А. А. Гриб

ПРОБЛЕМА НЕИНВАРИАНТНОСТИ ВАКУУМА В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

А. А. Гриб

ПРОБЛЕМА НЕИНВАРИАНТНОСТИ ВАКУУМА В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

МОСКВА АТОМИЗДАТ 1978

УДК 519.4 : 539.12

Гриб А. А. **Проблема неинвариантности вакуума в квантовой теории поля.** М., Атомиздат, 1978, с. 128.

Книга содержит всесторонний обзор проблемы спонтанного нарушения симметрии и неинвариантности вакуума в квантовой теории многих тел и в теории элементарных частиц. Связь между спонтанным нарушением симметрии, вырождением вакуума и наличием неинвариантной классической характеристики системы иллюстрируется на примерах из физики многих тел и элементарных частиц. Сформулированы теоремы Голдстоуна и Коулмена — Окубо в квантовой теории поля. Подробно обсуждаются различные модели спонтанного нарушения симметрии, такие, как модели Голдстоуна, Хиггса, Вайнберга — Салама, спонтанного нарушения CP-инвариантности. Излагается теория рождения пар и нестабильности вакуума в интенсивных электромагнитных и гравитационных полях.

Книга рассчитана на студентов старших курсов физических факультетов, аспирантов и научных работников, специализирующихся в области физики элементарных частиц и квантовой физики многих тел.

Рис. 6. Список литературы 121 наименование.

Г $\frac{20402-002}{034(01)-1978}$ 2—78

«Свет спросил у Небытия:

— [Вы], учитель, существуете или не существуете? — Но не получил ответа. Вгляделся пристально в его облик: темное, пустое. Целый день смотри на него — не увидишь, слушай его — не услышишь, трогай его — не дотронешься.

— Совершенство! — воскликнул Свет. — Кто мог бы [еще] достичь такого совершенства! Я способен быть [или] не быть, но не способен абсолютно не быть. А Небытие, как [оно] этого достигло?»

Чжуанцзы (из главы «Знание странствовало на севере»)

ВВЕДЕНИЕ

Проблема материи или «тверди», на которой стоит мир, с древнего времени волновала человечество. Однако каково было бы удивление древних мыслителей, если бы они узнали, что, согласно представлениям физиков XX века, такой основой мира является ... вакуум! В самом деле, возбуждениями именно вакуумного состояния являются все элементарные частицы, из которых, в свою очередь, сложен весь окружающий мир. Поэтому изучение вакуума и его свойств превращается в одну из наиболее фундаментальных задач теоретической физики.

Постараемся пристальнее всмотреться в то, что же собой представляет вакуум. Прежде всего заметим, что от старой, вполне рационально формулируемой концепции «небытия» мало что осталось.

Вакуум в физике элементарных частиц определяется как состояние без частиц. Однако некоммутативность оператора числа частиц с оператором квантованного поля ведет к тому, что это состояние не есть состояние без поля. Небытие как отсутствие и частиц, и поля невозможно. Всматриваясь в вакуум, мы видим не темноту, а отдельные мерцающие вспышки — флуктуации вакуума, или нулевое поле вакуума. Невозможность существования вакуума поля связана с тем, что в квантовой теории рассматриваются в основном локальные поля. Но для оператора локального поля не существует такого состояния в гильбертовом пространстве, что действие этого оператора на вектор состояния дает нуль (теорема Федербуша — Джонсона, см. гл. 3).

Наличие нулевого поля ведет к тому, что и энергия и плотность энергии вакуума в пространстве оказываются бесконечными. Бесконечность этих величин существенно связана с релятивистской инвариантностью теории. Избавиться от этой бесконечности (например, объявив ее ... нулем), к сожалению, не удается, поскольку тогда пришлось бы избавиться и от существования нулевого поля вакуума. Тем самым в физике элементарных частиц возникает парадоксальная ситуация, когда в основе одной из наиболее рациональных областей знания — теоретической физики — лежит совершенно иррациональное представление. Можно было бы придумать множество поэтических названий для вакуума физики элементарных частиц — это и «мир» Гейзенберга [1], и «бездна», и меон древних греков и т. п. Однако бесконечность плотности энергии и полной энергии вакуума — это еще не все его необычные свойства.

С точки зрения квантовой теории вакууму сопоставляется некоторая волновая функция — вектор в гильбертовом пространстве. Из квантовой механики известно, что одним и тем же значениям наблюдаемых часто соответствует множество различных состояний (наличие вырождения). Но тогда и вакуум не обязательно должен быть единственным — возможно вырождение вакуума, т. е. наличие множества вакуумов. Один вакуум можно получить из другого некоторым преобразованием, относительно которого он неинвариантен. Неинвариантность вакуума вполне наглядно проявляется в свойствах элементарных частиц и их взаимодействий. В частности, концепция неинвариантного вакуума лежит в основе наиболее многообещающей из современных теорий слабого взаимодействия — единой теории слабого и электромагнитного взаимодействий Вайнберга — Салама (см. гл. 4).

В настоящей книге на разных уровнях строгости обсуждается вопрос о том, что можно сказать о вакууме и его инвариантности с той или иной точки зрения. Наиболее строгим уровнем является уровень аксиоматической квантовой теории поля (гл. 1, 3). Здесь приводятся формулировки и доказательства теорем (теорем Голдстоуна, Коулмена и Окубо), дающих некоторые точные утверждения об инвариантности или неинвариантности вакуума и физических проявлениях этих свойств.

В гл. 1, на основании алгебраического подхода к квантовой теории поля, определяется понятие спонтанного нарушения симметрии и формулируется так называемая аксиоматическая теорема Голдстоуна, показывающая невозможность спонтанного нарушения симметрии при отсутствии безмассовых полей в случае выполнения ряда аксиом. При этом считается справедливой аксиома о локальности теории. Другая формулировка теоремы Голдстоуна, сразу предполагающая наличие спонтанного нарушения симметрии и указывающая на наличие в этом случае безмассовых полей, дается в гл. 3. Здесь же доказывается теорема Коулмена, утверждающая, что «инвариантность вакуума есть инвариантность мира»; из этой теоремы, в частности, следует невозможность теории с неинвариантным гамильтонианом, но инвариантным вакуумом. Близкой к теоремам Коулмена и Голдстоуна является теорема Окубо, в которой доказывается, что при отсутствии безмассовых полей вакуум не может быть состоянием с нулевым током (имеются в виду все четыре компоненты тока $J^\mu = \int j^\mu(x)\, d^3x$; $\mu = 0, 1, 2, 3$).

Следующий уровень рациональности — нерелятивистская квантовая теория многих тел (гл. 2). Вакуум в этой теории есть основное состояние системы многих тел и характеризуется конечными плотностями энергии, вещества и т. п., так что на моделях теории многих тел (рассмотрение этих моделей в настоящей книге, посвященной в основном физике элементарных частиц, имеет вспомогательное значение) можно продемонстрировать те или иные следствия неинвариантности вакуума. Вакуум нерелятивистской теории многих тел есть среда, возбуждениями которой служат квазичастицы.

Неинвариантность вакуума в теории многих тел связана с наличием неинвариантных макрохарактеристик системы. Отсутствие характерной для квантовомеханических величин интерференции выполняется для этих макровеличин автоматически, и тем самым предлагаемая теория дает пример перехода от квантовых величин к классическим, использующим не столько процедуру устремления $h \to 0$ (h — постоянная Планка), сколько термодинамический предел $\lim\limits_{N\to\infty,\ V\to\infty} N/V \neq \infty$, где N — число частиц; V—объем.

После перечисления основных особенностей спонтанного нарушения симметрии в теории многих тел и формулировки нерелятивистской теоремы Голдстоуна в гл. 2 кратко рассмотрена модель гейзенберговского ферромагнетика. Эта модель приведена в гл. 2 с целью иллюстрации как основных идей, так и методов, используемых далее в релятивистской теории.

Наконец, в гл. 4 рассмотрены различные явления (феномен Хиггса, модель Вайнберга — Салама, спонтанное нарушение CP-инвариантности и т. п.), связанные непосредственно с физикой элементарных частиц, где теория относительности ведет к отказу от представления о вакууме как о среде типа эфира, обладающий конечными характеристиками. Тем не менее по аналогии с теорией многих гел здесь удается построить некоторые непротиворечивые модели с неинвариантным вакуумом.

Если в стандартной формулировке квантовой электродинамики вакуум обладает свойствами диэлектрика, то в модели Голдстоуна, являющейся примером спонтанного нарушения калибровочной инвариантности для бозе-частиц, вакуум подобен сверхтекучей жидкости. В модели Намбу — Иона-Ласинио — Вакса — Ларкина нарушается киральная калибровочная инвариантность для фермионов — при этом вакуум приобретает свойства сверхпроводника. В модели Хиггса и в теории Вайнберга — Салама вакуум ведет себя по отношению к векторному полю подобно проводящей плазме, что приводит к появлению короткодействующих сил (аналогично дебаевскому экранированию), проявляющих себя как слабое взаимодействие. Перенормируемость получающейся теории слабого взаимодействия — сильный аргумент в пользу сравнения экспериментальных данных именно с этой теоретической схемой, а не с какой-либо другой.

В теории сильно взаимодействующих частиц (адронов) весьма успешной оказалась теория с первоначально спонтанным нарушением киральной симметрии $SU(3) \otimes SU(3)$ и дальнейшим учетом явного нарушения этой симметрии в лагранжиане.

Наконец, до сих пор неразрешенная проблема нарушения CP-инвариантности в распадах K^0-мезонов, возможно, имеет решение, связанное с учетом спонтанного нарушения CP-инвариантности за счет неинвариантности вакуума. Некоторые модели спонтанного нарушения CP-инвариантности приведены в конце гл. 4.

В гл. 5 кратко рассмотрены следствия неинвариантности вакуума элементарных частиц на макроскопических расстояниях (в частности, в космологии) в присутствии классического внешнего (электромагнитного или гравитационного) поля, проявляющиеся в рождении макроскопической плотности пар частиц и античастиц. Таким образом, в последней главе приходится совместно рассматривать свойства вакуума элементарных частиц и вакуума в системе многих тел.

Используя метод диагонализации гамильтониана каноническим преобразованием Боголюбова, столь успешно примененного им в теориях сверхтекучести и сверхпроводимости, удается получить выражения для плотности частиц и античастиц, рождающихся за счет нестабильности вакуума в интенсивном внешнем поле. При этом поле может быть близко к статическому, так что возникающая нестабильность вакуума указывает на близость изучаемого явления к явлению фазового перехода в теории многих тел. Излагаемая в настоящей книге теория рождения пар классическим полем не использует представления о фотонах или гравитонах и целиком основана на исследовании свойств вакуума в присутствии внешнего поля. Для классического нестационарного векторного поля рассмотрен пример спонтанного нарушения симметрии при достаточно большой частоте этого поля.

Рождение пар гравитационным полем проиллюстрировано на примерах рождения вещества и антивещества в моделях Вселенной Фридмана. Приведены количественные оценки эффекта рождения на настоящей стадии эволюции Вселенной и вблизи сингулярности для квазиевклидовой, открытой и закрытой моделей Фридмана.

При написании настоящей книги использовался материал обзора [2]. Автор приносит свою искреннюю благодарность Е. В. Дамаскинскому, В. М. Максимову, С. Г. Мамаеву, В. М. Мостепаненко, В. М. Фролову за помощь в работе над книгой, а также выражает большую признательность Е. В. Прохватилову, В. А. Франке и другим сотрудникам кафедры теории ядра и элементарных частиц ЛГУ за полезные обсуждения.

ГЛАВА 1

СИММЕТРИИ В АЛГЕБРАИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ К КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ И ИХ НАРУШЕНИЕ

§ 1. УНИТАРНО-НЕЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРЫ НАБЛЮДАЕМЫХ

Концепция неинвариантного вакуума предполагает, что под действием некоторого преобразования вакуумный вектор переходит в другое состояние, которое в случае преобразований, коммутирующих с преобразованиями группы Пуанкаре [3], тоже является вакуумным. Если считать, что вакуум в физике элементарных частиц должен пониматься как единственное состояние, то новый вакуум и физические состояния, построенные действием на него операторов рождения частиц, физического смысла не имеют и описывают некоторый ненаблюдаемый мир. Так, например, преобразование пространственного отражения (в отличие от CP-преобразования) в теории нейтрино соответствует переходу к ненаблюдаемым зеркальным частицам. Поэтому вполне возможно существование P-неинвариантного, но единственного вакуума. В то же время в теории многих тел имеются примеры, когда различные вакуумы соответствуют разным реальным физическим ситуациям, поэтому не исключено, что и в физике элементарных частиц описание различных явлений потребует рассмотрения различных вакуумов. Утверждение о множественности реальных вакуумов может показаться для неискушенного читателя чем-то очень странным, вроде утверждения о том, что окружающий нас наблюдаемый мир находится не в одном, а во многих пространствах. Здесь, однако, следует отметить, что в отличие от классической физики, где точка в фазовом пространстве есть непосредственно наблюдаемая величина, вакуум в квантовой теории поля является некоторой волновой функцией в гильбертовом пространстве. Волновая же функция есть в значительной степени способ вычисления средних от операторов, которые и измеряются в физическом эксперименте. Следовательно, множественность вакуумов обусловлена существованием различных способов усреднения операторов наблюдаемых. Эти неэквивалентные способы усреднения тесно связаны с наличием неэквивалентных представлений наблюдаемых, изучаемых при алгебраическом подходе к квантовой теории поля. Поэтому гл. 1 посвящена симметриям в алгебраическом подходе к квантовой теории поля и их нарушениям из-за неэквивалентных представлений.

Как известно, основной особенностью квантовой механики, отличающей ее от классической физики, является существование соотношений неопределенностей Гейзенберга между каноническими переменными. Соотношения неопределенностей приводят к тому, что канонические переменные начинают рассматриваться как операторы в гильбертовом пространстве. На математическом языке последнее означает, что квантовая механика есть реализация представления коммутационных соотношений операторами в гильбертовом пространстве. Естественно задать вопрос: в какой мере единствен выбор такого представления, т. е. не существуют ли различные физически неэквивалентные квантовые механики с одними и теми же соотношениями неопределенностей Гейзенберга?

Пусть имеются коммутационные соотношения между координатами и импульсами в виде

$$[\hat{q}_k, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{kj}. \tag{1.1}$$

Тогда возникает вопрос: существуют ли различные унитарно неэквивалентные представления этих соотношений эрмитовскими операторами в гильбертовом пространстве? Из теорий представлений групп Ли (а написанные выше соотношения также могут пониматься как соотношения алгебры Ли для некоторой группы) известно, что в общем случае можно ожидать появления множества неэквивалентных представлений.

Ответ на поставленный вопрос дает теорема Стоуна—фон Неймана [4], которая гласит, что для системы с конечным числом степеней свободы неприводимое представление коммутационных соотношений определяется единственным образом с точностью до унитарной эквивалентности. Это представление эквивалентно известному шредингеровскому представлению: $\hat{q}_k$ есть умножение на координату q_k, $\hat{p}_j$ — дифференцирование $\hat{p}_j = -i\hbar \dfrac{\partial}{\partial q_j}$.

Таким образом, формулировка квантовой механики систем с конечным числом степеней свободы в терминах операторов в гильбертовом пространстве оказывается единственной.

В квантовой теории поля, как квантовой теории систем с бесконечным числом степеней свободы, положение иное. Здесь имеется множество (вообще говоря, континуум) унитарно-неэквивалентных представлений коммутационных соотношений. Например, в нерелятивистской квантовой теории поля в случае бесконечного бозе-газа коммутационные соотношения между каноническими переменными остаются фиксированными, но, выбирая различные представления этих соотношений, будем получать различные состояния бозе-газа, характеризуемые разной плотностью числа частиц, температурой и другими макроскопическими параметрами.

Известно, что в релятивистском случае уравнения квантовой теории поля с учетом взаимодействий не имеют решения в фоковском представлении. Это проявляется в наличии поляризации вакуума. Представление операторов поля, совместное с уравнениями движения, можно найти только решая уравнения поля.

Поэтому основные аксиомы квантовой теории поля должны формулироваться как условия на абстрактную алгебру операторов поля и некоторые общие требования на представление. Этот подход развивался в работах Сигала, Вайтмана, Хаага, Кастлера, Араки и др. [4 — 8]. Здесь же будут изложены основные факты, необходимые для рассмотрения проблемы симметрии в таком подходе к квантовой теории поля.

В любой квантовомеханической теории фигурируют два основных понятия: *состояние* и *наблюдаемая*. Для развития математического формализма концепция наблюдаемой более удобна и ее обычно берут за основу. Наблюдаемые можно складывать, перемножать и умножать на комплексные числа. На математическом языке это означает, что множество наблюдаемых образует алгебру.

Чтобы избежать математических затруднений, связанных с использованием неограниченных операторов, обычно рассматривают только ограниченные наблюдаемые. Неограниченные наблюдаемые типа $\hat{q}_k$ и $\hat{p}_k$ должны быть заменены при этом ограниченными функциями от них. Например, вместо $\hat{q}$ и $\hat{p}$ можно рассматривать семейства унитарных операторов $U(\alpha) = \exp i\,\alpha\hat{p}$ и $V(\beta) = \exp i\,\beta\hat{q}$. В представлениях, где $U(\alpha)$ и $V(\beta)$ слабо непрерывны по α и β, соответствующие операторы $\hat{p}$ и $\hat{q}$ получаются как

$$\hat{p} = i^{-1} \frac{dU(\alpha)}{d\alpha}\bigg|_{\alpha=0}, \quad \hat{q} = i^{-1} \frac{dV(\beta)}{d\beta}\bigg|_{\beta=0} \tag{1.2}$$

и являются, по теореме Стоуна, самосопряженными операторами.

В квантовой механике физически измеримым величинам сопоставляются самосопряженные операторы, что естественно приводит к требованию наличия в алгебре операции, подобной сопряжению, которая называется *инволюцией* и позволяет выделить класс вещественных наблюдаемых. Таким образом, наша алгебра есть алгебра с инволюцией (симметрическая алгебра), или *-алгебра.

Каждой ограниченной наблюдаемой a можно сопоставить некоторое конечное число $\|a\|$, называемое *нормой*. Это означает, что множество значений наблюдаемой ограничено.

В квантовой механике часто приходится разлагать одни операторы в ряд по другим, дифференцировать операторы и т. д. Для придания смысла этим операциям необходимо задать на алгебре топологию. По самому определению (см. ниже) слабой и сильной топологии видно, что они зависят от выбора конкретного представления алгебры операторами в гильбертовом пространстве. Поэтому, так как наша цель — построение алгебры независимо от ее представления, то избираем равномерную топологию. В квантовой механике обычно используются три топологии: слабая операторная, сильная операторная и равномерная топология или топология нормы. Причем первые две определяются при помощи пространства представления, а последняя задается в терминах самой алгебры. Пусть A — алгебра; $\pi\ (A)$ — представление алгебры; H — гильбертово пространство представления; φ_i, ψ_k — векторы в H, а ε — произвольная положительная постоянная. Тогда эти топологии определяются при помощи баз слабых, сильных и равномерных сходимостей следующим образом:

$$W\ (\pi\ (a),\ \varphi_i,\ \psi_k,\ \varepsilon) = \{\pi\ (b)\,|\,b \in A;$$
$$|\ ((\pi\ (b) - \pi\ (a))\ \psi_k,\ \varphi_k)\ | < \varepsilon,\ k = 1 \div n\};$$
$$S\ (\pi\ (a), \varphi_k, \varepsilon) = \{\pi\ (b)\ |\ b \in A;\ \ |\,(\pi\ (b) - \pi\,(a))\,\varphi_k\,| < \varepsilon, k =$$
$$= 1 \div n\};$$
$$U\ (a,\ \varepsilon) = \{b \in A;\ \|\ b - a\,\| < \varepsilon\}.$$

Известно, что сильная сходимость $a_n \xrightarrow{s} a : \pi\ (a_n)\ \psi \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi\ (a)\ \psi$ влечет равномерную сходимость $a_n \xrightarrow{u} a : \|\ a_n - a\ \| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, которая в свою очередь приводит к слабой сходимости $a_n \xrightarrow{w} a$ $(\varphi,\ \pi\ (a_n)\ \psi) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\varphi,\ \pi\ (a)\ \psi)$, $\forall\ \varphi,\ \psi \in H$. Обратное утверждение не справедливо. Выбрав равномерную топологию, естественно считать, что алгебра полна в этой топологии, т. е. в любом представлении предел каждой равномерно сходящейся последовательности принадлежит алгебре.

Так определенная алгебра (банахова *-алгебра), изоморфная равномерно замкнутой *-алгебре ограниченных операторов на некотором гильбертовом пространстве, есть C^*-алгебра. Таким образом, приходим к следующему основному постулату: наблюдаемые физической теории образуют C^*-алгебру A.

Наша ближайшая задача — ввести в теорию понятие состояния. В стандартной квантовой теории состояние определяется как вектор (точнее, векторный луч) в гильбертовом пространстве. При этом средние значения наблюдаемой можно описывать с помощью вектора состояния. Это важно для вероятностной интерпретации теории. Роль векторов состояния состоит в сопоставлении чисел наблюдаемым. Однако структура квантовой теории не требует, чтобы состояние было вектором в гильбертовом пространстве, и более того, известно, что эти векторы в стандартной квантовой теории дают не самый общий вид используемых состояний. Последние характеризуются так называемыми *матрицами плотности*. В силу этого состояние в квантовой теории можно определить как способ, с помощью которого наблюдаемым сопоставляются некоторые числа, интерпретируемые в теории как вероятности перехода рассматриваемой системы из одного физического состояния в другое. Этот способ математически выражается в соответствии $A \ni a \to$ $\to (\psi,\ a\ \varphi)$, $\psi,\ \varphi \in H$, где H — гильбертово пространство. Матрица плотности, описывающая так называемое *нормальное состояние*, сопоставляет каждой наблюдаемой число по правилу $A \ni a \to \to \mathrm{Sp}\,(\rho a)/\mathrm{Sp}\rho$. И в том и другом случае соответствие линейно и эрмитовой наблюдаемой сопоставляется положительное число. Следовательно, с математической точки зрения можно определить состояние следующим образом: состояние физической системы в математическом аппарате квантовой теории описывается линейным вещественным положительным функционалом ω над алгеброй A наблюдаемых. В множестве состояний особую роль играют *чистые (экстремальные) состояния*, не допускающие разложения в выпуклую линейную комбинацию двух других. Если состояние не является чистым, оно называется *смешанным*. Чистым состояниям соответствуют неприводимые представления, при этом информация о системе максимальна.

В аксиоматике Хаага — Араки рассматривают только локальные наблюдаемые. Свойство локальности наблюдаемой связано с рассмотрением измерений лишь в ограниченной области пространства—времени Минковского (в релятивистском случае) или в ограниченной области пространства в фиксированный момент времени (в нерелятивистском случае).

Следовательно, алгебра наблюдаемых A должна обладать локальной структурой, которая устанавливается соответствием $\Delta \to \to A\,(\Delta)$ между открытыми областями с компактным замыканием в пространстве Минковского M- и C^*-алгебрами, которые порождаются наблюдаемыми, допускающими измерения внутри Δ. Ясно, что это соответствие должно обладать определенными свойствами монотонности

$$\Delta_1 \supset \Delta_2 \Rightarrow A\,(\Delta_1) \supset A\,(\Delta_2), \tag{1.3}$$

причем удобно считать, что в этих алгебрах единичный элемент общий.

Следующее ограничение на соответствие $\Delta \to A\,(\Delta)$ состоит в требовании локальной коммутативности, т. е.

$$[A\,(\Delta_1),\ A\,(\Delta_2)] = 0,\ \Delta_1 \sim \Delta_2. \tag{1.4}$$

Это означает, что измерения в области Δ_1 не влияют на измерения в области Δ_2, отдаленной от Δ_1 пространственноподобным интервалом.

Алгебры $A\,(\Delta)$, удовлетворяющие условиям монотонности и локальной коммутативности, принято называть *алгебрами локальных наблюдаемых*. Взяв теоретико-множественное объединение $UA\,(\Delta)$, получим алгебру всех локальных наблюдаемых, замыкая которую в топологии нормы получаем C^*-алгебру $A = \overline{UA\,(\Delta)}$, которая называется *алгеброй квазилокальных наблюдаемых*.

Наконец, будем учитывать релятивистскую инвариантность теории. В рассматриваемом математическом аппарате инвариантность описываемой физической системы относительно некоторой группы симметрии G выражается в возможности представлений группы G посредством групп автоморфизмов как на самой алгебре, так и на пространстве состояний $\widetilde{A}^{(+)}$

$$\alpha(G): A \ni a \xrightarrow{g} \alpha_g(a) \in A; \qquad (1.5)$$

$$\beta(G): \widetilde{A}^{(+)} \ni \omega \xrightarrow{g} \beta_g(\omega) \in \widetilde{A}^{(+)} \qquad (1.6)$$

для всех $g \in G$, причем требование инвариантности ожиданий накладывает следующее ограничение на представления:

$$\beta_g[\omega(a)] = \omega[\alpha_{g^{-1}}(a)]; \quad a \in A, \quad \omega \in \widetilde{A}^{(+)}, \quad g \in G. \qquad (1.7)$$

При этом релятивистская ковариантность теории состоит в возможности представления группы Пуанкаре $P_+^\uparrow$ (неоднородной группы Лоренца) посредством группы автоморфизмов алгебры $A \ni a \to a_L \in A$, $L \equiv \{x, \Lambda\}$. Для того, чтобы введенная в A локальная структура была совместимой с требованием релятивистской ковариантности, необходимо выполнение равенства

$$[A(\Delta)]_L = A(L\Delta), \qquad (1.8)$$

где $L\Delta$ — образ области при преобразовании $L \in P_+^\uparrow$, а

$$[A(\Delta)]_L \equiv \{a_L \mid a \in A(\Delta)\}. \qquad (1.9)$$

Таким образом, в рассматриваемом формализме есть теперь оба основных понятия любой квантовой теории: состояние и наблюдаемая. Для установления связи нашего формализма со стандартной квантовой теорией рассмотрим представление абстрактной алгебры A конкретной алгеброй операторов в гильбертовом пространстве H. Возьмем циклические представления $\pi(A)$ алгебры A в гильбертовом пространстве H с циклическим вектором ψ_0 (напомним, что циклическим называется такой вектор, действуя на который элементами $\pi(A)$, получаем плотное множество в H).

Существует тесная связь между циклическими представлениями и определенными выше состояниями. Действительно, имея представление алгебры A алгеброй ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H, мы всегда имеем бесконечный набор (векторных) состояний, определяемых равенством

$$\omega_\psi(a) = (\psi, \pi(a)\psi), \; \psi \in H, \; a \in A. \qquad (1.10)$$

В то же время, имея состояние $\omega \in \widetilde{A}^{(+)}$, можно построить единственным (с точностью до унитарной эквивалентности) образом циклическое представление $\pi_\omega(A)$ в гильбертовом пространстве H_ω с циклическим вектором ψ_ω так, чтобы состояние представлялось ожиданием по ψ_ω:

$$\omega(a) = (\psi_\omega, \pi_\omega(a)\psi_\omega). \qquad (1.11)$$

Это представление получают методом, развитым в работах Гельфанда, Наймарка и Сигала и носящим название ГНС-*построения*

[9]. Оно известно также как *теорема реконструкции Вайтмана.* Более того, если группа симметрии физической системы представлена автоморфизмами на A, то ГНС-построение можно провести так, чтобы получить ковариантное представление системы $\{A, G\}$ в H_ω, т. е. чтобы имелось унитарное представление группы G в H_ω:

$$\pi_\omega (\alpha_g (a)) = U_g \pi_\omega (a) U_g^{-1};\ a \in A,\ \pi_\omega (a) \in \pi_\omega (A),\ g \in G. \quad (1.12)$$

Дадим теперь точное определение понятия симметрии и ее нарушения в алгебраической квантовой теории.

Пусть A есть C^*-алгебра. Обозначим $\alpha (A)$ группу автоморфизмов алгебры A. Группа G преобразований на A называется *представимой* в группе автоморфизмов $\alpha (A)$, если существует отображение $\alpha : G \ni g \to \alpha_g \in \alpha (A)$, удовлетворяющее условиям

$$\alpha_{g_1 g_2} = \alpha_{g_1} \alpha_{g_2};\quad G \ni e \to \alpha_e = i \in \alpha (A), \qquad (1.13)$$

где i — единичный элемент в $\alpha (A)$.

Разберем случай, когда A — алгебра квазилокальных наблюдаемых. Будем считать, что группа симметрии G рассматриваемой физической системы является представимой в $\alpha (A)$. Это можно выразить диаграммой

$$\begin{array}{cccc} G \ni g \to & \alpha_g: & a \to & \alpha_g (a). \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & \rotatebox{90}{$\in$} & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & \alpha (A) & A & A \end{array}$$

Одновременно должно существовать представление группы G автоморфизмами группы $B (\tilde{A}^{(+)})$ различных автоморфизмов множества состояний $\tilde{A}^{(+)}$:

$$\begin{array}{cccc} G \ni g \to & \beta_g: & \varphi \to & \beta_g (\varphi). \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & \rotatebox{90}{$\in$} & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & B (\tilde{A}^{(+)}) & \tilde{A}^{(+)} & \tilde{A}^{(+)} \end{array}$$

Требование инвариантности ожиданий, т. е. неизменности физических предсказаний теории, выражается условием

$$\beta_g [\varphi (a)] = \varphi [\alpha_{g^{-1}} (a)],\ a \in A. \qquad (1.14)$$

Кроме того, естественно требовать совместность локальной структуры алгебры A и симметрии, описываемой группой G. Математически это условие выражается следующим образом:

$$A \supset A (\Delta) \xrightarrow{g} \alpha_g (A (\Delta)) \in A, \qquad (1.15)$$

причем условие локальной коммутативности имеет вид

$$\Delta_1 \sim \Delta_2 \Rightarrow [\alpha_g (A (\Delta_1)),\ \alpha_g (A (\Delta_2))] = 0. \qquad (1.16)$$

Будем называть группу G, представимую автоморфизмами из $\alpha (A)$ и $B (\tilde{A}^{(+)})$ и удовлетворяющую условиям (1.13), (1.15), (1.16), *группой физических симметрий.* В дальнейшем рассматриваются только такие симметрии.

Автоморфизм $\alpha_g \in \alpha(A)$, соответствующий группе G, называется внутренним, если в G существует унитарный элемент $a_g \in A$, реализующий этот автоморфизм:

$$a \xrightarrow{g} \alpha_g(a) = a_g a a_g^{-1}; \quad a_g^* = a_g^{-1}; \quad g \in G; \quad a, a_g \in A; \quad \alpha_g \in \alpha(A);$$

все остальные автоморфизмы называются внешними.

Среди совокупности физических симметрий наиболее существенны два типа симметрии: внутренние и пространственно-временные симметрии. Физическая симметрия называется *внутренней*, если

$$A \supset A(\Delta) \xrightarrow{G} \alpha_g(A(\Delta)) \subset A(\Delta), \quad \forall\, \Delta \subset M. \tag{1.17}$$

Примерами таких симметрий являются калибровочные преобразования и преобразования групп, изучаемых в физике элементарных частиц, таких, как $SU(2)$, $SU(3)$ и т. д. Физическая симметрия называется *пространственно-временной*, если

$$A \supset A(\Delta) \xrightarrow{G} \alpha_g(A(\Delta)) = A(g\Delta); \, g\Delta \neq \Delta; \, g \neq e; \, g, e \in G. \tag{1.18}$$

Примерами симметрии этого типа является группа Пуанкаре $P_{(+)}^{\uparrow}$ или ее подгруппа $T \subset P_{(+)}^{\uparrow}$ пространственно-временных сдвигов.

Может оказаться, что представление $g \to \gamma(g)$ группы G в $\pi(A)$ таково, что

$$\pi(a) \xrightarrow{G} \gamma_g(\pi(a)) = \pi(\alpha_g(a)) = U_g \pi(a) U_g^{-1}; \quad \forall\, a \in A, \tag{1.19}$$

где U_g — унитарный оператор из множества $B(H)$ всех линейных ограниченных операторов в H. В этом случае говорят, что группа G глобально унитарно осуществима в представлении $\pi(A)$, или что симметрия точная. При этом имеется унитарное представление группы G в H. В то же время может оказаться, что такого глобального оператора U_g, реализующего G-автоморфизмы (т. е. автоморфизмы, соответствующие группе G) нет, однако существуют унитарные операторы $U_g(\Delta)$, выполняющие роль U_g в подпредставлениях $\pi(\Delta) = \pi(A(\Delta))$, соответствующих локальным алгебрам $A(\Delta)$. При изменении $\Delta \to \Delta_1$ $U_g(\Delta)$ переходит в новый оператор $U_g(\Delta_1)$. В этом случае говорят, что группа G локально унитарно осуществима в представлении $\pi(A)$ и что симметрия спонтанно нарушается.

Обычно физическая система обладает одновременно группой пространственно-временных симметрий (скажем, $P_{(+)}^{\uparrow}$) и группой внутренних симметрий G, причем необходимо знать взаимосвязь представлений этих групп. Как правило, одним из требований, накладываемых на эти представления, является перестановочность G- и $P_{(+)}^{\uparrow}$-автоморфизмов. Однако обычно достаточно потребовать коммутацию G-автоморфизмов с автоморфизмами, соответствующими трансляциям. Это означает, что представления $\pi(A)$ и $\pi(gA)$ реализуют одно и то же представление группы трансляций T. Такое требование весьма существенно, так как если оно нарушается, т. е.

G-автоморфизмы не коммутируют с T-автоморфизмами, то происходит точное нарушение симметрии, соответствующее в лагранжевом подходе неинвариантности лагранжиана относительно группы G, чего обычно достигают, вводя в лагранжиан несимметричную малую добавку.

При исследовании симметрий физической системы желательно иметь критерий спонтанного нарушения симметрии. Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть A — квазилокальная алгебра; G — группа внутренних симметрий, коммутирующих с трансляциями. Пусть ω — трансляционно-инвариантное состояние. Используя ГНС-построение, можно получить представление $\pi_\omega(A)$ алгебры A в гильбертовом пространстве H_ω совместно с унитарным представлением группы T. Рассмотрим в этом представлении представление группы G. Из схемы ГНС-построения видно, что для возможности унитарного представления группы G достаточно, чтобы состояние ω было G-инвариантным, т. е. выполнялось условие

$$\omega(a) \xrightarrow{G} \delta_g[\omega(a)] = \omega[\gamma_{g^{-1}}(a)] = \omega(a). \qquad (1.20)$$

Ясно, что в этом случае представления $\pi_\omega(A)$, $\pi_{\delta_g[\omega]}(A)$, определяемые из ГНС-построения состояниями ω и $\delta_g[\omega]$, унитарно эквивалентны. Если же состояние ω не G-инвариантно, то представления π_ω и $\pi_{\delta_g[\omega]}$, вообще говоря, неэквивалентны. В этом случае нет глобальной унитарной представимости G-автоморфизмов, и симметрия спонтанно нарушается.

Как отмечалось выше, унитарно неэквивалентные представления алгебры наблюдаемых возникают для систем с бесконечным числом степеней свободы. Иногда говорят, что при этом волновые векторы состояний следует брать из различных гильбертовых пространств, подразумевая при этом то, что переход от одного состояния к другому нельзя осуществить с помощью оператора в гильбертовом пространстве. Для систем с конечным числом степеней свободы всякий автоморфизм представим унитарным оператором, и в случае коммутативности этого оператора с гамильтонианом (генератором временной трансляции) существует точная симметрия, в случае же бесконечной системы это, вообще говоря, не так.

В квантовой теории поля могут быть два типа неинвариантности состояний.

1. Неинвариантность того же типа, что и в квантовой механике, когда состояние данного гильбертова пространства переходит в состояние из этого же пространства. Такова, например, неинвариантность одночастичных состояний свободного поля относительно преобразований неоднородной группы Лоренца.

2. Неинвариантность всего гильбертова пространства состояний системы. Преобразование симметрии не является унитарным и переводит любой вектор состояния из данного пространства в вектор другого гильбертова пространства состояний.

Различие обоих типов неинвариантности легко заметить на примере квантовой теории многих тел. Пусть имеется N атомов со спином, равным единице во внешнем магнитном поле, направленном вдоль оси z. В основном состоянии спины всех атомов направлены вдоль оси z, и волновую функцию основного состояния можно представить в виде $\Psi^0 = \prod_{j=1}^{N} \psi_j^0$, где ψ_j^0 — собственная функция оператора спина S_z с собственным значением, равным единице, преобразующаяся по векторному представлению группы вращений. Возбужденные состояния описываются волновыми функциями, отличающимися от Ψ^0 тем, что спины некоторого числа ($\ll N$) атомов направлены не по оси z. Функция Ψ^0 и возбужденные состояния образуют гильбертово пространство состояний H_0. Состояние Ψ^0 инвариантно относительно вращений вокруг оси z. Возбужденные состояния неинвариантны относительно этих вращений, но в целом пространство H_0 инвариантно, так как эти состояния переходят друг в друга. Таким образом, видим, что если основное состояние инвариантно, то существует неинвариантность возбужденных состояний первого типа.

Рассмотрим теперь вращения вокруг оси x. Основное состояние Ψ^0 уже неинвариантно относительно этих поворотов и переходит в $\Psi^\theta = \prod_{j=1}^{N} \psi_j^\theta$, где ψ_j^θ описывает атом со спином, повернутым на угол θ вокруг оси x. Так как волновые функции атомов со спином единица преобразуются по векторному представлению группы вращений, то $(\psi_j^0, \psi_j^\theta) = \cos\theta$. Следовательно, $(\Psi^0, \Psi^\theta) = \prod_{i=1}^{N} (\psi_j^0, \psi_j^\theta) = (\cos\theta)^N$ и при $N \to \infty$* $(\Psi^0, \Psi^\theta) \to 0$. Таким образом, состояния Ψ^0 и Ψ^θ ортогональны при всех $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Аналогично любое возбужденное над Ψ^0 состояние ортогонально любому состоянию, возбужденному над Ψ^θ. Итак, Ψ^θ ортогонально любому состоянию из гильбертова пространства H_0 и потому не принадлежит ему. То же справедливо и для всякого состояния, возбужденного над Ψ^θ. Следовательно, приходим к необходимости рассмотрения гильбертова пространства H_θ, в котором содержится Ψ^θ и возбужденные над ним состояния. В пространствах H_0, H_θ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ реализуются различные унитарно-неэквивалентные представления наблюдаемых (в данном случае операторов спина).

Рассмотренная выше неинвариантность Ψ^0 и возбужденных над ним состояний и есть неинвариантность второго типа. В теории многих тел неинвариантностью второго типа является макроскопическая неинвариантность состояния системы. При этом всегда сущест-

---

* Условие $N \to \infty$ (обычно предполагаемое условие в теории многих тел) соответствует так называемому термодинамическому пределу $\lim\limits_{\substack{N\to\infty \\ V\to\infty}} \frac{N}{V} = \rho = \text{const}$.

вует неинвариантная макроскопическая наблюдаемая, которая ведет себя классически (см. гл. 2). В рассмотренном примере такой величиной будет намагниченность $\mathbf{m} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \Sigma_j \mathbf{S}_j$, где $\mathbf{S}_j$ — оператор спина j-го атома. Значение таких макроскопических величин одинаково для всех векторов фиксированного гильбертова пространства. Разным пространствам соответствуют разные значения этих величин.

Неинвариантность основного состояния в теории многих тел всегда второго типа. В теории элементарных частиц роль основного состояния выполняет вакуум, определяемый как состояние, инвариантное относительно пространственно-временных трансляций. Неинвариантность вакуума всегда есть неинвариантность второго типа.

Напомним, что инвариантность вакуума $|0\rangle$ относительно преобразований некоторой группы $U(\tau) = \exp iQ\tau$ означает, что вакуумное состояние переходит в себя при преобразованиях этой группы: $U(\tau)|0\rangle = |0\rangle$. Если данная группа есть непрерывная группа Ли, то инфинитезимальный оператор группы обладает свойством $Q|0\rangle = 0$. Если вакуум неинвариантен, то $Q|0\rangle \neq 0$. Физически неинвариантность вакуума проявляется в том, что существуют неинвариантные вакуумные средние для некоторых локальных наблюдаемых $A_\tau(x)$, т. е. таких наблюдаемых, для которых коммутатор с оператором поля обращается в нуль для пространственноподобных интервалов. Это эквивалентно условию

$$\frac{1}{i}\frac{d}{d\tau}\alpha(\tau)|_{\tau=0} = \langle 0|[Q, A(x)]|0\rangle \equiv \beta \neq 0,$$

где $|0\rangle$ — вакуум; Q — генератор преобразования симметрии; $\alpha(\tau) = \langle 0|A_\tau(x)|0\rangle \equiv \langle 0|U(\tau)A(x)U^{-1}(\tau)|0\rangle$; $U(\tau) = \exp i\tau Q$. При инвариантном вакууме $\beta = 0$. Обратно, если для любых локальных $A(x)$ $\beta = 0$, то вакуум инвариантен. Это доказывается в рамках аксиоматического подхода. При неинвариантности вакуума генератор Q не существует как эрмитов оператор в гильбертовом пространстве, состояния не преобразуются по унитарному представлению группы симметрии и им нельзя приписать соответствующие квантовые числа.

§ 2. АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ГОЛДСТОУНА

Спонтанное нарушение симметрии происходит лишь при вполне определенных условиях, в частности, когда в теории имеются частицы с нулевой массой. Это утверждение, известное как теорема Голдстоуна [10], — следствие теоремы, доказанной в аксиоматической квантовой теории Кастлером, Робинсоном и Швецой [11]. Сформулируем эту теорему.

Пусть имеется C^*-алгебра квазилокальных наблюдаемых A, такая, что выполнены следующие условия.

1. Локальная коммутативность: для любых областей Δ_1 и Δ_2, разделенных пространственноподобным интервалом, $[A(\Delta_1), A(\Delta_2)] = 0$.

2. Трансляционная симметрия: сдвигам в пространстве — времени $y \to y + x$ можно сопоставить автоморфизмы A, представимые операторами $\hat{T}(x)$, так что

$$A(x) = \hat{T}(x)\, AT(x)^{-1}.$$

3. Отсутствие частиц с массой, равной нулю (наличие ненулевой щели в спектре энергии). Оператор $\hat{T}(x)$ имеет спектральное разложение

$$\hat{T}(x) = \hat{E}_0 + \int d\hat{E}(p) \exp i\, px.$$

Здесь $\hat{E}_0$ — проектор на вакуумное (трансляционно-инвариантное) состояние $|0\rangle$; $\hat{E}(p)$ — проекторно-значная мера с носителем в V_m^+, где

$$V_m^+ = \{p,\ p^2 \geqslant m^2,\ p_0 > 0\}.$$

4. Сохранение локального тока. Для любой пробной функции $f(x) \in D$ (пространство бесконечно дифференцируемых функций, исчезающих вне конечной области) существуют четыре неограниченных оператора $j_\mu(f)$ (не требуется, чтобы они обязательно образовывали лоренц-вектор) со свойствами:

а) вакуум $|0\rangle$ принадлежит области определения $j_\mu(f)$ и $\langle 0 | j_\mu(f) | 0 \rangle = 0$;

б) $\hat{T}(a)\, j_\mu(f)\, \hat{T}(a)^{-1} = j_\mu(fa)$, $f_a(x) = f(x - a)$;

в) $\sum\limits_{\mu=0}^{3} j_\mu \left(\frac{\partial f}{\partial x_\mu}\right) = 0$ (сохранение тока);

г) $\langle 0 | [j_\mu(f), A] | 0 \rangle = 0$ для $A \in A(O)$, если носитель $f(x)$ пространственноподобен области O;

д) выражение $\langle 0 | j_\mu(x)\, j_\nu(y) | 0 \rangle$ существует как обобщенная функция.

5. Имеется однопараметрическая группа внутренней симметрии G, которой сопоставляют автоморфизмы алгебры A: $A \to A^\tau$, генерируемые нулевой компонентой тока в следующем смысле. Если $f_R(\mathrm{x}) \in D_R$, $f_d(x_0) \in D_d$, где

$$D_R = \{f_R(\mathrm{x}) : f_R(\mathrm{x}) \in D\},\ f_R(\mathrm{x}) = \begin{cases} 1 & |\mathrm{x}| < R, \\ 0 & |\mathrm{x}| \geqslant R + r, \end{cases}$$

$$D_d = \{f_d(x_0) : f_d(x_0) \in D\},\ f_d(x_0) = 0$$

при $|x_0| \geqslant d$, $\int dx_0\, f_d(x_0) = 1$, то

$$\frac{d}{d\tau} \langle 0 | A^\tau | 0 \rangle |_{\tau=0} = i \lim_{R \to \infty} \langle 0 | [j_0(f_R f_d), A] | 0 \rangle.$$

Выполнение условий 1 — 5 ведет к тому, что автоморфизмы G представимы унитарными операторами, т. е. G — точная симметрия. Это утверждение иногда называют аксиоматической теоремой Голдстоуна. Из нее, очевидно, следует, что спонтанное нарушение симметрии возможно лишь при нарушении какого-либо из условий 1 — 5. В частности, нарушение условия 3, т. е. отсутствие щели в спектре энергий, при спонтанном нарушении симметрии приобрело большую популярность в связи с собственно теоремой Голдстоуна, формулировка и доказательство которой будут даны ниже. Мы не приводим здесь доказательства аксиоматической теоремы Голдстоуна ввиду его сложности. Заметим лишь, что она относится как к релятивистскому, так и нерелятивистскому случаю.

Спонтанное нарушение симметрии, связанное с нарушением свойства локальной коммутативности (см. условие 4г), встречается в теории, использующей кулоновскую калибровку векторного поля [примерами могут служить сверхпроводник с кулоновским взаимодействием и модель Хиггса (см. ниже)].

ГЛАВА 2

СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ В НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ [2]

§ 3. ОБЩИЕ ОСОБЕННОСТИ НАРУШЕНИЯ СИММЕТРИИ В ТЕОРИИ МНОГИХ ТЕЛ

Спонтанное нарушение симметрии — широко распространенное явление в физике многих тел. В любой нерелятивистской системе многих тел имеется нарушение симметрии основного состояния относительно преобразований группы Галилея. Спонтанное нарушение симметрии часто встречается при фазовых переходах. Так, при отвердевании теряется трансляционная симметрия жидкости и остается симметрия только относительно дискретной группы сдвигов на вектор кристаллической решетки; при переходе через точку Кюри в теории ферромагнетизма необходимо учитывать спонтанное нарушение симметрии относительно группы вращений; в теориях сверхпроводимости и сверхтекучести переход от нормальной к сверхпроходящей или сверхтекучей фазам сопровождается потерей калибровочной инвариантности.

Спонтанное нарушение симметрии относительно калибровочных преобразований, приводящее к появлению наблюдаемой фазы поля, ответственно за появление когерентного состояния в теории лазера [12]. Наконец, неинвариантность основного состояния молекулы сахара относительно пространственных отражений при инвариантном гамильтониане ведет к явлению спонтанного нарушения четности, проявляющегося макроскопически в существовании «левого» и «правого» сахара, обладающего различными оптическими свойствами по отношению к лево- и правополяризованному свету.

