] = 0,$
195	5 сверху	$(r < R_2)$	$(r > R_2)$
252	3 сверху	$H = \frac{1}{2\pi r_1}$	$H = \frac{I}{2\pi r_1}$
272	Рис. 12-2	$\frac{\partial}{\alpha}$	$\frac{\partial}{\beta}$
315	3 снизу	$\partial \text{ж} \cdot \text{сек}^2 / \text{м}^2$	$\partial \text{ж} \cdot \text{сек}^2 / \text{м}^2$
326	7 сверху	$\partial / \partial \varphi$	$\partial / \partial \psi$
342	5 снизу	$\delta_{\text{нов}} = 2H_z = 2H_{\text{над}} \quad (15-33)$	$\delta_{\text{нов}} = 2H_x = 2H_{\text{над}} \sin \theta \quad (15-32)$
370	Формула (16-48)	$\sin^2 (\omega t - \beta_{\text{вв}} x)$	$\sin^2 (\omega t - \beta_{\text{вв}} x)$
370	Формула (16-49)	$\sin^2 \left(\frac{\pi}{b} z \right)$	$\sin^2 \left(\frac{\pi}{b} z \right)$
427	Формула (17-76)	ψ_R	φ_R