

А.А. ГРИБ, С.Г. МАМАЕВ, В.М. МОСТЕПАНЕНКО

КВАНТОВЫЕ
ЭФФЕКТЫ
В ИНТЕНСИВНЫХ
ВНЕШНИХ
ПОЛЯХ

(методы и результаты,
не связанные
с теорией возмущений)



МОСКВА АТОМИЗДАТ 1980

УДК 530.145 : 538.3+530.12+521.1

Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М. Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях. — М.: Атомиздат, 1980, с. 296.

Впервые в мировой литературе изложена теория вакуумных квантовых эффектов во внешних электромагнитных и гравитационных полях. На основе метода преобразований Боголюбова рассмотрены рождение частиц из вакуума внешними полями, а также поляризация вакуума и спонтанное нарушение симметрии. Подробно анализируются квантовые эффекты в однородном электрическом поле, сверхкритическом кулоновском поле, гравитационном поле вблизи космологической сингулярности и черных дыр.

Изложенный в книге материал находится на стыке квантовой теории поля, физики элементарных частиц, общей теории относительности и астрофизики.

Для специалистов названных выше областей и студентов старших курсов соответствующих специальностей.

Рис. 10. Список литературы 382 наименования.



ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория квантовых эффектов в интенсивных внешних полях становится в последнее время все более актуальной. Это связано с прогрессом в области лазерной техники, созданием ускорителей тяжелых ионов, а также с успехами космологии и астрофизики, подтвердившими существование в природе сильных гравитационных полей.

Одним из наиболее интересных квантовых эффектов в классическом внешнем поле является рождение пар частиц и античастиц из вакуума. Электрическое поле будет интенсивно порождать пары, если работа, совершаемая им над частицами виртуальной пары на расстоянии порядка комптоновской длины волны \hbar/mc , имеет порядок mc^2 (m — масса рождающейся частицы).

Рождение частиц из вакуума электрическим полем можно наблюдать в экспериментах по столкновению двух ядер урана. При этом на короткое время образуется квазимолекула с зарядом $Z = 184$, поле которой порождает два позитрона и приводит к образованию отрицательно заряженного вакуума.

Другим способом создания интенсивных электромагнитных полей является фокусировка излучения мощных импульсных лазеров. Хотя получаемые таким образом поля в настоящее время имеют напряженности существенно ниже $E_{кр} = m^2c^3/e\hbar$, можно надеяться, что с развитием лазерной техники и методов фокусировки максимально достижимые значения напряженностей увеличатся. Для возможности наблюдения различных квантовых эффектов во внешнем поле большой интерес представляет также перспектива создания рентгеновских и гамма-лазеров.

В астрофизике учет квантовых эффектов во внешнем электромагнитном поле может быть существен, например при изучении пульсаров (как известно, поля пульсаров могут принимать значения, близкие к критическому).

В связи с открытием реликтового излучения и черных дыр особую важность для астрофизики и космологии приобрели квантовые эффекты в гравитационном поле. В отличие от электромагнитного, гравитационное поле действует одинаково как на частицы, так и на античастицы. Поэтому рождение частиц из вакуума здесь есть результат действия приливных сил, разрывающих виртуальные пары.

Теория горячей Вселенной, подтвержденная в настоящее время наблюдениями, свидетельствует о том, что на начальных этапах

расширения имелись чрезвычайно сильные гравитационные поля, которые должны были вызывать поляризацию вакуума и порождать пары частиц и античастиц. Эффект рождения пар гравитационным полем оказался также существенным для физики черных дыр. Он, в частности, приводит к «испарению» первичных черных дыр небольшой массы.

Исследование квантовых эффектов в интенсивных внешних полях представляет также существенный общетеоретический интерес. Их описание связано с выходом за рамки теории возмущений и позволяет сделать ряд предсказаний о явлениях, фактически еще не исследованных современной наукой. Так, хотя квантовая электродинамика детально изучена и подтверждена экспериментально в области малых расстояний, разработка этой теории в области больших напряженностей внешнего поля еще только начинается.

В связи с созданием единых калибровочных теорий слабых и электромагнитных взаимодействий большой интерес представляет изучение эффектов спонтанного нарушения и восстановления симметрии квантовой системы под влиянием интенсивного внешнего поля.

Одной из фундаментальных проблем современной теоретической физики является объединение квантовой теории поля и общей теории относительности. Последовательной теории квантованного гравитационного поля в настоящее время еще не существует. Однако имеется широкая область применимости теории, в которой квантованные поля частиц рассматриваются во внешнем гравитационном поле. В рамках такой теории в настоящее время уже исследованы различные квантовые эффекты и получены важные для астрофизики и космологии результаты.

По сравнению со случаем электромагнитного поля изучение квантовых процессов во внешнем гравитационном поле сталкивается с дополнительными трудностями. Действительно, в реальном внешнем гравитационном поле, не исчезающем при $t \rightarrow \pm\infty$, невозможна обычная для электродинамики S -матричная постановка задачи. Поэтому возникает проблема интерпретации квантованного поля во внешнем гравитационном поле в терминах частиц.

Порожденные гравитационным полем частицы и создаваемая им поляризация вакуума, в свою очередь, являются источниками гравитационного поля. В связи с этим особую важность приобретает проблема получения конечных средних значений тензора энергии-импульса квантованного поля. С их помощью можно учесть обратное влияние рождающихся пар на метрику пространства—времени. Таким образом, в частности, получается важный вывод об изотропизации первоначально анизотропного расширения Вселенной в результате рождения частиц.

Изучение квантовых процессов во внешнем гравитационном поле позволяет по-новому поставить вопрос о происхождении вещества во Вселенной. Так, представляет интерес самосогласованная космологическая модель, в которой все вещество порождено

из вакуума, причем порождающее его гравитационное поле создано самим этим веществом в соответствии с уравнениями Эйнштейна.

Настоящая книга не претендует на изложение теории всех квантовых эффектов во внешних полях. Во-первых, в ней рассматриваются в основном эффекты, для описания которых теория возмущений может быть неприменимой ввиду их неаналитической зависимости от константы связи (рождение частиц из вакуума, поляризации вакуума, спонтанное нарушение симметрии внешним полем). Во-вторых, изучаются лишь вакуумные эффекты, основанные на взаимодействии вакуума квантованных полей с классическими внешними полями. В-третьих, рассматриваются процессы, которые становятся наиболее вероятными в интенсивных внешних полях, когда напряженности и (или) частоты близки к критическим.

При взаимодействии квантовых систем с внешним полем возникают и многие другие квантовые эффекты. К ним относятся, например, резонансное взаимодействие вещества или отдельного атома со световым полем, излучение релятивистских электронов во внешнем поле, радиационные эффекты квантовой электродинамики в интенсивном поле, влияние электромагнитного поля на реакции и распады элементарных частиц и т. п. Эти вопросы хорошо освещены в отечественной литературе (см., например, [1—5]) и здесь не рассматриваются.

В первой части данной книги изложены и проиллюстрированы на отдельных примерах основные методы теории квантовых эффектов в интенсивных внешних полях. Здесь собран теоретический материал, необходимый в дальнейшем при рассмотрении конкретных вопросов. В гл. 1 изложены основные сведения о релятивистских волновых уравнениях во внешних полях, в гл. 2 и 3 рассмотрены общие особенности квантования полей и основные квантовые эффекты во внешнем поле. Большое внимание уделено тому факту, что в присутствии нестационарного внешнего поля операторы рождения и уничтожения частиц в разные моменты времени связаны между собой преобразованием Боголюбова. Полученные таким образом представления канонических коммутационных соотношений могут быть унитарно неэквивалентны фокковскому. Физический смысл неэквивалентных представлений поясняется на нескольких примерах. В гл. 4 рассматриваются основные квантовые эффекты в случае, когда роль внешнего поля играют граничные условия в пустом пространстве.

Во второй части книги изложена теория квантовых эффектов во внешнем электромагнитном поле. В гл. 5—8 рассмотрено рождение и рассеяние частиц в электромагнитных полях различных типов, в частности в однородном нестационарном поле, кулоновском поле сверхкритических ядер, в полях с периодической зависимостью от времени и в полях других специальных конфигураций. В гл. 9 изучена поляризация вакуума пространственно-однородным и кулоновским полями. В связи с различием в поведении бозонов и фер-

мионов при наличии внешнего поля обсуждается явление бозонной конденсации. В гл. 10 анализируются эффекты спонтанного нарушения и восстановления симметрии во внешнем электромагнитном поле.

В третьей части книги рассмотрены квантовые эффекты в гравитационных полях. Общий анализ особенностей теории квантованных полей в гравитационном поле приведен в гл. 11, 12. Наиболее важными проблемами здесь являются интерпретация теории поля в терминах частиц, определение вакуумного состояния и устранение расходимостей из вакуумных средних тензора энергии-импульса. В частности, установлено соответствие между различными методиками устранения расходимостей и обсуждается вопрос о конформных аномалиях. В гл. 13, 14 изучается рождение пар, поляризация вакуума и спонтанное нарушение симметрии в однородных изотропных космологических моделях. В гл. 15 рассмотрены квантовые эффекты в анизотропных космологических моделях и вопрос об их изотропизации в результате рождения пар. Наконец, в гл. 16 дано описание рождения частиц при гравитационном коллапсе — так называемый эффект Хокинга.

Авторы благодарны Е. В. Дамаскинскому, Н. Н. Трунову и В. М. Фролову, которые прочли книгу в рукописи и сделали полезные замечания.

Разработка общего плана книги и обсуждение отдельных глав проводились совместно всеми авторами. Непосредственно работа по написанию текста распределилась следующим образом: гл. 2, 3 и § 9.2 и 10.1 написаны А. А. Грибом; гл. 4, 11, 12, 15, 16 и § 9.1 — С. Г. Мамаевым; гл. 1, 5, 6 и § 10.2, 10.3 — В. М. Мостепаненко; гл. 14 написана совместно А. А. Грибом и В. М. Мостепаненко; гл. 7, 8 и § 9.3 — С. Г. Мамаевым и В. М. Мостепаненко; предисловие и гл. 13 — совместно тремя авторами.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Везде, где это не оговорено особо, используется система единиц, в которой $\hbar = c = 1$. Постоянная тонкой структуры $\alpha = e^2 = 1/137$.

При разложении оператора поля по операторам рождения и уничтожения используются обозначения, которые были введены в книге [6]. В частности, положительно частотной называется функция, зависящая от времени по закону $\exp(+i\omega t)$.

Комплексно-сопряженные, эрмитово-сопряженные и транспонированные матрицы обозначаются соответственно A^* , A^\dagger и A^T . Там, где это не может вызвать недоразумений, операторы обозначаются так же, как и c -числа; в противном случае над буквой ставится шляпка.

Латинские векторные индексы принимают значения 0, 1, 2, 3, а греческие — 1, 2, 3. Используется метрика с сигнатурой (1, —1, —1, —1) и обозначение $\eta_{ik} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Метрический тензор в произвольных координатах, в том числе в римановом пространстве, обозначается g_{ik} . Знаки тензора кривизны и тензора Риччи выбираются так, что $R_{klm}^i = \partial_m \Gamma_{kl}^i - \partial_l \Gamma_{km}^i + \Gamma_{nm}^i \Gamma_{kl}^n - \Gamma_{nl}^i \Gamma_{km}^n$, $R_{km} = R_{klm}^l$.

Глава 1. ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ КЛАССИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ
ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

§ 1.1. Скалярное и векторное волновые
уравнения во внешних полях

Учет взаимодействия заряженного поля с электромагнитным осуществляется заменой в формализме свободного поля производных ∂_n на обобщенные производные D_n по правилу

$$\partial_n \rightarrow D_n = \partial_n + ieA_n, \quad (1.1)$$

где A_n — 4-вектор потенциала электромагнитного поля, e — заряд частицы вместе со своим знаком (для электрона $e = -|e|$). В случае скалярного и дираковского полей можно совершать замену (1.1) как в плотности лагранжиана свободного поля, так и непосредственно в уравнении поля. Однако для более высоких спинов при наличии связей это, вообще говоря, не так: замена (1.1) в уравнении свободного поля может приводить к ошибочным результатам. Поэтому в общем случае необходимо вводить взаимодействие рассматриваемого поля с электромагнитным в плотность лагранжиана, а уравнения поля получать из соответствующих уравнений Эйлера. Важно отметить, что введение взаимодействия с электромагнитным полем по рецепту (1.1) обеспечивает градиентную инвариантность теории.

Рассмотрим сначала заряженное скалярное поле $\varphi(x)$, взаимодействующее с внешним электромагнитным полем $A_k(x)$. Совершая замену (1.1) в плотности лагранжиана свободного скалярного поля с массой m , получаем [7]:

$$\mathcal{L}^{(0)}(x) = D_k^* \varphi^*(x) D^k \varphi(x) - m^2 \varphi^*(x) \varphi(x). \quad (1.2)$$

Уравнением Эйлера для лагранжиана (1.2) является скалярное волновое уравнение Клейна—Гордона — Фока

$$(D_n D^n + m^2) \varphi(x) = 0. \quad (1.3)$$

По теореме Нётер лагранжиану (1.2) соответствует канонический тензор энергии-импульса

$$T_{ik}^{(0)\text{can}}(x) = D_i^* \varphi^*(x) D_k \varphi(x) + D_k^* \varphi^*(x) D_i \varphi(x) - g_{ik} \mathcal{L}^{(0)}(x) \quad (1.4)$$

и сохраняющийся 4-вектор тока

$$J_k^{(0)}(x) = i [\varphi^*(x) D_k \varphi(x) - (D_k^* \varphi^*(x)) \varphi(x)]. \quad (1.5)$$

Если варьировать действие с лагранжианом (1.2) не по полю, а по метрическому тензору g_{ik} , то получается выражение для так называемого *метрического* тензора энергии-импульса

$$T_{ik}^{(0)}(x) = T_{ik}^{(0) \text{ can}}(x) - \frac{1}{3} [\partial_i \partial_k - g_{ik} \partial_l \partial^l] \varphi^*(x) \varphi(x). \quad (1.6)$$

Как показано в работе [8], метрический тензор (1.6), отличающийся от канонического на 4-дивергенцию, оказывается предпочтительным, так как в перенормируемых теориях поля его матричные элементы конечны.

В пространстве решений уравнения (1.3) можно ввести не зависящее от выбора гиперповерхности Σ скалярное произведение

$$(\varphi_1, \varphi_2) = i \int_{\Sigma} d\sigma^i [\varphi_1^* D_i \varphi_2 - (D_i^* \varphi_1^*) \varphi_2]. \quad (1.7)$$

Перейдем теперь к рассмотрению несколько более сложного случая векторного поля. Комплексное векторное поле описывается 4-компонентной функцией $\varphi_k(x)$, одна из компонент которой (соответствующая частице со спином нуль) должна быть исключена. Для этого лагранжиан выбирается таким образом, чтобы помимо уравнений поля он давал необходимые для такого исключения дополнительные условия (связи). Подобно скалярному случаю, лагранжиан поля $\varphi_k(x)$, взаимодействующего с электромагнитным полем, получается из лагранжиана свободной теории с помощью замены (1.1) [9]:

$$\mathcal{L}^{(1)}(x) = - (1/2) f_{kl}^* f^{kl} + m^2 \varphi_k^* \varphi^k, \quad (1.8)$$

где $f_{kl}(x) = D_k \varphi_l(x) - D_l \varphi_k(x)$.

Из (1.8) в качестве уравнений Эйлера получается векторное волновое уравнение Прока

$$D_k f^{kl}(x) + m^2 \varphi^l(x) = 0. \quad (1.9)$$

Хотя уравнение (1.9) является дифференциальным уравнением второго порядка, оно не содержит второй производной от $\varphi^0(x)$ по t (так как $f^{00} = 0$). Вследствие этого (1.9) при $l = 0$ представляет собой связь первого рода. Действуя на уравнение (1.9) оператором D_l , получаем при $m \neq 0$ связь второго рода в виде

$$D_n \varphi^n(x) = (ie/2m^2) F_{nl} f^{nl}(x), \quad (1.10)$$

где $F_{nl} = \partial_n A_l - \partial_l A_n$ — тензор электромагнитного поля.

Подставляя (1.10) в (1.9), получаем уравнения второго порядка для каждой из четырех компонент $\varphi_k(x)$:

$$D_n D^n \varphi_k(x) + m^2 \varphi_k(x) - \frac{ie}{m^2} D_k F^{nl} D_n \varphi_l(x) + ie F_k{}^n \varphi_n(x) = 0. \quad (1.11)$$

Как показано в работе [10], любое решение (1.11), удовлетворяющее уравнениям связи в начальный момент времени, удовлетворяет им, а также (1.9) в любой момент времени.

Из плотности лагранжиана (1.8) вытекают следующие выражения для тензора энергии-импульса и 4-вектора тока векторного поля, взаимодействующего с внешним электромагнитным полем:

$$T_{ln}^{(1)} = -g^{kp} (f_{lk}f_{np}^* + f_{lk}^*f_{np}) + m^2 (\varphi_l^* \varphi_n + \varphi_n^* \varphi_l) - g_{ln} \mathcal{L}^{(1)}; \quad (1.12)$$

$$J_n^{(1)} = i (f_{nk}^* \varphi^k - \varphi^{k*} f_{nk}). \quad (1.13)$$

Случай векторного поля показывает, что учет взаимодействия с электромагнитным полем нельзя проводить с помощью замены (1.1) в уравнениях свободного поля. Действительно, хотя все компоненты свободного векторного поля удовлетворяют уравнениям Клейна—Гордона—Фока, замена (1.1) в них привела бы не к правильным уравнениям (1.11), а к уравнениям (1.3), записанным для каждой компоненты $\varphi_k(x)$. В то же время в уравнения Эйлера, преобразованные с учетом связей, взаимодействие можно ввести по правилу (1.1).

Рассмотрим скалярное и векторное волновые уравнения во внешних полях иной природы. Важным примером классического внешнего поля является гравитационное поле, описываемое метрическим тензором g_{ik} риманова пространства—времени. Наиболее простой подход, позволяющий описать взаимодействие скалярного поля с гравитационным, состоит в общековариантном обобщении уравнений свободного поля, достигаемом заменой в формализме свободного поля производных ∂_n на ковариантные производные ∇_n .

Такое взаимодействие с гравитационным полем называется *минимальным*. Уравнение скалярного поля в этом случае принимает вид

$$(\nabla_n \nabla^n + m^2) \varphi(x) = 0. \quad (1.14)$$

Уравнение (1.14) при $m = 0$ не обладает, однако, свойством конформной инвариантности. Это означает, что при отображении риманова пространства с метрикой g_{mn} на риманово пространство с метрикой \tilde{g}_{mn}

$$g_{mn} \rightarrow \tilde{g}_{mn} = \exp[-2\sigma(x)] g_{mn}, \quad (1.15)$$

где $\sigma(x)$ — произвольная дважды дифференцируемая функция координат, не удастся найти такого зависящего от σ преобразования $\varphi \rightarrow \tilde{\varphi}$, чтобы волновое уравнение сохраняло свою форму. Физический смысл требования конформной инвариантности состоит в том, что безмассовая частица не характеризуется определенным значением комптоновской длины $\lambda_c = m^{-1}$, вследствие чего она должна вести себя одинаково в римановых пространствах, между которыми можно установить конформное соответствие (1.15).

В связи с этим в работах [11—14] было предложено другое обобщенное уравнение скалярного поля:

$$(\nabla_n \nabla^n + \xi R + m^2) \varphi(x) = 0, \quad (1.16)$$

где $R = R^i_i$ — скалярная кривизна пространства—времени; R_{ik} — тензор Риччи; $\xi = (N - 2)/4(N - 1)$; N — размерность пространства—времени. Для $N = 4$ имеем $\xi = 1/6$.

При отображении (1.15) и одновременном преобразовании полевой переменной $\varphi(x)$ по формуле

$$\varphi(x) \rightarrow \tilde{\varphi}(x) = \exp[\sigma(x)] \varphi(x), \quad (1.17)$$

уравнение (1.16) переходит в

$$(\tilde{\nabla}_n \tilde{\nabla}^n + \xi \tilde{R} + m^2 \exp[2\sigma(x)]) \tilde{\varphi}(x) = 0, \quad (1.18)$$

где $\tilde{\nabla}_n$ и \tilde{R} относятся к метрике \tilde{g}_{mn} . Для того чтобы убедиться в этом, достаточно воспользоваться законом преобразования скалярной кривизны R при преобразовании (1.15) [15]:

$$\tilde{R} = \exp[2\sigma(x)] [R - 2(N - 1) \Delta_2 \sigma + (N - 1)(N - 2) \Delta_1 \sigma], \quad (1.19)$$

где

$$\Delta_1 \sigma = \partial_k \sigma \partial^k \sigma, \quad \Delta_2 \sigma = \square \sigma = \nabla_k \nabla^k \sigma \quad (1.20)$$

операторы Лапласа — Бельтрами.

Уравнение (1.16) получило название *уравнения с конформной связью*. Как видно из (1.16) и (1.18), при $m = 0$ (1.16) обладает свойством конформной инвариантности. Ниже (см. ч. III) приведены аргументы, подтверждающие, что правильным обобщением скалярного волнового уравнения на риманову геометрию является именно (1.16), а не (1.14). Оно получается как уравнение Эйлера из лагранжевой плотности

$$\mathcal{L}^{(0)}(x) = \sqrt{-g} [g^{nl} \partial_n \varphi^*(x) \partial_l \varphi(x) - (m^2 + \xi R) \varphi^*(x) \times \varphi(x)], \quad (1.21)$$

где $g = \det(g_{kl})$.

Вариация действия с лагранжианом (1.21) по переменным φ , φ^* дает канонический тензор энергии-импульса

$$T_{mn}^{(0)\text{can}}(x) = \partial_m \varphi^*(x) \partial_n \varphi(x) + \partial_n \varphi^*(x) \partial_m \varphi(x) - g_{mn} \times \times (-g)^{-1/2} \mathcal{L}^{(0)}(x), \quad (1.22)$$

а вариация по метрике g_{mn} — метрический тензор энергии-импульса Черникова — Тагирова [13]:

$$T_{mn}^{(0)}(x) = T_{mn}^{(0)\text{can}}(x) - 2\xi [R_{mn} + \nabla_m \nabla_n - g_{mn} \nabla_k \nabla^k] \times \times \varphi^*(x) \varphi(x). \quad (1.23)$$

В отличие от (1.22) след метрического тензора (1.23) для безмассового поля равен нулю. В гл. 13 приведен анализ соотношения

между тензорами (1.22), (1.23), причем показано, что источниками гравитационного поля служат средние значения от (1.23).

Из плотности лагранжиана (1.21) находим следующее выражение для сохраняющегося 4-тока и скалярного произведения решений уравнения поля:

$$J_n^{(0)}(x) = i\varphi^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_n \varphi(x), \quad (1.24)$$

$$(\varphi_1, \varphi_2) = i \int_{\Sigma} d\sigma^i (\varphi_1^* \overleftrightarrow{\partial}_i \varphi_2). \quad (1.25)$$

Рассмотрим теперь векторное поле, взаимодействующее с внешним гравитационным полем. Оно описывается 4-компонентным вектором $\varphi_k(x)$ относительно общих преобразований координат. Плотность лагранжиана поля $\varphi_k(x)$ можно записать аналогично (1.8):

$$\mathcal{L}^{(1)}(x) = \sqrt{-g} [(-1/2) f_{ni}^*(x) f^{ni}(x) + m^2 \varphi_n^*(x) \varphi^n(x)], \quad (1.26)$$

где теперь $f_{ni} = \nabla_n \varphi_i - \nabla_i \varphi_n = \partial_n \varphi_i - \partial_i \varphi_n$.

Плотность (1.26) приводит к уравнению Прока в римановом пространстве — времени:

$$\nabla^n f_{ni}(x) + m^2 \varphi_i(x) = 0. \quad (1.27)$$

Так же как в случае векторного поля, взаимодействующего с электромагнитным, уравнение (1.27) не содержит второй производной от φ_0 по t . Поэтому (1.27) при $l=0$ является связью первого рода. Применяя к (1.27) оператор ∇^l , получаем при $m \neq 0$ связь второго рода

$$\nabla^n \varphi_n(x) = 0. \quad (1.28)$$

Используя закон преобразования символов Кристоффеля при конформном преобразовании (1.15) [15]:

$$\tilde{\Gamma}_{ml}^p = \Gamma_{ml}^p - (\partial_m \sigma \delta_l^p + \partial_l \sigma \delta_m^p - \partial^p \sigma g_{ml}), \quad (1.29)$$

легко убедиться в том, что при $m=0$ уравнение (1.27) конформно-инвариантно, если положить

$$\tilde{f}_{ni}(x) = f_{ni}(x).$$

Подставляя (1.28) в (1.27), получаем уравнения второго порядка относительно компонент φ_k :

$$\nabla^n \nabla_n \varphi_k(x) + R_{kl} \varphi^l(x) + m^2 \varphi_k(x) = 0. \quad (1.30)$$

Для тензора энергии-импульса и 4-тока векторного поля из плотности лагранжиана (1.26) получаем выражения:

$$T_{in}^{(1)}(x) = -g^{kp} (f_{ik} f_{np}^* + f_{ik}^* f_{np}) + m^2 (\varphi_i^* \varphi_n + \varphi_n^* \varphi_i) - g_{in} (-g)^{-1/2} \mathcal{L}^{(1)}(x); \quad (1.31)$$

$$J_n^{(1)}(x) = i (f_{nk}^* \varphi^k - \varphi^{k*} f_{nk}). \quad (1.32)$$

Выше были рассмотрены уравнения Клейна — Гордона — Фока и Прокя в электромагнитном и гравитационном внешних полях. Помимо этого иногда (например, в теории кварков [16]) рассматриваются поля, взаимодействующие со скалярным внешним полем. Такое поле задается потенциалом U , который, в отличие от потенциалов электромагнитного поля, является скаляром, а не компонентой 4-вектора. Плотность лагранжиана и уравнение поля для такого взаимодействия, например, в бесспиновом случае, имеют вид

$$\mathcal{L}^{(0)}(x) = \partial_n \varphi^*(x) \partial^n \varphi(x) - (m^2 + mU) \varphi^*(x) \varphi(x), \quad (1.33)$$

$$(\partial_n \hat{c}^n + m^2 + mU) \varphi(x) = 0. \quad (1.34)$$

Тензор энергии-импульса и 4-вектор тока получаются из соответствующих выражений для свободного скалярного поля заменой

$$m^2 \rightarrow m^2 + mU. \quad (1.35)$$

§ 1.2. Уравнение Дирака во внешних полях

Плотность лагранжиана дираковского поля $\psi(x)$, взаимодействующего с внешним электромагнитным полем $A_n(x)$, есть [7]

$$\mathcal{L}^{(1/2)}(x) = (i/2) [\bar{\psi}(x) \gamma^n D_n \psi(x) - (D_n^* \bar{\psi}(x)) \gamma^n \psi(x)] - m \bar{\psi}(x) \psi(x). \quad (1.36)$$

Здесь $\psi(x)$ — 4-компонентный биспинор, $\bar{\psi} = \psi^+ \gamma^0$ — дираковски сопряженный биспинор, матрицы Дирака γ_n удовлетворяют соотношениям

$$\gamma^n \gamma^m + \gamma^m \gamma^n = 2\eta^{nm}, \quad (1.37)$$

а оператор D_n определен в (1.1).

Ниже используется представление для матриц Дирака, в котором матрица γ^0 диагональна:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ -\sigma_\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.38)$$

где I — единичная матрица 2×2 , σ_μ — матрицы Паули.

Из (1.36) вытекает уравнение Дирака

$$(i\gamma^n D_n - m) \psi(x) = 0, \quad (1.39)$$

а также выражения для тензора энергии-импульса и 4-вектора тока дираковского поля во внешнем электромагнитном поле:

$$T_{mn}^{(1/2)}(x) = (i/2) [\bar{\psi}(x) \gamma_m D_n \psi(x) - (D_n^* \bar{\psi}(x)) \gamma_m \psi(x)], \quad (1.40)$$

$$J_m^{(1/2)}(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_m \psi(x). \quad (1.41)$$

Рассмотрим теперь взаимодействие дираковского поля с классическим гравитационным полем. Для этого необходимо определить

общековариантное обобщение уравнения Дирака. Такое обобщение сопряжено с большими трудностями, чем для скалярного и векторного полей, поскольку требует распространения понятия спинора на случай риманова пространства—времени [17]. Уравнение (1.39) лоренц-инвариантно, т. е. сохраняет свою форму с неизменными матрицами γ^a , если наряду с преобразованием координат из группы Лоренца преобразовать спинор ψ по соответствующему представлению этой группы.

Требование лоренц-инвариантности уравнения Дирака можно перенести на случай римановой геометрии лишь локально. Для этого в каждой точке риманова пространства вводится касательное псевдоевклидово пространство. В качестве базисных векторов последнего удобно выбрать четверку так называемых реперных 4-векторов $h_{(a)}^k$ (нумеруемых индексом $a = 0, 1, 2, 3$), нормированных согласно

$$h_{(a)}^k h_{(b)k} = \eta_{ab}, \quad (1.42)$$

где η_{ab} — метрический тензор в касательном пространстве Минковского. Такая четверка 4-векторов называется ортонормированным репером или тетрадой. Введем также взаимную тетраду $h_k^{(a)}$, определяемую условиями

$$h_k^{(a)} h_{(b)}^k = \delta_b^a. \quad (1.43)$$

При этом

$$h_i^{(a)} h_{(a)k} = g_{ik}. \quad (1.44)$$

В терминах тетрады $h_{(a)}^i$ квадрат интервала можно записать в виде

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = \eta_{ab} (h_i^{(a)} dx^i) (h_k^{(b)} dx^k). \quad (1.45)$$

Уравнение Дирака при фиксированном x можно теперь считать лоренц-инвариантным в указанном выше смысле относительно произвольных вращений ортонормированного репера. При этом предполагается, что при общих преобразованиях координат спинор ψ преобразуется как скаляр.

Ковариантная производная от спинора ψ в римановом пространстве, которая обозначена $\vec{\nabla}$, должна удовлетворять двум требованиям. Во-первых, при фиксированном x величина $\vec{\nabla}_n \psi$ сама должна быть спинором относительно преобразований ортонормированного репера. Во-вторых, она должна быть 4-вектором относительно общих преобразований координат. Эти требования приводят к следующему определению:

$$\vec{\nabla}_n \psi = [\partial_n + (1/4) C_{abc} h_n^{(c)} \gamma^b \gamma^a] \psi, \quad (1.46)$$

где C_{abc} — коэффициенты вращения Риччи, которые связаны с реперными коэффициентами соотношением

$$C_{abc} = (\nabla_m h_{(a)}^n) h_{(b)n} h_{(c)}^m. \quad (1.47)$$

Заменяя теперь в свободном уравнении Дирака постоянные γ -матрицы на 4-вектор относительно общих преобразований координат

$$\gamma^n(x) = h_{(a)}^n \gamma^a, \quad (1.48)$$

получаем общековариантное обобщение уравнения Дирака

$$(i\gamma^n(x) \vec{\nabla}_n - m) \psi(x) = 0. \quad (1.49)$$

Его можно получить как уравнение Эйлера из плотности функции Лагранжа

$$\mathcal{L}^{(1/2)}(x) = \sqrt{-g} \left[\frac{i}{2} (\bar{\psi}(x) \gamma^n(x) \vec{\nabla}_n \psi(x) - (\vec{\nabla}_n \bar{\psi}(x)) \gamma^n(x) \psi(x)) - m \bar{\psi}(x) \psi(x) \right]. \quad (1.50)$$

Из (1.50) получаются также выражения для метрического тензора энергии-импульса [18]

$$T_{mn}^{(1/2)}(x) = (i/4) [\bar{\psi}(x) \gamma_n(x) \vec{\nabla}_m \psi(x) + \bar{\psi}(x) \gamma_m \vec{\nabla}_n \psi(x) - (\vec{\nabla}_m \bar{\psi}(x)) \gamma_n(x) \psi(x) - (\vec{\nabla}_n \bar{\psi}(x)) \gamma_m(x) \psi(x)] \quad (1.51)$$

и 4-тока фермионного поля

$$J_m^{(1/2)}(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_m(x) \psi(x). \quad (1.52)$$

В отличие от скалярного случая при $m = 0$ уравнение Дирака в римановом пространстве (1.49) без каких-либо дополнительных модификаций конформно-инвариантно, если одновременно с (1.15) совершить преобразование

$$\psi(x) \rightarrow \tilde{\psi}(x) = \exp[3\sigma(x)/2] \psi(x). \quad (1.53)$$

Вследствие этого метрический тензор энергии-импульса (1.51) совпадает с каноническим, симметрированным по индексам m и n .

Кроме взаимодействий с электромагнитным и гравитационным внешними полями можно рассмотреть взаимодействие дираковского поля со скалярным внешним полем U , моделирующим, например, самосогласованное поле кварковой системы [16]. В этом случае все представляющие интерес величины получаются из свободной теории заменой $m \rightarrow m + U$. Например, плотность лагранжиана и соответствующее уравнение поля имеют вид:

$$\mathcal{L}^{(1/2)}(x) = \frac{i}{2} [\bar{\psi}(x) \gamma^n \partial_n \psi(x) - (\partial_n \bar{\psi}(x)) \gamma^n \psi(x)] - (m + U) \bar{\psi}(x) \psi(x), \quad (1.54)$$

$$[i\gamma^n \partial_n - (m + U)] \psi(x) = 0. \quad (1.55)$$

§ 1.3. Каузальные аномалии для волновых уравнений с высшими спинами во внешнем электромагнитном поле

Выше уже говорилось, что взаимодействие заряженной частицы с электромагнитным полем можно описать с помощью замены (1.1), проводимой в плотности лагранжиана рассматриваемой теории. Для частиц со спином 0, 1/2 и 1 такая замена приводит к уравнениям, удовлетворяющим основным требованиям теории относительности (случай $s = 1$ в определенном смысле пограничный и будет подробнее обсужден ниже). Если же $s = 3/2$, то полученные по указанному рецепту уравнения, как оказывается, обладают решениями в виде волн, которые распространяются со сверхсветовыми скоростями [19]. Это приводит к появлению ряда фундаментальных проблем. Действительно, из теории неприводимых представлений группы Пуанкаре следует вывод о возможности существования свободных частиц с произвольными целыми и полуцелыми значениями спина. Возникает вопрос, не является ли эта возможность чисто абстрактной и нереализуемой в природе? Если же частицы с высшими спинами, которые могут считаться элементарными с достаточной степенью точности, все же существуют, то нельзя ли избавиться от акаузальности, учитывая взаимодействие с другими полями? Наконец, не являются ли каузальные аномалии реальным физическим эффектом, который надо исследовать с учетом роли излучения, радиационных и других поправок?

Рассмотрим трудности, возникающие в случае спина 3/2 [19]. Поле со спином 3/2 можно описать с помощью спин-вектора $\psi_k^s(x)$, где векторный индекс $k = 0, 1, 2, 3$, спинорный индекс $s = 1, 2, 3, 4$ (далее его не выписываем). Оно удовлетворяет уравнениям Рариты—Швингера, которые при учете взаимодействия с электромагнитным полем сводятся к гиперболической системе дифференциальных уравнений в частных производных с определенными начальными условиями. Покажем, что скорость распространения волновых фронтов для этих уравнений может превысить скорость света.

Плотность лагранжиана поля Рариты—Швингера, взаимодействующего с электромагнитным полем, получается из свободной теории с помощью замены (1.1):

$$\mathcal{L}^{(3/2)}(x) = \bar{\psi}^k(x) [i \Gamma_m D^m - B]_k^n \psi_n(x), \quad (1.56)$$

где введены обозначения:

$$[\Gamma_m D^m]_k^n = \delta_k^n \gamma_m D^m - \gamma_k D^n - D_k \gamma^n + \gamma_k \gamma_m D^m \gamma^n; \quad (1.57)$$

$$B_k^n = m (\delta_k^n - \gamma_k \gamma^n).$$

Уравнениями Эйлера для (1.56) являются уравнения Рариты—Швингера

$$[i \Gamma_m D^m - B]_k^n \psi_n(x) = 0. \quad (1.58)$$

Подобно случаю векторного поля, уравнения (1.58) содержат связи, необходимые для исключения лишних компонент спин-вектора (при описании частицы со спином $3/2$ используются 8 из его 16 компонент). Действительно, при $k = 0$ левая часть (1.58) не содержит производной по времени ни от одной компоненты ψ_n . Полагая в (1.58) $k = 0$ и умножая результат слева на γ_0 , получаем связь первого рода в виде

$$iD^\mu \psi_\mu(x) - i(\gamma^\mu D_\mu)(\gamma^\nu \psi_\nu(x)) - m\gamma^\mu \psi_\mu(x) = 0 \quad (1.59)$$

(напомним, что у нас греческие индексы пробегают значения 1, 2, 3).

Производная $\partial\psi_0/\partial t$ не содержится в левой части (1.58) и при $k = 1, 2, 3$. Чтобы получить уравнение для всех компонент ψ , умножим (1.59) слева на γ^k ; в результате получим

$$(2i\gamma_n D^n \gamma^k - 2iD^k + 3m\gamma^k) \psi_k(x) = 0. \quad (1.60)$$

Действуя оператором D^k слева на (1.59), получаем

$$m(\gamma_n D^n \gamma^k - D^k) \psi_k(x) + e\gamma^5 \gamma^k \Phi_k^n \psi_n(x) = 0, \quad (1.61)$$

где $\Phi_k^n = \varepsilon_{kq}^{np} F_p^q$, а ε^{knpr} — антисимметричный единичный 4-тензор, определенный согласно $\varepsilon^{0123} = 1$.

Из (1.60), (1.61) следует уравнение связи второго рода

$$\gamma_n \psi^n(x) = (2ie/3m^2) \gamma^5 \gamma^k \Phi_k^n \psi_n(x). \quad (1.62)$$

Используя (1.60), получаем

$$D_n \psi^n(x) = (2e/3m^2) (i\gamma_n D^n + 3m/2) \gamma^5 \gamma^k \Phi_k^n \psi_p(x). \quad (1.63)$$

Связи (1.59) и (1.62) уменьшают число независимых компонент спин-вектора ψ_m с 16 до 8. Подставляя (1.62) и (1.63) в (1.58), получаем новое полевое уравнение

$$(i\gamma_n D^n - m) \psi_k(x) - (2ie/3m^2) (iD_k + m\gamma_k/2) \gamma^5 \gamma^p \Phi_p^n \psi_n(x) = 0. \quad (1.64)$$

Очевидно, что каждое решение уравнений Рариты—Швингера (1.58) удовлетворяет уравнениям связей (1.59), (1.62), а также уравнению (1.64). И наоборот, можно показать [19], что любое решение (1.64), удовлетворяющее уравнениям связей в начальный момент $t = t_0$, удовлетворяет им, а также уравнениям (1.58) в любой момент времени. Это позволяет изучать решения (1.64) вместо решений (1.58).

Выясним теперь вопрос о том, к какому типу дифференциальных уравнений относятся уравнения Рариты—Швингера и какова максимальная допустимая ими скорость распространения волновых фронтов. Чтобы установить тип системы уравнений вида (1.58) или (1.64), необходимо изучить ее характеристики. Для этого следует рассмотреть матрицу L тех членов каждого из уравнений, которые содержат производные. После этого надо заменить ∂_m на

соответствующие компоненты постоянного вектора n_m и приравнять нулю определитель получившейся матрицы

$$\det L(n) = 0. \quad (1.65)$$

Если для любого \mathbf{n} все решения n^0 уравнения (1.65) вещественны, то рассматриваемая система уравнений относится к гиперболическому типу. При этом вектор \mathbf{n}_m является нормалью к характеристическим поверхностям, а величина отношения $n^0/|\mathbf{n}|$ дает максимальное значение скорости распространения фронта волны. Условие каузальности состоит в том, что должно выполняться

$$v_{\max} = n^0/|\mathbf{n}| \leq 1, \quad (1.66)$$

т. е. вектор n^m обязан быть пространственно подобным. Итак, необходимое условие каузальности распространения состоит в том, что уравнение (1.65) не должно допускать времениподобных решений.

Рассмотрим с этой точки зрения уравнения (1.58) и (1.64). Легко убедиться в том, что для уравнений (1.58) равенство (1.65) превращается в тождество для любого n_k . Это является следствием того, что (1.58) включает в себе связи, и приведенный метод нахождения нормалей к характеристическим поверхностям неприменим. В то же время, применяя этот метод к уравнениям (1.64), получаем

$$\det L(n) = (n_k n^k)^4 [(n_k n^k)^2 + (4e^2/9m^4) (\Phi_p^k n^p) (\Phi_k^j n_j)]^4 = 0 \quad (1.67)$$

Далее ограничимся рассмотрением электромагнитных полей, которые назовем полями класса I. Поле принадлежит классу I, если существует такая система отсчета, в которой во всем пространстве выполняется неравенство

$$\mathbf{H}^2(x) < (3m^2/2e)^2, \quad (1.68)$$

где \mathbf{H} — вектор напряженности магнитного поля.

Можно убедиться в том, что для полей класса I уравнение (1.67) имеет восемь положительных и восемь отрицательных корней n^0 при любом заданном \mathbf{n} . Это означает, что комплексные корни отсутствуют и уравнение (1.64) является уравнением гиперболического типа. Если же нельзя выбрать такую систему отсчета, в которой выполнялось бы условие (1.68) (хотя бы и свою для каждой точки x), то поле не принадлежит классу I. В этом случае (1.67) имеет комплексные корни n^0 , вследствие чего уравнение (1.64) перестает быть гиперболическим и не описывает больше явления распространения волн.

Обратимся теперь к вопросу о каузальности распространения волн для поля класса I. Выбирая систему координат, в которой нормаль к характеристической поверхности является времениподобным вектором вида $n^m = (1, 0, 0, 0)$, и подставляя его в (1.67), получаем

$$1 - (4e^2/9m^4) \mathbf{H}^2(x) = 0. \quad (1.69)$$

Очевидно, что если $F_{n,m}(x) \neq 0$, то существует система отсчета, в которой условие (1.69) выполнено. Таким образом, нормаль к характеристической поверхности, проходящей через точку x , времениподобна, т. е. имеет место распространение фронта волны со скоростью, превышающей скорость света. Сама же характеристическая поверхность является пространственноподобной, т. е. лежащей вне светового конуса (этот вывод справедлив для поверхностей, проходящих через любую точку x , в которой $F_{n,m} \neq 0$). Учет уравнений связи (1.59) и (1.62) оставляет приведенные результаты без изменения. Аналогичные трудности возникают и для полей со спином $s > 3/2$.

Почему же рассмотренные выше уравнения Клейна—Гордона—Фока (1.3), Прока (1.9) и Дирака (1.39) не приводят к акаузальным эффектам? Дело в том, что свободные уравнения Клейна—Гордона—Фока и Дирака являются уравнениями гиперболического типа, а их характеристические поверхности совпадают со световыми конусами. При этом учет взаимодействия с электромагнитным полем с помощью рецепта (1.1) не затрагивает коэффициентов при старших производных, входящих в эти уравнения, вследствие чего характеристические поверхности остаются без изменения.

Для частицы со спином $1/2$, обладающей аномальным магнитным моментом μ , вместо (1.39) имеем уравнение

$$(i\gamma^n D_n - (i\mu/2) \sigma_{kn} F^{kn} - m) \psi(x) = 0, \quad (1.70)$$

где $\sigma_{kn} = (1/2)(\gamma_k \gamma_n - \gamma_n \gamma_k)$. Это уравнение также не приводит к акаузальным эффектам.

Для уравнений Прока ситуация несколько сложнее. Если применить сформулированный выше критерий гиперболичности к уравнениям второго порядка (1.9) (при этом в матрицу L включаются лишь члены уравнений, содержащие вторые производные), то независимо от наличия внешнего поля равенство (1.65) удовлетворяется тождественно. Так же как и в случае уравнений Рариты—Швингера, это объясняется присутствием связей. Поэтому критерий гиперболичности надо применять не к (1.9), а к (1.11). В результате равенство (1.65) принимает вид [10]

$$\det L(n) = \det |n^k n_k g_{pq} - (ie/m^2) n_p F_{kq} n^k| = (n^k n_k)^4 = 0. \quad (1.71)$$

Очевидно, что уравнение (1.71) имеет вещественные решения n^0 для произвольного \mathbf{n} и является, таким образом, уравнением гиперболического типа при любом внешнем поле. При этом характеристические поверхности также не зависят от наличия внешнего поля и совпадают со световыми конусами.

Итак, рассмотренные выше уравнения (1.3), (1.11) и (1.39) дают адекватное описание заряженных частиц со спинами $0, 1/2$ и 1 во внешнем электромагнитном поле. В то же время случай $s=1$ является в определенном смысле граничным, так как уравнения Прока приобретают акаузальные свойства, если рассмотреть частицу, обладающую аномальным квадрупольным электрическим мо-

ментом (такой частицей может считаться дейтон в пренебрежении его внутренней структурой).