Спонтанное нарушение симметрии в нерелятивистской области проявляется в том, что некоторые макроскопические параметры, характеризующие рассматриваемую физическую систему, неинвариантны относительно преобразований симметрии. Наличие макроскопических параметров как инвариантных, так и неинвариантных является общей особенностью физики многих тел. Под макроскопическими параметрами понимают те характеристики физической системы, изменение которых описывается классической физикой, в отличие от квантовых «микроскопических» наблюдаемых, позволяющих судить о микроскопической природе системы, описываемой квантовой теорией. Наблюдаемые этих двух типов различаются методами их измерения. Действительно, методы измерения микронаблюдаемых, таких, как энергия и импульс квазичастичных возбуждений, и макронаблюдаемых, таких, как плотность, температура, намагниченность, совершенно различны.

При полной информации о системе макроскопические наблюдаемые имеют точно определенные значения. Каждому из значений макровеличины соответствует множество состояний физической системы, отличающихся друг от друга только значениями микронаблюдаемых. Совокупность этих состояний образует гильбертово пространство, характеризующееся данным значением макроскопической величины. Разным значениям ее соответствуют разные гильбертовы пространства, что проявляется физически в отсутствии интерференции между состояниями с различными значениями макровеличин. В каждом из этих пространств микронаблюдаемые описываются операторами, реализующими унитарно-неэквивалентные представления алгебры наблюдаемых, определяемые соответствующими функционалами.

Значение макронаблюдаемой в данном гильбертовом пространстве можно получить как среднее по объему Ω:

$$b=\lim_{\Omega\to\infty}\frac{1}{\Omega}\int_{\Omega} B(\mathrm{x})\,d^3x, \tag{3.1}$$

где B (x) — соответствующая локальная микронаблюдаемая. Ее локальность означает, что коммутатор B (**x**) с операторами рождения (и уничтожения) поля $[B(\mathbf{x}), a^+(y)]$ достаточно быстро обращается в нуль при $|\,\mathbf{x}-\mathrm{y}\,|\to\infty$.

Примерами макровеличин являются: плотность числа частиц

$$\rho=\lim_{\Omega\to\infty}\frac{1}{\Omega}\int_{\Omega} a^+(\mathrm{x})\,a(\mathrm{x})\,d^3x,$$

плотность кинетической энергии

$$\mathrm{E}=\lim_{\Omega\to\infty}\frac{1}{\Omega}\int_{\Omega} a^+(\mathrm{x})\frac{1}{2m}\nabla^2 a(\mathrm{x})\,d^3x$$

и т. д.

Величины типа (3.1) коммутируют со всеми операторами рождения и уничтожения. Действительно, например

$$[b, a^+(y)]=\lim_{\Omega\to\infty}\frac{1}{\Omega}\int_{\Omega} d^3x\,[B(\mathrm{x}), a^+(\mathrm{y})]=0$$

из-за локальности B (x). Можно показать, что все величины вида (3.1) коммутируют также и друг с другом, что позволяет рассматривать их как c-числа. В теориях с трансляционно-инвариантным основным состоянием (вакуумом) значения этих наблюдаемых совпадают с ожиданием по вакууму от соответствующих локальных величин*:

$$\lim_{\Omega\to\infty}\left\langle 0\left|\frac{1}{\Omega}\int\limits_{\Omega}B(\mathrm{x})\,d^3x\right|0\right\rangle=\lim_{\Omega\to\infty}\frac{1}{\Omega}\int\limits_{\Omega}\langle 0|B(\mathrm{x})|0\rangle\,d^3x=$$
$$=\langle 0|B(\mathrm{x})|0\rangle=b. \qquad (3.2)$$

Покажем, что разным значениям макровеличин соответствуют унитарно-неэквивалентные представления алгебры наблюдаемых; это означает, что изменение состояния системы, при котором меняется макровеличина, нельзя описать унитарным оператором. Пусть $a_i^+(\mathrm{x})$, $a_i(\mathbf{x})$ — соответственно операторы рождения и уничтожения в гильбертовом пространстве H_i ($i=1,2$), а макроскопическая величина определяется по формуле (3.1) и ее значение в H_i есть b_i. Предположим, что рассматриваемые представления связаны унитарным оператором, т. е.

$$a_1(\mathbf{x}) = U\,a_2(\mathbf{x})\,U^{-1},\quad a_1^+(\mathbf{x}) = U\,a_2^+(\mathbf{x})\,U^{-1}.$$

Тогда

$$B_1(\mathbf{x}) = UB_2(\mathbf{x})\,U^{-1}, \qquad (3.3)$$

где $B_i(\mathbf{x})$ — оператор, представляющий макронаблюдаемую в H_i. Предельный переход в (3.1) понимается в слабом смысле, т. е. как сходимость матричных элементов. Тогда

$$b_1=\langle\psi_1|b_1|\psi_1\rangle=\lim_{\Omega\to\infty}\frac{1}{\Omega}\int\limits_{\Omega}\langle\psi_1|B_1(\mathrm{x})|\psi_1\rangle\,d^3x. \qquad (3.4)$$

Используя (3.3), получаем

$$\langle\psi_1\,|\,B_1(\mathbf{x})\,|\,\psi_1\rangle = \langle\,U^{-1}\psi_1\,|\,B_2(\mathrm{x})\,|\,U^{-1}\psi_1\,\rangle =$$
$$= \langle\,\psi_2\,|\,B_2(\mathrm{x})\,|\,\psi_2\,\rangle,\ \psi_2\in H_2. \qquad (3.5)$$

Подставив (3.5) в (3.4), имеем с учетом (3.2)

$$b_1=\lim_{\Omega\to\infty}\frac{1}{\Omega}\int\limits_{\Omega}\langle\psi_2|B_2(\mathrm{x})|\psi_2\rangle\,d^3x=\psi_2|b_2|\psi_2\rangle=b_2. \qquad (3.6)$$

Таким образом, если представления эквивалентны, то макровеличина имеет в них одно и то же фиксированное значение. Следовательно, разным значениям ее соответствуют унитарно-неэквивалентные представления.

Отметим, кстати, что обычно используемое представление Фока операторов рождения и уничтожения описывает системы с нулевой плотностью, т. е. с $\rho=\lim\limits_{\Omega\to\infty}\left(\frac{N}{\Omega}\right)=0$ в любом состоянии системы. Следовательно, все макроскопические тела должны описываться

* В силу трансляционной инвариантности вакуума $\langle 0|B(\mathbf{x})|0\rangle = \langle 0|\exp(i\,\mathbf{p}\,\mathbf{x})\,B(0)\exp(-i\,\mathbf{p}\,\mathbf{x})|0\rangle = \langle 0|B(0)|0\rangle = b = \mathrm{const}$, где $\mathbf{p}$ — оператор импульса.

представлениями, унитарно-неэквивалентными фоковскому. Так как плотность является макроскопическим параметром, то при ее изменении представление (гильбертово пространство) должно меняться.

Проведенное выше разбиение наблюдаемых на макроскопические и микроскопические позволяет ввести понятие точной симметрии следующим образом. Симметрия является точной, если соответствующие ей преобразования не меняют значений макропараметров. В этом случае операция симметрии переводит векторы данного гильбертова пространства в векторы этого же пространства и ее можно представить унитарным оператором. Основное состояние (вакуум) не меняется под действием симметрии.

Если же преобразование симметрии меняет значение макроскопической наблюдаемой, то оно переводит вектор данного гильбертова пространства в вектор другого гильбертова пространства. В этом случае симметрию нельзя описать унитарным оператором, что при наличии инвариантности гамильтониана относительно преобразований симметрии означает спонтанное нарушение последней. При этом основное состояние неинвариантно.

Например, неинвариантность основного состояния любой не релятивистской системы многих тел относительно группы Галилея связана с тем, что в любой реальной системе средняя плотность числа частиц ρ отлична от нуля. Эта плотность является макроскопической наблюдаемой. Макроскопическая величина есть и функция распределения частиц по импульсу $\rho(\mathbf{p})$, которая не может быть константой. Если бы $\rho(\mathbf{p}) = \mathrm{const}$, то система характеризовалась бы бесконечной плотностью энергии в единице объема. При преобразованиях Галилея $\rho(\mathbf{p})$ изменяется:

$$\rho(\mathbf{p}) \to \rho(\mathbf{p} + m\mathbf{v}_0),$$

где $\mathbf{v}_0$ — скорость движения системы отсчета. Изменение же $\rho(\mathbf{p})$ требует перехода в другое гильбертово пространство, что и означает неинвариантность основного состояния (вакуума).

Обратно, неинвариантность основного состояния системы многих тел приводит к появлению не равного тождественно нулю неинвариантного макроскопического параметра. Выше отмечалось, что неинвариантность основного состояния вакуума проявляется как существование отличного от нуля вакуумного среднего $\alpha_\tau \equiv \equiv \langle 0 | A_\tau(\mathrm{x}) | 0 \rangle \neq 0$ от локальной наблюдаемой $A_\tau(\mathrm{x})$. В силу трансляционной инвариантности основного состояния α_τ можно представить как вакуумное среднее от оператора $C_\tau = \lim\limits_{\Omega \to \infty} \frac{1}{\Omega} \int\limits_{\Omega} d^3x A_\tau(\mathrm{x})$, являющегося соответствующей неинвариантной макронаблюдаемой. Среднее по вакууму $| 0 \rangle$ от оператора C_τ совпадает со средним по любому нормированному состоянию $\psi(\mathrm{x})$ из гильбертова пространства, содержащего $| 0 \rangle$:

$$\alpha_\tau = \langle 0 | A_\tau(\mathbf{x}) | 0 \rangle = \langle 0 | C_\tau | 0 \rangle = \langle \psi(\mathrm{x}) | C_\tau | \psi(\mathrm{x}) \rangle.$$

Покажем, что генератор Q преобразования

$$A_{\tau_1}(x) \to A_{\tau_2}(x) = \\ = \exp\{iQ(\tau_2 - \tau_1)\} A_{\tau_1}(x) \exp\{-iQ(\tau_2 - \tau_1)\},$$

сопровождавшегося изменением C_τ (так, что $C_{\tau_1} \to C_{\tau_2}$), не является наблюдаемой (измеримой) величиной. Действительно, в соответствии с теорией измерения в квантовой механике, система при измерении Q переводится в состояние, описываемое собственным вектором наблюдаемой Q. Из-за некоммутативности Q и C_τ среднее значение C_τ в таком состоянии не определено, что явно противоречит доказанному выше утверждению о том, что это среднее имеет одно и то же значение для любого состояния $\psi(x)$. Таким образом, в случае неинвариантности вакуума Q не может быть измерено и не является оператором в гильбертовом пространстве*.

Физический смысл этого факта состоит в том, что C_τ есть классическая характеристика системы, поэтому ее значение не изменяется при измерении (отсутствие дополнительности по Бору).

Излагаемый в настоящем параграфе взгляд на макро- и микронаблюдаемые позволяет по-новому решить вопрос о соответствии между классической и квантовой физикой. Переход к классической теории связан не столько со стремлением размерной константы $\hbar$ к нулю, сколько с появлением у систем с бесконечным числом степеней свободы вышеупомянутых макронаблюдаемых. Предположение о бесконечности изучаемой системы при этом должно рассматриваться как выражение факта наличия у систем характеристик (интенсивных величин), не зависящих от объема (объем системы какой угодно, а потому в частности и бесконечно большой). Наконец отметим, что классические величины могут характеризовать не только системы, состоящие из большого числа микрочастиц, но и «малые» системы, в частности, одну микрочастицу. Так, согласно фон Нейману [13], микрочастицу можно охарактеризовать с помощью коммутирующих «макрокоординат» и «макроимпульсов», собственными числами которых являются средние значения некоммутирующих микрокоординат и микроимпульсов $\langle\psi|\hat{x}_{\text{микро}}|\psi\rangle$, $\langle\psi|\hat{p}_{\text{микро}}|\psi\rangle$, но, согласно определению математического ожидания, в квантовой механике эти средние можно получить в результате бесконечного числа измерений величин $\hat{x}_{\text{микро}}$ и $\hat{p}_{\text{микро}}$ над бесконечным числом частиц, находящихся в одном и том же состоянии ψ. Тем самым отдельной частице можно сопоставить бесконечную систему частиц с макронаблюдаемыми $X_{\text{макро}}$ и $P_{\text{макро}}$, где $X_{\text{макро}} =$

* Ситуация подобного типа получила в литературе название «сверхотбор». В случае непрерывной группы говорят о непрерывном сверхотборе, в случае дискретной — о дискретном. Например, дискретный сверхотбор по барионному или электрическому заряду в квантовой теории поля проявляется как невозможность обнаружить систему в собственном состоянии оператора (C или CP), не коммутирующего с операторами этих зарядов (если они ненулевые).

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_{i\,\text{микро}}/n$ и $P_{\text{макро}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \hat{p}_{i\,\text{микро}}/n$. В отличие от рассмотренных выше случаев такая система многих частиц будет не реальной, а мысленной. Поэтому макронаблюдатель может не совершать бесконечного числа измерений и приготовлений состояний частицы; у него есть замечательная способность измерения $X_{\text{макро}}$ и $P_{\text{макро}}$, сразу приводящего к желанному результату. Отметим, что аналогичная ситуация имеется в статистической механике при использовании метода Гиббса (см., например, [14]). Однако вернемся к неинвариантному вакууму. Невозможность представить Q, $U(\tau) = \exp \mathrm{i} Q\tau$ операторами в гильбертовом пространстве означает нарушение симметрии. В случае инвариантного основного состояния (вакуума) $C_\tau \equiv 0$, так что изменение основного состояния с инвариантного на неинвариантное должно проявляться физически как появление новой классической характеристики системы в соответствии с тем, что говорилось выше.

Так происходит при некоторых фазовых переходах: иовая фаза характеризуется новым параметром, отсутствующим в нормальной фазе. Например, при переходе жидкого гелия из нормального в сверхтекучее состояние этим новым параметром будет так называемая классическая волновая функция частиц конденсата $C_\tau = \lim_{\Omega\to\infty} \frac{1}{\Omega} \int a^+(\mathbf{x}) \exp(\mathrm{i}\tau)\, d^3x$, неинвариантная относительно калибровочного преобразования $a^+(\mathbf{x}) \to a^+(\mathbf{x}) \exp(\mathrm{i}\tau)$. При переходе металла из нормального в сверхпроводящее состояние появляется функция щели

$$\Delta(\mathbf{x}) = \lim_{\Omega\to\infty} \frac{1}{\Omega} \iint_{\Omega} b(\mathbf{x}, \mathbf{y}-\mathbf{z})\, a^+(\mathbf{z})\, a^+(\mathbf{y})\, d^3z\, d^3y,$$

где $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}-\mathbf{z}) \to 0$ при фиксированном $\mathbf{x}$ и $|\mathbf{y}-\mathbf{z}| \to \infty$; $\Delta(\mathbf{x})$ неинвариантна относительно тех же калибровочных преобразований. При переходе через точку Кюри в ферромагнетике появляется ненулевая намагниченность, неинвариантная относительно вращений.

Неинвариантные макроскопические наблюдаемые при спонтанном нарушении симметрии можно описать при помощи понятия квазисредних, введеиного Боголюбовым [15]. Известно, что в статистической механике среднее значение $\langle A\rangle$ любой динамической величины A определяется равенством

$$\langle A\rangle = \frac{\mathrm{Sp}\, A \exp(-\beta H)}{\mathrm{Sp} \exp(-\beta H)}, \tag{3.7}$$

где $\exp(-\beta H)$ — матрица плотности, описывающая основное состояние системы; H — гамильтониан; $\beta = 1/kT$*.

---

* Заметим, что всегда существует такое гильбертово пространство, в котором среднее (3.7) при любой фиксированной T можно записать как ожидание по трансляционно-инвариантному вектору (вакууму) [16].

Однако, если имеется макроскопическая величина, изменение которой не сопровождается изменением энергии (вакуум вырожден), выражение (3.7) содержит лишнее усреднение по различным значениям этой величины. Таким образом, для вычисления средних при фиксированном значении макроскопического параметра необходимо модифицировать определение (3.7) этих средних*. Для этого в гамильтониан системы вводится новый член νH_{int}, где ν — малый параметр. Новый гамильтониан $H_\nu = H + \nu H_{\text{int}}$ уже не коммутирует с операцией симметрии из-за несимметричной добавки. В этом случае среднее от некоторой динамической величины A, определенное по (3.7) и равное нулю при $\nu = 0$, будет отлично от нуля при $\nu \neq 0$. Более того, оно может остаться отличным от нуля и в пределе $\nu \to 0$.

Следуя Н. Н. Боголюбову, назовем *квазисредней* $\langle A \rangle_k$ двойной предел

$$\langle A \rangle_k = \lim_{\nu \to 0} \lim_{\Omega \to \infty} \frac{\operatorname{Sp} A \exp(-\beta H_\nu)}{\operatorname{Sp} \exp(-\beta H_\nu)} = \lim_{\nu \to 0} \langle A \rangle_\nu. \tag{3.8}$$

Подчеркнем, что к пределу $\nu \to 0$ следует переходить после термодинамического предела. Отличие $\langle A \rangle_k$ от $\langle A \rangle$ для некоторого H_{int} означает спонтанное нарушение симметрии. Легко видеть, что обычное среднее есть квазисреднее, усредненное дополнительно по группе нарушенной симметрии.

Таким образом, процедура предельного перехода эквивалентна выбору основного состояния или, что то же самое, конкретного значения макроскопического параметра, характеризующего представление.

Существует точка зрения [17], что реальные системы обладают спонтанным нарушением симметрии потому что они находятся во внешнем поле, не имеющем всей симметрии системы. В силу дальнего упорядочения, имеющегося в некоторых системах, эффект выделения того или иного из различных вакуумов (фиксация конкретного значения макропараметра) можно провести при помощи очень слабого внешнего воздействия.

Отметим, что в нерелятивистской теории многих тел всякое локальное изменение состояния можно описать как рождение квазичастиц. Рассмотрим некоторую систему. Произведем над ней локальное преобразование спонтанно нарушенной симметрии. Например, в случае ферромагнетика это соответствует ситуации, когда все спины атомов в некотором подобъеме системы повернуты на один и тот же угол по отношению к спинам основной части атомов. Если воздействие в системе характеризуется конечным радиусом, то изменение энергии, вызванное этим локальным преобразованием симметрии, пропорционально поверхности раздела выделенного

* Модифицированное при спонтанном нарушении симметрии определение средних разработано Н. Н. Боголюбовым [15], который ввел в рассмотрение бесконечно слабое внешнее поле, нарушающее симметрию системы.

подобъема Ω (т. е. $E \sim \Omega^{2/3}$). Число же возбуждаемых квазичастиц пропорционально Ω. Следовательно, энергия в расчете на одну квазичастицу порядка $\Omega^{2/3}/\Omega$ стремится к нулю при $\Omega \to \infty$, т. е. в системе должны существовать возбуждения с энергией, обращающейся в нуль в длинноволновом пределе. В присутствии дальнодействующих сил (например, кулоновских) изменение энергии уже не будет пропорционально $\Omega^{2/3}$, так как вклад в энергию дают не только частицы, находящиеся вблизи границы подобъема Ω, но и все частицы этого подобъема. В этом случае в спектре квазичастиц может присутствовать энергетическая щель в длинноволновом пределе.

Существование бесщелевых возбуждений в случае, когда система обладает только короткодействующими силами, доказывается в нерелятивистской теореме Голдстоуна, известной также как «$1/q^2$-теорема» Боголюбова и теорема Гугенгольца — Пайнса в теории сверхтекучести. Эту теорему можно сформулировать в общем виде следующим образом.

Теорема. Пусть имеется непрерывная группа симметрии G, генераторы которой записаны в виде интегралов по всему пространству от локальных плотностей, а гамильтониан системы (или уравнения движения) инвариантен относительно данной группы. Если основное состояние неинвариантно относительно этой группы симметрии, то в спектре гамильтониана обязательно присутствует ветвь элементарных возбуждений, энергия которых стремится к нулю при стремлении к нулю импульса, т. е. в длинноволновом пределе (доказательство этой теоремы см. в работах [15, 18—20]).

Для доказательства нерелятивистской теоремы Голдстоуна нужно рассмотреть коммутатор генератора Q группы спонтанно нарушенной симметрии с некоторым локальным оператором A ($\mathbf{x}$), $[Q, A(\mathbf{x})] = \eta(\mathbf{x})$, таким что

$$\eta = \langle 0 | \eta(\mathbf{x}) | 0 \rangle \neq 0. \tag{3.9}$$

Условие (3.9) означает неинвариантность макроскопической величины A_τ при преобразованиях симметрии. Суть теоремы Голдстоуна состоит в утверждении, что среднее $\langle 0 | [Q, A(\mathbf{x})] | 0 \rangle = \eta$ отлично от нуля только в том случае, когда существуют состояния $|\psi_j\rangle$, энергия которых стремится к нулю в длинноволновом пределе, являющиеся промежуточными в матричном элементе

$$\sum_j \langle 0 | Q | \psi_j \rangle \langle \psi_j | A(\mathbf{x}) | 0 \rangle. \tag{3.10}$$

Отсюда видно, что свойства голдстоуновских возбуждений тесно связаны со свойствами локальной плотности A ($\mathbf{x}$) неинвариантной макроскопической величины. При нарушении галилеевой инвариантности основного состояния такой макровеличиной будет функция распределения по импульсу ρ ($\mathbf{p}$), и голдстоуновские возбуждения будут фононами.

Фононами являются также голдстоуновские частицы, связанные с нарушением калибровочной симметрии в сверхтекучем гелии и с нарушением трансляционной симметрии в кристаллах. В ферромагнетике голдстоуновскими частицами являются спиновые волны (магноны), связанные с локальным отклонением спина атомов от направления полной намагниченности (см. § 2).

В сверхпроводнике не существует квазичастиц, энергия которых стремится к нулю при нулевом импульсе. Это связано с наличием дальнодействующего кулоновского взаимодействия. Поэтому в спектре возбуждений фононного типа, связанных с локальным изменением плотности электронов, появляется щель, обусловленная кулоновским взаимодействием. Эти возбуждения называются плазмонами: они приводят к экранированию кулоновского взаимодействия. Такая ситуация подробно изучена в работах Андерсона [22, 23].

Спонтанное нарушение симметрии — характерное явление в ядерной физике. Нарушение калибровочной симметрии проявляется в сверхтекучей модели ядра [27, 28]. Спонтанное нарушение сферической симметрии основного состояния позволяет объяснить многие особенности изменения свойств ядер при переходе от одних ядер к другим по аналогии с фазовым переходом II рода. Голдстоуновскими частицами в этих случаях являются фононы [28].

§ 4. НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ В МОДЕЛИ ФЕРРОМАГНЕТИКА ГЕЙЗЕНБЕРГА

Рассмотрим основные особенности спонтанного нарушения симметрии на примере модели ферромагнетика Гейзенберга [24—26], в которой он описывается как совокупность неподвижных атомов со спином S, расположенных в узлах некоторой решетки. Предположим, что спин равен 1/2 (в системе единиц, в которой $\hbar = 1$).

В простом случае кубической решетки узлы можно пронумеровать с помощью трех целых чисел (n_1, n_2, n_3). Это множество троек обозначим Z. Тогда координаты любого узла решетки можно записать как $(n_1 a;\ n_2 a;\ n_3 a)$, где a — постоянная решетки.

Гамильтониан модели имеет вид

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{n,\,m} V_{nm}(\mathbf{S}_n, \mathbf{S}_m), \quad n, m \in Z, \tag{4.1}$$

где операторы спина $S^{(x)}$, $S^{(y)}$, $S^{(z)}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[S_n^{(x)}, S_m^{(y)}] = \mathrm{i} S_n^{(z)}\,\delta_{nm} \tag{4.2}$$

(остальные коммутационные соотношения получают циклической перестановкой x, y, z). Удобно перейти к операторам

$$S_n^{(\pm)} = S_n^{(x)} \pm \mathrm{i} S_n^{(y)}. \tag{4.3}$$

Для них коммутационные соотношения имеют вид

$$[S_n^{(+)}, S_m^{(-)}] = 2\delta_{nm} S_n^{(z)}, \quad [S_n^{(\pm)}, S_m^{(z)}] = \mp \delta_{nm} S_n^{(\pm)}. \qquad (4.4)$$

Отсюда видно, что оператор $S_n^{(+)}$ повышает на единицу значение проекции спина атома n на ось z, а оператор $S_n^{(-)}$ понижает это значение на единицу. В операторах (4.3) гамильтониан (4.1) принимает вид

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{n,m} V_{nm} (S_n^{(z)} S_m^{(z)} + S_n^{(-)} S_m^{(+)}). \qquad (4.5)$$

Так как система инвариантна относительно трансляций на векторы решетки, члены взаимодействия V_{nm} зависят только от разности $(n - m)$: $V_{nm} = V(n - m)$. Поскольку в гамильтониан (4.1) операторы S_n входят только в виде скалярного произведения $(\mathbf{S}_n, \mathbf{S}_m)$, гамильтониан инвариантен относительно группы спиновых вращений $SU(2)$. При этих вращениях преобразуются только спины. Таким образом, гамильтониан модели инвариантен относительно группы трансляций Z и группы спиновых вращений $SU(2)$.

Рассмотрим состояния ферромагнетика, описываемого этой моделью. Ограничимся только простейшими состояниями, т. е. такими, в которых отсутствуют корреляции между состояниями различных атомов. В основном состоянии ферромагнетика спины всех атомов направлены одинаково. Пусть $\mathbf{l}$ — единичный вектор в этом направлении. Состояние n-го атома описывается тогда вектором $\psi_{n\mathbf{l}}$ (в двумерном гильбертовом пространстве), удовлетворяющим уравнению

$$(\mathbf{S}_n, \mathbf{l})\,\psi_{n\mathbf{l}} = \frac{1}{2}\psi_{n\mathbf{l}}. \qquad (4.6)$$

Этим уравнением вектор $\psi_{n\mathbf{l}}$ определен с точностью до фазового множителя. Скалярное произведение $\psi_{n\mathbf{l}_1}$ и $\psi_{n\mathbf{l}_2}$ равно

$$(\psi_{n\mathbf{l}_1}, \psi_{n\mathbf{l}_2}) = \exp(i\varphi)\sqrt{\frac{1 + (\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)}{2}} = \exp(i\varphi)\cos\frac{\theta}{2}, \qquad (4.7)$$

где θ — угол между $\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{l}_2$. Состояние всего ферромагнетика, в котором все спины направлены по $\mathbf{l}$, можно описать, задавая состояния всех атомов $\psi_{\mathbf{l}} = \prod_n \psi_{n\mathbf{l}}$. Состояния, в которых спины всех атомов, кроме конечного числа, направлены по $\mathbf{l}$, а также линейные комбинации этих состояний отличаются от $\psi_{\mathbf{l}}$ только микроскопически. Мы рассматриваем случай бесконечного числа атомов. Если полное число атомов N конечно, то число $\tilde{N}$ «неправильно» ориентированных спинов должно быть много меньше N. Если же оно одного порядка с N, то следует говорить о макроскопически различных состояниях.

Состояния, отличающиеся от ψ_1 микроскопически, образуют гильбертово пространство H^1. Наблюдаемые спинов отдельных атомов описываются операторами в H^1 и реализуют представление перестановочных соотношений (4.2). Состояния, отличающиеся направлением вектора полной намагниченности (т. е. макроскопически различные состояния), ортогональны друг другу. Действительно,

$$(\Psi_{1_1}, \Psi_{1_2}) = \prod_{n=1}^{N} (\psi_{n1_1}, \psi_{n1_2}) = \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^N \exp(\mathrm{i}N\varphi) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Легко видеть, что и любое состояние из H^{1_1} также ортогонально любому состоянию из H^{1_2}. Состояния, принадлежащие одному и тому же H^1, характеризуются одним и тем же значением макроскопического параметра (намагниченности) $\mathbf{m} = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} S_n$. Когда говорят о полной намагниченности $\mathbf{S} = \sum\limits_{n=1}^{N} S_n$, то фактически имеют в виду просто $\mathbf{m}N$ (где N — полное число атомов), пренебрегая флуктуациями $\mathbf{S}$, имеющими порядок $\mathbf{S}/\sqrt{N}$. Вектор намагниченности $\mathbf{m}$ коммутирует со всеми операторами отдельных спинов $\mathbf{S}_n$. Например,

$$[m_z, S_n^{(x)}] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} [S_n^{(z)}, S_n^{(x)}] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \mathrm{i}S_n^{(y)} = 0.$$

Легко убедиться в том, что m_x, m_y и m_z коммутируют и друг с другом. Следовательно, $\mathbf{m}$ ведет себя как классическая величина, в частности, все компоненты $\mathbf{m}$ измеримы одновременно и в гильбертовом пространстве H^1 являются c-числами. Нетрудно проверить, что $\mathbf{m} = (\Psi_1, \mathbf{S}_n\Psi_1) = 1/2$. Все остальные средние от произведений $\mathbf{S}_n$ выражаются через $\mathbf{m}$. При $T = 0$°К вектор $\mathbf{m}$ — единственный макроскопический параметр.

При спиновых вращениях намагниченность преобразуется как вектор, а основное состояние Ψ_{1_1} переходит в основное состояние Ψ_{1_2}. Следовательно, при вращениях векторы состояния из гильбертова пространства H^{1_1} переходят в векторы другого пространства H^{1_2}, где $\mathbf{1}_2$ получается из $\mathbf{1}_1$ тем же вращением. Если бы основное состояние было инвариантно относительно вращений, то $\langle \Psi_1, \mathbf{S}_n \Psi_1 \rangle$ должно было бы равняться нулю. Отличие $\mathbf{m}$ от нуля означает нарушение симметрии. Так как гамильтониан модели инвариантен, имеем спонтанное нарушение симметрии.

При нарушении симметрии в бесконечной системе преобразования симметрии неосуществимы унитарным оператором, т. е. не существует унитарного оператора U, удовлетворяющего соотношениям $S_n^{(k)\prime} = US_n^{(k)}U^{-1}$ $(k = x, y, z)$, где $S_n^{(k)\prime}$ получается из

$S_n^{(k)}$ рассматриваемым преобразованием. Например, при повороте вокруг оси z на угол φ:

$$S_n^{(x)} \to S_n^{(x)\prime} = S_n^{(x)} \cos\varphi + S_n^{(y)} \sin\varphi,$$

$$S_n^{(y)} \to S_n^{(y)\prime} = -S_n^{(x)} \sin\varphi + S_n^{(y)} \cos\varphi,$$

$$S_n^{(z)} \to S_n^{(z)} = S_n^{(z)}.$$

Теперь покажем, что в модели ферромагнетика Гейзенберга имеются бесщелевые возбуждения. Их существование при спонтанном нарушении симметрии доказывается в теореме Голдстоуна.

Уравнение движения в модели Гейзенберга имеет вид

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dt} S_n^{(-)} = [H, S_n^{(-)}] = \sum_m V_{nm} [S_m^{(z)} S_n^{(-)} - S_m^{(-)} S_n^{(z)}].$$

Совершим преобразование Фурье:

$$S_q^{(z)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n S_n^{(z)} \exp(\mathrm{i}\,\mathbf{q}\mathbf{R}_n), \quad S_q^{(\pm)} = \frac{1}{N} \sum_n S_n^{(\pm)} \exp(\mp \mathrm{i}\mathbf{q}\mathbf{R}_n).$$

Тогда в импульсном представлении уравнения движения принимают вид

$$-\mathrm{i}\dot{S}_q^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{q'} [V(\mathbf{q}') - V(\mathbf{q} - \mathbf{q}')]\, S_{q'}^{(z)} S_{q-q'}^{(-)}. \tag{4.8}$$

Далее рассмотрим случай, когда ось z совпадает с направлением намагниченности. Легко видеть, что

$$\frac{1}{\sqrt{N}} S_{q'}^{(z)} \underset{N\to\infty}{\to} m\delta_{0q'} = \frac{1}{2}\delta_{0q'}. \tag{4.9}$$

Подставив (4.9) в (4.8), получаем уравнения движения в виде

$$-\mathrm{i}\dot{S}_q^{(-)} = \omega_0(\mathbf{q})\, S_q^{(-)}, \quad \omega_0(\mathbf{q}) = [V(0) - V(\mathbf{q})], \tag{4.10}$$

где $V(\mathbf{q})$ — преобразование Фурье потенциала взаимодействия

$$V_{nm} = V(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_m) = \sum_q V(\mathbf{q}) \exp\{\mathrm{i}\mathbf{q}(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_m)\}.$$

Частота $\omega_0(\mathbf{q})$ обращается в нуль при $\mathbf{q} \to 0$. Таким образом, оператор $S_q^{(-)}$ есть оператор рождения частицы Голдстоуна с импульсом $\mathbf{q}$, которая в данном случае является спиновой волной (магноном). При больших N с точностью до членов порядка $N^{-1/2}$ операторы $S_q^{(z)}$, $S_q^{(\pm)}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям (ось z совпадает с направлением полной намагниченности):

$$[S_q^{(+)}, S_{q'}^{(-)}] = \delta_{qq'}, [S_q^{(z)}, S_{q'}^{(\pm)}] = 0 \quad (\mathbf{q} \neq 0).$$

Операторы $S_0^{(z)}$, $S_0^{(\pm)}$ связаны с оператором полного спина: $S_0^{(z)} = (1/N) S^{(z)} = m^{(z)} \sqrt{N}$, $S_0^{(\pm)} = (1/\sqrt{N}) S^{(\pm)}$. При $N \to \infty$ операторы $S_0^{(z)}$ расходятся, а $S_0^{(\pm)}$ имеют смысл.

Таким образом, спонтанное нарушение симметрии в ферромагнетике сопровождается появлением макроскопической величины — намагниченности. Так как в отсутствие внешнего поля все направления равноправны, мы имеем бесконечное множество основных состояний, соответствующих разным направлениям намагниченности. Энергия всех этих состояний одинакова. В теории поля всякое изменение состояния можно описать как возбуждение квазичастиц. Макроскопические изменения типа поворота всего ферромагнетика связаны с появлением бесконечного числа частиц. Эти квазичастицы, возбуждаемые при макроскопических изменениях, должны конденсироваться в состоянии с нулевыми энергией и импульсом, так как энергия при таких изменениях не меняется, а состояние остается трансляционно-инвариантным.

Покажем, что изменение направления намагниченности происходит при конденсации магнонов с нулевым импульсом, т. е. для изменения направления намагниченности необходимо появление магнонов в количестве порядка N. Оператор числа магнонов имеет вид $M = \sum_q S_q^{(-)} S_q^{(+)} = \sum_n S_n^{(-)} S_n^{(+)}$ (последнее равенство следует из унитарности преобразования Фурье). Известно, что $S_n^{(-)} S_n^{(+)} = 1/2 - S_n^{(z)}$. Следовательно, $M = (1/2) N - \sum_n S_n^{(z)}$. Тогда намагниченность выражается через число спиновых волн

$$m^{(z)} = \frac{1}{N} \sum_n S_n^{(z)} = \frac{1}{2} - \frac{M}{N}. \tag{4.11}$$

Из (4.11) видно, что для изменения $m^{(z)}$ необходимо рождение спиновых волн в количестве порядка N.

В (4.10) предполагалось, что $V(n - m)$ достаточно быстро убывает при $|n - m| \to \infty$, так что $V(\mathbf{q})$ несингулярна при $\mathbf{q} \to 0$. Если же в системе есть дальнодействие, то это условие, вообще говоря, не выполняется и в спектре магнонов может появиться щель. По-видимому, это связано с тем, что при наличии дальнодействия газ квазичастиц, возбуждаемых при макроскопических изменениях в системе, нельзя считать свободным при сколь угодно малых плотностях.

Вырождение вакуума (основного состояния) ферромагнетика снимается при включении внешнего магнитного поля **B**. В линейном приближении по $\mathbf{B}$ намагниченность (а следовательно и вакуум) принимает то же направление в пространстве, что и $\mathbf{B}$. Иная ситуация, однако, складывается при учете нелинейных членов. В этом случае возможно рассогласование между направлениями вакуума и внешнего поля. Так, при добавлении квадратичного члена по полю

$$\tilde{H} = H + \varepsilon H', \quad \varepsilon H' = -\mu\ (\mathbf{S},\ \mathbf{B}) - \Gamma\ (\mathbf{B},\ \mathbf{S})^2, \tag{4.12}$$

где H удовлетворяет (4.1); μ, Γ — постоянные; $\mathbf{S}$ — полный спин. Угол θ, образуемый намагниченностью $\mathbf{M} = \langle\psi_1|S|\psi_1\rangle$ (здесь $|\psi_1\rangle$ — вектор основного состояния) и вектором $\mathbf{B}$, можно найти из условия минимума $\langle\psi_1|\tilde{H}(\theta)|\psi_1\rangle$; он определяется формулой

$$\mu|\mathbf{M}|\,|\mathbf{B}| \sin\theta + 2\,\Gamma \cos\theta \sin\theta\,|\mathbf{B}|^2\,|\mathbf{M}|^2 = 0. \tag{4.13}$$

Уравнение (4.13) кроме тривиального решения $\theta = 0$ имеет нетривиальное решение

$$\cos\theta = -\mu/2\Gamma\,|\mathbf{B}|\,|\mathbf{M}|, \tag{4.14}$$

показывающее, что учет $\Gamma \neq 0$ необходим в ряде случаев даже при малой константе Γ. Этот простой пример послужил основой для работ [82, 115], относящихся к физике элементарных частиц, содержащих попытку объяснения ненулевого угла Кабиббо и CP-нарушения в теории слабых взаимодействий, используя указанный механизм рассогласования симметрии (подробнее см. гл. 4).

ГЛАВА 3

НЕИНВАРИАНТНОСТЬ ВАКУУМА В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

§ 5. НЕИНВАРИАНТНОСТЬ ВАКУУМА И ТЕОРЕМЫ КОУЛМЕНА — ОКУБО

Приведем общие теоремы, относящиеся к свойствам инвариантности вакуума в релятивистской квантовой теории поля. Начнем с теоремы Коулмена, утверждающей, что из инвариантности вакуума относительно некоторых преобразований следует инвариантность гамильтониана. Близкой к теореме Коулмена является теорема Окубо, также показывающая, к каким следствиям ведет инвариантность вакуума. Из нее следует, что физический вакуум не может быть нулевым состоянием пространственной компоненты тока. В некотором смысле обратной теоремой к теореме Коулмена является теорема Голдстоуна, которая будет рассмотрена в § 6. В теореме Голдстоуна предполагается инвариантность гамильтониана: вакуум же при этом не является инвариантным состоянием. Как следствие такого разногласия между симметриями возникают частицы с нулевой массой — голдстоуновские мезоны.

В лагранжевой теории поля наличие симметрии выражается инвариантностью лагранжиана относительно некоторой группы преобразований полей. Если группа является абелевой группой внутренних преобразований, то из теоремы Нетер следует существование 4-вектора плотности тока $j^\mu(x)$, удовлетворяющего закону сохранения

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0, \tag{5.1}$$

порождающего в квантовой теории поля преобразование группы в том смысле, что изменение любого локального оператора $A(\mathbf{y}, t)$ равно

$$\delta A(\mathbf{y}, t) = i\delta\lambda \int d^3x \, [A(\mathbf{y}, t), j^0(\mathrm{x})]_{x^0=t}. \tag{5.2}$$

Оператор $A(\mathbf{y}, t)$ является функцией полей в момент времени t. Ток $j^\mu(x)$ предполагается локальным, т. е. $[A(y), j^\mu(x)] = 0$ при пространственноподобных $|y - x|$, так что интеграл в (5.2) сходится. Если симметрия точная, то существует не зависящий от времени оператор заряда

$$Q = \int d^3x j^0(x). \tag{5.3}$$

Следовательно, (5.2) можно записать в виде

$$\delta A(y) = i\delta\lambda\,[A(y), Q]. \tag{5.4}$$

Отметим, что (5.2) справедливо, даже если Q не существует как оператор (достаточно существования $j^0(x)$).

Легко видеть, что при неинвариантности вакуума, когда $Q|0\rangle \neq 0$, заряду Q нельзя сопоставить оператор в гильбертовом пространстве, и, следовательно, преобразование симметрии выводит вакуум из H. Предположим, что Q является оператором в H и $Q|0\rangle = \psi \in H$. Тогда из-за коммутации Q с оператором импульса состояние ψ трансляционно-инвариантно. Его норма

$$\|\psi\|^2 = \langle 0|QQ|0\rangle = \langle 0|\int j^0(\mathbf{x}, t)\,d^3x|\psi\rangle =$$
$$= \int \langle 0|j^0(\mathbf{x}, t)|\psi\rangle\, d^3x \to \infty, \tag{5.5}$$

поскольку в силу трансляционной инвариантности состояний $|0\rangle$ и $|\psi\rangle$ матричный элемент $\langle 0|j^0(\mathbf{x}, t)|\psi\rangle$ не зависит от $\mathbf{x}$. Следовательно, наше предположение неверно и Q не существует как оператор в гильбертовом пространстве.

В аксиоматической квантовой теории показывается, что интегральное представление оператора заряда $Q = \int j^0(\mathbf{x}, t)\,d^3x$ является нестрогим даже в случае инвариантного вакуума. Определим:

$$j^0(f_R f_T) = \int d\mathbf{x}\,dx_0\, f_R(\mathbf{x})\, f_T(x_0)\, j^0(x),$$

где $f_R(\mathbf{x}) \in S(R^3)$ и

$$f_R(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, |\mathbf{x}| < R, \\ f_R(|\mathbf{x}|), R \leqslant |\mathbf{x}| \leqslant R + \Lambda, \Lambda > 0, \\ 0, |\mathbf{x}| > R + \Lambda, \end{cases}$$

а $f_T(x_0) \in S(R^1)$ и

$$\begin{cases} \int f_T(x_0)\,dx_0 = 1, \quad f_T(-x_0) = f_T(x_0) \geqslant 0, \\ f_T(x_0) = 0, \quad |x_0| > T, \end{cases}$$

где S — пространство непрерывных бесконечно дифференцируемых, быстро убывающих на бесконечности функций. Кастлер, Робинсон и Швеца [29] доказали следующие утверждения.

1. $\langle 0|\, j^{0+}(f_R f_T)\, j^0(f_R f_T)|0\rangle \geqslant cR^2$ при $R \to \infty$.
2. Пусть имеется состояние

$$|\varphi\rangle \equiv \int h(\mathbf{x})\, A_\psi(\mathbf{x})|0\rangle\, d\mathbf{x},$$

где $A_\psi(x)$ — квазилокальный оператор, имеющий в общем случае вид:

$$A_\psi(x) = T(x)\, A_\psi T^+(x),$$

$$A_\psi = \sum_{m=0}^{M} \int \prod_{j=1}^{m} dx_j\, g_m(x_1, \ldots, x_m)\, \Phi_{i_1}(x_1) \ldots \Phi_{i_m}(x_m),$$

где $T(x)$ — оператор трансляции; $\Phi_{i_n}(x_n)$ (здесь $n = 1, 2, \ldots, m$) — локальные операторы поля, и $g_m(x_1, \ldots, x_m) \in S$, $h(x)$ — бесконечно дифференцируемая непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{|\mathbf{x}| \to \infty} h(\mathbf{x}) |\mathbf{x}|^2 \neq 0.$$

Тогда $\lim_{R \to \infty} \langle \varphi | j^0 (f_R f_T) | 0 \rangle$ конечен для всех квазилокальных A_ψ тогда и только тогда, когда $j^\mu(x) \equiv 0$.

Итак, из первого и второго утверждений видно, что заряд $Q = \int j^0(x, t)\, d^3x$ нельзя определить как оператор ни в сильном, ни в слабом смысле. Причина этого явления — то, что в квантовой теории поля ток $j^0(f_R f_T)$ содержит члены, ответственные за рождение пар частица — античастица. И хотя в классической теории поля интегрирование по $\mathbf{x}$ при учете уравнений движения (см. [30]) приводит к исчезновеиию этих членов, в квантовой теории поля, когда c-числа превращаются в операторы, эти члены приводят к расходимости.

Выход из создавшегося положения можно найти, вводя некоторый новый оператор заряда G, определяемый с помощью билинейной формы:

$$\langle \psi | G | \chi \rangle = Q(\psi, \chi) = \lim_{R \to \infty} \langle \psi | j^0 (f_R f_T) | \chi \rangle,$$

где $|\psi\rangle$, $|\chi\rangle$ получены из вакуума действием квазилокальных операторов вида A_ψ. Оказывается, что оператор G, совпадающий с обычным формальным зарядом на таких состояниях, существует при сохранении тока и инвариантности вакуума. Коммутационные соотношения оператора G с полем A совпадают с коммутационными соотношениями оператора Q, т. е.

$$[G, A] = \lim_{R \to \infty} [j^0 (f_R f_T), A] \equiv [Q, A],$$

поэтому в доказательствах, использующих коммутаторы, можно не учитывать отмеченную выше особенность в определении заряда.

Так как оператор G на вакууме действует как Q, то рассуждения, проводившиеся для формулы (5.5), остаются в силе.

Если в случае неинвариантного лагранжиана имеется неинвариантность вакуума, то говорят о явном нарушении симметрии за счет несимметрии уравнений движения. Возможны, однако, случаи, когда лагранжиан при этом инвариантен, что соответствует спонтанному нарушению симметрии.

Коулменом [31] была доказана теорема, что инвариантность вакуума относительно некоторой группы преобразований означает инвариантность соответствующего гамильтониана, или другими словами «инвариантность вакуума есть ннвариантность мира». Из этой теоремы следует, что вакуум не может быть инвариантным относительно нарушенной симметрии. Если бы вакуум был инвариантным, то и гамильтониан был бы инвариантен относительно тех же преобразований, но это не так, если симметрия нарушена в лагранжиане. Отсюда следует, что преобразование нарушенной симметрии нельзя представить унитарным оператором. В качестве нарушенной симметрии не обязательно рассматривать абелеву калибровочную симметрию, теорема относится и к неабелевым группам, таким, как, например, SU (2) или SU (3). Наконец, в вайтмановской аксиоматике есть доказательство этой теоремы для дискретных групп P, CP, C, T, и она формулируется как теорема о невозможности описания любой нарушенной симметрии унитарным оператором [6].

Непосредственными следствиями теоремы Коулмена в физик элементарных частиц являются следующие утверждения:

1) в теории электромагнитных взаимодействий физический вакуум не может быть изотопически-инвариантным состоянием;

2) в теории слабых взаимодействий физический вакуум не может быть состоянием с нулевой странностью и нулевым изотопическим спином. Кроме того, вакуум не может быть P-инвариантным состоянием (и CP-инвариантным в теории K^0-мезонов);

3) физический вакуум не может быть инвариантным относительно группы SU (3), нарушенной во всех взаимодействиях.

Неинвариантность вакуума проявляется в существовании неинвариантных классических величин. Обнаруживая их, экспериментатор, неизбежно пользующийся классическим языком, делает заключение, что симметрия нарушена.

Сформулируем и докажем теорему Коулмена в рамках релятивистской локальной теории поля для абелевой калибровочной группы (обобщение на неабелеву группу тривиально).

Теорема 1. Пусть существует локальный 4-ток $j^\mu(x)$ такой, что заряд $Q = \int j^0(\mathbf{x}, t)\, d^3x$ является самосопряженным оператором (с учетом приведенных выше оговорок) в гильбертовом пространстве состояний. Тогда ток $j^\mu(x)$ удовлетворяет закону сохранения $\partial^\mu j^\mu(\mathbf{x}, t) = 0$, а заряд Q не зависит от времени.