Для описания частицы с квадрупольным моментом необходимо добавить к плотности лагранжиана (1.8) слагаемое, описывающее электрическую квадрупольную связь

$$\mathcal{L}^{(q)}(x) = iq [\varphi_k^*(x) Q_{mn}^k D^m \varphi^n(x) - (D^m \varphi^n(x))^* Q_{mn}^k \varphi_k(x)], \quad (1.72)$$

где $Q_{kmn} = \partial_k F_{mn}$; q — вещественная постоянная, характеризующая силу этой связи.

Как показано в работе [10], в пренебрежении электрическим зарядом уравнения поля, вытекающие из лагранжианов (1.8) и (1.72), можно представить в виде системы гиперболического типа, если F_{mn} описывает электростатическое поле произвольной интенсивности. Поскольку, однако, уравнение (1.65) допускает в данном случае времениподобные решения, то возможно распространение волнового фронта со скоростью, превосходящей скорость света. Если же F_{mn} задает достаточно сильное постоянное магнитное поле, то уравнение (1.65) имеет комплексные решения, вследствие чего уравнения Прока перестают принадлежать к гиперболическому типу и не могут более описывать процесс распространения волн. В работе [20] в квазиклассическом приближении аналогичные результаты получены и для векторной частицы с аномальным магнитным дипольным моментом.

Обсудим теперь вопросы, поставленные в начале данного параграфа. Рассмотренные выше трудности становятся несущественными, если придерживаться точки зрения, что истинно элементарными частицами являются лишь лептоны, кварки и фотон. Все остальные частицы предполагаются составленными из кварков, т. е. частиц со спином $1/2$. Поэтому взаимодействие составных частиц с внешним полем сводится в конечном итоге к взаимодействиям кварков. С этой точки зрения вообще не имеет смысла рассматривать элементарные частицы, описываемые представлениями группы Пуанкаре с высшими спинами и конструировать волновые уравнения для соответствующих полей. Однако, как отмечено в работе [21], волновые уравнения для полей с высшими спинами могут, во-первых, претендовать на феноменологическое описание известных составных частиц, или резонансов, в случаях, когда их внутренней структурой можно пренебречь. Во-вторых, изучение взаимодействия частицы с классическим электромагнитным полем может рассматриваться как первый шаг к построению полной вторично квантованной теории (последнее является сложной теоретической проблемой, так как квантовая электродинамика частиц со спином $s \geq 1$ неперенормируема). Наконец, необходимо отметить, что программа сведения взаимодействия резонансов с внешним полем к взаимодействиям отдельных кварков носит пока качественный характер.

На второй вопрос, поставленный выше, можно дать положительный ответ: учет взаимодействий определенного вида приводит к исчезновению акаузальных эффектов. Примером этого могут служить

уравнения Баба—Гупты, которые совместно описывают поля со спином $3/2$ и $1/2$, обладающие, вообще говоря, различными массами. При наличии взаимодействия с внешним электромагнитным полем эти уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} (i\gamma^n D_n - m) \psi_k - (i/3) (\gamma^n D_k + D^n \gamma_k) \psi_n + \\ + (\gamma_k/3) (i\gamma^n D_n + m) \gamma^p \psi_p + ib D_k \psi = 0, \\ a (i\gamma^n D_n - \lambda m) \psi + ib D_n \psi^n = 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.73)$$

где ψ_k — спин-вектор; ψ — дираковский спинор; a , b , λ — произвольные вещественные постоянные.

Из (1.73) получаем следующие уравнения связи:

$$\left. \begin{aligned} \gamma^n \psi_n(x) &= [2 - 3b^2/a] \alpha - 3b\lambda \psi(x), \\ D_n \psi^n(x) &= im\alpha, \end{aligned} \right\} \quad (1.74)$$

в которых обозначено

$$\alpha = (e/m^2) [(1/2) \sigma_{kl} F^{kl} (b\psi - (i/3) \gamma_n \psi^n) + i\gamma_k F^{kl} \psi_l]. \quad (1.75)$$

Как показано в работе [22], при соблюдении условия $b^2 = 2a/3$ в уравнениях (1.73) не возникает каузальных аномалий. Это условие, однако, влечет за собой неопределенность знака полного заряда так же, как и в скалярном случае. Каузальные аномалии отсутствуют и для поля Баба—Гупты, взаимодействующего одновременно с электромагнитным и гравитационным полями [23].

Подобная ситуация имеет место для уравнений Фиска—Тейта, которые обладают двумя различными решениями со спином $3/2$. И в этом случае каузальных аномалий при взаимодействии с электромагнитным полем не возникает, однако полный заряд не имеет определенного знака [22]. Кроме этого, использование при описании поля с одним значением спина добавочного поля с другим значением спина представляется искусственным (некоторые достаточные условия, при выполнении которых волновые уравнения с высшими спинами не приводят к каузальным аномалиям, получены в работах [24, 25]).

Не исключено, что решение вопроса о поведении частиц с высшими спинами во внешнем поле потребует получения новых экспериментальных данных. В этой связи наиболее интересным объектом изучения является Ω -гиперон, который представляет собой единственную стабильную относительно сильных взаимодействий частицу со спином $3/2$ (заметим однако, что, как утверждается в работе [57], степень нарушения причинности определяется параметром eH/m^2 , где m — масса рассматриваемой частицы, поэтому эффект становится существенным лишь в полях, близких к критическому).

Поскольку в настоящее время нет полного решения упомянутых в данном параграфе проблем, то ниже в основном будут рассмотрены скалярные и дираковские поля, для которых никаких акаузальных эффектов не возникает.

Глава 2. ВТОРИЧНОЕ КВАНТОВАНИЕ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КАНОНИЧЕСКИХ КОММУТАЦИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ

§ 2.1. Соотношение между понятиями классического и квантованного полей

Рассмотрим вопрос о том, что понимается под квантованными полями, а что под классическими. Говоря о полях и частицах, будем использовать как квантовые понятия (такие, как амплитуды вероятностей), так и классические (плотность числа рождающихся частиц, плотность энергии, давление и т. п.).

Вопрос о связи между классической и квантовой теорией поля относится к числу фундаментальных проблем современной теоретической физики и имеет множество различных аспектов.

В гл. 1 изложена классическая теория полей, взаимодействующих с внешним полем. Эта теория, однако, имеет вспомогательное значение ввиду того, что классические фермионные и мезонные поля в природе не наблюдаются (за исключением некоторых специальных случаев, когда имеется так называемый конденсат). Наблюдаются же элементарные частицы, что с точки зрения квантовой теории означает необходимость рассмотрения состояний, собственных для оператора числа частиц. Эти состояния связаны с конструкцией пространства Фока. Классическая теория полей с точки зрения квантовой теории соответствует ситуации, когда относительно некоторого наблюдателя (средств наблюдения) определено такое состояние квантовой системы, в котором средние значения операторов совпадают с величинами, определяемыми в классической теории. Если бы такое состояние можно было физически реализовать для любого поля, то для соответствующего наблюдателя не было бы ни рождения частиц, ни эффектов, обусловленных нелинейными добавками из-за поляризации вакуума. Однако подобное состояние, требующее рассмотрения нефоковской конструкции пространства состояний, возможно, по-видимому, лишь для электромагнитного поля.

Как известно, переход от классической теории поля к квантовой состоит в замене классических скобок Пуассона для канонических переменных на коммутаторы. При этом квантованные поля описываются операторнозначными обобщенными функциями. Единственным полем, которое проявляет себя и как квантовое, и как классическое, является электромагнитное поле. Проведенный Бором и Розенфельдом [26] анализ измеримости квантованного электромагнитного поля (см. также более современное рассмотрение вопроса в работе [27]) показывает, что перестановочные соотношения для этого поля и вытекающие из них соотношения неопределенностей Гейзенберга допускают непосредственную экспериментальную проверку. Для наблюдения квантованного поля необходим прибор, представляющий собой пробный заряд, соединенный с некоторым

устройством типа пружины, способным скомпенсировать обратное влияние пробного заряда на себя, связанное с излучением при его ускоренном движении (при этом существенно используется малость константы электромагнитного взаимодействия $e^2 = 1/137$). Тем самым снимается известное возражение Ландау и Пайерлса [28] против квантования электромагнитного поля.

Квантование свободного поля является независимым постулатом по отношению к квантованию движения частиц (квантовой механике). Однако при рассмотрении взаимодействия поля и квантовых частиц создаваемое этими частицами поле (поле излучения) с необходимостью должно квантоваться. Подобная ситуация имеет место, например, для электромагнитного поля, описываемого векторным потенциалом A_n , источником которого является ток квантовых частиц J_n , так что справедливо волновое уравнение

$$\partial_k \partial^k A_n = 4\pi J_n. \quad (2.1)$$

Очевидно, что A_n должно быть оператором, поскольку оператором является J_n .

Что касается других полей, рассматриваемых в квантовой теории поля (например, мезонного, спинорного и др.), то необходимость их квантования не следует из общих соображений. Экспериментально можно проверить лишь правильность квантования билинейных комбинаций этих полей (токов и зарядов), например, посредством измерения создаваемых ими электромагнитных полей [29]. Тем не менее поскольку каноническое квантование полей автоматически ведет к квантованию билинейных комбинаций, то постулат канонического квантования можно считать обоснованным (за исключением гравитационного поля, ситуация с которым не вполне ясна [30]).

Из сказанного выше, однако, не следует, что необходимо квантовать любое поле. В частности, если квантовая частица находится в поле, создаваемом внешними классическими источниками, то поле можно не квантовать. В этом случае применима теория квантовых частиц во внешнем классическом поле, которой посвящена настоящая монография.

Как известно, в квантовой теории атомов, взаимодействующих с излучением, многие результаты получены в такой полуклассической постановке задачи [31]. Полуклассическую теорию можно рассматривать как приближение к более точной квантовой теории в том смысле, что оператор электромагнитного поля заменен на c -число, являющееся средним значением этого оператора по некоторому состоянию. Кроме того, так как имеются примеры получения классического электромагнитного поля из квантованного при рассмотрении нефоковского представления коммутационных соотношений (см. § 2.4), то аналогия с теорией фазовых переходов в статистической физике позволяет утверждать, что полуклассическая теория для некоторых физических ситуаций является точной. Классичность поля в этом случае не отличается от классичности таких величин, как масса или константа связи. Наконец, классическое поле мо-

жет получаться из квантовой теории как некоторая функция Грина аналогично классической волновой функции (или функции щели) в теории сверхпроводимости. При этом ситуаций, когда такое поле нужно квантовать, может и не оказаться совсем (см. в этой связи интересную попытку построить таким образом теорию гравитационного поля [30], которое, согласно этой работе, квантовать не нужно).

В настоящее время известны лишь два классических поля: электромагнитное и гравитационное. Поэтому, рассматривая квантовую теорию во внешнем поле, будем говорить о квантовании полей, описывающих те или иные элементарные частицы во внешних электромагнитных и гравитационных полях.

В последнее время в рамках аксиоматической квантовой теории поля возник новый подход к проблеме взаимосвязи классической и квантовой теории (см., например, [32]). Согласно этому подходу, классические величины (будь то классическое поле или классические характеристики системы частиц) требуют для своего описания на основе более глубокой квантовой теории введения математического аппарата, использующего унитарно неэквивалентные представления канонических коммутационных (антикоммутационных) соотношений (см. § 2.3).

Важными эффектами, возникающими в квантовой теории во внешнем поле, являются поляризация вакуума и рождение частиц.

Существует распространенная точка зрения, согласно которой нет необходимости использовать неэквивалентные представления коммутационных соотношений при рассмотрении квантовых эффектов во внешних полях с конечной энергией. Однако известно, что при описании некоторых явлений статистической физики, например фазовых переходов, для получения классических характеристик из микроскопической теории необходимо предполагать, что объем системы бесконечен (термодинамический предел), и использовать неэквивалентные представления. Поскольку квантовые процессы во внешних полях также приводят к появлению новых классических характеристик (например, плотность числа рождающихся пар), то для их описания естественно использовать тот же математический аппарат.

Особую роль в квантовой теории поля играет понятие вакуума. Вакуум определяет глобальные свойства квантовой системы. Глобальность эта, однако, не должна пониматься чересчур буквально. Так, в теории рождения электрон-позитронных пар, где характерным размером квантового процесса является комптоновская длина волны частицы, свойства вакуума определяются расстояниями, много большими этой длины, но меньше характерного размера внешнего поля. Поэтому при получении классических характеристик вещества, рожденного полем, можно приближенно считать поле однородным. В этом случае автоматически возникает необходимость использования неэквивалентных представлений коммутационных соотношений и нефоковской конструкции пространства состояний.

Обсудим теперь вопрос об области применимости квантовой теории частиц в классическом внешнем поле. При рассмотрении клас-

сической теории поля (электродинамики или общей теории относительности) может создаться впечатление, что до достижения области, где она становится противоречивой, никакого выхода за рамки этой теории не требуется. Так, классическая электродинамика непротиворечива, если длина волны значительно превосходит классический радиус электрона e^2/m , а напряженность поля много меньше отношения $m^2/|e|^3$. Хотя сама по себе классическая общая теория относительности непротиворечива при любой кривизне пространства-времени, при значениях кривизмы, при которых инвариант $R_{iklm}R^{iklm} \gtrsim l_{pl}^{-4}$ ($l_{pl} = \sqrt{G}$, где G — гравитационная постоянная), необходимо, по-видимому, учитывать эффекты квантования гравитационного поля. Однако и в классической электродинамике, и в общей теории относительности еще до достижения указанных предельных значений возникнут новые физические явления, предсказываемые квантовой теорией, — рождение частиц и поляризация вакуума. Таким образом, классическая теория не замкнута даже в области своей применимости. Эффекты, о которых пойдет речь в настоящей книге, как раз лежат в области применимости классической теории внешнего поля, но уже требуют для своего описания квантования поля частиц.

§ 2.2. Каноническое квантование в классическом внешнем поле

Рассмотрим общую схему квантования полей в классическом внешнем поле. При этом мы не будем конкретизировать ни характер внешнего поля, ни значение спина квантованного поля. Квантование поля $\psi(x)$ осуществляется наложением канонических коммутационных (антикоммутационных) соотношений:

$$[\psi(x, t), \psi(x', t)]_{\pm} = [\pi(x, t), \pi(x', t)]_{\pm} = 0, \quad (2.2)$$

$$[\psi(x, t), \pi(x', t)]_{\pm} = i\delta(x-x'),$$

где π — канонически сопряженный к ψ импульс [в (2.2) опущены индексы компонент поля].

Как известно [33], поле ψ и обобщенный импульс π являются операторнозначными обобщенными функциями. Поэтому их обычно сглаживают с некоторыми пробными функциями. Физическое значение этого математического факта связано с невозможностью измерения локального квантованного поля в точке, что было отмечено еще Бором и Розенфельдом [26].

Каноническое квантование (2.2) предполагает явное выделение времени, т. е. нарушение релятивистской инвариантности (само определение канонически-сопряженного импульса лоренц-неинвариантно). Однако соотношениям (2.2) можно придать и релятивистски-ин-

вариантную форму. Например, для заряженного скалярного поля имеем

$$\int_{\Sigma} f(x') [\psi(x), \partial_i \psi^*(x')]_- d\sigma^i(x') = if(x), \quad (2.3)$$

где $d\sigma^i$ — элемент площади пространственноподобной гиперповерхности Σ (остальные коммутаторы равны нулю).

Отложив более строгое обсуждение коммутационных соотношений до следующего параграфа, рассмотрим сначала стандартную процедуру вторичного квантования и интерпретацию квантованного поля ψ в терминах частиц.

Пусть $\{\psi_{\alpha}(x); \psi_{\alpha}^*(x)\}$ — набор классических решений волнового уравнения для рассматриваемого поля, полный и ортонормированный в смысле соответствующего скалярного произведения:

$$(\psi_{\alpha}, \psi_{\beta}) = -\delta_{\alpha\beta}, \quad (\psi_{\alpha}^*, \psi_{\beta}^*) = +\delta_{\alpha\beta}, \quad (\psi_{\alpha}, \psi_{\beta}^*) = 0, \quad (2.4)$$

где индекс α нумерует решения (он может быть как дискретным, так и непрерывным).

В этом случае поле $\psi(x)$ можно представить в виде разложения

$$\psi(x) = \sum_{\alpha} (a_{\alpha}^{(-)} \psi_{\alpha}^* + a_{\alpha}^{(+)} \psi_{\alpha}), \quad (2.5)$$

где знак суммы подразумевает суммирование по дискретным и интегрирование по непрерывным индексам.

Из полноты и ортонормированности рассматриваемой системы функций вытекают выражения для коэффициентов разложения (2.5).

$$a_{\alpha}^{(+)} = -(\psi_{\alpha}, \psi), \quad a_{\alpha}^{(-)} = (\psi_{\alpha}^*, \psi). \quad (2.6)$$

Эти коэффициенты называются операторами рождения и уничтожения частиц (в случае заряженного поля $a^{(+)}$ — оператор рождения античастицы, $a^{(-)}$ — оператор уничтожения частицы).

Из канонических коммутационных соотношений (2.2) и (2.3) для поля ψ вытекают коммутационные соотношения для операторов рождения — уничтожения (для простоты предполагаем поле незаряженным):

$$[a_{\alpha}^{(\pm)}, a_{\beta}^{(\pm)}]_{\pm} = 0, \quad [a_{\alpha}^{(-)}, a_{\beta}^{(+)}]_{\pm} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.7)$$

Введенные выше формально операторы $a_{\alpha}^{(\pm)}$ должны быть определены как операторы в некотором гильбертовом пространстве состояний квантованного поля. Такая конструкция называется представлением канонических (анти)коммутационных соотношений. Рассмотрим в общих чертах наиболее часто употребляемое фоковское представление (подробное и строгое изложение см., например, в работах [34, 35]).

Пусть \mathcal{H}_1 — гильбертово пространство (пространство одночастичных состояний), \mathcal{H}_n^s — n -кратное симметризованное тензорное

произведение $\mathcal{H}_n^s = (\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_1)_s$, $\mathcal{H}_0 = C$ — множество комплексных чисел. Прямая сумма

$$F_s(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n^s \quad (2.8)$$

называется *симметричным (или бозонным) пространством Фока*. Аналогично если \mathcal{H}_n^a — n -кратное антисимметризованное тензорное произведение пространств \mathcal{H}_1 , то

$$F_a(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n^a \quad (2.9)$$

называется *антисимметричным (или фермионным) пространством Фока*.

Например, пусть $\mathcal{H} = L^2(X, d\mu)$ — пространство комплекснозначных функций на множестве X с мерой $d\mu(\xi)$, имеющих интегрируемый квадрат модуля. Тогда \mathcal{H}_n^s (\mathcal{H}_n^a) — пространство квадратично-интегрируемых функций n переменных $\Psi^{(n)}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ ($\xi_i \in X$ для $i = 1, \dots, n$), симметричных (антисимметричных) по всем аргументам. Элементами $F_s(\mathcal{H})$ и $(F_a(\mathcal{H}))$ являются последовательности вида

$$|\Psi\rangle = (\Psi^{(0)}, \Psi^{(1)}, \dots, \Psi^{(n)}, \dots) \quad (2.10)$$

($\Psi^{(0)}$ — комплексное число), такие, что

$$|\Psi^{(0)}|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \int d\mu_1 \dots d\mu_n |\Psi^{(n)}(\xi_1, \dots, \xi_n)|^2 < \infty. \quad (2.11)$$

Эти последовательности иногда записывают в виде столбцов, называемых *фоковскими столбцами*.

Рассмотрим множество всех последовательностей вида (2.10) с конечным числом отличных от нуля членов. На этом множестве определим операторы рождения и уничтожения $a^{(\pm)}(f)$ частицы с волновой функцией $f(\xi) \in \mathcal{H}_1$ равенствами

$$(a^{(-)}(f) |\Psi\rangle)^{(n)}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sqrt{n+1} \int d\mu(\xi) f^*(\xi) \Psi^{(n+1)}(\xi, \xi_1, \dots, \xi_n), \quad (2.12)$$

$$(a^{(+)}(f) |\Psi\rangle)^{(n)}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f(\xi_i) \Psi^{(n-1)}(\xi_1, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_n).$$

Здесь $\varepsilon_i = 1$ для бозонов и $(-1)^{i-1}$ для фермионов, а символ $\hat{\xi}_i$ означает пропуск аргумента ξ_i . Нетрудно проверить, что для операторов $a^{(\pm)}(f)$ выполняются перестановочные соотношения:

$$[a^{(\pm)}(f), a^{(\pm)}(g)]_{\pm} = 0; \quad [a^{(-)}(f), a^{(+)}(g)]_{\pm} = (f, g), \quad (2.13)$$

где (f, g) — скалярное произведение в \mathcal{H}_1 .

Оператор

$$n_f = a^{(+)}(f) a^{(-)}(f) \quad (2.14)$$

есть оператор числа частиц в состоянии с волновой функцией f . Если $\{f_\alpha\}$ — ортонормированный базис в \mathcal{H}_1 , то

$$N = \sum_{\alpha=1}^{\infty} a^{(+)}(f_\alpha) a^{(-)}(f_\alpha) \quad (2.15)$$

есть оператор полного числа частиц.

Операторнозначные обобщенные функции $a^{(\pm)}(\xi)$ можно определить равенствами

$$a^{(\pm)}(f) = \int d\mu(\xi) f(\xi) a^{(\pm)}(\xi). \quad (2.16)$$

Коммутационные соотношения для $a^{(\pm)}(\xi)$ имеют вид

$$[a^{(\pm)}(\xi), a^{(\pm)}(\eta)]_{\pm} = 0, \quad [a^{(-)}(\xi), a^{(+)}(\eta)]_{\pm} = \delta(\xi, \eta). \quad (2.17)$$

В пространстве Фока центральную роль играет элемент

$$|\Psi_0\rangle = (1, 0, 0, \dots), \quad (2.18)$$

называемый *вакуумным вектором*. Среднее значение оператора N в состоянии $|\Psi_0\rangle$ равно нулю. Это состояние удовлетворяет условию

$$a^{(-)}(f) |\Psi_0\rangle = 0 \quad (2.19)$$

для всех $f \in \mathcal{H}_1$. Любой вектор пространства Фока можно получить из $|\Psi_0\rangle$ действием операторов рождения

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{V^n n!} \int d\mu_1 \dots d\mu_n \Psi^{(n)}(\xi_1, \dots, \xi_n) a^{(+)}(\xi_1) \dots a^{(+)}(\xi_n) |\Psi_0\rangle \quad (2.20)$$

(цикличность вакуума).

В фокковском представлении действует правило суперотбора по числу частиц: операторы, не коммутирующие с оператором числа частиц N из (2.15), например оператор поля ψ , не являются наблюдаемыми.

Число частиц в фокковском представлении может быть величиной сколь угодно большой, но обязательно конечной. Это означает, что в термодинамическом пределе (когда объем $V \rightarrow \infty$ и $N \rightarrow \infty$) описание отличных от нуля величин типа плотности числа частиц $n = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ V \rightarrow \infty}} N/V$ требует использования нефокковских представлений,

которые рассмотрены подробно в следующем параграфе.

Возникает вопрос о том, насколько однозначно построение пространства Фока для квантованного поля. Если вместо базиса ψ_α

выбрать какой-то другой базис φ_α , связанный с первым линейным преобразованием

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha &= \sum_\beta (\Phi_{\alpha\beta}^+ \psi_\beta + \Psi_{\alpha\beta}^T \psi_\beta^*), \\ \varphi_\alpha^* &= \sum_\beta (\Phi_{\alpha\beta}^T \psi_\beta^* + \Psi_{\alpha\beta}^+ \psi_\beta),\end{aligned}\tag{2.21}$$

то соответствующие операторы рождения — уничтожения $b^{(\pm)}$ будут связаны с операторами $a^{(\pm)}$ равенствами

$$\begin{aligned}b_\alpha^{(-)} &= \sum_\beta (\Phi_{\alpha\beta}^+ a_\beta^{(-)} - \Psi_{\alpha\beta}^T a_\beta^{(+)}), \\ b_\alpha^{(+)} &= \sum_\beta (\Phi_{\alpha\beta}^T a_\beta^{(+)} - \Psi_{\alpha\beta}^+ a_\beta^{(-)}),\end{aligned}\tag{2.22}$$

которые носят название *преобразований Боголюбова* и находят широкое применение в теории сверхтекучести и сверхпроводимости [36].

Из ортонормированности базисов φ_α и ψ_α следует, что операторы $b^{(\pm)}$ удовлетворяют соотношениям (2.7), т. е. также дают представление канонических коммутационных соотношений.

В пространстве Минковского при отсутствии внешнего поля базисные функции выбираются таким образом, чтобы они были положительно- (отрицательно-) частотными решениями уравнений поля. Различные полные системы функций, удовлетворяющие этому условию, приводят к эквивалентным, т. е. связанным между собой унитарным оператором, фоковским представлениям, причем в (2.21) и (2.22) $\Psi_{\alpha\beta} = 0$. Для примера можно привести операторы рождения и уничтожения частиц с определенным импульсом или с определенным моментом и его проекцией.

Возможность инвариантного разделения решений волнового уравнения на положительно- и отрицательно-частотные связана с наличием инвариантности относительно трансляций во времени. Нестационарное внешнее поле эту инвариантность нарушает, в результате чего общий принцип выбора полной ортонормированной системы функций отсутствует. При этом матрица $\Psi_{\alpha\beta}$ в (2.21), (2.22) отлична от нуля. Если выполнено условие

$$\sum_{\alpha, \beta} |\Psi_{\alpha\beta}|^2 < \infty\tag{2.23}$$

(т. е. Ψ является оператором Гильберта — Шмидта), то представления коммутационных соотношений, даваемые операторами $b^{(\pm)}$ и $a^{(\pm)}$, *унитарно эквивалентны* между собой [34]. В противном случае представление операторами $b^{(\pm)}$ унитарно неэквивалентно представлению операторами $a^{(\pm)}$. Появление унитарно неэквивалентных представлений является характерной особенностью систем с бесконечным числом степеней свободы [37, 38].

Подробнее эти вопросы для внешнего электромагнитного поля рассмотрены в гл. 5 и для внешнего гравитационного поля в гл. 11. В следующем же параграфе остановимся на вопросе о классификации неэквивалентных представлений и их физическом смысле.

§ 2.3. Классификация неэквивалентных представлений коммутационных соотношений

Как было сказано в предыдущем параграфе, для систем с бесконечным числом степеней свободы кроме фоковского представления канонических коммутационных соотношений имеется множество унитарно неэквивалентных ему представлений. Переход от одного из унитарно неэквивалентных представлений к другому можно интерпретировать как изменение значения некоторой классической величины. Этот переход обычно описывается как переход от одного гильбертова пространства к другому.

Здесь будет дана схема классификации представлений коммутационных соотношений, позволяющая придать понятию разных гильбертовых пространств точный смысл. Эта классификация позволяет также построить примеры описания классического электромагнитного поля в терминах представлений коммутационных соотношений, унитарно неэквивалентных фоковскому. Наконец, формализм, излагаемый в данном параграфе, позволяет дать более адекватные, нежели при других описаниях, определения таких часто используемых в квантовой теории во внешнем поле понятий, как разные вакуумы, спонтанное нарушение симметрии и т. п. Ради простоты изложения ниже рассматривается в основном случай вещественного бозе-поля (комплексное поле сводится к двум вещественным полям). Что касается классификации антикоммутационных соотношений для ферми-полей, то укажем на работу [39], где показано, что при сохранении заряда она сводится к классификации характеристических функционалов, рассмотренных ниже для бозе-случая. При этом роль бозе-поля играет билинейная форма ферми-операторов, являющаяся эрмитовым и ограниченным (в отличие от бозе-случая) оператором.

Канонические перестановочные соотношения (2.2) в общем случае непрерывного спектра должны налагаться на операторы, сглаженные с помощью некоторых пробных функций

$$[\psi(f), \psi(g)] = [\pi(f), \pi(g)] = 0, \quad [\psi(f), \pi(g)] = i(f, g), \quad (2.24)$$

где

$$\psi(f) = \int d^3x \psi(\mathbf{x}, t) f(\mathbf{x}), \quad \pi(g) = \int d^3x \pi(\mathbf{x}, t) g(\mathbf{x}). \quad (2.25)$$

Функции f, g принадлежат некоторому вещественному пространству функций Ω со скалярным произведением (f, g) . Вещественность пространства Ω нужна для обеспечения самосопряженности операторов $\psi(f), \pi(g)$. С физической точки зрения выбор тех или иных пробных функций связан с выбором измерительного прибора. По-

этому симметрия теории относительно тех или иных операций над прибором выражается преобразованиями над пробными функциями.

Предположим, что пространство пробных функций Ω является ядерным пространством [33] (например, пространством \mathcal{D} бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем). Тот факт, что коммутационные соотношения (2.24) имеют неэквивалентные представления, связан с существованием неэквивалентных квазиинвариантных мер в оснащем гильбертовом пространстве $\Omega \subset \mathcal{H} \subset \Omega^*$, где \mathcal{H} — пополнение Ω по скалярному произведению, Ω^* — дуальное к Ω (более подробно см. работу [40]). Рассмотрим теперь классификацию этих представлений.

Так как операторы $\psi(f)$ и $\pi(g)$ неограничены, то вместо соотношений (2.24) обычно рассматриваются коммутационные соотношения в вейлевской форме. Для этого вводятся операторы

$$S(f) = \exp[i\psi(f)], \quad T(g) = \exp[i\pi(g)], \quad (2.26)$$

в терминах которых (2.24) принимают вид

$$\begin{aligned} T(g) S(f) &= \exp[i(f, g)] S(f) T(g), \\ S(f) S(g) &= S(f+g), \quad T(f) T(g) = T(f+g). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Операторы

$$\omega(\omega) = \alpha S(f) T(g), \quad (2.28)$$

где α — некоторое комплексное число; $|\alpha| = 1$; ω — тройка $(f, g; \alpha)$; $f, g \in \Omega$ реализуют унитарное представление некоторой группы Ли G_0 с элементами ω [40]. Умножение в G_0 задается формулой $(f_1, g_1; \alpha_1)(f_2, g_2; \alpha_2) = (f_1 + f_2, g_1 + g_2; \exp[i(f_2, g_1)] \alpha_1 \alpha_2)$. (2.29)

Элементы вида $(f, 0; 1)$ с законом умножения

$$(f_1, 0; 1)(f_2, 0; 1) = (f_1 + f_2, 0; 1) \quad (2.30)$$

образуют абелеву подгруппу C группы G_0 . Описание представлений группы G_0 сводится к описанию всех представлений $S(f)$ группы C и индуцированных представлений $T(g)$, удовлетворяющих (2.27).

Таким образом, любая квантовая теория бозе-поля как свободного, так и взаимодействующего с внешним полем есть реализация некоторого представления группы G_0 . Операторы поля и канонически-сопряженного импульса являются инфинитезимальными операторами этой группы.

Определим функционал

$$E(f) = \langle \Psi_0 | S(f) | \Psi_0 \rangle \quad (2.31)$$

со свойствами

$$E(0) = 1, \quad E^*(f) = E(-f), \quad \sum_{i,j=1}^n c_i c_j^* E(f_i - f_j) \geq 0 \quad (2.32)$$

для любых целых n , любого множества комплексных чисел c_i и любых $f_i \in \Omega$.

Функционал $E(f)$ называется *вакуумным*. Кроме того, это есть характеристический функционал некоторого случайного процесса. Функционал $E(f)$ с точностью до унитарной эквивалентности определяет представление группы C [операторов $S(f)$] в гильбертовом пространстве с циклическим вектором $|\Psi_0\rangle$ [41]. По теореме Бохнера для функциональных пространств [40] этот функционал является фурье-преобразованием некоторой положительной меры $\mu(\chi)$ в Ω^* , т. е.

$$E(f) = \int \exp [i(\chi, f)] d\mu(\chi), \quad \chi \in \Omega^*. \quad (2.33)$$

Пространство представления группы C можно реализовать как пространство \mathcal{H}_X функций $\Psi(\chi)$, интегрируемых с квадратом по мере $\mu(\chi)$, причем

$$S(f)\Psi(\chi) = \exp [i(\chi, f)] \Psi(\chi), \quad (2.34)$$

а скалярное произведение в гильбертовом пространстве представления \mathcal{H}_X определяется с помощью интеграла

$$X(\Psi, \Phi) = \int \Psi^*(\chi) \Phi(\chi) d\mu_X(\chi). \quad (2.35)$$

Интеграл $X(\Psi, \Phi)$ есть интеграл Даниэля [42].

Пусть X и Y — два ограниченных интеграла Даниэля. Интеграл X называют абсолютно непрерывным относительно Y , что обозначается $X \ll Y$, если каждое X -нулевое множество является и Y -нулевым. Если $X \ll Y$ и $Y \ll X$, то интегралы называются *эквивалентными*, $X \sim Y$. Если $X \ll Y$, то, по теореме Радона—Никодима [42], существует вещественная неотрицательная Y -суммируемая функция $D(f)$, такая, что для любой Y -суммируемой функции $\Psi(f)$ интеграл $X(\Psi) = Y(D\Psi)$. Эта функция $D(f)$ обозначается как $(dX/dY)(f)$ [или $d\mu_X/d\mu_Y(f)$] и называется производной Радона—Никодима.

Пусть G — некоторая группа взаимнооднозначных преобразований α в Ω^* . Тогда для любого $\alpha \in G$ равенства

$$X_\alpha(\Psi) = X(\Psi_{\alpha^{-1}}), \quad \Psi_\alpha(\chi) = \Psi(\chi_\alpha) \quad (2.36)$$

определяют интеграл X_α . Интеграл X называется G -квазиинвариантным, если $X_\alpha \ll X$ для каждого $\alpha \in G$.

Имеет место следующая теорема [43].

Пусть X — ограниченный интеграл, и представление $S(f)$ в гильбертовом пространстве \mathcal{H}_X дается (2.34). Тогда для существования в \mathcal{H}_X унитарных операторов $T(f)$, удовлетворяющих соотношениям (2.27), необходимо и достаточно, чтобы интеграл X был квазиинвариантен относительно группы сдвигов в Ω .

Операторы $T(f)$ действуют в пространстве представления \mathcal{H}_X по формуле

$$T(f)\Psi(\chi) = \left[\frac{dX_f}{dX}(\chi) \right]^{1/2} \exp [iI(f, \chi)] \Psi(\chi + f), \quad (2.37)$$

где $(dX_f/dX)(\chi)$ — производная Радона—Никодима; $I(f, \chi)$ — произвольная функция, удовлетворяющая равенству

$$I(f, \chi) + I(\psi, \chi + f) = I(f + \psi, \chi). \quad (2.38)$$

Для определения операторов поля и канонически-сопряженных импульсов тогда получаем

$$\begin{aligned} \psi(f) \Psi(\chi) &= (\chi, f) \Psi(\chi), \\ \pi(f) \Psi(\chi) &= -i\delta_f \Psi(\chi) - [\xi(f, \chi) + (i/2)\eta(f, \chi)] \Psi(\chi), \end{aligned} \quad (2.39)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_f \Psi(\chi) &= \lim_{l \rightarrow 0} (1/l) [\Psi(\chi + lf) - \Psi(\chi)]; \\ \xi(f, \chi) &= \lim_{l \rightarrow 0} (i/l) [\exp[iI(lf, \chi)] - 1]; \\ \eta(f, \chi) &= \lim_{l \rightarrow 0} (1/l) [(dX_{lf}/dX)(\chi) - 1]. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Представления перестановочных соотношений в вейлевской форме (2.27) унитарно неэквивалентны, когда [43] меры $\mu(\chi)$, определяемые из (2.33), и соответствующие интегралы (2.35) неэквивалентны или в Ω^* нельзя определить измеримую функцию $C(\chi)$, такую, что

$$C(\chi) = I(f, \chi) - I'(f, \chi),$$

где $I(f, \chi)$ и $I'(f, \chi)$ определяют преобразования (2.37) в разных представлениях.

Для различных представлений в первом случае происходит изменение вида функции $\eta(f, \chi)$, а во втором — $\xi(f, \chi)$. Последний случай не имеет места в теории, инвариантной относительно инверсии времени [43].

Рассмотрим представления первого типа. Интересно отметить, что причиной появления неэквивалентных представлений при этом является не некоммутативность операторов $\psi(f)$, $\pi(g)$, а существование в оснащенном гильбертовом пространстве неэквивалентных квазиинвариантных мер. В случае пространства конечного числа измерений все квазиинвариантные меры эквивалентны друг другу [40]. Этот факт и является причиной того, что для систем с конечным числом степеней свободы неэквивалентных представлений не возникает (это утверждение известно как теорема фон Неймана [44] в теории представлений канонических перестановочных соотношений).

Для представлений первого типа имеется возможность свести классификацию неэквивалентных представлений коммутационных соотношений к классификации обобщенных случайных процессов (полей), описываемых неэквивалентными функциями распределения. Проиллюстрируем изложенный выше формализм.

Для фоковского представления скалярного поля вакуумный функционал есть

$$E_F(f) = \exp\{(-1/4)(f, f)\}, \quad (2.41)$$

а в формуле (2.39) $\xi(f, \chi) = 0$, $\eta(f, \chi) = -2(\chi, f)$. При этом существует вектор $|\Psi_0\rangle$ гильбертова пространства, являющийся классом эквивалентности единицы по мере $\mu(\chi)$, такой, что

$$a^{(-)}(f)|\Psi_0\rangle = [(\psi(f) + i\pi(f))/\sqrt{2}]|\Psi_0\rangle = 0. \quad (2.42)$$

Обобщенный случайный процесс, характеризующий это представление, задается таким образом, что вероятность неравенства $\theta(f) \leq x$, где x — конечное число, $\theta(f)$ — некоторый функционал, есть

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{(f, f)}} \int_{-\infty}^x \exp[-x^2/(f, f)] dx. \quad (2.43)$$

Другой пример дает вакуумный функционал

$$E_c(f) = \exp\left\{-\frac{1}{4c^2}(f, f)\right\}, \quad c \neq 1. \quad (2.44)$$

В этом случае в (2.39) $\xi(f, \chi) = 0$, $\eta(f, \chi) = -2c^2(\chi, f)$. Такое представление неэквивалентно фоковскому: меры, соответствующие $E_c(f)$ и $E_F(f)$, взаимно сингулярны. Если в качестве $\Psi(\chi)$ взять $|\Psi_0\rangle$ и определить $a^{(-)}(f)$, как в (2.42), то $a^{(-)}(f)|\Psi_0\rangle \neq 0$, но можно ввести новый оператор уничтожения по формуле

$$\alpha^{(-)}(f) = [(c^2 + 1)/2c] a^{(-)}(f) + [(c^2 - 1)/2c] a^{(+)}(f), \quad (2.45)$$

так что

$$\alpha^{(-)}(f)|\Psi_0\rangle = 0. \quad (2.46)$$

Преобразование (2.45) есть уже встречавшееся ранее преобразование Боголюбова. Характеристические функционалы (2.41) и (2.44) можно записать как средние по состояниям в соответствующих гильбертовых пространствах \mathcal{H}_{X_1} , \mathcal{H}_{X_2} :

$$E(f) = \langle \Psi_0 | \exp[i\psi(f)] | \Psi_0 \rangle,$$

где $|\Psi_0\rangle$ — классы эквивалентности единицы в пространствах \mathcal{H}_{X_1} и \mathcal{H}_{X_2} .

Третьему важному примеру посвящен следующий параграф.

§ 2.4. Представление классического электромагнитного поля

Рассмотрим представление коммутационных соотношений, соответствующее электромагнитному полю плоской волны [45]. Это соответствие понимается в том смысле, что средние значения наблюдаемых в рассматриваемом представлении совпадают с их классическими аналогами.

Пусть в пространстве Минковского M задано векторное поле $A_i(x)$, удовлетворяющее уравнению

$$\partial_n \partial^k A_i(x) = 0. \quad (2.47)$$

Будем рассматривать векторное поле $A_i(x)$ как отображение из пространства M в его комплексификацию M' (точками M' являются $x = x_1 + ix_2$, где $x_1, x_2 \in M$). Скалярное произведение элементов $x, y \in M'$ определим как

$$x_i y^i = x_{1i} y_1^i + x_{2i} y_2^i + i(x_{1i} y_2^i - x_{2i} y_1^i), \quad (2.48)$$

где $x_A y_B$ — скалярное произведение в M .

Фурье-образ $\tilde{A}_i(\mathbf{k})$ функции $A_i(x)$, принимающий значения в M' , определяется равенством

$$A_i(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \exp[ikx] \tilde{A}_i(\mathbf{k}) d\Omega(k), \quad (2.49)$$

где $d\Omega(k) = d^3k/2k_0$ — инвариантная мера на световом конусе $k_0 = |\mathbf{k}|$.

Рассмотрим теперь линейное пространство L решений (2.47) с положительной энергией, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{i=0}^3 \int |\tilde{A}_i(\mathbf{k})|^2 d\Omega(k) < \infty, \quad \partial^i A_i(x) = 0. \quad (2.50)$$

Скалярное произведение в L определим как

$$(f, g) = i \int f^{i*}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 g_i(x) d^3x = \int \tilde{f}^{i*}(\mathbf{k}) \tilde{g}_i(\mathbf{k}) d\Omega(k). \quad (2.51)$$

Градиентная инвариантность электродинамики позволяет выделить в пространстве L множество L_0 элементов $f_0(x)$, таких, что их фурье-образы имеют вид $\tilde{f}_0^i(\mathbf{k}) = \lambda(k) k^i$, где λ — произвольная функция. Пространство одночастичных состояний есть факторпространство пространства L по L_0 : $\bar{L} = L/L_0$.

Зададим на L антисимметричную вещественную билинейную форму σ :

$$\sigma(f, g) = (2i)^{-1} [(f, g) - (g, f)]. \quad (2.52)$$

Рассмотрим C^* -алгебру, генерируемую унитарными операторами $\omega_f, \tilde{f} \in L$, удовлетворяющими равенству

$$\omega_f \omega_g = \exp[-i\sigma(f, g)] \omega_{f+g}. \quad (2.53)$$

Представление $\pi_\omega(\omega_f)$ этой алгебры определяется, как и в рассмотренном ранее случае представлений канонических коммутационных соотношений, функционалом $E(\omega_f)$, который в силу градиентной инвариантности удовлетворяет соотношениям

$$E(\omega_{f+f_0}) = E(\omega_f), \quad E(\omega_{f_0}) = 1, \quad \forall f_0 \in L_0. \quad (2.54)$$

Свойства (2.54) автоматически обеспечивают соответствующему гильбертову пространству структуру \bar{L} . При этом $\omega_f = \exp(iA_E(f))$ где $A_E(f)$ — оператор векторного поля, сглаженный с функцией $f \in L$.

Можно ввести операторы рождения и уничтожения

$$A_E^{(\pm)}(f) = (1/2) [A_E(f) \mp iA_E(if)], \quad (2.55)$$

так что

$$[A_E^{(-)}(f), A_E^{(+)}(g)] = (f, g). \quad (2.56)$$

Различные функционалы E дают различные представления. Если выбрать функционал E в виде

$$E_F(\omega_f) = \exp\{- (f, f)/2\}, \quad (2.57)$$

то получим фоковское представление. При этом оператор поля есть

$$\begin{aligned} A_{Fi}(x) &= A_{Fi}^{(+)}(x) + A_{Fi}^{(-)}(x) = \\ &= (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2k_0}} [a_i^{(-)}(\mathbf{k}) \exp(-ikx) + a_i^{(+)}(\mathbf{k}) \exp(ikx)] \end{aligned} \quad (2.58)$$

и выполняется

$$A_F(f) = (f, A_F^{(-)}) + (A_F^{(-)}, f), \quad (2.59)$$

$$[a_i^{(-)}(\mathbf{k}), a_j^{(+)}(\mathbf{k}')] = g_{ij} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (2.60)$$

В этом представлении существует вакуум $|\Psi_{0F}\rangle$

$$A_F^{(-)}(f) |\Psi_{0F}\rangle = 0, \quad \forall f \in L,$$

и вакуумный функционал можно записать в виде

$$E_F(\omega_f) = \langle \Psi_{0F} | \exp\{iA_F(f)\} | \Psi_{0F}\rangle.$$

Другое представление, унитарно эквивалентное фоковскому, определяется функционалом

$$E_g(\omega_f) = \exp\{(-1/2)(f, f) + 2i\sigma(g, f)\}, \quad g, f \in L. \quad (2.61)$$

Оно называется представлением когерентных состояний. Циклический вектор в этом представлении получается из $|\Psi_{0F}\rangle$ действием унитарного оператора

$$|\Psi_{0g}\rangle = \exp\{-iA_F(g)\} |\Psi_{0F}\rangle. \quad (2.62)$$

При этом

$$E_g(\omega_f) = \langle \Psi_{0g} | \exp\{iA_g(f)\} | \Psi_{0g}\rangle.$$

Рассмотренные представления характеризуются конечным числом частиц и поэтому в принципе не могут описать поле плоской волны, содержащее бесконечное число фотонов. Представление, позволяющее описать плоскую волну, строится следующим образом.

Рассмотрим N фотонов, локализованных при $t = 0$ в объеме V , каждый из которых находится в одном и том же одночастичном состоянии.

Возьмем пробные функции в виде

$$f_{V, e, \mathbf{k}}^i(\mathbf{x}, t=0) = \frac{\chi(V)}{\sqrt{V}} \frac{\exp(i\mathbf{k}\mathbf{x})}{\sqrt{2k_0}} e^i, \quad (2.63)$$

где $\chi(V)$ — некоторая нормированная характеристическая функция объема $V \in \mathbb{R}^3$, e^i — комплексный вектор поляризации из пространства M' .

Система из N фотонов в фоковском представлении описывается волновой функцией

$$|\Psi_{N, V, e, k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} [A^{(+)}(f_{V, e, k})]^N |\Psi_{0F}\rangle. \quad (2.64)$$

Следуя [45], определим вакуумный функционал

$$\begin{aligned} E_V(\omega_f) &= \langle \Psi_{N, V, e, k} | \exp [iA_F(f)] | \Psi_{N, V, e, k} \rangle = \\ &= \exp \{ - (f, f)/2 \} L_N(|f_{V, E, k}, f|^2), \end{aligned} \quad (2.65)$$

где $L_N(x)$ — N -й полином Лагерра. Перейдем в (2.65) к термодинамическому пределу $N \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$, сохраняя постоянной плотность энергии $\varepsilon = Nk_0/V$, что соответствует ситуации в плоской волне.

В этом пределе скалярное произведение $(f_{V, e, k}, f)$ ведет себя как $(2\pi)^{3/2}(2k_0V)^{-1/2} e_i \tilde{f}^i(\mathbf{k})$ и

$$\begin{aligned} E(\omega_f) &= \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ V \rightarrow \infty}} E_V(\omega_f) = \exp \left\{ -\frac{(f, f)}{2} \right\} \lim_{N \rightarrow \infty} L_N \left((2\pi)^3 \frac{\varepsilon}{2Nk_0^2} |\tilde{f}_e(\mathbf{k})|^2 \right) = \\ &= \exp \left\{ -\frac{(f, f)}{2} \right\} J_0(\lambda |\tilde{f}_e(\mathbf{k})|). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Здесь $J_0(x)$ — функция Бесселя, $\lambda = (2\pi)^{3/2} \sqrt{2\varepsilon}/k_0$, а $\tilde{f}_e(\mathbf{k}) = e_i \tilde{f}^i(\mathbf{k})$.

Формулу (2.66), определяющую представление плоской волны, перепишем в виде

$$\begin{aligned} E(\omega_f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \exp \left\{ -\frac{1}{2} (f, f) + i\lambda [\operatorname{Re} \tilde{f}_e(\mathbf{k}) \cos \theta + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{Im} \tilde{f}_e(\mathbf{k}) \sin \theta] \right\}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Представление (2.67) градиентно-инвариантно и инвариантно относительно калибровочных преобразований первого рода $\alpha_\theta \omega_f = \omega_f \exp(i\theta)$.

В рассматриваемом представлении множество собственных значений оператора числа частиц, в отличие от фоковского представления, состоит из целых положительных и отрицательных чисел. Гильбертово пространство представления есть $\mathcal{H} = \mathcal{H}_F \otimes \mathcal{H}$, где \mathcal{H} — гильбертово пространство функций $\chi(\theta)$, квадратично интегрируемых на единичной окружности по мере $d\theta/2\pi$. В этом представлении

операторы рождения и уничтожения можно выразить через их компоненты в ортонормированном базисе $h_{(a)}^i$ при $a = 0, 1, 2, 3$:

$$A_{(a)}^{(\pm)}(x) = A_{F(a)}^{(\pm)}(x) \otimes 1 + 1 \otimes \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\exp(\pm ikx)}{k_0} (e_k h_{(a)}^k) (C \mp iS), \quad (2.68)$$

где $C\chi(\theta) = \cos\theta \chi(\theta)$; $S\chi(\theta) = \sin\theta \chi(\theta)$; $\chi(\theta) \in \tilde{\mathcal{H}}$.

Оператор числа частиц дается выражением

$$N = N_F \otimes 1 + 1 \otimes id/d\theta. \quad (2.69)$$

Можно определить оператор фазы Φ , такой, что

$$\exp(i\Phi) = 1 \otimes (C + iS), \quad [N, \Phi] = i \quad (2.70)$$

(относительно оператора фазы, см., например, [46]).

Вакуум $|\Psi_0\rangle$ в представлении (2.67) отличается от фоковского вакуума и обладает свойствами

$$\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle = 1,$$

$$\langle \Psi_0 | A_{(a)}^{(+)}(x) | \Psi_0 \rangle = \langle \Psi_0 | A_{(a)}^{(-)}(x) | \Psi_0 \rangle = 0 \quad (2.71)$$

и

$$\begin{aligned} \left\langle \Psi_0 \left| \prod_{i=1}^n A_{(a)}^{(+)}(x_i) \prod_{j=1}^m A_{(a)}^{(-)}(x_j) \right| \Psi_0 \right\rangle = \\ = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \prod_{i=1}^n A_{(a)}^*(x_i) \prod_{j=1}^n A_{(a)}(x_j), & m = n, \end{cases} \quad (2.72) \end{aligned}$$

где $A_{(a)}(x) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\exp(ikx)}{k_0} (e_k h_{(a)}^k)$. При этом можно говорить о наблюдаемости амплитуды и фазы волны.

Итак, наличие классического поля вида плоской волны с определенной плотностью энергии и факторизующимися корреляционными функциями (2.72) означает, что представление коммутационных соотношений (2.53), определяемое функционалом (2.66), является нефоковским.

§ 2.5. Микроскопические и макроскопические наблюдаемые

В связи с обнаружением существования неэквивалентных представлений коммутационных соотношений в квантовой теории поля (теории систем с бесконечным числом степеней свободы) возник вопрос о физическом значении унитарной неэквивалентности.

В работах [32, 47] различные значения макроскопических величин предлагается связать с различными неэквивалентными представлениями. Действительно, изменение макроскопических величин,

являющихся с точки зрения квантовой теории c -числами, не может быть порождено каким-либо унитарным оператором в гильбертовом пространстве. Поэтому естественно считать, что такое изменение связано с изменением всего гильбертова пространства состояний.

Микроскопическим наблюдаемым мы будем сопоставлять операторы, построенные из операторов поля и канонически-сопряженных импульсов в фиксированном представлении. Поэтому их средние значения меняются в зависимости от вектора состояния в гильбертовом пространстве, по которому проводится усреднение, т. е., вообще говоря,

$$\langle \Psi | M_{\text{микро}} | \Psi \rangle \neq \langle \Psi' | A_{\text{микро}} | \Psi' \rangle, \quad (2.73)$$

где $|\Psi'\rangle$ получено действием унитарного оператора на $|\Psi\rangle$.

Представления коммутационных (антикоммутационных) соотношений можно разделить на приводимые и неприводимые. Для неприводимых представлений справедлива лемма Шура, согласно которой величина, коммутирующая со всеми операторами представления, является c -числом. Для унитарно неэквивалентных представлений (разных гильбертовых пространств) эти c -числа принимают различные значения. Неприводимым представлениям соответствуют так называемые эргодические меры [43]. В отличие от микронаблюдаемых, средние значения макронаблюдаемых не зависят от состояния, по которому проводится усреднение.

Приведем некоторые примеры макровеличин, возникающих указанным выше образом. Значение макронаблюдаемой в данном гильбертовом пространстве можно получить как среднее по объему V :

$$b = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V B(x) d^3(x), \quad (2.74)$$

где $B(x)$ — локальная микронаблюдаемая [т. е. коммутатор $B(x)$ с операторами $a^{(\pm)}(y)$ достаточно быстро обращается в нуль при $|x - y| \rightarrow \infty$]. Такими величинами являются плотность числа частиц

$$\rho = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int a^{(+)}(x) a^{(-)}(x) d^3 x, \quad (2.75)$$

плотность кинетической энергии

$$\varepsilon = - \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int a^{(+)}(x) \frac{1}{2m} \Delta a^{(-)}(x) d^3 x \quad (2.76)$$

и др. Величины (2.75) и (2.76) коммутируют со всеми операторами представления коммутационных соотношений.

В фоковском представлении полное число частиц всегда конечно и потому плотность числа частиц $\rho = 0$, так как $\lim_{V \rightarrow \infty} N/V = 0$ в любом состоянии системы. Следовательно, макроскопические величины должны описываться представлениями, унитарно неэкви-

валентными фоковскому. При изменении плотности, являющейся макроскопическим параметром, представление (гильбертово пространство) должно меняться. В теории многих тел появление нефоковских представлений связано с фазовыми переходами, поскольку последние характеризуются изменением (или появлением новых) макроскопических характеристик системы.

Как будет показано ниже, рождение частиц внешними полями может рассматриваться по аналогии с теорией фазовых переходов. При этом возникновение новых макроскопических характеристик приводит к необходимости рассмотрения неэквивалентных представлений коммутационных соотношений.

Глава 3. ВАКУУМНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНЕГО ПОЛЯ

§ 3.1. Вакуум в квантовой теории поля

В стандартных изложениях квантовой теории поля вакуумное состояние определяется как циклический вектор в гильбертовом пространстве, уничтожаемый оператором числа частиц. Последний является глобальным оператором, поскольку он выражается в виде интеграла от плотности числа частиц по 3-пространству. Соответственно и вакуумное состояние характеризует некоторые глобальные свойства системы. При этом в релятивистски-инвариантной теории вакуум должен быть инвариантен относительно группы Пуанкаре.

В аксиоматической квантовой теории поля, формулируемой на языке теории меры в функциональных пространствах, кратко изложенной в предыдущей главе, вакуум определяется как класс эквивалентности единицы по данной мере. Тот факт, что в функциональных пространствах имеются неэквивалентные меры, приводит к возможности существования различных вакуумов, которым сопоставляются различные измеримые функции, являющиеся классами эквивалентности единицы по неэквивалентным мерам. Так как неэквивалентные представления коммутационных соотношений реализуются в различных гильбертовых пространствах, то очевидно наличие связи между существованием неэквивалентных представлений и различных вакуумов.

В предыдущей главе уже отмечалось наличие связи между неэквивалентными представлениями и макроскопическими величинами. При этом различие между вакуумами проявляется как различие между значениями макроскопических величин, причем последние могут быть величинами типа плотности числа частиц или энергии, а также величинами типа классического поля. Таким образом, значения макроскопических характеристик или внешнего поля определяют выбор представления и, следовательно, вакуумного состояния. В некоторых задачах, например при квантовании свободного

поля в области пространства, ограниченной стенками, роль внешнего поля могут играть граничные условия (см. гл. 4).

Взаимодействие между различными полями приводит к тому, что выбор вакуума, а значит, и соответствующего представления коммутационных соотношений для одного поля определяет свойства вакуума для других взаимодействующих с ним полей. Так, если имеется классическое электромагнитное поле, что требует выбора соответствующего нефоковского представления коммутационных соотношений, то вакуум для частиц, взаимодействующих с этим полем, характеризуется некоторыми зависящими от него величинами. Если эти величины обращаются в нуль при выключении поля, то их называют *поляризацией вакуума*. Возможны, однако, эффекты внешнего поля, не исчезающие при его выключении. Сюда, например, относится *рождение частиц из вакуума*. Наконец, внешнее поле может приводить к *спонтанному нарушению или восстановлению* некоторой симметрии квантовой системы.

В следующих параграфах этой главы приводится общее обсуждение различных вакуумных эффектов, связанных с внешним полем.

§ 3.2. Поляризация вакуума

Поляризация вакуума может быть вызвана как внешним электромагнитным или гравитационным полем, так и введением граничных условий. В последнем случае возникает эффект Казимира, выражающийся в появлении ненулевого тензора энергии-импульса поля.

Анализ поправок к лагранжиану свободного квантового поля за счет поляризации вакуума указывает на интересную возможность получить действие для свободного классического поля. При этом свободное классическое поле может пониматься как некоторое свойство вакуума заряженных (или гравитирующих) частиц [48, 49].

Например, в постоянном электромагнитном поле поправка к лагранжиану в результате поляризации вакуума содержит член вида (подробнее см. гл. 9)

$$\mathcal{L}^{(1)} = \left[\frac{e^2}{3\pi} \int_0^\infty ds s^{-1} \exp(-m^2 s) \right] \frac{\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2}{8\pi}, \quad (3.1)$$

где m — масса частицы; \mathbf{E} , \mathbf{H} — напряженность электрического и магнитного полей соответственно; e — заряд электрона.

Расходящийся интеграл в (3.1) связан с постоянной перенормировкой полей \mathbf{E} , \mathbf{H} (или заряда e). Действительно, складывая выражение (3.1) с лагранжианом свободного поля, получаем

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}^{(1)} = \left[1 + \frac{e^2}{3\pi} \int_0^\infty ds s^{-1} \exp(-m^2 s) \right] \frac{\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2}{8\pi}. \quad (3.2)$$

Как видно из (3.2), постоянная перенормировки определяется не самим интегралом в (3.1), а величиной

$$Z^{-1} = 1 + \frac{e^2}{3\pi} \int_0^{\infty} ds s^{-1} \exp(-m^2 s).$$

Указанная выше возможность трактовки поляризационной поправки (3.1) как действия классического поля соответствует отбрасыванию единицы в правой части (3.2). С точки зрения приведенных рассуждений классическое поле всегда связано с зарядами или гравитирующими массами, которые в одних случаях принадлежат реальным, а в других — виртуальным частицам.

В связи с поляризацией вакуума следует остановиться на вопросе о нулевых вакуумных колебаниях. Некоммутативность оператора числа частиц и оператора поля приводит к тому, что в вакуумном состоянии отсутствие частиц еще не означает обращения в нуль всех характеристик квантованного поля. Действительно, в вакуумном состоянии отлична от нуля дисперсия поля

$$\Delta(\psi^2(x)) = \langle 0|\psi^2(x)|0\rangle - \langle 0|\psi(x)|0\rangle^2. \quad (3.3)$$

Если вместо $\psi(x)$ использовать сглаженный оператор $\psi(f)$, то дисперсия конечна.

Нулевые колебания вакуума электромагнитного поля проявляют себя в существовании таких явлений, как спонтанное излучение и лэмбовский сдвиг, а также при измерении электромагнитного поля с помощью так называемых счетчиков Мандела [50]. Последние позволяют измерять средние значения наблюдаемых, приведенных не к нормальной, а к антинормальной форме.

Как полная энергия, так и плотность энергии нулевых колебаний вакуума бесконечны. Поэтому для получения конечных средних значений корпускулярных наблюдаемых необходимо записывать соответствующие операторы в нормальной форме. Это эквивалентно отбрасыванию вклада нулевых колебаний.

В отличие от упоминавшихся ранее классических величин, характеризующих вакуум, величины типа дисперсии (3.3) (по крайней мере для электромагнитного поля), вообще говоря, изменяются при квантовых измерениях. Действительно, как было указано в § 2.1, квантованное электромагнитное поле можно измерить сколь угодно точно. В соответствии с общими принципами квантовой теории при таком измерении получается собственное состояние соответствующим образом сглаженного оператора поля, так что дисперсия поля в этом состоянии равна нулю.

Если же использовать нефоковское представление, описывающее s -числовое классическое электромагнитное поле, то ни при каком квантовом измерении, изменяющем волновую функцию, это поле меняться не будет.

В теории заряженного квантованного поля оператор числа частиц не коммутирует с плотностью заряда и тока этих частиц, что

проявляет себя в наличии флуктуаций плотности заряда и тока в вакууме. Возможен эксперимент [29] с прибором, устроенным так же, как и прибор для измерения квантованного электромагнитного поля, который позволяет измерить плотность электрического заряда и тока. Флуктуации заряда и тока в таком эксперименте равны нулю.

Для описания флуктуаций заряда и тока в вакууме обычно используют понятие виртуальных частиц. В рамках теории возмущений под виртуальными понимаются частицы, соответствующие внутренним линиям фейнмановских диаграмм, для которых не выполняется релятивистское соотношение между энергией и импульсом. В этом случае говорят, что вакуум содержит виртуальные пары частиц и античастиц.

Если в вакуумном состоянии измерить некоторый локальный оператор (например, плотность заряда или тока), сглаженный с пробными функциями, сосредоточенными на расстоянии порядка комптоновской длины частицы, а после этого измерить число частиц, то результат будет отличен от нуля. Можно сказать, что возникшие в результате первого измерения виртуальные частицы при втором измерении превратились в реальные. Необходимость рассмотрения расстояний порядка комптоновской длины связана с соотношениями неопределенностей Гейзенберга, из которых следует, что неопределенность импульса при этих измерениях как раз будет достаточной для рождения пар. При измерениях заряда на большем расстоянии эффекта не будет: математически это выражается в том, что вакуум есть состояние с нулевым полным зарядом, оператор которого определяется как интеграл от плотности заряда по всему пространству (в действительности достаточно интегрировать по области больше комптоновской длины). Иными словами, можно сказать, что в вакууме виртуальные частицы имеются на малых расстояниях, но их нет на больших расстояниях.

То обстоятельство, что при одних измерениях виртуальные частицы есть, а при других их нет, позволяет высказать точку зрения, согласно которой эти частицы порождаются самим прибором, т. е. свойства вакуума, кроме внешнего поля, обусловлены влиянием прибора на самого себя. В пользу этой точки зрения можно привести следующие аргументы. Во-первых, выражение для флуктуаций вакуума совпадает с полученным в работе [27] ограничением на дисперсию при измерении квантованного поля с помощью пробного заряда без компенсирующего устройства. Это ограничение обусловлено действием пробного заряда на себя в результате его излучения при ускорении под воздействием измеряемого поля. Во-вторых, анализ соотношения $\Delta E \Delta t \geq \hbar$, проведенный в работе [51], показывает, что, по крайней мере в мысленном эксперименте, возможно измерение с компенсирующим устройством типа Бора—Розенфельда, когда закон сохранения энергии оказывается верным при любых Δt (относительно такого измерения нет никаких виртуальных частиц). Соотношение неопределенностей для энергии и времени при этом

характеризует неопределенность энергии, имеющуюся в течение времени измерения Δt , которую, однако, можно скомпенсировать некоторым устройством. Однако все эти соображения, несмотря на принципиальную значимость для аксиоматики квантовой теории, являются лишь наводящими соображениями для физики элементарных частиц.

При наличии классического внешнего поля нулевые колебания плотности заряда и тока взаимодействуют с этим полем. В этом случае возможно явление типа параметрического резонанса. Перестройка нулевых колебаний под воздействием внешнего поля приводит к тому, что средние по вакууму от операторов, записанных в нормальной форме при отсутствии внешнего поля, становятся отличными от нуля при его включении. Для того чтобы обратить эти средние значения в нуль, требуется ввести новую нормальную форму, учитывающую изменение вида нулевых колебаний.

Для ответа на вопрос, что будет наблюдаться экспериментально, необходим анализ экспериментальной процедуры. В частности, необходимо знать, какой оператор соответствует измеряемой наблюдаемой. Этот вопрос тесно связан с проблемой корпускулярной интерпретации квантовой теории во внешнем поле; более подробно он рассмотрен в § 3.4. Здесь отметим лишь, что даже в мысленном эксперименте Бора—Розенфельда с компенсирующим устройством, позволяющим исключить влияние прибора на себя, нельзя отбросить ту часть поляризации вакуума, которая обусловлена внешним полем. Поэтому можно говорить о появлении во внешнем поле новых классических характеристик, не обусловленных средствами наблюдения.

§ 3.3. Неинвариантность вакуума и спонтанное нарушение симметрии

Неинвариантность вакуума в квантовой теории поля есть неинвариантность всего гильбертова пространства состояний. На языке теории меры в функциональных пространствах эта неинвариантность может быть выражена как неэквивалентность соответствующих мер. Физически неинвариантность вакуума проявляется в существовании неинвариантных вакуумных средних для некоторых локальных наблюдаемых $A(x)$, (т. е. таких, коммутатор которых с оператором поля обращается в нуль на пространственноподобных интервалах). Это означает, что если Q — генератор преобразования симметрии, $U(\tau) = \exp(iQ\tau)$ — соответствующий оператор в пространстве состояний, то вакуумное среднее

$$\alpha_\tau = \langle 0 | A_\tau(x) | 0 \rangle = \langle 0 | U(\tau) A(x) U^{-1}(\tau) | 0 \rangle$$

удовлетворяет условию

$$(1/i) (d/d\tau) \alpha_\tau |_{\tau=0} = \langle 0 | [Q, A(x)] | 0 \rangle \equiv \beta \neq 0. \quad (3.4)$$

Если вакуум неинвариантен, то генератор Q не существует как эрмитов оператор в гильбертовом пространстве. Действительно,

в силу трансляционной инвариантности вакуума α_τ можно представить как вакуумное среднее от оператора

$$c_\tau = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V d^3x A_\tau(x), \quad (3.5)$$

являющегося соответствующей неинвариантной макронаблюдаемой. Среднее по вакууму $|0\rangle$ от оператора c_τ совпадает со средним по любому нормированному состоянию $|\Psi\rangle$ из гильбертова пространства, содержащего $|0\rangle$:

$$\alpha_\tau = \langle 0 | c_\tau | 0 \rangle = \langle \Psi | c_\tau | \Psi \rangle. \quad (3.6)$$

Генератор Q преобразования

$$A_{\tau_1}(x) \rightarrow A_{\tau_2}(x) = \exp\{iQ(\tau_2 - \tau_1)\} A_{\tau_1}(x) \exp\{-iQ(\tau_2 - \tau_1)\}, \quad (3.7)$$

приводящего к изменению c_τ , не является наблюдаемой величиной. Действительно, предположим противное. Тогда, согласно квантовой механической теории измерений, система при измерении наблюдаемой Q переводится в собственное состояние оператора Q . Поскольку Q и c_τ некоммутативны, то среднее значение c_τ в таком состоянии неопределено. Это явно противоречит тому факту, что указанное среднее имеет одно и то же значение для любого состояния $|\Psi\rangle$ и является классической величиной.

Невозможность представить Q и, следовательно, $U(\tau)$ операторами в гильбертовом пространстве означает нарушение симметрии. Такое нарушение может быть двух типов: спонтанное, когда лагранжиан (гамильтониан) инвариантен относительно рассматриваемой группы преобразований, а вакуум — неинвариантен, и неспонтанное, когда вакуум неинвариантен при неинвариантном лагранжиане. В обоих случаях неинвариантность вакуума ведет к появлению неинвариантных макроскопических величин, изменение которых не описывается на языке квантовой теории (т. е. преобразованиями в гильбертовом пространстве), а требует использования другой теории (например, классической).

Важную роль в проблеме инвариантности вакуума в квантовой теории поля играют две теоремы — Коулмена и Голдстоуна (их подробное обсуждение см. в работе [32]). *Теорема Коулмена* утверждает, что «инвариантность вакуума есть инвариантность мира», или, другими словами, если вакуум инвариантен относительно некоторой группы преобразований, то и гамильтониан инвариантен относительно этой группы. Из теоремы Коулмена следует, что если гамильтониан неинвариантен относительно некоторого преобразования, то и вакуум неинвариантен.

В частности, в квантовой теории частиц во внешнем классическом поле гамильтониан неинвариантен относительно преобразований, меняющих внешнее поле. Поэтому и вакуум частиц, определяемый как основное состояние гамильтониана, также неинвариантен.

Например, если внешнее поле нестационарно, то и вакуум при этом не может быть инвариантным относительно трансляций по времени. Неинвариантность вакуума во внешнем поле приводит к появлению неинвариантных макровеличин. В теории рождения пар классическим внешним полем такими величинами будут плотность числа рождающихся частиц, плотность их энергии, давление и т. п.

В случае спонтанного нарушения симметрии большое значение имеет *теорема Голдстоуна*, которую можно сформулировать следующим образом. В локальной, трансляционно-инвариантной теории поля с сохраняющимся локальным 4-током $J^i(x)$ и вакуумом, неинвариантным относительно непрерывной группы симметрии, генератором которой является заряд $Q = \int J^0(x) d^3x$, с необходимостью имеются частицы массы нуль (голдстоуновские бозоны). При доказательстве этой теоремы существенна инвариантность относительно трансляций не только в пространстве, но и во времени.

Спонтанное нарушение симметрии тесно связано с вырождением вакуума. Одному и тому же гамильтониану соответствует много вакуумов, получаемых один из другого преобразованием спонтанно нарушенной симметрии. Эти различные вакуумы можно также истолковать как состояния, описывающие конденсат большого числа безмассовых частиц с исчезающе малыми импульсами. Отсюда видна связь между вырождением и голдстоуновскими бозонами.

В случае квантовой теории частиц в нестационарном внешнем поле вакуум, определяемый как основное состояние гамильтониана, не будет трансляционно-инвариантным во времени. Поэтому во внешнем поле возможно явление спонтанного нарушения симметрии без появления голдстоуновских бозонов (подробнее см. гл. 10 и 14). Вакуумы, реализующиеся в разные моменты времени, соответствуют различной энергии основного состояния мгновенного гамильтониана и могут получаться в результате конденсации уже не безмассовых, а массивных частиц.

Выше говорилось, что неинвариантность вакуума в случае спонтанного и неспонтанного нарушений симметрии ведет к появлению неинвариантных макровеличин. Изменение этих макровеличин в квантовой теории возможно лишь при конденсации большого числа бозе-частиц, поскольку лишь бозе-поля имеют классический предел. Поэтому неслучайно, что во внешнем нестационарном поле как бозоны, так и фермионы всегда рождаются парами. Конденсация этих пар аналогична конденсации голдстоуновских бозонов.

Во внешнем поле возможны явления как спонтанного нарушения, так и восстановления симметрии. Изменение симметрии является спонтанным, если взаимодействие квантованного поля с внешним полем не нарушает симметрию лагранжиана относительно соответствующей группы преобразований. Спонтанное изменение симметрии имеет место, когда из соображений минимума энергии или устойчивости решений дифференциальных уравнений вытекает необходимость рассмотрения ненулевых (или, наоборот, нулевых, если симметрия была спонтанно нарушена до включения внешнего

поля) вакуумных средних. Хорошо известным примером такого рода является переход металла из сверхпроводящего в нормальное состояние при включении сильного магнитного поля. В сверхпроводящем состоянии спонтанно нарушена симметрия относительно калибровочных преобразований. Включение взаимодействия с внешним магнитным полем не меняет симметрию гамильтониана по отношению к этим преобразованиям. Тем не менее с помощью принципа минимума энергии (или свободной энергии в теории Гинзбурга—Ландау) легко убедиться в том, что в достаточно сильном поле предпочтительным является основное состояние гамильтониана с восстановленной калибровочной симметрией.

Менее известны примеры, когда до включения внешнего электромагнитного или гравитационного поля квантовая система обладает некоторой симметрией, а после включения поля, не нарушающего симметрию лагранжиана, становится энергетически выгодным основное состояние с нарушенной симметрией. Соответствующие примеры рассмотрены ниже (см. гл. 8—10, 14).

§ 3.4. Корпускулярная интерпретация квантовой теории во внешнем поле

Корпускулярная интерпретация теории поля связана с определением вакуума и фоковской конструкцией пространства состояний, получаемых действием операторов рождения на вакуумное состояние. В квантовой теории многих тел вакуумное состояние, являющееся основным состоянием гамильтониана, обычно характеризуется некоторой макроскопической величиной, например плотностью числа частиц. При этом часто оказывается, что частицы, соответствующие операторам рождения — уничтожения в пространстве Фока, не совпадают с теми частицами, ненулевая плотность числа которых характеризует основное состояние. Так, например, фононные возбуждения электронного газа являются, в отличие от самих электронов, бозонами. Поэтому такие квантовые объекты называются квазичастицами: они характеризуют возбуждение данного макротела и не существуют вне его.

Процессы рождения пар классическим внешним полем приводят к появлению ненулевой плотности числа частиц. Эта плотность является макрохарактеристикой вакуума. Свойства соответствующих квазичастиц не столь принципиально отличаются от свойств частиц с ненулевой плотностью. Исключение составляет случай, когда во внешнем поле наряду с рождением частиц имеет место эффект спонтанного нарушения симметрии. При этом аналогия с фазовыми переходами в теории многих тел является полной: спектр квазичастиц и их квантовые числа могут существенно отличаться от соответствующих характеристик частиц в конденсате.

В теории элементарных частиц последние классифицируются по представлениям группы Пуанкаре. Вакуум частиц является состоянием, инвариантным относительно группы Пуанкаре. Если внешнее

поле допускает S -матричную постановку задачи, то эту классификацию можно сохранить. Однако в отличие от теории квантованного свободного поля операторы рождения и уничтожения и генераторы группы Пуанкаре на $-\infty$ и на $+\infty$ имеют различный вид. Вакуум на $+\infty$ характеризуется ненулевой плотностью числа частиц, определенных на $-\infty$, и наоборот. Поэтому вакуум на $+\infty$ инвариантен относительно преобразований группы Пуанкаре, генераторы которых записаны в нормальной форме по операторам рождения и уничтожения на $+\infty$. При отсутствии спонтанного нарушения симметрии это различие, однако, не затрагивает трансформационных свойств состояний относительно группы Пуанкаре, так что массы и спины частиц на $-\infty$ и на $+\infty$ одинаковы.

Более сложной оказывается проблема корпускулярной интерпретации теории поля во внешнем поле, если S -матричная постановка задачи невозможна. Например, такая ситуация возникает в космологии, где необходимо рассматривать теорию квантованного поля в искривленном пространстве — времени, не обладающем плоскими асимптотиками. Для определения понятия частицы здесь необходим анализ процесса измерения.

В работах [52] для электромагнитного и [53] для гравитационного внешних полей предложена корпускулярная интерпретация квантованного поля, основанная на методе диагонализации гамильтониана преобразованиями Боголюбова. Частицей в этой интерпретации называют квант энергии. Как известно, теория измерения в квантовой механике требует, чтобы в результате измерения некоторой физической величины система оказывалась в собственном состоянии соответствующего оператора. Поэтому измерение энергии с необходимостью приводит систему в собственное состояние гамильтониана. Для нахождения этого состояния гамильтониан должен быть диагонализирован. Операторами рождения и уничтожения частиц при этом называются те операторы, в терминах которых гамильтониан диагонален.

Диагонализация гамильтониана является операцией, внешней по отношению к уравнениям движения. Информация о состоянии, полученная при редукции волнового пакета (который описывал частицу до измерения) в собственное состояние гамильтониана, затем сохраняется в приборе. При этом существенную роль играет макроскопичность прибора. Если прибор внесен в сильное внешнее поле, рождающее пары, то и в этом поле он продолжает описываться детерминированными уравнениями классической физики, так что его взаимодействие с квантовой частицей в некоторый момент оставляет макроскопический след, сохраняющийся во времени. Рождение макротел, описываемых классической теорией, не происходит в силу того, что они удовлетворяют условиям энергодоминантности Хокинга — Пенроуза [54]. Для квантовых же частиц эти условия могут нарушаться [55].

Таким образом, в рамках изложенной выше интерпретации измерение энергии дает такие же результаты, как если бы поле

в момент измерения сделалось стационарным. Эта, по терминологии фон Неймана [56], «стационаризация» гамильтониана при измерении энергии показывает, что описание всякого измерения можно дать в терминах S -матричной теории.

В связи с необходимостью рассматривать неэквивалентные представления коммутационных соотношений при появлении отличных от нуля макровеличин возникает еще одна особенность связи определений частиц и вакуума с измерительным процессом. Действительно, обратимся к указанной в предыдущей главе связи между классификацией неэквивалентных представлений и обобщенных случайных полей. Функции $f \in \Omega$, являющиеся пробными функциями в квантовой теории поля, характеризуют прибор, регистрирующий соответствующее обобщенное случайное поле. Мера $\mu(\chi)$, введенная в предыдущей главе чисто формально, определяет вероятностное распределение обобщенного случайного поля.

Рассмотрим, что происходит, если квантовая система, описываемая в некоторый момент t_1 характеристическим функционалом $E_F(f)$ (2.41), в момент t_2 перешла в неэквивалентное представление, задаваемое некоторым функционалом $E_c(f)$ из (2.44). Пусть f_1, f_2, \dots — произвольная ортонормированная система в \mathcal{H} -пополнении $\Omega \subset \mathcal{H}$ по скалярному произведению. Рассмотрим функции $F(g)$ вида

$$F(g) = \prod_{i=1}^{\infty} F_i((g, f_i)), \quad (3.8)$$

где $F_i(x) = 1$ для всех, кроме конечного числа, значений i .

Пусть X^c — интеграл, определяющий скалярное произведение в гильбертовом пространстве представления коммутационных соотношений, так что

$$X^c(F) = \prod_{i=1}^{\infty} X_i^c(F_i), \quad (3.9)$$

где

$$X_i^c(F_i) = \frac{c}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_i(x) \exp(-c^2 x^2) dx, \quad (3.10)$$

$$X_i^c(1) = \frac{c}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-c^2 x^2) dx = 1.$$

Неэквивалентность представлений при различных c связана с тем, что производная Радона—Никодима

$$\frac{dX^c}{dX^{c'}}(g) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{c}{c'} \exp[-(c^2 - c'^2)(g, f_i)^2] \quad (3.11)$$

при $c \neq c'$ равна нулю или бесконечности.

Если в момент t_1 система характеризуется фоковским функционалом $E_F(f)$, то пространство \mathcal{H}_F определяется интегралом X^1 . Последовательность f_1, f_2, \dots есть характеристика прибора, с помощью которого проводятся измерения. Гамильтониан, импульс, момент импульса и заряд являются операторами в пространстве \mathcal{H}_F , и их матричные элементы вычисляются с помощью интеграла X^1 . «Прибор» f_1, f_2, \dots измеряет эти матричные элементы.

Пусть в момент t_2 та же система характеризуется функционалом $E_c(f)$, $c > 1$. Формула (3.11) показывает, что если измерение проводится тем же прибором, то соответствующие интегралы и, следовательно, средние значения физических величин обращаются в нуль. Таким образом, переход системы в неэквивалентное представление требует выбора другого прибора для получения информации о системе.

Рассмотрим прибор, отличающийся от первого лишь тем, что он характеризуется функциями cf_1, cf_2, \dots . В момент t_2 показания этого прибора с точки зрения первого прибора есть интегралы по сингулярной мере. Следовательно, если первый прибор в момент t_1 что-то показывал, то второй прибор в это же время не давал о системе никакой информации. Иная ситуация будет в момент t_2 . Теперь система характеризуется интегралом X^c (или мерой μ_c) и второй прибор будет давать информацию о системе, в то время как первый ее уже не дает.

Таким образом, приходим к следующей схеме. Имеется квантовая система, представление коммутационных соотношений которой фиксировано значением функционала $E(f) = \langle 0 | \exp(i\psi(f)) | 0 \rangle$, где ψ — оператор поля; $|0\rangle$ — вакуум; $f \in \Omega$. Имеется прибор, характеризуемый некоторой бесконечной последовательностью f_1, f_2, \dots Гильбертово пространство представления определяется функционалом $E(f)$. Прибору сопоставляется свое гильбертово пространство, в котором функции $F(g)$ вида (3.8) образуют всюду плотное множество и скалярное произведение есть интеграл по некоторой мере. Эта мера может совпадать, а может и не совпадать с мерой, определяемой представлением. В первом случае данный прибор может служить для получения информации о физической системе. Во втором — существование неэквивалентных (взаимно сингулярных) мер приводит к тому, что прибор не может давать какой-либо информации о системе.

Выбор прибора в используемой терминологии соответствует высказыванию гипотезы о виде вероятностной функции распределения. Сравнение разных приборов есть сравнение гипотез, и разобранный выше пример с двумя приборами иллюстрирует ситуацию, когда в момент t_1 реализуется одна гипотеза, а в момент t_2 — другая.

Показаниям прибора (например, положению стрелки) взаимно однозначно соответствуют собственные значения некоторого оператора, вычисленные с помощью интеграла по мере, характеризующей прибор. Вероятность m -го показания прибора есть

$$|(\Psi, \Psi_m)|^2 = \left| \int \Psi(x) \Psi_m(x) d\mu(x) \right|^2, \quad (3.12)$$

где $\Psi(\chi)$ — волновая функция системы; $\Psi_m(\chi)$ — собственная функция оператора наблюдаемой.

В квантовой теории частиц во внешнем классическом поле естественно рассматривать прибор, измеряющий мгновенную энергию. В качестве наблюдаемых следует в этих случаях брать величины, операторы которых коммутируют с мгновенным гамильтонианом. Таким образом, возникает понятие о вакууме и частицах в данный момент времени, определенных относительно соответствующих средств наблюдения.

Ниже показано, что при такой корпускулярной интерпретации действительно удается получить физически оправданные результаты для всех представляющих интерес величин.

Глава 4. КВАНТОВЫЕ ЭФФЕКТЫ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ, ЗАДАВАЕМОМ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

§ 4.1. Эффект Казимира

Простейшую модель взаимодействия с внешним полем можно построить, налагая на свободное поле в пустом пространстве-времени Минковского те или иные граничные условия, соответствующие ограничению объема или изменению топологии пространства. Уже в этом случае при квантовании поля возникают многие интересные эффекты, характерные для электромагнитного и гравитационного внешних полей. В то же время простота модели позволяет избежать многих технических трудностей, возникающих для электромагнитного и гравитационного внешних полей, и выделить проблемы принципиального характера. Кроме того, задачи с граничными условиями имеют и самостоятельный интерес для квантовой теории поля. Этим объясняется значительное внимание, которое привлекает к себе в последнее время указанный круг задач.

Дополнительные стимулы к изучению подобных задач появились недавно в теории элементарных частиц и релятивистской астрофизике. В первом случае речь идет о модели строения адронов, известной под названием «мешок МТИ» (см., например, [58, 59]). В этой модели адрон рассматривается как протяженная область, в которой сосредоточено поле кварков и глюонов, причем условия на границе области таковы, что поток частиц наружу равен нулю. Это обеспечивает удержание кварков. Сточки зрения астрофизики интерес таких задач связан с тем, что они моделируют неполные системы отсчета, в которых имеются горизонты [60—64]. Подобные ситуации возникают, например, при гравитационном коллапсе (подробнее см. в гл. 16).

Наиболее известное явление рассматриваемого типа — это эффект Казимира [65]. Он состоит в том, что между двумя незаряженными

ми проводящими пластинами в вакууме действует сила притяжения, равная (в обычных единицах)

$$F = (-\pi^2/240) (\hbar c S/a^4), \quad (4.1)$$

где S — площадь пластин; a — расстояние между ними (предполагается, что $a \ll \sqrt{S}$). Впоследствии такое притяжение было обнаружено экспериментально [66, 67], причем для $S = 1 \text{ см}^2$ и $a = 0,5 \text{ мкм}$ оказалось $F = 0,2 \text{ дин}$, что согласуется с (4.1).

Эффект Казимира обычно трактуется как проявление ван-дер-ваальсовых сил молекулярного притяжения на больших расстояниях, когда становится существенным учет запаздывания электромагнитного взаимодействия [68—71]. Однако выражение (4.1) никак не связано с микроскопической структурой пластин, и в широком интервале параметров задачи поправки к нему на дисперсию диэлектрической проницаемости и конечную температуру малы [68]. Поэтому на эффект Казимира можно смотреть с точки зрения квантовой теории поля как на явление типа поляризации вакуума электромагнитного поля, которое возникает благодаря наличию в пространстве граничных условий. Близкий по духу подход на классическом уровне использован в [68, 69], где проведен расчет ван-дер-ваальсовых сил как взаимодействия, осуществляющегося через посредство классического флуктуационного электромагнитного поля. Связь различных подходов к изучению эффекта Казимира обсуждается в работах [70—72].

В рамках квантовой теории поля возникновение силы Казимира объясняется действием нулевых колебаний электромагнитного поля.

Эффекты нулевых колебаний в системах с конечным числом степеней свободы хорошо известны; они ответственны, например, за незатвердевание ${}^4\text{He}$ при нормальном давлении, когда $T \rightarrow 0$, за аномальное рассеяние рентгеновского излучения кристаллами при низких температурах и т. п.

В теории поля наличие бесконечного числа степеней свободы приводит к тому, что нулевые колебания вакуума дают расходящийся вклад в значения физических величин. Обычно от этих бесконечных добавок избавляются с помощью приведения операторов физических наблюдаемых к нормальной форме [6, 7].

Отбрасывание энергии нулевых колебаний оправдывается тем, что последняя вообще определяется с точностью до аддитивной постоянной. Далее, в пространстве Минковского вакуум, определяемый как состояние, инвариантное относительно группы Пуанкаре, не может иметь отличный от нуля конечный тензор энергии-импульса. При наличии граничных условий, однако, пуанкаре-инвариантность нарушена явно, так что последний аргумент неприменим. Более того, имея в виду переход к внешнему гравитационному полю, следует интересоваться абсолютными, а не относительными значениями тензора энергии-импульса квантованных полей.

Качественно эффект Казимира можно трактовать как следствие изменения спектра нулевых колебаний вакуума электромагнитного поля между пластинами по сравнению со случаем неограниченного пространства. В результате вакуумные средние операторов физических наблюдаемых изменятся на некоторую конечную величину. Эти конечные «вакуумные» добавки описывают изменения свойств вакуума, вызванные наличием в пространстве границ, и в принципе поддаются экспериментальному обнаружению.

Рассмотрим задачу о квантовании поля $\psi(x)$ (которое пока не будем конкретизировать) в пустом пространстве при наличии определенных граничных условий. Пусть $\psi_{\alpha}^{(\pm)}(x)$ — полная ортонормированная система положительно- и отрицательно-частотных решений соответствующего уравнения поля, которые удовлетворяют этим граничным условиям (коллективный индекс α может содержать дискретные и непрерывные составляющие). Оператор квантованного поля $\psi(x)$ представим в виде

$$\psi(x) = \sum_{\alpha} (\psi_{\alpha}^{(-)} a_{\alpha}^{(-)} + \psi_{\alpha}^{(+)} a_{\alpha}^{(+)}), \quad (4.2)$$

где $a_{\alpha}^{(\pm)}$ — операторы рождения и уничтожения, удовлетворяющие обычным (анти)коммутационным соотношениям. Вакуумное состояние $|\bar{0}\rangle$ определяется равенствами $a_{\alpha}^{(-)} |\bar{0}\rangle = 0$ для всех α .

Вакуум $|\bar{0}\rangle$ не совпадает с вакуумом в пространстве без границ, который будем обозначать просто $|0\rangle$. Для изучения вакуумных эффектов, возникающих из-за существования границ, вычислим среднее по состоянию $|\bar{0}\rangle$ от оператора тензора энергии-импульса (ТЭИ) T_{ik} , который получается из приведенных в гл. 1 выражений заменой классических полей их операторами. В общем виде будем писать

$$T_{ik} = T_{ik}\{\psi(x), \psi(x)\}, \quad (4.3)$$

где $T_{ik}\{f, g\}$ — билинейная по полю форма, определяемая видом классического ТЭИ.

Подставляя в (4.3) разложение (4.2) и вычисляя вакуумное среднее, получаем

$$\langle \bar{0} | T_{ik} | \bar{0} \rangle = \sum_{\alpha} T_{ik} \{ \psi_{\alpha}^{(-)}(x), \psi_{\alpha}^{(+)}(x) \}. \quad (4.4)$$

В правой части (4.4) стоит та же квадратичная форма, что и в (4.3), но ее аргументами являются уже c -числовые базисные функции.

Основная трудность состоит в том, что это выражение расходится. Оно расходится и в пустом пространстве при отсутствии границ. С математической точки зрения причину его расходимости можно усмотреть в том, что оператор ТЭИ (4.3) есть билинейная форма по операторнозначным обобщенным функциям $\psi(x)$, взятым в одной и той же пространственно-временной точке. Такой объект, строго говоря, не имеет математического смысла.

Выше было сказано, что в случае свободного поля в пространстве без границ из этого затруднения выходят, приводя оператор ТЭИ

к нормальной форме $N(T_{ih})$. При этом автоматически выполняется равенство $\langle 0 | N(T_{ih}) | 0 \rangle = 0$. Приведение оператора к нормальной форме эквивалентно вычитанию вклада нулевых колебаний вакуума:

$$N(T_{ih}) = T_{ih} - \langle 0 | T_{ih} | 0 \rangle. \quad (4.5)$$

Нас же сейчас интересуют сами вакуумные средние, точнее — их изменения, вызванные присутствием границ. Поэтому необходимо использовать какой-то иной способ устранения расходимостей.

По существу, надо найти способ определить конечную разность между расходящимися вакуумными средними вида (4.4) при наличии граничных условий и при их отсутствии; эту разность обозначим $\langle T_{ih} \rangle_c$:

$$\langle T_{ih} \rangle_c = \langle \tilde{0} | T_{ih} | \tilde{0} \rangle - \langle 0 | T_{ih} | 0 \rangle. \quad (4.6)$$

Простейший способ придать смысл подобным выражениям состоит в том, что в (4.4) вводят обрезавшие функции (множители сходимости), вычисляют разность между получающимися конечными величинами, после чего обрезание снимают. Остающиеся при этом конечные члены и дают $\langle T_{ih} \rangle_c$. Результат, естественно, не должен зависеть от вида обрезавшей функции.