Доказательство. Выше было показано, что Q существует как оператор, только если

$$Q(t)\,|0\rangle = 0.$$

Определим операторы

$$\varphi(x) = \partial_\mu j^\mu(x), \quad \pi(x) = \partial_t \varphi(x). \tag{5.6}$$

Из (5.5) тогда следует, что

$$\langle 0|\,[Q, \pi(0)]|0\rangle = \langle 0|\,[\int j^0(\mathbf{x}, t)\, d^3x, \pi(0)\,]\,|0\rangle = 0. \tag{5.7}$$

Продифференцируем (5.7) по времени и добавим члены $\partial_i j^i(\mathbf{x}, t)$, где $i = 1, 2, 3$. Эти члены дают нулевой вклад в коммутатор с $\pi(0)$ при $t = 0$ в силу локальной коммутативности, поскольку по теореме Гаусса соответствующий интеграл превращается в интеграл по бесконечно удаленной поверхности, следовательно:

$$\langle 0|\,[\int\varphi(\mathbf{x}, 0)\, d^3x, \pi(0)]\,|0\rangle = 0. \tag{5.8}$$

Применяя разложение Челлена — Лемана

$$< 0 \mid [\varphi (x), \varphi (y)] | 0 > = \int_0^\infty \rho (\chi^2) \Delta (x - y, \chi^2) d\chi^2, \rho (\chi^2) \geqslant 0$$

и используя равенство $\frac{\partial}{\partial y_0} \Delta (x - y, \chi^2) |_{x_0 = y_0} = \delta (\mathbf{x} - \mathbf{y})$, получаем $\int_0^\infty \rho (\chi^2) d\chi^2 = 0$, т. е. $\rho (\chi^2) = 0$. Но тогда и

$$<0| \varphi (x) \varphi (y) |0 > = \int_0^\infty \rho (\chi^2) \Delta^+ (x - y, \chi^2) d\chi^2 = 0, \tag{5.9}$$

откуда, учитывая положительность метрики в гильбертовом пространстве, получаем $\varphi (x) |0 > = 0$. Теорема Федербуша — Джонсона [32], утверждающая, что если локальный оператор, действуя на вакуум, дает нуль, то и сам оператор равен нулю, приводит к тому, что $\varphi (x) = \partial_\mu j^\mu = 0$. Отсюда получаем, что заряд сохраняется: $Q (t) = Q (0)$, т. е. оператор Q коммутирует с гамильтонианом.

Из теоремы Коулмена, очевидно, следует уже приведенное выше утверждение о невозможности представить нарушенную симметрию унитарным оператором. Возникает вопрос: эта невозможность есть лишь некое тонкое математическое свойство, безразличное для физики, или же отсутствие унитарности влечет серьезные физические следствия?

Прежде чем ответить на этот вопрос, приведем еще одну важную теорему, доказанную в алгебраической аксиоматике [33], имеющую прямое отношение к обсуждаемой теме.

Пусть имеется C^*-алгебра квазилокальных наблюдаемых U с единицей, допускающая точное неприводимое представление π_0 в сепарабельном гильбертовом пространстве с единственным вакуумным вектором.

Рассмотрим некоторый автоморфизм α алгебры $\mathcal{U}$, такой, что группа пространственных трансляций стабильна относительно α (α-преобразование пространственной трансляции есть снова пространственная трансляция). Примером такого автоморфизма могут служить преобразования внутренних групп симметрии или дискретных операций P, C, CP, T.

Здесь возможны два случая: 1) автоморфизм α представим унитарно в π_0, и тогда вакуумный вектор инвариантен относительно преобразования α, т. е. все вакуумные средние от наблюдаемых $\pi_0 (A)$ не меняются при этом преобразовании; 2) существует некоторый элемент, для которого

$$(\omega_0, \pi_0 (A) \omega_0) \neq (\omega_0, \pi_0 (A^\alpha) \omega_0), \tag{5.10}$$

причем

$$0 \leqslant | (\omega_0, \pi_0 (A) \omega_0) - (\omega_0, \pi_0 (A^\alpha) \omega_0) | \leqslant 2 \| A \| . \tag{5.11}$$

Во втором случае справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Если разность (5.11) не есть тождественный нуль для всех $A \in \mathcal{U}$, то существует по крайней мере один самосопряженный оператор $x \in \mathcal{U}$, такой, что

$$|(\omega_0, \pi_0(x)\,\omega_0) - (\omega_0, \pi_0(x^\alpha)\,\omega_0)| = 2\,\|x\|. \qquad (5.12)$$

Одним словом, нарушение симметрии для этого элемента оказывается максимально возможным. Приведенная теорема является следствием результата Глимма и Кэдисона [34], формулируемого в виде леммы.

Лемма. Пусть f и g — чистые состояния системы $\mathcal{U}$, такие, что неприводимые представления $\pi_f(A)$ и $\pi_g(A)$, генерируемые f и g, унитарно-неэквивалентны. Обозначим ω_f, ω_g циклические векторы, связанные соответственно с f и g:

$$f(A) = (\omega_f, \pi_f(A)\,\omega_f),\ g(A) = (\omega_g, \pi_g(A)\,\omega_g)$$

для всех $A \in \mathcal{U}$. Тогда существует унитарный элемент $u \in \mathcal{U}$, такой, что

$$\pi_f(u)\,\omega_f = \omega_f,\ \pi_g(u)\,\omega_g = -\,\omega_g. \qquad (5.13)$$

Из приведенной леммы сразу следует, что если α-автоморфизм $\mathcal{U}$ унитарно нереализуем в π_f, то существует самосопряженный элемент $x \in \mathcal{U}$ единичной нормы, такой, что

$$\pi_f(x)\,\omega_f = \omega_f,\ \pi_f(x^\alpha)\,\omega_f = -\,\omega_f. \qquad (5.14)$$

Он равен $x = (1/2)\,(u + u^+)$. Здесь было использовано равенство

$$(\omega_f, \pi_f(x^\alpha)\,\omega_f) = (\omega_g, \pi_g(x)\,\omega_g). \qquad (5.15)$$

Из (5.14), очевидно, следует (5.12).

Результат несколько парадоксален, потому что степень нарушения симметрии не зависит ни от какого параметра, например от константы связи нарушающего симметрию взаимодействия. Смысл теоремы 2 состоит в том, что для систем с бесконечным числом степеней свободы всегда существует наблюдаемая с неинвариантным вакуумным средним, измерение которой позволит сказать о самом факте нарушения симметрии, независимо от малости соответствующего взаимодействия.

Приведенная теорема относится к двум случаям нарушения симметрии для систем с бесконечным числом степеней свободы: 1) гамильтониан инвариантен относительно α-преобразования, а вакуум неинвариантен; тогда говорят о спонтанном нарушении симметрии, поскольку независимость значения неинвариантного среднего от параметра нарушения совпадает с самим понятием спонтанного нарушения симметрии (подробное обсуждение спонтанного нарушения симметрии см. в § 6); 2) гамильтониан неинвариантен относительно α-преобразования.

Как отмечалось в гл. 1, для систем с конечным числом степеней свободы автоморфизмы алгебры наблюдаемых всегда представимы унитарными операторами. Следовательно, в обычной квантовой механике таких наблюдаемых нет. В гильбертовом пространстве состояний всегда можно (по крайней мере для компактных групп) найти инвариантный вектор, такой, что $f^{\alpha}(A) = f(A)$, $A \in \mathcal{U}$.

Если α-преобразование не коммутирует с гамильтонианом, можно определить семейство унитарных операторов, например, вида $U(t, \alpha) = \exp i\alpha \int_V j^0(\mathbf{x}, t)\, d^3x$, и тогда в каждый момент времени $f^{\alpha}(A) = f(A)$. Таким образом, нарушение симметрии в квантовой механике связано не столько с внутренним свойством самой системы (наличие неинвариантной классической характеристики), сколько с выбором состояния. Если взята неинвариантная волновая функция, то для наблюдаемой $\hat{A}$, оператор которой не коммутирует с оператором $U(\alpha)$, среднее $\langle\psi | \hat{A} | \psi\rangle \neq \langle\psi| \hat{A}_{\alpha} |\psi\rangle$. Но если система будет приготовлена в инвариантном состоянии, то такой наблюдаемой не найдется. В случае же бесконечного числа степеней свободы нарушение симметрии не зависит от способа приготовления (или измерения) состояния, поскольку в гильбертовом пространстве состояний системы нет инвариантной волновой функции (для преобразований, коммутирующих с трансляциями — инвариантного вакуума).

Возникает вопрос: как описывать известные нарушения симметрии в теории элементарных частиц, такие, как нарушения симметрии относительно P-, C-, CP-отражений, $SU(3)$-, $SU(2)$-преобразований и т. п.? Связаны ли эти нарушения с необходимостью использования квантовополевого описания элементарных частиц на языке систем с бесконечным числом степеней свободы и с неинвариантностью вакуума, или они связаны с особенностями приготовления и наблюдения соответствующих состояний?

Наконец, отметим еще одно различие между неинвариантностью квантовомеханических средних $\langle\psi | \hat{A} | \psi\rangle$, когда автоморфизмы можно выразить через унитарные операторы, и неинвариантностью $f(A) = \langle\psi | \pi_0(A) | \psi\rangle$ для бесконечных систем. Унитарный оператор $U(\alpha)$ можно (по теореме Стоуна) представить в виде $\exp i(k + \varepsilon L)\alpha$, где k коммутирует с $\hat{A}$. Неинвариантное среднее зависит от параметра ε, так что при малых ε можно ограничиться инфинитезимальными преобразованиями этого среднего.

Неинвариантность вакуумных средних для систем с бесконечным числом степеней свободы связана с отсутствием представления автоморфизма алгебры унитарным оператором, и здесь зависимость от параметра малости нарушающего симметрию взаимодействия, вообще говоря, пропадает.

Выше приводилось доказательство теоремы Коулмена для группы внутренних калибровочных преобразований с генераторами, имеющими вид интегралов от нулевой компоненты 4-вектора тока. Можно доказать ряд более общих теорем, которые тоже называются теоремами Коулмена [35]. Приведем их формулировки без доказательств.

Теорема 3. Пусть $t^{\mu\alpha}$ — пуанкаре-ковариантное тензорное поле, преобразующееся по унитарному представлению группы Пуанкаре

$$U(a\,\Lambda)\,t^{\mu\alpha}(x)\,U^{-1}(a,\Lambda) = (\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu}\,D^{\alpha}_{n}(\Lambda^{-1})\,t^{\nu n}(\Lambda x + a), \quad (5.16)$$

где $D^{\alpha}_{n}(\Lambda^{-1})$ — некоторое конечномерное представление группы Лоренца $L^{\uparrow}_{\downarrow}$. Тогда, если выполнены условия:

$$\int d^3x\,(\omega_0\,|\,[t^{0\alpha}(x), \pi_0(A)]\,|\,\omega_0) = 0 \quad (5.17)$$

для всех α, всех $A \in \mathcal{U}$ и одного x^0 или

$$\int d^3x\,(\omega_0\,|\,[t^{0\alpha}(x),\ \partial_\nu t^{\nu n-t}\ (f)]\,|\,\omega_0) = 0 \quad (5.18)$$

для всех α, n, всех $f \in D\ (R^4)$ (здесь $D\ (R^4)$ — пространство бесконечно дифференцируемых пробных функций с компактным носителем в R^4), « + » знак эрмитова сопряжения, — то

$$\square\,\partial_\mu t^{\mu\alpha}(x) = 0 \quad (5.19)$$

для всех α, если есть поля с нулевой массой;

$$\partial_\mu t^{\mu\alpha}(x) = 0 \quad (5.20)$$

для всех α, если нет полей с массой, равной нулю.

В качестве $t^{\mu\alpha}(x)$ можно взять плотности тока, нековариантные относительно пространственных трансляций (явно зависящие от координаты x_μ), вида

$$t^{\mu\alpha}_{H}(x) = \Sigma_r\, P^{\mu\alpha}_{r}\,\Phi_r(x), \quad (5.21)$$

где $P^{\mu\alpha}_{r}(x)$ — полиномы по x; $\Phi_r(x)$ — трансляционно-ковариантные поля, поэтому вместо (5.16) имеем

$$U(\Lambda)\ t^{\mu\alpha}_{H}(x)\ U^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu}\,D\,(\Lambda^{-1})^{\alpha}_{n}\ t^{\nu n}_{H}(\Lambda x). \quad (5.22)$$

В качестве примеров тензорных плотностей можно рассмотреть: тензорную плотность, связанную с преобразованиями Лоренца:

$$M^{\mu\nu\lambda}(x) = x^{\nu}\,T^{\mu\lambda}(x) - x^{\lambda}\,T^{\mu\nu}(x); \quad (5.23)$$

масштабный ток (группа масштабных преобразований)

$$d^{\mu}(x) = x_{\nu}\,T^{\mu\nu}(x); \quad (5.24)$$

специальные конформные токи

$$C^{\mu\nu}(x) = (2\ x^{\nu}x_{\lambda} - x^2\delta^{\nu}_{\lambda})\ T^{\mu\lambda}(x), \quad (5.25)$$

где $T^{\mu\nu}$ — исправленный (по Каллану, Коулмену, Джекиву) тензор энергии-импульса [36].

Для $t^{\mu m}_{H}$ справедлива следующая теорема Коулмена [35].

Теорема 4. Если

$$\int d^3x\,(\omega_0|\ [t^{0\alpha}_{H}(x),\ \pi^0\ (A)]\,|\,\omega_0) = 0 \quad (5.26)$$

для всех α, $A \in \mathcal{U}$, всех x^0 или

$$\int d^3x\,(\omega_0\,|\,[t_H^{0\alpha}(x),\ \partial_\mu t_H^{\mu n+}(f)]\,|\,\omega_0) = 0, \tag{5.27}$$

для всех α, n, всех $f \in D(R^4)$, всех x^0, то справедливо равенство

$$[P_\nu,\ [P^\nu,\ \partial_\mu t_H^{\mu\alpha}(f)]] = 0 \tag{5.28}$$

для всех α. Здесь P_ν — генераторы пространственно-временных трансляций Из (5.21) имеем

$$\partial_\mu t^{\mu\alpha}(x) = \sum_r Q_r^\alpha(x)\,\Psi_r(x), \tag{5.29}$$

где $Q_r^\alpha(x)$ — c-числовые полиномы по x; $\Psi_r(x)$ — локальные операторы поля. Тогда условие (5.28) эквивалентно

$$\Box\ \Psi_r(x) = 0. \tag{5.30}$$

Если в теории нет безмассовых полей, то (5.28) заменяют равенством

$$\partial_\mu t_H^{\mu\alpha}(x) = 0. \tag{5.31}$$

Для конформных токов (масштабного и специального конформного) можно получить более сильную теорему.

Теорема 5. Если токи d^μ и $C^{\mu\nu}$ заданы формулами (5.24), то утверждения:

$$\begin{gathered}\int d^3x\,[(d^0(x)\ \omega_0\,|\,F_0\pi_0(A)\ \omega_0) - \\ -(\pi_0(A^+)\ \omega_0\,|\,F_0 d^0(x)\ \omega_0)] = 0\end{gathered} \tag{5.32}$$

для всех $A \in \mathcal{U}$ и всех x^0 (или для тока $C^{0\nu}(x)$);

$$\begin{gathered}\int d^3x\,[(C^{0\nu}(x)\,\omega_0\,|\,F_0\pi_0(A)\,\omega_0) - \\ -(\pi_0(A^+)\,\omega_0\,|\,F_0 C^{0\nu}(x)\,\omega_0)] = 0\end{gathered} \tag{5.33}$$

для всех ν, $A \in \mathcal{U}$, всех x^0;

$$\begin{gathered}\int d^3x\,[(d^0(x)\,\omega_0\,|F_0 T_\rho^\rho(f)\,\omega_0) - \\ -(T_\rho^\rho(f)^+\,\omega_0\,|\,F_0 d^{0\nu}(x)\,\omega_0)] = 0\end{gathered} \tag{5.34}$$

для любого $f \in D(R^4)$, некоторого x^0 или;

$$\begin{gathered}\int d^3x\,[(C^{0\nu}(x)\ \omega_0\,|\,F_0 T_\rho^\rho(f)\ \omega_0) - \\ -(T_\rho^\rho(f)^+\,\omega_0\,|\,F_0 C^{0\nu}(x)\ \omega_0)] = 0\end{gathered} \tag{5.35}$$

для некоторого $\nu \in (0, 1, 2, 3)$, некоторого x^0, всех $f \in D(R^4)$;

$$\partial_\mu d^\mu(x) = T_\mu^\mu(x) = 0,\ \ \partial_\mu C^{\mu\nu}(x) = 2x^\nu\,T_\mu^\mu(x) = 0, \tag{5.36}$$

эквивалентны (соответственно для каждого тока).

В приведенных соотношениях F_0-проектор на состояние с ненулевой массой равен

$$F_0 = \int d^4E(p) = 1 - E_0, \qquad (5.37)$$
$$p^2 > 0$$
$$p^0 > 0$$

где E_0 — проектор на подпространство состояний с нулевой массой.

В отсутствие состояний с нулевой массой $F_0 = 1$. Однако при наличии конформной инвариантности состояния с $m = 0$ играют существенную роль, поэтому случай $F_0 = 1$ не представляет интереса.

Близкими к теоремам Коулмена являются теоремы Окубо [35, 37].

Теорема 6. Пусть $t^\alpha(x)$ — пуанкаре-ковариантное тензорное поле, для которого выполнено соотношение (5.16). Если

$$\int d^3x\, (\omega_0 | [t^\alpha(x), \ \pi_0(A)] | \omega_0) = 0 \qquad (5.38)$$

для всех α, всех $A \in \mathcal{U}$, некоторого x^0 или

$$\int d^3x\, (\omega_0 | [t^\alpha(x), \ t^{\beta +}(f)] | \omega_0) = 0 \qquad (5.39)$$

для всех α, β, всех $f(x) \in D(R^4)$, некоторого x_0, то

$$\Box\, t^\alpha(x) = 0. \qquad (5.40)$$

Доказательство. Определим $t^{\mu\nu\alpha}(x) = g^{\mu\nu} t^\alpha(x)$, Тогда в силу (5.39)

$$\int d^3x \left(\omega_0 \left| \left[t^{0\nu\alpha}(x), \ \partial_k t^{k\sigma\beta +}(f)\right] \right| \omega_0\right) = 0$$

для всех ν, α, σ, β. Применяя теорему Коулмена (теорема 3), получаем

$$\partial^\nu \Box\, t^\alpha(x) = 0, \qquad (5.41)$$

т. е. $\Box t^\alpha(x) = A$ не зависит от x. В то же время A коммутирует с операторами, отделенными пространственноподобным интервалом x. Так как A не зависит от x, то A коммутирует с любым элементом алгебры, и, если рассматриваемое представление неприводимо, то A есть c-число, т. е. $\Box t^\alpha(x) = (\omega_0 | \Box t^\alpha(x) | \omega_0) = \Box\, (\omega_0 | t^\alpha(x) | \omega_0) = 0$ в силу трансляционной инвариантности вакуума.

Если в теории нет полей с массой, равной нулю, то $t^\alpha(x) = (\omega_0 | t^\alpha(x) | \omega_0)$ и вместо (5.40) получаем $t^\alpha(x) = 0$ в силу отсутствия ненулевого пуанкаре-инвариантного вектора.

В качестве $t^\alpha(x)$ можно взять вектор тока $j^\alpha(x)$. Тогда при отсутствии безмассовых полей из теоремы Окубо следует, что вакуум не может быть состоянием с нулевым током, т. е. $\int j^\alpha(\mathbf{x}, t)\, d^3x | \omega \rangle \neq 0$ ($\alpha = 0, 1, 2, 3$), если имеется теория, в которой фигурирует ненулевой оператор плотности тока $j^\alpha(\mathbf{x}, t)$. Это относится как к электромагнитным, так и адронным и другим токам. Из теоремы Окубо также следует, что в квантовой теории поля не могут быть точными группы симметрии, смешивающие изотопический (или унитарный) и обычный спины [37]. Так, киральная группа U (6) имеет генераторы

$$X_{\mu}^{(\alpha)}(t)=\int\limits_{x_0=t} d^3x\,[\psi(x)\,\gamma_{\mu}\,(1+\gamma_5)\,\lambda^{(\alpha)}\,\psi(x)],$$

$$Y_{\mu}^{(\alpha)}(t)=\int d^3x[\,\overline{\psi}(x)\,\gamma_{\mu}\,(1-\gamma_5)\,\lambda^{(\alpha)}\,\psi(x)];$$

где $\lambda^{(\alpha)}$ — матрицы Гелл-Мана; γ_{μ} — матрицы Дирака, и вакуум не может быть состоянием, инвариантным относительно $X_{\mu}^{(\alpha)}$, $Y_{\mu}^{(\alpha)}$ при любом $\mu=0,\ 1,\ 2,\ 3$.

Теорема Окубо доказывается и для трансляционно-нековариантных полей вида (5.17). Тогда (5.40) заменяется на $\Box\,\Phi_r(x)=0$; где $\Phi_r(x)$ удовлетворяет (5.21). При отсутствии безмассовых полей имеем снова $t^{\mu}(x)=0$.

В теореме 6 говорится о следствиях инвариантности вакуума относительно генераторов некоторой группы при всех пространственно-временных индексах. Однако уже инвариантность вакуума относительно только пространственных (а не пространственно-временных) компонент приводит к тому, что справедлива следующая теорема.

Теорема 7. Пусть $t^{\mu m}(x)$ ($\mu=0,\ 1,\ 2,\ 3$; $m=1,\ 2,\ 3$) удовлетворяет (5.16). Тогда, если

$$\int d^3x\,(\omega_0|\;[t^{im}(x);\;\;\pi_0(A)]|\cdot\omega_0)=0 \tag{5.42}$$

для всех $i,\ m=1,2,3$, для всех $A\in\mathcal{U}$, некоторого x^0 или

$$\int d^3x\,(\omega_0|\;[t^{im}(x),\;\;t^{\nu n+}(f)]\,|\,\omega_0)=0 \tag{5.43}$$

для всех $i,\ m,\ \nu,\ n$, всех $f(x)\in D\,(R^4)$, некоторого x^0, то

$$\Box\,[\partial^{\mu}\,t^{\nu m}(x)-\partial^{\nu}\,t^{\mu m}(x)]=0. \tag{5.44}$$

Доказательство. Определим $t^{\mu\nu m}(x)=\partial^{\mu}t^{\nu m}(x)-\partial^{\nu}t^{\mu m}(x)$. Тогда (5.43) дает

$$\int d^3x\,\bigl(\omega_0\,\bigl|\,[\,t^{\mu\nu m}(x),\;t^{k\sigma n}(f)]\,\bigr|\,\omega_0\bigr)=0$$

для любого $\mu,\ \nu,\ m,\ k,\ \sigma,\ n$. Применяя теорему 6, получим

$$\Box\,t^{\mu n m}(x)=0. \tag{5.45}$$

Королларий. Если нет безмассовых полей, то утверждения

$$\int d^3x\,(\omega_0\,|\,[\,t^{im}(x),\;\;\pi_0(A)]\,|\,\omega_0)=0 \tag{5.46}$$

для всех $i,\ m,\ A\in\mathcal{U}$ и некоторого x_0;

$$\int d^3x_i(\omega_0\,|\,[\,t^{im}(x),\;t^{\nu n+}(f)\,]\,|\,\omega_0)=0 \tag{5.47}$$

для всех $i,\ m,\ \nu,\ n$, всех $f(x)\in D\,(R^4)$ и некоторого x_0;

$$\partial^{\mu}\,t^{\nu m}(x)-\partial^{\nu}\,t^{\mu m}(x)=0 \tag{5.48}$$

для всех μ, ν, m;

$$\int d^3x\,[t^{im}(x),\ \pi_0(A)] = 0 \tag{5.49}$$

для всех i, m, всех $A \in \mathcal{U}$, всех x_0 эквивалентны.

Следствие (5.49) $\to$ (5.46), очевидно, следствие (5.47) $\to$ (5.48) вытекает из теоремы 7 так же, как в теореме 6. Следствие (5.49) вытекает из (5.48), поскольку из (5.48) имеем

$$x^j\,[\partial^i t^{jm}(x) - \partial^j t^{im}(x)] = 0, \quad i \neq j. \tag{5.50}$$

Рассматривая пространственный интеграл от коммутатора (5.50) с $\pi_0(A)$ и интегрируя по частям, получаем (5.49).

Таким образом, преобразование симметрии, генерируемое $\int d^3x t^{im}(x)$, оказывается единичным (тривиальным).

В качестве $t^{im}(x)$ можно взять трансляционно-нековариантный тензор вида (5.21). Условие (5.48) тогда заменяется на

$$[P_\lambda,\ [P^\lambda,\ \partial^\mu t^{\nu m}(x) - \partial^\nu t^{\mu m}(x)]] = 0.$$

При отсутствии безмассовых полей королларий к теореме 7 имеет тот же вид, что и в случае ковариантных $t^{im}(x)$.

§ 6. ТЕОРЕМА ГОЛДСТОУНА В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

Выше было показано, что вакуум неинвариантен, если неинвариантен лагранжиан. Однако вакуум может быть неинвариантным и при инвариантном лагранжиане. Такое нарушение симметрии называется спонтанным. Важным следствием последнего является наличие в теории частиц с нулевой массой. В гл. 1 приводилась теорема Голдстоуна в аксиоматической теории поля, утверждающая, что симметрия не может быть спонтанно нарушенной, если в теории имеются только частицы с ненулевой массой. В настоящем параграфе, наоборот, сразу предположим, что симметрия спонтанно нарушена, и покажем, что при этом должны появиться частицы с нулевой массой.

Теорема. В локальной трансляционно-инвариантной теории поля с сохраняющимися локальными релятивистскими 4-векторами тока $j^i_\mu(x)$ ($i = 1, \ldots, n$; $\mu = 0, \ldots, 3$) и вакуумом, неинвариантным относительно непрерывной группы симметрии, генераторами которой являются заряды $Q^i = \int d^3x j^i_\mu(x)$, обязательно имеются частицы с массой, равной нулю.

Другими словами, если выполняются следующие условия:

$$\partial^\mu j^i_\mu(x) = (\tag{6.1}$$

(сохранение тока),

$$\langle 0 \mid [Q^i,\ \Phi(\mathbf{x},\ t)] \mid 0\rangle = \delta\Phi \neq 0 \tag{6.2}$$

(неинвариантность вакуума при некотором i), (здесь $\Phi(\mathbf{x}, t)$ — локальный оператор скалярного поля; μ — пространственно-временной индекс, принимающий значения 0, 1, 2 3; i — внутренний индекс), то в теории имеются частицы с массой, равной нулю. Ниже увидим, что эти частицы дают вклад в матричный элемент

$$\langle 0 | [j_\mu^{(i)}(x), \Phi(y)] | 0 \rangle.$$

В случае абелевой группы внутренней симметрии (симметрия с генератором Q^i — внутренняя, так как Q^i коммутирует с операторами пространственной трансляции, поскольку Q^i не зависит от $\mathbf{x}$), имеется лишь один генератор Q, в качестве которого можно взять, например, гиперзаряд. Докажем теорему сразу для неабелевой группы, чтобы охватить такие физически важные случаи, как изотопическая группа $SU(2)$ [39], группы $SU(3)$, $SU(3) \otimes SU(3)$ и т. п. При этом в качестве $\Phi(\mathbf{x}, t)$ можно взять набор скалярных эрмитовых полей $\Phi^1(x), \ldots, \Phi^n(x)$, преобразующих по представлению соответствующей группы:

$$\langle 0 | [Q^i, \Phi^j(\mathbf{x}, t)] | 0 \rangle = \tau^{ijk} \langle 0 | \Phi^k(\mathbf{x}, t) | 0 \rangle \neq 0 \qquad (6.3)$$

при некоторых i, k. Здесь τ^{ijk} — вполне антисимметричная функция трех индексов.

В общем случае $\Phi(\mathbf{x}, t)$ не обязательно должен быть оператором основного поля, а может быть комбинацией (билинейной или более сложной) основных полей.

Рассмотрим спектральное разложение матричного элемента $\langle 0 | [j_\mu^i(x), \Phi^j(y)] | 0 \rangle$:

$$\langle 0 | [j_\mu^{(i)}(x), \Phi^j(y)] | 0 \rangle = \int \rho_\mu^{(ij)}(p) \exp[i p (x - y)] d^4 p, \qquad (6.4)$$

$$\rho_\mu^{ij}(p) = (2\pi)^4 \sum_g \delta^4(p + p_g) \langle 0 | j_\mu^i(0) | g \rangle \langle g | \Phi^j(0) | 0 \rangle -$$

$$- \delta^4(p_g - p) \langle 0 | \Phi^j(0) | g \rangle \langle g | j_\mu^{(i)}(0) | 0 \rangle \Theta(p_g^0) \, \Theta(p_g^2). \qquad (6.5)$$

Здесь

$$\theta(p) = \begin{cases} 1 \text{ при } p > 0; \\ 0 \text{ при } p < 0. \end{cases}$$

Введение функций $\theta(p)$ позволяет учесть положительность энергии и времениподобную природу вектора p_g^2 для промежуточных состояний.

Из соображений релятивистской инвариантности имеем

$$\rho_\mu^{ij}(p) = \varepsilon(p_0) \, p_\mu \rho_1^{ij}(p^2) + p_\mu \rho_2^{ij}(p^2); \qquad (6.6)$$

$$\varepsilon(p_0) = \begin{Bmatrix} 1, & p_0 \geqslant 0; \\ -1, & p_0 < 0. \end{Bmatrix} \qquad (6.7)$$

В то же время из сохранения тока (6.1) следует

$$p^\mu \rho_\mu^{ij}(p) = 0. \qquad (6.8)$$

Оценивая (6.8) для $p^0 > 0$ и $p^0 < 0$, получаем

$$p^2 [\rho_1^{ij}(p^2) + \rho_2^{ij}(p^2)] = 0;$$
$$p^2 [\rho_2^{ij}(p^2) - \rho_1^{ij}(p^2)] = 0. \tag{6.9}$$

Релятивистски ковариантное решение уравнений (6.9) в классе обобщенных функций имеет вид

$$\rho_1(p^2) = c_1\delta(p^2);$$
$$\rho_2(p^2) = c_2\,\delta(p^2), \tag{6.10}$$

где c_1 и c_2 — некоторые постоянные. Наличие $\delta(p^2)$ в случае c_1 и c_2, не равных нулю, и есть то, что требовалось доказать. Действительно, (6.4) не равно нулю лишь за счет промежуточных состояний с нулевой массой. Отметим, что в (6.6), казалось бы, можно добавить член вида $c_3 p_\mu \delta(p_\mu)$, соответствующий «вакуумоподобным» промежуточным состояниям, однако после интегрирования в (6.4) вклад этих состояний в релятивистской теории равен нулю (в нерелятивистской теории они могут давать отличный от нуля вклад [38]).

Покажем, что из условия неинвариантности вакуума $c_1 \neq 0$. В самом деле:

$$\rho_0^{ij}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ip_0 t)\,\rho_0^{ij}(p)\,dp_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ip_0 t)\,\{\varepsilon(p_0)\,p_0\,c_1\delta(p^2) +$$
$$+ p_0 c_2 \delta(p^2)\}\,dp_0 = c_1\cos|\mathbf{p}|\,t + i\,c_2\sin|\mathbf{p}|\,t = 2\pi\int d^3x\,\exp(i\mathbf{px}) \times$$
$$\times \langle 0|\,[j_0^i(x),\ \Phi^j(0)]\,|0\rangle. \tag{6.11}$$

Здесь была использована формула

$$\delta(p^2) = \delta(|\mathbf{p}| - p_0)/2\,|\mathbf{p}| + \delta(|\mathbf{p}| + p_0)/2\,|\mathbf{p}|. \tag{6.12}$$

При $\mathbf{p} = 0$ получаем

$$\int d^3x \langle 0|\,[j_0^i(\mathbf{x},\ t),\ \Phi^j(0)]\,|\,0\rangle = c_1/2\pi. \tag{6.13}$$

Здесь c_1 не зависит от времени, поскольку в силу локальности и сохранения тока (6.1)

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{c_1}{2\pi} = \int d^3x\,\langle 0|\,[\nabla\,\mathbf{j}^i(\mathbf{x}, t), \Phi^j(0)]\,|\,0\rangle = 0. \tag{6.14}$$

При выполнении соотношения (6.3), очевидно, отличие c_1 от нуля означает, что $\langle 0|\ \Phi^k(\mathbf{x}, t)|\ 0\rangle \neq 0$ для некоторого k. Каков смысл произвольной постоянной c_2? Для ответа на этот вопрос достаточно с помощью (6.4) перейти в x-представление. Тогда

$$\langle 0|\ [j_\mu^i(x), \Phi^j(y)]\,|\,0\rangle = c_1 i\,(2\pi)^3\partial_\mu D\,(x - y) + c_2\Delta(x-y), \tag{6.15}$$

где $D(x - y)$ — перестановочная функция Паули—Иордана [30] для поля с $m = 0$, а $\Delta(x - y)$ — некоторая функция, неисчезающая для x и y, отделенных пространственноподобным интервалом, что связано с отсутствием члена $\varepsilon(p_0)$ в $\rho_2^{ij}(p^2)$ (аналогично функциям $D^+(x-y)$, $D^-(x-y)$[30]). Тем самым требование локальности дает $c_2 = 0$.

Приведенное доказательство теоремы Голдстоуна для релятивистского случая можно применить и к нерелятивистской теории (при этом можно отказаться от явной релятивистской ковариантности, но не локальности). Для этого введем некоторый внешний времениподобный вектор n_μ с компонентами (1, 0, 0, 0). Тогда вместо (6.6) для $\rho_\mu^{ij}(p)$ получим

$$\rho_\mu^{ij}(p) = p_\mu \rho_1^{ij}(p^2, np) + n_\mu \rho_2^{ij}(p^2, np) + c_3 n_\mu \delta^4(p_\mu). \quad (6.16)$$

Сохранение тока приводит к

$$\rho_\mu^{ij}(p) = p_\mu \delta(p^2) \rho_3^{ij}(np) + [p^2 n_\mu - p_\mu(np)] \rho_4^{ij}(p^2, np) + c_5 n_\mu \delta^4(p), \quad (6.17)$$

поскольку таков вид наиболее общей структуры, удовлетворяющей функциональному уравнению $p^\mu \rho_\mu^{ij}(p) = 0$. Первый член в (6.17), очевидно, соответствует безмассовой частице. Второй член дает ненулевой вклад в (6.4) и (6.3), только если $\rho_4^{ij} = \rho^{ij}(p^2, np)/|\mathbf{p}|^2$. В самом деле, в (6.3)

$$\langle 0|[Q^i, \Phi^j(y)]|0\rangle = \int \exp[ip(x-y)]\, \mathbf{p}^2 \rho_4^{ij}(p^2) dp d\mathbf{x} =$$
$$= \int \exp[ip_0(x_0-y_0)] \exp(i\mathbf{p}\mathbf{y})\, \mathbf{p}^2 \rho_4^{ij}(p^2) \exp(-i\mathbf{p}\mathbf{x})\, d\mathbf{x} dp =$$
$$= \int \exp[ip_0(x_0-y_0)] \exp(i\mathbf{p}\mathbf{y}) (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p})\, \mathbf{p}^2 \rho_4^{ij}(p^2)\, d\mathbf{p} dp_0. \quad (6.18)$$

Это выражение отлично от нуля при $\rho_3^{ij} = c_5 = 0$. В то же время локальность теории требует обращения в нуль коммутатора Φ^j с $(\partial/\partial t)Q^i$; следовательно, если в (6.18) $\rho_4^{ij}(p^2)$ заменить на $p_0\rho_4^{ij}(p^2)$, то интеграл должен исчезнуть. Последнее означает, что $p_0 = 0$ при $\mathbf{p} = 0$ (так как $\rho \neq 0$ при $\mathbf{p} = 0$), т. е. отсутствие щели в спектре энергий промежуточных состояний (p_μ — времениподобный вектор).

Таким образом, в локальной нерелятивистской теории спонтанное нарушение симметрии обязательно связано с голдстоуновскими (бесщелевыми) возбуждениями. Последний член в (6.16) дает постоянный вклад в (6.4), пропорциональный n_μ. Вклад в (6.3) будет конечен, лишь если $c_3 \sim 1/V$, где V — объем. Однако физический смысл такого вклада от изолированного собственного состояния энергии-импульса с нулевыми значениями (вакуумоподобного решения) неясен и потому для реальных задач естественно считать $c_3 = 0$.

При доказательстве теоремы Голдстоуна в настоящем параграфе использовались такие понятия, как сохраняющийся ток и заряд, представляющий собой интеграл по пространству от плотности нулевой компоненты. Однако в случае неинвариантного вакуума (см. § 5) заряду нельзя придать смысл оператора в гильбертовом пространстве, что как будто делает наши рассуждения нестрогими.

Но в доказательстве теоремы Голдстоуна существование заряда как оператора в гильбертовом пространстве и не требуется: достаточно лишь знать его коммутационные соотношения с полем ($[Q, \Phi]$); другими словами, достаточно его существования как «оператора над операторами $\Phi(x)$» (существование автоморфизма). «Физический» уровень строгости в отличие от аксиоматического состоит лишь в «свободном» манипулировании с операторами $j_\mu(x)$, $\Phi(x)$ и т. п. без уточнения их строгого математического смысла.

§ 7. ТЕОРЕМА ГОЛДСТОУНА В СЛУЧАЕ НЕИНВАРИАНТНОГО ЛАГРАНЖИАНА

Голдстоуновские частицы приобретают ненулевую массу, если на спонтанное нарушение симметрии накладывается дополнительное неспонтанное, т. е. полный лагранжиан можно разбить на две части — инвариантную и неинвариантную. Вакуумное состояние инвариантной части лагранжиана предполагают неинвариантным, или, иначе, имеется спонтанное нарушение симметрии для этой части лагранжиана. Согласно теореме Голдстоуна, при этом существуют частицы с нулевой массой. Неинвариантную часть полного лагранжиана можно учесть по теории возмущений; она приводит к появлению массы у голдстоуновских частиц. Сформулируем эффект появления массы при указанном поэтапном нарушении симметрии в виде следующей теоремы.

Теорема. В локальной теории поля с частично сохраняющимся током и вакуумом, неинвариантным при выключении неинвариантного взаимодействия, должны присутствовать голдстоуновские бозоны с конечной массой.

Для доказательства теоремы рассмотрим [40] лагранжиан с плотностью $\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \varepsilon_i \Phi^i$, где $\mathscr{L}_0$ инвариантен относительно некоторой, вообще говоря, неабелевой группы G; ε_i — постоянные, а Φ^i — локальные поля, образующие базис определенного представления группы G; Φ^i необязательно являются фундаментальными полями, они могут быть некоторыми (вообще говоря, нелинейными) комбинациями этих полей. Токи j^a_μ ($a = 1, \ldots, n$ и $\mu = 0, 1, 2, 3$), сохраняющиеся при $\varepsilon_i = 0$, при $\varepsilon_i \neq 0$ удовлетворяют условию частичного сохранения и коммутационным соотношениям, связанным с преобразованием Φ^i по представлению группы:

$$\partial^\mu J^a_\mu = \varepsilon_i \tau^a_{ij} \Phi^j, \tag{7.1}$$

$$[\int J^a_0(\mathbf{x}, t) d^3x, \Phi^i(y, t)] = \tau^a_{ij} \Phi^j(\mathbf{y}, t), \tag{7.2}$$

где τ^a_{ij} — вещественная антисимметричная матрица генератора τ^a. Определим одно- и двухточечные функции

$$\lambda^i \equiv \langle 0 | \Phi^i | 0 \rangle; \tag{7.3}$$

$$\Delta^{ij}(p^2) \equiv \mathrm{i} \int d^4x \exp(-\mathrm{i}px) \langle 0 | T\{\Phi^i(x), \Phi^j(0)\} | 0 \rangle, \tag{7.4}$$

где T — знак T-произведения [30].

Предположим, что в силу неинвариантности вакуума некоторые λ^i не равны нулю. Тогда, взяв вакуумное среднее от обеих частей (7.1), получим

$$\langle 0 \,|\, \partial^\mu J^a_\mu \,|\, 0\rangle = \partial^\mu \langle 0 \,|\, J^a_\mu (x) \,|\, 0\rangle = 0, \tag{7.5}$$

поскольку из-за трансляционной инвариантности вакуума ожидание $\langle 0 \,|\, J^a_\mu (x) \,|\, 0\rangle = \langle 0 \,|\, J^a_\mu (0) \,|\, 0\rangle$ не зависит от x. Используя определение (7.3), найдем

$$\varepsilon_i \tau^a_{ij} \lambda^j = 0. \tag{7.6}$$

Введем обозначения

$$\varepsilon^a_j \equiv \tau^a_{jk} \varepsilon_k, \; \lambda^a_j \equiv \tau^a_{jk} \lambda^k. \tag{7.7}$$

Умножим (7.4) на ε^a_i. Тогда

$$\varepsilon^a_i \Delta^{ij} (p^2) = \varepsilon_k \tau^a_{ik} \Delta^{ij} (p^2) = \mathrm{i} \int d^4x \exp (-\mathrm{i}px) \times \times \langle 0 \,|\, T \{\tau^a_{ik} \varepsilon_k \Phi^i (x), \; \Phi^j (0)\} \,|\, 0\rangle. \tag{7.8}$$

В силу (1.7) правая часть (7.8) есть $\mathrm{i} \int d^4x \exp (-\mathrm{i}px) \langle 0 \,|\, T\{\partial^\mu J^a_\mu (x), \varphi_j (0)\} \,|\, 0\rangle$. Интегрируя по частям, получаем

$$\varepsilon^a_i \Delta^{ij} (p^2) = \mathrm{i} \int d^4x \, (+\mathrm{i}p_\mu) \exp (-\mathrm{i}px) \langle 0 \,|\, T \{J^a_\mu (x); \Phi^i (0)\} \,|\, 0\rangle + + \int d^3 x \exp (-\mathrm{i}\mathbf{px}) \langle 0 \,|\, [J^a_0 (x), \; \Phi^j (0)] \,|\, 0\rangle. \tag{7.9}$$

Из (7.9) и (7.2) при $p_\mu = 0$ получаем

$$\varepsilon^a_i = \Delta^{(ij)-1} (0) \lambda^a_j. \tag{7.10}$$

Равенство (7.10) и есть то, что нам нужно. Действительно, если бы было $\varepsilon_i \equiv 0$, а $\lambda^i \neq 0$, то мы бы имели случай обычной теоремы Голдстоуна, поскольку $\Delta^{(ij)-1} (0) = 0$ означало бы наличие особенности $\Delta^{ij} (p^2)$ при $p^2 = 0$. Если же $\varepsilon_i \neq 0$, когда имеется нарушение симметрии в лагранжиане, то частицы с массой, равной нулю, с функцией Грина $\Delta^{ij} (p^2)$ не появляются.

В некоторых случаях [40] можно привести аргументы в пользу линейной зависимости $\Delta^{-1}_{ij} (p^2)$ от p^2, так что $\Delta^{ij} (p^2) = Z_T^{i\frac{1}{2}} (p^2 + \mu^2) Z^{j\frac{1}{2}}$, где Z^i_T, Z^j — положительные матрицы перенормировки, а μ^2 — массовая матрица. Из (7.10) видно, что $\mu^2 \to 0$ при $\varepsilon_i \to 0$.

Существование обычных голдстоуновских частиц с нулевой массой связано с тем, что $\lambda^j \neq 0$ при $\varepsilon_i \to 0$. В случае справедливости теории возмущений по ε_i (аналитичности по константе связи) это не так, и уравнения (7.6) и (7.10) имеют только нулевые решения для λ^j. Отсюда видно, что модифицированная теорема Голдстоуна при нарушении симметрии в лагранжиане относится к теориям, требующим отказа от обычной теории возмущений. Физическое различие между этой теорией и теорией возмущений обусловлено голдстоуновскими частицами.

При обсуждении теоремы Коулмена говорилось о том, что в теории с неинвариантным лагранжианом (гамильтонианом), всегда существуют некоторые наблюдаемые, среднее по вакууму от которых вообще не зависит от константы связи нарушающего симметрию взаимодействия.

В случае справедливости обсуждаемой теоремы такими наблюдаемыми будут локальные поля Ф. В общем случае это, конечно, не обязательно так, и вполне может оказаться, что $\lambda^i \to 0$ при всех $\varepsilon_i \to 0$.

Тем не менее имеются физические примеры появления массы у магнонов в ферромагнетике [17] и нарушения группы $SU(3) \otimes SU(3)$, где как раз реализуется обсуждаемая в теореме ситуация.

Экспериментальные данные физики сильных взаимодействий говорят в пользу существования особой симметрии — симметрии относительно киральной группы $SU(3) \otimes SU(3)$, которая нарушена так же, как и симметрия относительно группы $SU(3)$. Нарушение $SU(3) \otimes SU(3)$ происходит по схеме голдстоуновского нарушения: сначала есть $SU(3) \otimes SU(3)$-инвариантный лагранжиан, но вакуум неинвариантен относительно $SU(3) \otimes SU(3)$, он инвариантен лишь относительно группы $SU(3)$. Неинвариантность вакуума приводит к отсутствию классификации состояний по мультиплетам $SU(3) \otimes SU(3)$, имеются лишь мультиплеты $SU(3)$. Симметрия лагранжиана относительно $SU(3) \otimes SU(3)$ проявляется в наличии голдстоуновских мезонов, масса которых возникает (см. (7.10)) за счет явного нарушения группы $SU(3) \otimes SU(3)$ путем добавления к лагранжиану неинвариантной добавки. Эта добавка в схеме Гелл-Мана — Оукса — Реннера [79] инвариантна относительно группы $SU(2) \otimes SU(2)$, так что масса голдстоуновских мезонов, отождествляемых с π-мезонами, остается равной нулю. Последний шаг в схеме состоит в добавлении $SU(2) \otimes SU(2)$ неинвариантной части, при этом π-мезоны тоже приобретают массу.

ГЛАВА 4

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ МОДЕЛИ СПОНТАННОГО НАРУШЕНИЯ СИММЕТРИИ

§ 8. МОДЕЛЬ ГОЛДСТОУНА

В настоящей главе рассматриваются модели спонтанного нарушения симметрии в релятивистской теории. Вакуум в этой теории есть состояние, инвариантное относительно преобразований группы Пуанкаре. Поэтому ненулевые макронаблюдаемые, возникающие при спонтанном нарушении симметрии, не зависят от координат и времени. В связи с этим физическими проявлениями этих наблюдаемых могут быть такие величины, как массы элементарных частиц и константы связи.

Если же спонтанно нарушена и пуанкаре-инвариантность вакуума (определяемого, например, как основное состояние гамильтониана) при инвариантном лагранжиане, то вышеуказанные макронаблюдаемые проявятся как некоторое релятивистски-ковариантное поле. Бьеркен [41] пытался получить таким способом электромагнитное поле.

Здесь будут рассмотрены лишь модели с релятивистски-инвариантным вакуумом. Все эти модели есть в той или иной степени релятивистские обобщения известных примеров из нерелятивистской теории многих тел: теорий сверхтекучести, сверхпроводимости и т. п. Релятивизм приводит к возникновению несуществующей в теории многих тел, где всегда имеется обрезание по энергии и импульсу, трудности, связанной с устранением ультрафиолетовых расходимостей и проблемой перенормируемости теории. Поэтому неожиданным открытием последних лет явилось создание перенормируемой теории слабого и электромагнитного взаимодействий, использующей идею спонтанного нарушения симметрии, — теории Вайнберга — Салама.