Продемонстрируем этот метод на простейшем примере безмассового вещественного скалярного поля $\varphi(t, x)$ на одномерном отрезке $0 \leq x \leq a$, на концах которого заданы граничные условия:

$$\varphi(t, 0) = \varphi(t, a) = 0 \quad (4.7)$$

(«струна», закрепленная на концах). ТЭИ здесь дается выражением (1.23) с $m = 0$, причем $\xi = 0$, поскольку пространство—время двумерно. Явно можно записать

$$\begin{aligned} T_{00} &= T_{11} = (1/2) [(\partial_t \varphi)^2 + (\partial_x \varphi)^2], \\ T_{01} &= T_{10} = (1/2) [\partial_t \varphi \partial_x \varphi + \partial_x \varphi \partial_t \varphi]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Полный набор положительно- и отрицательно-частотных решений уравнения Клейна—Гордона—Фока

$$\partial_t^2 \varphi - \partial_x^2 \varphi = 0, \quad (4.9)$$

удовлетворяющих условиям (4.7), есть

$$\varphi_n^{(\pm)} = (a\omega_n)^{-1/2} \exp(\pm i\omega_n t) \sin \omega_n x, \quad \omega_n = \pi n/a, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.10)$$

Подставляя (4.10) в выражение (4.4), в котором ТЭИ определяется равенствами (4.8) (в этом случае $\alpha = n$), получаем

$$\langle \tilde{0} | T_{ih} | \tilde{0} \rangle = \frac{1}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \delta_{ih}. \quad (4.11)$$

В то же время для неограниченной прямой ($-\infty < x < \infty$) собственные функции

$$\varphi_{\omega}^{(\pm)} = (4\pi\omega)^{-1/2} \exp[\pm i\omega(t-x)], \quad -\infty < \omega < \infty$$

и

$$\langle 0 | T_{ih} | 0 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\omega \omega \delta_{ih}. \quad (4.12)$$

Для вычисления $\langle T_{ih} \rangle_{\varepsilon}$ введем в (4.11) и (4.12) обрезную функцию $f_{\varepsilon}(\omega)$, убывающую при $\omega \rightarrow \infty$ достаточно быстро для того, чтобы сумма и интеграл сходились, и такую, что $f_{\varepsilon}(\omega) \rightarrow 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\omega < \infty$. Суммирование ряда удобно выполнять с помощью формулы Абеля—Плана [73]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n) = \int_0^{\infty} F(x) dx + \frac{1}{2} F(0) + i \int_0^{\infty} \frac{F(it) - F(-it)}{\exp(2\pi t) - 1} dt. \quad (4.13)$$

Полагая $F(n) = \omega_n f_{\varepsilon}(\omega_n)$, видим, что первое слагаемое в правой части (4.13) при $\varepsilon \rightarrow 0$ совпадает с (4.12). Регуляризация сводится к отбрасыванию этого первого слагаемого, которое всегда есть не что иное, как ТЭИ неограниченного пространства. В то же время интеграл в третьем слагаемом (4.13) сходится так быстро, что в нем можно сразу положить $\varepsilon = 0$, т. е. снять обрезание. Таким образом, независимость результата от вида $f_{\varepsilon}(\omega)$ очевидна. В этом заключается главное преимущество использования формулы (4.13) для вычисления $\langle T_{ih} \rangle_{\varepsilon}$ по сравнению с явным введением обрезющей функции, например в виде $\exp(-\varepsilon\omega)$, и последующим предельным переходом $\varepsilon \rightarrow 0$, как это делалось в большинстве работ, посвященных эффекту Казимира.

Таким образом, для регуляризованной суммы расходящегося ряда (4.13) получаем формулу

$$\text{reg} \sum_{n=0}^{\infty} F(n) = \frac{1}{2} F(0) + i \int_0^{\infty} \frac{F(it) - F(-it)}{\exp(2\pi t) - 1} dt, \quad (4.14)$$

которая справедлива для аналитических в правой полуплоскости функций $F(z)$, растущих на бесконечности медленнее $\exp(2\pi|z|)$ [на мнимой оси $F(z)$ может иметь простые полюса или точки ветвления, которые надо обходить справа]. Легко проверить, например, что с помощью (4.14) получается правильное аналитическое продолжение ζ -функции, определенной как $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$, в левую полуплоскость.

Несложная модификация вывода формулы Абеля—Плана (4.13) позволяет получить регуляризацию, аналогичную (4.14), для расходящихся рядов, в которых суммирование проводится по полуцелым значениям аргумента

$$\text{reg} \sum_{n=0}^{\infty} F\left(n + \frac{1}{2}\right) = -i \int_0^{\infty} \frac{F(it) - F(-it)}{\exp(2\pi t) + 1} dt. \quad (4.15)$$

Эта формула полезна в случае фермионного поля.

Регуляризация посредством формул (4.14) и (4.15) дает те же результаты, что и обобщенное фурье-преобразование расходящихся рядов с отбрасыванием сингулярных слагаемых [74].

Применяя формулу (4.14) к выражению (4.11), получаем

$$\langle T_{00} \rangle_c = \langle T_{11} \rangle_c = \text{reg} \frac{1}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega d\omega}{\exp(2a\omega) - 1} = -\frac{\pi}{24a^2}. \quad (4.16)$$

Очевидно, полная вакуумная энергия

$$\mathcal{E}_c = a \langle T_0^0 \rangle_c = -\pi/24a$$

отрицательна. При этом, однако, выполняется правильное термодинамическое соотношение

$$d\mathcal{E}_c = -P_c da \quad (4.17)$$

(где $P_c = -\langle T_1^1 \rangle_c$ — натяжение), которое справедливо для деформации струны при постоянной энтропии. Иными словами, поле нулевых колебаний вакуума ведет себя подобно максвелловскому упругому эфиру. Из (4.16) видно, что спектр вакуумных колебаний совпадает со спектром излучения одномерного абсолютно черного тела с температурой $kT_c = \hbar c/2a$ (в обычных единицах).

Если вместо (4.7) на концах задать периодические условия (замкнутая струна), то $\langle T_{ik} \rangle_c$ оказывается вчетверо больше (удваивается число мод и частота каждой моды).

В 3-пространстве в области $0 < x^3 < a$ между двумя параллельными плоскостями, перпендикулярными к оси x^3 , на которых заданы нулевые граничные условия, собственные функции уравнения Клейна—Гордона—Фока для безмассового скалярного поля имеют вид ($\alpha = \{k_1, k_2, n\}$, $-\infty < k_1, k_2 < \infty$, $n = 1, 2, \dots$):

$$\varphi_{\alpha}^{(\pm)}(x) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\omega_{\alpha} a}} \exp\{\pm i(\omega_{\alpha} t + k_1 x^1 + k_2 x^2)\} \sin \frac{\pi n x^3}{a},$$

$$\omega_{\alpha}^2 = k_1^2 + k_2^2 + (\pi n/a)^2.$$

Применение описанного выше метода к метрическому ТЭИ вещественного скалярного поля [который получается из (1.23) при $\xi = 1/6$ отождествлением φ и φ^* и делением на 2] дает

$$\langle T_{ik} \rangle_c = \frac{\pi^2}{1440a^4} \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3 \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Как отмечено в работе [60], результат (4.18) справедлив только для метрического ТЭИ; для канонического ТЭИ (1.22) к (4.18) добавляются зависящие от x^3 члены, сингулярные при $x^3 \rightarrow 0$, a .

Если масса поля $m \neq 0$, $\langle T_{ik} \rangle_c$ зависит от x^3 . При $ma \gg 1$ он экспоненциально мал всюду кроме слоев $\sim m^{-1}$ вблизи плоскостей, где $\langle T_{ik} \rangle_c \sim h^{-2}$, h — расстояние до плоскости (давление $P_3 = \langle T_{33} \rangle_c$ от x^3 не зависит). Эта сингулярность связана с идеальным характером граничных условий и исчезает при учете конечной проницаемости плоскостей.

В задачах квантования во внешнем поле используются различные методы регуляризации вакуумных средних: ковариантное раздвижение точек, размерная регуляризация, метод обобщенной ζ -функции (см. гл. 12). Все эти методы применимы в рассматриваемых здесь задачах (см., например, [62, 74—76]) и технически эквивалентны или описанной выше регуляризационной процедуре, или обобщенному фурье-преобразованию расходящихся рядов. Во всех случаях, когда можно найти аналитические выражения для $\langle T_{ik} \rangle_c$, результаты, полученные различными методами, совпадают. Вопрос об интерпретации регуляризационной процедуры в терминах перенормировок затронут в следующем параграфе.

Теперь рассмотрим спинорное поле ψ , удовлетворяющее уравнению Дирака (1.39) с $A_n = 0$. Естественные граничные условия в этом случае имеют вид [58]

$$i\gamma^k n_k \psi|_S = \psi|_S, \quad (4.19)$$

где n_k — пространственноподобный вектор, совпадающий в системе покоя границы S с вектором внутренней нормали. Условие (4.19) обеспечивает отсутствие тока частиц через границу

$$n_k J^k|_S = n_k \overline{\psi} \gamma^k \psi|_S = 0. \quad (4.20)$$

Требование же $\psi|_S = 0$ (по аналогии со скалярным полем) противоречило бы уравнению Дирака.

Расчет вакуумного ТЭИ здесь сводится к нахождению собственных спиноров уравнения Дирака с граничным условием (4.19), вычислению средних (4.4) с T_{ik} , определенным в (1.40), и их регуляризации. Приведем результат для безмассового поля в пространстве

между плоскостями $x^3 = 0$ и $x^3 = a$. Спектр собственных частот в этом случае имеет вид

$$\omega_\alpha = [k_1^2 + k_2^2 + (\pi^2/a^2)(n + 1/2)^2]^{1/2}, \quad (4.21)$$

где $-\infty < k_1, k_2 < \infty$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Регуляризация вакуумных средних с помощью формулы (4.15) дает

$$\langle T_{ik} \rangle_c = \frac{7\pi^3}{2880 a^4} \tau_{ik}, \quad \tau_{ik} = \text{diag}(-1, 1, 1, -3) \quad (4.22)$$

(хотя масса $m = 0$, считаем, что частицы и античастицы имеют по два состояния спиральности: для нейтрино результат будет вдвое меньше).

Перейдем к случаю электромагнитного поля. Предположим, что границы области идеально проводящие, и зададим естественные граничные условия — обращение в нуль тангенциальных компонент электрического поля [69]. Для области между пластинами $x^3 = 0$ и $x^3 = a$ применение описанного выше метода дает

$$\langle T_{ik} \rangle_c = \frac{\pi^3}{720 a^4} \tau_{ik}, \quad (4.23)$$

где τ_{ik} — то же, что в (4.22). Вакуумная энергия, заключенная в цилиндрической области объема $V = Sa$ между пластинами, есть

$$\mathcal{E}_c = Sa \langle T_0^0 \rangle_c = -\pi^2 S / 720 a^3. \quad (4.24)$$

Вычисляя силу притяжения между пластинами $F = -\partial \mathcal{E}_c / \partial a$, приходим к результату Казимира (4.1).

Нетрудно проверить, что во всех рассмотренных случаях вакуумный ТЭИ удовлетворяет соотношению, аналогичному (4.17):

$$d\mathcal{E}_c = -P_{c3} dV, \quad (4.25)$$

где $P_{c3} = -\langle T_3^3 \rangle_c$ — давление по оси x^3 . При этом след ТЭИ $\langle T_i^i \rangle_c = 0$ (как и должно быть для безмассовых полей).

Спектр нулевых колебаний и в этом случае совпадает с планковским спектром для бозонов (скалярное, электромагнитное поля) или для фермионов (спинорное поле); действительно:

$$\varepsilon = \langle T_0^0 \rangle_c = \text{const} \int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{\exp(2a\omega) \mp 1}. \quad (4.26)$$

Соответствующая характеристическая температура $kT_c = \hbar c / 2a$ (в обычных единицах); при $a \sim 1$ мкм $T_c \sim 10^3$ К. Большое значение T_c в этом случае объясняет сравнительную малость температурных поправок, которые имеют относительную величину порядка $(T/T_c)^4$ [68, 72].

Отметим, что основной вклад в интеграл (4.26), определяющий результат (4.23), дают частоты $\omega \lesssim 1/a$. Поэтому полученные выражения сохраняются и для неидеально проводящих пластин, если

отклонения от идеальной проводимости возникают только для длин волн $\lambda \gg a$.

Тот факт, что плотность вакуумной энергии электромагнитного поля между пластинами оказалась отрицательной, пробудил у Казимира надежду построить модель протяженных элементарных частиц в виде сфер, в которых кулоновское отталкивание уравновешивается притяжением, связанным с нулевыми колебаниями вакуума [77]. Условие равновесия позволило бы тогда вычислить значение постоянной тонкой структуры α , которая выражалась бы через коэффициент в формуле для казимировской энергии сферы (в буквальном соответствии с известным предсказанием Фейнмана о том, что когда-нибудь величину α , возможно, удастся выразить через корни функций Бесселя [78]).

Надежда эта, однако, не оправдалась. Казимировская энергия для сферы была вычислена с помощью ЭВМ [78], причем результат, уточненный впоследствии в работах [72, 79, 80], оказался равным

$$\mathcal{E}_c = + 0,09235/2r \quad (4.27)$$

(r — радиус сферы), т. е. эффект Казимира в сфере дает отталкивание, а не притяжение!

Высказывались различные точки зрения на причины противоположности знаков плотности энергии для сферы и для двух пластин. С одной стороны, ее связывали с различием топологий этих конфигураций. С другой стороны, предполагалось, что при деформации сферы в сплюснутый эллипсоид с сохранением объема вакуумная энергия станет отрицательной при некотором конечном отношении полуосей и при неограниченном увеличении этого отношения будет приближаться к казимировскому значению (4.24). Иными словами, возникает вопрос: имеет ли эффект Казимира чисто топологический характер или же он может быть качественно различным в гомеоморфных областях? Этому вопросу посвящен следующий параграф.

§ 4.2. О зависимости эффекта Казимира от геометрии и топологии области

Вычисление вакуумного ТЭИ требует численного счета (и притом весьма громоздкого) даже для сферы, не говоря уже о менее симметричных конфигурациях. Это связано с нерегулярностью распределения собственных значений оператора Лапласа в таких областях. Поэтому для ответа на поставленный в конце предыдущего параграфа вопрос о характере зависимости вакуумного ТЭИ от геометрии и топологии области исследуем его поведение в областях прямоугольной формы при изменении отношения сторон. В этом случае все вычисления можно провести аналитически [74, 81].

Методику расчетов проиллюстрируем на примере безмассового скалярного поля в двумерной прямоугольной области $D \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$.

Рассмотрим сначала случай, когда на сторонах прямоугольника D заданы нулевые граничные условия (мембрана, закрепленная по краям). Система собственных функций уравнения Клейна—Гордона—Фока имеет вид ($\alpha = \{m, n\}$, $m, n = 1, 2, \dots$):

$$\varphi_{mn}^{(\pm)} = \left(\frac{2}{ab\omega_{mn}} \right)^{1/2} \exp(\pm i\omega_{mn} t) \sin k_m x \sin k_n y, \quad (4.28)$$

$$k_m = \pi m/b, \quad k_n = \pi n/a, \quad \omega_{mn} = (k_m^2 + k_n^2)^{1/2}.$$

Выражение (4.4), вычисленное на функциях (4.28), содержит расходящиеся двойные тригонометрические ряды, для которых изложенная в предыдущем параграфе процедура регуляризации непосредственно неприменима. Поэтому будем вычислять вакуумный ТЭИ, усредненный по области D , предполагая, что усреднение проводится в суммах вида (4.4) до снятия обрезания. Обозначая усредненный таким образом вакуумный ТЭИ посредством $\langle \bar{T}_{ik} \rangle_c$, получаем

$$\langle \bar{T}_i^k \rangle_c = \frac{1}{2ab} \operatorname{reg} \sum_{m, n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \omega_{mn} & & \\ & -k_m^2/\omega_{mn} & \\ & & -k_n^2/\omega_{mn} \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

Очевидно, что полная вакуумная энергия $\mathcal{E}_c = ab \langle \bar{T}_0^0 \rangle_c$ совпадает с энергией, вычисленной как сумма нулевых энергий осцилляторов, $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} \sum \omega_{mn}$, что оправдывает введенное усреднение.

Для регуляризации двойной суммы (4.29) необходимо повторное применение формулы (4.14). В результате после вычисления интегралов получаем

$$\begin{aligned} \langle \bar{T}_i^k \rangle_c = & \frac{\zeta(3)}{16 \pi a^3} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{pmatrix} + \frac{\pi}{48a^2 b} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} - \\ & - \frac{\pi}{a^3} F_i^k \left(\frac{b}{a} \right) \equiv t_i(a, b) \delta_{ik}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

где $\zeta(z)$ — дзета-функция Римана, а $F_i^k(l)$ — интегросуммы вида

$$F_i^k(l) = \int_0^{\infty} dt \begin{pmatrix} \operatorname{sh}^2 t & & \\ & 1 & \\ & & -\operatorname{ch}^2 t \end{pmatrix} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2}{\exp(2\pi m l \operatorname{ch} t) - 1}. \quad (4.31)$$

Кажущееся нарушение симметрии $\langle \bar{T}_{ik} \rangle_c$ относительно замены $a \leftrightarrow b$ связано с выбором определенного порядка суммирования (сначала по n , потом по m); в действительности

$$t_0(a, b) = t_0(b, a), \quad t_1(a, b) = t_2(b, a). \quad (4.32)$$

Целесообразно, однако, считать в (4.30) $b \geq a$, поскольку тогда функция $[\exp(2\pi ms \operatorname{ch} t) - 1]^{-1}$ в (4.31) разлагается в быстро сходящийся ряд по степеням $\exp(2\pi l \operatorname{ch} t)$. Ограничиваясь первым членом получающегося разложения, имеем

$$F_i^k(l) \approx \begin{pmatrix} z^{-1} K_1(z) & & \\ & K_0(z) & \\ & & -K_0(z) - z^{-1} K_1(z) \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

где $z = 2\pi l$, а $K_\nu(z)$ — функция Макдональда. При $z \gg 1$ $K_\nu(z) \sim (\pi/2z)^{1/2} \exp(-z)$, так что вклад интегросумм экспоненциально мал (даже при $a = b$ он меньше 1% для t_0 и 10% для t_1, t_2).

При $a = b$ из (4.30) получаем

$$\langle T_i^k \rangle_c = \frac{0,0411}{a^3} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1/2 & \\ & & -1/2 \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

и казимировскую энергию квадрата $\mathcal{E}_c = 0,0411a^{-1}$.

Что происходит с \mathcal{E}_c , когда изменяется отношение сторон b/a ? Из (4.30) с учетом (4.32) следует, что $\mathcal{E}_c > 0$ в интервале

$$\lambda < b/a < \lambda^{-1}, \quad \lambda \approx 3\zeta(3)/\pi^2 = 0,365 \quad (4.35)$$

(здесь вкладом F_i^k можно пренебречь). Вне интервала (4.35) $\mathcal{E}_c < 0$, и при вытягивании прямоугольника в бесконечную полосу $0 < x < a$ средняя плотность энергии приближается к

$$\bar{\varepsilon} = -\zeta(3)/16\pi a^3. \quad (4.36)$$

Таким образом, видим, что при непрерывной деформации области энергия \mathcal{E}_c меняет знак, что подтверждает высказанную в конце предыдущего параграфа гипотезу.

Для такого же прямоугольника, но с периодическими граничными условиями по x и y (топологически эквивалентного поверхности тора) аналогичное вычисление дает

$$\langle T_i^k \rangle_c = \frac{\zeta(3)}{2\pi a^3} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{pmatrix} + \frac{\pi}{6ab^2} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \frac{8\pi}{a^3} F_i^k\left(\frac{b}{a}\right), \quad (4.37)$$

где F_i^k определено в (4.31). Ввиду трансляционной инвариантности граничных условий здесь, очевидно, $\langle T_i^k \rangle_c = \langle \bar{T}_i^k \rangle_c$. При $a = b$

$$\mathcal{E}_c = -0,719/a \quad (4.38)$$

и остается отрицательной при всех значениях отношения b/a .

Для выяснения характера зависимости вакуумного ТЭИ от топологии области интересно сравнить результаты двух простейших геометрически идентичных, но топологически различных конфигураций — цилиндра и листа Мебиуса [81].

Для цилиндра (прямоугольник, склеенный вдоль одной стороны) задаем периодические граничные условия по координате x и нулевые на сторонах $y = 0$ и $y = b$. Вычисления, аналогичные приведенным выше, дают результат ($l \equiv b/a$):

$$\mathcal{E}_c^{(1)} = \begin{cases} \frac{\pi}{24a} \left[-\frac{12\zeta(3)}{\pi^2} l + 2 - l^{-1} \right], & l > 1/2, \\ -\frac{\zeta(3)}{16\pi a} l^{-2}, & l < 1/2 \end{cases} \quad (4.39)$$

(здесь и ниже мы отбрасываем экспоненциально малые интегралы).

Для листа Мебиуса, исходя из наглядного образа прямоугольника длины a , склеенного вдоль ширины b с перекручиванием на пол-оборота, т. е. с отождествлением точек (x, y) и $(x + a, b - y)$, наложим на поле $\varphi(x, y)$ граничные условия:

$$\begin{aligned} \varphi(0, y) &= \varphi(a, b - y); & \partial_x \varphi(0, y) &= \partial_x \varphi(a, b - y); \\ \varphi(x, 0) &= \varphi(x, b) = 0. \end{aligned}$$

Несложные вычисления для 00-компоненты усредненного по координатам выражения (4.4) дают

$$\begin{aligned} \langle \tilde{0} | \bar{T}_0^0 | \tilde{0} \rangle &= \frac{\pi}{ab} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{m+1/2}{a} \right)^2 + \left(\frac{k}{b} \right)^2 \right]^{1/2} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{k+1/2}{b} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Для регуляризации сумм используем формулы (4.14) и (4.15). В результате получим вакуумную энергию для листа Мебиуса

$$\mathcal{E}_c^{(2)} = \begin{cases} \frac{\pi}{24a} \left[-\frac{3\zeta(3)}{2\pi^2} l - 1 + l^{-1} \right], & l > 1, \\ -\frac{\zeta(3)}{16\pi a} l^{-2}, & l < 1. \end{cases} \quad (4.41)$$

Как в (4.39), так и в (4.41) $\mathcal{E}_c < 0$ для всех значений $l = b/a$. Существенно, что $\mathcal{E}_c^{(1)}$ и $\mathcal{E}_c^{(2)}$ совпадают при достаточно малом значении l (с экспоненциальной точностью уже при $l < 1/2$), т. е. различие топологий в случае узкой замкнутой полосы уже не сказывается на значении \mathcal{E}_c . Таким образом, эффект Казимира не является чисто топологическим.

В 3-пространстве для куба со стороной a имеем

$$\mathcal{E}_c = -k/a,$$

где $k = 0,0154$ при условии обращения поля в нуль на гранях [74] и $k = 0,838$ при периодических граничных условиях (пространст-

во с топологией 3-тора [82]). При любой деформации куба в прямоугольный параллелепипед знак \mathcal{E}_c сохраняется.

Перейдем теперь к более реалистическому случаю электромагнитного поля. Рассмотрим сначала эффект Казимира в прямоугольном резонаторе с размерами $a \times b \times c$. С учетом естественных граничных условий и кратности спектра [69] трехкратное применение формулы (4.14) дает следующее выражение [74]:

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{a} \left\{ -\frac{\pi^2}{720} l_1^3 l_2 + \frac{\zeta(3)}{16\pi} l_1 (1 + l_2) - \frac{\pi}{96} - \pi l_1^3 l_2 G(l_1, l_2) \right\} + \\ + abt_0(a, b) + bct_0(b, c) + cat_0(c, a), \quad (4.42)$$

где $l_1 = b/a$; $l_2 = c/b$; $t_0(x, y)$ определено в (4.30). Функция $G(r, s)$ имеет вид

$$G(r, s) = \frac{1}{rs} F_0^0(r) + \int_0^\infty dt \operatorname{sh}^2 t \left\{ r^{-3} \sum_{m,n=1}^\infty (m^2 r^2 + n^2) \times \right. \\ \left. \times f(s \sqrt{m^2 r^2 + n^2} \operatorname{ch} t) + \int_0^\infty du \operatorname{ch}^3 u \sum_{m=1}^\infty m^3 f(rm \operatorname{ch} t \operatorname{ch} u) \right\}. \quad (4.43)$$

Здесь F_0^0 определено в (4.31), а $f(\xi) = \exp(2\pi\xi) - 1$. Пространственных компонент $\langle \overline{T}_{ik} \rangle_c$ выписывать не будем ввиду громоздкости выражений; их можно получить из (4.42) с помощью соотношений вида (4.25). Отметим, что (4.42) симметрично относительно перестановок a, b, c .

Посмотрим, как изменяется \mathcal{E}_c при деформации резонатора. Ограничимся случаем квадратного сечения $a = b$ и будем варьировать отношение $l_2 = c/a$. Опуская в (4.42) экспоненциально малые члены, получаем

$$\mathcal{E}_c = \begin{cases} \frac{1}{a} \left[\frac{\pi}{24} - \left(\frac{\pi^2}{720} + \frac{\zeta(3)}{16\pi} \right) l_2 \right], & l_2 > 1, \\ \frac{1}{a} \left[\left(\frac{\pi}{48} - \frac{\zeta(3)}{16\pi} \right) + \frac{\pi}{48} l_2^{-2} - \frac{\pi^2}{720} l_2^{-3} \right], & l_2 < 1. \end{cases} \quad (4.44)$$

Исследование выражений (4.44) показывает, что $\mathcal{E}_c > 0$ в интервале

$$0,408 < c/a < 3,48 \quad (4.45)$$

и отрицательна вне его. Для куба ($a = c$) вакуумная энергия равна

$$\mathcal{E}_c = 0,0932/a. \quad (4.46)$$

Обращает на себя внимание близость численных коэффициентов в (4.46) и в формуле (4.27) для \mathcal{E}_c внутри сферы диаметра $a = 2r$. Предельный случай $c/a \ll 1$ соответствует геометрии двух бесконеч-

ных пластин, находящихся на расстоянии c друг от друга. При этом плотность энергии

$$\bar{\varepsilon} = (abc)^{-1} \mathcal{E}_c = -\pi^2/720 c^4, \quad (4.47)$$

что совпадает с результатом Казимира (4.24).

Другой представляющий интерес случай — параллелепипед, отличающийся от предыдущего тем, что на одной паре противоположных граней, например на гранях $a \times b$, наложены периодические условия. Топологически эта конфигурация эквивалентна тороидальному резонатору. Не выписывая здесь громоздкого выражения для \mathcal{E}_c , укажем лишь, что при квадратном сечении $a = b$ она положительна в интервале значений отношения c/a :

$$0,855 < c/a < 5,86 \quad (4.48)$$

и отрицательна вне его. При $c/a \rightarrow \infty$ средняя плотность энергии $\bar{\varepsilon} \rightarrow -\pi^2/720a^4$.

Итак, видим, что значения $\langle T_i^k \rangle_c$ непрерывным образом зависят от характерных размеров области, включая предельные переходы к бесконечно протяженным конфигурациям. Различие в знаках вакуумной энергии не является чисто топологическим эффектом. Из общих соображений, основанных на свойствах собственных значений оператора Лапласа, следует, что приведенные выше результаты качественно применимы к областям произвольной формы, а именно: вакуумная энергия электромагнитного поля положительна, если область имеет компактную форму, и становится отрицательной при достаточно большом отношении куба ее диаметра к объему.

Остановимся еще на интерпретации использованной здесь регуляризационной процедуры в терминах перенормировок в лагранжиане поля.

Наиболее сингулярные слагаемые в вакуумных средних (4.4) расходятся как Λ^d , где Λ — импульс обрезания, d — размерность пространства-времени. Они не зависят ни от формы области, ни от вида граничных условий; их вклад в энергию пропорционален объему области, и они имеют тот же вид, что и в пустом пространстве. Эти расходимости могут быть устранены введением в лагранжиан независимого от координат контрчлена, и их отбрасывание соответствует перенормировке постоянной добавки в лагранжиане (в модели мешка МТИ [58, 59, 83] она называется константой мешка).

В случаях, когда область имеет границы (в противоположность рассмотренным выше областям с топологией поверхности обычного тора и 3-тора, которые границы не имеют), в выражении для вакуумной энергии до регуляризации имеются члены, пропорциональные площади поверхности границы. Эти расходимости можно устранить добавкой в лагранжиан сосредоточенных на поверхности контрчленов, что соответствует перенормировке поверхностного натяжения.

В трехмерных прямоугольных областях возникают еще расходимости, связанные с ребрами параллелепипеда и пропорциональ-

ные их длине. Эти расходимости исчезнут, если ребра сгладить. Однако если граница области неплоская, то могут возникнуть дополнительные расходимости, пропорциональные средней кривизне границы, что подсказывается результатами исследования распределения собственных значений оператора Лапласа (см., например, [84]). Интерпретация устранения таких расходимостей в терминах перенормировок не вполне ясна [59] (см. также [379]).

§ 4.3. Излучение безмассовых частиц движущимся зеркалом

Обратимся теперь к случаю нестационарных граничных условий. Для простоты ограничимся безмассовым скалярным полем в двумерном пространстве-времени Минковского [62, 63, 85].

Рассмотрим случай, когда пространство ограничено лишь с одной стороны (например, слева) и граница движется так, что ее мировая линия

$$x = z(t) \quad (4.49)$$

временеподобна, т. е. $|\dot{z}(t)| < 1$. Пусть на границе поле $\varphi(t, x)$ удовлетворяет условию Дирихле

$$\varphi(t, x)|_{x=z(t)} = 0. \quad (4.50)$$

Границу (4.49), на которой выполнено (4.50), условно назовем «движущимся зеркалом».

Для квантования поля нам потребуется полная ортонормированная система решений уравнения Клейна—Гордона—Фока (4.9) с граничным условием (4.50) в области $-\infty < t < \infty$, $z(t) \leq x < \infty$. Из-за нестационарности граничного условия переменные в этой задаче не разделяются. Поэтому попытаемся найти новые координаты (τ, ξ) , такие, чтобы в них уравнение (4.9) сохранило свой вид, а граничное условие стало стационарным.

Прежде всего от координат (t, x) перейдем к запаздывающей и опережающей нулевым (световым) координатам (u, v)

$$u = t - x, \quad v = t + x. \quad (4.51)$$

Метрика двумерного плоского пространства-времени в этих координатах имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 = dudv, \quad (4.52)$$

а уравнение (4.9)

$$\partial^2 \varphi / \partial u \partial v = 0. \quad (4.53)$$

Теперь перейдем к новым нулевым координатам (\bar{u}, \bar{v}) по формулам

$$u = f(\bar{u}), \quad v = g(\bar{v}), \quad (4.54)$$

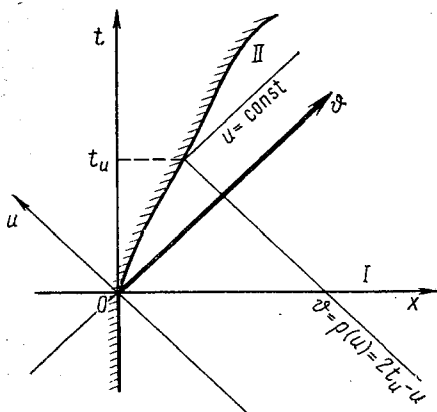


Рис. 1

Новые временная и пространственная координаты (τ, ξ) определяются равенствами

$$\bar{u} = \tau - \xi, \quad \bar{v} = \tau + \xi.$$

В этих координатах уравнение поля имеет ту же форму (4.9):

$$\partial_{\tau}^2 \varphi - \partial_{\xi}^2 \varphi = 0. \quad (4.55)$$

Потребуем теперь, чтобы в новой системе координат «зеркало» покоилось в точке $\xi = 0$, т. е. чтобы условие (4.50) приняло вид

$$\varphi(\tau, \xi) |_{\xi=0} = 0. \quad (4.56)$$

Очевидно, что для этого функции f и g из (4.54) должны удовлетворять следующему условию:

$$(1/2) [g(\tau) - f(\tau)] = z((1/2) [g(\tau) + f(\tau)]). \quad (4.57)$$

Это условие оставляет значительный произвол в выборе функций f и g . Чтобы сократить его, несколько сузим задачу, предположив, что до момента $t = 0$ «зеркало» покоилось в точке $x = 0$, т. е. выберем $z(t)$ в виде

$$z(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ h(t), & t > 0 \end{cases} \quad (4.58)$$

(рис. 1). Очевидно, что в этом случае координаты (τ, ξ) можно выбрать, чтобы в области $t < x$ (область I, см. рис. 1) обе системы координат совпадали. Остающийся произвол устраним, потребовав, чтобы g всюду была тождественной функцией $g(\bar{v}) = \bar{v}$. Для функции f получаем при $\bar{u} < 0$

$$f(\bar{u}) = -\bar{u}, \quad (4.59)$$

где f, g — произвольные строго монотонные гладкие функции. Метрика в этих координатах

$$ds^2 = f'(\bar{u}) g'(\bar{v}) d\bar{u} d\bar{v}$$

отличается от (4.52) только множителем $f'g'$, т. е. (4.54) есть конформное преобразование. Легко проверить, что оно оставляет уравнение (4.53) инвариантным. Это является частным случаем отмеченного в § 1.1 свойства конформной инвариантности безмассового скалярного поля, удовлетворяющего уравнению (1.16) (в двумерном пространстве-времени $\xi = 0$).

а при $\bar{u} > 0$ (область II, см. рис. 1) она определяется как решение функционального уравнения

$$(1/2) [\tau - f(\tau)] = h((1/2) [\tau + f(\tau)]) \quad (4.60)$$

(при строгом выполнении неравенства $|h(t)| < 1$ оно всегда имеет решение).

Полная ортонормированная система положительно- и отрицательно-частотных решений уравнения (4.55), удовлетворяющих граничному условию (4.56), есть

$$\psi_{\omega}^{(\pm)}(\tau, \xi) = (\pi\omega)^{-1/2} \exp(\pm i\omega\tau) \sin \omega\xi, \quad \omega > 0. \quad (4.61)$$

В исходных координатах (t, x) эти решения можно записать в виде

$$\psi_{\omega}^{(\pm)}(t, x) = \pm (i/2\sqrt{\pi\omega}) (\exp[\pm i\omega\rho(u)] - \exp[\pm i\omega v]), \quad (4.62)$$

где u и v определены в (4.51), а ρ означает функцию, обратную к функции f , определяемой равенствами (4.59) и (4.60). В явном виде можно написать

$$\rho(u) = 2t_u - u, \quad (4.63)$$

где t_u определяется из уравнения

$$t_u - u = z(t_u). \quad (4.64)$$

Заметим, что t_u имеет смысл момента времени, когда нулевая линия $u = t - x$ пересекает мировую линию зеркала (см. рис. 1).

Переходя к квантовой теории, разложим оператор поля $\varphi(t, x)$ по собственным функциям (4.62):

$$\varphi(t, x) = \int_0^{\infty} d\omega [a_{\omega}^{(-)} \psi_{\omega}^{(-)} + a_{\omega}^{(+)} \psi_{\omega}^{(+)}]. \quad (4.65)$$

Операторы $a_{\omega}^{(\pm)}$ при $t < 0$ есть обычные операторы рождения и уничтожения частиц на полуоси $x > 0$. При этом можно ввести вакуумное состояние $|0\rangle$, такое что $a_{\omega}^{(-)} |0\rangle = 0$ для всех ω . При $t > 0$ интерпретация $|0\rangle$ как вакуумного состояния уже невозможна. В этой области решения $\psi_{\omega}^{(+)}$ не являются положительно-частотными, а содержат примесь с отрицательной частотой, в чем легко убедиться с помощью фурье-преобразования. Поэтому операторы $a_{\omega}^{(\pm)}$ уже нельзя рассматривать как операторы рождения и уничтожения физических частиц и $|0\rangle$ не является вакуумным состоянием, т. е. происходит рождение частиц из вакуума. Эвристически это явление можно описать как возбуждение осцилляторов поля при движении зеркала.

Рассмотрим средние по состоянию $|0\rangle$ от оператора ТЭИ поля T_{ik} . ТЭИ классического поля по-прежнему определяется равенством

вами (4.8). Переходя в них к операторам и вычисляя среднее по вакууму $|0\rangle$, приходим к выражению, аналогичному (4.4):

$$\langle 0 | T_{ih} | 0 \rangle = \int_0^{\infty} d\omega T_{ih} \{ \psi_{\omega}^{(-)}(x), \psi_{\omega}^{(+)}(x) \}, \quad (4.66)$$

где $\psi_{\omega}^{(\pm)}(x)$ — собственные функции (4.62), $x \equiv (t, x)$. Интеграл (4.66), конечно, расходится. Для его регуляризации, следуя работе [86], применим восходящий еще к Швингеру метод *ковариантного раздвижения точек* (*covariant point-splitting method*), который в последние годы широко используется в задачах квантования полей во внешнем гравитационном поле (см. § 12.3).

Как отмечалось в § 4.1, оператор ТЭИ (4.3), будучи формально билинейной формой по операторнозначным обобщенным функциям при совпадающих аргументах, строгого математического смысла не имеет. В то же время величина (битензор)

$$T_{i' k''}(x'; x'') = T_{i' k''} \{ \psi(x'), \psi(x'') \}, \quad (4.67)$$

которая отличается от (4.3) тем, что операторы ψ в билинейной форме берутся в различных пространственно-временных точках, является хорошо определенным оператором, если точки x' и x'' не лежат на световом конусе друг друга. Вакуумное среднее от (4.67)

$$\langle 0 | T_{i' k''} | 0 \rangle = \int_0^{\infty} d\omega T_{i' k''} \{ \psi_{\omega}^{(-)}(x'), \psi_{\omega}^{(+)}(x'') \} \quad (4.68)$$

сходится в смысле обобщенных функций.

Очевидно, что при $x', x'' \rightarrow x$ все расходимости появятся вновь, но теперь их можно выделить и отбросить с помощью тех или иных физических аргументов. Для того чтобы обеспечить ковариантность в произвольном пространстве-времени, точки x' и x'' следует выбирать на ненулевой геодезической, проходящей через точку x , которая фиксируется касательным вектором τ^i . Получающийся после регуляризации конечный результат, естественно, не должен зависеть от τ_i . Применение этой схемы в задачах со стационарными граничными условиями в плоском пространстве-времени по существу эквивалентно использованию в § 4.1 и 4.2 методу регуляризации расходящихся рядов [81].

Проделаем описанную процедуру с вакуумными средними (4.66). Пусть аргументы в (4.66) раздвинуты согласно (4.68) на собственное расстояние 2ε в направлениях τ^i и $-\tau^i$:

$$x^{i'} = x^i + \varepsilon \tau^i, \quad x^{i''} = x^i - \varepsilon \tau^i, \quad (4.69)$$

причем вектор τ^i нормирован условием

$$g_{ih} \tau^i \tau^k \equiv \sigma = \pm 1 \quad (4.70)$$

($\sigma = +1$ для времениподобного и $\sigma = -1$ для пространственноподобного τ^i).

Подставляя (4.62) в (4.68) и используя выражения (4.8) для T_{ik} , получаем

$$\left. \begin{aligned} \langle T_{00} \rangle_\varepsilon &= \langle T_{11} \rangle_\varepsilon \\ \langle T_{01} \rangle_\varepsilon &= \langle T_{10} \rangle_\varepsilon \end{aligned} \right\} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty d\omega \omega \{ \exp [i\omega(v' - v'')] \pm \\ \pm p'(u') p'(u'') \exp \{ i\omega [p(u') - p(u'')] \}. \quad (4.71)$$

Здесь через $\langle T_{ik} \rangle_\varepsilon$ обозначены вакуумные средние вида (4.68) с аргументами, раздвинутыми согласно (4.69). Интегралы (4.71) понимаются как преобразование Фурье обобщенной функции ω_+ :

$$\mathcal{F}[\omega_+] = \int_0^\infty d\omega \omega \exp(i\omega\varepsilon) = -\frac{1}{(\varepsilon + i0)^2}.$$

В дальнейшем $i0$ будем опускать, подразумевая, что ε имеет положительную мнимую часть.

Результат интегрирования разложим в ряд по степеням ε :

$$\left. \begin{aligned} \langle T_{00} \rangle_\varepsilon \\ \langle T_{01} \rangle_\varepsilon \end{aligned} \right\} = -\frac{1}{16\pi\varepsilon^2} \left[\frac{1}{(\tau^v)^2} \pm \frac{1}{(\tau^u)^2} \right] \mp \frac{1}{24\pi} \left[\frac{p''}{p'} - \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \left(\frac{p''}{p'} \right)^2 \right] + O(\varepsilon^2), \quad (4.72)$$

τ^u, τ^v — компоненты вектора τ^i в координатах (u, v) .

Первое слагаемое в (4.72) обращается в бесконечность при $\varepsilon \rightarrow 0$. С помощью вытекающих из (4.70) и (4.52) соотношений

$$\tau^u \tau^v = \sigma, \quad (\tau^u)^{-1} = 2\tau_u/\sigma, \quad (\tau^v)^{-1} = 2\tau_v/\sigma \quad (4.73)$$

его можно записать в ковариантном виде

$$\langle T_{ik} \rangle_\infty = \frac{1}{8\pi\varepsilon^2 \sigma} \left(g_{ik} - \frac{2\tau_i \tau_k}{\sigma} \right). \quad (4.74)$$

Регуляризация вакуумного среднего ТЭИ (4.66) состоит в отбрасывании этого слагаемого в (4.72) и последующем предельном переходе

$$\langle T_{ik} \rangle_{\text{reg}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\langle T_{ik} \rangle_\varepsilon - \langle T_{ik} \rangle_\infty]. \quad (4.75)$$

Отметим, что выражение (4.74) в точности равно среднему вида (4.66) для полуоси $x > 0$ (т. е. для покоящегося зеркала), а оно, в свою очередь, совпадает с $\langle T_{ik} \rangle_\varepsilon$ для неограниченного пространства Минковского, так что процедура (4.75) эквивалентна отбрасыванию вклада нулевых колебаний «невозмущенного» вакуума. Альтернативный способ регуляризации (4.66) состоит в том, чтобы в (4.72) перед переходом к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$ провести усреднение по направлениям вектора раздвижения τ_i [87]. В двумерном пространстве-времени $\tau^i \tau^k = (1/2) g^{ik} \sigma$, так что усреднение (4.74) дает $\langle T_{ik} \rangle_\infty = 0$.

Остающееся в результате регуляризации (4.75) конечное второе слагаемое в (4.72) можно записать в виде [62]

$$\langle T_{00} \rangle_{\text{reg}} = -\langle T_{01} \rangle_{\text{reg}} = \frac{1}{12\pi} [p'(u)]^{1/2} \frac{d^2}{du^2} [|p'(u)|^{-1/2}] \quad (4.76)$$

(индекс reg ниже будем опускать). Легко проверить, что оно удовлетворяет условию консервативности

$$\partial_h \langle T_i^h \rangle = 0. \quad (4.77)$$

Очевидно, (4.76) описывает излучение движущегося зеркала. Зависимость его от координаты u показывает, что справа от границы $x = z(t)$ имеется запаздывающее излучение, которое возникает на границе (на зеркале) в момент t_u , определяемый из (4.64) (см. рис. 1), распространяющееся со скоростью света вправо.

С помощью (4.63) и (4.64) легко убедиться, что при равномерном движении зеркала $z(t) = V_0 t + z_0$ функция $p(u)$ линейная, так что зеркало в этом случае не излучает, как и следовало ожидать из соображений релятивистской инвариантности.

Поток энергии (4.76) можно выразить через скорость зеркала $\dot{z}(t) = V$ в момент t_u :

$$\langle T_{01} \rangle = -\frac{1}{12\pi} \sqrt{\frac{1+V}{1-V}} \frac{d}{dt} \left[\frac{\dot{V}}{(1-V^2)^{3/2}} \right]. \quad (4.78)$$

Под знаком производной здесь стоит не что иное, как ускорение зеркала в его системе покоя [88]. Следовательно, при равноускоренном движении зеркало также не излучает энергии.

Знак плотности энергии $\langle T_0^0 \rangle$, как и в случае эффекта Казимира, может быть различным. Однако, если в момент t ускорение прекратилось, полная энергия, излученная к этому моменту, положительна:

$$\mathcal{E} = \int_{z(t)}^{\infty} \langle T_0^0 \rangle dx = \frac{1}{12\pi} \int_{-\infty}^{t-z(t)} \left\{ [p'(u)]^{1/2} \frac{d}{du} [|p'(u)|^{-1/2}] \right\}^2 du > 0. \quad (4.79)$$

Полученные результаты позволяют сделать важные выводы о связи между классической и квантовой теориями. Классическая теория инвариантна относительно конформных преобразований вида (4.54). В квантовой же теории эта инвариантность нарушена. Действительно, классическая задача с нестационарным граничным условием конформным преобразованием сводится к статической задаче (4.55), (4.56). В квантовой же теории при неподвижном зеркале $\langle T_{ih} \rangle = 0$, в то время как движение зеркала приводит к появлению отличных от нуля вакуумных средних (4.76), т. е. к нарушению конформной инвариантности. Аналогичная ситуация имеет место и во внешнем гравитационном поле, описываемом конформно-плоской метрикой пространства-времени (см. гл. 13).

Рассмотрим несколько примеров. Пусть сперва зеркало движется по закону

$$z(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ Vt, & t \geq 0 \quad (V < 1), \end{cases} \quad (4.80)$$

(мгновенный разгон в момент $t = 0$ до скорости V). Из (4.63), (4.64) находим

$$p(u) = \begin{cases} u, & u < 0, \\ \frac{1+V}{1-V} u, & u \geq 0. \end{cases} \quad (4.81)$$

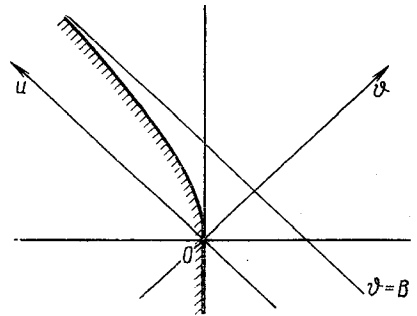


Рис. 2

Решения (4.62) при $u > 0$ в этом случае описывают падающие и сдвинутые в силу доплер-эффекта отраженные волны. Производная $p'(u)$ в этом случае имеет разрыв при $u = 0$ и постоянна при $u \neq 0$. ТЭИ (4.76) имеет вид

$$\langle T_{00} \rangle = -\langle T_{01} \rangle = \frac{1}{12\pi} \delta'(u), \quad (4.82)$$

где $\delta'(x)$ — производная от δ -функции. Выражение (4.82) описывает мгновенный импульс излучения, возникший в момент разгона $t = 0$ и распространяющийся вправо.

Траектория

$$z(t) = \frac{1}{\omega} (\sqrt{\omega^2 t^2 + 1} - 1) \quad (4.83)$$

также допускает точное решение. В этом случае получается $\langle T_{ik} \rangle \equiv 0$. Действительно, (4.83) описывает движение с постоянным ускорением ω в собственной системе покоя, а, как показано выше, при таком движении зеркало не излучает.

Наконец, рассмотрим еще случай, когда траектория зеркала при $t \rightarrow \infty$ имеет вид [63]

$$z(t) = -t - A \exp(-2kt) + B. \quad (4.84)$$

Она экспоненциальным образом приближается к нулевой асимптоте $v = B$ (рис. 2). Функция $p(u)$ при $u \rightarrow \infty$ есть

$$p(u) \approx B - A \exp[-k(u + B)] \quad (4.85)$$

и (4.76) дает

$$\langle T_{00} \rangle = -\langle T_{01} \rangle \approx k^2/48\pi. \quad (4.86)$$

Итак, при $u \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$) имеется постоянный поток излучения, возникающий на зеркале и уходящий на бесконечность. Этот пример интересен тем, что ситуация здесь близка к той, которая возникает при гравитационном коллапсе (см. гл. 16).

Рассмотрим теперь кратко случай, когда имеются две границы (зеркала), на которых заданы граничные условия вида (4.50). Для простоты будем считать, что одно зеркало покоится в точке $x = 0$, а другое движется по мировой линии $x = z(t)$. Эта задача так же конформно-эквивалентна задаче с неподвижными зеркалами, как и при наличии одного зеркала [85]. Если потребовать, чтобы в новых координатах (τ, ξ) зеркала покоились в точках $\xi = 0$ и $\xi = 1$, то соответствующее конформное преобразование дается равенствами (4.54) с $f(\tau) = g(\tau)$ такими, что обратная к ним функция R удовлетворяет уравнению

$$R(t + z(t)) - R(t - z(t)) = 2. \quad (4.87)$$

Система решений $\psi_{\omega}^{(\pm)}$ по-прежнему имеет вид (4.61), но спектр ω теперь дискретный: $\omega_n = \pi n$, $n = 1, 2, \dots$. Вычисление $\langle T_{ik} \rangle$ по описанной выше процедуре дает

$$\begin{aligned} \langle T_{00} \rangle &= \langle T_{11} \rangle = F(v) + F(u), \\ \langle T_{01} \rangle &= \langle T_{10} \rangle = F(v) - F(u), \end{aligned} \quad (4.88)$$

где

$$F(y) = \frac{1}{12\pi} |R'(y)|^{1/2} \frac{d^2}{dy^2} [|R'(y)|^{-1/2}] - \frac{\pi}{48} [R'(y)]^2. \quad (4.89)$$

Очевидно, ТЭИ здесь содержит сумму вкладов излучения, распространяющегося влево и вправо между зеркалами; соответствующие вклады в поток $\langle T_{01} \rangle$ имеют противоположные знаки. Подробный анализ различных возможных ситуаций в этой задаче дан в работе [62]. Здесь только отметим следующее.

Первое слагаемое в (4.89) аналогично (4.76). Второе слагаемое, отсутствовавшее в случае одного зеркала, не обращается в нуль, даже когда оба зеркала неподвижны. При $z(t) = a = \text{const}$ из (4.87) имеем $R(y) = y/a + \text{const}$, тогда (4.89) дает $F(y) = -\pi/48a^2$, так что $\langle T_{00} \rangle = -\pi/24a^2$, $\langle T_{01} \rangle = 0$.

Это выражение, как и следовало ожидать, совпадает с казимировской энергией (4.16).

Рассмотренная в настоящем параграфе двумерная задача всегда допускает точное решение независимо от вида траектории зеркала. Это связано с тем, что классическая задача с нестационарными граничными условиями в двумерном пространстве-времени всегда конформно-эквивалентна статической задаче. Для более высоких размерностей это уже не так, и имеются только отдельные результаты для тех случаев, когда, например, можно найти функцию Грина задачи [61].

Отметим, наконец, что здесь мы не затрагивали проблему интерпретации излучения зеркала в терминах частиц, а также не касались явлений, возникающих в плоском пространстве-времени при использовании неинерциальных систем отсчета. Эти вопросы будут затронуты ниже.

Глава 5. РОЖДЕНИЕ И РАССЕЯНИЕ ЧАСТИЦ НЕСТАЦИОНАРНЫМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

§ 5.1. Методы изучения эффекта рождения частиц электромагнитным полем

Здесь изложен общий формализм, с помощью которого можно описывать квантовые процессы рождения и рассеяния частиц со спином 0, 1/2 и 1 во внешнем электромагнитном поле произвольной конфигурации и интенсивности. Электромагнитное поле предполагается классическим, а фермионные и бозонные поля, взаимодействующие с ним, — вторично квантованными. Такая постановка задачи позволяет в пренебрежении полем излучения рассматривать процессы рождения и поглощения пар частица — античастица, которые происходят с извлечением из внешнего поля (или с передачей ему) энергии и импульса. При этом рассмотрение в рамках вторично квантованной теории позволяет избежать парадоксов, возникающих при одночастичной постановке задачи (см. § 7.2).

Один из методов, позволяющих описывать рождение пар электромагнитным полем, разработан Швингером [89, 90]. Суть этого метода состоит в следующем. Наличие внешнего поля приводит к появлению отличного от нуля вакуумного среднего от 4-тока фермионного или бозонного полей. Назовем это среднее вакуумным током. Можно построить такую добавку $\mathcal{L}^{(1)}$ к плотности лагранжиана рассматриваемой теории, что вакуумный ток получается в результате варьирования классического действия

$$W^{(1)} = \int \mathcal{L}^{(1)}(x) d^4x \quad (5.1)$$

по вектор-потенциалу электромагнитного поля $A_n(x)$. При этом вероятность того, что вакуумное при $t \rightarrow -\infty$ состояние $|0_{-\infty}\rangle$ останется вакуумным во все моменты времени, определяется через мнимую часть $\mathcal{L}^{(1)}$:

$$|\langle 0_{-\infty} | S | 0_{-\infty} \rangle|^2 = \exp[-2 \int d^4x \operatorname{Im} \mathcal{L}^{(1)}(x)]. \quad (5.2)$$

Здесь оператор S -матрицы в представлении взаимодействия

$$S = T \exp[-i e \int d^4x J_n(x) A^n(x)], \quad (5.3)$$

T — символ хронологического упорядочения, $J_n(x)$ — 4-ток свободных частиц.

Наличие мнимой части у $\mathcal{L}^{(1)}$ означает, что вероятность перехода вакуума в вакуум меньше единицы, т. е. имеет место рождение

пар. В работах [89, 90] получены общие формулы, выражающие значение $\text{Im } \mathcal{L}^{(1)}$ через матричные элементы некоторых операторов, сводящихся, в конечном счете, к причинным функциям Грина рассматриваемых полей. Например, в фермионном случае

$$\langle 0_{-\infty} | S | 0_{-\infty} \rangle = \exp \left[\text{Sp} \int d^4 x \langle x | \ln (G^{-1} G_0) | x \rangle \right], \quad (5.4)$$

где состояния $|x\rangle$ нумеруются пространственно-временными координатами и невыписанными здесь спинорными индексами, символ Sp означает след по этим индексам, а причинные функции Грина есть

$$G_0 = 1/(\gamma^n p_n - m + i0), \quad G = 1/(\gamma^n \Pi_n - m + i0) \quad (5.5)$$

($\Pi_n = p_n - eA_n$). Как показано в рамках функционального подхода, вакуумное среднее от S -оператора удовлетворяет системе некоторых функциональных уравнений [91].

Вводя операторы

$$\left. \begin{aligned} T &= e\gamma^n A_n + e\gamma^n A_n G_0 T, \quad \tilde{T} = \gamma^0 T^+ \gamma_0, \\ \rho_{\pm} &= 2\pi (\gamma^n p_n + m) \theta_{\pm}(p_0) \delta(p^2 - m^2) \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

(здесь $\theta_+ = 1$ при $p_0 > 0$, $\theta_+ = 0$ при $p_0 < 0$ и наоборот для θ_-), можно преобразовать (5.2) к виду [92]

$$\langle 0_{-\infty} | S | 0_{-\infty} \rangle^2 = \exp \left[-\text{Sp} \int d^4 x \langle x | \ln (1 - T\rho_+ \tilde{T}\rho_-) | x \rangle \right], \quad (5.7)$$

откуда, сравнивая с (5.2), получаем

$$2 \text{Im } \mathcal{L}^{(1)} = \text{Sp} \langle x | \ln (1 - T\rho_+ \tilde{T}\rho_-) | x \rangle. \quad (5.8)$$

Выражение (5.8), в отличие от (5.4), конечно, поскольку (см. работу [90]) все расходимости $\mathcal{L}^{(1)}$ содержатся в ее вещественной части. Поэтому при изучении рождения пар электромагнитным полем в S -матричной задаче не возникает проблемы устранения расходимостей. В то же время эффекты, связанные с поляризацией вакуума, определяются величиной $\text{Re } \mathcal{L}^{(1)}$, так что для получения конечных результатов надо применять некоторую процедуру регуляризации (поляризация вакуума электромагнитным и гравитационным полями рассмотрена в § 9.1 и 12.3).

Швингеровский метод вычисления вероятностей рождения пар весьма сложен, и наиболее важным нетривиальным случаем, для которого вычисления доведены до конца, является постоянное однородное электромагнитное поле (см. § 7.1 и 7.3). Другой метод вычисления вероятностей рождения пар восходит к Фейнману [93]. Амплитуда относительной вероятности образования электрон-позитронной пары в состоянии (α', α) записывается, согласно фейнмановскому методу, в виде [94]

$$M_{\alpha'\alpha} = -i \int \bar{\varphi}_{\alpha'}^{(-)}(x) \gamma^0 G(x, x') \gamma^0 \varphi_{\alpha}^{(+)}(x') d^3 x d^3 x', \quad t, t' \rightarrow \infty, \quad (5.9)$$

где $G(x, x')$ — причинная функция Грина уравнения Дирака во внешнем поле, $\varphi_{\alpha}^{(\pm)}(x)$ — положительно и отрицательно-частотные при $t \rightarrow +\infty$ решения этого уравнения. Абсолютная вероятность рождения пары получается умножением $|M_{\alpha'\alpha}|^2$ на вероятность того, что пара с квантовыми числами (α', α) не рождается. Среднее число родившихся во всем пространстве фермионных пар можно получить суммированием абсолютных вероятностей рождения пары по всем значениям α и α' .

Как видно из (5.9), в фейнмановском подходе вероятности рождения пар фактически выражаются через решения волнового уравнения во внешнем поле. Однако это выражение не вполне явное, так как функция Грина G сама является в общем случае достаточно сложным объектом, построенным из одночастичных решений.

Развитие теории рождения пар внешними полями показало, что наиболее удобно выражать все представляющие интерес величины непосредственно через асимптотики решений волновых уравнений во внешнем поле. Соответствующие формулы можно получить без использования понятий функции Грина или матрицы рассеяния. Это связано с тем, что гамильтониан квантованных полей во внешнем классическом поле допускает диагонализацию с помощью канонических преобразований Боголюбова операторов рождения и уничтожения [36, 95]. Диагонализация гамильтониана эквивалентна точному решению гейзенберговских уравнений движения и позволяет выразить всевозможные матричные элементы через коэффициенты преобразования Боголюбова.

Кроме соображений удобства метод канонических преобразований обладает рядом принципиальных преимуществ по сравнению с другими методами. Как известно, при наличии нестационарного внешнего поля представления перестановочных соотношений операторов рождения и уничтожения в разные моменты времени могут быть унитарно неэквивалентны между собой (см. § 2.1). При этом обычный аппарат S -матрицы, не существующей как унитарный оператор в гильбертовом пространстве, строго говоря, теряет смысл [96], а роль матрицы рассеяния выполняет оператор преобразования Боголюбова.

Другим важным преимуществом метода является то, что он в равной мере применим к случаям электромагнитного и гравитационного внешних полей. В то же время для гравитационного поля, не выключающегося при $t \rightarrow \pm \infty$, другие методы описания эффекта рождения встречаются с большими трудностями.

В своих известных лекциях по квантовой электродинамике Фейнман [97] проанализировал вопрос о роли связи спина и статистики в процессах рождения и рассеяния частиц внешним полем. Рассмотрение вероятности $P(A, B)$ рассеяния частицы внешним полем из точки A в точку B с учетом возможного рождения произвольного числа пар показывает, что начальную частицу и частицу родившейся пары нельзя считать независимыми. В противном случае полная вероятность рассеяния начальной частицы [т. е. величина $P(A, B)$,

проинтегрированная по B] не может равняться единице в противоречии с тем очевидным обстоятельством, что начальная частица должна перейти куда-либо. По мнению Фейнмана [97], представляет интерес доказательство того, что полная вероятность рассеяния частицы всегда равна единице, если учесть принцип Паули. С помощью метода канонических преобразований доказательство утверждения Фейнмана можно получить в наиболее общем случае (см. § 5.5).

В применении к электродинамике и квантовой теории поля с нестатическим источником операторы рождения — уничтожения, диагонализующие гамилтониан в произвольный момент времени, были введены в работах [52, 98] (см. также [99, 100]). Ниже квантовые эффекты во внешнем электромагнитном поле описываются с помощью метода преобразований Боголюбова, причем там, где это необходимо, устанавливается соответствие с результатами других подходов.

§ 5.2. Определение плотности рожденных частиц методом преобразований Боголюбова

Предположим, что при $t \rightarrow \pm \infty$ электромагнитное поле становится статическим, причем порождающая частицы часть поля отключается. Это означает, что при $t \rightarrow \pm \infty$ энергия связи мала и существует энергетическая щель шириной порядка $2m$ между состояниями верхнего и нижнего континуумов. Таким образом, при $t \rightarrow \pm \infty$ возможна корректная интерпретация теории в терминах частиц и античастиц в соответствии со сказанным в гл. 3. В промежуточные же моменты времени в качестве 4-вектора потенциала $A_n(x)$ может фигурировать произвольная гладкая функция, соответствующая электромагнитному полю любой интенсивности и частоты.

Обозначим через $\psi_{\alpha}^{(\pm)}(x)$ полную ортонормированную систему решений уравнений (1.3), (1.9) или (1.39), положительно- и отрицательно-частотных при $t \rightarrow -\infty$ (α — набор квантовых чисел, характеризующих решение; спинорные и векторные индексы опущены). Оператор поля запишется в виде

$$\psi(x) = \sum_{\alpha} [\psi_{\alpha}^{(-)}(x) a_{\alpha}^{(-)} + \psi_{\alpha}^{(+)}(x) a_{\alpha}^{(+)}]. \quad (5.10)$$

Здесь и далее подразумевается суммирование по дискретным и интегрирование по непрерывным квантовым числам, $a_{\alpha}^{(-)}$, $a_{\alpha}^{*(-)}$ — операторы уничтожения частиц и античастиц в состоянии α , $a_{\alpha}^{(+)}$, $a_{\alpha}^{(+)}$ — операторы рождения античастиц и частиц. Ради краткости состояния и операторы в фермионном и бозонном случаях обозначены здесь и ниже одинаково.

Соответственно в фермионном и бозонном случаях имеют место перестановочные соотношения

$$\left[\hat{a}_{\alpha}^{(-)}, a_{\beta}^{(+)} \right]_{\pm} = \left[a_{\alpha}^{(-)}, \hat{a}_{\beta}^{(+)} \right]_{\pm} = \delta_{\alpha\beta} \quad (5.11)$$

(остальные антикоммутируют и коммутируют равны нулю).

Фоковское вакуумное состояние при $t \rightarrow -\infty$ определяется согласно

$$a_{\alpha}^{(-)} |0_{-\infty}\rangle = \hat{a}_{\alpha}^{(-)} |0_{-\infty}\rangle = 0, \quad \langle 0_{-\infty} | 0_{-\infty}\rangle = 1. \quad (5.12)$$

Подставляя (5.10) в выражения для гамильтонианов спинорного, скалярного либо векторного полей во внешнем электромагнитном поле, получаем

$$H^{(s)}(t) = \int d^3x T_{00}^{(s)}(x) = \sum_{\alpha, \gamma} \left[A_{\alpha\gamma}(t) \hat{a}_{\alpha}^{(+)} a_{\gamma}^{(-)} + B_{\alpha\gamma}(t) \hat{a}_{\alpha}^{(+)} a_{\gamma}^{(+)} + B_{\alpha\gamma}^{+}(t) \hat{a}_{\alpha}^{(-)} a_{\gamma}^{(-)} + C_{\alpha\gamma}(t) \hat{a}_{\alpha}^{(-)} a_{\gamma}^{(+)} \right], \quad (5.13)$$

где $s = 0, 1/2, 1$ — спин поля. В фермионном случае [$s = 1/2$, см. формулу (1.40)]:

$$A_{\alpha\gamma}(t) = i \int d^3x \psi_{\alpha}^{(-)+} \partial_t \psi_{\gamma}^{(-)}; \quad B_{\alpha\gamma}(t) = i \int d^3x \psi_{\alpha}^{(-)+} \partial_t \psi_{\gamma}^{(+)}; \quad (5.14)$$

$$C_{\alpha\gamma}(t) = i \int d^3x \psi_{\alpha}^{(+)+} \partial_t \psi_{\gamma}^{+}; \quad A^{+} = A; \quad C^{+} = C.$$

В бозонном случае вместо (5.14) имеем для скалярных частиц [$s = 0$, формула (1.4)]:

$$A_{\alpha\gamma}(t) = \int d^3x \left[\sum_{n=0}^3 \partial_n \psi_{\alpha}^{(-)*} \partial_n \psi_{\gamma}^{(-)} + ieA^k (\psi_{\alpha}^{(-)*} \partial_k \psi_{\gamma}^{(-)} - (\partial_k \psi_{\alpha}^{(-)*}) \psi_{\gamma}^{(-)}) + (m^2 - eA_k A^k) \psi_{\alpha}^{(-)*} \psi_{\gamma}^{(-)} \right], \quad (5.15)$$

выражение $B_{\alpha\gamma}(t)$ получается из (5.15) изменением знака частотности на противоположный во вторых сомножителях билинейной по ψ формы, а выражение $C_{\alpha\gamma}(t)$ — изменением знаков частотности у обоих сомножителей.

Для векторных частиц $s = 1$ и с использованием (1.12) имеем

$$A_{\alpha\gamma}(t) = \int d^3x \left[\frac{1}{2} f_{n\alpha}^{(-)*}(\alpha) f^{(-)n\gamma}(\gamma) - 2f_{0\alpha}^{(-)*}(\alpha) f^{(-)0\gamma}(\gamma) + m^2 (2\psi_{0\alpha}^{(-)*} \psi_{\gamma}^{(-)0} - \psi_{n\alpha}^{(-)*} \psi_{\gamma}^{(-)n}) \right], \quad (5.16)$$

где введено обозначение

$$f_{m\alpha}^{(\pm)}(\alpha) = D_m \psi_{n\alpha}^{(\pm)} - D_n \psi_{m\alpha}^{(\pm)}$$

[выражения для $B_{\alpha\gamma}(t)$ и $C_{\alpha\gamma}(t)$ получаются из (5.16) по тому же рецепту, что и в случае скалярных частиц].

Как видно из (5.14) — (5.16), при $t \rightarrow -\infty$ величины $B_{\alpha\gamma}(t) \rightarrow 0$ и гамильтониан становится диагональным оператором, т. е. не содержит слагаемых вида $\hat{a}^{(+)} a^{(+)}$ и $\hat{a}^{(-)} a^{(-)}$. При этом операторы $a^{(\pm)}$, $\hat{a}^{(\pm)}$ выбираются в фоковском представлении (см. § 2.2). Если же $t > -\infty$, то в случае нестационарного внешнего поля $B_{\alpha\gamma}(t) \neq 0$ и гамильтониан недиагонален.

Рассмотрим вопрос о возможности приведения гамильтониана (5.13) к диагональному виду в любой момент времени. Для этого перейдем от операторов $a^{(\pm)}$, $\hat{a}^{(\pm)}$ к зависящим от времени операторам $b^{(\pm)}(t)$, $\hat{b}^{(\pm)}(t)$, связанным с ними каноническим преобразованием Боголюбова, сохраняющим соотношения антикоммутиации (коммутиации):

$$\begin{aligned} a_{\alpha}^{(-)} &= \sum_{\gamma} [\Phi_{\alpha\gamma}(t) b_{\gamma}^{(-)}(t) + \Psi_{\alpha\gamma}(t) b_{\gamma}^{(+)}(t)], \\ \hat{a}_{\alpha}^{(-)} &= \sum_{\gamma} [\Phi_{\alpha\gamma}(t) \hat{b}_{\gamma}^{(-)}(t) \mp \Psi_{\alpha\gamma}(t) \hat{b}_{\gamma}^{(+)}(t)]. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Верхний и нижний знаки здесь и далее соответствуют фермионному и бозонному случаям. Коэффициенты преобразования ради краткости обозначены в обоих случаях одинаково. Преобразования для операторов $a_{\alpha}^{(+)}$, $\hat{a}_{\alpha}^{(+)}$ получаются из (5.17) с помощью эрмитова сопряжения.

Как было отмечено в § 2.2, преобразование (5.17) является собственным тогда и только тогда, когда Ψ является оператором Гильберта — Шмидта. Если же это условие не выполняется (как показано в гл. 6, такая ситуация имеет место в случае однородного электрического поля), то соответствующее представление коммутационных соотношений унитарно неэквивалентно фоковскому [34].

Условие сохранения правил коммутации, которому должно удовлетворять каноническое преобразование, дает

$$[\hat{b}_{\alpha}^{(-)}(t), b_{\beta}^{(+)}(t)]_{\pm} = [b_{\alpha}^{(-)}(t), \hat{b}_{\beta}^{(+)}(t)]_{\pm} = \delta_{\alpha\beta}, \quad (5.18)$$

причем остальные антикоммутаторы (коммутаторы) равны нулю. Оно приводит к условиям на коэффициенты преобразования (5.17), которые можно записать в матричной форме:

$$\Phi(t) \Phi^{+}(t) \pm \Psi(t) \Psi^{+}(t) = I, \quad \Phi(t) \Psi^{T}(t) = \Psi(t) \Phi^{T}(t) \quad (5.19)$$

(здесь I — единичная матрица, индекс T означает транспонирование).

Из условия обратимости преобразования (5.17) следует равенство для диагональных матричных элементов

$$[\Phi^+ (t) \Phi (t) \pm \Psi^T (t) \Psi^* (t)]_{\alpha\alpha} = 1, \quad (5.20)$$

а также соотношения

$$\begin{aligned} [\Phi^+ (t) \Phi (t) \pm \Psi^T (t) \Psi^* (t)]_{\alpha\beta} &= 0, \quad \alpha \neq \beta, \\ \Phi^+ (t) \Psi (t) &= \Psi^T (t) \Phi^* (t), \end{aligned} \quad (5.21)$$

где звездочка над матрицей означает комплексное сопряжение. При этом обратные (5.17) преобразования имеют вид:

$$\begin{aligned} b_{\alpha}^{(-)} (t) &= \sum_{\gamma} [\Phi_{\alpha\gamma}^+ (t) a_{\gamma}^{(-)} - \Psi_{\alpha\gamma}^T (t) a_{\gamma}^{(+)}], \\ b_{\alpha}^{(-)} (t) &= \sum_{\gamma} [\Phi_{\alpha\gamma}^+ (t) a_{\gamma}^{(-)} \pm \Psi_{\alpha\gamma}^T (t) a_{\gamma}^{(+)}]. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Требование диагональности гамильтониана в терминах зависящих от времени операторов означает, что он должен иметь вид

$$H^{(s)} (t) = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} (t) [b_{\alpha}^{(+)} (t) b_{\alpha}^{(-)} (t) \mp b_{\alpha}^{(-)} (t) b_{\alpha}^{(+)} (t)], \quad (5.23)$$

где $\omega_{\alpha} (t)$ — энергия в состоянии α . Диагонализующие гамильтониан операторы являются операторами физических частиц в момент t [52].

Выясним, каким условиям должны удовлетворять коэффициенты преобразования Боголюбова Φ , Ψ , чтобы выполнялось (5.23). С использованием (5.22) легко получаем:

$$\begin{aligned} [b_{\beta}^{(-)} (t), H^{(s)} (t)]_- &= \omega_{\beta} (t) b_{\beta}^{(-)} (t) = \\ &= \omega_{\beta} (t) \sum_{\delta} [\Phi_{\beta\delta}^+ (t) a_{\delta}^{(-)} - \Psi_{\beta\delta}^T (t) a_{\delta}^{(+)}]; \\ [b_{\beta}^{(-)} (t), H^{(s)} (t)]_- &= \omega_{\beta} (t) b_{\beta}^{(-)} (t) = \\ &= \omega_{\beta} (t) \sum_{\alpha} [\Phi_{\beta\alpha}^+ (t) a_{\alpha}^{(-)} \pm \Psi_{\beta\alpha}^T (t) a_{\alpha}^{(+)}]. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Подставляя в левые части (5.24) выражение (5.13) для $H^{(s)} (t)$ и применяя легко проверяемые соотношения

$$\begin{aligned} [b_{\beta}^{(-)} (t), a_{\delta}^{(+)}]_{\pm} &= [b_{\beta}^{(-)} (t), a_{\delta}^{(+)}]_{\pm} = \Phi_{\beta\delta}^+ (t), \\ [b_{\beta}^{(-)} (t), a_{\delta}^{(-)}]_{\pm} &= \mp \Psi_{\beta\delta}^T (t), \quad [b_{\beta}^{(-)} (t), a_{\delta}^{(-)}]_{\pm} = \Psi_{\beta\delta}^T (t), \end{aligned} \quad (5.25)$$

имеем после преобразований

$$\begin{aligned}
 [b_{\beta}^{-}], H^{(s)}]_{-} &= \sum_{\alpha, \delta} [(A_{\alpha\delta} \Phi_{\beta\alpha}^{+} \mp B_{\alpha\delta}^{+} \Psi_{\beta\alpha}^{T}) a_{\delta}^{-} + \\
 &+ (B_{\alpha\delta} \Phi_{\beta\alpha}^{+} \mp C_{\alpha\delta} \Psi_{\beta\alpha}^{T}) a_{\delta}^{(+)}], \\
 [b_{\beta}^{-}], H^{(s)}]_{-} &= \mp \sum_{\alpha, \delta} [(C_{\alpha\delta} \Phi_{\beta\delta}^{+} + B_{\alpha\delta}^{+} \Psi_{\beta\delta}^{T}) a_{\alpha}^{-} + \\
 &+ (B_{\alpha\delta} \Phi_{\beta\delta}^{+} + A_{\alpha\delta} \Psi_{\beta\delta}^{T}) a_{\alpha}^{(+)}].
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

Сравнивая правые части (5.24) и (5.26), получаем условия, обеспечивающие диагональность гамильтониана:

$$\Phi^{+}(t) A(t) \mp \Psi^{T}(t) B^{+}(t) = \omega(t) \Phi^{+}(t);$$

$$\Phi^{+}(t) B(t) \mp \Psi^{T}(t) C(t) = -\omega(t) \Psi^{T}(t); \tag{5.27}$$

$$C(t) \Phi^{*}(t) + B^{+}(t) \Psi(t) = \mp \Phi^{*}(t) \omega(t);$$

$$B(t) \Phi^{*}(t) + A(t) \Psi(t) = -\Psi(t) \omega(t), \tag{5.28}$$

где ω — матрица с элементами $\omega_{\alpha\beta} = \omega_{\beta}\delta_{\alpha\beta}$.

Таким образом, коэффициенты преобразования Боголюбова, диагонализующего $H^{(s)}(t)$, определяются как решения системы уравнений (5.19) — (5.21), (5.27), (5.28).

Рассмотрим вопрос о независимости уравнений этой системы. Легко показать, что если выполняются равенства (5.19), (5.27) и (5.28), то

$$A(t) = \mp C^{T}(t), \quad B(t) = B^{T}(t). \tag{5.29}$$

Таким образом, условия (5.29) являются необходимыми для возможности диагонализации гамильтониана (5.13) в любой момент времени [отметим, что при выполнении (5.29) соотношения (5.28) эквивалентны (5.27)]. Аналогично соответствующим рассуждениям [95] можно показать, что если гамильтониан (5.13) диагонализуется каноническим преобразованием [т. е. условия (5.29) выполнены], то из (5.27) и (5.20) вытекают уравнения (5.19) и (5.21). Это означает, что коэффициенты Φ , Ψ фактически определяются как решения системы уравнений (5.20) и (5.27).

При $t \rightarrow +\infty$ порождающая частицы часть внешнего поля отключается и можно ввести полный набор положительного- и отрицательно-частотных решений волнового уравнения $\varphi_{\alpha}^{(\pm)}(x)$. Очевидно, что при $t \rightarrow +\infty$ условие (5.29) выполняется, а решениями системы уравнений (5.20) и (5.27) будут коэффициенты разложения

асимптотик полной системы решений $\psi_\alpha^{(\pm)}$ по полной системе решений $\varphi_\alpha^{(\pm)}$:

$$\begin{aligned}\psi_\alpha^{(\pm)} &= \sum_\beta [\Phi_{\alpha\beta}(\infty) \varphi_\beta^{(+)} - \Psi_{\alpha\beta}(\infty) \varphi_\beta^{(-)}], \\ \psi_\alpha^{(-)} &= \sum_\beta [\Phi_{\alpha\beta}^*(\infty) \varphi_\beta^{(-)} \pm \Psi_{\alpha\beta}^*(\infty) \varphi_\beta^{(+)}].\end{aligned}\quad (5.30)$$

При этом равенства (5.19) — (5.21), в которых совершен предельный переход $t \rightarrow +\infty$, являются следствиями ортонормированности систем функций $\psi_\alpha^{(\pm)}$, $\varphi_\alpha^{(\pm)}$.

Равенства (5.30) позволяют выразить коэффициенты преобразования Боголюбова при $t \rightarrow +\infty$ через асимптотики при $t \rightarrow +\infty$ решений классических волновых уравнений во внешнем поле. В некоторых частных случаях (например, для рассмотренного в гл. 6 пространственно-однородного поля) условие (5.29) соблюдается для любого t и удается явно выразить коэффициенты преобразования (5.17) в момент t через значения решений волновых уравнений в этот момент.

Условие (5.29) выполнено при всех t и в том случае, когда в любой момент возможно однозначное разделение решений волнового уравнения во внешнем поле на положительно- и отрицательно-частотные [52] (т. е. если внешнее поле таково, что в любой момент имеется ненулевая щель между собственными значениями состояний с положительной и отрицательной энергией). В этом случае величины $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ снова определяются равенствами (5.30), в которых под $\varphi_\beta^{(\pm)}$ следует понимать решения, положительно- и отрицательно-частотные в момент t .

В случае электромагнитных внешних полей нет необходимости проводить диагонализацию гамильтониана в любой момент времени, так как всегда возможна S -матричная постановка задачи. Поэтому значения всех представляющих интерес физических величин выражаются через матрицы $\Phi_{\alpha\beta}(\infty)$, $\Psi_{\alpha\beta}(\infty)$. Если же S -матричная постановка задачи невозможна (как, например, для гравитационных полей космологической природы), то необходимо определять коэффициенты преобразования Боголюбова в любой момент времени. Ниже в настоящей главе не вводится никаких ограничений на величину внешнего поля в промежуточные моменты, а диагонализация гамильтониана осуществляется при $t \rightarrow +\infty$. Для сокращения записи под Φ , Ψ с опущенным аргументом понимаются далее предельные значения этих величин при $t \rightarrow +\infty$.

Отметим, что определение Φ , Ψ согласно (5.30) обеспечивает диагональность не только оператора энергии $H^{(s)}$, но и операторов других наблюдаемых, имеющих определенные значения в состоянии α (например, операторов трехмерного импульса и проекций спина).

С помощью изложенного формализма легко получить выражения для плотности числа частиц и античастиц в состоянии α , рож-

денных из вакуума полем $A_n(x)$ за все время действия поля и во всем рассматриваемом объеме. Для этого достаточно вычислить с использованием (5.22) средние значения операторов числа физических частиц и античастиц при $t \rightarrow \infty$ по состоянию, которое было вакуумным при $t \rightarrow -\infty$ [101, 102]:

$$N_\alpha = \langle 0_{-\infty} | \hat{b}_\alpha^{(+)} \hat{b}_\alpha^{(-)} | 0_{-\infty} \rangle = \langle 0_{-\infty} | \hat{b}_\alpha^{(+)} \hat{b}_\alpha^{(-)} | 0_{-\infty} \rangle = \\ = \sum_\gamma \Psi_{\alpha\gamma}^+ \Psi_{\gamma\alpha} \equiv (\Psi^+ \Psi)_{\alpha\alpha}. \quad (5.31)$$

Для случая, когда можно ввести набор сохраняющихся квантовых чисел, этот результат получен в работе [103] фейнмановским методом.

Суммируя по α , получаем полное число частиц, рожденных внешним полем:

$$N = \sum_\alpha N_\alpha = \sum_\alpha (\Psi^+ \Psi)_{\alpha\alpha}. \quad (5.32)$$

Таким образом, величины N_α и N выражаются через асимптотики решений классических уравнений поля. В § 5.4 соотношение (5.31) обобщено на случай, когда при $t \rightarrow -\infty$ имеется не вакуум, а произвольное состояние с n частицами и m античастицами.

§ 5.3. Связь между in и out-вакуумами

Как было показано в предыдущем параграфе, гамильтониан квантованного поля (5.13) при $t > -\infty$, вообще говоря, недиагонален по операторам рождения—уничтожения $a^{(\pm)}$. Наличие в (5.13) члена вида $\hat{a}^{(+)} a^{(+)}$ приводит к тому, что $H^{(s)}(t)$ (даже взятый в нормальной форме) не уничтожает вакуум $|0_{-\infty}\rangle$. Это означает, что при $t > -\infty$ состояние $|0_{-\infty}\rangle$ перестает быть вакуумным и содержит некоторое число пар физических частиц. Физическим же вакуумом является зависящее от времени состояние $|0_t\rangle$, уничтожаемое операторами $\hat{b}^{(-)}$, $\hat{b}^{(-)}$ [52]. Зависимость вакуумного состояния от времени называется *нестабильностью вакуума* (см. гл. 2). В теориях с нестабильным вакуумом при использовании гейзенберговского представления необходимо рассматривать два вакуумных состояния: одно при $t \rightarrow -\infty$, определенное равенством (5.12), а другое при $t \rightarrow +\infty$, определяемое следующим образом:

$$\hat{b}_\alpha^{(-)} |0_{+\infty}\rangle = \hat{b}_\alpha^{(-)} |0_{+\infty}\rangle = 0, \quad \langle 0_{+\infty} | 0_{+\infty} \rangle = 1, \quad (5.33)$$

где операторы $\hat{b}^{(\pm)}$, в терминах которых диагонален гамильтониан при $t \rightarrow +\infty$, введены в (5.17) (с точностью до несущественного фазового множителя они совпадают с определенными на $+\infty$ гейзенберговскими операторами).

При вычислении матричных элементов, описывающих рождение и рассеяние частиц внешним полем, полезно иметь явную формулу, связывающую вакуумы $|0_{-\infty}\rangle$ и $|0_{+\infty}\rangle$. Ее можно записать в виде [34, 101, 104]

$$|0_{-\infty}\rangle = \frac{1}{N_{\pm}} [\exp(\sum_{\mu, \nu} D_{\mu\nu} \hat{b}_{\mu}^{*(+)} \hat{b}_{\nu}^{(+)})] |0_{+\infty}\rangle, \quad (5.34)$$

где N_{\pm} — вычисленный ниже нормировочный множитель, а матрица D определяется условиями

$$\Phi D + \Psi = 0, \quad D\Phi^T + \Psi^T = 0, \quad (5.35)$$

которые эквивалентны между собой в силу (5.19). Как следует из (5.19), $D_{\mu\nu} = D_{\nu\mu}$.

Докажем справедливость (5.34). Для этого предположим, что (5.34) есть определение состояния $|0_{-\infty}\rangle$, и проверим, что такое состояние обладает свойством (5.12). Поскольку операторы $\hat{a}^{(-)}$, $\hat{a}^{*(-)}$ выражаются через $\hat{b}^{(\pm)}$, $\hat{b}^{*(\pm)}$ согласно (5.17), то для такой проверки необходимо научиться переставлять операторы $\hat{b}^{(-)}$, $\hat{b}^{*(-)}$ с фигурирующим в (5.34) экспоненциальным оператором. Такую перестановку можно осуществить с помощью следующих простых рассуждений.

С учетом коммутационных соотношений (5.18) для операторов $\hat{b}^{(\pm)}$, $\hat{b}^{*(\pm)}$ получаем

$$\begin{aligned} [\hat{b}_{\alpha}^{(-)}, \sum_{\mu, \nu} D_{\mu\nu} \hat{b}_{\mu}^{*(+)} \hat{b}_{\nu}^{(+)}]_{-} &= \sum_{\nu} D_{\alpha\nu} \hat{b}_{\nu}^{(+)}, \\ [\hat{b}_{\alpha}^{*(-)}, \sum_{\mu, \nu} D_{\mu\nu} \hat{b}_{\mu}^{*(+)} \hat{b}_{\nu}^{(+)}]_{-} &= \mp \sum_{\mu} D_{\mu\alpha} \hat{b}_{\mu}^{*(+)}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Используя (5.36) в качестве базы для индукции, имеем

$$\begin{aligned} [\hat{b}_{\alpha}^{(-)}, (\sum_{\mu, \nu} D_{\mu\nu} \hat{b}_{\mu}^{*(+)} \hat{b}_{\nu}^{(+)})^k]_{-} &= k \sum_{\delta} D_{\alpha\delta} \hat{b}_{\delta}^{(+)} (\sum_{\mu, \nu} D_{\mu\nu} \hat{b}_{\mu}^{*(+)} \hat{b}_{\nu}^{(+)})^{k-1}, \\ [\hat{b}_{\alpha}^{*(-)}, (\sum_{\mu, \nu} D_{\mu\nu} \hat{b}_{\mu}^{*(+)} \hat{b}_{\nu}^{(+)})^k]_{-} &= \mp k \sum_{\delta} D_{\delta\alpha} \hat{b}_{\delta}^{*(+)} (\sum_{\mu, \nu} D_{\mu\nu} \hat{b}_{\mu}^{*(+)} \hat{b}_{\nu}^{(+)})^{k-1}, \end{aligned} \quad (5.37)$$

где k — целое неотрицательное число. Отсюда легко приходим к результату:

$$\hat{b}_{\alpha}^{(-)} \exp(\sum_{\mu, \nu} D_{\mu\nu} \hat{b}_{\mu}^{*(+)} \hat{b}_{\nu}^{(+)}) = \exp(\sum_{\mu, \nu} D_{\mu\nu} \hat{b}_{\mu}^{*(+)} \hat{b}_{\nu}^{(+)}) (\hat{b}_{\alpha}^{(-)} + \sum_{\nu} D_{\alpha\nu} \hat{b}_{\nu}^{(+)}) \quad (5.38)$$

$$\hat{b}_{\alpha}^{*(-)} \exp(\sum_{\mu, \nu} D_{\mu\nu} \hat{b}_{\mu}^{*(+)} \hat{b}_{\nu}^{(+)}) = \exp(\sum_{\mu, \nu} D_{\mu\nu} \hat{b}_{\mu}^{*(+)} \hat{b}_{\nu}^{(+)}) (\hat{b}_{\alpha}^{*(-)} \mp \sum_{\nu} D_{\nu\alpha} \hat{b}_{\nu}^{*(+)}).$$

Применяя теперь операторы $a^{(-)}$, $\dot{a}^{(-)}$ к обеим частям (5.34) и используя (5.17) и (5.38), убеждаемся с учетом (5.35) в справедливости (5.12).

Перейдем к определению нормировочного множителя N_{\pm} в (5.34), квадрат которого, как оказывается, имеет смысл фактора, переводящего абсолютные вероятности в относительные. Учитывая соотношения (5.34) и (5.38), имеем

$$\begin{aligned} b_v^{(-)} |0_{-\infty}\rangle &= \sum_{\mu} D_{v\mu} b_{\mu}^{(+)} |0_{-\infty}\rangle, \\ \dot{b}_v^{(-)} |0_{-\infty}\rangle &= \mp \sum_{\mu} D_{v\mu} \dot{b}_{\mu}^{(+)} |0_{-\infty}\rangle. \end{aligned} \quad (5.39)$$

С использованием (5.34) и (5.39), а также очевидной формулы

$$\prod_{k=1}^n (A_k B_k) = (\mp 1)^{n(n-1)/2} \prod_{i=1}^n A_i \prod_{k=1}^n B_k, \quad (5.40)$$

которая справедлива для операторов, удовлетворяющих соотношениям $[A_i, B_k]_{\pm} = 0$, приходим к следующему выражению для квадрата нормы состояния:

$$\begin{aligned} \langle 0_{-\infty} | 0_{-\infty} \rangle &= \frac{1}{N_{\pm}} \langle 0_{+\infty} | \exp\left(\sum_{\mu, \nu} D_{\mu\nu}^+ \dot{b}_{\mu}^{(-)} b_{\nu}^{(-)}\right) | 0_{-\infty} \rangle = \\ &= \frac{1}{N_{\pm}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle 0_{+\infty} | \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n} \prod_{k=1}^n \left(\sum_{\mu} D_{\mu\nu_k}^+ \dot{b}_{\mu}^{(-)} \right) b_{\nu_k}^{(-)} | 0_{-\infty} \rangle = \\ &= \frac{1}{N_{\pm}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mp 1)^{n(n-1)/2}}{n!} \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n} \langle 0_{+\infty} | \prod_{k=1}^n \left(\sum_{\mu} D_{\mu\nu_k}^+ \dot{b}_{\mu}^{(-)} \right) \times \\ &\quad \times \prod_{l=1}^n \left(\sum_{\nu} D_{\nu l} b_{\nu}^{(+)} \right) | 0_{-\infty} \rangle \end{aligned} \quad (5.41)$$

(здесь и ниже предполагается, что $\prod_{k=1}^0 A_k = 1$).

Для вычисления матричного элемента в последней строке (5.41) надо поменять порядок фигурирующих там произведений по k и l . Имея в виду дальнейшие приложения, решим несколько более общую задачу, когда указанные произведения могут содержать разное число сомножителей.

Итак, пусть имеются наборы операторов A_{α} и B_{β} , удовлетворяющие соотношениям

$$[A_{\alpha}, B_{\beta}]_{\pm} = R_{\alpha\beta}, \quad [A_{\alpha}, A_{\beta}]_{\pm} = [B_{\alpha}, B_{\beta}]_{\pm} = 0, \quad (5.42)$$

где $R_{\alpha\beta}$ — c -числа. По индукции легко доказать формулы

$$A_\alpha \prod_{l=1}^n B_{\beta_l} = (\mp 1)^n \left(\prod_{l=1}^n B_{\beta_l} \right) A_\alpha \mp \sum_{j=1}^n (\mp 1)^j R_{\alpha\beta_j} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^n B_{\beta_l},$$

$$\left(\prod_{k=1}^m A_{\alpha_k} \right) B_\beta = (\mp 1)^m \left\{ B_\beta \prod_{k=1}^m A_{\alpha_k} + \right. \quad (5.43)$$

$$\left. + \sum_{h=1}^m (\mp 1)^h R_{\alpha_h\beta} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^m A_{\alpha_k} \right\}.$$

Используя формулы типа (5.53) в качестве базы для новой индукции, после преобразований получаем

$$\prod_{k=1}^m A_{\alpha_k} \prod_{l=1}^n B_{\beta_l} = (\mp 1)^{mn} \sum_{t=0}^{\min(m, n)} (\mp 1)^{nt + t(t-1)/2} \times$$

$$\times \sum_{j_1, \dots, j_t=1}^n \sum_{1 \leq h_1 < \dots < h_t \leq m} (\mp 1)^{(j_1+h_1) + \dots + (j_t+h_t) + \Theta(j_1, \dots, j_t)} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^t R_{\alpha_{h_i} \beta_{j_i}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j_1, \dots, j_t}}^m B_{\beta_l} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq h_1, \dots, h_t}}^m A_{\alpha_k}. \quad (5.44)$$

Здесь и ниже мы предполагаем, что при $n = 0$ суммирование вида

$\sum_{j_1, \dots, j_n=1}^m$, $\sum'_{j_1, \dots, j_n=1}^m$ не проводится;

штрих у знака суммы означает, что $j_i \neq j_k$. Символом $(-1)^{\Theta(j_1, \dots, j_n)}$ обозначена четность перестановки, упорядочивающей последовательность натуральных чисел j_1, \dots, j_n по величине, а

знак $\sum_{1 \leq h_1 < \dots < h_t \leq m}$ подразумевает суммирование по всем наборам из t натуральных чисел h_k , удовлетворяющих указанным неравенствам.