Несмотря на простоту исходных идей, сама эта теория довольно сложна, поэтому сначала рассмотрим более простые модели — модель Голдстоуна, модель Намбу — Иона-Ласинио — Вакса — Ларкина, феномен Хиггса, модель Киббла, а теорию Вайнберга — Салама обсудим лишь в связи со слабыми взаимодействиями лептонов.

В случае скалярных (псевдоскалярных) полей Голдстоуном [10] был предложен простой пример нетривиального нарушения симметрии с появлением бозонов с нулевой массой. Этот пример является релятивистским аналогом теории Гинзбурга—Ландау в физике сверхпроводников [42].

Пусть имеется лагранжиан взаимодействующих заряженных скалярных полей $\varphi = (1/\sqrt{2})(\varphi_1 + i\varphi_2)$, $\varphi^* = (1/\sqrt{2})(\varphi_1 - i\varphi_2)$ вида

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi + \mu_0^2\varphi^*\varphi + (\lambda_0/6)(\varphi^*\varphi)^2 \equiv \\ &\equiv -\partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi - V(\varphi^*\varphi). \end{aligned} \tag{8.1}$$

Предположим, что $\mu_0^2 < 0$, $\lambda_0 > 0$. В квантовой теории поля лагранжиан $\mathcal{L}_0 = -\partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi + \mu_0^2\varphi^*\varphi$ с таким μ_0^2 соответствует гипотетическим тахионам, физический смысл которых в настоящее время неясен. Однако примеры из квантовой статистической физики свидетельствуют о том, что отрицательный знак μ_0^2 при наличии взаимодействия может означать неустойчивость соответствующих решений, поэтому в качестве свободных (in, out) полей следует выбирать некоторые поля, отличающиеся от φ, φ^*.

Лагранжиан (8.1) инвариантен относительно преобразования $\varphi \to \varphi \exp i\alpha$, $\varphi^* \to \varphi^* \exp - i\alpha^*$ (в частности, $R\varphi_1 = \varphi_2$, $R\varphi_2 = \varphi_1$). Функция $V(\varphi^*\varphi)$ имеет максимум при $\varphi^* = \varphi = 0$. Минимум же этой функции, соответствующий точкам устойчивости в аналогичной задаче с осциллятором, находят из условий:

$$\partial V/\partial\varphi^* = \partial V/\partial\varphi = 0, \quad \partial^2 V/\partial\varphi^2 > 0, \quad \partial^2 V/\partial\varphi^{*2} > 0. \tag{8.2}$$

В качестве $\varphi(x)$ и $\varphi^*(x)$ возьмем некоторые постоянные числа. Обозначив эти числа χ и χ^* соответственно, получим из (8.1):

$$|\chi|^2 = -3\mu_0^2/\lambda_0. \tag{8.3}$$

Итак, уже в классической теории (8.1) появляются «нетривиальные» решения $\chi \neq 0$. В квантовой теории $\chi \neq 0$ приводит к тому, что в качестве вакуумного состояния следует брать вектор $|0'\rangle$, обладающий свойством $\langle 0' | \varphi | 0'\rangle = \chi$. Последнее означает, что берется не фоковское представление полей, а некоторое неэквивалентное ему представление, в котором частицам естественно сопоставлять не поля $\varphi(x)$, а сдвинутые поля $\varphi'(x) = \varphi(x) - \chi$.

Выбирая χ вещественным (что всегда возможно из-за произвольности фазы комплексного поля φ при симметрии относительно калибровочных преобразований), можно переписать (8.1) в терминах сдвинутых полей φ_1', φ_2'

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = &-\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_1'\partial^\mu\varphi_1' + 2\mu_0^2\varphi_1'^2) - \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_2'\partial^\mu\varphi_2' + \\ &+ \frac{\lambda_0\sqrt{2}}{6}\chi\varphi_1'(\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2) + \frac{\lambda_0}{24}(\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2)^2, \end{aligned} \tag{8.4}$$

т. е. вместо двух полей с мнимой массой φ_1 и φ_2 (или φ, φ^*) получаем поле с вещественной массой $\sqrt{2}\mu_0$ и поле с нулевой массой. Лагранжиан (8.4) уже неинвариантен относительно преобразования $\varphi' \to$

$\to \varphi' \exp(\mathrm{i}\alpha)$, $\varphi'^* \to \varphi'^* \exp(-\mathrm{i}\alpha)$, которое в терминах φ_1' и φ_2' имеет вид

$$\varphi_1' \to \varphi_1' \cos\alpha - \varphi_2' \sin\alpha;\ \varphi_2' \to \varphi_2' \sin\alpha + \varphi_2' \cos\alpha. \quad (8.5)$$

В частности, $\mathscr{L}$ неинвариантен относительно замены $R\varphi_1' = \varphi_2'$ и т. п. Полю φ_1' сопоставляются частицы с положительной массой, а полю φ_2' — частицы с нулевой массой. Переход от полей φ_1 и φ_2 к полям φ_1', φ_2' в квантовой теории необходим, поскольку если бы мы пользовались только полями φ_1 и φ_2, для которых $\langle 0' | \varphi_1 | 0' \rangle \neq 0$, $\langle 0' | \varphi_2 | 0' \rangle \neq 0$, то, очевидно, вакуум $| 0' \rangle$ и одночастичные состояния вида $\varphi_1 | 0 \rangle$, $\varphi_2 | 0 \rangle$ не были бы ортогональны друг другу. На поля φ_1' и φ_2' налагается условие самосогласованности теории $\langle 0' | \varphi_1' | 0' \rangle = \langle 0' | \varphi_2' | 0' \rangle = 0$.

Итак, основными чертами модели Голдстоуна с комплексным полем являются: а) исходные поля φ и φ^* (или φ_1 и φ_2) характеризуются отрицательным значением квадрата массы (мнимой массой), физические же частицы приобретают вещественную массу и нулевую массу; б) к модели применима теорема Голдстоуна, голдстоуновскими частицами являются φ_2'; в) поля φ_1' и φ_2' взаимодействуют друг с другом, так что голдстоуновские бозоны φ_2' играют роль физических частиц; г) теория неаналитична по константе связи λ_0, что видно из приведенного выше выражения для χ.

Рассмотрим несколько подробнее вопрос о нарушении калибровочной симметрии в модели Голдстоуна. Инвариантность лагранжиана (8.1) относительно калибровочного преобразования $\varphi \to \varphi \exp \mathrm{i}\alpha$, $\varphi^* \to \varphi^* \exp - \mathrm{i}\alpha$ приводит к сохранению локального тока

$$j_\mu(x) = \mathrm{i}\varphi^*(x) \overleftrightarrow{\partial_\mu} \varphi(x). \quad (8.6)$$

Спонтанное нарушение симметрии означает

$$\langle 0 | [j_\mu(x), \varphi] | 0 \rangle \neq 0. \quad (8.7)$$

Тем не менее «след» от первоначальной симметрии остается, несмотря на ее нарушение, проявляясь в возникновении некоторой новой симметрии в терминах преобразований сдвинутых полей $\varphi'(x)$.

Пусть первоначально имеется симметрия лагранжиана $\mathscr{L}$ относительно преобразований полей $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \varphi'(x) + c \to \varphi(x) \exp \mathrm{i}\alpha = \varphi'(x) \exp \mathrm{i}\alpha + c \exp \mathrm{i}\alpha;$$

$$\varphi^*(x) \to \varphi'^*(x) \exp - \mathrm{i}\alpha + c \exp - \mathrm{i}\alpha.$$

Взяв $\alpha = \beta/c$, получим симметрию $\mathscr{L}$ относительно преобразований, которые инфинитезимально имеют вид

$$\mathrm{Re}\varphi' \to \mathrm{Re}\,\varphi' - \frac{\beta}{c}\,\mathrm{Im}\varphi';$$

$$\mathrm{Im}\,\varphi' \to \mathrm{Im}\varphi' + \beta + (\beta/c)\mathrm{Re}\varphi'. \quad (8.8)$$

Таким образом, поле $\varphi_2' = \mathrm{Im}\varphi'$ в (8.4) преобразуется неоднородно (происходит добавочный сдвиг на произвольную константу).

В голдстоуновском коммутаторе (8.7) можно написать

$$\langle 0' \,|\, [j_\mu (x),\ \varphi' (x')] \,|\, 0' \rangle \neq 0, \tag{8.9}$$

причем $\langle 0' \,|\, \varphi' (x') \,|\, 0' \rangle = 0$ в отличие от обычной формулировки теоремы Голдстоуна. Ток (8.6), выраженный в терминах φ', $\varphi^{*\prime}$, порождает генератор преобразования (8.8), так что

$$[\textstyle\int j_0 (x) d^3x,\ \varphi' (x)] = \varphi' (x) + c. \tag{8.10}$$

Выражение $j_0(x)$ содержит член вида $\partial_0 \,\mathrm{Im}\, \varphi \mathrm{Re}\varphi$, приводящий после перехода к φ' к члену $\partial_0 \,\mathrm{Im}\, \varphi c = \partial_0 \varphi_2' c$. Преобразование $\exp\left(i \dfrac{\beta}{c} \displaystyle\int \partial_0 \varphi_2' c\right) d^3x$, действуя на вакуум $|\, 0' \rangle$, переводит его в новый вакуум $|\, 0_\beta' \rangle$ с отличной от нуля плотностью голдстоуновских бозонов φ_2'. Таким образом, новая симметрия тесно связана с вырождением вакуума, и теорию со спонтанным нарушением симметрии можно также называть теорией с перестройкой симметрии [43, 44]. Отметим, однако, что поскольку новая симметрия содержит преобразование сдвига поля на постоянную, то соответствующий генератор не зависит от времени лишь для поля с нулевой массой [43]. В самом деле, для свободного поля

$$\varphi (x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \left[a (\mathbf{k}) \exp (ikx) + a^* (\mathbf{k}) \exp (-ikx)\right] d\mathbf{k}$$

преобразование $\varphi (x) \to \varphi (x) + c$ можно получить с помощью следующих преобразований:

$$\left.\begin{aligned} &Ua (\mathbf{k})\, U^{-1} = a (\mathbf{k}) + f (\mathbf{k});\\ &Ua^* (\mathbf{k})\, U^{-1} = a^* (\mathbf{k}) + f^* (\mathbf{k});\\ &f (\mathbf{k}) = (2\pi)^{3/2} \sqrt{2k_0} \exp (-ik_0 x^0)\, (c/2)\, \delta (\mathbf{k}), \end{aligned}\right\} \tag{8.11}$$

поэтому $U = \exp B$, где

$$B = \int (f^* (\mathbf{k}) a (\mathbf{k}) - f (\mathbf{k}) a^* (\mathbf{k})) d\mathbf{k}\ , \tag{8.12}$$

не зависит от времени лишь при $m = 0$, что является еще одной иллюстрацией теоремы Голдстоуна.

§ 9. МОДЕЛЬ НАМБУ — ИОНА-ЛАСИНИО — ВАКСА — ЛАРКИНА

Аналогия с теорией сверхпроводимости привела к построению в теории элементарных частиц модели фермионного поля со спонтанным нарушением симметрии в работах Намбу, Иона-Ласинио [47], Вакса и Ларкина [48]. В этой модели первоначальное поле характеризуется нулевой массой, а конечная масса фермионной частицы возникает аналогично щели в теории сверхпроводимости.

Прежде всего отметим, почему так интересны модели, в которых масса физических частиц отлична от нуля при нулевой массе затравочных полей.

Во-первых, нулевая затравочная масса приводит в случае ферми-полей к наличию особой симметрии голых полей (так называемой γ_5-инвариантности), которая нарушается при появлении массы у физических полей. Однако «след» от этой первоначальной симметрии останется: первоначальная точная симметрия физически проявится как нарушенная, а, как известно из теории сильных взаимодействий, существование нарушенной симметрии достаточно для предсказания проверяемых в эксперименте фактов. Так, экспериментальные данные в теории сильных взаимодействий говорят в пользу справедливости не просто SU (3)-симметрии, а симметрии относительно киральной группы $SU(3) \otimes SU(3)$, являющейся точной, если массы частиц равны нулю.

Во-вторых, в этих моделях ненулевая масса частиц есть функция других параметров теории, таких, как константа связи. Это подсказывает путь, идя по которому, вероятно, можно найти ответ на вопрос, почему частицы обладают определенными массами. Обычно масса считается внешним параметром теории и вопрос о ее появлении не ставится.

Исходным лагранжианом работ [47, 48] является γ_5-инвариантный лагранжиан, описывающий четырехфермионное взаимодействие фермионного поля с нулевой затравочной массой. Плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ равна

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}\gamma_\mu \partial^\mu \psi + g_0 [(\bar{\psi}\psi)^2 - (\psi\gamma_5\psi)^2], \tag{9.1}$$

где g_0 — некоторая константа связи, имеющая размерность фермионной константы слабого взаимодействия $[m^{-2}]$, которую предполагают положительной. Взаимодействие (9.1) имеет вид произведения тока на ток, как и в теории слабого взаимодействия, поскольку в силу преобразования Фирца [47] выражение в квадратных скобках можно привести к виду $-(1/2)[(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi)^2]$. В отличие от фермиевского слабого взаимодействия эти токи нейтральны. Наконец, отметим, что основным возможным применением указанной модели предполагается теория сильных взаимодействий, где ψ считается нуклонным полем.

Квантовая теория поля с лагранжианом (9.1) неперенормируема, поэтому все вычисления по теории возмущений требуют введения параметра обрезания.

Плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ инвариантна относительно γ_5-преобразований

$$\psi \to \exp(i\tau\gamma_5)\psi, \quad \bar{\psi} \to \bar{\psi}\exp(i\tau\gamma_5), \tag{9.2}$$

приводящих к сохранению спиральности $\chi = \int \bar{\psi}\gamma_0\gamma_5\psi d^3x$, и калибровочных преобразований

$$\psi \to \exp(i\beta)\psi, \quad \bar{\psi} \to \bar{\psi}\exp(-i\beta),$$

которые приводят к сохранению числа частиц $N = \int \bar{\psi}\psi d^3x$. Основная идея работ [47, 48] в том, что лагранжиан свободных полей $\mathcal{L}_0'$ выбирается имеющим симметрию массивных физических полей, т. е. таким, что

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_s + \mathcal{L}_{\text{int}} - \mathcal{L}_s = \mathcal{L}_0' + \mathcal{L}_{\text{int}}', \tag{9.3}$$

где $\mathcal{L}_s = -m\bar{\psi}\psi$. После этого $\mathcal{L}_{\text{int}}'$ может быть учтен по теории возмущений. Такой выбор $\mathcal{L}_0'$ связан с предположением о γ_5-неинвариантности физического вакуума. По теореме Коулмена (гл. 3), вакуум $|\Phi(m)\rangle$ для $\mathcal{L}_0'$ также γ_5-неинвариантен. Переход к «другому вакууму, отраженный в переходе от $\mathcal{L}_0$ к $\mathcal{L}_0'$, означает рассмотрение другого унитарно-неэквивалентного представления канонических антикоммутационных соотношений.

Действительно, пусть

$$\gamma_\mu \partial^\mu \psi^0(x) = 0, \quad (\gamma_\mu \partial^\mu + m)\psi^{(m)}(x) = 0.$$

Будем считать, что начальные условия для обоих полей одинаковы, т. е.

$$\psi^{(0)}(x) = \psi^{(m)}(x) \tag{9.4}$$

при $x^0 = 0$. Здесь

$$\psi_\alpha^{(\lambda)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\substack{\mathbf{p},\,\sigma \\ p_0^2 = \mathbf{p}^2 + \sigma^2}} \{ u_\alpha^{(\lambda)}(\mathbf{p}, \sigma)\, a_\lambda(\mathbf{p}, \sigma) \exp(ipx) + v_\alpha^{(\lambda)}(\mathbf{p}, \sigma)\, b_{(\lambda)}^+(\mathbf{p}, \sigma) \exp(-ipx) \}, \tag{9.5}$$

где $\lambda = 0$ или m; Ω — объем нормировки; $u_\alpha^{(\lambda)}(\mathbf{p}, \sigma)$ и $v_\alpha^{(\lambda)}(\mathbf{p}, \sigma)$ — нормализованные спинорные собственные функции для частиц и античастиц с импульсом $\mathbf{p}$ и проекцией спина на направление импульса σ. Операторы $a_{(\lambda)}$, $a_{(\lambda)}^+$, $b_{(\lambda)}$, $b_{(\lambda)}^+$ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\{a_{(\lambda)}(\mathbf{p}, \sigma), a_{(\lambda)}^+(\mathbf{p}', \sigma')\}_+ = \delta_{\mathbf{pp}'}\delta_{\sigma\sigma'},$$
$$\{b_{(\lambda)}(\mathbf{p}, \sigma), b_{(\lambda)}^+(\mathbf{p}', \sigma')\}_+ = \delta_{\mathbf{pp}'}\delta_{\sigma\sigma'}.$$

Из (9.4) следует, что операторы частиц с массой связаны с операторами для безмассовых частиц боголюбовским преобразованием (хотя и несколько более сложным, чем в теории сверхпроводимости, из-за присутствия античастиц):

$$\left.\begin{aligned} a_{(m)}(\mathbf{p}, \sigma) &= \xi_{\mathbf{p}}\, a_{(0)}(\mathbf{p}, \sigma) + \eta_{\mathbf{p}}\, b_{(0)}^+(-\mathbf{p}, \sigma); \\ b_{(m)}(\mathbf{p}, \sigma) &= \xi_{\mathbf{p}}\, b_{(0)}(\mathbf{p}, \sigma) - \eta_{\mathbf{p}}\, a_{(0)}^+(-\mathbf{p}, \sigma); \end{aligned}\right\} \tag{9.6}$$

$$|\xi_{\mathbf{p}}|^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{|\mathbf{p}|}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}\right), \quad |\eta_{\mathbf{p}}|^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{|\mathbf{p}|}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}\right).$$

Связь вакуумов $|\Phi(0)\rangle$ и $|\Phi(m)\rangle$, определяемых равенствами

$$a_{(\lambda)}(\mathbf{p}, \sigma)|\Phi(\lambda)\rangle = b_{(\lambda)}(\mathbf{p}, \sigma)|\Phi(\lambda)\rangle = 0 \tag{9.7}$$

при $\lambda = 0$, m, можно получить из (9.6)

$$|\Phi(m)\rangle = \prod_{\mathbf{p},\sigma} \{\xi_{\mathbf{p}} - \eta_{\mathbf{p}} a^{+}_{(0)}(\mathbf{p}, \sigma) b^{+}_{(0)}(-\mathbf{p}, \sigma)\} |\Phi(0)\rangle. \qquad (9.8)$$

Скалярное произведение

$$\langle\Phi(0)|\Phi(m)\rangle = \exp\left(\sum_{\mathbf{p}} \ln \xi_{\mathbf{p}}\right) = \prod_{\mathbf{p}} \xi_{\mathbf{p}} \qquad (9.9)$$

стремится к нулю, когда объем нормировки Ω стремится к бесконечности ($|\xi_{\mathbf{p}}| < 1$), так что $|\Phi(0)\rangle$ и $|\Phi(m)\rangle$ в трансляционно-инвариантной теории ортогональны друг другу. Выражение (9.8) для $|\Phi(m)\rangle$ имеет, конечно, лишь формальный смысл, однако оно позволяет увидеть такую особенность, как γ_5-неинвариантность $|\Phi(m)\rangle$, приводящую к бесконечному вырождению вакуума. Действительно, при преобразовании (9.2)

$$|\Phi(m)\rangle \to |\Phi(m)\rangle_\tau = \exp(-i\tau\chi)|\Phi(m)\rangle =$$
$$= \prod_{\mathbf{p},\pm}\{\xi_{\mathbf{p}} - \eta_{\mathbf{p}} \exp(\pm 2i\tau) a^{+}_{(0)}(\mathbf{p}, \pm) b^{+}_{0}(-\mathbf{p}, \pm)\} |\Phi(0)\rangle, \qquad (9.10)$$

причем ${}_\tau\langle\Phi(m)|\Phi(m)\rangle_{\tau'} = 0$ ($\tau' \neq \tau \pmod{2\pi}$). Таким образом, имеется бесконечное множество вакуумов $|\Phi(m)\rangle_\tau$ ($0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi$). Однако все они приводят, по существу, к физически эквивалентному описанию системы, так что настоящее различие есть лишь между $|\Phi(0)\rangle$ и $|\Phi(m)\rangle$, поскольку γ_5-неинвариантность $|\Phi(m)\rangle$, связанная с боголюбовским преобразованием (9.6), проявляется в существовании аномального среднего $\langle\Phi(m)|\bar{\psi}\psi|\Phi(m)\rangle$, отождествляемого с массой.

Представив $\mathscr{L}$ в виде (9.3), Намбу и Иона-Ласинио вычисляют собственно энергетическую часть $\Sigma(p, m, g_0, \Lambda)$, где Λ — некоторое обрезание, поэтому физическая частица удовлетворяет уравнению

$$[i\gamma p + \Sigma(p, m, g_0, \Lambda)]\psi = 0;$$

если $(i\gamma p + m)\psi = 0$, т.е.

$$m = \Sigma(p, m, g_0, \Lambda)|_{(i\gamma p + m)\psi = 0}. \qquad (9.11)$$

Из (9.11), вычисляя Σ в первом порядке по теории возмущений и используя для пропагаторов поля ψ выражение S_F^m массивной фермионной теории, получим необходимое условие существования нетривиального решения:

$$1 = -\frac{ig_0}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4 p}{p^2 + m^2 - i\varepsilon} F(p, \Lambda), \qquad (9.12)$$

где $F(p, \Lambda)$ — форм-фактор обрезания. Из (9.12) можно найти связь между m, g_0 и Λ. В случае лоренц-инвариантного обрезания при $p^2 = \Lambda^2$ получим соотношение

$$2\pi^2/g_0\Lambda^2 = 1 - (m^2/\Lambda^2)\ln(\Lambda^2/m^2 + 1), \qquad (9.13)$$

откуда видно, что нетривиальное решение существует только при

$$0 < 2\pi^2/g_0\Lambda^2 < 1. \qquad (9.14)$$

Из (9.13) и (9.14) видно, что полученная теория неаналитична при $g_0 = 0$: m нельзя разложить в ряд по степеням g_0.

Далее обсудим вопрос о теореме Голдстоуна (гл. 3). Рассмотренная выше теория является теорией с γ_5-инвариантным лагранжианом, но неинвариантным вакуумом. В ней сохраняется аксиальный ток

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = 0, \quad j^{\mu 5} = i\psi\gamma^\mu \gamma^5\psi. \qquad (9.15)$$

Уравнение Дирака для частицы с массой не сохраняет такой ток, поскольку

$$\partial_\mu (\bar{\psi}^{(m)} \gamma^\mu \gamma^5 \psi^{(m)}) = 2im\bar{\psi}^{(m)} \gamma^5 \psi^{(m)}. \qquad (9.16)$$

Спрашивается, как можно совместить (9.15) и (9.16). В работе [47] показано, что из-за поляризационных поправок ток $j^{\mu 5}$ должен быть переопределен. В частности, между однонуклонными состояниями он будет иметь вид

$$\langle p' | j^{\mu 5} | p\rangle = \bar{u}(p')\chi^\mu(p', p)\, u(p).$$

Тогда уравнения (9.15) и (9.16) можно совместить, если

$$\chi^\mu(p', p) = F(q^2)\,(i\gamma^\mu \gamma^5 + 2m\gamma^5 q^\mu/q^2),$$

где $q = p - p'$, $p^2 = p'^2 = m^2$, что соответствует появлению полюса при $q^2 \to 0$, т. е. появляется голдстоуновский бозон $m = 0$ с квантовыми числами нуклон-антинуклонной пары (псевдоскалярный мезон с $m = 0$).

Очевидным недостатком модели Намбу — Иона-Ласинио является явная зависимость от параметра обрезания Λ, физический смысл которого остается неясным.

Роль классического параметра, отличного от нуля за счет неинвариантности вакуума, в разобранной модели играет масса. В работе [49] эта модель обобщается путем отказа от требования инвариантности вакуума относительно пространственных трансляций и преобразований Лоренца. Тогда масса m может зависеть от пространственной координаты, т. е. появляется некоторое скалярное поле $m(x) \underset{x\to\infty}{\to} m$, где m определяется условием (9.12). Кроме того, нарушение лоренц-инвариантности вакуума ведет к появлению классического аксиально-векторного поля

$$m_\mu^A(x) \sim Tr\left\langle 0 \left| \frac{1}{2}[\bar{\psi}(x), \gamma_5\gamma_\mu \psi(x)] \right| 0\right\rangle.$$

Имеется явная аналогия такой теории с теорией Абрикосова сверхпроводников II рода. Лагранжиан классических полей $m(x)$ и m_μ^A (которые здесь в принципе не квантуются, поскольку само возникновение этих классических полей есть следствие квантовой теории) совпадает с лагранжианом теории Гинзбурга — Ландау или с так называемым лагранжианом Хиггса, который будет рассмотрен в § 10.

§ 10. ФЕНОМЕН ХИГГСА

Интересное явление возникает в моделях со спонтанным нарушением симметрии при наличии безмассовых векторных полей.

Следуя Хиггсу [50, 51], рассмотрим первоначально классическую теорию комплексного скалярного поля, взаимодействующего с безмассовым векторным полем. В терминах вещественных скалярных полей φ_1 и φ_2 $(\varphi=(\varphi_1+i\varphi_2)/\sqrt{2}$ лагранжиан имеет вид

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}(\nabla\varphi_1)^2-\frac{1}{2}(\nabla\varphi_2)^2-V(\varphi_1^2+\varphi_2^2)-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (10.1)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \nabla_\mu\varphi_1&=\partial_\mu\varphi_1-e_0A_\mu\varphi_2;\\ \nabla_\mu\varphi_2&=\partial_\mu\varphi_2+e_0A_\mu\varphi_1;\\ F_{\mu\nu}&=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu. \end{aligned}\right\} \quad (10.2)$$

Лагранжиан $\mathscr{L}$ инвариантен относительно калибровочных преобразований I рода полей φ и φ^* и градиентных преобразований II рода векторного поля $A_\mu\to A_\mu+\partial_\mu\psi$.

Предположим, что потенциал V, как и в модели Голдстоуна, имеет минимум при некотором ненулевом значении φ, например, пусть это значение соответствует $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\varphi_0$ (в квантовой теории фиксация такого значения соответствует выбору одного из множества эквивалентных вакуумов, получаемых один из другого калибровочным преобразованием). Тогда $V'(\varphi_0^2)=0$, $V''(\varphi_0^2)>0$, где $V'=\delta V/\delta\varphi$.

Рассмотрим малые осцилляции $\Delta\varphi_1(x, t)$, $\Delta\varphi_2(x, t)$ вокруг $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\varphi_0$ и, разлагая $V(\varphi_1^2+\varphi_2^2)$ в ряд Тейлора вокруг точки φ_0, получим следующие приближенные уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\partial^\mu(\partial_\mu(\Delta\varphi_1)-e_0\varphi_0A_\mu)=0;\\ &\{\Box-4\varphi_0^2V''(\varphi_0^2)\}\Delta\varphi_2=0;\\ &\partial_\nu F^{\mu\nu}=-e\varphi_0\{\partial^\mu(\Delta\varphi_1)-e\varphi_0A^\mu\}. \end{aligned}\right\} \quad (10.3)$$

Но уравнения (10.3) после перехода к новым переменным

$$\left.\begin{aligned} B_\mu&=A_\mu-(e\varphi_0)^{-1}\partial_\mu(\Delta\varphi_1);\\ G_{\mu\nu}&=\partial_\mu B_\nu-\partial_\nu B_\mu=F_{\mu\nu} \end{aligned}\right\} \quad (10.4)$$

принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &\partial_\mu B^\mu=0,\\ &\partial_\nu G^{\mu\nu}-e^2\varphi_0^2B^\mu=0;\\ &\{\Box-4\varphi_0^2V''(\varphi_0^2)\}\Delta\varphi_2=0, \end{aligned}\right\} \quad (10.5)$$

т. е. имеем уравнения теории векторного мезонного поля B^{μ} с массой $e_0\varphi_0$ и одного вещественного скалярного поля $\Delta\varphi_2$ с массой $m = \sqrt{4\varphi_0^2 V''(\varphi_0^2)}$. Первое из уравнений (10.5), по существу, есть следствие второго в силу антисимметрии $G_{\mu\nu}$, так что голдстоуновское поле $\Delta\varphi_1$ в теории отсутствует.

Таким образом, электромагнитное поле, взаимодействующее с комплексным скалярным полем при наличии спонтанного нарушения симметрии последнего, превращается в векторное мезонное поле. Нетрудно понять, куда «пропала» лишняя степень свободы — поле $\Delta\varphi_1$. Как известно, безмассовое векторное поле характеризуется двумя независимыми (поперечными) степенями свободы, массивное же векторное поле приобретает добавочную продольную степень свободы [30]. Поэтому число степеней свободы осталось прежним.

Третье уравнение в (10.3) показывает, что теория по-прежнему инвариантна относительно градиентного преобразования II рода $A_\mu(x)$, если при этом поле $\Delta\varphi_1$ подвергнуть локальному калибровочному преобразованию. Дело в том, что лагранжиан $\mathcal{L}$ в (10.1) инвариантен относительно более широкого класса преобразований, нежели лагранжиан модели Голдстоуна, а именно, имеется инвариантность относительно преобразований:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x) &\to \varphi_1(x)\cos\Lambda(x) + \varphi_2(x)\sin\Lambda(x); \\ \varphi_2(x) &\to -\varphi_1(x)\sin\Lambda(x) + \varphi_2(x)\cos\Lambda(x); \\ A_\mu(x) &\to A_\mu(x) + (1/e_0)\partial_\mu\Lambda(x). \end{aligned}\right\} \quad (10.6)$$

Поэтому при малых $\Lambda(x)$, заменяя $\varphi_2(x)$ на φ_0 и преобразуя одновременно с $A_\mu(x)$ поле $\Delta\varphi_1(x)$, получаем вышеупомянутую симметрию. Поле B_μ уже нельзя подвергать градиентным преобразованиям.

Можно заметить, что переход от поля $A_\mu(x)$ к $B_\mu(x)$ не так уж безобиден, поскольку первоначальная теория инвариантна не только относительно локального калибровочного преобразования поля $\varphi(x)$ с одновременным преобразованием поля $A_\mu(x)$, но и относительно отдельного, не зависящего от координат калибровочного преобразования $\varphi(x)$ (или $\Delta\varphi_1$, $\Delta\varphi_2$). При этом $\Delta\varphi_1$ в первой формуле (10.4) преобразуется, а $A_\mu(x)$ не подвергается никаким преобразованиям. Тем самым в нашем приближении, когда имеется явно неинвариантное условие $\partial_\mu B^\mu = 0$, потеряна исходная симметрия лагранжиана, которая после учета спонтанного нарушения есть симметрия относительно неоднородных преобразований вида (8.8). Тем не менее уже эта приближенная модель Хиггса послужила стимулом к созданию квантовополевых моделей, в которых сохраняются основные особенности теории: отсутствие физических безмассовых голдстоуновских бозонов, несмотря на спонтанное нарушение симметрии, и возникновение массы у первоначально безмассовых векторных частиц. Это явление получило название *феномена Хиггса*.

Перейдем теперь к рассмотрению квантовой модели Хиггса. Лагранжиан в модели Хиггса содержит векторное поле. Квантование векторного поля, как известно [52], нельзя последовательно провести, не выбрав предварительно условие калибровки. Поэтому приведем схему квантования модели Хиггса в кулоновской, унитарной и лоренцевой калибровках.

1. **Кулоновская калибровка**. Запишем лагранжиан (10.1) в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} +$$
$$+ \varphi^{\mu *} (\partial_\mu - \mathrm{i}\, e_0 A_\mu)\, \varphi + \varphi^\mu (\partial_\mu + \mathrm{i} e_0 A_\mu)\, \varphi^* - \varphi^{\mu *} \varphi_\mu - V(\varphi^* \varphi). \quad (10.7)$$

Варьируя $\mathcal{L}$ по различным независимым переменным, получим следующие уравнения:

$$\delta F^{\mu\nu} \to F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu;$$
$$\delta \varphi^\mu \to \varphi_\mu^* = (\partial_\mu + \mathrm{i} e_0 A_\mu)\, \varphi;$$
$$\delta \varphi^{\mu *} \to \varphi_\mu = (\partial_\mu - \mathrm{i} e_0 A_\mu)\, \varphi^*;$$
$$\delta A_\mu \to -\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mathrm{i} e_0 (\varphi^{\mu *} \varphi - \varphi^\mu \varphi^*) = j^\mu.$$

Такая запись лагранжиана более удобна.

На векторное поле $A_\mu(x)$ наложим условие кулоновской калибровки:

$$\partial_k A^k(x) = 0,\ k = 1, 2, 3. \quad (10.8)$$

Это условие, очевидно, не обладает лоренц-ковариантностью, поэтому, если мы хотим его сохранить в различных системах отсчета, векторное поле должно изменяться при преобразованиях Лоренца не просто как вектор, а подвергаться еще добавочному градиентному преобразованию. Такое преобразование нетрудно найти. Например, для свободного электромагнитного поля в $\mathbf{k}$-представлении условия кулоновской калибровки имеют вид

$$\mathbf{kA}(\mathbf{k}) = 0,\ A_0(\mathbf{k}) = 0,\ \mathbf{k}^2 = k_0^2. \quad (10.9)$$

При инфинитезимальном преобразовании Лоренца $x_\mu \to (\delta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu})\, x_\nu$ имеем:

$$A_\mu(\mathbf{k}) \to (\delta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}) A^\nu(\mathbf{k}) + E_\mu(\mathbf{k}). \quad (10.10)$$

Следовательно, условие $A_0'(\mathbf{k}) = 0$ приводит к

$$E_0(\mathbf{k}) = -\varepsilon_{0i} A^i(\mathbf{k}). \quad (10.11)$$

Из условия кулоновской калибровки в новой системе координат

$$0 = k'^i A_i'(\mathbf{k}') = k_\nu (\delta^{\nu i} + \varepsilon^{\nu i})(\delta^{il} + \varepsilon_{il}) A^l(\mathbf{k}) +$$
$$+ k^i E_i(\mathbf{k}) \quad (10.12)$$

получим

$$k^i E_i(\mathbf{k}) + k_0 \varepsilon^{0i} A_i(\mathbf{k}) = 0, \quad (10.13)$$

так что из (10.11) и (10.13) следует:

$$E_\mu(\mathbf{k}) = \left(-\frac{k_\mu k_0}{|\mathbf{k}|^2}\right) \varepsilon_{0i} \quad A^i(\mathbf{k}). \tag{10.14}$$

Необходимость добавления $E_\mu(\mathbf{k}) \neq 0$ является спецификой преобразования электромагнитного поля в кулоновской калибровке.

В заданной системе координат условие кулоновской калибровки удобно записывать, вводя единичный вектор $\eta = (1, 0, 0, 0)$ таким образом, что (10.8) переходит в

$$k\,\mathrm{A}(\mathbf{k}) - (\eta k)(\eta A(\mathbf{k})) = 0. \tag{10.15}$$

При наличии взаимодействия электромагнитного поля с другими полями $A_0(\mathbf{k}) \neq 0$ (например, появляется отличный от нуля кулоновский потенциал) и вместо (10.9) следует писать (10.15). Зависимость от вектора η приводит к отсутствию явной лоренц-ковариантности теории, поэтому в литературе (см. [53]) появилось мнение, что именно это обстоятельство и является причиной несправедливости теоремы Голдстоуна для модели Хиггса в кулоновской калибровке. Однако аксиоматическая теорема Голдстоуна и нерелятивистская теорема Голдстоуна (см. § 3) показывают, что вопрос заключается не в отсутствии релятивистской ковариантности, а в отсутствии локальности.

Нарушение локальности происходит в квантовой теории электромагнитного поля в кулоновской калибровке. Хорошо известно [54], что поля $A_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ и канонически-сопряженные импульсы $\dot{A}_j(x)$ удовлетворяют соотношениям:

$$[A_i(\mathrm{x}, t), \dot{A}_j(\mathrm{x}', t)] = \mathrm{i}\delta_{ij}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - \\ - \frac{\mathrm{i}}{4\pi}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\,\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \mathrm{i}\delta^{Tr}(\mathrm{x}-\mathrm{x}'), \tag{10.16}$$

где

$$\delta_{ij}^{Tr}(\mathrm{x}-\mathrm{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k \exp \mathrm{i}(\mathbf{k}, \mathrm{x}-\mathrm{x}')\left[\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\mathbf{k}|^2}\right]. \tag{10.17}$$

Правая часть (10.16) отлична от нуля при пространственноподобных $|\mathrm{x}-\mathrm{x}'|$. В электродинамике эта нелокальность физически не проявляется, поскольку наблюдаемы не сами векторные потенциалы, а напряженности электромагнитного поля, для которых принцип локальности уже выполнен. Условие (10.15) приводит к тому, что при обсуждении теоремы Голдстоуна в модели Хиггса в кулоновской калибровке нужно пользоваться формулами (6.16), (6.17). Нарушение локальности (в нерелятивистской теории это означает наличие дальнодействия, например ненулевого кулоновского потенциала) приводит к тому, что если продифференцировать (6.13) по времени t (или x_0), то необязательно получим нуль, а следовательно, вывод об отсутствии щели в спектре промежуточных состояний (теорема Голдстоуна) не обязателен. При этом, однако, заряд не сохраняется во времени.

Проиллюстрируем вышесказанное на модели Хиггса [см. (10.1), (10.7)]. Следуя Кибблу [55], сделаем в (10.7) замену переменных:

$$\left.\begin{aligned} \varphi=2^{-1/2}\rho\exp i\vartheta;\ \rho^\mu=2^{-1/2}(\varphi^{\mu*}\exp i\vartheta+\varphi^\mu\exp-i\vartheta);\\ \vartheta^\mu=2^{-1/2}i\rho(\varphi^{\mu*}\exp i\vartheta-\varphi^\mu\exp-i\vartheta)=(-1/e_0)j^\mu. \end{aligned}\right\} \quad (10.18)$$

Тогда в терминах новых переменных выражение (10.7) принимает вид

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}F^{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)+\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\rho^\mu\partial_\mu\rho-$$

$$-\frac{1}{2}\rho^\mu\rho_\mu+\vartheta^\mu\partial_\mu\vartheta-\frac{\vartheta^\mu\vartheta_\mu}{2\rho^2}-V\left(\frac{1}{2}\rho^2\right)+e_0A_\mu\vartheta^\mu. \quad (10.19)$$

Квантование в кулоновской калибровке требует добавления к $\mathscr{L}$ члена $C\partial_kA^k$, где C — множитель Лагранжа. Из (10.19) получаем уравнение

$$\vartheta_\mu=e_0\rho^2\left(A_\mu+\frac{1}{e_0}\partial_\mu\vartheta\right), \quad (10.20)$$

поэтому, вводя

$$B_\mu=A_\mu+e_0^{-1}\partial_\mu\vartheta, \quad (10.21)$$

можно исключить поле ϑ из лагранжиана (10.19) (не учитывая части с множителем Лагранжа):

$$\mathscr{L}=-F^{\mu\nu}(\partial_\mu B_\nu-\partial_\nu B_\mu)+\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\frac{1}{2}e_0^2\rho^2B_\mu B^\mu+$$

$$+\rho^\mu\partial_\mu\rho-\frac{1}{2}\rho^\mu\rho_\mu-V\left(\frac{1}{2}\rho^2\right)-C\partial_k(B^k-e_0^{-1}\partial^k\vartheta). \quad (10.22)$$

Отметим, что замена переменных (10.18) и (10.21) осмыслена лишь в теории со спонтанным нарушением симметрии, в которой потенциал V имеет такой вид, что энергия минимальна при $\rho=\eta\neq0$, следовательно $\rho=|\eta|+\rho'$, $\rho'>0$. В противном случае в результате этих преобразований была бы потеряна одна степень свободы (не говоря о некорректности преобразований при $\rho=0$). Спонтанное нарушение симметрии происходит в частности, если V имеет вид потенциала модели Голдстоуна:

$$V=-\mu_0^2\varphi^*\varphi-\frac{\lambda_0}{6}(\varphi^*\varphi)^2=-\frac{\mu_0^2}{2}\rho^2-\frac{\lambda_0}{4}\rho^4, \quad (10.23)$$

где $\mu_0^2<0$.

Из (10.22) видно, что при переходе к сдвинутому полю $\rho'=$ $=\rho-\eta$ получаем ненулевую массу у поля B_μ. В квантовой теории условие $\eta\neq0$ означает, что вакуум в теории таков, что $\langle0|\varphi(x)|0\rangle=(1/\sqrt{2})\langle0|\rho\ \exp i\ \vartheta|0\rangle\neq0$, т. е. имеется спонтанное нарушение симметрии. Калибровочная симметрия поля $\varphi\to\varphi\exp i\alpha$ в терминах ρ и ϑ есть симметрия $\vartheta\to\vartheta+\alpha$.

Специфика данной модели состоит в том, что исключение зависимости $\mathscr{L}$ в (10.19) от ϑ не позволяет говорить о явном нарушении (или трансформации) симметрии в лагранжиане после сдвига $\rho \to \rho'$. Из (10.22) получаем следующие уравнения для поля ϑ и лагранжева поля C:

$$\nabla^2 \vartheta(x) = -e_0 \partial_k B^k(x); \tag{10.24}$$

$$\nabla^2 C(x) = 0. \tag{10.25}$$

Что происходит при этом с теоремой Голдстоуна?

Рассмотрим голдстоуновский коммутатор

$$\int d^3x \langle 0 | [j^\mu(x), \varphi(0)] 0\rangle . \tag{10.26}$$

Из (10.20) и (10.21)

$$j^\mu = -e_0 \vartheta^\mu = -e_0^2 \rho^2 B^\mu. \tag{10.27}$$

Отсюда, учитывая (10.18) и разлагая $\varphi(0)$ в ряд $\varphi(0) = 2^{-1/2} \rho(1 + i\vartheta + \ldots)$, в голдстоуновском коммутаторе (10.26) получим, используя (10.24), явно нелокальные члены вида

$$\langle 0 | [j^\mu(x), \vartheta(0)] | 0\rangle = -e_0^3 \frac{1}{\nabla^2} \partial_k \langle 0 | [\rho^2 B^\mu(x), B^k(0)] | 0\rangle. \tag{10.28}$$

Так как $\frac{1}{\nabla^2} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d^3 x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$, член (10.28) не равен нулю при пространственноподобном $\mathbf{x}$.

Нарушение локальности в (10.28), очевидно, связано с (10.24) и (10.27) и, в конечном счете, с условием кулоновской калибровки. Однако, в отличие от нарушения локальности в квантовой электродинамике при кулоновской калибровке, нелокальность хиггсовской модели будет физически ненаблюдаема, если отказаться от наблюдаемости самого поля $\vartheta(x)$ и тока $j^\mu(x)$. Наблюдаемыми следует считать тогда лишь поля $B_\mu(x)$ и $\rho(x)$. Возникает вопрос: каков смысл всех промежуточных рассуждений с полями $\varphi(x)$, $\vartheta(x)$, если потом эти поля надо забыть? Однако именно эти рассуждения помогают увидеть такую важную особенность, как перенормируемость теорий со спонтанным нарушением симметрии при начальных безмассовых векторных полях [69].

Напишем лагранжиан (10.22) в терминах сдвинутых полей $\rho' = \rho - |\eta|$. Для V вида (10.23), выбрав $|\eta|$ из условия $\partial V/\partial\rho|_{\rho=\eta} = 0$, получим $\eta^2 = -6\mu_0^2/\lambda$. При сдвиге $\rho' = \rho - \eta$ часть $\mathscr{L}$, описывающая поле ρ', преобразуется следующим образом:

$$\mathscr{L}_\rho = \rho'^\mu \partial_\mu \rho' - \frac{1}{2} \rho'^\mu \rho'_\mu - \mu_0^2 \rho' \rho' + \widetilde{V}_{вз}(\rho'). \tag{10.29}$$

Итак, лагранжиан (10.22) описывает векторное поле с такой массой m, что $m^2 = e_0^2 \eta^2 = -e_0^2 6\mu_0^2/\lambda_0 > 0$ и скалярное поле с массой $m_0^2 = -2\mu_0^2 > 0$.

В связи с важностью кулоновской калибровки (в ней нет индефинитной метрики) и возможностью придавать смысл не полям ρ,

ϑ, а полям φ, φ^* приведем обсуждение модели Хиггса в кулоновской калибровке, не использующее преобразование к полям ρ и ϑ [53]. Для этого перепишем (10.7) с $V(\varphi^*\varphi)$, имеющим вид (10.23), в терминах вещественных полей φ_1, φ_2, введя обозначения

$$\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix},\qquad q=\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix},\quad \frac{\lambda_0}{6}=\frac{f^2}{8}$$

$$\mathscr{L}(x)=-\frac{1}{2}F^{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)+\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+$$
$$+\varphi_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\varphi(x)+\varphi^\mu(x)\varphi_\mu(x)-$$
$$-\varphi^\mu(x)\,\mathrm{i}\,e_0 q\varphi(x)A_\mu(x)+\frac{1}{2}\mu_0^2\varphi(x)\varphi(x)-\frac{1}{8}f^2(\varphi(x)\varphi(x))^2. \tag{10.30}$$

Спонтанное нарушение симметрии приводит, как и выше, к $\langle 0|\varphi_2(0)|\underset{0}{0}\rangle=\sqrt{2}\mu_0/f\neq 0$. Сделав сдвиг $\varphi(x)=\eta+\varphi'(x)$, где $\eta=(\sqrt{2}m_0/f)$, напишем уравнение квантованного поля в том же приближении, что и (10.3), пренебрегая $\varphi_1'^2$, $e\varphi'$:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_\mu(x)&=\partial_\mu\varphi'(x)-\mathrm{i}\,e_0 q\eta A_\mu(x);\\ (\partial_\mu-\mathrm{i}\,e_0 qA_\mu(x))\,\varphi^\mu(x)&=-f^2\eta(\varphi'(x)\eta);\\ \partial_\nu F^{\mu\nu}(x)=\mathrm{i}\,e_0\varphi^\mu(x)q\eta&=-m^2\left(\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\varphi_1'(x)-A^\mu(x)\right),\end{aligned}\right\} \tag{10.31}$$

где

$$m=e_0\sqrt{2}\mu_0/f. \tag{10.32}$$

Величина

$$j_\mu(x)=m^2(A_\mu-1/m)\partial_\mu\varphi_1'(x)$$

сохраняется в силу антисимметрии тензора $F^{\mu\nu}(x)$. В кулоновской калибровке сохранение тока $\partial^\mu j_\mu(x)=0$ и уравнение $\partial_i A^i(\mathrm{x},t)=0$ приводят к уравнениям

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\varphi_1'(x)&=m\dot{A}_0(x);\\ \frac{\partial}{\partial x_\mu}\dot{A}_0(x)-\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}A^\mu(x)&=-m^2\left[\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\varphi_1'(x)-A^\mu(x)\right],\end{aligned}\right\} \tag{10.33}$$

откуда

$$\nabla\dot{A}_0-\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\mathbf{A}(x)=-m^2\left[\frac{1}{m}\nabla\varphi_1'(x)-\mathbf{A}(x)\right]; \tag{10.34}$$

$$\ddot{A}_0(x)+\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}A_0(x)=m^2\left[\frac{1}{m}\varphi_1'(x)-A_0(x)\right]. \tag{10.35}$$

Используя условие кулоновской калибровки и взяв градиент от обеих частей (10.34), получаем

$$\nabla^2 \dot{A}_0 (x) = -m\nabla^2 \varphi_1' (x), \tag{10.36}$$

откуда

$$\dot{A}_0 (x) = -m\varphi_1' (x) + F (\mathbf{x}),\ \nabla^2 F (\mathbf{x}) = 0. \tag{10.37}$$

Если приравнять произвольную функцию $F(\mathbf{x})$ к нулю, то

$$\dot{A}_0 (x) = -m\varphi_1' (x). \tag{10.38}$$

Из (10.37), (10.38) видно, что поле $\varphi_1'(x)$ в кулоновской калибровке уже не будет лоренцевым скаляром. Формула (10.10) показывает, что поле $A_\mu(x)$ не является векторным в кулоновской калибровке. Видно также, что уравнения движения в модели Хиггса в кулоновской калибровке приводят к «порче» свойств скалярного поля $\varphi_1'(x)$: оно преобразуется как производная по времени от нулевой компоненты вектора.