Легко видеть, что в формуле (5.44) можно суммировать по упорядоченным по величине значениям j_k : $1 \leq j_1 < \dots < j_t \leq n$. При этом переменные h_k не упорядочиваются, суммирование по ним ведется в пределах от 1 до m при условии $h_i \neq h_k$, а символ $\Theta(j_1, \dots, j_t)$ заменяется на $\Theta(h_1, \dots, h_t)$.

Если под знаком произведений в левой части (5.44) отсутствуют некоторые сомножители, то (5.44) принимает вид

$$\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq g_1, \dots, g_r \\ g_1 < \dots < g_r}}^m A_{\alpha_k} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq f_1, \dots, f_s \\ f_1 < \dots < f_s}}^n B_{\beta_l} = (\mp 1)^{(m-r)(n-s)} \times \\ \times \sum_{t=0}^{\min(m-r, n-t)} (\mp 1)^{(n-s)t+t(t-1)/2} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_t=1 \\ j_k \neq f_l}}^n \sum_{\substack{1 \leq h_1 < \dots < h_t \leq m \\ h_k \neq g_l}} \times \\ \times (\mp 1)^{\xi_1(t)} \prod_{i=1}^t R_{\alpha_{h_i} \beta_{j_i}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq f_1, \dots, f_s \\ l \neq j_1, \dots, j_t}}^n B_{\beta_l} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq g_1, \dots, g_r \\ k \neq h_1, \dots, h_t}}^m A_{\alpha_k}, \quad (5.45)$$

где $\xi_1(t) = (j_1 + h_1) + \dots + (j_t + h_t) + \Theta(j_1, \dots, j_t; f_1, \dots, f_s) + \Theta(h_1, \dots, h_t; g_1, \dots, g_r)$.

Вернемся теперь к вычислению нормировочного множителя N_{\pm} в формуле (5.34). Используя формулу (5.44), в которой следует положить $m = n$, причем отличен от нуля вклад только слагаемого с $t = n$, удастся поменять местами произведения в матричном элементе (5.41). В результате с учетом очевидного из (5.34) соотношения

$$\langle 0_{+\infty} | 0_{-\infty} \rangle = 1/N_{\pm} \quad (5.46)$$

получаем

$$\langle 0_{-\infty} | 0_{-\infty} \rangle = \frac{1}{N_{\pm}^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{v_1, \dots, v_n} \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^n (\mp 1)^{\Theta(j_1, \dots, j_n)} \times \\ \times \prod_{k=1}^n (DD^+)_{v_k v_{j_k}}. \quad (5.47)$$

Суммирование по j_1, \dots, j_n в (5.47) сводится к суммированию по всем $n!$ перестановкам из первых n чисел натуральной последовательности. Как известно, любую перестановку можно выразить через произведение циклов. Фиксируя j_1, \dots, j_n и суммируя по тем v_i , индексы i которых входят в данный цикл, получаем $\text{Sp} [(DD^+)^k]$, где k — длина цикла. Следовательно, выражение (5.47) (которое с учетом нормированности на единицу состояния $|0_{-\infty}\rangle$ определяет значение N_{\pm}^2) зависит только от величин вида $\text{Sp} [(DD^+)^k]$ с натуральным k . Поскольку матрица DD^+ является эрмитовой матрицей с неотрицательными собственными значениями, то отсюда вытекает, что величина N_{\pm}^2 определяется фактически не самой матрицей D , а диагональной матрицей с матричными элементами λ_v , где через λ_v обозначены собственные значения матрицы DD^+ .

Рассмотрим опять исходную формулу (5.34), из которой надо определить значение N_{\pm} . Умножая (5.34) слева на $\langle 0_{-\infty}|$ и производя комплексное сопряжение, приходим с использованием полученного результата к равенству

$$\langle 0_{-\infty}|0_{-\infty}\rangle = 1 = (1/N_{\pm}) \langle 0_{+\infty} | \exp\left(\sum_{\nu} \lambda_{\nu} \dot{b}_{\nu}^{*(-)} b_{\nu}^{(-)}\right) | \tilde{0}_{-\infty}\rangle, \quad (5.48)$$

где состояние $|\tilde{0}_{-\infty}\rangle$ определяется формулой (5.34), в которой матрица $D_{\mu\nu}$ заменена на $\lambda_{\mu}\delta_{\mu\nu}$. С использованием формул, аналогичных (5.39)

$$b_{\nu}^{(-)} |\tilde{0}_{-\infty}\rangle = \lambda_{\nu} b_{\nu}^{(+)} |\tilde{0}_{-\infty}\rangle, \quad \dot{b}_{\nu}^{(-)} |\tilde{0}_{-\infty}\rangle = \mp \lambda_{\nu} \dot{b}_{\nu}^{(+)} |\tilde{0}_{-\infty}\rangle, \quad (5.49)$$

имеем из (5.48)

$$1 = \frac{1}{N_{\pm}} \prod_{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mp 1)^{n(n-1)/2}}{n!} \lambda_{\nu}^{2n} \langle 0_{+\infty} | (\dot{b}_{\nu}^{(-)})^n (b_{\nu}^{(+)})^n | \tilde{0}_{-\infty}\rangle. \quad (5.50)$$

Вычисляя матричный элемент в (5.50) с учетом вытекающего из (5.34) соотношения

$$\langle 0_{+\infty} | \tilde{0}_{-\infty}\rangle = 1/N_{\pm}, \quad (5.51)$$

после преобразований получаем в фермионном случае

$$N_{\pm}^2 = \prod_{\mu} (1 + \lambda_{\mu}^2). \quad (5.52)$$

Аналогично в бозонном случае приходим к результату

$$N_{\pm}^2 = \prod_{\mu} \frac{1}{1 - \lambda_{\mu}^2}. \quad (5.53)$$

Как показано в работе [34], величины N_{\pm}^2 конечны в случае собственного преобразования (5.17).

Из соотношения (5.46) получаем, что в рамках фейнмановской формулировки теории рождения пар величины N_{\pm}^{-1} из (5.52) и (5.53) совпадают с вакуумным средним от матрицы рассеяния $\langle 0_{-\infty} | S | 0_{-\infty}\rangle$. Это среднее появляется в качестве сомножителя при вычислении всевозможных матричных элементов фейнмановским методом [103]. Как уже отмечалось выше, оно дает амплитуду вероятности перехода вакуума в вакуум, т. е. амплитуду вероятности того, что если частиц нет при $t \rightarrow -\infty$, то их нет и при $t \rightarrow +\infty$. Деление вероятностей всевозможных процессов на величину $|\langle 0_{-\infty} | S | 0_{-\infty}\rangle|^2$ (или, что то же, умножение на N_{\pm}^2) переводит абсолютные вероятности в относительные [93].

§ 5.4. Вероятность рождения и рассеяния частиц

В § 5.2 с помощью метода преобразований Боголюбова найдено выражение для числа пар, рожденных внешним полем из вакуума. Изложенный выше метод позволяет получить выражения для вероятностей всех остальных квантовых процессов в классическом внешнем поле. В более общем случае можно считать, что при $t \rightarrow -\infty$ имеется состояние, содержащее n частиц и m античастиц. Пока поле включено, происходят процессы рассеяния исходных частиц внешним полем, поглощения пар частица — античастица без излучения фотонов, а также рождения новых пар. В результате при $t \rightarrow +\infty$ образуется состояние с p частицами и q античастицами. Вычислим амплитуду вероятности перехода между состояниями на $-\infty$ и $+\infty$ [101].

Нормированное состояние, содержащее при $t \rightarrow -\infty$ n частиц и m античастиц, можно записать в виде

$$|\beta_1, \dots, \beta_n \alpha_1, \dots, \alpha_m \text{ in}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! \dots n_s! m_1! \dots m_r!}} \sum_{k=1}^n a_{\beta_k}^{*(+)} \prod_{l=1}^m a_{\alpha_l}^{(+)} |0_{-\infty}\rangle, \quad (5.54)$$

где $\sum_{i=1}^r m_i = m$, $\sum_{i=1}^s n_i = n$, т. е. имеется m_i, n_i бозонов с одинаковыми квантовыми числами. Для фермионов $n_1 = \dots = n_s = m_1 = \dots = m_r = 1$.

Подобное состояние при $t \rightarrow +\infty$ есть

$$\begin{aligned} |\mu_1, \dots, \mu_p \nu_1, \dots, \nu_q \text{ out}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{p_1! \dots p_u! q_1! \dots q_v!}} \times \\ &\times \prod_{k=1}^p b_{\mu_k}^{*(+)} \prod_{l=1}^q b_{\nu_l}^{(+)} |0_{+\infty}\rangle. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Поскольку в терминах частиц, определенных при $t \rightarrow -\infty$, вакуум $|0_{+\infty}\rangle$ является конденсатом из пар частица — античастица, то состояние (5.55) можно интерпретировать как некоторое возбуждение этого конденсата (см. § 6.3.).

Матричный элемент рассеяния, сопровождающегося рождением и поглощением пар внешним полем, есть

$$\langle \text{out } \mu_1, \dots, \mu_p \nu_1, \dots, \nu_q | \beta_1, \dots, \beta_n \alpha_1, \dots, \alpha_m \text{ in}\rangle. \quad (5.56)$$

Для вычисления (5.56) покажем сначала, как состояния при $t \rightarrow -\infty$ выражаются в терминах операторов $b^{(\pm)}$. В силу (5.17), (5.34), (5.35) и (5.38) имеем

$$a_{\alpha}^{(+)} \left| 0_{-\infty} \right\rangle = \sum_{\gamma} \Phi_{\gamma\alpha}^{-1} b_{\gamma}^{(+)} \left| 0_{-\infty} \right\rangle, \quad (5.57)$$

$$a_{\alpha}^{*(+)} \left| 0_{-\infty} \right\rangle = \sum_{\gamma} \Phi_{\gamma\alpha}^{-1} b_{\gamma}^{*(+)} \left| 0_{-\infty} \right\rangle.$$

С помощью (5.57), формулы (5.44) и соотношения

$$\left[a_{\beta}^{*(+)}, \sum_{\gamma} \Phi_{\gamma\alpha}^{-1} b_{\gamma}^{(+)} \right]_{\pm} = (\Psi^* \Phi^{-1})_{\beta\alpha}, \quad (5.58)$$

которое легко доказывается с учетом (5.17), получаем

$$\begin{aligned} & \left| \beta_1, \dots, \beta_n \alpha_1, \dots, \alpha_m \text{ in} \right\rangle = \\ & = \frac{1}{\sqrt{n_1! \dots n_s! m_1! \dots m_r!}} \prod_{k=1}^n a_{\beta_k}^{*(+)} \prod_{l=1}^m \sum_{\gamma} \Phi_{\gamma\alpha_l}^{-1} b_{\gamma}^{(+)} \left| 0_{-\infty} \right\rangle = \\ & = \frac{1}{\sqrt{n_1! \dots n_s! m_1! \dots m_r!}} \sum_{t=0}^{\min(m,n)} (\mp 1)^{nt+t(t+1)/2} \times \\ & \times \sum_{1 \leq h_1 < \dots < h_t \leq n} \sum_{i_1, \dots, i_t=1}^m (\mp 1)^{(h_1+i_1)+\dots+(h_t+i_t)+\Theta(j_1, \dots, j_t)} \times \\ & \times \prod_{i=1}^t (\Psi^* \Phi^{-1})_{\beta_{h_i} \alpha_{j_i}} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq h_1, \dots, h_t}}^n \sum_{\varepsilon} \Phi_{\varepsilon\beta_k}^{-1} b_{\varepsilon}^{*(+)} \times \\ & \times \prod_{l=1}^m \sum_{\substack{\gamma \\ l \neq j_1, \dots, j_t}} \Phi_{\gamma\alpha_l}^{-1} b_{\gamma}^{(+)} \left| 0_{-\infty} \right\rangle. \quad (5.59) \end{aligned}$$

Формула (5.59) дает искоемое выражение состояния на $-\infty$ в терминах операторов $b^{(\pm)}$.

Для вычисления величины (5.56) необходимо предварительно рассмотреть следующий матричный элемент, значение которого определяется с помощью (5.57) и формулы (5.45), в которой остается отличным от нуля только член с $t = q - s$:

$$\begin{aligned} & \langle 0_{+\infty} | \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq h_1, \dots, h_m}}^p b_{\mu_k}^{(-)} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j_1, \dots, j_n}}^q b_{\nu_l}^{*(-)} | 0_{-\infty} \rangle = \\ & = \frac{1}{N_{\pm}} \delta_{p-r, q-s} (\mp 1)^{(q-s)(q-s+1)/2} \sum_{\substack{u_1, \dots, u_{q-s}=1 \\ u_i \neq j_l}}^q (\mp 1)^{\Theta(u_1, \dots, u_{q-s})} \times \\ & \times \prod_{\substack{k=1 \\ 1 \leq v_1 < \dots < v_{p-r} \leq p \\ v_i \neq h_l}} D_{\mu_{v_k} \nu_{u_k}}. \quad (5.60) \end{aligned}$$

Подставляя (5.54) и (5.55) в (5.56), после преобразований с использованием (5.59) и (5.60) приходим к результату

$$\begin{aligned}
 & \langle \text{out } \mu_1, \dots, \mu_p \nu_1, \dots, \nu_q | \beta_1, \dots, \beta_n \alpha_1, \dots, \alpha_m \text{ in} \rangle = \\
 & = \frac{\delta_{p-n, q-m}}{N_{\pm} \sqrt{n_1! \dots n_s! m_1! \dots m_r! p_1! \dots p_u! q_1! \dots q_v!}} (\mp 1)^{p + \frac{q(q+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}} \times \\
 & \times \sum_{t=\max(0, n-p)}^{\min(m, n)} \sum_{1 \leq h_1 < \dots < h_t \leq n} \sum_{j_1, \dots, j_t=1}^{m'} \sum_{g_1, \dots, g_{n-t}=1}^p \times \\
 & \times \sum_{f_1, \dots, f_{m-t}=1}^{q'} (\mp 1)^{\zeta_2(t)} \prod_{k=1}^t (\Psi^* \Phi^{-1})_{\beta_{h_k} \alpha_{j_k}} \times \\
 & \times \prod_{\substack{1 \leq l_1 < \dots < l_{n-t} \leq n \\ i_k \neq h_l}}^{n-t} \Phi_{\mu_{g_k} \beta_{i_k}}^{-1} \prod_{\substack{1 \leq l_1 < \dots < l_{m-t} \leq m \\ l_k \neq j_i}}^{m-t} \Phi_{\nu_{f_k} \alpha_{l_k}}^{-1} \times \\
 & \times \sum_{\substack{\omega_1, \dots, \omega_{q-m+t} \\ \omega_i \neq i_k}}^{q'} (\mp 1)^{\Theta(\omega_1, \dots, \omega_{q-m+t})} \prod_{\substack{1 \leq c_1 < \dots < c_{p-n+t} \leq p \\ c_k \neq g_l}}^{q-m+t} D_{\mu_{c_k} \nu_{w_k}},
 \end{aligned} \tag{5.61}$$

где

$$\begin{aligned}
 \zeta_2(t) = & \sum_{k=1}^t (h_k + j_k) + \sum_{k=1}^{n-t} g_k + \sum_{k=1}^{m-t} f_k + \Theta(j_1, \dots, j_t) + \\
 & + \Theta(g_1, \dots, g_{n-t}) + \Theta(f_1, \dots, f_{m-t}).
 \end{aligned}$$

Формула (5.61) выражает амплитуды вероятностей всевозможных квантовых процессов во внешнем электромагнитном поле через асимптотики решений классических полевых уравнений. Появление символа $\delta_{p-n, q-m}$ в числителе (5.61) означает сохранение заряда в процессах рождения и рассеяния частиц.

Рассмотрим частный случай формулы (5.61), когда происходит рассеяние всего одной частицы из некоторого состояния при $t \rightarrow -\infty$ в определенное состояние при $t \rightarrow +\infty$. При этом $p = n = 1$, $q = m = 0$, вследствие чего суммирование по переменным h, j, f, ω не проводится, а все произведения, кроме одного, обращаются в единицу. В результате получаем

$$\langle \text{out } \mu_1 | \beta_1 \text{ in} \rangle = \langle 0_{+\infty} | b_{\mu_1}^{(-)}{}^* a_{\beta_1}^{(+)} | 0_{-\infty} \rangle = \frac{1}{N_{\pm}} (\Phi^{-1})_{\mu_1 \beta_1}. \tag{5.62}$$

Формула (5.62) получена фейнмановским методом в работе [103] для частного случая, когда внешнее поле допускает введение набора

сохраняющихся квантовых чисел. Взяв квадрат модуля (5.62) и умножив результат на N_{\pm}^2 , получим относительную вероятность рассеяния частицы.

Вычислим теперь число частиц в состоянии α при $t \rightarrow +\infty$, если при $t \rightarrow -\infty$ имелось состояние с n частицами и m античастицами. Используя (5.20), (5.21), (5.43) и (5.54), получаем

$$b_{\alpha}^{(-)} |\mu_1, \dots, \mu_n \nu_1, \dots, \nu_m \text{ in}\rangle = -\sum_{\gamma} \Psi_{\gamma\alpha} a_{\gamma}^{(+)} |\mu_1, \dots, \mu_n \nu_1, \dots, \times \\ \times \dots, \nu_m \text{ in}\rangle \mp \sum_{j=1}^n (\mp 1)^j \Phi_{\alpha\mu_j} \frac{1}{\sqrt{n(j)}} |\mu_1, \dots, \mu_{j-1} \mu_{j+1}, \dots \times \\ \times \dots, \mu_n \nu_1, \dots, \nu_m \text{ in}\rangle, \quad (5.63)$$

где $n(j)$ — число частиц с квантовыми числами μ_j .

Применяя (5.63), после преобразований получаем

$$\langle \text{in } \mu_1, \dots, \mu_n \nu_1, \dots, \nu_m | b_{\alpha}^{(+)*} b_{\alpha}^{(-)} | \mu_1, \dots, \mu_n \nu_1, \dots, \nu_m \text{ in}\rangle = \\ = (\Psi^+ \Psi)_{\alpha\alpha} \mp \sum_{k=1}^n \Psi_{\alpha\nu_k}^+ \Psi_{\nu_k\alpha} + \sum_{j=1}^m \Phi_{\alpha\mu_j} \Phi_{\mu_j\alpha}^+. \quad (5.64)$$

Совершенно аналогично для числа античастиц находим

$$\langle \text{in } \mu_1, \dots, \mu_n \nu_1, \dots, \nu_m | b_{\alpha}^{(+)*} b_{\alpha}^{(-)} | \mu_1, \dots, \mu_n \nu_1, \dots, \nu_m \text{ in}\rangle = \\ = (\Psi^+ \Psi)_{\alpha\alpha} \mp \sum_{k=1}^n \Psi_{\alpha\mu_k}^+ \Psi_{\mu_k\alpha} + \sum_{j=1}^m \Phi_{\alpha\nu_j} \Phi_{\nu_j\alpha}^+. \quad (5.65)$$

При выводе (5.64) и (5.65) в фермионном случае предполагалось, что $\mu_i \neq \mu_k$, $\nu_i \neq \nu_k$ при $i \neq k$ (в противном случае рассматриваемые исходные состояния обращаются в тождественный нуль).

Равенства (5.64) и (5.65) определяют число частиц и античастиц при $t \rightarrow +\infty$ с учетом процессов рождения, поглощения и рассеяния. В частном случае $n = 0$, $m = 0$ (5.64) и (5.65) приводят к результату (5.31). Суммируя (5.64) и (5.65) по α , получаем полное число частиц и античастиц, рожденных из заданного на $-\infty$ состояния за все время существования внешнего поля (см. работу [105], где обсуждаются некоторые вопросы, возникающие при рассмотрении полей, порождающих пары).

Выше электромагнитное поле предполагалось классическим. В работе [106] построена теория возмущений, с помощью которой можно рассчитывать различные квантовоэлектродинамические процессы во внешнем поле, порождающем пары. Изложение таких методов, основанных на диаграммной технике, не входит, однако, в задачи настоящей книги.

§ 5.5. Связь спина со статистикой при наличии внешнего поля

Изложенный в § 5.3, 5.4 формализм позволяет доказать упомянутое в § 5.1 утверждение Фейнмана и тем самым продемонстрировать самосогласованность теории квантованного поля во внешнем электромагнитном поле произвольного вида. Согласно утверждению Фейнмана, при учете обычной связи спина со статистикой сумма вероятностей перехода произвольного начального состояния в всевозможные конечные состояния будет равна единице независимо от того, каким было внешнее поле в промежуточные моменты. Нетривиальность этого утверждения заключается в том, что в проводимом в рамках квантовой теории поля доказательстве теоремы о связи спина со статистикой (как известно, согласно этой теореме, поля с целым спином должны коммутировать, а с полуцелым спином — антикоммутировать на пространственноподобных интервалах) используется аксиома стабильности вакуумного состояния [33]. Однако, как было показано в § 5.3, при наличии нестационарного внешнего поля вакуумное состояние оказывается нестабильным, вследствие чего это доказательство неприменимо.

В работе [90] Швингер нашел в рамках своего подхода формулы для вероятностей образования n электрон-позитронных пар из вакуума и показал, что при суммировании полученных выражений по n от нуля до бесконечности получается единица. Тем самым в частном случае (при $t \rightarrow -\infty$ имеется вакуум, частицы обладают спином $1/2$) сформулированное выше утверждение было доказано. В последнее время утверждение Фейнмана доказано для фермионов и бозонов в предположении, что внешнее поле допускает введение набора сохраняющихся квантовых чисел [103, 107—109]. Ниже рассматриваются оба типа статистики, причем предполагается, что на $-\infty$ имеется произвольное состояние, содержащее m частиц и n античастиц, и не вводится никаких ограничений на характер электромагнитного поля [101].

Предположим, что частицы со спином 0 и 1 подчиняются статистике Бозе, а частицы со спином $1/2$ — статистике Ферми. Тогда, согласно утверждению Фейнмана, должно выполняться равенство

$$\sum_{p, q=0}^{\infty} \sum_{\substack{\mu_1, \dots, \mu_p \\ \nu_1, \dots, \nu_q}} |\langle \text{in } \beta_1, \dots, \beta_m \alpha_1, \dots, \alpha_n | \mu_1, \dots, \mu_p \nu_1, \dots \times \\ \times \dots, \nu_q \text{ out} \rangle|^2 = 1. \quad (5.66)$$

Суммирование в (5.66) проводится по всем физически различным состояниям (из каждого набора слагаемых, отличающихся лишь порядком расположения индексов μ_i , ν_i , выбирают только одно).

Поскольку in- и out-вакуумы могут, вообще говоря, не принадлежать одному гильбертову пространству, то при обосновании (5.66)

нельзя использовать условие полноты. Как будет показано ниже, (5.66) вытекает из чисто алгебраических свойств формализма, выражаемых равенствами (5.11) и (5.17), а также определений вакуумных состояний (5.12) и (5.33).

Для доказательства (5.66) предварительно докажем справедливость следующего соотношения:

$$\sum_{p,q=0}^{\infty} \sum_{\substack{\mu_1, \dots, \mu_p \\ \nu_1, \dots, \nu_q}} |\mu_1, \dots, \mu_p \nu_1, \dots, \nu_q \text{ out}\rangle \langle \text{out } \mu_1, \dots, \mu_p \nu_1, \dots, \nu_q | \times \\ \times \prod_{k=1}^m \hat{b}_{\alpha_k}^{(+)} \prod_{l=1}^n b_{\beta_l}^{(+)} |0_{-\infty}\rangle = \prod_{k=1}^m \hat{b}_{\alpha_k}^{(+)} \prod_{l=1}^n b_{\beta_l}^{(+)} |0_{-\infty}\rangle. \quad (5.67)$$

Стоящий в левой части (5.67) матричный элемент можно вычислить с использованием формулы (5.44):

$$\langle \text{out } \mu_1, \dots, \mu_p \nu_1, \dots, \nu_q | \prod_{k=1}^m \hat{b}_{\alpha_k}^{(+)} \prod_{l=1}^n b_{\beta_l}^{(+)} |0_{-\infty}\rangle = \\ = \frac{\delta_{m, \min(m, p)} \delta_{n, \min(p, n)}}{\sqrt{p_1! \dots p_u! q_1! \dots q_v!}} (\mp 1)^{q(p+n) + m(p+q) + p(p-1)/2 + q(q-1)/2} \times \\ \times \sum_{h_1, \dots, h_m=1}^p \sum_{g_1, \dots, g_n=1}^q (\mp 1)^{\sum_{k=1}^m h_k + \sum_{k=1}^n g_k + \Theta(h_1, \dots, h_m) + \Theta(g_1, \dots, g_n)} \times \\ \times \prod_{k=1}^n \delta_{\mu_{h_k} \alpha_k} \prod_{l=1}^n \delta_{\nu_{g_l} \beta_l} \langle 0_{+\infty} | \prod_{\substack{k=h_1, \dots, h_m \\ k=1}}^p b_{\mu_k}^{(-)} \prod_{\substack{l=g_1, \dots, g_n \\ l=1}}^q \hat{b}_{\nu_l}^{(-)} |0_{-\infty}\rangle. \quad (5.68)$$

Стоящее справа в (5.68) среднее значение уже вычислено в (5.60). Подставляя (5.60) в (5.68), после преобразований получаем

$$\langle \text{out } \mu_1, \dots, \mu_p \nu_1, \dots, \nu_q | \prod_{k=1}^m \hat{b}_{\alpha_k}^{(+)} \prod_{l=1}^n b_{\beta_l}^{(+)} |0_{-\infty}\rangle = \\ = \frac{\delta_{p-m, q-n} \delta_{n, \min(n, q)}}{N_{\pm} \sqrt{p_1! \dots p_u! q_1! \dots q_v!}} (\mp 1)^{nq + mp + n(n-1)/2 + p(p-1)/2} \times \\ \times \sum_{h_1, \dots, h_m=1}^p \sum_{g_1, \dots, g_n=1}^q \times \\ \times (\mp 1)^{\sum_{k=1}^m h_k + \sum_{k=1}^n g_k + \Theta(h_1, \dots, h_m) + \Theta(g_1, \dots, g_n)} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \prod_{k=1}^n \delta_{\mu_{n_k} \alpha_k} \prod_{l=1}^n \delta_{\nu_{g_l} \beta_l} \sum_{\substack{q, \\ w_1, \dots, w_{q-n}=1 \\ w_i \neq g_k}} \times \\ & \times (\mp 1)^{\Theta(w_1, \dots, w_{q-n})} \prod_{\substack{r=1 \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{p-m} \leq p \\ i_k \neq n_l}}^{q-n} D_{\mu_{i_r} \nu_{w_r}}. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Умножая (5.69) на $|\mu_1, \dots, \mu_p \nu_1, \dots, \nu_q \text{ out}\rangle$ и суммируя по всем физически различным наборам квантовых чисел $\mu_1, \dots, \mu_p \nu_1, \dots, \nu_q$, приходим к результату

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\mu_1, \dots, \mu_p \\ \nu_1, \dots, \nu_q}} |\mu_1, \dots, \mu_p \nu_1, \dots, \nu_q \text{ out}\rangle \langle \text{out } \mu_1, \dots, \mu_p \nu_1, \dots, \nu_q | \times \\ & \times \prod_{k=1}^m \hat{b}_{\alpha_k}^{*(+)} \prod_{l=1}^n \hat{b}_{\beta_l}^{(+)} |0_{-\infty}\rangle = \frac{\delta_{p-m, q-n} \delta_{n, \min(n, q)}}{N_{\pm} (q-n)!} \times \\ & \times \prod_{k=1}^m \hat{b}_{\alpha_k}^{*(+)} \prod_{l=1}^n \hat{b}_{\beta_l}^{(+)} \left(\sum_{\mu, \nu} D_{\mu\nu} \hat{b}_{\mu}^{*(+)} \hat{b}_{\nu}^{(+)} \right)^{q-n} |0_{+\infty}\rangle. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Проводя в (5.70) суммирование по p и q с учетом (5.34), убеждаемся в справедливости равенства (5.67).

Поскольку в силу (5.59) состояние $|\beta_1, \dots, \beta_n \alpha_1, \dots, \alpha_m \text{ in}\rangle$ можно представить в виде линейной комбинации векторов вида

$$\prod_{k=1}^r \hat{b}_{\alpha_k}^{*(+)} \prod_{l=1}^s \hat{b}_{\beta_l}^{(+)} |0_{-\infty}\rangle, \quad (5.71)$$

то из равенства (5.67) вытекает

$$\begin{aligned} & \sum_{p, q=0}^{\infty} \sum_{\substack{\mu_1, \dots, \mu_p \\ \nu_1, \dots, \nu_q}} |\mu_1, \dots, \mu_p \nu_1, \dots, \nu_q \text{ out}\rangle \langle \text{out } \mu_1, \dots, \mu_p \nu_1, \dots, \nu_q | \times \\ & \times |\beta_1, \dots, \beta_m \alpha_1, \dots, \alpha_n \text{ in}\rangle = |\beta_1, \dots, \beta_m \alpha_1, \dots, \alpha_n \text{ in}\rangle. \end{aligned} \quad (5.72)$$

Умножая (5.72) слева на $\langle \text{in } \beta_1, \dots, \beta_m \alpha_1, \dots, \alpha_n |$, получаем равенство (5.66). Тем самым утверждение Фейнмана доказано.

Полученные в данной главе выражения относятся к произвольному нестационарному электромагнитному полю. В следующей главе они используются для пространственно-однородного поля. При этом удастся найти в явном виде асимптотики решений соответствующих уравнений, а также выражения для плотности числа рожденных полей пар.

§ 6.1. Приближение пространственно-однородного
электрического поля

Важным частным случаем изложенной в предыдущей главе теории является рождение фермионных и бозонных пар пространственно-однородным электрическим полем. Как оказывается, предположение об однородности внешнего поля позволяет свести задачу о рождении пар к задаче о параметрическом возбуждении квантового осциллятора с переменной частотой и получить некоторые точные результаты для характеризующих процесс рождения величин.

Нестационарное пространственно-однородное электрическое поле можно задать вектор-потенциалом

$$A^n(x) = (0, 0, 0, A^3(t)). \quad (6.1)$$

Если предположить, что электрическое поле выключается при $t \rightarrow \pm \infty$, то в этом случае существуют предельные значения

$$\lim_{t \rightarrow \pm \infty} A^3(t) = A_{\pm}^3. \quad (6.2)$$

Задаваемое потенциалом (6.1) нестационарное электрическое поле

$$E(t) = (0, 0, -dA^3(t)/dt) = (0, 0, E_z(t)) \quad (6.3)$$

сохраняет свое направление в пространстве вдоль оси $x^3 = z$ (случай однородного поля с переменным направлением рассмотрен в работах [110, 111]). Такое поле удовлетворяет уравнениям Максвелла с однородным распределением токов.

Очевидно, что приближение однородного поля можно применять только в тех случаях, когда характерный размер неоднородности значительно превышает характерный размер рассматриваемой системы. Обсудим те условия, при выполнении которых можно приближенно заменять рождающую пары электромагнитное поле пространственно-однородным электрическим полем. Рассмотрим сначала предположение о пространственной однородности, а затем — вопрос о законности пренебрежения магнитным полем.

Пусть постоянное однородное электрическое поле с напряженностью E рождает одну электрон-позитронную пару. Если частица и античастица рождаются на характерном расстоянии l друг от друга в состоянии с нулевым импульсом, то их энергия во внешнем поле есть $2m$ — $|e| lE$. Поскольку энергия самого внешнего поля предполагается неизменной, то из закона сохранения энергии вытекает $2m$ — $|e| lE = 0$, т. е.

$$l = 2m / |e| E. \quad (6.4)$$

Характерным расстоянием, на котором происходит рождение пар внешним полем, является комптоновская длина $l_c = m^{-1}$. Этой длине согласно (6.4) соответствует значение напряженности электрического поля $E = 2E_{кр} = 2m^2/|e|$. Таким образом, пары рождаются интенсивно при очень высоких напряженностях внешнего поля (для электронов $E_{кр} \sim 10^{16}$ В/см).

Сравним характерное расстояние, на котором рождается пара, с характерным размером неоднородности внешнего поля. Выбирая в качестве источника внешнего поля оптический лазер (длина волны излучения $\lambda \sim 5 \cdot 10^{-5}$ см), можно полагать, что создаваемое им поле однородно с достаточной степенью точности, если выполняется условие $l \ll \lambda$. Вследствие (6.4) это условие означает, что напряженность поля $E \gtrsim 10^{12}$ В/см.

Учет зависимости внешнего поля от времени позволяет уточнить приведенные оценки. Как показано в работе [112], для внешнего поля, изменяющегося с частотой k_0 , характерный размер, на котором рождается пара, определяется формулой

$$l_0 = \frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{k_0 m}{|e| E} = \frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{k_0}{m} \frac{E_{кр}}{E} \right). \quad (6.5)$$

В пределе постоянного поля ($k_0 \rightarrow 0$) arctg можно заменить его аргументом; при этом (6.5) переходит в (6.4).

Для излучения оптического лазера $\lambda \sim 5 \cdot 10^{-5}$ см, $k_0 m/|e| E \ll 1$ при указанных выше значениях E и (6.5) не вносит ничего нового по сравнению с (6.4). Таким образом, условием применимости приближения однородного поля остается требование $E \gtrsim 10^{12}$ В/см. Если же напряженность поля $E \lesssim 10^{-6} E_{кр} \sim 10^{10}$ В/см, то $l_0 \sim \lambda$ и пользоваться приближением однородного поля нельзя. Как видно из (6.5), с увеличением частоты k_0 растет и то значение E , начиная с которого применимо приближение однородного поля.

Обсудим теперь вопрос о законности пренебрежения магнитным полем. Как известно [89], постоянное однородное магнитное поле не рождает пар (см. § 7.3). В то же время переменным магнитным полем можно пренебрегать при рассмотрении рождения нерелятивистских частиц, так как силы Лоренца, действующие на эти частицы со стороны магнитного поля, малы по сравнению с электрическими силами.

Как отмечено в работе [113], чисто электрическое переменное поле вида (6.3) можно реализовать не только внешними токами, но и в пустом пространстве, ограниченном стенками. Так, например, для волн E -типа, распространяющихся в волноводе, имеем [69]:

$$E_1 = (ip_3/\Omega^2) \partial_1 E_3; \quad E_2 = (ip_3/\Omega^2) \partial_2 E_3; \quad (6.6)$$

$$H_1 = (-ik_0/\Omega^2) \partial_2 E_3; \quad H_2 = (ik_0/\Omega^2) \partial_1 E_3; \quad H_3 = 0,$$

где направление вдоль волновода совпадает с осью x_3 ; p_3 — единственная отличная от нуля компонента волнового вектора; $\Omega^2 = k_0^2 - p_3^2$.

Как видно из (6.6), все три компоненты напряженности магнитного поля равны нулю в тех точках поперечного сечения волновода, в которых E_3 достигает экстремума. В этих точках также выполняются равенства $E_1 = E_2 = 0$, и все электромагнитное поле сводится к зависящему от времени электрическому полю $E_3(t)$.

Полученные результаты можно приближенно распространить на некоторую окрестность точек экстремума E_3 , считая эту окрестность большой по сравнению с характерным размером, на котором рождается пара, но малой по сравнению с длиной волны E -типа. Действительно, пренебрегая в тейлоровском разложении.

$$E_3(x, t) = E_3(x_0, t) + (1/2!) d^2 E_3(x, t)|_{x_0} + \dots \quad (6.7)$$

всеми членами, начиная со второго (x_0 — точка экстремума E_3), получаем поле с вектор-потенциалом вида (6.1). Возможность заменять поле в окрестностях точек экстремума однородным электрическим полем (6.1) связана с тем, что уравнения Дирака и Клейна — Гордона — Фока не содержат производных от напряженностей \mathbf{E} и \mathbf{H} по координатам (т. е. не содержат тех величин, которые в данном приближении определяются недостаточно точно).

Рассматривая роль магнитного поля в рождении пар, необходимо также учитывать, что плоская волна, для которой $|\mathbf{E}| = |\mathbf{H}|$, $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = 0$, не рождает пар [89] (см. § 7.4). Поскольку излучение одного лазера хорошо моделируется плоской волной с той или иной поляризацией [114], оно не может рождать значительного числа пар. Однако поле в пучности стоячей световой волны, полученной с помощью двух лазерных пучков, является полем электрического типа (в нем $\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2 > 0$). Такое поле может моделироваться электрическим полем (6.3) при соблюдении указанных выше ограничений на степень его однородности [115].

§ 6.2. Задача о рождении пар как задача о параметрическом возбуждении квантового осциллятора

Применим результаты гл. 5 к случаю пространственно-однородного переменного электрического поля (6.3). Предположим, что индекс собственных функций α в разложении (5.10) означает трехмерный импульс для частиц с нулевым спином или импульс и проекцию спина на избранное направление для частиц со спином $1/2$ (в случае пространственно-однородного поля оператор импульса — $i\partial_\nu$ коммутирует с гамильтонианом). Сначала рассмотрим рождение дираковских частиц (рождение частиц с аномальным магнитным моментом обсуждается в работе [111]).

Уравнение Дирака (1.39) в поле (6.1) допускает полное разделение переменных. Решения (1.39) удобно записывать с помощью решений уравнения второго порядка

$$[i\gamma^k \partial_k - eA_3(t)\gamma^3 - m][i\gamma^k \partial_k - eA_3(t)\gamma^3 + m]\chi(x) = 0. \quad (6.8)$$

После преобразований (6.8) принимает вид

$$[\partial^k \partial_k + e^2 A_3^2(t) - 2ieA_3(t)\partial_3 + ie\partial_0 A_3(t)\gamma^0\gamma^3 + m^2]\chi(x) = 0. \quad (6.9)$$

Решения (6.9) ищем в форме [107]

$$\chi_{pr}(x) = \exp(i \mathbf{p} \mathbf{x}) f(\mathbf{p}, t) R_r, \quad (6.10)$$

где R_r — собственные векторы матрицы $\gamma^0\gamma^3$, $R_r^+ R_s = 2\delta_{rs}$, $r, s = 1, 2$, так как достаточно использовать те два из четырех собственных векторов, которые отвечают собственному значению $+1$:

$$R_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}, \quad R_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (6.11)$$

Подставляя (6.10) в (6.9), получаем уравнение для функции f :

$$f''(\mathbf{p}, t) + [\omega^2(\mathbf{p}, t) + ie\partial_0 A_3(t)] f(\mathbf{p}, t) = 0, \quad (6.12)$$

где $\omega^2(\mathbf{p}, t) = m^2 + p_\perp^2 + (p_3 - eA_3)^2$, $p_\perp^2 = p_1^2 + p_2^2$.

Уравнение (6.12) является уравнением осцилляторного типа с комплексной переменной частотой. Как показано ниже, вероятность рождения пар выражается в конечном счете через асимптотики его решений.

Решения уравнения Дирака, соответствующие спиновому состоянию r , можно теперь представить в виде

$$\psi_{pr}(x) = (p_\nu \gamma^\nu + i\partial_0 \gamma^0 - eA_3(t)\gamma^3 + m)\chi_r(x), \quad (6.13)$$

где $\chi_r(x)$ определено в (6.10) и (6.11).

Из (6.10) и (6.13) получаем равенство

$$\psi_{pr}^+ \psi_{ps} = \omega^2 \chi_r^+ \chi_s + \chi_r'^+ \chi_s' + i(p_3 - eA_3)(\chi_r^+ \chi_s' - \chi_r'^+ \chi_s), \quad (6.14)$$

которое при $r \neq s$ приводит к условию ортогональности по спиновым значкам $\psi_{pr}^+ \psi_{ps} = 0$.

Уравнение (6.12) при $t \rightarrow \pm \infty$ переходит в

$$f''(\mathbf{p}, t) + \omega_\pm^2(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}, t) = 0, \quad (6.15)$$

где $\omega_\pm^2(\mathbf{p}) = \lim_{t \rightarrow \pm \infty} \omega^2(\mathbf{p}, t) = m^2 + p_\perp^2 + (p_3 - eA_{3\pm})^2$.

Положительно- и отрицательно-частотными при $t \rightarrow -\infty$ назовем такие решения (6.12), которые при $t \rightarrow -\infty$ совпадают с положительно- и отрицательно-частотными решениями (6.15):

$$f^{(\pm)}(\mathbf{p}, t) \sim \exp(\pm i\omega_-(\mathbf{p})t). \quad (6.16)$$

Функциям $f^{(\pm)}(\mathbf{p}, t)$ согласно (6.13) и (6.10) соответствуют положительно- и отрицательно-частотные решения уравнения Дирака

$\psi_{pr}^{(\pm)}$ (x). Найдем некоторые полезные свойства этих решений. Из (6.14) с помощью (6.10) получаем

$$\begin{aligned} \psi_{p_1}^{(\delta)+} \psi_{p_1}^{(\varepsilon)} = \psi_{p_2}^{(\delta)+} \psi_{p_2}^{(\varepsilon)} = 2 [\omega^2 f^{(\delta)*} f^{(\varepsilon)} + (f^{(\delta)'})^* f^{(\varepsilon)'} + \\ + i(p_3 - eA_3) (f^{(\delta)*} f^{(\varepsilon)'} - (f^{(\delta)'})^* f^{(\varepsilon)})], \end{aligned} \quad (6.17)$$

где индексы δ и ε могут принимать значения (+) и (-) в любом сочетании.

Дифференцируя (6.17) по времени с учетом (6.12), имеем

$$(\psi_{p_1}^{(\delta)+} \psi_{p_1}^{(\varepsilon)})' = (\psi_{p_2}^{(\delta)+} \psi_{p_2}^{(\varepsilon)})' = 0. \quad (6.18)$$

Поскольку вследствие (6.17) эти комбинации не зависят также и от x , можно положить

$$\psi_{p_1}^{(\pm)+} (x) \psi_{p_1}^{(\pm)} (x) = \psi_{p_2}^{(\pm)+} (x) \psi_{p_2}^{(\pm)} (x) = 1. \quad (6.19)$$

Подставляя (6.16) в (6.17), получаем

$$\psi_{p_1}^{(\pm)+} (x) \psi_{p_1}^{(\mp)} (x) = \psi_{p_2}^{(\pm)+} (x) \psi_{p_2}^{(\mp)} (x) = 0. \quad (6.20)$$

Таким образом, выполняются равенства

$$\psi_{p_r}^{(\pm)+} (x) \psi_{p_s}^{(\pm)} (x) = \delta_{rs}, \quad \psi_{p_r}^{(\pm)+} (x) \psi_{p_s}^{(\mp)} (x) = 0. \quad (6.21)$$

Функции $\psi_{pr}^{(\pm)} (x)$ образуют полный набор решений уравнения Дирака, нормированных согласно соотношению

$$\int \psi_{pr}^{(\pm)+} (x) \psi_{p'r}^{(\pm)} (x) d^3 x = (2\pi)^3 \delta^3 (\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (6.22)$$

Разложение оператора поля по операторам рождения и уничтожения имеет вид

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{r=1,2} \int d^3 p [a_{pr}^{(-)} \psi_{pr}^{(-)}(x) + a_{pr}^{(+)} \psi_{pr}^{(+)}(x)] \quad (6.23)$$

[отличие на множитель от (5.10) связано с тем, что в гл. 5 решения уравнения Дирака считались нормированными на единицу].

Гамильтониан квантованного поля (6.23) определяется равенством (5.13), в котором вследствие однородности внешнего поля можно выполнить интегрирование по одному из импульсов

$$\begin{aligned} H^{(1/2)}(t) = \sum_{r,s} \int d^3 p [A_{rs}(\mathbf{p}, t) a_{pr}^{(+)*} a_{ps}^{(-)} + B_{rs}(\mathbf{p}, t) a_{pr}^{(+)*} a_{ps}^{(+)} + \\ + B_{rs}^+(\mathbf{p}, t) a_{-pr}^{(-)*} a_{ps}^{(-)} + C_{rs}(\mathbf{p}, t) a_{-pr}^{(-)*} a_{ps}^{(+)}]. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Коэффициенты в (6.24) есть

$$\begin{aligned} A_{rs}(\mathbf{p}, t) &= i\psi_{pr}^{(-)\dagger} \partial_0 \psi_{ps}^{(-)}; & B_{rs}(\mathbf{p}, t) &= i\psi_{pr}^{(-)\dagger} \partial_0 \psi_{ps}^{(+)}; \\ C_{rs}(\mathbf{p}, t) &= i\psi_{pr}^{(+)\dagger} \partial_0 \psi_{ps}^{(+)}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Используя (6.10), (6.12), (6.16) и (6.21), можно убедиться в том, что при $r \neq s$ выполняются равенства

$$A_{rs}(\mathbf{p}, t) = B_{rs}(\mathbf{p}, t) = C_{rs}(\mathbf{p}, t) = 0, \quad (6.26)$$

т. е. гамильтониан (6.24) диагонален по спиновым значкам. Аналогично легко убедиться и в справедливости соотношений:

$$\begin{aligned} A_{11}(\mathbf{p}, t) &= A_{22}(\mathbf{p}, t) \equiv \omega(\mathbf{p}, t) E(\mathbf{p}, t); \\ B_{11}(\mathbf{p}, t) &= B_{22}(\mathbf{p}, t) \equiv \omega(\mathbf{p}, t) F(\mathbf{p}, t); \\ C_{11}(\mathbf{p}, t) &= C_{22}(\mathbf{p}, t). \end{aligned} \quad (6.27)$$

С помощью (6.11), (6.17) и (6.19) получаются также следующие равенства:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{p}, t) &= -\frac{C_{11}(\mathbf{p}, t)}{\omega(\mathbf{p}, t)} = \frac{4(m^2 + p_{\perp}^2)}{\omega(\mathbf{p}, t)} \operatorname{Im}[f^{(+)*}(\mathbf{p}, t) f^{(+)}(\mathbf{p}, t)] + \\ &\quad + \frac{eA_3(t) - p_3}{\omega(\mathbf{p}, t)}, \end{aligned} \quad (6.28)$$

$$E^2(\mathbf{p}, t) + |F(\mathbf{p}, t)|^2 = 1. \quad (6.29)$$

Подставляя (6.26) и (6.27) в (6.24), находим

$$\begin{aligned} H^{(1/2)}(t) &= \sum_{r=1,2} \int d^3 p \omega(\mathbf{p}, t) \left[E(\mathbf{p}, t) \left(\hat{a}_{pr}^{(+)*} \hat{a}_{pr}^{(-)} - \hat{a}_{-pr}^{(-)*} \hat{a}_{-pr}^{(+)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + F(\mathbf{p}, t) \hat{a}_{pr}^{(+)*} \hat{a}_{-pr}^{(+)} + F^*(\mathbf{p}, t) \hat{a}_{-pr}^{(-)*} \hat{a}_{pr}^{(-)} \right]. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Гамильтониан (6.30) диагонализуется в любой момент времени с помощью преобразования Боголюбова, являющегося частным случаем (5.17):

$$\begin{aligned} \hat{a}_{pr}^{(-)} &= \alpha_p^*(t) \hat{b}_{pr}^{(-)}(t) - \beta_p(t) \hat{b}_{-pr}^{(+)}(t), \\ \hat{a}_{pr}^{(+)} &= \alpha_{-p}^*(t) \hat{b}_{pr}^{(-)}(t) + \beta_{-p}(t) \hat{b}_{-pr}^{(+)}(t) \end{aligned} \quad (6.31)$$

[Отметим, что первое из равенств (6.28) означает выполнение необходимого для возможности диагонализации условия (5.29)].

Очевидно, что для преобразования (6.31) условия обратимости и сохранения антикоммутирующих сводятся к единственному равенству

$$|\alpha_p(t)|^2 + |\beta_p(t)|^2 = 1. \quad (6.32)$$

Сравнивая (5.17) и (6.31), получаем

$$\Phi_{\tau\gamma}(t) = \alpha_{\tau}^*(t) \delta(\tau - \gamma), \quad \Psi_{\tau\gamma}(t) = -\beta_{\tau}(t) \delta(\tau - \gamma). \quad (6.33)$$

Очевидно, что здесь условие (2.23) не выполняется, т. е. преобразование (6.31) — несобственное.

Условие (5.27) диагональности гамильтониана по операторам $b_{pr}^{(\pm)}(t)$, $b_{pr}^{*\pm}(t)$ приводит в случае однородного поля к уже проверенному независимо равенству (6.29) и формуле для отношения коэффициентов преобразования Боголюбова

$$\frac{\beta_p(t)}{\alpha_p(t)} = \frac{1-E(p,t)}{F^*(p,t)}, \quad |\beta_p(t)|^2 = \frac{1-E(p,t)}{2}, \quad (6.34)$$

где $E(p,t)$ определено в (6.28).

В терминах операторов физических частиц $b^{(\pm)}$ гамильтониан (6.30) принимает вид

$$H^{(1/2)}(t) = \sum_{r=1,2} \int d^3 p \omega(p,t) \left[b_{pr}^{*+}(t) b_{pr}^{-}(t) - b_{-pr}^{*-}(t) b_{-pr}^{+}(t) \right]. \quad (6.35)$$

После нормального упорядочения выражение (6.35) имеет смысл самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве \mathcal{H}_t , построенном на физическом вакууме $|0_t\rangle$:

$$b_{pr}^{-}(t) |0_t\rangle = b_{pr}^{*-}(t) |0_t\rangle = 0. \quad (6.36)$$

Таким образом, квантованное фермионное поле, взаимодействующее с однородным электрическим полем, можно в любой момент времени представить как свободное при соответствующем переопределении понятия частицы и вакуумного состояния.

С использованием преобразований, обратных (6.31), получаем среднее от оператора числа частиц и античастиц с импульсом p в состоянии, которое являлось вакуумным при $t \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned} N^{(1/2)}(t) &= \langle 0_{-\infty} | b_{pr}^{*+}(t) b_{pr}^{-}(t) | 0_{-\infty} \rangle = \\ &= \langle 0_{-\infty} | b_{-pr}^{*+}(t) b_{-pr}^{-}(t) | 0_{-\infty} \rangle = |\beta_p(t)|^2 \delta^3(p=0) \end{aligned} \quad (6.37)$$

[ср. с общим результатом (5.31)].

Как видно из (6.37), число родившихся пар не зависит от спинового состояния; частица и античастица рождаются с противоположными импульсами (зависимость N_p от спинового состояния появляется в случае внешнего поля, не сохраняющего своего направления в пространстве [115]).

Если предположить, что система находится в ящике объема V , то символ $\delta^3(p=0)$ заменяется на $\delta_{pp} = 1$. При этом плотность числа рожденных частиц есть

$$n^{(1/2)}(t) = \frac{N^{(1/2)}(t)}{V} = \frac{1}{V} \sum_p |\beta_p(t)|^2.$$

В случае бесконечного пространства имеет смысл говорить только о плотности числа частиц. Соответствующий переход осуществля-

ется заменой [6] $V^{-1} \sum_{\mathbf{p}} \rightarrow (2\pi)^{-3} \int d^3 p$. В результате получаем число рожденных пар в единице объема

$$n^{(1/2)}(t) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3 p n_{\mathbf{p}}^{(1/2)}(t), \quad (6.38)$$

где множитель 2 появился в результате суммирования по спиновым состояниям, а $n_{\mathbf{p}}^{(1/2)}(t)$ — плотность числа пар по координатам и импульсам:

$$n_{\mathbf{p}}^{(1/2)}(t) = |\beta_{\mathbf{p}}(t)|^2. \quad (6.39)$$

Как видно из (6.32), $|\beta_{\mathbf{p}}|^2 < 1$, что демонстрирует действие принципа Паули для фермионов. Величина $|\beta_{\mathbf{p}}(t)|^2$ есть абсолютная вероятность рождения пары. Величина $|\beta_{\mathbf{p}}(t)/\alpha_{\mathbf{p}}(t)|^2$ имеет смысл относительной вероятности рождения (см. гл. 5), т. е. абсолютной вероятности рождения, деленной на вероятность того, что в состоянии \mathbf{p} , r не родится пары.

При $t \rightarrow +\infty$ взаимодействие с внешним полем выключается и формула (6.38) дает число реальных частиц, рожденных внешним полем в единице объема за все время его существования [100, 103, 115, 116]:

$$n^{(1/2)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} n^{(1/2)}(t) = \frac{1}{4\pi^3} \lim_{t \rightarrow +\infty} \int d^3 p |\beta_{\mathbf{p}}(t)|^2. \quad (6.40)$$

Формулы (6.28), (6.34) и (6.40) выражают плотность числа рожденных пар через асимптотику решений осцилляторного уравнения (6.12). Это позволяет применить при вычислении $n^{(1/2)}$ хорошо разработанные методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Задача о рождении пар нестационарным однородным полем оказывается эквивалентной квантовомеханической задаче о надбарьерном отражении плоской волны от комплексного потенциального барьера (где роль t обычно играет пространственная координата x).

Пусть при $t \rightarrow -\infty$ имелся не вакуум, а состояние $|\chi\rangle$, содержащее произвольное число частиц и античастиц, из которых m частиц и n античастиц имели квантовые числа pr ($m, n = 0, 1$). Для среднего числа частиц и античастиц в состоянии $|\chi\rangle$ в любой момент t из (5.64) и (5.65) имеем

$$\begin{aligned} \langle \chi | b_{pr}^{(+)*} b_{pr}^{(-)} | \chi \rangle &= m + (1 - n - m) |\beta_{\mathbf{p}}|^2, \\ \langle \chi | b_{pr}^{(+)} b_{pr}^{(-)*} | \chi \rangle &= n + (1 - n - m) |\beta_{\mathbf{p}}|^2. \end{aligned}$$

Очевидно, что если в состоянии $|\chi\rangle$ $n = m = 1$, то среднее число пар равно $1 - |\beta_{\mathbf{p}}|^2 < 1$. Это означает, что имеет место эффект поглощения пар внешним полем. При $m = n = 0$ получаем найденный выше результат для вероятности рождения пары из вакуума.

Аналогичные результаты можно получить и для скалярных частиц. Полную систему решений уравнения Клейна — Гордона — Фока (1.3) в поле (6.1) можно записать в виде

$$\varphi_{\mathbf{p}}^{(\pm)}(x) = \exp(ipx)g^{(\pm)}(\mathbf{p}, t), \quad (6.41)$$

где функция $g^{(\pm)}$ удовлетворяет осцилляторному уравнению с вещественной переменной частотой

$$g^{(\pm)''}(\mathbf{p}, t) + \omega^2(\mathbf{p}, t)g^{(\pm)}(\mathbf{p}, t) = 0. \quad (6.42)$$

Положительно- и отрицательно-частотные при $t \rightarrow -\infty$ решения ведут себя как

$$g^{(\pm)}(\mathbf{p}, t) \underset{t \rightarrow -\infty}{\sim} \exp(\pm i\omega_-(\mathbf{p})t) \quad (6.43)$$

[ω^2 и ω_- определены в (6.12), (6.15)].

Решения (6.41) нормированы условием

$$\mp i \int \varphi_{\mathbf{p}}^{(\pm)*}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi_{\mathbf{p}'}^{(\pm)}(x) d^3x = (2\pi)^3 2\omega_-(\mathbf{p}) \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (6.44)$$

Поэтому оператор поля (5.10) записывается как

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \left[a_{\mathbf{p}}^{(-)} \frac{\varphi_{\mathbf{p}}^{(-)}(x)}{\sqrt{\omega_-(\mathbf{p})}} + a_{\mathbf{p}}^{(+)} \frac{\varphi_{-\mathbf{p}}^{(+)}(x)}{\sqrt{\omega_-(-\mathbf{p})}} \right]. \quad (6.45)$$

С учетом (6.41) — (6.45) можно показать, что гамильтониан (5.13) принимает вид

$$H^{(0)}(t) = \int d^3p \omega(\mathbf{p}, t) \left[E(\mathbf{p}, t) \left(a_{\mathbf{p}}^{(+)*} a_{\mathbf{p}}^{(-)} + a_{-\mathbf{p}}^{(-)*} a_{-\mathbf{p}}^{(+)} \right) + F(\mathbf{p}, t) a_{\mathbf{p}}^{(+)*} a_{-\mathbf{p}}^{(+)} + F^*(\mathbf{p}, t) a_{-\mathbf{p}}^{(-)*} a_{\mathbf{p}}^{(-)} \right], \quad (6.46)$$

где

$$E(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{2\omega_-(\mathbf{p})\omega(\mathbf{p}, t)} [|g^{(+)*}(\mathbf{p}, t)|^2 + \omega^2(\mathbf{p}, t) |g^{(+)}(\mathbf{p}, t)|^2], \quad (6.47)$$

$$F(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{2\omega_-(\mathbf{p})\omega(\mathbf{p}, t)} [g^{(+)*}(\mathbf{p}, t) + \omega^2(\mathbf{p}, t) g^{(+)}(\mathbf{p}, t)].$$

Величина $E(\mathbf{p}, t)$ имеет смысл адиабатического инварианта осциллятора, описываемого уравнением (6.42).

Как видно из (6.46), необходимое условие (5.29) возможности диагонализации гамильтониана выполнено. Диагонализация проводится с помощью канонического преобразования

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{p}}^{(-)} &= \alpha_{\mathbf{p}}^*(t) b_{\mathbf{p}}^{(-)}(t) - \beta_{\mathbf{p}}(t) b_{-\mathbf{p}}^{(+)}(t), \\ a_{\mathbf{p}}^{(+)} &= \alpha_{-\mathbf{p}}^*(t) b_{\mathbf{p}}^{(-)}(t) - \beta_{-\mathbf{p}}(t) b_{-\mathbf{p}}^{(+)}(t), \end{aligned} \quad (6.48)$$

причем условия обратимости и сохранения коммутаторов сводятся к равенству

$$|\alpha_{\mathbf{p}}(t)|^2 - |\beta_{\mathbf{p}}(t)|^2 = 1. \quad (6.49)$$

Уравнения (5.27) для коэффициентов диагонализующего гамильтониан преобразования приводят в данном случае к тождеству

$$E^2(\mathbf{p}, t) - |F(\mathbf{p}, t)|^2 = 1 \quad (6.50)$$

и к формуле для отношения коэффициентов

$$\frac{\beta_{\mathbf{p}}(t)}{\alpha_{\mathbf{p}}(t)} = \frac{E(\mathbf{p}, t) - 1}{F^*(\mathbf{p}, t)}, \quad |\beta_{\mathbf{p}}(t)|^2 = \frac{E(\mathbf{p}, t) - 1}{2}, \quad (6.51)$$

Очевидно, что $|\beta_{\mathbf{p}}|^2$ является мерой неадиабатичности осциллятора.

Как и в фермионном случае, операторы $b_{\mathbf{p}}^{(\pm)}(t)$, $b_{\mathbf{p}}^{*\pm}(t)$ — это операторы рождения и уничтожения физических частиц в момент t , а состояние $|0_t\rangle$, уничтожаемое операторами $b_{\mathbf{p}}^{(-)}(t)$, $b_{\mathbf{p}}^{*\pm}(t)$, — физический вакуум.

Среднее от оператора числа бозонных пар, рожденных из вакуумного при $t \rightarrow -\infty$ состояния, определяется равенством (5.31) [100, 103, 110, 117]:

$$\begin{aligned} N_{\mathbf{p}}^{(0)}(t) &= \langle 0_{-\infty} | b_{\mathbf{p}}^{*+}(t) b_{\mathbf{p}}^{(-)}(t) | 0_{-\infty} \rangle = \\ &= \langle 0_{-\infty} | b_{\mathbf{p}}^{(+)}(t) b_{\mathbf{p}}^{*-}(t) | 0_{-\infty} \rangle = |\beta_{\mathbf{p}}(t)|^2 \delta^3(\mathbf{p} = 0). \end{aligned} \quad (6.52)$$

Число реальных частиц, рожденных внешним полем в единице объема за все время его существования

$$n^{(0)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} n_{\mathbf{p}}^{(0)}(t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \lim_{t \rightarrow +\infty} \int d^3 p |\beta_{\mathbf{p}}(t)|^2. \quad (6.53)$$

Формулы (6.47), (6.51) и (6.53) выражают число родившихся пар через асимптотики решений осцилляторного уравнения (6.42). Тем самым задача о рождении бозонов сведена к задаче о падении плоской волны на вещественный потенциальный барьер. Как в фермионном, так и в бозонном случаях рассматриваемые решения осцилляторных уравнений (6.12) и (6.42) характеризуются при $t \rightarrow -\infty$ определенным знаком частоты. Асимптотики же этих решений при $t \rightarrow +\infty$ содержат слагаемые с обоими знаками частоты, причем отсутствовавший на $-\infty$ член входит с множителем $\beta_{\mathbf{p}}(+\infty)$. Появление этого члена означает параметрическое возбуждение осциллятора со временем при изменении его частоты. Поэтому в однородном поле задача о рождении пар эквивалентна задаче о параметрическом возбуждении осциллятора.

В отличие от фермионного случая в состоянии с импульсом \mathbf{p} может родиться любое число бозонов. Пусть $v_{\mathbf{p}}$ — относительная вероятность рождения одной пары, а $c_{\mathbf{p}}$ — вероятность того события, что в состоянии с импульсом \mathbf{p} не родится ни одной частицы, тогда

$$n_{\mathbf{p}}^{(0)} = c_{\mathbf{p}} \sum_{n=1}^{\infty} n v_{\mathbf{p}}^n = c_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}} / (1 - v_{\mathbf{p}})^2 = v_{\mathbf{p}} / (1 - v_{\mathbf{p}}) \quad (6.54)$$

(так как $c_{\mathbf{p}} = 1 - v_{\mathbf{p}}$).

Сравнение (6.52) и (6.54) с учетом (6.49) показывает, что, подобно фермионному случаю, относительная вероятность рождения пары $v_p = |\beta_p/\alpha_p|^2$.

Если при $t \rightarrow -\infty$ скалярное поле находится в состоянии $|\chi\rangle$, содержащем, в частности, m частиц и n античастиц с импульсом p ($m, n = 0, 1, 2, \dots$), то среднее число частиц и античастиц в любой момент дается равенствами

$$\begin{aligned} \langle \chi | b_p^{(+)*} b_p^{(-)} | \chi \rangle &= m + (1 + n + m) |\beta_p|^2, \\ \langle \chi | b_p^{(+)*} \tilde{b}_p^{(-)} | \chi \rangle &= n + (1 + m + n) |\beta_p|^2. \end{aligned}$$

Таким образом, наличие бозонов в состоянии с импульсом p приводит к усилению эффекта их рождения.

В заключение отметим, что, хотя в формулы (6.28) и (6.47) (а значит, и в выражения для плотностей числа частиц) входят значения вектор-потенциала $A_{3\pm}$, все результаты калибровочно инвариантны. Действительно, компоненты физического импульса при $t \rightarrow \pm\infty$ есть

$$P_i = p_i, \quad i = 1, 2; \quad P_{3\pm} = p_3 - eA_{3\pm}. \quad (6.55)$$

Поскольку согласно (6.2) и (6.3)

$$A^3(t) = - \int_{-\infty}^t E_z(t') dt' + A^3, \quad (6.56)$$

то импульс, переданный частице полем, равен

$$P_+^3 - P_-^3 = e(A_-^3 - A_+^3) = e \int_{-\infty}^{\infty} E_z(t) dt \quad (6.57)$$

и определяется только напряженностью поля.

Комбинацию $(p_3 - eA_3)$, от которой зависит $|\beta_p|^2$, следует обозначить через P_3 , после чего получим распределения плотностей рожденных фермионов и бозонов по физическому импульсу. При этом в качестве переменной интегрирования в (6.39) и (6.53) фигурирует P_3 .

Примеры явного нахождения асимптотик осцилляторных уравнений (6.12) и (6.42) приведены в § 7.1 и 7.2 (см. также обзор [118]).

§ 6.3. Свойства конденсата из рожденных пар

Как следует из формул (6.37) и (6.52), в однородном поле частица и античастица рождаются с противоположными импульсами, так что суммарный импульс рожденной пары равен нулю. Состояние $|0_{-\infty}\rangle$, являющееся вакуумным при $t \rightarrow -\infty$, при $t > -\infty$ содержит некоторое число родившихся пар, и его можно интерпретировать как

конденсат из пар частица — античастица с нулевым суммарным импульсом. Этот конденсат характеризуется определенными значениями макроскопических наблюдаемых величин, а именно плотностью энергии, главными значениями давления и током, текущим вдоль третьей оси. Для вычисления этих макронаблюдаемых необходимо рассмотреть средние значения соответствующих операторов в состоянии $|0_{-\infty}\rangle$. Такие средние значения даже в отсутствие внешнего поля обращаются в бесконечность, для устранения которой следует привести операторы к нормальной форме (т. е. отбросить вклад нулевых вакуумных колебаний). При наличии нестационарного внешнего поля физическим вакуумным состоянием является определенное в (6.36) состояние $|0_t\rangle$. Поэтому нормальная форма оператора A должна быть определена согласно [119]:

$$N_t(A) = A - \langle 0_t | A | 0_t \rangle. \quad (6.58)$$

Приведение к нормальной форме (6.58) эквивалентно нормальному упорядочению относительно операторов физических частиц $b(\pm)$.

Плотность энергии и главные значения давления рожденных частиц записываются в виде

$$\varepsilon^{(s)}(t) = \langle 0_{-\infty} | N_t(T_{00}^{(s)}) | 0_{-\infty} \rangle, \quad P_{\beta}^{(s)}(t) = \langle 0_{-\infty} | N_t(T_{\beta\beta}^{(s)}) | 0_{-\infty} \rangle, \quad (6.59)$$

где $T_i^{k(s)}$ — тензор энергии—импульса скалярного ($s = 0$) или дираковского ($s = 1/2$) поля [при $s = 0$ имеется в виду метрический тензор энергии-импульса (1.6)].

С использованием (1.40), (6.23), (6.31) и (6.36) в фермионном случае получаем [377]:

$$\varepsilon^{(1/2)} = \frac{1}{2\pi^3} \int d^3 p \omega s; \quad (6.60)$$

$$\left. \begin{aligned} P_{\perp}^{(1/2)} &\equiv P_1^{(1/2)} = P_2^{(1/2)} = \frac{1}{4\pi^3} \int d^3 p \frac{p_{\perp}^2}{\omega} \left(s + \frac{\Pi_3}{2M} u \right), \\ P_{\parallel}^{(1/2)} &\equiv P_3^{(1/2)} = \frac{1}{2\pi^3} \int d^3 p \frac{\Pi_3^2}{\omega} \left(s - \frac{M}{2\Pi_3} u \right), \end{aligned} \right\} \quad (6.61)$$

где $M^2 = m^2 + p_{\perp}^2$, $s = s(\mathbf{p}, t) \equiv |\beta_{\mathbf{p}}(t)|^2$ определено в (6.28), (6.34), а величина $u = u(\mathbf{p}, t) \equiv -2 \operatorname{Re} [\alpha_{\mathbf{p}} \beta_{\mathbf{p}} \exp(-2i \int \omega dt)]$ выражается через решения уравнения (6.12) следующим образом:

$$u(\mathbf{p}, t) = -\frac{2M}{\omega} (|f^{(+)}'|^2 - \omega^2 |f^{(+)}|^2). \quad (6.62)$$

При этом

$$\langle 0_{-\infty} | N_t(T_{ik}^{(s)}) | 0_{-\infty} \rangle = 0, \quad i \neq k \quad (6.63)$$

Аналогичные выражения можно получить для конденсата бозонных пар:

$$\varepsilon^{(0)} = \frac{1}{4\pi^3} \int d^3 p \omega s; \quad (6.64)$$

$$\left. \begin{aligned} P_{\perp}^{(0)} \equiv P_1^{(0)} = P_2^{(0)} &= \frac{1}{8\pi^3} \int d^3 p \frac{p_{\perp}^2}{\omega} \left[s + \left(\frac{1}{2} - \frac{\omega^2}{3p_{\perp}^2} \right) u \right], \\ P_{\parallel}^{(0)} \equiv P_3^{(0)} &= \frac{1}{4\pi^3} \int d^3 p \frac{\Pi_3^2}{\omega} \left[s + \left(\frac{1}{2} - \frac{\omega^2}{6\Pi_3^2} \right) u \right], \end{aligned} \right\} (6.65)$$

где $s = |\beta_p(t)|^2$ определено в (6.47), (6.51), а $u(p, t) = \text{Re} [\alpha_p \beta_p \exp(-2i \int \omega dt)]$ выражается через решения уравнения (6.42) в виде

$$u = -\frac{1}{2\omega\omega_-} [|g^{(+)}|^2 - \omega^2 |g^{(+)}|^2]. \quad (6.66)$$

В пренебрежении рождением частиц эти величины будут вычислены в § 9.1 и интерпретированы как поляризация вакуума. При $t \rightarrow +\infty$ (6.60), (6.61), (6.64), (6.65) дают плотность энергии и давление реальных фермионных и бозонных пар, рожденных полем за все время его существования (результаты вычисления для поля специального вида приведены в § 7.1).

Однородность внешнего поля приводит к тому, что рассматриваемый конденсат имеет нулевой импульс. Это проявляется в том, что оператор импульса \hat{P}_α является диагональной квадратичной формой как в терминах операторов $a^{(\pm)}$, так и в терминах операторов $b^{(\pm)}(t)$.

Важной характеристикой конденсата является ток родившихся частиц. Простое вычисление с использованием (1.41), (1.5), а также (6.31) и (6.48) приводит к равенствам:

$$\langle 0_{-\infty} | N_t (J_k^{(s)}(x)) | 0_{-\infty} \rangle = 0, \quad k = 0, 1, 2; \quad (6.67)$$

$$J_3^{(1/2)} = \langle 0_{-\infty} | N_t (J_3^{(1/2)}(x)) | 0_{-\infty} \rangle = \frac{1}{2\pi^3} \int d^3 p \frac{\Pi_3}{\omega} \left(s - \frac{M}{2\Pi_3} u \right); \quad (6.68)$$

$$J_3^{(0)} = \langle 0_{-\infty} | N_t (J_3^{(0)}(x)) | 0_{-\infty} \rangle = \frac{1}{4\pi^3} \int d^3 p \frac{\Pi_3}{\omega} \left(s + \frac{1}{2} u \right). \quad (6.69)$$

Таким образом, ток родившихся частиц течет по направлению внешнего поля.

Выше дана интерпретация состояния $|0_{-\infty}\rangle$ как конденсата из пар физических частиц, определенных в момент t . Можно, наоборот, интерпретировать физическое вакуумное состояние $|0_t\rangle$ как конденсат из пар частица — античастица, определенных при $t \rightarrow -\infty$.

Возможность такой интерпретации видна из легко проверяемого с учетом (6.31) и (6.48) соотношения

$$\langle 0_t | \hat{a}^{(+)} a^{(-)} | 0_t \rangle = \langle 0_{-\infty} | b^{(+)}(t) b^{(-)}(t) | 0_{-\infty} \rangle = |\beta(t)|^2. \quad (6.70)$$

Интересно рассмотреть природу вакуумного состояния $|0_t\rangle$ более подробно. В гл. 5 для электромагнитного поля произвольного вида найдена связь между состояниями $|0_{-\infty}\rangle$ и $|0_{+\infty}\rangle$ [формулы (5.34), (5.35), (5.52) и (5.53)]. В случае однородного электрического поля, выражая состояние $|0_t\rangle$ через $|0_{-\infty}\rangle$, получаем в фермионном и бозонном случаях соответственно

$$|0_t\rangle = \prod_{p,r} |\alpha_p| \exp \left\{ -\frac{\beta_p}{\alpha_p} \hat{a}_{pr}^{*(+)} a_{pr}^{(+)} \right\} |0_{-\infty}\rangle, \quad (6.71)$$

$$|0_t\rangle = \prod_p \frac{1}{|\alpha_p|} \exp \left\{ -\frac{\beta_p}{\alpha_p} \hat{a}_p^{*(+)} a_p^{(+)} \right\} |0_{-\infty}\rangle, \quad (6.72)$$

где α_p и β_p — коэффициенты преобразований Боголюбова (6.31) и (6.48). Преобразование фермионных операторов (6.31) в матричной форме есть

$$\begin{pmatrix} a_{pr}^{(-)} \\ a_{-pr}^{(+)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_p^* & -\beta_p \\ \beta_p^* & \alpha_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{pr}^{(-)} \\ b_{-pr}^{(+)} \end{pmatrix} \equiv U_p \begin{pmatrix} b_{pr}^{(-)} \\ b_{-pr}^{(+)} \end{pmatrix}. \quad (6.73)$$

Как следует из (6.31) и (6.32), U_p — унитарная унимодулярная матрица. Это означает, что множество всех матриц U_p образует группу $SU(2)$, которая является, таким образом, динамической группой симметрии задачи о рождении фермионов однородным полем [116] (о динамических симметриях см. монографию [120]). Любое состояние можно получить действием операторов $T(U_p)$ на состояние $|0\rangle$, где $T(U_p)$ — представление группы $SU(2)$ в гильбертовом пространстве. Множество всех таких состояний называется системой *обобщенных когерентных состояний* типа $\{T, |0\rangle\}$ (см. обзор [121]). Легко убедиться в том, что вероятность рождения пары равна квадрату модуля матричного элемента оператора $T(U_p)$ между состоянием $|0\rangle$ и состоянием, содержащим пару.

Аналогично каноническое преобразование бозонных операторов можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} a_p^{(-)} \\ a_{-p}^{(+)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_p^* & -\beta_p \\ -\beta_p^* & \alpha_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_p^{(-)} \\ b_{-p}^{(+)} \end{pmatrix} \equiv V_p \begin{pmatrix} b_p^{(-)} \\ b_{-p}^{(+)} \end{pmatrix}. \quad (6.74)$$

Вследствие условия (6.49) матрица V_p унимодулярна, однако она не унитарна. Вместо условия унитарности справедливо равенство

$$V_p^+ = \sigma_3 V_p^{-1} \sigma_3, \quad (6.75)$$

означающее, что матрицы V_p образуют группу $SU(1,1)$, которая является динамической группой симметрии задачи о рождении скалярных пар. Подобно фермионному случаю, физический вакуум

$|0_t\rangle$ из (6.72) есть обобщенное когерентное состояние, построенное по группе $SU(1,1)$, а вероятность рождения пары скалярных частиц дается квадратом модуля матричного элемента оператора представления этой группы [117].

С использованием формул (6.71) и (6.72), подобно (5.46), получаем для фермионов и бозонов

$$|\langle 0_{-\infty} | 0_t \rangle|^2 = \prod_{pr} |\alpha_p(t)|^2, \quad |\langle 0_{-\infty} | 0_t \rangle|^2 = \prod_p \frac{1}{|\alpha_p(t)|^2}. \quad (6.76)$$

Напомним, что для фермионов $|\alpha_p(t)|^2 < 1$, а для бозонов $|\alpha_p(t)|^2 > 1$. Если внешнее поле однородно во всем бесконечном пространстве, то рождается бесконечное число пар и величины (6.76) (вероятности перехода вакуума в вакуум) обращаются в нуль. Это означает, что вакуумные состояния $|0_{-\infty}\rangle$ и $|0_t\rangle$ ортогональны друг другу [100] (см. также работу [122]).

Если построить на вакуумах $|0_{-\infty}\rangle$ и $|0_t\rangle$ два гильбертовых пространства фоковских состояний $\mathcal{H}_{-\infty}$ и \mathcal{H}_t , то все состояния одного из них также оказываются ортогональными любому состоянию другого. Таким образом, в пространствах $\mathcal{H}_{-\infty}$ и \mathcal{H}_t реализуются унитарно неэквивалентные представления коммутационных (антикоммутационных) соотношений, а преобразования (6.73) и (6.74), как уже отмечалось выше, являются несобственными (математический аппарат, позволяющий строго описывать такие ситуации, кратко охарактеризован в гл. 2 и 3).

§ 6.4. Рождение пар периодическим во времени полем

В предыдущих параграфах рассматривалось однородное электрическое поле с произвольной зависимостью от времени. Существенно было лишь то, что при $t \rightarrow \pm \infty$ это поле гладко выключается. Теперь мы предположим, что в течение некоторого промежутка времени $[t_1, t_2]$ внешнее электрическое поле зависит от времени периодически с периодом T :

$$A_3(t + T) = A_3(t). \quad (6.77)$$

Реальные электромагнитные поля, создаваемые различными источниками, часто являются периодическими функциями t в течение определенного промежутка времени $(t_2 - t_1)$, причем величину этого промежутка можно в широких пределах варьировать по желанию экспериментатора. Поэтому представляет интерес вопрос о том, как зависит число родившихся частиц от числа периодов действия поля. Ниже показано, что эта зависимость является нетривиальной: плотность числа родившихся фермионов периодически колеблется со временем, а плотность числа бозонов с определенными импульсами экспоненциально нарастает. Эти результаты были независимо установлены в работах [123, 124] и впоследствии обсуждались в работе

[112] (впервые рождение пар периодическим электрическим полем рассматривалось в работе [92], однако там указанные эффекты не были выявлены вследствие недостаточной точности использованных приближений).

Предположим, что вне промежутка $[t_1, t_2]$ $A_3(t)$ является постоянной величиной $A_{3+} = A_{3-}$, причем $A_3(t)$ и $A'_3(t)$ остаются непрерывными при всех t . Для удобства предположим, что $t_1 = 0$ и $t_2 = nT$, где $n = 1, 2, 3, \dots$. Предположим также, что $A_3(t)$ можно продолжить на всю ось t как четную периодическую функцию t . Такая постановка задачи обеспечивает S -матричный характер рассматриваемой теории, но не соблюдает условия адиабатичности включения и выключения поля. Однако ниже нас будет интересовать зависимость плотности рождающихся пар от времени действия поля $\tau = nT$. При этом будем считать, что время включения и выключения $\Delta t \ll \tau$, вследствие чего условие адиабатичности для окончательного результата несущественно.

Рассмотрим параллельно фермионный и бозонный случаи. При $t \leq 0$ решения $f^{(+)}$, $g^{(+)}$ уравнений (6.12) и (6.42) есть

$$N_l \exp(i\omega_+(\mathbf{p})t), \quad l = 1, 2, \quad (6.78)$$

где N_l — нормировочный множитель

$$N_l^2 = \frac{1}{4\omega_+(\mathbf{p})(\omega_+(\mathbf{p}) + eA_{3+} - p_3)}$$

для фермионов и $N_2 = 1$ для бозонов. Здесь учтен тот факт, что в силу $A_{3+} = A_{3-}$ имеет место $\omega_+(\mathbf{p}) = \omega_-(\mathbf{p})$. При $t \geq nT$ решение (6.78) переходит в линейную комбинацию экспонент

$$\tilde{\alpha}_l \exp(i\omega_+(\mathbf{p})t) + \tilde{\beta}_l \exp(-i\omega_+(\mathbf{p})t), \quad (6.79)$$

где, как и выше, $l = 1$ для фермионов и $l = 2$ для бозонов.

Подставляя (6.79) в (6.38) и в (6.52), получаем плотности числа рожденных фермионов и бозонов:

$$n_{\mathbf{p}}^{(1/2)} = \frac{1}{2} \left[1 - 4(m^2 + p_{\perp}^2) (|\tilde{\alpha}_1|^2 - |\tilde{\beta}_1|^2) - \frac{eA_{3+} - p_3}{\omega_+} \right], \quad (6.80)$$

$$n_{\mathbf{p}}^{(0)} = (1/2) [|\tilde{\alpha}_2|^2 + |\tilde{\beta}_2|^2 - 1]. \quad (6.81)$$

Рассмотрим решения u_l , v_l уравнений (6.12) и (6.42), определив их начальными условиями:

$$\begin{cases} u_l(0) = 1; & v_l(0) = 0; \\ u'_l(0) = 0; & v'_l(0) = 1. \end{cases} \quad (6.82)$$

Эти решения зависят от \mathbf{p} как от параметра; здесь и ниже индекс \mathbf{p} опускается. Вронскиан этих решений

$$u_l(t)v'_l(t) - u'_l(t)v_l(t) = 1. \quad (6.83)$$

При $0 \leq t \leq nT$ решения $f^{(+)}$, $g^{(+)}$ уравнений (6.12), (6.42) можно представить в виде

$$N_l [u_l(t) + i\omega_+ (p) v_l(t)], \quad (6.84)$$

обеспечивающем гладкое сшивание с (6.78) вместе с первой производной в точке $t = 0$.

Остается гладко сшить (6.84) с (6.79) в точке $t = nT$. Условия сшивания дают

$$\tilde{\alpha}_l \exp(i\omega_+ nT) + \tilde{\beta}_l \exp(-i\omega_+ nT) = N_l [u_l(nT) + i\omega_+ v_l(nT)], \quad (6.85)$$

$$\tilde{\alpha}_l \exp(i\omega_+ nT) - \tilde{\beta}_l \exp(-i\omega_+ nT) = \frac{N_l}{i\omega_+} [u'_l(nT) + i\omega_+ v'_l(nT)].$$

Вследствие периодичности $A_3(t)$ величины u_l , v_l и их производные в точках $t = nT$ удовлетворяют некоторым равенствам. Желая выразить плотности числа частиц (6.80) и (6.81) через эти величины, установим сперва равенства, которым они удовлетворяют. Для того чтобы сделать это в наиболее общем случае, рассмотрим уравнение

$$f''(t) + R(t)f(t) = 0, \quad R(t+T) = R(t), \quad R(-t) = R^*(t) \quad (6.86)$$

в интервале $-\infty < t < \infty$. Введем матрицу

$$W(t) = \begin{vmatrix} u(t) & u'(t) \\ v(t) & v'(t) \end{vmatrix}, \quad \det W(t) = 1, \quad (6.87)$$

где $u(t)$, $v(t)$ — решения (6.86), удовлетворяющие начальным условиям (6.82).

В частности, при соответствующем выборе $R(t)$ уравнение (6.86) совпадает с (6.12) или (6.42), рассматриваемыми в интервале $0 \leq t \leq nT$. В этом же интервале $W(t)$ совпадает с матрицами

$$B_l(t) = \begin{vmatrix} u_l(t) & u'_l(t) \\ v_l(t) & v'_l(t) \end{vmatrix}. \quad (6.88)$$

В силу периодичности $R(t)$ функции $u(t+T)$, $v(t+T)$ также являются решениями уравнения (6.86). Поэтому их можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} u(t+T) &= u(T)u(t) + u'(T)v(t), \\ v(t+T) &= v(T)u(t) + v'(T)v(t). \end{aligned} \right\} \quad (6.89)$$

Из (6.87) и (6.89) следует

$$W(t+T) = W(T)W(t). \quad (6.90)$$

Отсюда сразу же заключаем, что

$$W(nT) = [W(T)]^n. \quad (6.91)$$

Аналогично, используя (6.86), имеем

$$u^*(-t) = u(t), \quad v^*(-t) = -v(t). \quad (6.92)$$

Определим далее операцию, обозначаемую Δ , которая каждой матрице 2×2 сопоставляет комплексно-сопряженную ей матрицу с переставленными местами элементами a_{11} и a_{22} . Очевидно, что введенная операция обладает свойством

$$(W_1 W_2)^\Delta = W_2^\Delta W_1^\Delta. \quad (6.93)$$

Из (6.87), (6.92) легко получить, что

$$W^\Delta(-t) = W^{-1}(t). \quad (6.94)$$

Рассматривая (6.90) при $t = -T/2$ с учетом (6.94), приходим к равенству

$$W(T) = W(T/2) W^\Delta(T/2), \quad (6.95)$$

откуда в силу (6.93) сразу же следует

$$W^\Delta(T) = W(T). \quad (6.96)$$

Используя (6.91), (6.93) и (6.96), получаем соотношения

$$W^\Delta(nT) = [W(T)]^{n\Delta} = [W^\Delta(T)]^n = [W(T)]^n = W(nT), \quad (6.97)$$

которые и представляют собой искомые равенства:

$$v'_i(nT) = u_i^*(nT), \quad u_i'^*(nT) = u'_i(nT), \quad v_i^*(nT) = v_i(nT), \quad (6.98)$$

связывающие значения решений u_i , v_i и их производных в точках $t = nT$.

Из (6.85) и (6.98) после преобразований находим:

$$\begin{aligned} |\tilde{\alpha}_i|^2 + |\tilde{\beta}_i|^2 &= \frac{N_i^2}{2\omega_+^2} [\omega_+^4 v_i^2(nT) + u_i'^2(nT) + 2\omega_+^2 u_i(nT) v_i'(nT) - \\ &\quad - i\omega_+ (\omega_+^2 v_i(nT) + u_i'(nT)) (u_i(nT) - v_i'(nT))], \\ |\tilde{\alpha}_i|^2 - |\tilde{\beta}_i|^2 &= \frac{N_i^2}{2\omega_+^2} [\omega_+^2 (u_i^2(nT) + v_i^2(nT)) - 2\omega_+^2 v_i(nT) u_i'(nT) + \\ &\quad + i\omega_+ (\omega_+^2 v_i(nT) + u_i'(nT)) (u_i(nT) - v_i'(nT))]. \end{aligned} \quad (6.99)$$

В бозонном случае ($l = 2$, $N_2 = 1$) в силу вещественности уравнения (6.42) имеем $u_2^* = u_2$. Подставляя с учетом этого (6.99) в (6.81) и используя (6.83) и (6.98), получаем

$$n_p^{(0)} = \frac{1}{4\omega_+^2} [\omega_+^2 v_2(nT) + u_2'(nT)]^2. \quad (6.100)$$

В фермионном случае [$l = 1$, N_1 определено в (6.78)], подставляя (6.99) в (6.80) и используя (6.98), имеем

$$n_p^{(1/2)} = \frac{\text{Im } u_1(nT)}{2\omega_+} \left(1 - \frac{eA_{3+} - p_3}{\omega_+} \right) \times \\ \times [2\omega_+ \text{Im } u_1(nT) + \omega_+^2 v_1(nT) + u_1'(nT)]. \quad (6.101)$$

Выражение (6.101) допускает существенное упрощение. Действительно, легко видеть, что из двух произвольных решений (6.12) $f(t)$ и $h(t)$ можно составить интеграл движения

$$V[f, h] = \omega^2 f^* h + f^* h' - i(eA_3 - p_3)(f^* h' - f'^* h) = \text{const}. \quad (6.102)$$

Записывая (6.102) для введенных выше решений u_1, v_1 и совершая преобразования с учетом (6.83) и (6.98), получаем

$$u_1(nT) [\omega_+^2 v_1(nT) + u_1'(nT) - 2(eA_{3+} - p_3) \text{Im } u_1(nT)] = 0. \quad (6.103)$$

Преобразуя (6.101) с учетом (6.103), приходим к результату

$$n_p^{(1/2)} = [(m^2 + p_\perp^2)/\omega_+^2] \text{Im}^2 u_1(nT). \quad (6.104)$$

Теперь можно, основываясь на формулах (6.100) и (6.104), найти явную зависимость $n_p^{(1/2)}$ и $n_p^{(0)}$ от числа периодов n . Для этого достаточно выразить значения функций u_1, v_2, u_2' при $t = nT$ через значения этих же функций при $t = T$. Для решения поставленной задачи рассмотрим матрицу $B_l(t)$, введенную в (6.88). С учетом (6.82), (6.83) имеем

$$\det B_l(t) = 1, \quad B_l(0) = I, \quad (6.105)$$

где I — единичная матрица.

Поскольку $A_3(t)$ есть периодическая функция на промежутке $[0, nT]$, то $u_l(t+T), v_l(t+T)$ являются решениями уравнений (6.12), (6.42) при $0 \leq t \leq (n-1)T$. Отсюда, подобно (6.89) — (6.91), сразу же получаем

$$B_l(nT) = [B_l(T)]^n. \quad (6.106)$$

Для любой унимодулярной матрицы C второго порядка справедливо равенство [124]

$$C^n = \frac{\text{sh } nD}{\text{sh } D} C - \frac{\text{sh}(n-1)D}{\text{sh } D} I, \quad (6.107)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $\text{ch } D = (1/2) \text{Sp } C$. Действительно, при $n = 2$ из (6.107) вытекает

$$C^2 = (\text{Sp } C) C - I, \quad (6.108)$$

т. е. верное соотношение, являющееся частным случаем теоремы Гамильтона — Кели для матриц 2×2 с определителем 1. Доказательство (6.107) для любого n проводится с помощью индукции.

Применяя (6.107) к матрицам B_l , имеем

$$B_l(nT) = \frac{\text{sh } nD_l}{\text{sh } D_l} B_l(T) - \frac{\text{sh } (n-1) D_l}{\text{sh } D_l} I, \quad (6.109)$$

где $\text{ch } D_l = (1/2) [u_l(T) + v_l'(T)]$. Отметим, что уравнение (6.42) на промежутке $[0, nT]$ есть уравнение класса Хилла. При этом отношение D_2/T является его характеристическим показателем [125].