Поле $\varphi_1'(x)$, согласно модели Голдстоуна, при $\langle 0 | \varphi_2 (0) | 0 \rangle \neq \neq 0$ должно быть голдстоуновским. Поэтому произвол в выборе $F(\mathbf{x})$ (в частности, можно взять $F(\mathbf{x}) = \mathrm{const}$) соответствует возможности использовать различные вакуумы. Однако в нашем случае $\varphi_1'(x)$ уже не удовлетворяет уравнению поля с нулевой массой ($\Box\varphi_1'(x) = 0$), а удовлетворяет более сложному уравнению, следующему из (10.33) и (10.36):

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\nabla^2\varphi_1'(x)\right) - m^2\nabla^2\varphi_1'(x) = 0. \tag{10.39}$$

Появление оператора ∇^2 приводит к тому, что, хотя вырождение вакуума имеется в модели Хиггса, так же как и в модели Голдстоуна, переход от одного вакуума к другому в кулоновской калибровке уже не описывается на языке конденсации бесконечного числа безмассовых частиц. Этот переход в таких теориях получил название бозонного преобразования Умезавы [56]. Поскольку в кулоновской калибровке следует говорить о массивных частицах φ_1', конденсация таких частиц ведет к изменению энергии, и, следовательно, преобразование симметрии (заряд Q) начнет зависеть от времени.

Наконец, заметим, что возможность более широкого класса преобразований, использующих $F(\mathbf{x}) \neq \mathrm{const}$, приводит, как и в теории сверхпроводимости [56], к возможности существования основного состояния, удовлетворяющего соотношению

$$\langle 0 | \mathbf{j}(x) | 0 \rangle = m\nabla F(\mathbf{x}) \neq 0, \tag{10.40}$$

что соответствует выбору различных граничных условий теории (состояние $|0\rangle$, конечно, при этом не будет ни лоренц-, ни трансляционно-инвариантным). Поле $\varphi_2'(x)$ при $e_0=0$ удовлетворяет обычному свободному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\varphi_2'(x)=2\mu_0^2\varphi_2'(x). \tag{10.41}$$

Оператор векторного поля $A^\mu(x)$ при лоренц-преобразовании $U(\varepsilon)$ меняется по правилу

$$U(\varepsilon)A^\mu(x)U^{-1}(\varepsilon)=A^\mu(x)-\varepsilon^{\mu\nu}A_\nu(x)+\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Lambda(x,\varepsilon), \tag{10.42}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Lambda(x,\varepsilon)=-\varepsilon_{0i}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\int\frac{d^3x'}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\dot{A}^i(\mathbf{x}',t) \tag{10.43}$$

есть x-представление $E_\nu(\mathbf{k})$ в (10.10).

Все нежелательные особенности преобразования полей $A^\mu(x)$ и $\varphi_1'(x)$ пропадают, если объявить наблюдаемыми поля

$$B^\mu(x)=A^\mu(x)-\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\varphi_1'(x)=\frac{1}{m^2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\dot{A}_0(x)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}A^\mu(x)\right)=\frac{1}{m^2}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}A^\nu(x)-\frac{\partial}{\partial x_\nu}A^\mu(x)\right). \tag{10.44}$$

Выше было использовано условие кулоновской калибровки и уравнения (10.33), (10.38). Поле $B^\mu(x)$ является 4-вектором и удовлетворяет уравнениям:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}B_\mu(x)=0; \tag{10.45}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}=m^2B^\nu \tag{10.46}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}B_\mu(x)=m^2B_\mu(x). \tag{10.47}$$

Это поле можно квантовать как свободное векторное поле с массой m:

$$[B_\mu(x),\ B_\nu(y)]=-\mathrm{i}\left(g_{\mu\nu}-\frac{1}{m^2}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)\Delta(x-y,\ m^2). \tag{10.48}$$

Используя ток $j_\mu(x)=(m^2/e_0)B_\mu(x)$ и коммутационные соотношения для $B_\mu(x)$, можно выписать голдстоуновский коммутатор $[j_\mu(x),\ \varphi_1'(0)]$.

Воспользуемся тем, что в кулоновской калибровке $\partial_iA^i(x)=0$. Тогда

$$\nabla\mathbf{B}(x)=-\frac{1}{m}\nabla^2\varphi_1'(x). \tag{10.49}$$

Выразим $\varphi_i'(x)$ через $\mathbf{B}(x)$:

$$\varphi_i'(x) = -\frac{1}{m^2}\nabla\mathbf{B}(x), \tag{10.50}$$

тогда

$$[B_\mu(x), \varphi_i'(y)] = -m\left[B_\mu(x), \quad \frac{1}{\nabla^2}\nabla\mathbf{B}(y)\right] =$$

$$= \frac{i}{m}\left(m^2\frac{g_{\mu i}}{\nabla^2}\frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{\partial}{\partial y^\mu}\right)\Delta(x-y, m^2) =$$

$$= \frac{i}{m}\left[\eta_\mu\frac{\partial}{\partial y^\nu}\frac{\partial}{\partial y_\nu} - \left(\eta\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right] \Big/ \left[\frac{\partial}{\partial y^\nu}\frac{\partial}{\partial y_\nu} + \right.$$

$$\left. + \left(\eta\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\eta\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]\left(\eta\frac{\partial}{\partial y}\right)\Delta(x-y, m^2), \tag{10.51}$$

где $\eta = (1, 0, 0, 0)$. В (10.51) было использовано соотношение

$$\left(\nabla_y^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Delta(x-y, m^2) = m^2\Delta(x-y, m^2). \tag{10.52}$$

Из (10.51) следует, что

$$M_\mu(k) \equiv \int d^4x \exp i kx \langle 0|[j_\mu(x), \varphi_i'(0)]|0\rangle =$$

$$= \int d^4x \exp i kx m^2 \langle 0|[B_\mu(x), \varphi_i'(0)]|0\rangle =$$

$$= m^2\frac{1}{m}\frac{\eta_\mu k^2 - (\eta, k)k_\mu}{k^2 + (\eta, k)(\eta, k)}(\eta, k)\int d^4x \exp i kx\Delta(x, m^2) =$$

$$= -2\pi m\frac{\eta_\mu k^2 - (\eta, k)k_\mu}{k^2 + (\eta, k)(\eta, k)}(\eta, k)\delta(k^2 + m^2)\varepsilon(k_0), \tag{10.53}$$

тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \exp(i k_0 t) M_0(k) = 2\pi i\frac{m}{e_0}\cos\left(\sqrt{k^2+m^2}\,t\right) =$$

$$= 2\pi\int d^3x \exp i\mathbf{kx}\langle 0|[j_0(k), \varphi_i'(0)]|0\rangle, \tag{10.54}$$

т. е.

$$\int d^3x \langle 0|[j_0(\mathrm{x}, t), \varphi_i'(0)]|0\rangle = (i/e_0)\, m\cos mt. \tag{10.55}$$

Из (10.55) видно, что, во-первых, заряд $Q = \int d^3x j_0(\mathrm{x}, t)$ не сохраняется во времени, несмотря на локальный закон сохранения $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$, во-вторых, в теории нарушается локальная коммутативность, поскольку из (10.44) и уравнения $\frac{d}{dx^\nu}\frac{d}{dx_\nu}B^\mu(x) = m^2 B^\mu(x)$ следует

$$B_0(x) = \frac{1}{m^2}\nabla^2 A_0(\mathrm{x}, t), \tag{10.56}$$

т. е.

$$\int d^3x\langle 0|[j_0(\mathbf{x},\ t),\ \varphi_1'(0)]|0\rangle = \int d^3x\langle 0|[B_0(\mathbf{x},\ t),\ \varphi_1'(0)]|0\rangle \neq 0$$

лишь в том случае, когда члены, получающиеся по теореме Гаусса—Остроградского на бесконечно удаленной поверхности, не коммутируют с $\varphi_1'(0)$.

Таким образом, в модели Хиггса в кулоновской калибровке имеем:

а) спонтанное нарушение симметрии;

б) отсутствие безмассового голдстоуновского мезона, как следствие нарушения постулата локальности;

в) физический массивный скалярный мезон $\mu_s = \sqrt{2}\mu_0$;

г) физический массивный векторный мезон, $m_v = e_0\sqrt{2}\mu_0/f$;

д) имеется связь между массами векторного и скалярного мезонов $m_v/\mu_s = e_0/f$;

е) нарушение локальности ненаблюдаемо, если поле $\varphi_1'(x)$ (или $\vartheta(x)$) ненаблюдаемо.

2. Большое значение в моделях Хиггса, Киббла, Вайнберга [50, 55, 57] приобрела формулировка теории в так называемой унитарной калибровке. Переход к этой калибровке осуществляется с помощью специального локального преобразования из группы $U(1)$, выбираемого так, чтобы исключить поле $\varphi_1(x)$ из лагранжиана (10.30). С этой целью выберем $\Lambda(x)$ в преобразовании

$$\begin{aligned}\varphi_1''(x) &= \varphi_1(x)\cos\Lambda(x) + \varphi_2(x)\sin\Lambda(x);\\ \varphi_2''(x) &= -\varphi_1(x)\sin\Lambda(x) + \varphi_2(x)\cos\Lambda(x)\end{aligned} \tag{10.57}$$

таким, чтобы

$$\Lambda(x) = -\operatorname{arctg}(\varphi_1(x)/\varphi_2(x)). \tag{10.58}$$

При этом

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_1''=0,\\ &\varphi_2''(x)=\sqrt{\varphi_1^2(x)+\varphi_2^2(x)};\end{aligned}\right\} \tag{10.59}$$

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{1}{e_0}\frac{1}{\varphi_1^2(x)+\varphi_2^2(x)}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\varphi_1(x)\varphi_2(x) - \right.$$

$$\left. -\varphi_1(x)\frac{\partial}{\partial x^\mu}\varphi_2(x)\right). \tag{10.60}$$

Лагранжиан (10.30) инвариантен относительно такого преобразования. Спонтанное нарушение симметрии выражается условием

$$\langle 0|\varphi_2''(0)|0\rangle = \eta \neq 0. \tag{10.61}$$

Делая сдвиг поля $\chi(x) = \varphi_2''(x) - \eta$ и обозначая $A'_\mu(x) \equiv B_\mu(x)$, получаем уравнения движения в виде:

$$\left.\begin{aligned} &G^{\mu\nu}(x) = \frac{\partial}{\partial x_\mu} B^\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} B^\mu(x); \\ &\partial_\nu G^{\mu\nu}(x) = -e_0^2 [\eta^2 + 2\chi(x)\eta + \chi^2(x)] B^\mu(x); \\ &-\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\chi(x) = \mu_0^2[\eta + \chi] - \\ &-\frac{1}{2} f^2(\eta^2 + 3\eta^2\chi + 3\eta\chi^2 + \chi^3) + e_0 \frac{\partial}{\partial x_\mu}\chi(x) B_\mu(x). \end{aligned}\right\} \quad (10.62)$$

В линеаризованной теории имеем:

$$\eta = \sqrt{2}\mu_0/f, \; m_v = \sqrt{2}\, e_0\mu_0/f, \quad (10.63)$$

отсюда

$$\left.\begin{aligned} &\partial_\nu G^{\mu\nu}(x) = -m_v^2 B^\mu(x); \\ &\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\chi(x) = 2\mu_0^2\chi(x). \end{aligned}\right\} \quad (10.64)$$

Из (10.64) вытекает условие

$$\partial_\mu B^\mu = 0. \quad (10.65)$$

В отличие от формулировки модели Хиггса в кулоновской калибровке, в унитарной калибровке не требуется вводить никакого условия калибровки поля, поскольку квантованию подвергаются не поля A_μ, а сразу B_μ, для которых автоматически получается условие (10.65). Это условие в линеаризованной теории, очевидно, противоречит инвариантности теории относительно преобразований (10.57) при постоянных Λ, поэтому, вводя условие (10.65) в лагранжиан с соответствующим множителем Лагранжа, получаем явное (неспонтанное) нарушение симметрии. Ввиду этого некоторые авторы [71] отказываются относить теории, использующие унитарную калибровку, к классу моделей со спонтанным нарушением симметрии. Тем не менее имеющиеся доказательства [67—69] эквивалентности S-матрицы в унитарной калибровке S-матрице в калибровке, где есть спонтанное нарушение симметрии, позволяют считать этот вопрос скорее терминологическим, чем физическим.

Заряд в унитарной калибровке не зависит от времени по той простой причине, что он обращается в нуль. Из (10.64)

$$Q = \int d^3x \frac{\partial}{\partial x^j} G^{j0}(x) = -m \int d^3x B^0(\mathbf{x}, t). \quad (10.66)$$

Если $B^\mu(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет соотношениям (10.47), то

$$B^\mu(\mathbf{x}, t) = \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 k}{2k_0} \varepsilon_\mu(\mathbf{k}, \lambda) [B(\mathbf{k}, \lambda) \exp(-\mathrm{i}\, kx) + B^+(\mathbf{k}, \lambda) \exp(\mathrm{i}\, kx)], \tag{10.67}$$

где в силу (10.65)

$$(k, \varepsilon(k, \lambda)) = 0. \tag{10.68}$$

Так как $k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$, $\varepsilon^0(0, \lambda) = 0$, то

$$\int d^3 x B^0(\mathbf{x}, t) = \sum_{\lambda=1}^{3} (2\pi)^{3/2} \int \frac{d^3 k}{2k_0} \delta^3(\mathbf{k}) \varepsilon^0(\mathbf{k}, \lambda) \times [B(\mathbf{k}, \lambda) \exp \mathrm{i}\, k_0 t + B^+(\mathbf{k}, \lambda) \exp(-\mathrm{i} k_0 t)] = 0. \tag{10.69}$$

Ввиду тривиальности действия оператора заряда (это свойство унитарной калибровки не только в линеаризованной теории, но и в общем случае [53]) никакой теоремы Голдстоуна здесь нет.

3. В лоренцевой калибровке $\partial_\mu A^\mu = 0$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$). Как увидим ниже, модель Хиггса в лоренцевой калибровке обладает следующими чертами:

а) появляются духовые состояния, определенные в пространстве с индефинитной метрикой. В связи с появлением таких состояний унитарность теории заранее не очевидна, и ее приходится доказывать отдельно;

б) теория перенормируема, что связано с особым видом пропагатора для массивного векторного мезона;

в) справедлива теорема Голдстоуна, однако голдстоуновские частицы оказываются нефизическими, аналогично нефизическим продольным и временным фотонам квантовой электродинамики в формализме Гупта—Блейлера [30].

Как упоминалось выше, квантование электромагнитного поля нельзя провести корректно без выбора определенной калибровки. Это проявляется, в частности, в том, что в любой калибровке (отличной от кулоновской), в которой выполнено требование локальной коммутативности, лагранжиан (10.30) приводит к уравнению для векторного поля

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu. \tag{10.70}$$

Но из (10.70) сразу следует, что в локальной теории

$$[Q, \varphi(x)] = \left[\int j_0\, d^3 x, \varphi(x)\right] = \left[\int \frac{\partial}{\partial x^i} F^{i0}\, d^3 x, \varphi(x)\right] = 0 \tag{10.71}$$

для любой локальной наблюдаемой $\varphi(x)$ (в силу теоремы Гаусса—Остроградского объемный интеграл сводится к интегралу по бесконечно удаленной поверхности). В калибровке Лоренца (10.70) заменяется уравнением

$$\square A^{\nu} = j^{\nu}. \tag{10.72}$$

Уравнение (10.71) уже не справедливо, и можно говорить о заряженных квантованных полях, удовлетворяющих соотношению

$$[Q,\ \varphi(x)] = e_0\varphi. \tag{10.73}$$

Тем не менее в случае спонтанного нарушения симметрии, когда $\langle 0|\varphi|0\rangle \neq 0$, нетрудно доказать следующую теорему (см. [58]).

Теорема. Если симметрия относительно калибровочных преобразований первого рода спонтанно нарушена и выполняются уравнения (10.72) или аналогичные уравнения в любой другой локальной калибровке электромагнитного поля, то трансляции нельзя представить унитарным оператором.

Предположим противное, что трансляции представимы унитарно. Тогда в силу теоремы Голдстоуна (см. (6.4), (6.5))

$$\langle 0|j_{\mu}(x)|g\rangle \neq 0, \tag{10.74}$$

где $\langle 0|$ — вакуум, а $|g\rangle$ — промежуточное состояние с нулевой массой. Но из (10.72) видно, что

$$\langle 0|j_{\mu}(x)|g\rangle = \square\langle 0|A_{\mu}(x)|g\rangle = \square \exp(iqx)\langle 0|A_{\mu}(0)|g\rangle = 0, \tag{10.75}$$

так как $q^2 = q_0^2 - \mathbf{q}^2 = 0$. Следовательно, трансляции унитарно не представимы. Как увидим ниже, это обстоятельство связано с появлением духовых состояний в пространстве с индефинитной метрикой. Действительно, напишем лагранжиан (10.30) в лоренцевой калибровке в терминах полей φ_1, $\varphi_2' = \varphi_2 - \eta$: $\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}'$:

$$\left.\begin{aligned}
\mathscr{L}_0 = &-\frac{1}{2}(\partial_{\mu}A_{\nu})^2 - \left(\frac{e_0\eta}{2}\right)^2 A_{\mu}^2 + \frac{1}{2}[(\partial_{\mu}\varphi_2')^2 + (\partial_{\mu}\varphi_1)^2] + \\
&+ e_0\eta A^{\mu}\partial_{\mu}\varphi_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{3f^2}{8}\eta^2 - \mu_0^2\right)\varphi_2'^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{f^2}{8}\eta^2 - \mu_0^2\right)\varphi_1^2;\\
\mathscr{L}' = &\ e_0^2\eta A_{\mu}\varphi_2' + e_0 A^{\mu}(\varphi_2'\partial_{\mu}\varphi_1 - \varphi_1\partial_{\mu}\varphi_2') + \frac{e_0^2}{2}A_{\mu}A^{\mu}\times\\
&\times(\varphi_1^2 + \varphi_2'^2) - \frac{f^2}{32}(\varphi_1^2 + \varphi_2'^2) - \frac{f^2}{8}\eta\varphi_2'(\varphi_2'^2 + \varphi_1^2) + \\
&+ \left(\mu_0^2\eta - \frac{f^2}{8}\eta^3\right)\varphi_2'.
\end{aligned}\right\} \tag{10.76}$$

Здесь $\mathscr{L}_0$ — лагранжиан нулевого порядка по e_0 и λ, если считать $e_0\eta$ (массу векторного мезона) и $\lambda\eta$ (где η неаналитична по λ) величинами нулевого порядка по этим константам. В низшем порядке по этим константам условие $\langle 0|\varphi_2'|0\rangle = 0$ приводит к равенству

$$\mu_0^2 = (f^2/8)\,\eta^2, \tag{10.77}$$

поэтому линейный член по φ_2' в $\mathscr{L}'$ пропадает, а поле φ_1' приобретает нулевую массу. Обозначив $m_v = e_0\eta$, $\mu_s^2 = 2\mu_0^2$, получим из $\mathscr{L}_0$ следующие уравнения движения:

$$\left.\begin{aligned} &\Box A_\mu + m_v^2 A_\mu - m_v \partial_\mu \varphi_1 = 0;\\ &\Box \varphi_1 = 0;\\ &\Box \varphi_2' + \mu_s^2 \varphi_2' = 0. \end{aligned}\right\} \tag{10.78}$$

Поле φ_2' — обычное мезонное поле с массой μ_s; что же касается полей A_μ и φ_1, то из (10.78) можно найти

$$\left.\begin{aligned} &\Box (\Box + m^2) A_\mu = 0;\\ &\Box \varphi_1 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{10.79}$$

Отсюда перестановочная функция для поля A_μ имеет вид

$$[A_\mu (x), \ A_\nu (y)] = a (g_{\mu\nu} + m^{-2}\partial_\mu\partial_\nu) \Delta (x - y, \ m^2) + + b\partial_\mu\partial_\nu D (x - y), \tag{10.80}$$

где $D (x - y)$ — перестановочная функция поля нулевой массы. Из канонических перестановочных соотношений

$$[A_\mu (\mathbf{x}, t), \dot{A}_\nu (\mathbf{y}, t)] = -\mathrm{i} g_{\mu\nu}\delta^3 (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{10.81}$$

следует, что

$$[A_\mu (x), \ A_\nu (y)] = -\mathrm{i} (g_{\mu\nu} + m^{-2}\partial_\mu\partial_\nu) \Delta (x - y, \ m^2) + + \mathrm{i} m^{-2}\partial_\mu\partial_\nu D (x - y). \tag{10.82}$$

Действуя на левую часть (10.82) оператором $\Box + m^2$ и используя (10.78) и уравнения, которым удовлетворяют $\Delta (x - y, \ m^2)$ и $D (x - y)$, получаем

$$[A_\mu (x), \ \partial_\nu\varphi_1 (y)] = -(\mathrm{i}/m) \partial_\mu\partial_\nu D (x - y) \tag{10.83}$$

или

$$[A_\mu (x), \ \varphi_1 (y)] = -(\mathrm{i}/m) \partial_\mu D (x - y), \tag{10.84}$$

т. е. для поля φ_1 из уравнений (10.78) и (10.84) следует

$$[\varphi_1 (x), \ \varphi_1 (y)] = -\mathrm{i} m D (x - y). \tag{10.85}$$

Знак минус в правой части (10.85) говорит о необычном способе квантования скалярного поля φ_1, требующем введения индефинитной метрики.

В импульсном представлении функция Грина векторного поля, квантованного согласно (10.82), имеет вид

$$G_{\mu\nu} (p^2) = \mathrm{i} \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2 + \mathrm{i}\varepsilon} \right) \frac{1}{m^2 - p^2 - \mathrm{i}\varepsilon} \tag{10.86}$$

вместо обычного выражения. Замена m^2 на $p^2 + \mathrm{i}\varepsilon$ в знаменателе приводит к уменьшению расходимости и к перенормируемости теории векторного мезонного поля, поэтому лоренцеву калибровку называют *ренормируемой R-калибровкой*. Появление индефинитной метрики, однако, требует доказательства унитарности.

Из (10.78) видно, что если перейдем, аналогично (10.44), к $B_\mu = A_\mu(x) - \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\varphi_1(x)$, то получим уравнения:

$$\left.\begin{aligned}&\Box B_\mu + m^2 B_\mu = 0;\\&\Box \varphi_1 = 0;\\&\Box \varphi_2' + \mu_s^2 \varphi_2' = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (10.87)$$

После приближенного анализа модели Хиггса в калибровке Лоренца приведем рассуждение [59], показывающее, что и в общем случае голдстоуновские частицы являются нефизическими, индефинитная же метрика не приводит к нарушению унитарности (появлению нефизических состояний). Для этого запишем лагранжиан (10.30) в произвольной релятивистской калибровке, введя в него множитель Лагранжа C, как это делалось в случае кулоновской калибровки.

Обозначим $\mathcal{L}_c = \mathcal{L} + C\partial^\mu A_\mu$, где $\mathcal{L}$ задается (10.30). Тогда для векторного поля A_μ получим уравнения

$$\left.\begin{aligned}&\partial^\mu A_\mu(x) = 0;\\&(\Box + m^2) A_\mu(x) - \partial_\mu C(x) = j_\mu.\end{aligned}\right\} \qquad (10.88)$$

Из условия сохранения тока j_μ и (10.88) следует, что

$$\Box C(x) = 0. \qquad (10.89)$$

Введем канонически-сопряженные импульсы

$$\left.\begin{aligned}&\Pi_l \equiv \delta\mathcal{L}/\delta\dot{A}_l = \dot{A}_l - \partial_l A_0, \quad \Pi_0 = \delta\mathcal{L}/\delta\dot{A}_0 = C;\\&\pi = \delta\mathcal{L}/\delta\dot{\varphi} = \dot{\varphi}^* + ie_0A_0\varphi^*, \quad \pi^* = \delta\mathcal{L}/\delta\dot{\varphi}^* = \dot{\varphi} - ie_0A_0\varphi.\end{aligned}\right\} \qquad (10.90)$$

Тогда из одновременных перестановочных соотношений

$$\left.\begin{aligned}&[A_\mu(\mathbf{x}), \Pi_\nu(\mathbf{y})] = i\delta_{\mu\nu}\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y});\\&[\varphi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = [\varphi^*(\mathbf{x}), \pi^*(\mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\end{aligned}\right\} \qquad (10.91)$$

получим:

$$\left.\begin{aligned}&[A_k(x), \dot{A}_l(y)]_{x^0=y^0} = i\,\delta_{kl}\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y});\\&[A_0(x), C(y)]_{x_0=y_0} = i\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y});\\&[\dot{A}_k(x), C(y)]_{x_0=y_0} = i\,\frac{\partial}{\partial x_k}\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y});\\&[C(x), \dot{\varphi}(y)]_{x_0=y_0} = e_0\,\varphi(y)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y});\\&[C(x), \dot{\varphi}^*(y)]_{x_0=y_0} = -e_0\,\varphi^*(y)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y});\\&[\varphi(x), \dot{\varphi}^*(y)]_{x_0=y_0} = [\varphi^*(x), \dot{\varphi}(y)]_{x_0=y_0} = i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}).\end{aligned}\right\} \qquad (10.92)$$

Три последних коммутатора получены из второго коммутатора (10.91) и коммутативности Π_0, π. Из (10.92) следует четырехмерные коммутационные соотношения для полей C, A_μ, φ_1, φ_2' вида

$$\left.\begin{aligned}
&[C(x), A_\mu(y)] = i\frac{\partial}{\partial x^\mu} D(x-y);\\
&[C(x), C(y)] = 0;\\
&[C(x), \varphi_1(y)] = -i\,[m_v + e_0\varphi_2'(y)]\,D(x-y);\\
&[C(x), \varphi_2'(y)] = ie_0\varphi_1(y)\,D(x-y).
\end{aligned}\right\} \qquad (10.93)$$

Здесь $m_v = e_0\eta$.

Рассмотрим далее асимптотические поля A_μ^{in}, C^{in}, φ_1^{in}, $\varphi_2'^{in}$, удовлетворяющие свободным уравнениям и коммутационным соотношениям:

$$\left.\begin{aligned}
&[C^{in}(x),\ A_\mu^{in}(y)] = i\partial_\mu D(x-y),\quad [C^{in}(x),\ C^{in}(y)] = 0;\\
&[C^{in}(x),\ \varphi_1^{in}(y)] = -im_v D(x-y);\\
&[A_\mu^{in}(x),\ \varphi_1^{in}(y)] = 0,\quad [C^{in}(x),\ \varphi_2'^{in}(y)] = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (10.94)$$

Но лагранжево поле $C(x)$ является искусственно введенным полем, и поэтому на физические состояния должно быть наложено условие

$$C^{in}(x)^+\,|\,\Phi_{физ}\rangle = 0. \qquad (10.95)$$

Условие (10.95) соответствует известному условию [30] квантования электромагнитного поля в формализме Гупта—Блейлера при использовании индефинитной метрики. Тем самым физические состояния строятся действием на вакуум операторов, коммутирующих с $C(x)$.

Так как поле φ_1^{in} не коммутирует с $C(x)$, оно не наблюдаемо. Не наблюдаемо и векторное поле $A_\mu(x)$. Вместо него надо ввести $B_\mu^{in}(x) = A_\mu^{in}(x) - (1/m_v)\,\partial_\mu\varphi_1^{in}(x)$, которое уже обладает свойством

$$[C^{in}(x),\ B_\mu^{in}(y)] = 0, \qquad (10.96)$$

что очевидно из (10.94).

Ввиду того что в модели Хиггса с нарушенной симметрией относительно абелевой группы лагранжево поле $C(x)$ удовлетворяет свободному уравнению (10.89), условие (10.95) сохраняется как на $-\infty$, так и на $+\infty$. Следовательно, голдстоуновские частицы, не наблюдавшиеся как in-частицы, не будут наблюдаться и как out-частицы. Настоящее рассуждение проясняет и казавшийся искусственным в кулоновской калибровке переход к полям $B_\mu(x)$, с помощью которых строятся состояния физических массивных мезонов.

Градиентная инвариантность теории требует совпадения результатов в различных калибровках. Однако само требование градиентной инвариантности означает, что, хотя симметрия относительно группы калибровочных преобразований первого рода спонтанно нарушена, симметрия относительно локальных калибровочных преобразований

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \partial_\mu \Lambda(x), \quad \varphi(x) \to \varphi(x) \exp i\Lambda(x) \tag{10.97}$$

в модели Хиггса не нарушена.

В случае произвольной калибровки $\mathscr{L}_c$ заменяется на

$$\mathscr{L}_{C_\alpha} = \mathscr{L} + C\partial^\mu A_\mu + \frac{1}{2}\alpha C^2. \tag{10.98}$$

Генератор группы локальных калибровочных преобразований имеет вид [55]

$$\begin{aligned} G(\lambda) &= \int d^3x\, [\lambda(x)\, \partial^0 C(x) - C(x)\, \partial^0 \lambda(x)] = \\ &= \int d^3x\, [\lambda(x)\, (j_0 - \partial_k F^{0k}) - C\partial^0 \lambda(x)]. \end{aligned} \tag{10.99}$$

Вышеупомянутое требование тогда формулируется как условие на состояния. Во всех калибровках физические состояния обязаны удовлетворять

$$G(\lambda)\,|\,\varphi\rangle = 0. \tag{10.100}$$

Если условие (10.100) не выполнено, то, как показал Фукс [60], спектр энергии не ограничен снизу.

Интересно отметить, что теория с условием (10.100) предполагается инвариантной относительно (10.97) при $\Lambda = \Lambda(x)$, но неинвариантной при $\lambda(x) = \mathrm{const}$.

4. Теперь рассмотрим модель Хиггса, расширенную включением спинорных полей с лагранжианом:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(x) = &-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - (\partial_\mu + i e_0 A_\mu)\, \varphi^*(x)\, (\partial^\mu - i e_0 A^\mu)\, \varphi(x) + \\ &+ \mu_0^2\, \varphi^*(x)\, \varphi(x) - \frac{1}{2} f^2 (\varphi^*(x)\, \varphi(x))^2 + \bar{\psi}(x) \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m_f\right) \psi(x) - \\ &- i e_0\, \bar{\psi}(x)\, \partial_\mu\, \psi(x)\, A^\mu(x). \end{aligned} \tag{10.101}$$

Из инвариантности относительно калибровочных преобразований $\psi(x) \to \psi(x) \exp i\alpha$, $\varphi(x) \to \varphi(x) \exp i\beta$ и локальных калибровочных преобразований $A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \partial \Lambda(x)/\partial x^\mu$, $\psi(x) \to \to \psi(x) \exp ie_0\Lambda(x)$, $\varphi(x) \to \varphi(x) \exp ie_0\lambda(x)$ следует сохранение тока $j_\mu(x) = j_\mu^{(B)}(x) + S_\mu(x)$, где токи $j_\mu^{(B)}(x)$ и $S_\mu(x)$ сохраняются по отдельности:

$$\left.\begin{aligned} &\partial_\mu j^{\mu(B)}(x) \equiv \partial_\mu (i\bar{\psi}(x)\, \gamma^\mu \psi(x)) = 0; \\ &\partial_\mu S^\mu(x) \equiv i\partial_\mu\, [(\partial^\mu + ie_0 A^\mu(x))\, \varphi^*(x)\, \varphi(x) - \\ &- \varphi^*(x)\, (\partial^\mu - ie_0 A^\mu(x))\, \varphi(x)] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{10.102}$$

Спонтанное нарушение симметрии, связанное с $\langle 0|\varphi|0\rangle = = \langle 0|\varphi^*|0\rangle = \eta \neq 0$, приводит к тому, что вакуум $|0\rangle$ инвариантен относительно барионного заряда $B = \int j_0^B(x)\, d^3x$, но неинвариантен относительно некоторого заряда $S = \int S_0(x)\, d^3x$.

Запишем (10.101) в унитарной калибровке (10.59). Тогда, обозначив $\chi = \varphi_2 - \eta$, $\psi' = \psi \exp i\lambda(x)$, где $\lambda(x)$ удовлетворяет (10.58), получим (10.101) в следующем виде:

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}'(x)\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m_f\right)\psi'(x) - \frac{1}{4}(\partial_\mu B^\nu(x) - \partial_\nu B^\mu(x))^2 -$$

$$- \frac{m^2}{2} B_\mu^2(x) - \frac{1}{2}\partial_\mu \chi(x)\partial^\mu \chi(x) - \frac{e_0^2}{2}\chi^2 B_\mu^2(x) - e_0 m\chi(x) B_\mu^2(x) +$$

$$+ \left[\mu_0^2 - \frac{3}{2} f^2\eta^2\right]\frac{\chi^2(x)}{2} - \frac{f^2}{8}\chi^4(x) + \eta\chi(x)\left(\mu_0^2 - \frac{f^2}{2}\eta^2\right) -$$

$$- \frac{\eta f^2}{2}\chi^3(x) - i\, e_0\bar{\psi}'(x)\,\partial_\mu\psi'(x)\, B^\mu(x). \qquad (10.103)$$

Ток $j_\mu(x) = j_\mu^B(x) + S_\mu(x)$ по-прежнему сохраняется, но в унитарной калибровке, как было показано выше, он приводит к нулевому полному заряду. Поэтому нетривиальный сохраняющийся барионный заряд $\int d^3x j_0^B(\mathbf{x}, t) \neq 0$ возникает в случае компенсации этого заряда зарядом $\int d^3x S_0(\mathbf{x}, t)$, что можно проверить с помощью теории возмущений.

Отметим, что ненулевой компенсирующий заряд S_0 выражается в унитарной калибровке только через поля B_μ и χ:

$$j_\mu(x) = ie_0\bar{\psi}'(x)\gamma_\mu\bar{\psi}'(x) + m^2 B_\mu(x) +$$

$$+ e_0^2\chi^2(x) B_\mu(x) + 2e_0 m B_\mu(x)\chi(x). \qquad (10.104)$$

В унитарной калибровке [после исключения поля $\varphi_1(x)$] вакуум становится инвариантным относительно калибровочного преобразования с зарядом S_0. Это странное, и на первый взгляд противоречивое, свойство связано с тем, что если до перехода к унитарной калибровке поле $\varphi(x)$ подвергнуть квантованию, то преобразование (10.60) будет некорректным, поскольку наличие градиентной инвариантности для квантованной теории означает симметрию $A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Lambda(x)$, где $\Lambda(x)$ — число, а не оператор.

5. Основную особенность модели Хиггса — возникновение ненулевой массы у векторного поля — можно понять, исходя из представления о вакууме как о проводящей плазме. Носителем заряда в этой плазме являются хиггсовские частицы, соответствующие полю $\varphi(x)$, для которого $\langle 0|\varphi(x)|0\rangle \neq 0$. Такая точка зрения на массивное векторное поле впервые была высказана Андерсоном [22] еще до появления модели Хиггса. Тот факт, что в плазме дальнодействующие кулоновские силы в силу дебаевского экранирования превращаются в короткодействующие, а переменное электромагнитное поле приобретает продольную компоненту, соответствую-

щую колебаниям с плазменной частотой ω_p и играющей роль ненулевой массы $m^2 = \omega_p^2 = \omega^2 - \mathbf{k}^2$, хорошо известен (см., например, [61]). Соответственно, и в релятивистской теории элементарных частиц возможно вакуум похож не столько на диэлектрик (как в квантовой электродинамике), образованный виртуальными парами частица — античастица, сколько на проводящую плазму. Различие появится в том, что поляризация вакуума будет содержать полюс при $p^2 = \omega^2 - \mathbf{k}^2 = 0$.

В самом деле, внешнее векторное поле $A_\mu^e(x)$ приведет к появлению индуцированного тока в плазме $j_\mu(\mathbf{k}, \omega)$, который, в свою очередь, вызовет появление экранирующего поля $A_\mu^i = 4\pi j_\mu/p^2$ (считаем, что поле A_μ^i удовлетворяет уравнению $p^2 A_\mu^i = (\omega^2 - k^2) A_\mu^i = 4\pi j_\mu$). Тем самым полное поле изменится за счет возникающей поляризации $A_\mu = A_\mu^e + A_\mu^i$. Но ток $j_\mu(\mathbf{k}, \omega)$ пропорционален полному полю A_μ

$$j_\mu(\mathbf{k}, \omega) = -K A_\mu. \tag{10.105}$$

Тогда

$$A_\mu = A_\mu^e - \frac{4\pi K}{p^2} A_\mu, \tag{10.106}$$

откуда

$$A_\mu = \frac{p^2}{p^2 - 4\pi K} A_\mu^e, \tag{10.107}$$

т. е. поле A_μ имеет полюс при $m^2 = 4\pi K$. Коэффициент K в случае плазмы равен $n e_0^2/m$, где n — плотность числа носителей заряда e_0 с массой m. Это выражение для K легко получить из выражения для тока скалярных заряженных частиц: $j_\mu = \mathrm{i} e_0 \varphi^* \overleftrightarrow{(\partial_\mu - \mathrm{i} e_0 A_\mu)} \varphi$, заменяя в $\mathbf{k}$-представлении $\varphi^*(\mathbf{k})\,\varphi(\mathbf{k})$ на n/m при $\mathbf{k} \to 0$.

Из (10.106) видно, что появление массы у векторного поля связано с возникновением «поляризации» с полюсом в $p^2 = 0$. Это обстоятельство проявляется в квантовой теории в виде особой структуры поляризационного члена в пропагаторе векторного поля модели Хиггса. Если, следуя Энглерту и Брауту [62], выделить в лагранжиане модели Хиггса свободную часть, описывающую векторное поле нулевой массы, и затем рассмотреть полную функцию Грина этого поля, то для этой функции в калибровке Фейнмана будем иметь (см., например, [53])

$$\mathrm{i} D(p^2)_{\mu\nu} = \mathrm{i}\,\frac{g_{\mu\nu}}{p^2} + \frac{\mathrm{i}}{p^2}\left(\mathrm{i} e_0^2 \Pi_{\mu\nu}(p)\right)\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2}\left(\mathrm{i} e_0^2 \Pi_{\mu\lambda}(p^2)\right) \times$$

$$\times \frac{\mathrm{i}}{p^2}\left(\mathrm{i} e_0^2 \Pi^\lambda_\nu(p^2)\right)\frac{1}{p^2} + \ldots, \tag{10.108}$$

где тензор поляризации $\Pi_{\mu\nu}(p)$ обладает в электродинамике (где A_μ взаимодействует с сохраняющим током j_μ) свойством

$$p_\mu \Pi_{\mu\nu}(p) = 0, \tag{10.109}$$

т. е.

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = -(p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu)\,\Pi(p^2). \tag{10.110}$$

Таким образом, из (10.108), используя формулу суммирования геометрической прогрессии, получаем:

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\,D(p^2)_{\mu\nu} &= \mathrm{i}\,\frac{g_{\mu\nu}}{p^2} - \frac{i}{p^2}\,e_0^2\,g_{\mu\nu}\,\Pi(p^2) + \frac{\mathrm{i}}{p^2}\,e_0^4\,g_{\mu\nu}\,\Pi^2(p^2) + \ldots = \\ &= \mathrm{i}\,\frac{g_{\mu\nu}}{p^2}\,\frac{1}{1 + e_0^2\,\Pi(p^2)}\,. \end{aligned} \tag{10.111}$$

а *б*

Рис. 1. Диаграммы Фейнмана, дающие вклад в тензор поляризации (в случае *а* вершине соответствует e_0^2, в случае *б* — $\mathrm{i}p_\mu e_0/\sqrt{2}$):
~~~~~ фотонный пропагатор; — — — — —член $\langle 0|\varphi_2|\rangle$;
. . . . — пропагатор голдстоуновской частицы i/p^2

В модели Хиггса, где $\langle 0|\varphi_2|0\rangle = \eta \neq 0$, а поле $\varphi_1(x)$ описывает голдстоуновское поле, необходимо учесть диаграммы, дающие вклад в тензор поляризации.

Из рис. 1 видно, что

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(p) &= [g_{\mu\nu}\langle 0|\varphi_2|0\rangle^2 - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\langle 0|\varphi_2|0\rangle^2] = \\ &= \eta^2\,[p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu]\,\frac{1}{p^2}\,, \end{aligned} \tag{10.112}$$

отсюда из (10.108), (10.110), (10.111) получим

$$\mathrm{i}\,D(p^2)_{\mu\nu} = \mathrm{i}\,\frac{g_{\mu\nu}}{p^2}\,\frac{1}{1 - e_0^2\,\eta^2/p^2} = \mathrm{i}\,\frac{g_{\mu\nu}}{p^2 - e_0^2\,\eta^2}\,, \tag{10.113}$$

т. е. за счет полюса при $p^2 = 0$ в тензоре поляризации получаем массу $e_0\eta$ векторного поля.

Возникновение такого полюса в модели Хиггса связано с голдстоуновскими частицами. С другой стороны, это свойство можно рассматривать и независимо от модели, так что в принципе возможны и другие схемы получения массы у первоначально безмассовой векторной частицы (см., например, предложенную Швингером [63] модель двумерной электродинамики).
~~~~~

§ 11. МОДЕЛЬ КИББЛА

Первоначально изученный в модели с абелевой группой симметрии феномен Хиггса был затем рассмотрен в моделях с неабелевой группой. Эти модели являются моделями типа Янга—Миллса [52]. Феномен Хиггса в них состоит в том, что первоначально безмассовые векторные поля приобретают массу в результате спонтанного нарушения симметрии, когда вакуум неинвариантен относительно преобразования симметрии скалярных («хиггсовских») полей, взаимодействующих с векторными полями. Как известно [64, 65], модель Янга—Миллса с безмассовыми векторными полями является перенормируемой. Однако, кроме электромагнитного поля, в природе нет других безмассовых векторных полей. Введение же ненулевой массы непосредственно в лагранжиан свободного векторного поля в модели Янга—Миллса делает теорию неперенормируемой. В то же время есть основания (см., например, [52]) думать, что взаимодействие в физике элементарных частиц устроено по типу модели Янга—Миллса. Поэтому большой энтузиазм среди физиков-теоретиков вызвали работы Т'Хуфта [66], Ли [67, 68] и др., показавших перенормируемость модели Янга—Миллса в случае, когда ненулевая масса векторного мезона возникает по механизму Хиггса. Появилось множество работ, посвященных возможности единого описания слабого и электромагнитного (а в ряде работ и сильного) взаимодействий в рамках перенормируемой теории.

В настоящем параграфе мы не будем касаться этих работ, а рассмотрим простейшую модель с неабелевой группой и хиггсовским механизмом нарушения симметрии — модель Киббла [55]. Это связано с тем, что в отечественной литературе имеются достаточно подробные монографии [52, 64], посвященные моделям Янга — Миллса.

Рассмотрим лагранжиан модели Янга—Миллса, инвариантный относительно локальной калибровочной группы $SU(2)$ и описывающий взаимодействующие, первоначально безмассовые векторные поля $\mathbf{b}_\mu(x)$ (здесь стрелка означает вектор в изотопическом пространстве), спинорное поле $\psi(x)$ и скалярное хиггсовское поле, $\Phi(x)$, преобразующееся как $SU(2)$-дублет $\Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi^+ (x) \\ \Phi^0 (x) \end{pmatrix}$:

$$\mathscr{L}(x) = -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\mathbf{b}_\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\mathbf{b}_\mu(x) + g\mathbf{b}_\mu(x)\,\mathbf{b}_\nu(x)\right)^2 -$$

$$-\Psi(x)\,\gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ig\frac{\tau}{2}\mathbf{b}^\mu(x)\right)\Psi(x) - \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + ig\frac{\tau}{2}\mathbf{b}_\mu(x)\right)\times$$

$$\times\,\Phi^*(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ig\frac{\tau}{2}\mathbf{b}^\mu(x)\right)\Phi(x) + \mu_0^2\,\Phi^*(x)\,\Phi(x) -$$

$$-\frac{1}{2}f^2\left(\Phi^*(x)\,\Phi(x)\right)^2. \tag{11.1}$$

Здесь $\Phi^*(x)\,\Phi(x) = \Phi^{+*}(x)\,\Phi^+(x) + \Phi^0(x)\,\Phi^0(x)$;

τ — матрицы Паули.

Лагранжиан (11.1) инвариантен относительно группы глобальных калибровочных преобразований:

$$\begin{gathered}\Psi(x) \to \Psi(x) \exp \mathrm{i}\alpha;\\ \Phi(x) \to \Phi(x) \exp \mathrm{i}\alpha;\\ \mathbf{b}_\mu(x) \to \mathbf{b}_\mu(x),\end{gathered} \qquad (11.2)$$

приводящей к сохранению тока

$$j_\mu(x) = \mathrm{i}\,[\overline{\Psi}(x)\,\gamma_\mu\,\Psi(x) + \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \mathrm{i}g\frac{\tau}{2}\,\mathbf{b}_\mu(x)\right)\Phi^*(x)\,\Phi(x) -$$
$$-\Phi^*(x)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \mathrm{i}g\,\frac{\tau}{2}\,\mathbf{b}_\mu(x)\right)\Phi(x), \qquad (11.3)$$

и изотопических неабелевых калибровочных преобразований, имеющих вид:

$$\left.\begin{aligned}\Psi'(x) &= \left[1 + \mathrm{i}\alpha\frac{\tau}{2}\right]\Psi(x);\\ \Phi'(x) &= \left[1 + \mathrm{i}\alpha\frac{\tau}{2}\right]\Phi(x);\\ b'_\mu(x) &= \mathbf{b}_\mu(x) + \mathbf{b}_\mu(x) \times \mathbf{a}.\end{aligned}\right\} \qquad (11.4)$$

Следовательно, сохраняется ток изотопического спина:

$$\mathbf{T}_\mu(x) = \mathrm{i}\overline{\Psi}(x)\,\gamma_\mu\,\frac{\tau}{2}\,\Psi(x) + \mathrm{i}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \mathrm{i}g\,\frac{\tau}{2}\,\mathbf{b}_\mu(x)\right)\Phi^*(x)\,\frac{\tau}{2}\,\Phi(x) -\right.$$
$$\left.-\Phi^*(x)\frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \mathrm{i}g\,\frac{\tau}{2}\,\mathbf{b}_\mu(x)\right)\Phi(x)\right] + \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}\,\mathbf{b}_\nu(x) -\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial x^\nu}\,\mathbf{b}_\mu(x) + g\mathbf{b}_\mu(x) \times \mathbf{b}_\nu(x)\right] \times \mathbf{b}^\nu(x). \qquad (11.5)$$

Здесь «$\times$» — знак векторного произведения в изотопическом пространстве.

Если электрический заряд определяется равенством

$$Q = \frac{1}{2}\int d^3x j_0(\mathbf{x},\ t) + \int d^3x T_0(\mathbf{x},\ t), \qquad (11.6)$$

то $\Phi^+(x)$ несет заряд «+», а $\Phi^0(x)$ обладает нулевым зарядом.

Специфика лагранжиана (11.1) состоит в том, что кроме глобальных калибровочных преобразований он инвариантен относительно локальных калибровочных преобразований, поэтому в (11.4) α можно заменить функцией точки пространства — времени $\alpha(x)$, при этом в (11.1) векторное поле преобразуется согласно правилу

$$\mathbf{b}'_\mu(x) = \mathbf{b}_\mu(x) + \mathbf{b}_\mu(x) \times \alpha(x) + \frac{1}{g}\,\frac{\partial}{\partial x^\mu}\,\alpha(x), \qquad (11.7)$$

т. е. подвергается добавочному градиентному преобразованию. Свойство градиентной инвариантности (11.1) очень важно, так как именно оно приводит к перенормируемости теории. Поэтому, если в результате механизма Хиггса будет спонтанно нарушена глобальная калибровочная инвариантность и возникнет ненулевая масса у векторных мезонов $\mathbf{b}_\mu$, сохранение градиентной инвариантности по-прежнему приведет к перенормируемости теории.

Ввиду того что модель Янга—Миллса содержит нелинейное самодействие векторных мезонов, доказательство перенормируемости в этой модели выглядит более сложно, чем в квантовой электродинамике. Важную роль при этом играют полученные А. А. Славновым [64] тождества, обобщающие известные тождества Уорда в электродинамике. Здесь мы не будем обсуждать подробно проблему перенормируемости модели Янга—Миллса, отсылая читателя к работе [64].

Отметим следующие особенности модели Киббла, отличающие ее от модели Хиггса. Рассматривая в (11.1) лишь часть, описывающую поле $\mathbf{b}_\mu$ (полагая $\Phi(x) = 0$ и $\Psi(x) = 0$), получим уравнения поля

$$\left.\begin{aligned} &\Box\, \mathbf{b}^\mu - 2g\partial_\nu [\mathbf{b}^\mu \times \mathbf{b}^\nu] + 2g\mathbf{b}_\nu \times \mathbf{b}^{\mu\nu} = 0; \\ &\mathbf{b}^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\mathbf{b}^\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\mathbf{b}^\mu + g\mathbf{b}^\mu \times \mathbf{b}^\nu, \end{aligned}\right\} \tag{11.8}$$

поэтому в отличие от электродинамики, в которой $C = \partial_\mu \mathbf{b}^\mu$ удовлетворяет свободному уравнению

$$\Box C(x) = 0, \tag{11.9}$$

из (11.8) следует

$$\Box C(x) = 2g\partial_\mu [\mathbf{b}^\mu \times \mathbf{C}] \neq 0. \tag{11.10}$$

Последнее обстоятельство приводит к тому, что если попытаться проквантовать теорию в калибровке Лоренца в формализме Гупта—Блейлера, то видно, что в силу (11.10), невозможно определить положительную и отрицательную частотные части $C(x)$ для всех моментов времени. Поэтому если в формализме Гупта—Блейлера наложено условие на поле C и состояния $|\Psi\rangle$ при $t \to -\infty$

$$C^+_{\text{in}} |\Psi\rangle = 0, \tag{11.11}$$

то в дальнейшем в силу взаимодействия C с полем $\mathbf{b}_\mu$ необходимо компенсировать вклад нефизических (духовых) состояний, введя добавочные фиктивные скалярные частицы, удовлетворяющие, однако, ферми-статистике. Эти фиктивные частицы получили название духовых частиц Фаддеева—Попова, поскольку смысл их введения с математической точки зрения наиболее прозрачен при изложении модели Янга—Миллса на языке континуальных интегралов, что и было осуществлено Л. Д. Фаддеевым и В. Н. Поповым [52]. Теория, инвариантная относительно градиентных преобразований, в случае, когда $\alpha(x)$ есть c-функция, не обязана быть инвариантной относительно таких же преобразований, когда $\alpha(x)$ — квантованное поле. Поэтому возникает вопрос о выборе физической калибровки [72], в которой имелось бы ясное истолкование полей в терминах наблюдаемых частиц. В модели Киббла такой калибровкой является унитарная калибровка. При этом, как и в модели Хиггса, в классической теории поля с лагранжианом производят $SU(2)$-вращение так, чтобы исключить поле $\Phi^+(x)$:

$$\Phi'(x)=\exp\left(\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}(x)\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\right)\Phi(x)=\left(\cos\frac{\alpha(x)}{2}+\mathrm{i}\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\sin\frac{\alpha(x)}{2}\right)\Phi(x), \tag{11.12}$$

где введены обозначения

$$\alpha(x)\equiv|\boldsymbol{\alpha}(x)|,\quad \boldsymbol{\alpha}(x)=|\boldsymbol{\alpha}(x)|\,\mathbf{e}. \tag{11.13}$$

Тогда

$$\Phi^{+\prime}(x)=\left[\cos\frac{\alpha(x)}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\alpha(x)}{2}e_z\right]\Phi^+(x)+\mathrm{i}(e_x-\mathrm{i}\,e_y)\sin\frac{\alpha(x)}{2}\Phi^0(x); \tag{11.14}$$

$$\Phi^{0\prime}(x)=\left[\cos\frac{\alpha(x)}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{\alpha(x)}{2}e_z\right]\Phi^0(x)+\mathrm{i}(e_x+\mathrm{i}\,e_y)\sin\frac{\alpha(x)}{2}\Phi^+(x),$$

откуда $\Phi^{+\prime}(x)=0$ при

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha(x)}{2}=-\frac{\Phi^+(x)\,\Phi^{0*}(x)+\Phi^0(x)\Phi^{+*}(x)\pm\mathrm{i}\,(\Phi^+(x)\Phi^{0*}(x)-\Phi^0(x)\,\Phi^{+*}(x))}{2\,|\Phi^0(x)|^2}. \tag{11.15}$$

Как и в модели Хиггса, спонтанное нарушение симметрии, выражающееся в квантовой теории как

$$\langle 0|\Phi'^*(0)|0\rangle=\langle 0|\,\Phi'(0)|0\rangle=\eta\neq 0, \tag{11.16}$$

учитываем, переходя к сдвинутым полям $\chi=\Phi^{0\prime}-\eta$. При этом лагранжиан (11.1) будет иметь вид

$$\mathscr{L}(x)=-\frac{\partial}{\partial x^\mu}\chi^*(x)\frac{\partial}{\partial x_\mu}\chi(x)+\mathrm{i}\frac{g}{2}\left[(\chi^*(x)+\eta)\,b_\mu'^3\frac{\partial}{\partial x_\mu}\chi(x)-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\chi^*(x)\,b_\mu'^3(x)\,(\chi(x)+\eta)\right]-\frac{g^2}{4}\mathbf{b}_\mu'(x)\,\mathbf{b}'^\mu(x)\,[\chi(x)\,\chi^*(x)+$$
$$+(\chi^*(x)+\chi(x))\,\eta+\eta^2]+\mu_0^2(\chi(x)+\eta)^*(\chi(x)+\eta)-\frac{1}{2}f^2[(\chi(x)+$$
$$+\eta)(\chi^*(x)+\eta)]^2-\overline{\Psi'}(x)\,\gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}-\mathrm{i}g\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\mathbf{b}'^\mu(x)\right)\Psi'(x)-\frac{1}{4}\mathbf{f}_{\mu\nu}\mathbf{f}^{\mu\nu}. \tag{11.17}$$

Здесь штрихи при Ψ и b^μ означают векторные и спинорные поля в унитарной калибровке.

Из выражения

$$\mathbf{b}_\mu(x)\,\mathbf{b}^\mu(x) = 2\,\frac{b^1_\mu(x)+\mathrm{i}b^2_\mu(x)}{\sqrt{2}}\;\frac{b^\mu_1(x)-\mathrm{i}b^\mu_2(x)}{\sqrt{2}} + b_{\mu 3}\,b^{\mu 3} \tag{11.18}$$

видно, что как заряженные векторные поля

$$\mathbf{b}^+_\mu(x) = \frac{b^1_\mu(x)+\mathrm{i}b^2_\mu(x)}{\sqrt{2}}, \quad b^-_\mu(x) = \frac{b^1_\mu(x)-\mathrm{i}b^2_\mu(x)}{\sqrt{2}}, \tag{11.19}$$

так и нейтральные поля b^3_μ приобретают одинаковую ненулевую массу $(1/\sqrt{2})\,g\eta$.

Квантование полей, описываемых $\mathscr{L}(x)$, можно проводить двумя способами: или сразу выделить массовый член для векторных мезонов в часть, описывающую свободное поле, или, следуя Энглерту и Брауту [62], истолковывать все члены, содержащие $\mathbf{b}_\mu$, кроме $-(1/4)\,\mathbf{f}_{\mu\nu}\mathbf{f}^{\mu\nu}$, как взаимодействие. Во втором случае, так же как и в модели Хиггса, тензор поляризации в полной функции Грина векторного поля содержит полюс при $p^2 = 0$, что ведет к ненулевой массе векторного мезона. Функция Грина векторного поля в унитарной калибровке имеет вид

$$G_{\mu\nu}(p) = -\mathrm{i}\,(g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu/m^2)/(p^2 - m^2). \tag{11.20}$$

Наличие членов вида $p_\mu p_\nu$ делает сомнительной перенормируемость теории. Поэтому доказательство перенормируемости потребовало значительных усилий от теоретиков. Оно основано на эквивалентности теории в унитарной калибровке теориям, получаемым градиентным преобразованием. Требование градиентной инвариантности S-матрицы приводит к тому, что если в какой-то калибровке мы получаем перенормируемую теорию, то это свойство перенормируемости сохраняется и в других (в частности, в унитарной) калибровках. Однако соответствующее градиентное преобразование производится уже не только с c-, но и с q-числами (операторами). Поэтому в калибровках, где теория явно перенормируема, появляются добавочные частицы — голдстоуновские мезоны и духи Фаддеева—Попова, отсутствующие в унитарной калибровке.

Чтобы проиллюстрировать возникающую здесь ситуацию, рассмотрим квантование модели Киббла в так называемой калибровке Т'Хуфта—Фейнмана [73]. В отличие от унитарной калибровки в теории присутствуют поля Φ^+, Φ^-, так что в квадратичную по полям $\mathbf{b}_\mu$ часть лагранжиана (11.1) после замены Φ на $\Phi - \eta$ векторные поля входят в комбинации

$$\tilde{b}^\pm_\mu = b^\pm_\mu \mp \partial_\mu \Phi^\pm/m.$$

Поэтому квантование полей Φ^+ в принципе может привести к компенсации членов $p_\mu p_\nu/m^2/(p^2 - m^2)$ в пропагаторе (11.20), так что вместо (11.20) получим пропагатор

$$G^F_{\mu\nu}(p) = -\mathrm{i}g_{\mu\nu}/(p^2 - m^2). \tag{11.21}$$

Пропагатор в таком виде получится в калибровке Лоренца, которая, однако, должна быть наложена на поля b^0_μ и $b^\pm_\mu$. Предполагая, что свободные поля $\Phi^\pm$ удовлетворяют свободным уравнениям с той же массой m, условие $\partial^\mu b^\pm_\mu = 0$ можно заменить на $\partial^\mu b^\pm_\mu = \pm m\Phi^\pm$. Наложение этого условия приводит к изменению лагранжиана, так что к (11.1) добавляются

$$\Delta\mathscr{L} = -\frac{1}{2}(\partial^\mu b^3_\mu)^2 - (\partial^\mu b^+_\mu + m\Phi^+)(\partial^\mu b^-_\mu - m\Phi^-) =$$

$$= -\frac{1}{2}(\partial^\mu \mathbf{b}_\mu - g\mathbf{\Phi}\times\boldsymbol{\eta})^2, \tag{11.22}$$

где

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ m/g \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11.23}$$

Из лагранжиана $\mathscr{L}' = \mathscr{L} + \Delta\mathscr{L}$, где $\mathscr{L}$ определен формулой (11.1) следует, что $\boldsymbol{\xi} = \partial^\mu \mathbf{b}_\mu - g\mathbf{\Phi}\times\boldsymbol{\eta}$ не удовлетворяет свободному уравнению так же, как и $\mathbf{C}$ уравнению (11.10). Вариации по $\mathbf{b}_\mu$ и $\mathbf{\Phi}$ приводят к следующему уравнению для $\boldsymbol{\xi}$ [73]:

$$\partial_\nu D_\nu \boldsymbol{\xi} - g^2\boldsymbol{\eta}\times[\mathbf{\Phi}\times\boldsymbol{\xi}] = 0, \tag{11.24}$$

где $D_\nu\boldsymbol{\xi} \equiv \partial_\nu\boldsymbol{\xi} - 2g\mathbf{b}_\nu\times\boldsymbol{\xi}$. Сравнивая уравнение (11.10) с (11.24) видим, что оно следует из (11.24) в случае отсутствия спонтанного нарушения симметрии (когда $\boldsymbol{\eta} = 0$). Из (11.24) видно, что в теории со спонтанным нарушением симметрии положение еще сложнее, чем в обычной модели Янга—Миллса в калибровке Лоренца: поле $\boldsymbol{\xi}$ взаимодействует не только с $\mathbf{b}_\mu$, но и с хиггсовским полем $\mathbf{\Phi}$. В формализме Гупта—Блейлера это ведет к возможности рождения при $t\to+\infty$ множества новых («дурных» по терминологии работы [74]) духов, отсутствовавших на $-\infty$. Все эти «дурные» духи должны быть скомпенсированы введением новых частиц-духов Фаддеева—Попова, отсутствующих на $\pm\infty$, так что только после введения этих фиктивных частиц можно полностью восстановить унитарность и градиентную инвариантность теории. Эти поля должны удовлетворять тому же уравнению (11.24), что и $\boldsymbol{\xi}$. Поэтому добавка к лагранжиану $\mathscr{L}' = \mathscr{L} + \Delta\mathscr{L}$ имеет вид

$$\mathscr{L}_a = \partial^\mu \mathbf{a}^* D_\mu \mathbf{a} - g^2\boldsymbol{\eta}\times[\mathbf{a}^*\times[\mathbf{\Phi}\times\mathbf{a}]] = \partial^\mu\mathbf{a}^*\partial_\mu\mathbf{a} - m^2(a^*_+ a_- + a^*_- a_+) +$$

$$+ g\mathbf{b}^\mu\times[\partial_\mu\mathbf{a}^*\times\mathbf{a}] - gm\chi(a^*_+ a_- + a^*_- a_+) + gma_3(a^*_+\Phi_- + a^*_-\Phi^+). \tag{11.25}$$

Пропагаторы полей $a_\pm$, a_3 имеют вид:

$$\overline{a_\pm^* \, a_\mp} = \mathrm{i}/(k^2 - m^2), \; \overline{a_3^* \, a_3} = \mathrm{i}/k^2. \qquad (11.26)$$

$\mathscr{L}_a$ не является эрмитовым оператором, поэтому правила построения S'-матрицы (в частности, доказательство ее унитарности) отличны от обычных. Так, вместо комплексно сопряженного матричного элемента следует брать матричный элемент процесса, в котором частицы a заменены античастицами.

Неэрмитовость лагранжиана (11.25) естественно связана с назначением фиктивных частиц Фаддеева—Попова — компенсировать члены S'-матрицы, ведущие к нарушению унитарности и градиентной инвариантности. В то же время это показывает, что квантовая градиентно-инвариантная теория Янга—Миллса не является обычной лагранжевой теорией, поскольку непротиворечивое квантование требует изменения исходного классического лагранжиана. Появление духов Фаддеева—Попова математически иллюстрируется в подходе к квантовой теории, использующем метод континуального интеграла [52], где видна непосредственная связь этого явления с требованием градиентной инвариантности.

Неэрмитова добавка к лагранжиану возникает также при квантовании обычного (не янг-миллсовского) массивного [30, 69] векторного поля, где ее появление необходимо для компенсации членов вида $(1/m^2)\,\delta_{l_0}\,\delta_{n_0}\,\delta\,(x)$ [30, 69] в функции Грина векторного поля. Конечно, в этом случае данная добавка не интерпретируется на языке фиктивных частиц. В случае же модели Янга—Миллса Фейнманом, Де Виттом, Л. Д. Фаддеевым и В. Н. Поповым была предложена интерпретация неэрмитовой добавки к лагранжиану на языке фиктивных скалярных ферми-частиц. При формулировке квантовой модели Янга—Миллса на языке континуального интеграла учет калибровочного условия Лоренца при соответствующей замене переменных интегрирования приводит к появлению множителя, изменяющего выражение действия в производящем функционале

$$S \to S_{\text{эф}} = \int d^4x \mathscr{L}\,(x) - \mathrm{i}Tr \ln M, \qquad (11.27)$$

где $\mathrm{i}Tr \ln M$ как раз имеет вид $\int d^4x \mathscr{L}_a\,(x)$, определяемый формулой (11.25).

Функция Грина (11.21) приводит к перенормируемости модели Киббла. Теория унитарна в калибровке Т'Хуфта — Фейнмана в силу уже упомянутой компенсации. В то же время унитарность S-матрицы гарантирована в силу градиентной инвариантности S-матрицы, поскольку S-матрица унитарна в унитарной калибровке.

В последнее время при исследовании классических решений моделей Янга—Миллса и Киббла были обнаружены некоторые необычные свойства этих моделей, связанные с решениями типа магнитного монополя Дирака (см. [87, 88]). Разбор этих решений, однако, выходит за рамки настоящей монографии.

§ 12. ЕДИНАЯ ТЕОРИЯ СЛАБОГО И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВАЙНБЕРГА — САЛАМА

Модель Киббла положена в основу единой теории слабого и электромагнитного взаимодействий Вайнберга—Салама [57, 70].

Как известно, теория слабого взаимодействия, основывающаяся на фермиевском взаимодействии, имеющем вид произведения тока на ток, обладает следующими недостатками:

а) использование первого приближения теории возмущений по константе слабого взаимодействия G противоречит условию унитарности начиная со значения энергии, квадрат которого есть $S_k = 2{,}5 \cdot 10^6$ $Гэв^2$;

б) теория неперенормируема.

Приведенная выше цифра легко получается из соотношений для сечения σ

$$\sigma \sim G^2 S, \tag{12.1}$$

что следует из размерности константы $G \sim 10^{-5}\, m_p^{-2}$ и из условия унитарности

$$\sigma \sim 1/S, \tag{12.2}$$

поэтому S_k находят, приравнивая (12.1) и (12.2).

Попытки преодоления вышеуказанных трудностей привели к появлению теорий слабого взаимодействия, использующих понятие промежуточного векторного бозона с ненулевой массой, играющего в слабом взаимодействии ту же роль, что фотон в электродинамике. Тогда лагранжиан слабого взаимодействия похож на лагранжиан электромагнитного взаимодействия

$$\mathscr{L}_w = g_w\, [J_\mu w^\mu + \text{э. с.}]. \tag{12.3}$$

Отличие состоит в том, что векторный мезон w^μ уже имеет ненулевой электрический заряд. Ток J_μ в отличие от электрического тоже будет заряженным. Например, таков лептонный ток $J_\mu^l = \overline{\Psi}_e(x)\gamma_\mu(1-\gamma_5)\Psi_{\nu e}(x) + \overline{\Psi}_\mu\gamma_\mu(1-\gamma_5)\Psi_{\nu\mu}(x)$, где Ψ_e, Ψ_μ — операторы поля электронов и μ^--мезонов; $\Psi_{\nu e}$, $\Psi_{\nu\mu}$ — операторы полей электронного и мюонного нейтрино соответственно.

Обычный фермиевский лагранжиан слабого взаимодействия получается во втором порядке по g_w, так что в функции Грина векторного мезона в предположении малой передачи энергии — импульса (w-мезон виртуальный!)

$$\frac{g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / m_w^2}{k^2 - m_w^2} \to \frac{g_{\mu\nu}}{m_w^2},$$

т. е.

$$g_w^2/m_w^2 = G/\sqrt{2}. \tag{12.4}$$

Из (12.4) можно получить различные оценки для массы промежуточного векторного мезона в зависимости от константы g_w.

Имеется возможность связать константу g_w с постоянной электромагнитного взаимодействия. Основываясь на этом, Салам и Уорд [75] предложили схему единого рассмотрения электромагнитного и слабого взаимодействий, где одновременно с массивными w-мезонами участвуют фотоны. Однако первоначально теория слабого взаимодействия с промежуточным векторным мезоном столкнулась с той трудностью, что она так же, как и фермиевская теория, неперенормируема из-за вида функции Грина векторного поля.

Новая вспышка интереса к этим теориям после периода затишья возникла вследствие доказательства перенормируемости модели Киббла. Привлекательность единой теории слабого и электромагнитного взаимодействий связана с возможностью получить ответ на фундаментальный вопрос: почему вообще в природе есть слабое взаимодействие?

В последнее время появились модели единых теорий [76], в которых предполагается, что спонтанное нарушение симметрии, приводящее к разделению электромагнитного и слабого взаимодействий, произошло в некоторый момент эволюции Вселенной. До этого момента слабое взаимодействие было дальнодействием и при полной симметрии относительио неабелевой группы ничем не отличалось от электромагнитного взаимодействия.

Первой перенормируемой, если не учитывать так называемых адлеровских аномалий [64], моделью слабого и электромагнитного взаимодействий лептонов явилась модель Вайнберга—Салама [57, 70].

Единое описание таких частиц, как электроны и нейтрино, возможно, если считать их все первоначально безмассовыми. Для безмассовых спинорных частиц возможно разделение их на левые и правые:

$$\Psi(x)=\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\Psi(x)+\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\Psi(x)\equiv\Psi^L(x)+\Psi^R(x).$$

Введем обозначения:

$$L(x)=\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\begin{pmatrix}\nu(x)\\ e(x)\end{pmatrix};\quad R(x)=e_R=\frac{1}{2}(1-\gamma_5)e. \qquad (12.5)$$

Объединив нейтрино и электрон в один столбец, предположим, что они преобразуются по представлению некоторой группы внутренних преобразований $SU(2)$. Поскольку мы хотим, чтобы в нашей модели в результате механизма Хиггса возникло различие между электроном и нейтрино, то электрон будет представлен в лагранжиане не только членами, содержащими $L(x)$, но и $R(x)$, являющимся $SU(2)$-синглетом.

Лагранжиан, инвариантный относительно локальных $SU(2)$-преобразований, имеет вид

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\mathbf{b}_{\nu}(x) - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\mathbf{b}_{\mu}(x) + g\mathbf{b}_{\mu}(x)\times\mathbf{b}_{\nu}(x)\right)^2 -$$
$$-\bar{L}(x)\gamma_{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - \mathrm{i}g\frac{\tau}{2}\mathbf{b}^{\mu}(x)\right)L(x) - \bar{R}(x)\gamma_{\mu}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}R(x). \quad (12.6)$$

Если мы добавим к $\mathcal{L}(x)$ часть, описывающую хиггсовские мезоны, и за счет спонтанного нарушения симметрии получим ненулевую массу векторных мезонов, то в возникающей теории не будет места для электромагнитного поля, поскольку у всех векторных частиц будет одна и та же масса. Поэтому Вайнберг [57] ввел еще одно векторное поле a_{μ}, группу же симметрии локальных калибровочных преобразований он расширил с $SU(2)$ до $SU(2)\otimes U(1)$. При этом лептонам приписывается лептонный гиперзаряд Y, так что элементы дублета (12.5) обладают $Y = -1$, а синглет e_R характеризуется $Y = -2$. Электрический заряд получается тогда из формулы вида Гелл-Мана—Нишиджимы:

$$Q = T_L^3 + Y/2, \quad (12.7)$$

где T_L^3 — третья компонента лептонного изотопического спина, соответствующего вышеуказанной группе. Лагранжиан, инвариантный относительно локальных $SU(2)\otimes U(1)$ преобразований, имеет вид

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\mathbf{b}_{\nu}(x) - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\mathbf{b}_{\mu}(x) + g\mathbf{b}_{\mu}(x)\times\mathbf{b}_{\nu}(x)\right)^2 -$$
$$-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}a_{\nu}(x) - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}a_{\mu}(x)\right)^2 - \bar{R}(x)\gamma_{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - \mathrm{i}g' a^{\mu}(x)\right)R(x) -$$
$$-\bar{L}(x)\gamma_{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - \mathrm{i}\frac{g'}{2}a^{\mu}(x) - \mathrm{i}g\frac{\tau}{2}\mathbf{b}^{\mu}(x)\right)L(x). \quad (12.8)$$

Однако не $a_{\mu}(x)$ описывает электромагнитное поле, а некоторая комбинация $a_{\mu}(x)$, $b_{\mu}^3(x)$. Для того чтобы найти эту комбинацию, распишем подробнее взаимодействие

$$\mathrm{i}g\bar{R}(x)\gamma_{\mu}a^{\mu}(x)R(x) + \mathrm{i}\bar{L}(x)\left[\gamma_{\mu}\left(\frac{g'}{2}a^{\mu}(x) + g\frac{\tau_3}{2}b_3^{\mu}(x)L(x)\right)\right] =$$
$$= \mathrm{i}\bar{e}(x)\gamma_{\mu}\left[g' a^{\mu}(x)\frac{1-\gamma_5}{2} + \frac{g'}{2}a^{\mu}(x)\frac{1+\gamma_5}{2} - \frac{g}{2}b_3^{\mu}(x)\times\right.$$
$$\left.\times\frac{1+\gamma_5}{2}\right]e(x) + \mathrm{i}\bar{\nu}(x)\gamma_{\mu}\left[\frac{g'}{2}a^{\mu}(x) + \frac{g}{2}b_3^{\mu}(x)\right]\frac{1+\gamma_5}{2}\nu(x). \quad (12.9)$$

Из (12.9) видно, что если мы хотим, чтобы нейтрино было электрически нейтральной частицей, то

$$Z^{\mu}(x) = \frac{c}{2}(g'a^{\mu}(x) + gb_3^{\mu}(x)), \quad (12.10)$$

где c — нормирующий множитель, следует объявлять нейтральным векторным мезоном.

Из канонических коммутационных соотношений, считая поля $a^{\mu}(x)$ и $b_3^{\mu}(x)$ независимыми, получаем

$$(c^2/4)(g'^2 + g^2) = 1, \tag{12.11}$$

т. е.

$$Z^{\mu}(x) = (g^2 + g'^2)^{-1/2}[g'a^{\mu}(x) + b_3^{\mu}(x)]. \tag{12.12}$$

Другая независимая комбинация $a^{\mu}(x)$ и $b_3^{\mu}(x)$ дает электромагнитное поле

$$A^{\mu}(x) = aa^{\mu}(x) + bb_3^{\mu}(x), \tag{12.13}$$

где из канонических коммутационных соотношений для $A^{\mu}(x)$ и сопряженных импульсов, а также из условия канонической независимости $A^{\mu}(x)$ и $Z^{\mu}(x)$ получим

$$a^2 + b^2 = 1; \quad g'a + bg = 0, \tag{12.14}$$

откуда

$$A^{\mu}(x) = (g^2 + g'^2)^{-1/2}(ga^{\mu}(x) - g'b_3^{\mu}(x)), \tag{12.15}$$

или

$$a^{\mu}(x) = (g^2 + g'^2)^{-1/2}(g'Z^{\mu}(x) + gA^{\mu}(x));$$

$$b_3^{\mu}(x) = (g^2 + g'^2)^{-1/2}((gZ^{\mu}(x) - g'A^{\mu}(x)), \tag{12.16}$$

т. е.

$$\mathscr{L}^0 = \mathrm{i}g'\,\overline{R}(x)\,\gamma_{\mu}a^{\mu}(x)\,R(x) + \mathrm{i}\,\overline{L}(x)\left[\gamma_{\mu}\left(\frac{g'}{2}a^{\mu}(x) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + g\frac{\tau_3}{2}b_3^{\mu}(x)\right)\right]L(x) = \left(\frac{g^2 + g'^2}{2}\right)^{1/2}\mathrm{i}\bar{\nu}(x)\,\gamma_{\mu}\frac{1+\gamma_5}{2}\nu(x)\,Z^{\mu}(x) +$$

$$+ \frac{gg'}{(g^2 + g'^2)^{1/2}}\mathrm{i}\bar{e}(x)\,\gamma_{\mu}e(x)\,A^{\mu}(x) + \mathrm{i}\bar{e}(x)\left[\gamma_{\mu}\frac{3g'^2 - g^2}{4(g^2 + g'^2)^{1/2}} - \right.$$

$$\left. - \gamma_{\mu}\gamma_5\frac{(g^2 + g'^2)^{1/2}}{4}\right]e(x)Z^{\mu}(x). \tag{12.17}$$

Естественно положить

$$gg'/(g^2 + g'^2)^{1/2} = e_0, \tag{12.18}$$

где e_0 — постоянная электромагнитного взаимодействия. Любопытно отметить, что член с γ_5 автоматически пропадает в электромагнитном взаимодействии.

Взаимодействие в (12.8) содержит еще член

$$L^{+} = \mathrm{i}\,\frac{g}{2}\,\overline{L}(x)\,\gamma_{\mu}[\tau_1 b_1^{\mu}(x) + \tau_2 b_2^{\mu}(x)]\,L(x), \tag{12.19}$$

который обычно выражают через операторы заряженных векторных мезонов

$$w_{\mu}^{\pm} \equiv [b_{1\mu}(x) + \mathrm{i}b_{2\mu}(x)]/\sqrt{2} \tag{12.20}$$

и операторы электронного и нейтринного поля в виде

$$L^{+}=\frac{ig}{2\sqrt{2}}\left[\bar{\nu}(x)\gamma_\mu(1+\gamma_5)e(x)w^{-\mu}(x)+\bar{e}(x)\gamma_\mu(1+\gamma_5)\nu(x)w^{+\mu}(x)\right]. \tag{12.21}$$

В лагранжиане (12.8) все векторные поля следует выразить через поля Z_μ, A_μ, $w_\mu^\pm$, так что

$$\begin{aligned}\mathcal{L}=&-\frac{1}{4}\left[(a_{\mu\nu}(x))^2+(\mathbf{b}_{\mu\nu}(x))^2\right]-\frac{g}{4}\Big\{2\mathbf{b}_\mu(x)\times\mathbf{b}_\nu(x)\mathbf{b}^{\mu\nu}(x)+\\&+g(\mathbf{b}_\mu(x)\times\mathbf{b}_\nu(x)\mathbf{b}^\mu(x)\times\mathbf{b}^\nu(x))\Big\}=\\=&-\frac{1}{4}\Big[(Z_{\mu\nu}(x))^2+(A_{\mu\nu}(x))^2+2\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}w_\nu^+(x)-\right.\\&\left.-\frac{\partial}{\partial x^\nu}w_\mu^+(x)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}w^{-\nu}(x)-\frac{\partial}{\partial x_\nu}w^{-\mu}(x)\right)\Big]-\\&-ig(g^2+g'^2)^{-1/2}\Big\{g'A^\mu(x)\Big[w^{-\nu}(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}w_\nu^+(x)-\frac{\partial}{\partial x^\nu}w_\mu^+(x)\right)-\\&-w^{+\nu}(x)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}w_\nu^-(x)-\frac{\partial}{\partial x^\nu}w_\mu^-(x)\right)\Big]-g'A^{\mu\nu}(x)w_\mu^+(x)\times\\&\times w_\nu^-(x)+gZ^\mu(x)\Big[w^{+\nu}(x)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}w_\nu^-(x)-\frac{\partial}{\partial x^\nu}w_\mu^-(x)\right)-\\&-w^{-\nu}(x)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}w_\nu^+(x)-\frac{\partial}{\partial x^\nu}w_\mu^+(x)\right)\Big]+gZ^{\mu\nu}(x)w_\mu^+(x)w_\nu^-(x)\Big\}-\\&-g^2(g^2+g'^2)^{-1}\{g^2[(Z_\mu(x))^2w_\nu^+(x)w^{-\nu}(x)-Z_\mu(x)w^{-\mu}(x)Z_\nu(x)\times\\&\times w^{+\nu}(x)]+g'^2[(A_\mu(x))^2w_\nu^+(x)w^{-\nu}(x)+A_\mu(x)w^{-\mu}(x)A_\nu(x)\times\\&\times w^{+\nu}(x)]+gg'[A_\mu(x)w^{-\mu}(x)Z_\nu(x)w^{+\nu}(x)+Z^\mu(x)w_\mu^-(x)A_\nu(x)\times\\&\times w^{+\nu}(x)-2Z_\mu A^\mu(x)w_\nu^+(x)w^{-\nu}(x)]\}-\frac{g^2}{2}[(w_\mu^-(x)w^{+\mu}(x))^2-\\&-(w_\mu^-(x))^2(w_\nu^+(x))^2].\end{aligned}\tag{12.22}$$

Здесь введены обозначения:

$$\left.\begin{aligned}a_{\mu\nu}(x)&\equiv\frac{\partial}{\partial x^\mu}a_\nu(x)-\frac{\partial}{\partial x^\nu}a_\mu(x);\\A_{\mu\nu}(x)&\equiv\frac{\partial}{\partial x^\mu}A_\nu(x)-\frac{\partial}{\partial x^\nu}A_\mu(x);\\Z_{\mu\nu}(x)&\equiv\frac{\partial}{\partial x^\mu}Z_\nu(x)-\frac{\partial}{\partial x^\nu}Z_\mu(x).\end{aligned}\right\}\tag{12.23}$$

Полный лагранжиан (12.8) есть

$$\mathcal{L}_\text{п}=\mathcal{L}+L^0+L',\tag{12.24}$$

где $\mathscr{L}$ удовлетворяет (12.22); L^0 — (12.17); L^+ — (12.21). Следующим шагом является добавление к $\mathscr{L}$ хиггсовских полей, описываемых лагранжианом

$$\mathscr{L}_H(x)=\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}+\mathrm{i}g\frac{\tau}{2}\mathrm{b}_\mu(x)-\mathrm{i}\frac{g'}{2}a_\mu(x)\right)\varphi^*(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}-\right.$$
$$\left.-\mathrm{i}g\frac{\tau}{2}\mathrm{b}^\mu(x)+\mathrm{i}\frac{g'}{2}a^\mu(x)\right)\varphi(x)+\mu_0^2\varphi^*(x)\varphi(x)-\frac{1}{2}f^2(\varphi^*(x)\varphi(x))^2, \qquad (12.25)$$

где

$$\varphi(x)=\begin{pmatrix}\varphi^+ & (x)\\ \varphi^0 & (x)\end{pmatrix}. \qquad (12.26)$$

Гиперзаряд φ равен $+1$, в то время как гиперзаряды L и R равны -1 и -2 соответственно. Поэтому «ковариантная» (в смысле поля Янга—Миллса) производная есть

$$D_\mu\varphi(x)=\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}-\mathrm{i}g\frac{\tau}{2}\mathrm{b}_\mu(x)+\mathrm{i}\frac{g'}{2}a_\mu(x)\right)\begin{pmatrix}\varphi^+ & (x)\\ \varphi^0 & (x)\end{pmatrix}=\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}-\right.$$
$$-\frac{\mathrm{i}g}{\sqrt{2}}\left(\tau_+w_\mu^-(x)+\tau_-w_\mu^+(x)\right)+\frac{\mathrm{i}}{2}\left(g'a_\mu(x)-\right.$$
$$\left.\left.-g\tau_3b_\mu^3(x)\right)\begin{pmatrix}\varphi^+ & (x)\\ \varphi^0 & (x)\end{pmatrix}\right]. \qquad (12.27)$$

Сначала рассмотрим хиггсовский лагранжиан в унитарной калибровке:

$$\left.\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\varphi^+ & (x)\\ \varphi^0 & (x)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & \\ \varphi^{0\prime} & (x)\end{pmatrix},\\ &D_\mu\varphi(x)\to\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}-\mathrm{i}\left(\frac{g}{\sqrt{2}}w_\mu^-(x)-\frac{(g^2+g'^2)^{1/2}}{2}\times\right.\right.\\ &\left.\left.\times Z_\mu(x)\right)\right]\varphi_0'(x)\end{aligned}\right\} \qquad (12.28)$$

В (12.28) электромагнитное поле не взаимодействует с хиггсовским полем; это связано с тем, что в унитарной калибровке электрически заряженная часть хиггсовского поля, отсутствует. $Z_\mu(x)$ в (12.28) определено согласно (12.12). Поле $\varphi_0'(x)$ можно считать вещественным, поскольку от комплексного $\varphi_0'(x)$ можно всегда перейти к вещественному полю с помощью соответствующего $U(1)$-преобразования. $\mathscr{L}_H(x)$ в унитарной калибровке имеет вид

$$\mathscr{L}_H(x)=-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\varphi_0'(x)\frac{\partial}{\partial x^\mu}\varphi_0'-\left(\frac{g^2}{2}w_\mu^+(x)w^{-\mu}+\right.$$
$$+\frac{g^2+g'^2}{4}Z_\mu(x)Z^\mu(x)\varphi_0'^2(x)+\mu_0^2\varphi_0'^2(x)-\frac{1}{2}f^2\varphi_0'^4(x). \qquad (12.29)$$

Члены, содержащие произведения $w_\mu^+(x)\, Z^\mu(x)$, не возникают в (12.29), поскольку в (12.25) при перемножении

$$\frac{g}{2}(\tau_1 b'_\mu + \tau_2 b^2_\mu)\begin{pmatrix}0\\ \varphi'_0(x)\end{pmatrix}^+ \frac{g'}{2} a^\mu(x)\begin{pmatrix}0\\ \varphi'_0(x)\end{pmatrix} = 0.$$

Здесь мы написали матрицу Паули слева от столбца в соответствии с обозначениями [53], хотя знак плюс должен пониматься в смысле перехода от столбца к строке. Лептоны в модели Вайнберга—Салама взаимодействуют с хиггсовскими полями посредством взаимодействия, нарушающего киральную (γ_5) инвариантность

$$\mathcal{L}_H^L = (x) - G_e(\overline{L}(x)\,\varphi(x)\,R(x) + \overline{R}(x)\,\varphi^*(x)\,L(x)), \quad (12.30)$$

где G_e — новая константа связи.

Лагранжиан $\mathcal{L}_H^L$ локально инвариантен относительно группы $SU(2)\otimes U(1)$. В унитарной калибровке

$$\mathcal{L}_H^L(x) = -G_e\,\overline{e}(x)\,e(x)\,\varphi'_0(x). \quad (12.31)$$

Теперь рассмотрим, к чему приведет спонтанное нарушение симметрии, возникающее, как всегда, при $\mu^2 < 0$:

$$\langle 0 \mid \varphi'_0(x) \mid 0\rangle = \eta \neq 0. \quad (12.32)$$

Заменяя везде в полном лагранжиане φ'_0 на $\varphi'_0(x) = \chi + \eta$, получим приведенные ниже следствия.

1. Векторные мезоны $w_\mu^\pm$ и Z_μ приобретают ненулевые массы

$$m^2_{w^+} = m^2_{w^-} = g^2\eta^2/2; \quad (12.33)$$

$$m_Z^2 = (g^2 + g'^2)\,\eta^2/2. \quad (12.34)$$

Отношение

$$m_Z^2/m_w^2 = 1 + g'^2/g^2 \equiv 1/\cos^2\vartheta, \quad (12.35)$$

где $\mathrm{tg}\,\vartheta = g'/g$ определяет так называемый вайнберговский угол смешивания. Постоянная электромагнитного взаимодействия

$$e = g'(1 + g'^2/g^2)^{-1/2} = g\sin\vartheta - g'\cos\vartheta, \quad (12.36)$$

так что, зная угол ϑ, можно выразить константы g и g' через e.

2. Электрон приобретает ненулевую массу

$$m_e = G_e\eta, \quad (12.37)$$

которая может быть произвольной ввиду произвольности G_e.

3. Имеется физическая хиггсовская частица с положительным квадратом массы. Как и в модели Голдстоуна:

$$|\mu_0^2|\,\varphi_0'^2(x) - \frac{1}{2}f^2\varphi_0'^4(x) = \left(|\mu_0^2|\,\eta^2 - \frac{1}{2}f^2\eta^4\right) + \chi(x)\,2\eta\,(|\mu_0^2| -$$

$$- f^2\eta^2) + \chi^2(x)\,(|\mu_0^2| - 3f^2\eta^2) - 2f\eta\chi^3(x) - \frac{1}{2}f^2\chi^4(x), \quad (12.38)$$

и требование $\langle 0 | \chi(0) | 0 \rangle = 0$ приближенно означает обращение в нуль членов при $\chi(x)$, т. е.

$$\eta = \mu_0/f, \qquad m_\chi = \sqrt{2}\mu_0. \tag{12.39}$$

4. Масса фотона, а также масса нейтрино равны нулю.

5. Векторный мезон $w_\mu^\pm$ обладает в модели Вайнберга—Салама ненулевым внутренним магнитным моментом $k = 1$. Если у заряженного векторного мезона $k \neq 0$, то его взаимодействие с электромагнитным полем содержит член

$$\mathcal{L}^k = \mathrm{i}ek\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} A_\mu(x) - \frac{\partial}{\partial x^\mu} A_\nu(x)\right) w^{+\mu}(x)\, w^{-\nu}(x). \tag{12.40}$$

Поэтому из (12.22) видно, что в рассматриваемой модели $k = 1$.

Выше рассмотрение модели Вайнберга—Салама проводилось в унитарной калибровке. В других калибровках возникают голдстоуновские мезоны. Так, рассмотрим часть лагранжиана Вайнберга—Салама, не содержащую лептонов:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x) = &-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\mathbf{b}_\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\mathbf{b}_\mu(x) + g\mathbf{b}_\mu(x)\times\mathbf{b}_\nu(x)\right)^2 - \\ &-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}a_\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x^\nu}a_\mu(x)\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \mathrm{i}g\frac{\tau}{2}\mathbf{b}_\mu(x) - \right.\\ &\left.-\mathrm{i}\frac{g'}{2}a_\mu(x)\right)\varphi^*(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \mathrm{i}g\frac{\tau}{2}\mathbf{b}^\mu(x) + \mathrm{i}\frac{g'}{2}a^\mu(x)\right)\varphi(x) + \\ &+\mu_0^2\varphi^*(x)\varphi(x) - \frac{1}{2}f^2(\varphi^+(x)\varphi(x))^2.\end{aligned} \tag{12.41}$$

Отбрасывая в низшем приближении члены, описывающие самодействие в модели Янга—Миллса, получаем уравнение для векторных полей:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^\nu}&\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}a^\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x_\nu}a^\mu(x)\right) = \mathrm{i}\frac{g'}{2}\left[\varphi^*(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \right.\right.\\ &\left.-\mathrm{i}g\frac{\tau}{2}\mathbf{b}^\mu(x) + \mathrm{i}\frac{g'}{2}a^\mu(x)\right)\varphi(x) - \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \mathrm{i}g\frac{\tau}{2}\mathbf{b}^\mu(x) - \right.\\ &\left.-\mathrm{i}\frac{g'}{2}a^\mu(x)\right)\varphi^*(x)\varphi(x);\\ \frac{\partial}{\partial x^\nu}&\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\mathbf{b}^\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\mathbf{b}^\mu(x)\right) = -\mathrm{i}\frac{g}{2}\left[\boldsymbol{\tau}\varphi^*(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \right.\right.\\ &\left.-\mathrm{i}g\frac{\tau}{2}\mathbf{b}^\mu(x) + \frac{\mathrm{i}g'}{2}a^\mu(x)\right)\varphi(x) - \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \mathrm{i}g\frac{\tau}{2}\mathbf{b}^\mu(x) - \right.\\ &\left.\left.-\mathrm{i}\frac{g'}{2}a^\mu(x)\right)\varphi^*(x)\boldsymbol{\tau}\varphi(x)\right].\end{aligned} \tag{12.42}$$

Предполагая, что выполняется условие спонтанного нарушения симметрии

$$\langle 0 \mid \varphi(0) \mid 0\rangle = \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} \neq 0, \tag{12.43}$$

получаем приближенные (считая $\varphi'(x) = \varphi(x) - \eta$ «малым») уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \frac{b_1^{\nu}(x) + \mathrm{i} b_2^{\nu}(x)}{\sqrt{2}} - \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \frac{b_1^{\mu}(x) + \mathrm{i} b_2^{\mu}(x)}{\sqrt{2}}\right) =$$
$$= \mathrm{i} \frac{g\eta}{\sqrt{2}} \frac{\partial \varphi'^{+*}(x)}{\partial x_{\mu}} - \frac{g^2 \eta^2}{2} \frac{b_1^{\nu}(x) + \mathrm{i} b_2^{\nu}(x)}{\sqrt{2}}; \tag{12.44}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left[g'\left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} a^{\nu}(x) - \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} a^{\mu}(x)\right) + g\left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} b_3^{\nu}(x) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} b_3^{\mu}(x)\right)\right] = \frac{g^2 + g'^2}{2} \eta \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \mathrm{i}\left(\varphi^{0\prime}(x) - \varphi^{0\prime *}(x)\right) -$$
$$- \frac{\eta^2}{2}\left((g^2 + g'^2) g' a^{\mu}(x) + g b_3^{\mu}(x)\right). \tag{12.45}$$

Из уравнений (12.44), (12.45) видно, что три поля $\varphi^{+}(x)$, φ^{+*}, $\mathrm{i}(\varphi^{0\prime}(x) - \varphi^{0\prime}(x))$ комбинируются с полями w_{μ}^{+}, w_{μ}^{-}, Z_{μ}, определенными согласно (12.12) и (12.20), в массивные векторные мезоны. Например:

$$w^{\mu +} = \frac{b_1^{\mu}(x) + \mathrm{i} b_2^{\mu}(x)}{\sqrt{2}} - \mathrm{i} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{g\eta} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_{\mu}}. \tag{12.46}$$

Для хиггсовских полей $\varphi'(x)$ получаются уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \varphi^{+}(x) - \mathrm{i} \frac{g\eta}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} w^{\mu -}(x) = 0; \\
&\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(\varphi^{0\prime}(x) - \varphi^{0\prime +}(x)\right) + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(g^2 + g'^2\right)^{\frac{1}{2}} \times \\
&\times \eta \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} Z_{\mu}(x) = 0; \\
&\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(\varphi^{0\prime}(x) + \varphi^{0\prime *}(x)\right) = 2\mu_0^2 \left(\varphi^{0\prime}(x) + \varphi^{0\prime *}(x)\right),
\end{aligned}\right\} \tag{12.47}$$

откуда видно, что в лоренцевой калибровке

$$\partial_{\mu} w^{\mu \pm}(x) = \partial_{\mu} Z^{\mu}(x) = 0 \tag{12.48}$$

поля $\varphi^{+}(x)$, $\varphi^{-}(x)$, $\mathrm{i}(\varphi^{0\prime}(x) - \varphi^{0\prime *}(x))$ обладают нулевой массой и являются голдстоуновскими мезонами, поле же $\varphi^{0\prime}(x) + \varphi^{0\prime *}(x)$ описывает физическую хиггсовскую частицу.

Основным достоинством модели Вайнберга—Салама, делающим ее столь привлекательной для физиков, является то, что в ней преодолевается основная трудность стандартной теории слабых взаимодействий — противоречие первого приближения по константе связи условию унитарности. Полезную роль при этом играет нейтральный векторный мезон.

Рассмотрим для иллюстрации процесс рождения пары векторных мезонов $\nu_e + \tilde{\nu}_e \to w^+ + w^-$. В стандартной теории этот процесс описывается диаграммой Фейнмана (рис. 2). Обозначая E, p, ϑ, φ соответственно энергию, импульс и углы рассеяния w^+-

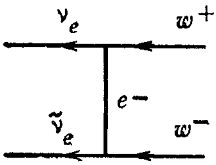

Рис. 2. Диаграмма процесса $\nu_e + \tilde{\nu}_e \to w^+ + w^-$

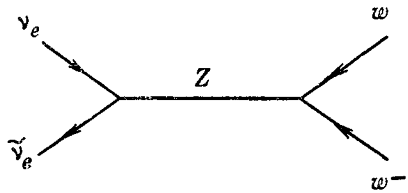

Рис. 3. Вклад нейтрального векторного мезона Z в процессе $\nu_e + \tilde{\nu}_e \to w^+ + w^-$

мезона, Вайнберг [69] получил для амплитуды рассеяния (не будем приводить подробного вычисления, хотя оно и не столь сложно) формулу

$$f_e(\vartheta\varphi) = -\frac{ig_w^2}{m_w^2}\frac{1}{8\pi\sqrt{2}}\frac{p^{3/2}\sin\vartheta\exp(-i\varphi)}{\sqrt{2E}}\times$$
$$\times\frac{\left[2E^2\left(1-\frac{E}{p}\cos\vartheta\right)-m_w^2\right]}{2E^2\left(1-\frac{p}{E}\cos\vartheta\right)-m_w^2+m_e^2}, \qquad (12.49)$$

так что

$$f_e(\vartheta, \varphi)\underset{p\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{ig_w^2}{m_w^2}\frac{1}{16\pi}p\sin\vartheta\exp(-i\varphi), \qquad (12.50)$$

т. е. амплитуда и дифференциальное сечение стремятся к бесконечности при неограниченном увеличении энергии вопреки унитарности. Но в теории Вайнберга—Салама появляется добавочная диаграмма рис. 3. За счет этой диаграммы возникает амплитуда

$$f_Z(\vartheta, \varphi) = \frac{ig_w^2}{m_w^2}\frac{1}{8\pi\sqrt{2}}p^{3/2}\frac{\sin\vartheta\exp(-i\varphi)}{\sqrt{2E}}\frac{4E^2+2m_w^2}{4E^2-m_Z^2}, \qquad (12.51)$$

так что

$$f(\vartheta, \varphi) = f_e(\vartheta, \varphi) + f_Z(\vartheta, \varphi) \to \frac{ig_w}{16\pi}\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta\exp(-i\varphi)}{E(1-(p/E)\cos\vartheta)}. \qquad (12.52)$$

Эта амплитуда убывает с энергией как $1/E$. Рассмотренные диаграммы Фейнмана не содержат петель и потому не приводят к бесконечностям. Перенормируемость модели Вайнберга—Салама (за вычетом адлеровских аномалий) доказывается так же, как и перенормируемость модели Киббла.

Другим широко обсуждающимся процессом является рассеяние нейтрино на электронах

$$\nu_e + e \to \nu_e + e. \qquad (12.53)$$

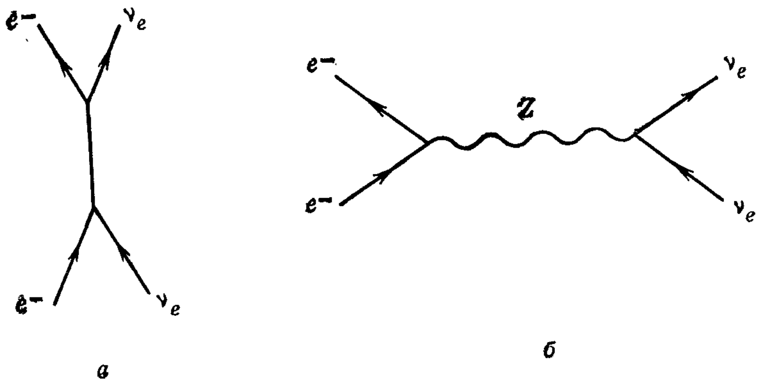

Рис. 4. Диаграммы процесса $\nu_e + e \to \nu_e + e$ в теории Вайнберга — Салама (в стандартной теории Ферми диаграмма *б* отсутствует)

(см. диаграммы рис. 4, *а*, *б*). Этот процесс описывается взаимодействием

$$G\bar{u}(\nu)\gamma^{\mu}(1-\gamma_5)\,u(\nu)\,\bar{u}(\nu)\,\bar{u}(e)\,\gamma_{\mu}\,[c_v-\gamma_5 c_A]\,u(e), \qquad (12.54)$$

где u — спинорные операторы соответствующих полей; G — константа слабого взаимодействия. В стандартной теории слабых взаимодействий $c_v = c_A = 1$, в то время как в вайнберговской теории $c_v = 2\sin^2\vartheta + 1/2$, $c_A = 1/2$, где ν — угол Вайнберга.

Из (12.54) для зависимости дифференциального сечения от энергии электрона в лабораторной системе отсчета E можно получить формулу [69]

$$\frac{d\sigma}{dE} = \frac{G^2}{2\pi} m_e \left[(c_v - c_A)^2 + (c_v + c_A)^2 \left(1 - \frac{E}{\omega}\right)^2 - (c_v^2 - c_A^2)\,\frac{m_e E}{\omega^2} \right]. \qquad (12.55)$$

Здесь ω — энергия нейтрино в системе покоя начального электрона (лабораторная система отсчета). Из (12.55) видно, что в случае $c_v \neq c_A$ появляется постоянный (не убывающий с ростом ω) член, позволяющий определить $\sin^2\nu$.

Наконец, в теории Вайнберга—Салама возможны новые по сравнению со стандартной теорией процессы. Одним из таких процессов является рассеяние мюонного нейтрино на электроне $\nu_\mu + e \to$

$\to \nu_\mu + e$. Выше мы излагали модель Вайнберга—Салама на примере электрона и электронного нейтрино, но модель формально нисколько не изменится (разве что константу G_e в (12.31) надо заменить на некоторую новую константу G_μ) при замене электрона на мюон.

Наличие нейтрального векторного мезона приводит к диаграмме рис. 5. В стандартной теории этот процесс запрещен ввиду сохранения мюонного числа, определяемого интегралом нулевой компоненты тока $\bar{u}(\nu_\mu)\gamma_\mu u(\mu)$, где $u(\mu)$ — поле μ-мезона. Появление нейтрального лептонного тока в теории Вайнберга—Салама ведет к возможности таких процессов уже в первом порядке по G.

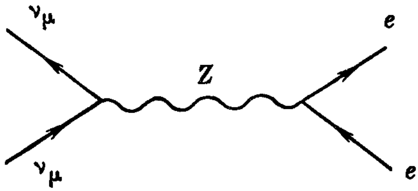

Рис. 5. Диаграмма процесса $\nu_\mu + e \to \nu_\mu + e$

Наконец, в заключение скажем несколько слов о значениях констант, появляющихся в теории Вайнберга—Салама. Имеются следующие, уже упоминавшиеся выше [см. формулы (12.4), (12.35), (12.56), (12.37)], соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &g_w^2/m_w^2 = \partial^2/m_w^2 = G/\sqrt{2}, \quad e = g\sin\vartheta = g'\cos\vartheta; \\ &m_e = G_e\eta, \ m_Z^2 = m_w^2/\cos^2\vartheta, \ m_{w^+}^2 = m_{w^-}^2 = g^2\eta^2/2; \\ &\operatorname{tg}\vartheta = g'/g, \end{aligned}\right\} \tag{12.56}$$

откуда сразу следует

$$\left.\begin{aligned} &\eta^2 = 1/G\sqrt{2}, \\ &m_z > m_w, \\ &G_e = 2m_e\sqrt{G} \sim 2\cdot 10^{-6}. \end{aligned}\right\} \tag{12.57}$$

Малость константы G_e приводит к возможности пренебречь взаимодействием лептонов с хиггсовскими частицами. Для μ-мезонов G_e превращается в $G_\mu = (m_\mu/m_e)\,G_e$, которая тоже мала. Из (12.56) также следует

$$\left.\begin{aligned} &m_{w^\pm} = \left(\frac{\pi e}{\sqrt{2G}}\right)^{1/2}\frac{1}{\sin\vartheta} = \frac{38\ \text{Гэв}}{\sin\vartheta}; \\ &m_Z = m_w/\cos\vartheta = 38\ \text{Гэв}/(1/2)\sin^2\vartheta, \end{aligned}\right\} \tag{12.58}$$

т. е. $m_Z > 76$ *Гэв*.

Значение m_w (или ν) должно быть определено из эксперимента.

Как мы уже упоминали выше, модель Вайнберга и Салама в действительности не вполне перенормируема из-за адлеровских аномалий*. Последние состоят в появлении вершинных функций, не удовлетворяющих нормальным тождествам Уорда [64]. Люди с прагматическим складом ума, конечно, могут не обращать внимания на эту неприятную особенность, поскольку современный эксперимент не чувствует этих порядков теории возмущений. Если же стремиться к действительно перенормируемой теории, то для этого число фермионов в модели Вайнберга—Салама нужно удвоить (кроме известных лептонов Ψ ввести некоторые Ψ', отличающиеся от Ψ внутренним квантовым числом). С помощью этих добавочных частиц можно скомпенсировать вклад от аномальных диаграмм (для этого достаточно изменить знак взаимодействия частиц Ψ' с векторным полем по отношению к взаимодействию Ψ), так что теория станет перенормируемой.

Свободной от адлеровских аномалий является модель Джорджи—Глэшоу [78], основанная на калибровочной группе $O(3)$. Кроме нейтрино ν и электрона e в этой модели вводятся добавочные гипотетические тяжелые лептоны E^0, E^+, группирующиеся в левый и правый триплеты

$$L=\begin{pmatrix} E^+ \\ \nu \sin\beta + E^0 \cos\beta \\ e^- \end{pmatrix}_L, \quad R=\begin{pmatrix} E^+ \\ E^0 \\ E^- \end{pmatrix}_R \tag{12.59}$$

и левый синглет $(E^0 \sin\beta - \nu\cos\beta)$. Здесь β — некоторый параметр теории. Эти фермионы взаимодействуют с тремя векторными полями, из которых нейтральное поле отождествляется с электромагнитным полем, а заряженное — с промежуточным векторным бозоном слабых взаимодействий. Кроме того, имеется взаимодействие хиггсовского триплета скалярных полей с первоначально безмассовыми векторными полями и лептонами, устроенное согласно модели Киббла. Хиггсовский механизм приводит к появлению массы у заряженных векторных мезонов и изменению массы лептонов. Не будем подробно рассматривать эту модель. Укажем лишь на возникающие в ней соотношения:

$$g_w = \frac{1}{2} e_0 \sin\beta, \; 2m(E^0)\cos\beta = m(E^+) + m(e^-), \tag{12.60}$$

где $m_w \leqslant 53$ *Гэв.*

Возникновение нейтрального слабого тока в модели Вайнберга—Салама и добавочных лептонов в модели Джорджи—Глешоу легко понять из рассмотрения самой возможности единого описания слабого и электромагнитного взаимодействий. Дело в том, что слабое взаимодействие в отличие от электромагнитного не сохраняет четность, поэтому описание обоих взаимодействий в рамках одной группы симметрии требует или добавить к нейтральному электромагнитному полю нечто тоже нейтральное, но не сохраняющее чет-

* См., однако, работу [119], где высказано мнение, что эти аномалии не ведут к не перенормируемости.

ность (нейтральный слабый ток), или к слабому заряженному току добавить ток ненаблюдаемых тяжелых лептонов, чтобы четность с учетом полного тока сохранялась. Нарушение четности во втором случае есть эффект малых энергий; при высоких энергиях когда различия в массах лептонов несущественны, четность должна сохраняться.

Мы не будем рассматривать модели слабого и электромагнитного взаимодействий адронов. Отметим лишь, что здесь возникает новая особенность, связанная с необходимостью введения добавочного (по сравнению со стандартной $SU(3)$ классификацией адронов) кварка. Так, если за исходную модель взять модель типа Джорджи—Глешоу, то электрический заряд в этой модели будет генератором $O(3)$, и поэтому он может принимать лишь целые и полуцелые значения (но никак не 1/3). Следовательно, для того чтобы получить такое значение заряда для кварка, нужно изменить формулу Гелл-Мана—Нишиджимы, введя добавочное квантовое число (например, «шарм» и т. п.) и соответственно новый (или новые) кварк. Реалистическая модель слабых и электромагнитных взаимодействий адронов возможна лишь при учете сильных взаимодействий, теория которых в настоящее время неясна.

В модели Вайнберга—Салама введение добавочного кварка необходимо для объяснения отсутствия в опытах со слабым взаимодействием адронов нейтрального тока, изменяющего странность. Добавление нового очарованного кварка приводит к возникновению симметрии между лептонами и кварками. Четырем лептонам (e, μ, ν_e, ν_μ) теперь соответствуют четыре кварка (n, p, λ, c). Вводя угол Кабиббо θ, учитывающий подавление странного тока по сравнению с нестранным, получаем соответствие между лептонами и кварками:

$$(e,\ \mu,\ n\cos\theta+\lambda\sin\theta,\ \lambda\cos\theta-n\sin\theta)\leftrightarrow(\nu_e,\ \nu_\mu,\ p,\ c).$$

Симметрия между лептонами и кварками приводит к тому, что нейтральный ток $|n\cos\theta+\lambda\sin\theta|^2+|\lambda\cos\theta-n\sin\theta|^2=\bar{n}n+\bar{\lambda}\lambda$ не содержит членов вида $\bar{n}\lambda$, $\bar{\lambda}n$, меняющих странность. Недавнее экспериментальное обнаружение очарованных частиц является серьезным аргументом в пользу единой теории слабого и электромагнитного (а возможно и сильного) взаимодействий типа рассмотренной в этом параграфе.

§ 13. СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ CP-ИНВАРИАНТНОСТИ

Рассмотрим примеры спонтанного нарушения дискретной симметрии. Гипотеза спонтанного нарушения CP-инвариантности привлекательна в том отношении, что вид взаимодействия (лагранжиан) CP-инвариантен и нарушение CP связывается с возникновением в силу той или иной причины неинвариантных решений инвариантных уравнений. С 1964 г. не открыто никаких процессов, кроме распадов K^0-мезонов, в которых бы наблюдалось несохранение CP. Поэтому вполне естественно стремление не столько требовать CP-неинвариантности фундаментальных законов физики элементарных частиц, сколько апеллировать к некоторым частным свойствам K^0-мезонов.

Новый стимул для появления моделей спонтанного нарушения CP-инвариантности дало возникновение единых теорий слабого и электромагнитного взаимодействий. Дело в том, что для спонтанного нарушения CP- и T-инвариантности при сохранении CPT-симметрии достаточно потребовать [см. [45, 46]) существования псевдоскалярного поля Φ со свойствами:

$$C\Phi(\mathbf{r},\ t)C^{-1} = \Phi(\mathbf{r},\ t),\ P\Phi(\mathbf{r},\ t)P^{-1} = -\Phi(-\mathbf{r},\ t),$$
$$\langle 0|\Phi(\mathbf{r},\ t)|\ 0\rangle = \rho \neq 0,$$

где $|0\rangle$ — вакуум.

До появления единых теорий камнем преткновения было отсутствие такого псевдоскалярного поля. В единой же теории естественно отождествить $\Phi(\mathbf{r},\ t)$ с хиггсовским мезонным полем. Нарушение CP-инвариантности в таком случае будет проявляться в процессах с обменом хиггсовской частицей. Предполагая массу хиггсовского мезона достаточно большой, можно добиться того, чтобы вероятность нарушения CP-инвариантности была достаточно малой. Таким образом, в принципе можно получить CP-нарушение в теории с перенормируемым CP-инвариантным и калибровочно инвариантным лагранжианом. Нарушение CP-инвариантности происходит одновременно со спонтанным нарушением калибровочной инвариантности.

Прежде чем рассмотреть калибровочную теорию, приведем простой пример (принадлежащий Ли [84]), показывающий, как обмен псевдоскалярным мезоном может вести к нарушению CP-инвариантности.

Имеется эрмитово поле Φ со спином 0, взаимодействующее с дираковским полем со спином 1/2; T-, C- и P-инвариантная плотность лагранжиана есть:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_\mu}\right)^2 + \frac{1}{2}\mu_0^2\Phi^2 - \frac{1}{4}\lambda\Phi^4 - \Psi^+\gamma_4 \times$$
$$\times\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\Psi - \mathrm{i}\,g\Psi^+\gamma_4\gamma_5\Psi\Phi. \tag{13.1}$$

Предполагается, что

$$\begin{aligned} T\Phi(\mathbf{r},\ t)\,T^{-1} &= -\Phi(\mathbf{r},\ -t); \\ C\Phi(\mathbf{r},\ t)\,C^{-1} &= \Phi(\mathbf{r},\ t); \\ P\Phi(\mathbf{r},\ t)\,P^{-1} &= -\Phi(-\mathbf{r},\ t). \end{aligned} \tag{13.2}$$

При $\mu_0^2 > 0$ и $\lambda > 0$ имеется спонтанное нарушение P- и T-симметрии: $\langle 0|\Phi|\,0\rangle = \rho \neq 0$, $\rho = \mu_0^2/\lambda$. Переходя к полю $\delta\Phi$, определяемому соотношением $\Phi = \rho + \delta\Phi$, получим

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\,\delta\Phi\right)^2 - \frac{1}{2}\,\mu^2\,(\delta\Phi)^2 - \lambda\rho\,(\delta\Phi)^3 -$$

$$-\frac{1}{4}\,\lambda\,(\delta\Phi)^4 - \psi^+\,\gamma_4\left(\gamma_\mu\,\frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\Psi - \mathrm{i}\,g\Psi^+\,\gamma_4\,\gamma_5\,\Psi\Phi, \quad (13.3)$$

$\mu^2 = 2\mu_0^2$.

Сделаем унитарное преобразование, не затрагивающее поля Φ:

$$\psi \to \exp\left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{i}\gamma_5\alpha\right)\psi; \quad \mathrm{tg}\,\alpha = m^{-1}g\rho. \quad (13.4)$$

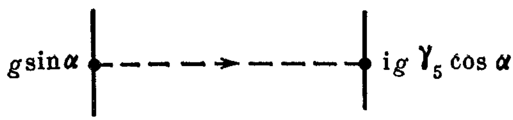

Рис. 6. Диаграмма процесса, приводящего к T-нарушению

При этом $\Psi^+\gamma_4\,(m + \mathrm{i}g\rho\gamma_5)\,\Psi \to \Psi^+\gamma_4 M\Psi$, где $M = (m^2 + g^2\rho^2)^{1/2}$. Лагранжева плотность $\mathscr{L}$ в (13.1) примет вид

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\,\delta\Phi\right)^2 - \frac{1}{2}\,\mu^2\,\delta\Phi^2 - \lambda\rho\,(\delta\Phi)^3 - \frac{1}{4}\,(\delta\Phi)^4 -$$

$$-\Psi^+\,\gamma_4\left(\gamma_\mu\,\frac{\partial}{\partial x_\mu} + M\right)\Psi - g\Psi^+\,\gamma_4\,(\sin\alpha + \mathrm{i}\gamma_5\cos\alpha)\,\Psi\delta\Phi. \quad (13.5)$$

Из (13.5) видно, что интерференционный член, возникающий за счет обмена квантом $\delta\Phi$, описываемый диаграммой рис. 6, ведет к явному нарушению T- и CP-инвариантности (оператор $\Psi^+\gamma_4\Psi$ обладает $P = 1$, $C = 1$, $T = 1$; $\mathrm{i}\Psi + \gamma_4\gamma_5\Psi$ обладает $P = 1$, $C = 1$, $T = -1$). Амплитуда, соответствующая диаграмме рис. 6, есть $A = g^2\sin\alpha\cos\alpha\,(k^2 - \mu^2)^{-1}$. При малых передачах импульса k она имеет вид

$$A_- \approx g^2\sqrt{M^2 - m^2}/\mu^2 M = g^3\,\langle 0\,|\,\Phi\,|\,0\rangle/\mu^2 M.$$

Поскольку CP-инвариантность нарушается в лептонных и адронных слабых распадах K^0-мезонов, то попытка отождествления поля Φ с хиггсовским полем требует рассмотрения единой теории слабого и электромагнитного взаимодействий адронов. Ввиду сложности и недостаточной ясности теории адронов мы здесь воздержимся от подробного рассмотрения каких-либо моделей. Укажем лишь на некоторые основные черты.

Имеются следующие модели с одновременным нарушением CP-инвариантности и калибровочной инвариантности из-за отличия от нуля вакуумного среднего от оператора хиггсовского поля.

1. Модели с одним вещественным хиггсовским полем Φ^0 (компоненты Φ^+ и Φ^- комбинируются в моделях типа Киббла, Вайнберга—Салама с компонентами векторного поля в векторы массивного поля векторных мезонов w_μ^+, w_μ^- [84]). В этих моделях схема спонтанного нарушения CP соответствует приведенному выше простому примеру.

2. Модели с комплексными хиггсовскими полями Φ^0. В случае комплексного поля операции T- и CP-отражения определены с точностью до калибровочного преобразования: $T\Phi^0T^{-1} = \exp(\mathrm{i}a)\,\Phi^0$, где a — произвольно, поэтому подбором a всегда можно добиться, чтобы

$$\langle 0|\Phi^0|0\rangle=\rho\exp \mathrm{i}\,b=\langle 0|T\Phi^0 T^{-1}|0\rangle,$$

т. е. T-инвариантности вакуума. Для этого достаточно выбрать $a = -2b$. При наличии CPT-инвариантности T-инвариантность вакуума $|0\rangle$ влечет его CP-инвариантность. Иная ситуация возникает в случае двух комплексных полей Φ_1^0 и Φ_2^0. В этом случае вполне возможна ситуация

$$\langle 0|\Phi_1^0|0\rangle=\rho_1\exp \mathrm{i}\,(\vartheta+b);$$
$$\langle 0|\Phi_2^0|0\rangle=\rho_2\exp \mathrm{i}\,b,$$

так что за счет произвола в фазовом множителе

$$T\Phi_1^0 T^{-1} = \exp(\mathrm{i}a)\,\Phi_1^0,\quad T\Phi_2^0 T^{-1}=\exp(\mathrm{i}\,a)\,\Phi_2^0$$

можно устранить $\exp \mathrm{i}b$, но разница в «направлениях» вакуума для Φ_1^0 и Φ_2^0, выражающаяся в том, что $\vartheta \neq 0$ остается, поэтому, например, возможно $\langle 0|\Phi_1^0|0\rangle = \rho\exp \mathrm{i}\vartheta$, $\langle 0|\Phi_2^0|0\rangle = \rho_2$. Комплексность $\langle 0|\Phi_1^0|0\rangle$, очевидно, ведет к нарушению CP- и T-инвариантности.

Примером модели с двумя хиггсовскими полями с $\vartheta = 90°$ является модель Джорджи—Глешоу [78].

3. Нарушение CP-инвариантности может возникнуть из-за спонтанного нарушения калибровочной симметрии (например, приводящего к несохранению странности) вследствие уже упоминавшейся в связи с ферромагнетизмом (§ 4) возможностью рассогласования симметрии вакуума при спонтанном нарушении симметрии и остаточной симметрии лагранжиана с явно нарушенной симметрией. Нарушение CP-инвариантности при этом будет характеризоваться углом (типа угла в вышеуказанном случае двух полей) между направлениями вакуума и взаимодействия. Странность, эквивалентная изоспину, в этом случае вполне аналогична обычному спину в модели ферромагнетика, и несохранение CP-инвариантности, возникающее как следствие несохранения странности, соответствует возможности несовпадения направления намагниченности и внеш-

него поля. В самом деле, для нарушения CP-инвариантности достаточно, чтобы в лагранжиане взаимодействия имелись, например члены вида [85]

$$\mathscr{L}_w = \exp(-i\beta)\mathscr{L}_{1/2} + \exp(i\beta)\mathscr{L}_{1/2} + \mathscr{L}_{\text{лепт}},$$

где $\mathscr{L}_{1/2}$ — член, ответственный за адрон-адронные распады, удовлетворяющие правилу $\Delta T = 1/2$; $\mathscr{L}_{\text{лепт}}$ описывает адрон-лептонные распады. Фаза $\beta \neq 0$ может возникнуть, если считать,что полный лагранжиан есть $\mathscr{L} = \mathscr{L}_s + \mathscr{L}_w$, причем вакуум $\mathscr{L}_s$ (сильных взаимодействий) неинвариантен относительно калибровочного преобразования гиперзаряда (например, имеется аномальное среднее вида $\langle 0 |\mathscr{L}_{1/2}| 0\rangle \neq 0$). $\mathscr{L}_{1/2}$ и $\mathscr{L}_{\text{лепт}}$ в $\mathscr{L}_w$ неинвариантны относительно того же преобразования. Слабое взаимодействие $\mathscr{L}_w$ позволяет однозначно (без фазового произвола) определить CP-оператор. Например, пусть это оператор, оставляющий инвариантным $\mathscr{L}_{\text{лепт}}$. Если вакуум $\mathscr{L}_s$ выделяет другое направление по изоспину, то он инвариантен относительно совсем другого CP-преобразования (обозначим его CP_α), отличающегося от только что введенного CP-преобразования калибровочным преобразованием. $\mathscr{L}_{\text{лепт}}$ неинвариантен относительно CP. Спонтанное нарушение калибровочной симметрии вызывает появление голдстоуновских мезонов. Адрон-адронные слабые взаимодействия приводят к появлению массы у этих мезонов. При $\langle 0| \mathscr{L}_{1/2}| 0\rangle \neq 0$ адрон-адронное взаимодействие должно быть направлено в ту же сторону, что и вакуум (в противном случае у голдстоуновских мезонов будут комплексные массы). Возникающая теория тем самым будет неаналитична по константе связи $\mathscr{L}_{1/2}$ и аналитична по $\mathscr{L}_{\text{лепт}}$. Эта неаналитичность физически проявляется в том, что в теории адрон-адронных слабых взаимодействий необходимо учитывать вклад голдстоуновских мезонов, а в теории адрон-лептонных распадов этим вкладом можно пренебречь. Если эти голдстоуновские мезоны отождествить с хиггсовскими частицами единых теорий, то физической будет лишь нейтральная частица. В работе [86] предлагается схема объяснения правила $\Delta T = 1/2$ в адрон-адронных распадах как следствие того, что обмен промежуточной хиггсовской частицей сравним с обменом промежуточным векторным мезоном. Тем самым нарушение CP-инвариантности и правило $\Delta T = 1/2$ можно связать между собой в единой теории слабого и электромагнитного взаимодействий.

ГЛАВА 5

РОЖДЕНИЕ ВЕЩЕСТВА ИНТЕНСИВНЫМИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ И ГРАВИТАЦИОННЫМ ПОЛЯМИ

§ 14. РОЖДЕНИЕ ЧАСТИЦ И АНТИЧАСТИЦ ИЗ ВАКУУМА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

В гл. 2 при рассмотрении нерелятивистской квантовой теории многих тел вакуум определялся как основное состояние системы многих тел. В таком состоянии сама система по-прежнему присутствует и продолжает характеризоваться ненулевыми классическими величинами. Следовательно, этот вакуум совсем не похож на небытие: в основном состоянии ферромагнетика ферромагнетик никуда не исчезает, в основном состоянии сверхтекучей жидкости эта жидкость присутствует и т. п.

В гл. 3 и 4 говорилось о вакууме элементарных частиц: это состояние определяется тем, что в нем физических частиц нет. Но хорошо известно, что вакуум элементарных частиц характеризуется бесконечной энергией и бесконечной плотностью энергии нулевых колебаний. В физике же многих тел плотность энергии является конечной и наблюдаемой величиной. Таким образом, различие между вакуумами в физике многих тел и элементарных частиц напоминает различие между наблюдаемостью эфира, согласно представлениям XIX века, как сплошной среды с вполне определенными конкретными свойствами и ненаблюдаемостью этого эфира в теории относительности. Вакуум физики элементарных частиц ненаблюдаем как среда постольку, поскольку он характеризуется не нулевыми, а бесконечными характеристиками. Поэтому для такого состояния вполне уместно предложенное Гейзенбергом название «мир» [1] — не столько небытие, сколько сверхбытие.

Неинвариантность вакуума в физике многих тел может проявляться непосредственно, так что можно наблюдать одновременно систему в основном (вакуумном) состоянии и соответствующую неинвариантную характеристику.

В физике элементарных частиц подобное невозможно: неинвариантную характеристику (например, массу, если она возникает по механизму спонтанного нарушения) можно наблюдать лишь при наличии одночастичного или многочастичного состояний. Последнее связано с инвариантностью вакуума относительно сдвигов в пространстве и времени, так что соответствующую неинвариантную характеристику в случае вакуума не удается приписать никакому объекту, локализованному в пространстве — времени.

Спрашивается, не следует ли объединить представления о вакууме в физике многих тел и элементарных частиц в некое единое понятие типа состояния «мир». Однако нетрудно убедиться в том, что прямой необходимости в этом нет. Дело в том, что хотя операторы числа частиц, энергии, заряда и т. п. в теории элементарных частиц и являются глобальными операторами, но эта глобальность фактически означает интегрирование по пространственному объему, превышающему комптоновскую длину волны частицы, так что можно, например, говорить о коммутирующих операторах числа частиц $\hat{N}_{V_1} = \int_{V_1} \hat{N}(x)\, d^3x$; $\hat{N}_{V_2} = \int_{V_2} \hat{N}(x)\, d^3x$, где V_1 и V_2 — объемы , отделенные расстоянием, большим комптоновской длины [89]. Но тогда эти «глобальные» в смысле физики элементарных частиц операторы будут локальными операторами в смысле приближения физики многих тел, где важны не комптоновские длины, а расстояния порядка межатомных.

В аксиоматической квантовой теории поля имеется теорема Фела [6], утверждающая, что локально все представления алгебры наблюдаемых физически эквивалентны (они неэквивалентны для глобальных характеристик). Но тогда с точки зрения физики элементарных частиц безразлично, в каком состоянии находится макрообразец — в нормальном или сверхпроводящем и т. п., если мы интересуемся областью столь высоких энергий (или столь малых расстояний), когда можно пренебречь явлениями на межатомных расстояниях. При этом вакуум можно всегда считать фоковским в смысле представления алгебры наблюдаемых системы многих тел.

Существуют, однако, явления, когда столь радикальное разделение неправильно. Например, когда вакуум элементарных частиц предполагается состоянием, неинвариантным относительно сдвигов во времени или пространстве. Другим исключением является случай столь большой плотности вещества, что межатомные расстояния делаются порядка комптоновской длины волны. Подобная ситуация возможна в космологии.

Трансляционная неинвариантность имеет место в квантовой теории элементарных частиц во внешнем классическом поле. Поскольку известны только два классических поля: электромагнитное и гравитационное, то в настоящей главе будет кратко рассмотрен вопрос о неустойчивости вакуума и рождении вещества в нестационарных электромагнитном и гравитационном полях. Конечно, в небольшой книге нет возможности отразить многие вопросы теории рождения пар внешним полем; для более подробного ознакомления можно рекомендовать монографии [91—93]. Приведем некоторые примеры, показывающие, как возникает в этой теории неинвариантный вакуум и каково физическое проявление этой неинвариантности.

Как известно, некоммутативность операторов квантованного поля и числа частиц ведет к невозможности существования в квантовой теории поля состояния, которое бы соответствовало одновременно отсутствию и частиц и поля. Последнее физически проявляется в существовании ненулевой флуктуации (или нулевых колебаний) вакуума. Для описания этого свойства вакуума часто используют язык виртуальных частиц. Согласно этому языку, на расстояниях порядка комптоновской длины волны частицы в вакууме имеются виртуальные пары частица—античастица. Предположим, однако, что в вакууме включается внешнее классическое поле. Это поле действует на нулевые колебания так, что они перестраиваются. В частности, явление типа параметрического резонанса осциллятора приводит к тому, что при определенных параметрах внешнего поля вакуумные петли разрываются и виртуальные частицы становятся реальными. Новый вакуум отличается от старого разрывом этих петель; физически это проявляется в рождении макроскопического числа частиц и античастиц. Возникает новая классическая характеристика — плотность рожденного вещества (или антивещества), которая, с одной стороны, есть характеристика, отличающая один вакуум от другого, а с другой — характеристика возникшей системы многих тел*. Для стационарного электрического поля (стационарное магнитное поле не рождает пар) вероятность эффекта для электронов становится значительной при напряженности поля $E \approx 10^{15}$—10^{16} *в/см* [90]. Это значение качественно получается из требования, чтобы работа поля на комптоновской длине частицы равнялась $2mc^2$. Нестационарное поле приводит к значительному эффекту при больших частотах (в области γ-диапазона), определяемых массой рождающихся частиц. Этот эффект может иметь значение для астрофизических применений и, возможно, для физики элементарных частиц, когда на малых расстояниях можно пользоваться понятием классического поля (при этом частота и величина поля могут быть очень велики). Экспериментально эффект можно будет наблюдать в опытах по столкновениям тяжелых ядер, когда в течение некоторого времени образуется ядро с зарядом больше критического ($Z > 170$), и при этом рождаются позитроны (электроны захватываются ядром). Классическое электромагнитное поле получается из квантовой теории поля аналогично классическим характеристикам системы многих тел (см. гл. 2) переходом к термодинамическому пределу N (число фотонов) $\to \infty$ при V (объем) $\to \infty$ и рассмотрением нефоковского представления операторов электромагнитного поля [94]. Таким образом, наличие классического электромагнитного поля в некоторый момент времени в вакууме электронов и позитронов уже означает объединение понятий многотельного вакуума и вакуума физики элементарных частиц.

Покажем на примере однородного электрического поля, как нестационарность вакуума ведет к рождению частиц. Пусть нестационарное электромагнитное поле описывается векторным потенциалом вида [95, 96] $A_\mu = (0, 0, 0, A_3(t))$, где $\lim\limits_{t \to \pm\infty} A_3(t) = A_{\pm 3}$. Такое

* Роль голдстоуновских частиц, конденсация которых приводит к новому вакууму, играют пары частица — античастица. Вырождеиие вакуума, однако, здесь отсутствует из-за неинвариантности гамильтониана частиц.

поле приближенно соответствует ситуации, когда длина электромагнитной волны много больше характерного размера системы (в случае рождения пар — это комптоновская длина частицы, сравните с известным дипольным приближением в полуклассической теории излучения [54]).

Уравнение Дирака, описывающее квантовую частицу в таком поле, есть:

$$[i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - e_0\gamma^{\mu}A_{\mu}(x) - m]\,\Psi(x) = 0. \tag{14.1}$$

Решения этого уравнения выражаются через решения квадрированного уравнения по формуле

$$\Psi_{\mathbf{p},r} = (p_k\gamma^k + i\partial_0\gamma^0 - e_0A_3(t)\,\gamma^3 + m)\,\chi_{\mathbf{p},r}(x), \tag{14.2}$$

где

$$\left.\begin{aligned}&[\partial_0^2 - \partial_k\partial_k + e_0^2A_3^2(t) - 2i\,e_0A_3(t)\,\partial_3 + i\,e_0(\partial_0A_3(t))\,\gamma^0\gamma^3 +\\ &\qquad + m^2]\,\chi_{\mathbf{p},r} = 0;\\ &\chi_{\mathbf{p},r} = \exp(i\,\mathbf{p}\,\mathbf{x})\,f(\mathbf{p},t)\,R_r.\end{aligned}\right\} \tag{14.3}$$

Здесь $r = 1,\ 2$ — спиновые индексы, а

$$R_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad R_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

В уравнении (14.3) можно произвести разделение переменных и получить уравнение для функции $f(\mathbf{p},\ t)$:

$$f''(\mathbf{p},t) + [\varkappa^2(\mathbf{p},t) + ie_0(\partial_0A_3(t))]\,f(\mathbf{p},t) = 0, \tag{14.4}$$

где $\varkappa^2(\mathbf{p},t) = m^2 + p_\perp^2 + (p_3 - e_0A_3(t))^2$, $p_\perp^2 = p_1^2 + p_2^2$ и штрих означает дифференцирование по времени.

Рассмотрим решения $f_\pm(p,t)$, удовлетворяющие начальным условиям

$$f_\pm(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} \exp(\pm i\,\varkappa_- t),$$

$$\text{где } \varkappa_-^2 = m^2 + p_\perp^2 + (p_3 - e_0A_{-3})^2.$$

Здесь необходимо спинорное поле рассматривать как вторично квантованное. Для этого запишем оператор спинорного поля в представлении Фарри:

$$\left.\begin{aligned}\Psi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3p\,[a_r^{(-)}(\mathbf{p})\,\psi_{\mathbf{p},r,-}(x) + a_r^{(+)}(\mathbf{p})\,\psi_{-\mathbf{p},r,+}(x)];\\ \Psi^+(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3p\,[a_r^{*(-)}(\mathbf{p})\,\psi^+_{-\mathbf{p},r,+}(x) + a_r^{*(+)}(\mathbf{p})\psi^+_{\mathbf{p},r,-}(x)].\end{aligned}\right\} \tag{14.5}$$

Здесь $a_r^{(-)}(\mathbf{p})$, $a_r^{*(+)}(\mathbf{p})$ — соответственно операторы уничтожения и рождения частиц и $a_r^{*(-)}(\mathbf{p})$, $a_r^{(+)}(\mathbf{p})$ — античастиц, удовлетворяющие обычным соотношениям антикоммутации. Значки $(\pm)$ после индекса соответствуют решениям f_+ и f_-. Оператор энергии квантованного спинорного поля во внешнем поле $A_\mu(t)$ тогда принимает вид:

$$H=\int d^3x : p_0(x) := \frac{i}{2}\int d^3x : [\Psi^+(x)\,\partial_0\Psi(x)-(\partial_0\Psi(x))^+\Psi(x)] : =$$

$$=\int d^3p\,\{A(\mathbf{p},t)[a_r^{*(+)}(\mathbf{p})\,a_r^{(-)}(\mathbf{p})+a_r^{(+)}(-\mathbf{p})\,a_r^{*(-)}(-p)]+$$

$$+B(\mathbf{p},t)\,a_r^{*(+)}(\mathbf{p})\,a_r^{(+)}(-\mathbf{p})+B^*(\mathbf{p},t)\,a_r^{*(-)}(-p)\,a_r^{(-)}(-\mathbf{p})\}; \quad (14.6)$$

где

$$A(\mathbf{p},t)=\frac{i}{2}[\psi_{\mathbf{p},r,-}^{(+)}(\partial_0\psi_{\mathbf{p},r,-})-(\partial_0\psi_{\mathbf{p},r,-})^+\psi_{\mathbf{p},r,-}],$$

$$B(\mathbf{p},t)=\frac{i}{2}[\psi_{\mathbf{p},r,-}^{+}(\partial_0\psi_{\mathbf{p},r,+})-(\partial_0\psi_{\mathbf{p},r,-})^+\psi_{\mathbf{p},r,+}].$$

То, что $B(p,t)\neq 0$, связано с нестационарностью внешнего поля, приводящей к тому, что $f_+(t)$ (или $f_-(t)$) в произвольный момент времени есть комбинация положительно частотных и отрицательно частотных компонент (в отличие от свободного поля). С другой стороны, гамильтониан (14.6) напоминает гамильтониан, возникающий в теории сверхпроводимости (сверхтекучести для бозонов). Основное состояние (вакуум) этого гамильтониана отличается от фоковского вакуума, уничтожаемого операторами $a_r^{(-)}(\mathbf{p})$, $a_r^{*(-)}(\mathbf{p})$. Для его нахождения диагонализуем гамильтониан с помощью канонического преобразования Боголюбова:

$$\left.\begin{aligned}
a_r^{(-)}(\mathbf{p})&=\frac{1}{\sqrt{1+|\lambda(\mathbf{p},t)|^2}}[\alpha_r^{(-)}(\mathbf{p},t)-\lambda(\mathbf{p},t)\,\alpha_r^{(+)}(-\mathbf{p},t)];\\
a_r^{(+)}(\mathbf{p})&=\frac{1}{\sqrt{1+|\lambda(-\mathbf{p},t)|^2}}[\alpha_r^{(+)}(\mathbf{p},t)+\lambda^*(-\mathbf{p},t)\alpha_r^{(-)}(-\mathbf{p},t)];
\end{aligned}\right\} \quad (14.7)$$

$$\left.\begin{aligned}
a_r^{*(+)}(\mathbf{p})&=\frac{1}{\sqrt{1+|\lambda(\mathbf{p},t)|^2}}[\alpha_r^{*(+)}(\mathbf{p},t)-\lambda^*(\mathbf{p},t)\,\alpha_r^{*(-)}(-\mathbf{p},t)];\\
a_r^{*(-)}(\mathbf{p})&=\frac{1}{\sqrt{1+|\lambda(-\mathbf{p},t)|^2}}[\alpha_r^{*(-)}(\mathbf{p},t)+\lambda(-\mathbf{p},t)\,\alpha_r^{*(+)}(-\mathbf{p},t)],
\end{aligned}\right\} \quad (14.8)$$

где

$$\lambda(\mathbf{p},t)=\frac{1}{B^*}\left[-A\pm\sqrt{A^2+|B|^2}\right]. \quad (14.9)$$

Зависимость коэффициентов преобразования Боголюбова от времени, появившаяся вследствие зависимости от времени гамильтониана, ведет к тому, что каждому моменту времени соответствует свой вакуум $|0_t\rangle$ (такой, что $\alpha^-(\mathbf{p}, t)|0_t\rangle = \alpha^{*(-)}(\mathbf{p}, t)|0_t\rangle = 0$), содержащий ненулевое число частиц, определенных при $t \to -\infty$:

$$N_{\mathbf{p}}(t) = \langle 0_t | a_r^{*(+)}(\mathbf{p})\, a_r^{(-)}(\mathbf{p}) | 0_t\rangle = \frac{|\lambda(\mathbf{p}, t)|^2}{1 + |\lambda(\mathbf{p}, t)|^2}\delta^3(0) =$$
$$= \frac{\varkappa(\mathbf{p}, t) - A(\mathbf{p}, t)}{2\varkappa(\mathbf{p}, t)}\delta^3(0). \tag{14.10}$$

Знак в (14.9) выбран с учетом того, что

$$|\lambda(\mathbf{p}, t)|^2 \underset{t \to -\infty}{\to} 0. \tag{14.11}$$

Вводя плотность числа пар в единице объема координатного пространства, получаем

$$n_{\mathbf{p}}(t) = \frac{N_{\mathbf{p}}(t)}{V} = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{|\lambda(\mathbf{p}, t)|^2}{1 + |\lambda(\mathbf{p}, t)|^2} = \frac{\varkappa(\mathbf{p}, t) - A(\mathbf{p}, t)}{2(2\pi)^3\varkappa(\mathbf{p}, t)}. \tag{14.12}$$

Итак, видно, что рождение пар во многом напоминает фазовый переход: так же как и в теории сверхпроводимости происходит перестройка вакуумного состояния, только оно здесь представляет конденсат не куперовских пар, а пар частица—античастица.

При выключении взаимодействия с внешним полем при $t \to +\infty$ «out-вакуум» отличается от «in-вакуума» и содержит

$$n_{\mathbf{p}}(+\infty) = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{\varkappa_+(\mathbf{p}) - A(\mathbf{p}, +\infty)}{2\varkappa_+(\mathbf{p})} \tag{14.13}$$

пар частица — античастица в единице объема.

В качестве примера применения формулы (14.13) (подробнее см. [97, 98]) можно рассмотреть периодическое поле, плавно включающееся и выключающееся ($A_3(t)$ и $\partial_0 A_3(t)$ непрерывны) при $t \to \pm\infty$, а также обладающее свойством $A_3(t + \tau) = A_3(t)$ внутри некоторого промежутка $[t_1, t_2]$. Вместо $t \to -\infty$ положим $t_1 = 0$ и будем считать время включения (и выключения) поля $\Delta t \ll \tau = nT$, где n — число периодов изменения внешнего поля.

Решения уравнения (14.4) $f_\pm(\mathbf{p}, t)$ в этом случае имеют вид линейных комбинаций решений (14.4) с начальными условиями:

$$\left.\begin{aligned} u(0) &= 1, \quad & v(0) &= 0; \\ u'(0) &= 0, \quad & v'(0) &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{14.14}$$

Тогда можно получить следующее выражение для плотности числа рожденных пар после n периодов работы источника поля:

$$n_{\mathbf{p}} = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{m^2 + p_\perp^2}{\varkappa_+^2}\frac{\sin^2 nd_1}{\sin^2 d_1}\,\mathrm{Im}^2\, u(T), \tag{14.15}$$

где

$$0 < d_1 < \pi, \quad \cos d_1 = \mathrm{Re}\, u(T). \tag{14.16}$$

В частности, для $A_3(t) = a_0 \cos k_0 t$ (лазерный свет) плотность рождающихся пар фермионов зависит периодически от времени работы источника внешнего поля. Для оптического диапазона $\lambda = 10^{-5}$ *см* эффект значителен при большом значении напряженности электрического поля $E = \partial A_3(t)/\partial t \approx 10^{16}$ *в/см*.

Теория рождения бозонных пар строится вполне аналогично фермионному случаю. Вместо уравнения Дирака (14.1) при этом имеем уравнение Клейна—Фока

$$\Box\, \varphi(x) + 2ie_0 A_3(t) \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} - e_0^2 A_3^2(t)\, \varphi(x) - m^2 \varphi(x) = 0, \qquad (14.17)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \varphi = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int d^3 p \left[a^-(\mathbf{p}) \frac{\varphi_{\mathbf{p},-}(x)}{\sqrt{\varkappa_-(\mathbf{p})}} + a^+(\mathbf{p}) \frac{\varphi_{-\mathbf{p},+}(x)}{\sqrt{\varkappa_-(-\mathbf{p})}} \right]; \\ \varphi_{\mathbf{p},\pm}(x) = \exp(i\,\mathbf{p}\mathbf{x})\, f_\pm(\mathbf{p}, t), \end{aligned}\right\} \qquad (14.18)$$

а функции $f_\pm(\mathbf{p}, t)$ удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{aligned} f''_\pm(\mathbf{p}, t) + \varkappa^2(\mathbf{p}, t) f_\pm(\mathbf{p}, t) = 0 \\ f_\pm(\mathbf{p}, t) \underset{t\to-\infty}{\to} \exp(\pm i\varkappa_- t). \end{aligned}\right\} \qquad (14.19)$$

Гамильтониан квантованного бозонного поля φ, взаимодействующего с классическим полем $A_\mu(t)$, будет недиагональной квадратичной формой операторов рождения и уничтожения

$$\begin{aligned} H(t) = \int d^3 p \frac{1}{2\varkappa_-(\mathbf{p})} \{E(\mathbf{p}, t)\,[a^{*(+)}(\mathbf{p})\, a^-(\mathbf{p}) + \\ + a^{(+)}(-\mathbf{p})\, a^{*(-)}(-\mathbf{p})] + F(\mathbf{p}, t)\, a^*(\mathbf{p})\, a^{(+)}(-\mathbf{p}) + \\ + F^*(\mathbf{p}, t)\, a^{*(-)}(-\mathbf{p})\, a^{(-)}(\mathbf{p})\}, \end{aligned} \qquad (14.20)$$

где

$$\left.\begin{aligned} E(\mathbf{p}, t) = |f'_+(\mathbf{p}, t)|^2 + \varkappa^2(\mathbf{p}, t)\,|f_+(\mathbf{p}, t)|^2, \\ F(\mathbf{p}, t) = f'_+(\mathbf{p}, t)\, f^{*\prime}_-(\mathbf{p}, t) + f_+(\mathbf{p}, t)\, f^*_-(\mathbf{p}, t)\, \varkappa^2(\mathbf{p}, t). \end{aligned}\right\} \qquad (14.21)$$

Диагонализуя (14.20) боголюбовским преобразованием, сохраняющим коммутационные соотношения, находим для числа частиц, рожденных в вакууме $H(t)$ в момент t, выражение

$$\begin{aligned} M_p(t) = \langle 0_t | a^{*(+)}(\mathbf{p})\, a^{(-)}(\mathbf{p}) | 0_t \rangle = \langle 0_t | a^{(+)}(-\mathbf{p})\, a^{*(-)}(-\mathbf{p}) | 0_t \rangle = \\ = \frac{E(\mathbf{p}, t) - 2\varkappa(\mathbf{p}, t)\,\varkappa_-(\mathbf{p})}{4\varkappa(\mathbf{p}, t)\,\varkappa_-(\mathbf{p})}\, \delta^3(0), \end{aligned} \qquad (14.22)$$

поэтому при выключении внешнего поля при $t \to +\infty$ в единице объема рождаются пары с плотностью

$$m_p = \frac{E_+(\mathbf{p}) - 2\varkappa_+(\mathbf{p})\,\varkappa_-(\mathbf{p})}{(2\pi)^3\, 4\varkappa_+(\mathbf{p})\,\varkappa_-(\mathbf{p})}, \qquad (14.23)$$

где $E_+(\mathbf{p})$, $\varkappa_+(\mathbf{p})$ обозначены соответствующие предельные значения.

Для периодического однородного внешнего поля аналогично фермионному случаю получаем выражение для плотности числа рождающихся частиц через значения функций u_b, v_b, удовлетворяющих тем же начальным условиям (14.14), что и u, v, но вместо уравнения (14.4) теперь следует рассматривать уравнение (14.19)

$$m_p = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{sh}^2 nD_2}{\mathrm{sh}^2 D_2} \frac{[\varkappa_+^2 v_b(\tau) + u_b'(\tau)]^2}{4\varkappa_+^2}, \tag{14.24}$$

где

$$D_2 = \mathrm{Arch}\, u_b(\tau). \tag{14.25}$$

Формула (14.24) приводит к любопытному качественному явлению, отличающему случай бозонов от фермионов. Число рождающихся частиц с определенными импульсами растет экспоненциально с увеличением числа периодов работы источника внешнего поля. Этот эффект связан с тем, что уравнение (14.19) в данном случае имеет вид уравнения класса Хилла, у которого при определенных условиях на частоту ν_0 возникают неустойчивые решения, соответствующие параметрическому резонансу. В то же время из теории нелинейных колебаний [99] известно, что учет нелинейного взаимодействия в случае параметрического резонанса может привести к существенному изменению вида решения.

В случае квантованного бозе-поля, взаимодействующего с внешним векториым полем с частотой $h\nu_0 \approx 2mc^2$ вакуум перестраивается таким образом, что возникает спонтанное нарушение симметрии относительно калибровочных преобразований [120].

Рассмотрим лагранжиан вида

$$\mathcal{L} = g^{\mu\mu}(\partial_\mu - ie_0 A_\mu)\hat{\varphi}^*(\partial_\mu + i e_0 A_\mu)\hat{\varphi} - m^2\hat{\varphi}^*\varphi - \frac{\lambda}{6}(\hat{\varphi}^*\varphi)^2, \tag{14.26}$$

где внешнее поле равно $A_\mu = (0, 0, 0, a_0 \sin \nu_0 t)$ на некотором отрезке времени.

Напишем уравнение для среднего по вакууму от оператора бозонного поля в гейзенберговском представлении в пренебрежении вакуумными флуктуациями поля $\hat{\varphi}$ (как и в модели Голдстоуна, см. гл. 4):

$$\left.\begin{aligned} &\langle 0|\hat{\varphi}(x,t)|0\rangle = \langle 0|\varphi^*(\mathbf{x},t)|0\rangle \equiv f(t);\\ &d^2 f/dt^2 + \omega^2(1 - h^2\cos\nu t)f + \gamma f^3 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{14.27}$$

где

$$\omega^2 = m^2 + e_0^2 a_0^2/2, \quad \gamma = \lambda/3, \quad h = (1 + 2m^2/e_0^2 a_0^2)^{-1}.$$

Вопрос о наличии спонтаниого нарушения симметрии в системе, описываемой лагранжиаиом (14.26), сводится к вопросу о существовании устойчивых ненулевых решений уравнеиия (14.27) в тех случаях, когда нулевое решение (14.27) неустойчиво. Последнее имеет место, если частота внешнего поля A_μ удовлетворяет условию

$$\omega\,(1 - h/4) < \nu < \omega\,(1 + h/4) \tag{14.28}$$

и в системе возникает главный демультипликационный резонанс. Как показано в монографии Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского [99], при $\gamma \neq 0$ в первом приближении по h, γ имеется стационарное (в смысле амплитуды) решение

$$\left.\begin{aligned} &f(t) = a\cos(\nu t + \vartheta);\\ &a^2 = \frac{4}{3\gamma}\left(\nu^2 - \omega^2 \mp \frac{1}{2}h\omega^2\right). \end{aligned}\right\} \tag{14.29}$$

Тривиальное же решение $f \equiv 0$ делается неустойчивым. При стремлении частоты внешнего поля к ω от значений, меньших $\omega\,(1 - h/4)$, реализуется случай, соответствующий знаку плюс. Появление $f\,(t) \neq 0$ приводит к тому, что, как и в моделях Голдстоуна и Хиггса, для нахождения спектра задачи надо перейти от переменных $\hat\varphi$, $\hat\varphi^*$ к $\hat\varphi_1'$, $\hat\varphi_2$:

$$\hat\varphi = (1/\sqrt{2})\,(\hat\varphi_1 + i\hat\varphi_2),\quad \hat\varphi_1' = \hat\varphi_1 - \sqrt{2}f\,(t), \tag{14.30}$$

поэтому лагранжиан, соответствующий (14.26), записывается как

$$\begin{aligned} \int \mathcal{L} d^4x = \frac{1}{2}\int d^4x \Big\{ & g^{\mu\mu}\,\partial_\mu\hat\varphi_1'\,\partial_\mu\hat\varphi_1' - \left(\nu^2 + \frac{2}{3}\lambda f^2\right)\hat\varphi_1'^2 + \\ & + g^{\mu\mu}\,\partial_\mu\hat\varphi_2\,\partial_\mu\hat\varphi_2 - \nu^2\hat\varphi_2^2 - \frac{\lambda\sqrt{2}}{3}f\hat\varphi_1'\,(\hat\varphi_1'^2 + \hat\varphi_2^2) - \\ & - \frac{\lambda}{12}(\hat\varphi_1'^2 + \hat\varphi_2^2)^2 + 2e_0A_\mu\hat\varphi_1'\,\partial^\mu\hat\varphi_2 - 2e_0A_\mu\varphi_2\,\partial^\mu\hat\varphi_1'\Big\}. \end{aligned} \tag{14.31}$$

Действие (14.31) описывает два квантованных поля $\hat\varphi_1'$ и $\hat\varphi_2$, взаимодействующих друг с другом и с векторным полем A_μ и обладающих массами

$$m_1^2 = \nu^2 + (2/3)\,\lambda f^2,\quad m_2^2 = \nu^2. \tag{14.32}$$

Если в (14.26) ввести еще квантованное поле $\hat A_\mu$, то $f\,(t) \neq 0$ ведет к появлению члена $m_\nu^2\hat A_\mu\hat A^\mu$, как и в модели Хиггса, где

$$m_\nu^2 = e_0^2\langle 0|\varphi^*|0\rangle\langle 0|\varphi|0\rangle = e_0^2 f^2 \neq 0. \tag{14.33}$$

Если в некоторый момент $t = t_0$ внешнее поле A_μ выключается, то решение (14.29) сохраняет свой вид и переходит в

$$f = a_1\cos(\omega\,(a_1)\,t + \theta), \tag{14.34}$$

где $\omega\,(a_1) = \nu\,(1 + (3/4)\,h)$, $a_1 = a\,(1 - (3/4)\,h)$.

Это решение устойчиво, поэтому спонтанное нарушение симметрии остается и при выключенном внешнем поле. При этом массовые формулы (14.32) сохраняют свой вид с заменой $\nu \to \omega$ (a_1), $a \to a_1$.

Большие частоты, необходимые для указанного эффекта, можно реализовать или в γ-лазерах, или в микромире как вакуумные колебания на малых расстояниях. При этом естественно считать, что наблюдатель будет измерять усредненные значения

$$\overline{m_\nu^2}=e_0^2\,\frac{1}{T}\int\limits_{\tau_0}^{\tau_0+T} f^2\,dt=\frac{e_0^2\,a^2}{2};\ \overline{m_1^2}=\nu^2+\frac{1}{3}\lambda a^2,\ \ m_2^2=\nu^2. \qquad (14.35)$$

Конечно, непосредственное применение этой модели к реальной ситуации затруднено в связи с весьма специальным видом внешнего поля, однако можно думать, что какие-то из указанных черт сохранятся и в более общей модели. Интересно отметить, что здесь интенсивное высокочастотное поле ведет к появлению спонтанного нарушения симметрии, в то время как в стандартных моделях сверхпроводимости и модели Хиггса [100] оно ведет к восстановлению симметрии. Для случая статического интенсивного поля аналогичное явление было обнаружено А. Б. Мигдалом [101].

Говоря о рождении пар внешним полем следует упомянуть о другом явлении — поляризации вакуума внешним полем. Отличие поляризации вакуума от эффекта рождения пар состоит в том, что она зависит от внешнего поля таким образом, что соответствующий вклад в физические процессы исчезает при выключении внешнего поля. Поляризация вакуума внешним полем проявляется в добавлении к обычному лагранжиану электромагнитного поля нелинейных членов, структура которых подробно описана во многих учебниках по квантовой электродинамике (см. [102]). Роль внешнего поля в ряде случаев могут играть граничные условия на квантованное поле. Например, в последнее время в литературе [103, 104] широко обсуждается так называемый эффект Казимира. Суть его состоит в том, что если взять две параллельные проводящие пластинки, то между ними возникает сила притяжения за счет отличия нулевых колебаний вакуума в присутствии пластинок и нулевых колебаний вакуума без пластинок. Дело в том, что в присутствии пластинок вакуум квантованного электромагнитного поля, удовлетворяющего граничным условиям исчезновения поля на поверхности пластинок, неинвариантен относительно пространственных сдвигов. Возникающая макрохарактеристика нового вакуума есть классическое электромагнитное поле, приводящее к притяжению с силой

$$F = -(\pi^2/240)\,\hbar c\,(A/d^4),$$

где d — расстояние между пластинками; A — их площадь. Результат существенно зависит от геометрии (симметрии) граничных условий. Так, на внутренность проводящей сферы нулевые колебания вакуума действуют таким образом, что возникающие силы есть не силы притяжения, а силы отталкивания [103] с энергией $E(a) \approx \approx 0{,}093\hbar c/2a$, где a — радиус сферы.

К сожалению, для других макроскопических граничных условий расчет эффекта Казимира провести затруднительно; тем не менее уже эти примеры дают указание на глубокую связь вакуума и граничных условий, определяемых макротелами.

§ 15. РОЖДЕНИЕ ВЕЩЕСТВА И АНТИВЕЩЕСТВА В КОСМОЛОГИИ

Классическое гравитационное поле аналогично электромагнитному полю приводит к рождению пар частица—античастица при достаточно сильном поле*. Поскольку, согласно представлениям релятивистской космологии, в прошлом существовала сингулярность, вблизи которой гравитационное поле можно было считать большим, то весьма привлекательна мысль объяснить возникновение всего вещества наблюдаемой Вселенной рождением из вакуума гравитационным полем в некоторое характерное время эволюции Вселенной. В отечественной литературе имеются монографии К. П. Станюковича [92], Я. Б. Зельдовича, И. С. Новикова [93], в которых обсуждается роль гравитации для элементарных частиц. Рождение пар гравитонами было впервые рассмотрено Д. Д. Иваненко и А. А. Соколовым [94].

Рассмотрим проблему рождения пар во фридмановских моделях Вселенной**. Рождение пар в изотропном однородном пространстве Фридмана аналогично рождению пар нестационарным однородным электромагнитным полем (см. § 14). Однако в отличие от электродинамики, в космологии нельзя говорить о включении и выключении внешнего поля. Тем не менее метод диагонализации гамильтониана можно применить и в космологии, поскольку если частицей называть квант энергии, то наблюдение частиц в некоторый момент времени, согласно постулату теории измерения в квантовой механике, означает нахождение собственного состояния гамильтониана, что автоматически учитывается при использовании указаиного метода.

Вакуумное состояние в космологии, в отличие от вакуума физики элементарных частиц и вакуума физики многих тел, требует еще большего уровня абстракции и в полном смысле соответствует гейзенберговскому состоянию «мир». Его свойства определяют уже не столько свойства отдельных элементарных частиц или образцов ферромагнетика, сверхпроводника и т. п., сколько глобальные свойства Вселенной в целом. Вопрос о связи этих свойств с локальными свойствами макротел и микрочастиц представляет собой фун-

* Рождение имеет место в пространстве Минковского в неинерциальной (неполной) системе отсчета, что, возможно, проявляется в возникновении сил инерции. Здесь рассматриваются лишь полные системы отсчета, так что рождение пар обусловлено гравитацией.

** Проблема отделения вещества от антивещества обсуждается в работе [93].

даментальную проблему, которой мы здесь заниматься не будем. Будем определять вакуум квантованного поля в пространстве—времени Фридмана как основное состояние гамильтониана этого поля.

Метрика пространства—времени Фридмана имеет вид

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = a^2(\eta)\,[d\eta^2 - dl^2], \tag{15.1}$$

где dl^2 — метрика 3-пространства постоянной кривизны; $\varkappa = -1$, 0, 1 (для открытой, квазиевклидовой и закрытой моделей Фридмана соответственно);

$$\left.\begin{aligned} &dl^2 = \gamma_{ik}\, dx^i\, dx^k = dr^2 + f^2(r)\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2); \\ &f(r) = \begin{cases} \operatorname{sh} r; \\ r; \\ \sin r; \end{cases} \qquad \varkappa = \begin{cases} -1; \\ \ \ 0; \\ \ \ 1. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{15.2}$$

Переменная η связана со временем в синхронной системе отсчета соотношением $a(\eta)\, d\eta = c dt$.

Квантованное комплексное скалярное поле Φ в пространстве—времени Фридмана описывается лагранжианом с плотностью

$$\mathscr{L} = \sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\frac{\partial\hat{\Phi}^*}{\partial x^\mu}\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial x^\nu} - \left(m^2 + \frac{R}{6}\right)\hat{\Phi}^*\hat{\Phi}\right), \tag{15.3}$$

приводящему к уравнению Клейна—Фока:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial x^\nu}\right] + \left(m^2 + \frac{R}{6}\right)\hat{\Phi} = 0. \tag{15.4}$$

Член $R/6$ введен, согласно [105, 106], для обеспечения конформной инвариантности теории при $m = 0$. В то же время, как увидим ниже, наличие этого члена существенно для получения конечного ответа для плотности рождающихся скалярных частиц и античастиц.

Оператор поля $\hat{\Phi}$ есть

$$\hat{\Phi}(\eta, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}\, a(\eta)}\int dJ\, \{\psi_J(\mathbf{x})\, u_J^*(\eta)\, a_J^{(-)} + \psi_J^*(x)\, u_J(\eta)\, a_J^{(+)}\}, \tag{15.5}$$

где J — индекс квантовых чисел одночастичных состояний, означающий интегрирование по непрерывным и суммирование по дискретным квантовым числам; функции $\psi_J(\mathbf{x})$ — собственные функции оператора Лапласа—Бельтрами в соответствующем 3-пространстве; соответствующие собственному значению λ_J^2:

$$({}^{(3)}\Delta + \lambda_J^2)\,\psi_J(\mathbf{x}) = 0. \tag{15.6}$$

Функции $u_J(\eta)$ удовлетворяют уравнению

$$\ddot{u}_J(\eta) + [\lambda_J^2 + m^2 a^2(\eta) + \varkappa]\, u_J(\eta) = 0. \tag{15.7}$$

Операторы рождения и уничтожения $a_J^{(+)}$, $a_J^{(-)}$ имеют тот же смысл, что и в § 14.

Гамильтониан поля Ф определим как «метрический гамильтониан», получая его варьированием действия (15.3) по $g^{\mu\nu}$. Метрический гамильтониан с членом $R/6$ отличается от канонического, получаемого по правилам аналитической механики как билинейная форма из полей и канонически сопряженных импульсов. При наличии члена $R/6$ физической «энергией» естественно называть метрический гамильтониан, который в данном случае имеет вид:

$$H(\eta)=\frac{1}{2}\int dJ\,\{E_{\bar J}(\eta)(a_J^{*(+)}a_J^{(-)}+a_{\bar J}^{(+)}a_{\bar J}^{*(-)})+F_J(\eta)\,a_{\bar J}^{*(+)}a_J^{(+)}+ \\ +F_J^*(\eta)\,a_J^{*(-)}a_J^{(-)}\}, \qquad (15.8)$$

где $\bar J$ — набор квантовых чисел комплексно сопряженного одночастичного состояния

$$\left.\begin{aligned} E_J(\eta)&=|\dot u_J(\eta)|^2+k_0^2(\eta)\,|u_J(\eta)|^2;\\ F_J(\eta)&=\pm\,[\dot u_J^2(\eta)+k_0^2(\eta)\,u_J^2(\eta)];\\ k_0^2(\eta)&=m^2a^2(\eta)+\varkappa+\lambda_J^2.\end{aligned}\right\} \qquad (15.9)$$

Требование диагональности $H(\eta)$ в начальный момент времени $\eta=\eta_0$ приводит к следующим условиям на решение уравнения (15.7):

$$\left.\begin{aligned} u_J(\eta_0)&=k_0^{-1/2}(\eta_0);\\ \dot u_J(\eta_0)&=ik_0^{1/2}(\eta_0).\end{aligned}\right\} \qquad (15.10)$$

Диагонализуя гамильтониан (15.8) преобразованием Боголюбова, можно получить ответ на вопрос, какова плотность числа частиц, определенных при $\eta=\eta_0$, в вакуумном состоянии гамильтониана $H(\eta)$ при $\eta>\eta_0$ или (что то же самое) какова плотность частиц, определенных так, что гамильтониан диагонален в терминах соответствующих операторов рождения и уничтожения при $\eta>\eta_0$ в вакуумном состоянии $H(\eta)$ при $\eta>\eta_0$? При этом в зависимости от $a(\eta)$ приходим к следующим результатам [108, 109]:

1. Современная стадия эволюции Вселенной

$$\dot a(\eta)/a(\eta)\ll 1,\quad a(\eta)=a_1[1+H\dot a(\eta-\eta_0)], \qquad (15.11)$$

где $H=\dot a/a^2|_{\eta=\eta_0}$ — постоянная Хаббла. В терминах синхронного собственного времени t условие применимости (15.11) есть $t-t_0\ll H^{-1}$. Уравнение (15.7) в этом случае можно записать как

$$d^2u_J(\xi)/d\xi^2+\omega_0^2(1+h\xi)\,u_J(\xi)=0, \qquad (15.12)$$

где $\omega_0=\eta_0k_0(\eta_0)$, $h=\dfrac{2ma_1^3\eta_0^3H}{\omega_0^2}$, $\xi=\dfrac{\eta-\eta_0}{\eta_0}$. Решение этого уравнения выражается через функции Ханкеля. Вычисляя коэффициенты $E_J(\eta)$, $F_J(\eta)$ в (15.9) и диагонализуя (15.8), найдем аналогично электромагнитному случаю выражение для плотности частиц (равной плотности античастиц)

$$n(\eta)\approx mH^2/256\pi, \qquad (15.13)$$

справедливое для всех трех случаев модели Фридмана. Отметим, что к зависимости вида mH^2 пришел также К. П. Станюкович из чисто качественных соображений [110]. Принимая постоянную Хаббла в настоящее время равной $H = 50$ *км/сек* · *Мпс* или $H = 5 \times 10^{-27}$ $см^{-1}$, получаем для π-мезонов $n(\eta) = 10^{-43}$ $см^{-3}$, т. е. очень малое по сравнению с критической плотностью значение.

2. Вблизи сингулярности можно считать, что доминирующую роль играет излучение, так что $a(t) = a_0(t)^{-1/2}$ или $a(\eta) = a_1(\eta)$. Уравнение (15.7) имеет вид

$$\ddot{u}_\lambda(\eta) + (\lambda^2 + m^2 a_1^2 \eta^2)\, u_\lambda(\eta) = 0. \tag{15.14}$$

Начальные условия (вакуум при $\eta = \eta_0$) можно поставить непосредственно в сингулярности поскольку $\eta = 0$ — регулярная точка уравнения (15.7). Они имеют вид

$$u_\lambda(0) = \lambda^{-1/2}, \quad \dot{u}_\lambda(0) = i\lambda^{1/2}. \tag{15.15}$$

Уравнение (15.14) сводится к уравнению Вебера, решая которое приходим к следующим результатам [112]:

а. Если перейти от $t = 0$ к $t \ll m^{-1}$, то плотность рождающихся частиц не превысит

$$n \approx m^3/24\pi^2 \tag{15.16}$$

для открытой и квазиевклидовой моделей*. При этом, определяя средние по вакууму от оператора тензора энергии-импульса в гейзенберговском представлении, вводя нормальную форму по операторам, диагонализующим гамильтониан в момент времени t, приходим к уравнению состояния (см. [111, 112]):

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{m^4}{16\pi^2}\left(\ln\frac{1}{mt} + \frac{3}{2} - C - \ln 2\right); \\ p &= -\frac{m^4}{16\pi^2}\left(\ln\frac{1}{mt} + \frac{5}{6} - C - \ln 2\right), \end{aligned}\right\} \tag{15.17}$$

так что при $t \to 0$ имеем

$$p = -\varepsilon, \tag{15.18}$$

где p — давление; ε — плотность энергии; C — постоянная Эйлера.

Для закрытой модели получаем при $ma(t) \ll 1$ $n = m^4 a(t)/192$;

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{m^4}{32\pi^2}\left(\ln\frac{1}{mt} + \ln(ma_0) - 3\ln 2 + \frac{7}{2}\right); \\ p &= -\frac{m^4}{32\pi^2}\left(\ln\frac{1}{mt} + \ln(ma_0) - 3\ln 2 + \frac{17}{16}\right). \end{aligned}\right\} \tag{15.19}$$

---

* Независимость n от времени объясняется компенсацией эффекта расширением Вселенной.

Отличие закрытого случая от открытого, проявляющееся в выражениях для плотности, связано с тем, что спектр λ в закрытой модели начинается с $\lambda = 1$, а в открытой модели основной вклад при вычислении дает область $\lambda \ll 1$. При более реалистическом условии $ma(t) \gg \lambda$ в закрытой модели справедливы формулы (15.16) и (15.17).

б. Если взять $t \gg m^{-1}$, то для всех трех случаев получаем для плотности частиц, рожденных от 0 до t:

$$\left.\begin{aligned} n &\approx 5 \cdot 10^{-4}\, m^3 (mt)^{-3/2}; \\ \varepsilon &\approx 10^{-3}\, m^4 (mt)^{-3/2}, \quad |p| \ll \varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{15.20}$$

Отсюда, сравнивая случаи а и б, видим, что в лагранжевом объеме $V(t) \sim a^3(t) \sim t^{3/2}$ рождается

$$N_v(t) = nV(t) = \begin{cases} 4 \cdot 10^{-3} (mt)^{3/2} & \text{при } mt \ll 1, \\ 5{,}3 \cdot 10^{-4} = \text{const} & \text{при } mt \gg 1. \end{cases} \tag{15.21}$$

Из (15.21) видно, что процесс рождения пар идет, главным образом, вблизи $t \sim m^{-1}$. При $t \gg m^{-1}$ имеем в основном частицы, рожденные на более ранних стадиях эволюции Вселенной. То, что рождение происходит в основном при $t \sim m^{-1}$, оправдывает использование в нашей задаче классического описания гравитационного поля, поскольку эффекты, связанные с квантованием гравитации, могут сказываться при $t \lesssim t_{pl} = 10^{-43}$ *сек* $\ll m^{-1}$ для известных элементарных частиц.

Приведем основные результаты, относящиеся к рождению фермионных пар. Вместо уравнения Клейна—Фока теперь имеем уравнение Дирака [111, 112], написанное согласно Фоку—Иваненко в виде

$$(ik^l_{(a)}\, \gamma^a \nabla_l - m)\, \psi(x) = 0, \tag{15.22}$$

где $k^l_{(a)}$ — коэффициенты ортонормированного репера в пространстве—времени Фридмана; γ^a — постоянные матрицы Дирака; ∇_l — спинорная ковариантная производная. В нашем случае можно выбрать

$$k^l_{(a)} = a(\eta)\, \delta^l_a. \tag{15.23}$$

Далее все вычисления производятся аналогично бозе-случаю. В итоге приходим к следующим результатам:

а. На современной стадии эволюции для всех трех случаев

$$n_{s=1/2}(t) = \frac{3mH^2}{128\pi}, \tag{15.24}$$

т. е. отличается на множитель 6 от бозе-случая [см. (15.13)].

б. Для времени $0 \leqslant t \leqslant m^{-1}$ для квазиевклидова и закрытого случаев

$$n_{s=1/2}(t) = \frac{m^2}{16\pi t}, \tag{15.25}$$

т. е.

$$n_{s=1/2}/n \sim (mt)^{-1} \gg 1. \tag{15.26}$$

Это говорит о том, что рождение фермионов происходило более интенсивно, чем рождение бозонов [111].

В открытой модели

$$n(t) = (m^2/16\pi t)(1 + 1/\pi m a_0). \tag{15.27}$$

в. Для $t \gg m^{-1}$ начиная с $t = 0$ рождается

$$n_{s=1/2} = 4 \cdot 10^{-3} m^3 (mt)^{-3/2} \tag{15.28}$$

частиц, т. е. в лагранжевом объеме получаем постоянную плотность, причем $n_{s=1/2}/n \sim 10$ [121].

Из приведенных формул видно, что если в качестве масс элементарных частиц брать массы π-мезонов и электронов (а не гипотетических планкеонов), то рождением пар в пространстве—времени Фридмана не объяснить происхождение вещества Вселенной. Это связано с тем, что метрика Фридмана конформно-плоская. Более интенсивно рождение идет в анизотропной метрике (см. [93], [113]), однако при этом характерным временем рождения, по-видимому, является планковское, при этом необходимо квантовать гравитацию. К сожалению, в настоящей книге мы не имеем возможности рассмотреть проблему спонтанного нарушения симметрии в космологии при учете единой теории слабого и электромагнитного взаимодействий Вайнберга—Салама. Отметим лишь, что согласно оценкам Киржница, Линде [76], а также Вайнберга [114], введение такой характеристики, как температура Вселенной, позволяет предположить, что в прошлом, когда эта температура была высока, имело место явление типа фазового перехода в теории сверхтекучести (сверхпроводимости). При этом до некоторого момента эволюции Вселенной симметрия была точной (поэтому слабые взаимодействия были дальнодействующими), и лишь потом произошло спонтанное нарушение симметрии, сохраняющееся и до настоящего времени. Спонтанное нарушение симметрии ведет к появлению ненулевой космологической постоянной [76], однако, по-видимому, требуется учесть еще множество других физических факторов, прежде чем сравнивать теоретические значения с данными астрономии.

Рождение частиц в космологии возможно и в случае стационарного гравитационного поля. Неустойчивость вакуума в стационарном гравитационном поле возникает, например, когда энергия частицы массой m в гравитационном поле с потенциалом $\varphi = \gamma M/r$ становится равной $2mc^2$. Из равенства $\gamma Mmr = 2mc^2$ следует, что это происходит на расстоянии гравитационного радиуса тела массой M, что ведет к рождению частиц черными дырами (эффект Хокинга [116, 117]). Этот эффект имеет большое значение для понимания физики черных дыр.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гейзенберг В.** Введение в единую полевую теорию элементарных частиц. Пер. с англ. Под ред. Д. Д. Иваненко, М., «Мир», 1968.
2. **Гриб А. А., Дамаскинский Е. В., Максимов В. М.** Проблема нарушення снмметрии и инвариантности вакуума в квантовой теории поля. — «Успехи физ. наук», 1970, т. 102, вып. 4, с. 587.
3. **Новожилов Ю. В.** Введение в теорию элементарных частиц. М., «Наука», 1972.
4. **Сигал И. Е.** Математические проблемы релятивистской физики. Пер. с англ. Под ред. Л. Д. Фаддеева. М., «Мир», 1965.
5. **Вайтман А.** Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей. Пер. с англ. Под ред. Б. В. Медведева. М., «Наука», 1968.
6. **Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т.** Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М., «Наука», 1969.
7. **Haag R., Kastler D.** On Algebraic Approach to Quantum Field Theory. — «J. Math. Phys.», 1964, v. 5, N 7, p. 8481.
8. **Araki H.** Einfuhrung in die axiomatische Quantenfeldtheorie. Lecture notes. Zurich ETH, 1961—1962.
9. **Наймарк М. А.** Нормированные кольца. М., «Наука», 1965.
10. **Goldstone J.** Field Theories with «Superconductor» Solutions. — «Nuovo cimento», 1961, v. 19, p. 154.
11. **Kastler D., Robinson D. W., Swieca A.** Conserved Currents and Associated Symmetries, Goldstone's Theorem. — «Comm. Math. Phys.», 1966, v. 2, p. 108.
12. **Лэкс М.** Флуктуации и когерентные явления. Пер. с англ. М., «Мир», 1974.
13. **Фон Нейман И.** Математические основы квантовой механики. Пер. с нем. Под ред. Н. Н. Боголюбова. М., «Наука», 1964.
14. **Ансельм А. И.** Основы статистической физики и термодинамики. М., «Наука», 1961.
15. **Боголюбов Н. Н.** Квазисредние в задачах статистической механики. Препринт Д781, Дубна, 1961.
16. **Haag R., Hugenholtz N. M., Winnink M.** On the Equilibrium States in Quantum Mechanics. — «Comm. Math. Phys.», 1967, v. 5, p. 215.
17. **Браут Р.** Фазовые переходы. Пер. с англ. М., «Мир», 1967.
18. **Гугенгольц Н. М.** Квантовая теория системы многих тел. Пер. с англ. М., «Мир», 1967.
19. **Wagner H.** Long-Wavelength Excitation and the Goldstone Theorem in Many-Body Systems with «Broken Symmetries». — «Z. Phys.», 1966, Bd 195, S. 273.
20. **Hugenholtz N. M., Pines D.** Ground State Energy and Excitation Spectrum of a System of Interacting Bosons. — «Phys. Rev.», 1959, v. 116, p. 489.
21. **Андерсон П.** Прнближение хаотических фаз в теории сверхпроводимости. — В кн.: Теория сверхпроводимости. Пер. с англ. и нем. Под ред. Н. Н. Боголюбова. М., Изд-во иностр. лит., 1960.

22. **Anderson P. W.** Plasmons, Gauge Invariance and Mass. — «Phys. Rev.», 1962, v. 125, p. 397.
23. **Anderson P. W.** Special Effects in Superconductivity in Lectures on the Many-Body Problem. V. 2. Ed. by E. R. Caianello. N. Y.—London, Acad. Press, 1964, p. 113.
24. **Heisenberg W.** Zur Theorie des Ferromagnetismus. — «Z. Phys.», 1928, Bd 49, S. 619.
25. **Маттис Д.** Теория магнетизма. Пер .с англ. М., «Мир», 1967.
26. **Streater R. F.** The Heisenberg Ferromagnet as a Field Theory. — «Comm. Math. Phys.», 1967, v. 6, p. 233.
27. **Боголюбов Н. Н., Толмачев В. В., Ширков Д. В.** Новый метод в сверхпроводимости. М., Изд-во АН СССР, 1958.
28. **Irvin I. M.** Pion Condensation and Other Abnormal States of Matter. — «Repts. Progr. Phys.», 1975, v. 38, p. 1385.
29. **Orsalezi C.** Charges as Generators of Symmetry Transformations in Quantum Field Theory. — «Rev. Mod. Phys.», 1970, v. 42, N 4, p. 381.
30. **Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.** Введение в теорию квантовых полей. М., ГИТТЛ, 1957.
31. **Coleman S.** The Invariance of the Vacuum is the Invariance of the World. — «J. Math. Phys.», 1967, v. 7, p. 787.
32. **Federbush P., Johnson K.** Uniqueness Property of the Twofold Vacuum Expectation Value. — «Phys. Rev.», 1960, v. 120, p. 1926.
33. **Fabri E., Picasso F., Strocchi F.** Broken Symmetries in Quantum Field Theory. — «Nuovo cimento», 1967, v. 48, N 2, p. 376.
34. **Glimm J., Kadison R.** Unitary Operators in c^*-algebras. — «Pacif. J. Math.», 1962, v. 10, N 2, p. 547.
35. **Gal-Ezer E., Reeh H.** Coleman and Coleman—Okubo Theorems in Relativistic Quantum Field Theory. — «Fortschr. Phys.», 1974, Bd 22, S. 481.
36. **Callan C., Coleman S., Jackiw R.** A New Improved Energy-Momentum Tenzor. — «Ann. Phys.», 1970, v. 59, N 1, p. 42.
37. **Okubo S.** Impossibility of Having the Exact U_6 Group Based Upon Algebra of Currents. — «Nuovo cimento A», 1966, v. 42, p. 1029.
38. **Gilbert W.** Broken Symmetries and Massless Particles. — «Phys. Rev. Lett.», 1966, v. 12, p. 713.
39. **Streater R. F.** Generalized Goldstone Theorem. — «Phys. Rev. Lett.», 1965, v. 15, N 11, p. 475.
40. **Glashow S. L., Weinberg S.** Breaking Chiral Symmetries. — «Phys. Rev. Lett.», 1965, v. 20, p. 224.
41. **Bjorken J. D.** A Dynamic Origin for the Electromagnetic Field. — «Ann. Phys.», 1963, v. 24, p. 174.
42. **Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д.** К теории сверхпроводимости. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1950, т. 20, с. 1067.
43. **Nagy K. L., Nagy T., Pòcsik G.** Approximate Symmetries in Field Theory. — «Acta Phys. Hung.», 1965, v. 19, p. 91.
44. **Leplae L., Sen R., Umezawa H.** The Bose-Einstein Condensation of Symmetry Multiplets in Assymetric Ground State. — «Progr. Theor. Phys.», 1966, v. 37, p. 585; v. 38, p. 594.
45. **Marx G.** Spontaneous Symmetry Breakdown in a Nonlinear Boson Field: a Model for C Violation. — «Phys. Rev. B», 1965, v. 140, N 4, p. 1068.
46. **Гриб А. А., Мостепаненко В. М.** Нарушение симметрии в теории K^0-мезонов и теорема Голдстоуна. — «Ядерная физика», 1972, т. 15, с. 523.
47. **Nambu Y., Jona-Lasinio G.** Dynamic Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. — «Phys. Rev.», 1961, v. 122, p. 345.
48. **Вакс В. Г., Ларкин А. И.** О применении методов теории сверхпроводимости к вопросу о массах элементарных частиц. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1961, т. 40, с. 282.
49. **Eguchi T., Sugawara H.** Extended Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. — «Phys. Rev. D», 1974, v. 10, p. 4257.

50. **Higgs P. W.** Broken Symmetries and the Mass of Gauge Bosons. — «Phys. Rev. Lett.», 1964, v. 13, p. 508.
51. **Higgs P. W.** Spontaneous Symmetry Breakdown without Massless Bosons. — «Phys. Rev.», 1966, v. 145, p. 1156.
52. **Коноплева Н. П., Попов В. Н.** Калибровочные поля. М., Атомиздат, 1972.
53. **Bernstein J.** Spontaneous Symmetry Breaking, Gauge Theories, the Higgs Mechanics and All That. — «Rev. Mod. Phys.», 1974, v. 46, N 1, p. 7.
54. **Шифф Л.** Квантовая механика. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
55. **Kibble T. W.** Symmetry Breaking in Non-Abelian Gauge Theories. — «Phys. Rev.», 1967, v. 155, p. 1554.
56. **Leplae L., Umezawa H.** Boson Formalism in Superconductivity. — «J. Math. Phys.», 1969, v. 10, N 11, p. 2038.
57. **Weinberg S.** A Model of Leptons. — «Phys. Rev. Lett.», 1967, v. 19, p. 1264.
58. **Ferrari R.** Some Comments on the Higgs Phenomenon. — «Nuovo cimento A», 1972, v. 19, p. 204.
59. **Nakanishi N.** Indefinite Metric Quantum Theory of Genuine and Higgs—Type Massive Vector Fields. — «Progr. Theor. Phys.», 1973, v. 49, p. 640.
60. **Fuchs N.** Non-Abelian Gauge Fields and Goldstone Bosons. — «Phys. Rev.», 1965, v. 140, p. 911.
61. **Тамм И. Е.** Основы теории электричества. М., «Наука», 1966.
62. **Englert F., Brout R.** Broken Symmetries and the Mass of Gauge Vector Mesons. — «Phys. Rev. Lett.», 1964, v. 13, p. 321.
63. **Schwinger J.** Gauge Invariance and Mass. — «Phys. Rev.», 1962, v. 125, p. 397.
64. **Славнов А. А.** Перенормировка калибровочно-инвариантных теорий. Физика элементарных частиц и атомного ядра. — ЭЧАЯ, 1974, т. 5, вып. 3, с. 755.
65. **Fradkin E. S., Tiutin I. V.** S-Matrix for Yang-Mills and Gravitational Fields. — «Phys. Rev. D», 1970, v. 2, p. 2841.
66. **T'Hooft G.** Renormalization of Massless Yang-Mills Fields. — «Nucl. Phys. B», 1971, v. 33, N 1, p. 177.
67. **Lee B. W.** Renormalizible Massive Vector-Meson Theory — Perturbation Theory of the Higgs Phenomenon. — «Phys. Rev. D», 1972, v. 5, N 4, p. 823.
68. **Lee B. W., Zinn-Justin J.** Spontaneously Broken Symmetries. Perturbation Theory and Renormalization. — «Phys. Rev. D», 1972, v. 5, N 12, p. 3137.
69. **Abers E., Lee B. W.** Gauge Theories. — «Phys. Rep. C», 1973, v. 9, N 1, p. 1.
70. **Salam A., Strathdee J.** A Renormalizable Gauge Model of Lepton Interaction. — «Nuovo cimento A», 1972, v. 11, N 2, p. 397.
71. **Sucher J., Woo C.** Is There Spontaneous Symmetry Breaking in Gauge Theories with Higgs-Kibble Mechanics? — «Phys. Rev. D», 1973, v. 8, N 8, p. 2721.
72. **Arnowitt R., Fickler S.** Quantization of Yang-Mills Field. — «Phys. Rev.», 1962, v. 127, N 5, p. 1821.
73. **Вайнштейн А. И., Хриплович И. Б.** Перенормированные модели электромагнитных и слабых взаимодействий. — «Успехи физ. наук», 1974, т. 112, вып. 4, с. 685.
74. **Rudolph E., Dürr H. P.** Gupta-Bleuler Formalism in Yang-Mills Theory. — «Nuovo cimento A», 1972, v. 10, p. 597.
75. **Salam A., Ward J. C.** $\Delta I = 1/2$ Rule. — «Phys. Rev. Lett.», 1960, v. 5, N 8, p. 390.
76. **Киржниц Д. Р., Линде А. Д.** Релятивистский фазовый переход. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1974, т. 67, вып. 4, с. 1263.
77. **Weinberg S.** Physical Processes in a Convergent Theory of the Weak and Electromagnetic Interaction. — «Phys. Rev. Lett.», 1971, v. 27, N 24, p. 1688.

78. **Georgy H., Glashow S.** Gauge Theories without Anomalies. — «Phys. Rev. D», 1972, v. 6, N 2, p. 429.
79. **Gell-Mann M., Oakes R., Renner B.** Behaviour of Current Divergences under $SU_3 \times SU_3$. — «Phys. Rev.», 1968, v. 175, p. 2195.
80. **Gell-Mann M., Levy M.** The Axial Vector Current in β Decay. — «Nuovo cimento», 1960, v. 16, p. 705.
81. **Dashen R.** Chiral SU(3)×SU(3) as a Symmetry of the Strong Interactions. — «Phys. Rev.», 1969, v. 183, N 5, p. 1245.
82. **Pagels H.** Departures from Chiral Symmetry. — «Phys. Rev.», 1975, v. 16, p. 221.
83. **Биленький С. М.** Нарушение *CP*-инвариантности в распадах K^0-мезонов.— ЭЧАЯ, 1970, т. 1, вып. 1, с. 228.
84. **Lee T. D.** CP Nonconcervation and Spontaneous Symmetry Breaking. — «Phys. Rev. C», 1972, v. 2, p. 110.
85. **Гриб А. А., Мостепаненко В. М.** Голдстоуновские частицы с массой в модели миллислабого взаимодействия. — «Вести. ЛГУ», 1975, т. 4, с. 14.
86. **Lee B. W., Treiman S.** $\Delta I = {}^1/_2$-Rule in Nonleptonic Weak Interaction. — «Phys. Rev. D», 1973, v. 7, N 4, p. 1211.
87. **Поляков А. М.** Спектр частиц в квантовой теории поля. — «Письма в ЖЭТФ», 1974, т. 20, вып. 6, с. 430.
88. **T'Hooft G.** Magnetic Monopoles in Unified Gauge Theories. — «Nucl. Phys. B», 1974, v. 79, N 1, p. 276.
89. **Хенли Э., Тиррииг В.** Элементарная квантовая теория поля. Пер. с англ. Под ред. Ю. В. Новожилова. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
90. **Зельдович Я. Б., Попов В. С.** Электронная теория сверхтяжелых атомов. — «Успехи физ. наук», 1971, т. 105, вып. 3, с. 403.
91. **Швиигер Ю.** Теория квантованных полей. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
92. **Станюкович К. П.** Гравитационное поле и элементарные частицы. М., Изд-во АН СССР, 1965.
93. **Зельдович Я. Б., Новиков И. С.** Строение и эволюция Вселенной. М., «Наука», 1975.
94. **Иваненко Д. Д., Соколов А. А.** Квантовая теория гравитации. Вестник МГУ, 1947, № 8, с. 103—118.
95. **Нарожиый Н. Б., Никишов А. И.** Простейшие процессы в электрическом поле, порождающем пары. — «Ядерная физика», 1970, т. 11, с. 1072.
96. **Гриб А. А., Мостепаненко В. М., Фролов В. М.** Рождеиие частиц из вакуума однородным электрическим полем в каноническом формализме. — «Теор. и матем. физ.», 1972, т. 13, с. 377.
97. **Нарожный Н. Б., Никишов А. И.** Образование пар периодическим электрическим полем. — «Журн. эксперим. и теор. физ.». 1973, т. 65, с. 862.
98. **Мостепаненко В. М., Фролов В. М.** Рождение частиц из вакуума однородным электрическим полем с периодической зависимостью от времени. — «Ядерная физика», 1974, т. 19, с. 885.
99. **Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., «Наука», 1974.
100. **Salam A., Strathdee J.** Transition Electromagnetic Field in Particle Physics. — «Nucl. Phys. B», 1975, v. 90, p. 203.
101. **Мигдал А. Б.** Устойчивость вакуума и предельные поля. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1971, т. 61, с. 2209.
102. **Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б.** Квантовая электродинамика. М., Физматгиз, 1959.
103. **Boyer T.** Quantum Zero Point Energy and Long-Range Force. — «Ann. Phys.», 1970, v. 56, p. 474.
104. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Электродинамика сплошных сред. М., «Наука», 1959.
105. **Penrose P.** Conformal Treatment of Infinity, p. 565—587 in Relativity Groups and Topology (B. de Witt Ed.). London, Gordon and Breach, 1964.
106. **Chernikov N. A., Tagirov E. A.** Quantum Theory of Scalar Field in Desitter space. — Ann. Inst. Henri Poincara, 1968, v. 9h, p. 109.

107. **Parker L.** Quantized Fields and Particle Creation in Expanding Universes I. — «Phys. Rev.», 1969, v. 183, N 5, p. 1057.
108. **Гриб А. А., Мамаев С. Г.** К теории поля в пространстве Фридмана. — «Ядерная физика», 1969, т. 10, с. 1276.
109. **Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаиенко В. М.** Рождение частиц из вакуума в нестационарной изотропной Вселенной. — «Изв. вузов. Физика», 1974, т. 12, с. 79.
110. **Станюкович К. П.** К вопросу о рождении частиц в расширяющейся Вселенной. Тезисы докладов III Советской гравитационной конференции. Ереван, 1972, с. 365.
111. **Frolov V. M., Mamaev S. G., Mostepanenko V. M.** On the Difference in Creation of Particles with Spin 0 and $^1/_2$ in Isotropic Cosmologies. — «Phys. Lett. A», 1975, v. 55, N 7, p. 389.
112. **Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М., Старобинский А. А.** Рождение частиц из вакуума вблизи однородной изотропной сингулярности. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1976, т. 70, вып. 5, с.1577.
113. **Зельдович Я. Б., Старобинский А. А.** Рождение частиц и поляризация вакуума в анизотропном гравитационном поле. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1971, т. 61, с. 2161.
114. **Weinberg S.** Gauge and Global Symmetries and High Temperature. — «Phys. Rev. D», 1974, v. 9, N 12, p. 3357.
115. **Pagels H.** Vacuum Stability and the Cabbibo Angle. — «Phys. Rev. D», 1975, v. 11, N 5, p. 1213.
116. **Hawking S. W.** Particle Creation by Black Holes. — «Comm. Math. Phys.», 1975, v. 43, p. 199.
117. **Фролов В. П.** Черные дыры и квантовые процессы в них. — «Успехи физ. наук», 1976, т. 118, вып. 3, с. 437.
118. **Попов В. Н.** Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. М., Атомиздат, 1976.
119. **Slavnov A. A.** Who is Afraid of Anomalies. DESY prepr. 76/63, Dec. 1976.
120. **Гриб А. А., Мостепаненко В. М., Фролов В. М.** Спонтанное нарушение калибровочной симметрии во внешнем вектором поле. — «Теор. и матем. физ.», 1976, т. 29, с. 370.
121. **Мамаев С. Г.** Рождение пар фермионов в изотропной космологии. — «Изв. вузов. Физика», 1976, т. 3, с. 58.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ИБ № 753

Андрей Анатольевич Гриб

ПРОБЛЕМА НЕИНВАРИАНТНОСТИ ВАКУУМА В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Редакторы **Н. Е. Никитина, А. И. Мельникова**
Художественный редактор **А. Т. Кирьянов**
Обложка художника **А. Г. Жегина**
Технический редактор **И. Н. Подшебякин**
Корректоры **М. Ф. Говсиевич, Н. М. Загудаева**

Сдано в набор 13/IV 1977 г. Подписано к печати 1/IX 1977 г. Т-16612. Формат $60 \times 90^1/_{16}$ Бумага тип. № 2. Усл. печ. л. 8. Уч.-изд. л. 8,34. Тираж 2900 экз.
Зак. изд. № 73142. Зак. тип. 1716.
Цена 1 р. 30 к.

Атомиздат, 103031, Москва, К-31, ул. Жданова, 5
Московская типография № 4 Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли Москва, И-41, Б. Переяславская ул., д. 46