Сравнивая матричные элементы (1.1), (1.2) и (2.1) в правой и левой частях (6.109) с учетом (6.88), получаем:

$$\left. \begin{aligned} u_l(nT) &= \frac{\text{sh } nD_l}{\text{sh } D_l} u_l(T) - \frac{\text{sh } (n-1) D_l}{\text{sh } D_l}, \\ u_l'(nT) &= \frac{\text{sh } nD_l}{\text{sh } D_l} u_l'(T), \quad v_l(nT) = \frac{\text{sh } nD_l}{\text{sh } D_l} v_l(T). \end{aligned} \right\} \quad (6.110)$$

Равенства (6.110) решают задачу о выражении значений функций u_l , u_l' , v_l в точке nT через значения тех же функций в точке T . Подставляя (6.110) в (6.100), приходим к результату

$$n_p^{(0)} = \frac{\text{sh}^2 nD_2}{\text{sh}^2 D_2} \frac{[\omega_+^2 + v_2(T) + u_2'(T)]^2}{4\omega_+^2}, \quad (6.111)$$

где $\text{ch } D_2 = u_2(T)$.

Совершенно аналогично, подставляя (6.110) в (6.104), получаем в фермионном случае

$$n_p^{(1/2)} = \frac{m^2 + p_\perp^2}{\omega_\mp^2} \frac{\text{sh}^2 nD_1}{\text{sh}^2 D_1} \text{Im}^2 u_1(T), \quad (6.112)$$

где $\text{ch } D_1 = \text{Re } u_1(T)$.

Из формул (6.34) и (6.38) с использованием очевидного соотношения $|E| < 1$ [оно вытекает из тождества (6.29)] следует неравенство $n_p^{(1/2)} < 1$ при любом n , означающее выполнение принципа Паули. Из этого неравенства и (6.112) заключаем, что $|\text{Re } u_1(T)| < 1$, т. е. $D_1 \equiv id_1$, где d_1 — вещественное число, $0 < d_1 < \pi$. Формула (6.112) переписывается в виде

$$n_p^{(1/2)} = \frac{m^2 + p_\perp^2}{\omega_\mp^2} \frac{\sin^2 nd_1}{\sin^2 d_1} \text{Im}^2 u_1(T), \quad (6.113)$$

$$\cos d_1 = \text{Re } u_1(T).$$

Формулы (6.111) и (6.113) дают искомую зависимость плотности чисел рожденных бозонов и фермионов от промежутка времени, в течение которого включено периодическое внешнее поле. Эта зависимость обладает рядом интересных особенностей. Согласно (6.113) плотность числа родившихся фермионов зависит от n периодически при всех p . Неравенство $n_p^{(1/2)} < 1$, очевидно, эквивалентно устойчивости решений осцилляторного уравнения (6.12), когда $\tau \rightarrow \infty$,

принимая лишь значения, кратные периоду: $\tau = nT$, $n \rightarrow \infty$. Можно доказать устойчивость любого решения (6.12) и при произвольном способе устремления τ к бесконечности. Действительно, записывая интеграл движения (6.102) при $h(t) = f(t)$, имеем

$$V[f, f] = \omega^2 (\text{Re}^2 f + \text{Im}^2 f) + \text{Re}^2 f' + \text{Im}^2 f' + \\ + 2(eA_3 - p_3)(\text{Re} f \text{Im} f' - \text{Im} f \text{Re} f') = \text{const.} \quad (6.114)$$

Вычислим (6.114) в точках экстремума величины $|f(t)|^2$, в которых выполняется

$$d|f|^2/dt = 0, \text{ т. е. } \text{Re} f \text{Re} f' + \text{Im} f \text{Im} f' = 0. \quad (6.115)$$

Подставляя (6.115) в (6.114), получаем

$$V[f, f] = |f(t)|^2 [m^2 + p_{\perp}^2 + (\text{Im} f'/\text{Re} f + (p_3 - eA_3))^2]. \quad (6.116)$$

Здесь предположено $\text{Re} f \neq 0$ (случай $\text{Re} f = 0$ рассматривается аналогично). Из (6.116) следует

$$|f(t)|^2 \leq V[f, f]/(m^2 + p_{\perp}^2), \quad (6.117)$$

что и доказывает устойчивость любого решения (6.12) при $\tau \rightarrow \infty$.

Иная ситуация имеет место для бозонов. Как видно из (6.111), возможны случаи $n_{\mathbf{p}}^{(0)} \sim n^2$ (при $u_2(T) = \pm 1$) и $n_{\mathbf{p}}^{(0)} \sim \sim \exp[\varepsilon(\mathbf{p})n]$, $\varepsilon(\mathbf{p}) > 0$ (при $|u_2(T)| > 1$). При $u_2(T) > 1$ характеристический показатель D_2/T можно выбрать вещественным, если же $u_2(T) < -1$, то можно считать вещественным $D_2/T = -i\pi/T$. В обоих случаях все решения уравнения (6.42) неустойчивы при $\tau \rightarrow \infty$ [125], чему и соответствует экспоненциальный рост плотности числа родившихся частиц. Анализ диаграммы устойчивости [125] уравнения типа (6.42) показывает, что существует бесчисленное множество значений импульса \mathbf{p}_k , в окрестностях которых $n_{\mathbf{p}_k}^{(0)} \sim \exp[\varepsilon(\mathbf{p}_k)n]$. Здесь мы имеем пример параметрического резонанса, который наступает, когда характеристики рождающихся частиц (масса, импульс) и внешнего поля (напряженность, частота) находятся в определенном отношении. Плотность родившихся бозонов может, подобно фермионному случаю, зависеть от n и периодически. Это имеет место при тех \mathbf{p} , для которых $-1 < u_2(T) < 1$ (область устойчивости решения). Физическое объяснение возможности такой зависимости состоит в том, что внешнее поле обладает способностью рождать и поглощать пары, и при определенных значениях импульсов (для фермионов при всех импульсах) разность между числом рожденных и поглощенных пар может в среднем оставаться постоянной.

Как отмечено в работе [112], наличие трех типов зависимости плотности числа рожденных пар от времени для скалярных частиц и только одного типа — для дираковских частиц объясняется различием динамических групп симметрии в обоих этих случаях. Действительно, как показано в предыдущем параграфе, группой симметрии

задачи о рождении скалярных пар является группа $SU(1,1)$. Эта группа содержит три однопараметрические подгруппы, элементы которых нельзя перевести друг в друга преобразованием подобия $V \rightarrow S^{-1}VS$. Матрицам V из разных подгрупп как раз и соответствуют различные режимы зависимости плотности числа рожденных пар от времени. В то же время группой симметрии задачи о рождении дираковских частиц является $SU(2)$, все элементы которой можно привести к одинаковому виду. Поэтому имеется единственный тип зависимости плотности от времени.

Если время действия внешнего поля велико по сравнению с его периодом $\tau \gg T$ и в то же время мало по сравнению с обратной вероятностью рождения (сама вероятность при этом предполагается достаточно малой), то плотности числа рожденных фермионов и бозонов зависят от времени приблизительно по линейному закону. Поэтому при выполнении указанных условий можно ввести вероятность рождения в единицу времени. Если же $E \gg E_{кр} = m^2/e$, то вероятность рождения значительна и такое понятие, как вероятность рождения в единицу времени, теряет свой смысл.

Проиллюстрируем приведенные выше выводы на примере электрического поля, зависящего от времени по гармоническому закону [123]:

$$A_z(t) = a_0 \cos k_0 t. \quad (6.118)$$

Рассматривая для простоты рождающиеся скалярные частицы с импульсом, перпендикулярным к направлению внешнего поля ($p_z = 0$), преобразуем (6.42) к уравнению Маттье

$$d^2g/dz^2 + (a - 2q \cos 2z)g = 0, \quad (6.119)$$

где обозначено

$$a = \frac{2m^2 + 2p_{\perp}^2 + e^2 a_0^2}{2k_0^2}; \quad q = \frac{e^2 a_0^2}{4k_0^2}, \quad z = k_0 t - \frac{\pi}{2}. \quad (6.120)$$

Диаграмма устойчивости уравнения Маттье (6.119) изображена на рис. 3 (области значений параметров a , q , при которых решения устойчивы, заштрихованы).

Как видно из рис. 3, при фиксированном параметре q (значение которого определяется амплитудой и частотой внешнего поля) параметр a с ростом p_{\perp}^2 принимает значения не только из областей устойчивости, но и из узких [так как, согласно (6.120) $a > 2q$] областей неустойчивости. Если q таково, что $q \ll 2N^{3/2}$ (где N — номер зоны неустойчивости), то неустойчивое решение (6.119) можно представить в виде [123]

$$g = \exp(\mu_N z) \varphi(z, \sigma), \quad \mu_N = -\frac{1}{2N} \frac{\sin 2\sigma}{[2^{N-1} (N-1)!]^2} q^N, \quad (6.121)$$

где пределы $\sigma \rightarrow 0$, $\sigma \rightarrow -\pi/2$ соответствуют выходу на границы зоны неустойчивости; φ — периодическая функция с периодом 2π . При $q \ll 4N$ можно считать $\varphi \approx \sin(Nz - \sigma)$. С использованием

(6.121) легко найти $v_2(T)$ и $u'_2(T)$ (здесь $T = 2\pi/k_0$) и получить по формуле (6.111) результат для плотности числа рожденных пар [123]

$$n_{pN}^{(0)} = \text{sh}^2(2\pi\mu_N n)/\sin^2 2\sigma \quad (6.122)$$

(напомним, что n — число периодов внешнего поля).

Аналогичный (6.122) результат получается и при учете отличных от нуля значений p_3 . Номер первой зоны неустойчивости, дающей вклад в эффект экспоненциального роста, можно определить из приближенного соотношения $N^2 \approx \approx m^2/k_0^2$, следующего из (6.120). Если подставить сюда массу π -мезона и частоту, соответствующую оптической длине волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см, то $N \approx 5,6 \cdot 10^7$. При таких N приближенные выражения (6.121) справедливы для значений напряженности поля $E < 10^{11}$ В/см. Однако столь большое значение номера первой дающей вклад в эффект зоны неустойчивости делает его практически ненаблюдаемым. Действительно, интегрирование по импульсам в формуле (6.122) показывает, что при указанных напряженностях поля время работы источника поля, требуемое для рождения одной пары из-за экспоненциального роста плотности (6.122), чрезвычайно велико.

Экспоненциальная зависимость плотности рожденных пар представляет физический интерес в других случаях. Если рассматривать внешние поля с оптическими частотами, то эффект может оказаться существенным при значениях напряженности поля, лишь на один-два порядка меньшей критического значения. Если же напряженности внешнего поля не столь велики, то экспоненциальное рождение возможно при высоких частотах $k_0 \sim m$, когда вклад в результат вносят уже первые зоны неустойчивости (см. рис. 3). Для создания полей с такими частотами потребовался бы гамма-лазер (оценки эффекта рождения частиц лазерным светом приведены в работе [126]).

§ 6.5. Метод мнимого времени в задачах о рождении пар

Как показано выше, вычисление вероятностей рождения пар однородным электрическим полем (6.3) сводится к нахождению асимптотики решения уравнений осцилляторного типа с вещественной или комплексной переменной частотой. Примеры точного решения таких

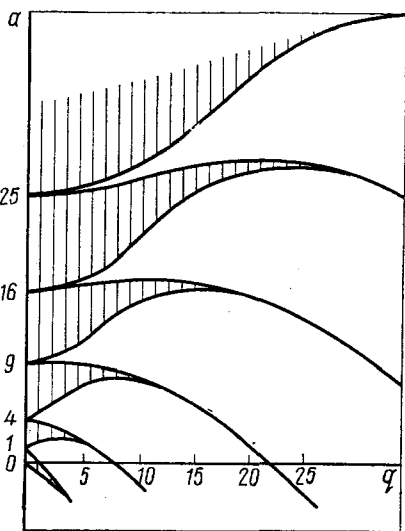


Рис. 3

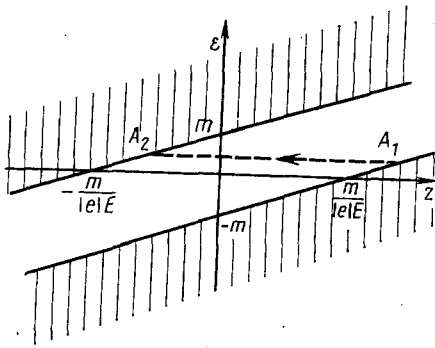


Рис. 4

картине просачивания частицы через потенциальный барьер (невозможного в классической теории) как происходящего при мнимых значениях времени [127]. Здесь будет кратко рассмотрено релятивистское обобщение метода мнимого времени, позволяющее вычислять вероятности рождения пар внешним полем [128, 129]. Оно применимо для не слишком сильных ($E \ll E_{\text{кр}}$) электрических полей, изменяющихся с частотой $k_0 \ll m$, и рассматривает процесс рождения пары переменным полем как туннелирование электрона из нижнего континуума в верхний через колеблющийся барьер. Приведенные ниже результаты относятся к случаю пространственно-однородного поля, однако сам метод применим к более широкому классу полей.

Энергия частиц из верхнего и нижнего континуумов при наличии электрического поля (6.3) есть

$$\varepsilon(p, t) = \sqrt{p^2 + m^2} - eE(t)z \quad (6.123)$$

(верхнему континууму отвечает положительное при вещественных $p = |\mathbf{p}|$ значение корня, нижнему — отрицательное). График зависимости (6.123) приведен на рис. 4 (области, в которых частица может находиться при действительных значениях времени, заштрихованы).

С течением времени угол наклона прямых на рисунке изменяется. Акт рождения пары наглядно изображается как просачивание частицы из точки A_1 , принадлежащей нижнему континууму, в точку A_2 верхнего континуума (при этом в точке A_2 наблюдается электрон, а в точке A_1 — дырка, интерпретируемая как позитрон). Ширина барьера, очевидно, равна $A_1A_2 = 2m/|e|E = 2E_{\text{кр}}/mE$, откуда вытекает, что при выполнении условия применимости рассматриваемого метода ($E \ll E_{\text{кр}}$) она значительно превосходит комптоновскую длину: $A_1A_2 \gg m^{-1}$.

Оказывается, что движение вдоль *подбарьерной траектории* A_1A_2 , запрещенное классической теорией, можно формально рассмат-

уравнений приведены в конце § 6.4 и в гл. 7, где рассматриваются электромагнитные поля специального вида. Однако в большинстве случаев точное решение (и даже его асимптотику) найти не удастся. Поэтому интересно рассмотреть различные приближенные методы.

Наиболее часто используемым методом приближенного решения нерелятивистских квантовомеханических задач является квазиклассическое приближение, одна из разновидностей которого приводит к наглядной

ривать в рамках этой теории как происходящее при мнимых значениях времени. При этом квантовомеханическая вероятность туннелирования частицы через барьер (т. е. вероятность рождения пары) определяется формулой

$$\omega \sim \exp(-2 \operatorname{Im} \Delta S), \quad (6.124)$$

где ΔS — приращение действия частицы при движении вдоль подбарьерной траектории от точки A_1 до точки A_2 .

Движению частицы от точки A_1 до точки A_2 соответствует изменение времени вдоль контура $A_1 B A_2$ на рис. 5, где через t_0^\pm обозначены особые точки классического действия.

Приведенную схему расчета проще всего проиллюстрировать на примере постоянного однородного электрического поля. В этом случае уравнения движения частицы имеют вид [88]

$$p = eEt, \quad z = \sqrt{p^2 + m^2}/eE. \quad (6.125)$$

Действие для частицы, движущейся в однородном электрическом поле, есть

$$S(t) = \int^t \mathcal{L} dt' = p(t) z(t) - \int^t \sqrt{p^2(t') + m^2} dt' \quad (6.126)$$

[нижний предел интегрирования не фиксируется, так как в соответствии с (6.124) нас интересует только ΔS].

Подставляя (6.125) в (6.126), в случае постоянного поля имеем

$$S = \frac{1}{2eE} \left(p \sqrt{p^2 + m^2} - m^2 \operatorname{Arsh} \frac{p}{m} \right). \quad (6.127)$$

Как видно из (6.127), функция S имеет две точки ветвления $p_0^\pm = \pm im$ или, в терминах переменной t , $t_0^\pm = \pm i m/eE$. В точках A_1 и A_2 (см. рис. 5) корень $\sqrt{p^2 + m^2} = \mp m$ соответственно. Очевидно, что первое слагаемое (6.127) не дает вклада в ΔS при движении по контуру $A_1 B A_2$. С учетом приведенных значений корня в точках A_1 и A_2 для приращения действия и вероятности рождения получаем

$$\Delta S = i\pi m^2/2 |e| E, \quad \omega \sim \exp(-\pi m^2/|e| E). \quad (6.128)$$

Формула (6.128) дает правильную зависимость вероятности рождения от напряженности поля (точные формулы, полученные с помощью явного решения уравнений осцилляторного типа, приведены в гл. 7).

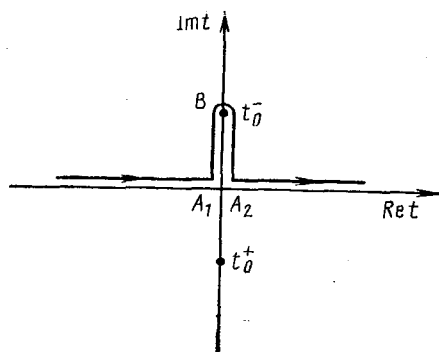


Рис. 5

Рассмотрим теперь однородное электрическое поле с произвольной зависимостью от времени. Напряженность поля удобно представить в виде

$$E(t) = Ef(t), \quad |f(t)| \leq f(0) = 1. \quad (6.129)$$

Для применения квазиклассического приближения, разновидностью которого является метод мнимого времени, необходимо, чтобы при подбарьерном движении $\Delta S \gg 1$. Это обеспечивается выполнением условий $E \ll E_{\text{кп}}$, $k_0 \ll m$. Относительно функции $f(t)$ предположим, что

$$f(t^*) = f^*(t), \quad f(-t) = f(t), \quad (6.130)$$

а также то, что ее можно продолжить как аналитическую функцию без особенностей на полосу $|\text{Im } t| < \text{const}$.

При подбарьерном движении время t — чисто мнимое. Введем вместо t вещественную переменную

$$\tau = -ik_0 t, \quad f(t) \equiv \tilde{f}(\tau). \quad (6.131)$$

Очевидно, что функция $\tilde{f}(\tau)$ вещественна на интервале $(-\tau_1, \tau_1)$, где τ_1 — ближайшая особенность функции \tilde{f} . Если ввести переменную u , связанную с импульсом соотношением $p = i m u$, и подставить эти обозначения в уравнения движения частицы в переменном поле

$$dp/dt = eE(t), \quad dz/dt = p / \sqrt{m^2 + p^2}, \quad (6.132)$$

то получаем для подбарьерного движения вещественные уравнения

$$u(\tau) = \frac{1}{\gamma} \int_0^\tau \tilde{f}(\tau') d\tau', \quad dz/d\tau = -u/k_0 \sqrt{1-u^2}, \quad (6.133)$$

где через γ обозначен параметр адиабатичности

$$\gamma = mk_0/|e| E = (k_0/m) (E_{\text{кп}}/E). \quad (6.134).$$

Отметим, что в области применимости метода мнимого времени параметр γ может принимать любые значения, так как один из двух независимых сомножителей в его определении (6.134) — малое, а другой — большое число. При $\gamma \ll 1$ (адиабатическая область) изменением поля за время туннелирования можно пренебречь и в первом приближении для вероятности рождения получается результат (6.128). При $\gamma \gg 1$ (поле изменяется быстро) получаются, как показано ниже, существенно иные результаты.

Как следует из (6.126), точки ветвления действия $S(t)$ определяются равенствами $p(t_0^\pm) = \pm i m$, т. е. $u = \pm 1$. Согласно (6.130) и (6.131) в терминах τ имеем $k_0 t_0^\pm = \pm i \tau_0$, где τ_0 можно найти из соотношения

$$\int_0^{\tau_0} \tilde{f}(\tau) d\tau = \gamma. \quad (6.135)$$

В точках A_1, A_2 (см. рис. 5, на входе под барьер и при выходе из под него) величина pz вещественна, поэтому

$$2 \operatorname{Im} \Delta S = 2 \operatorname{Im} \int_{A_1 B A_2} \sqrt{p^2 + m^2} dt = \operatorname{Im} \oint_C \frac{\sqrt{p^2 + m^2} dp}{eE(t)} \quad (6.136)$$

(где контур C охватывает обе точки ветвления $p = \pm im$).

Из (6.136) получаем

$$2 \operatorname{Im} \Delta S = \frac{\pi E_{\text{кр}}}{E} g(\gamma), \quad g(\gamma) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \psi(\gamma u) \sqrt{1-u^2} du. \quad (6.137)$$

Здесь $\psi(u) \equiv dt(u)/du$, $\tau = \tau(x)$ — функция, обратная функции

$$x = x(\tau) = \int_0^\tau \tilde{\varphi}(\tau') d\tau'. \quad (6.138)$$

Формула (6.137) решает вопрос о вычислении вероятности рождения пар при любом γ . Легко убедиться, что для постоянного поля ($\gamma = 0$) имеем $g(0) = 1$, так что возвращаемся к результату (6.128).

Как пример использования формулы (6.137) рассмотрим поле, для которого

$$f(t) = 1/\text{ch}^2 k_0 t \quad (6.139)$$

(в следующей главе для такого поля получены точные решения осцилляторных уравнений и в рамках строгой теории вычислена вероятность рождения пар).

Имеем

$$\psi(u) = \frac{1}{1+u^2}, \quad g(\gamma) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 du \frac{\sqrt{1-u^2}}{1+\gamma^2 u^2} = \frac{2}{1+\sqrt{1+\gamma^2}}. \quad (6.140)$$

При $\gamma \gg 1$ это приводит к соотношению

$$w \sim \exp(-2\pi m/k_0), \quad (6.141)$$

а при $\gamma \ll 1$ получаем результат (6.128).

Как видно из (6.141), в антиадиабатической области вероятность рождения определяется не отношением напряженности поля к критическому значению, а отношением частоты изменения поля к массе рождающихся частиц.

Другим примером применения результата (6.137) является вычисление вероятности рождения пар полем

$$f(t) = \cos k_0 t. \quad (6.142)$$

В этом случае

$$\psi(u) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, \quad g(\gamma) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 du \sqrt{\frac{1-u^2}{1+\gamma^2 u^2}} = \frac{4}{\pi\gamma} [K(v) - E(v)] = \begin{cases} 1 - \gamma^2/8 + 3\gamma^4/64, & \gamma \ll 1, \\ 4(\ln \gamma + 2\ln 2 - 1)/\pi\gamma, & \gamma \gg 1, \end{cases} \quad (6.143)$$

где $K(v)$, $E(v)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода; $v \equiv \gamma/\sqrt{1+\gamma^2}$.

С использованием (6.143) для вероятности рождения пары одним периодом поля (6.142) получаем из (6.137)

$$\omega \sim \begin{cases} \exp\left\{\frac{\pi E_{\text{кр}}}{E}\left(1 - \frac{\gamma^2}{8}\right)\right\}, & \gamma \ll 1, \\ \left(\frac{E}{E_1}\right)^{4m/k_0}, \quad E_1 = \frac{mk_0}{|e|} \exp(2 \ln 2 - 1), & \gamma \gg 1. \end{cases} \quad (6.144)$$

Если считать, что поле (6.142) включено на время, превышающее период, то расчет вероятности рождения методом мнимого времени усложняется. В этом случае для получения правильных результатов необходимо суммировать вклады большого числа особых точек в плоскости комплексного времени, отвечающих различным периодам внешнего поля [112]. В предельном случае, когда учитывается бесконечное число периодов, метод мнимого времени приводит к выражению для вероятности рождения пары в единицу времени. Как уже отмечалось в предыдущем параграфе, такой результат справедлив, если время действия поля удовлетворяет неравенству $T \ll \tau \ll \omega^{-1}$ причем $\omega \ll 1$ (что действительно имеет место в области применимости метода мнимого времени). Если же указанные условия не выполнены, то зависимость от времени имеет более сложный характер (см. § 6.4).

С помощью метода мнимого времени можно найти не только вероятность рождения, но и импульсный спектр рождающихся частиц. Для этого необходимо рассмотреть кроме экстремальной классической траектории (6.132) пучок близких к ней подбарьерных траекторий. Вероятность туннелирования через барьер по неэкстремальной траектории определяется мнимой частью приращения так называемого *укороченного действия* [128]

$$\Delta W = S(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1) - \mathbf{p}_{\perp 2} \mathbf{r}_2 + \mathbf{p}_{\perp 1} \mathbf{r}_1, \quad (6.145)$$

где \mathbf{r}_1 — точка входа под барьер из нижнего континуума; \mathbf{r}_2 — точка выхода из-под барьера в верхний континуум (на экстремальной траектории $p_{\perp} = 0$, вследствие чего $W = S$). Для импульсного спектра рождающихся пар в предположении $p^2 \ll m^2$ получается следующий приближенный результат:

$$\omega_p = \exp(-2 \text{Im} \Delta W), \quad 2 \text{Im} \Delta W = \frac{\pi E_{\text{кр}}}{E} \left[g(\gamma) + c_1(\gamma) \frac{p_{\perp}^2}{m^2} + c_2(\gamma) \frac{p_{\parallel}^2}{m^2} \right], \quad (6.146)$$

где

$$c_1(\gamma) = [1 + (\gamma/2)(d/d\gamma)]g(\gamma); \quad c_2(\gamma) = -\gamma dc_1(\gamma)/d\gamma, \quad (6.147)$$

а функция $g(\gamma)$ определена в (6.137).

Например, в случае электрического поля (6.139) импульсный спектр дается (6.146), где вследствие (6.140), (6.147)

$$c_1(\gamma) = 1/\sqrt{1+\gamma^2}, \quad c_2(\gamma) = \gamma^2/(1+\gamma^2)^{3/2}. \quad (6.148)$$

В отдельных случаях метод мнимого времени позволяет получить даже точный результат, справедливый при любых значениях напряженности внешнего поля. Так, с учетом возможности многократных блужданий частицы под барьером между точками A_1 и A_2 (см. рис. 4, 5) в работе [128] получена точная формула для $\text{Im } \Delta S$ в случае постоянного однородного электрического и магнитного полей (вывод этой формулы в рамках теоретико-полевого формализма приведен в гл. 7).

Здесь метод мнимого времени изложен без учета спина рождающихся частиц. В работе [113] он распространен на случай частиц с произвольным спином и гиромагнитным отношением. Оказывается, что формулы (6.146) и (6.147), дающие импульсный спектр рождающихся пар, справедливы для частиц любого спина.

В то же время применение метода мнимого времени к частицам со спином ≥ 1 носит во многом формальный характер. Дело в том, что обоснованием метода является совпадение получаемых с его помощью результатов и результатов теоретико-полевого подхода. Для частиц со спином 0 и $1/2$ такое совпадение имеет место, в то время как для частиц с высшими спинами сам теоретико-полевой подход сталкивается с серьезными трудностями (неперенормируемость, каузальные аномалии), рассмотренными в гл. 1. В гл. 7 приведены примеры расчета вероятностей рождения частиц со спином 0 и $1/2$ в рамках теоретико-полевого подхода.

Глава 7. РОЖДЕНИЕ ЧАСТИЦ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ ПОЛЯМИ СПЕЦИАЛЬНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

§ 7.1. Рождение пар одиночным импульсом электрического поля

В гл. 5 и 6 были получены формулы, которые позволяют вычислить плотность числа рожденных внешним полем пар, если известны решения уравнений Клейна — Гордона — Фока и Дирака в этом поле. В настоящей главе применим эти формулы к ряду частных случаев. Рассмотрим сначала однородное электрическое поле, изменяющееся со временем по закону

$$A_z(t) = a_0 \text{th } k_0 t, \quad E_z(t) = a_0 k_0 / \text{ch}^2 k_0 t. \quad (7.1)$$

Очевидно, что (7.1) представляет собой одиночный импульс электрического поля, обращающегося в нуль при $t \rightarrow \pm \infty$.

Рассмотрим рождение фермионных пар. Решение уравнения (6.12), для поля (7.1) имеет вид

$$f^{(+)}(\mathbf{p}, t) = N_+ \exp(2i\mu k_0 t) (1 + \exp(2k_0 t))^{i\theta} F(\alpha, \beta; \gamma; -\exp(2k_0 t)), \quad (7.2)$$

где $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ — гипергеометрическая функция, а

$$\begin{aligned} \alpha &= i\mu + iv + i\theta; \quad \beta = i\mu - iv + i\theta; \quad \gamma = 2i\mu + 1; \\ 2k_0\mu &= [m^2 + p_{\perp}^2 + (p^3 - ea_0)^2]^{1/2}; \quad 2k_0\nu = [m^2 + p_{\perp}^2 + (p^3 + ea_0)^2]^{1/2}; \\ \theta &= -ea_0/k_0; \quad N_+ = [8k_0\mu(2k_0\mu + p^3 - ea_0)]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Плотность числа фермионных пар с импульсом \mathbf{p} , родившихся за все время действия поля, легко вычислить по формулам (6.28), (6.34) и (6.38):

$$n_{\mathbf{p}}^{(1/2)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} n_{\mathbf{p}}^{(1/2)}(t) = \frac{\text{sh } \pi(\theta - \mu + \nu) \text{sh } \pi(\theta + \mu - \nu)}{\text{sh } 2\pi\mu \text{sh } 2\pi\nu} \quad (7.4)$$

(с помощью фейнмановского метода этот результат получен в работе [107]).

Интегрируя (7.4) по импульсам согласно (6.40), найдем число пар, рожденных в единице объема пространства. В явном виде интеграл (6.40) удастся вычислить при условиях

$$\left(\frac{m}{k_0}\right)^2 \left(\frac{E}{E_{\text{кр}}}\right) \ll 1, \quad \frac{m}{k_0} \frac{E}{E_{\text{кр}}} \ll 1.$$

Результат есть [107]

$$\begin{aligned} n^{1/2}(\infty) &= (m^{3/2}/\pi k_0^{5/2}) (eE)^2 \exp(-2\pi m/k_0), \quad k_0 \ll m; \\ n^{1/2}(\infty) &= (eE)^2 / 9\pi k_0, \quad k_0 \gg m. \end{aligned} \quad (7.5)$$

При выполнении указанных условий можно вычислить также плотность энергии, давление и ток реальных пар, рожденных полем (7.1) за все время его существования. Действительно, вычисляя интегралы в (6.60), (6.61), (6.68) при $t \rightarrow +\infty$ (отметим, что слагаемые подынтегральных выражений, содержащие величину u , являются быстро осциллирующими функциями и не дают вклада в результат), получаем при $k_0 \ll m$ [377]

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(1/2)}(\infty) &= (2/\pi) (m/k_0)^{5/2} (eE)^2 \exp(-2\pi m/k_0); \\ P_{\alpha}^{(1/2)}(\infty) &= (1/\pi^2) (m/k_0)^{3/2} (eE)^2 \exp(-2\pi m/k_0); \\ J^{(1/2)3}(\infty) &= (2m^{1/2}/\pi k_0^{7/2}) (eE)^3 \exp(-2\pi m/k_0) \end{aligned} \quad (7.6)$$

и при $k_0 \gg m$

$$\varepsilon^{(1/2)}(\infty) = 2\zeta(3) e^2 E^2 / \pi^4; \quad P_1^{(1/2)}(\infty) = P_2^{(1/2)}(\infty) = 2\varepsilon^{1/2}(\infty)/5; \quad (7.7)$$

$$P_3^{(1/2)}(\infty) = \varepsilon^{(1/2)}(\infty)/5, \quad J^{(1/2)3}(\infty) = (16 e^3 E^3 / 15 \pi^2 k_0^3) \ln(k_0/m).$$

Здесь $\zeta(z)$ — дзета-функция Римана; $\zeta(3) \approx 1,202$.

В случае сингулярного внешнего поля в единице объема может породиться бесконечное число частиц. Рассмотрим, например, потенциал вида

$$A_3(t) = \begin{cases} -a_0, & t < 0, \\ a_0, & t > 0, \end{cases} \quad (7.8)$$

задающий δ -образный импульс напряженности электрического поля в большом пространственном объеме. Соответствующую вероятность рождения фермионных пар можно получить из (7.4) в пределе $k_0 \rightarrow \infty$:

$$n_p^{(1/2)} = (4k_0^2 \mu \nu - m^2 - \mathbf{p}^2 + e^2 a_0^2) / 8k_0^2 \mu \nu \quad (7.9)$$

[отметим, что согласно обозначениям (7.3) величина $k_0^2 \mu \nu$ не зависит от k_0]. Интегрирование (7.9) по всем импульсам приводит к бесконечному результату.

Обратимся теперь к случаю скалярных частиц. Решение осцилляторного уравнения (6.42) для поля (7.1) есть

$$g^{(+)}(\mathbf{p}, t) = \exp(2i\mu k_0 t) (1 + \exp(2k_0 t))^\tau F(\delta, \eta; \gamma; -\exp(2k_0 t)), \quad (7.10)$$

где

$$\begin{aligned} \tau &= 1/2 + \theta'; \quad \theta' = \sqrt{1/4 - (ea_0/k_0)^2}; \quad \delta = \tau + i\mu - i\nu; \\ \eta &= \tau + i\mu + i\nu, \end{aligned} \quad (7.11)$$

а остальные обозначения введены в (7.3).

Подставляя (7.10) в формулу для плотности числа скалярных пар (6.53), получаем после преобразований

$$n_p^{(0)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} n_p^{(0)}(t) = \frac{\cos^2 \pi \theta' + \text{sh}^2 \pi (\mu - \nu)}{\text{sh} 2\pi \mu \text{sh} 2\pi \nu}. \quad (7.12)$$

В том же приближении, что и для фермионного случая, можно вычислить интеграл от (7.12) по всем импульсам. В результате получаем [130]:

$$n^{(0)}(\infty) = (m^{1/2}/4\pi^2 k_0^{3/2}) (eE)^2 \exp(-2\pi m/k_0), \quad k_0 \ll m; \quad (7.13)$$

$$n^{(0)}(\infty) = (eE)^2/36\pi k_0, \quad k_0 \gg m.$$

Плотность энергии, давление и ток бозонных пар при $t \rightarrow +\infty$ найдены в [377]. При $k_0 \ll m$

$$\varepsilon^{(0)}(\infty) = (1/2\pi^2) (m/k_0)^{3/2} (eE)^2 \exp(-2\pi m/k_0);$$

$$P_1^{(0)}(\infty) = P_2^{(0)}(\infty) = (1/4 \pi^3) (m/k_0)^{1/2} (eE)^2 \exp(-2\pi m/k_0), \quad P_3^{(0)}(\infty) = 3P_1^{(0)}(\infty); \quad J^{(0)3}(\infty) = (1/2 \pi^2 m^{1/2} k_0^{5/2}) (eE)^3 \exp(-2\pi m/k_0),$$

а при $k_0 \gg m$

$$\varepsilon^{(0)}(\infty) = \zeta(3) e^2 E^2 / 2\pi^4; \quad P_1^{(0)}(\infty) = P_2^{(0)}(\infty) = \varepsilon^{(0)}(\infty) / 5; \quad (7.14)$$

$$P_3^{(0)}(\infty) = 3\varepsilon^{(0)}(\infty) / 5; \quad J^{(0)3}(\infty) = (2e^3 E^3 / 15\pi^2 k_0^3) \ln(k_0/m).$$

Для скачкообразного потенциала (7.8) из (7.12) при $k_0 \rightarrow \infty$ получаем следующий результат:

$$n_p^{(0)} = (-4k_0^2 \mu\nu + m^2 + p^2 + e^2 a_0^2) / 8 k_0^2 \mu\nu. \quad (7.15)$$

Плотность числа рожденных частиц, как и в спиновом случае, оказывается бесконечной.

Таким образом, сведение задачи о рождении пар к задаче о параметрическом возбуждении осциллятора позволило легко получить вероятности рождения пар полем вида (7.1).

Другой предельный случай поля (7.1) получается, если положить $a_0 = E/k_0$ и устремить k_0 к нулю:

$$A_3(t) = (E/k_0) \operatorname{th} k_0 t \xrightarrow[k_0 \rightarrow 0]{} Et, \quad (7.16)$$

т. е. вектор-потенциал, описывающий постоянное однородное поле.

Это означает, что формулы (7.4) и (7.12) должны в указанном предельном случае приводить к швингеровским результатам [89], которые были первоначально получены в рамках формализма кратко изложенного в § 5.1. Действительно, заменяя в (7.4) и (7.12) величину a_0 на E/k_0 и переходя к пределу $k_0 \rightarrow 0$, получаем

$$n_p^{(0)} = n_p^{(1/2)} = \exp[-\pi(m^2 + p_\perp^2)/|e|E]. \quad (7.17)$$

Число пар, рождаемых постоянным однородным полем в единице объема, можно получить, интегрируя выражения (7.17) по импульсам (в фермионном случае берется также сумма по спиновым состояниям). В этом случае необходимо учитывать, что в постоянном поле импульсная плотность (7.17) не зависит от p_z , вследствие чего интегрирование по p_z эквивалентно замене [94]

$$\int dp_z \rightarrow eET, \quad (7.18)$$

где T — бесконечное время действия внешнего поля. С учетом этого после интегрирования находим число частиц, рождающихся в единице объема за единицу времени, т. е. *интенсивность рождения*

$$I^{(1/2)} = 2I^{(0)} = (e^2 E^2 / 4 \pi^3) \exp(-\pi m^2 / |e|E). \quad (7.19)$$

Найдем теперь мнимую часть вакуумной добавки к плотности лагранжиана (см. § 5.1). Обозначая через c_{pr} вероятность того, что в состоянии pr не родилось пары, получаем [107]

$$|\langle 0_{-\infty} | 0_{+\infty} \rangle|^2 = |\langle 0_{-\infty} | S | 0_{-\infty} \rangle|^2 = \prod_{pr} c_{pr} = \exp\left(\sum_{pr} \ln c_{pr}\right). \quad (7.20)$$

Поскольку для случая постоянного однородного поля согласно (5.2) можно написать

$$|\langle 0_{-\infty} | 0_{+\infty} \rangle|^2 = \exp(-2 \operatorname{Im} \mathcal{L}^{(1)} VT), \quad (7.21)$$

то с учетом очевидного соотношения $c_{pr} = 1 - n_{pr}^{(1/2)}$ получаем для фермионов

$$2\text{Im } \mathcal{L}^{(1)} = -\frac{1}{VT} \sum_{pr} \ln(1 - n_{pr}^{(1/2)}). \quad (7.22)$$

Подстановка (7.17) в (7.22) приводит с учетом замены (7.18) к результату Швингера [89]:

$$2\text{Im } \mathcal{L}^{(1)} = \frac{e^2 E^2}{4\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp\left(-\frac{\pi \mu m^2}{|e|E}\right). \quad (7.23)$$

В случае скалярных частиц $c_p = (1 + n_p^{(0)})^{-1}$ и

$$2\text{Im } \mathcal{L}^{(1)} = \frac{1}{VT} \sum_p \ln(1 + n_p^{(0)}). \quad (7.24)$$

Интегрирование с учетом (7.17) дает

$$2\text{Im } \mathcal{L}^{(1)} = \frac{e^2 E^2}{8\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \exp\left(-\frac{\pi \mu m^2}{|e|E}\right). \quad (7.25)$$

Очевидно, что первые слагаемые в (7.23) и (7.25) совпадают с интенсивностью рождения пар (7.19). В рамках фейнмановского подхода результаты (7.23) и (7.25) получены в работе [94] для случая постоянного однородного электромагнитного поля. Их можно обобщить на случай частиц с произвольным спином [113, 131]. Эти же результаты найдены в работе [132] с помощью операторного подхода к квантовой электродинамике во внешнем поле [133]. Если однородное внешнее поле существует в течение конечного времени, то зависимость плотности числа рожденных пар от времени становится нелинейной [134].

Как видно из (7.19), показатель экспоненты в плотности числа родившихся пар есть $-\pi E_{кр}/E$, так что при $E < E_{кр}$ величины $I^{(0)}$ и $I^{(1/2)}$ экспоненциально малы. Однако при $E = E_{кр}$ для электрон-позитронных пар

$$I^{(1/2)} = (m^4/4\pi^3) \exp(-\pi) \approx 4 \cdot 10^{48} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}, \quad (7.26)$$

так что процесс рождения идет чрезвычайно интенсивно.

Отметим, что (7.19) является неаналитической функцией E : при $E = 0$ имеется существенно особая точка. Поэтому этот результат в принципе нельзя получить по теории возмущений.

В § 7.3 мы вернемся к задаче о вычислении вероятностей рождения пар постоянным однородным полем и рассмотрим ее с несколько иной точки зрения. Там же приведены результаты учета влияния на процессы рождения пар постоянного магнитного поля.

§ 7.2. Рождение пар потенциальным барьером и парадокс Клейна

Явление, получившее название *парадокса Клейна* [135, 136] возникает при рассмотрении рассеяния квантовой частицы на потенциальном барьере высотой, превосходящей $2m$, создаваемым статическим электрическим полем. Оно состоит в том, что ток прошедших частиц, а также абсолютная величина тока отраженных барьером частиц превышают ток падающих частиц (если высота барьера меньше $2m$, то это превышение экспоненциально мало). В связи с этим парадоксом высказывалось мнение [137], что в принципе нельзя создать силовое поле с напряженностью порядка $E_{кр}$, а уравнение Дирака применимо лишь для значительно более слабых полей.

Явление Клейна выглядит, однако, парадоксальным только с точки зрения одночастичной теории. В рамках же вторично квантованной теории, учитывающей процессы рождения пар частиц и античастиц полем барьера, ничего парадоксального при его описании не возникает. В связи с этим интересно отметить, что хотя метод вторичного квантования был развит вскоре после обнаружения парадокса Клейна, полное разъяснение ситуации дано сравнительно недавно [108].

Статическое электрическое поле барьера можно задать вектор-потенциалом вида

$$\tilde{A}_n(x) = (A_0(x_3), 0, 0, 0), \quad \lim_{x_3 \rightarrow \pm\infty} A_0(x_3) = A_{0\pm} \quad (7.27)$$

(напомним, что $x_\alpha = -x^\alpha$).

При изучении эффекта рождения пар полем барьера полезно принять во внимание, то (7.27) перейдет в потенциал (6.1), описывающий нестационарное однородное поле, если совершить замену $x_3 \rightarrow x_0$, $A_0 \rightarrow A_3$. Поэтому весь теоретико-полевой формализм (см. гл. 6), описывающий процесс рождения пар однородным полем, можно с учетом указанной замены применить в данном случае.

Подобно тому как в случае нестационарного внешнего поля квантовомеханическим аналогом рождения является параметрическое возбуждение осцилляторов поля, здесь таким аналогом может служить явление надбарьерного отражения от эффективного потенциала в уравнении шредингеровского типа, к которому можно привести рассматриваемое релятивистское уравнение.

Постоянное однородное электрическое поле, которое является частным случаем (6.1) при $A_3 = Et$, в другой калибровке можно описать и с помощью потенциала (7.27), если положить $A_0 = Ex_3$. Калибровочное преобразование, связывающее потенциалы

$$A_n = (0, 0, 0, Et), \quad \tilde{A}_n = (Ex_3, 0, 0, 0), \quad (7.28)$$

имеет вид

$$A_n = \tilde{A}_n - \partial_n \Lambda, \quad \Lambda = Ex_3 t. \quad (7.29)$$

Зависящее от времени пространственно-однородное электрическое поле, направленное вдоль оси x_3 , также можно изображать не только потенциалом (6.1), но и потенциалом

$$\tilde{A}_n = (E(t) x_3, 0, 0, 0), \quad (7.30)$$

если в (7.29) выбрать

$$\Lambda = x_3 \int^t E(t') dt'. \quad (7.31)$$

Если же зависимость A_0 от x_3 в (7.27) более сложная, чем в (7.28), то (7.27) описывает уже физически новое поле (неоднородное поле барьера).

Наметим кратко ход рассуждений [108], приводящих к разрешению парадокса Клейна (для простоты рассматриваем скалярный случай).

Представим решения уравнения (1.3), нумеруемые индексом $p = \{p_0, p_1, p_2\}$, в виде

$$\varphi_p^{(\pm)}(x) = \exp[-ip_0 x_0 + ip_1 x_1 + ip_2 x_2] \tilde{g}^{(\pm)}(p, x_3). \quad (7.32)$$

Тогда для функций $\tilde{g}^{(\pm)}$ получим уравнение осцилляторного типа

$$d^2 \tilde{g}^{(\pm)}(p, x_3) / dx_3^2 + \tilde{\omega}^2(p, x_3) \tilde{g}^{(\pm)}(p, x_3) = 0, \quad (7.33)$$

где $\tilde{\omega}^2(p, x_3) = (p_0 - eA_0)^2 - p_\perp^2 - m^2$.

При $x_3 \rightarrow -\infty$ поле барьера обращается в нуль, а решения, которые мы по аналогии со случаем переменного во времени поля назовем положительно- и отрицательно-частотными, фиксируются условиями

$$\tilde{g}^{(\pm)}(p, x_3) \underset{x_3 \rightarrow -\infty}{\sim} \exp[\pm i \tilde{\omega}_-(p) x_3], \quad \tilde{\omega}_\pm(p) = \lim_{x_3 \rightarrow \pm\infty} \tilde{\omega}(p, x_3). \quad (7.34)$$

Таким образом, рассматриваемая задача имеет S -матричный характер, причем роль времени играет величина x_3 . Если ввести положительно- и отрицательно-частотные при $x_3 \rightarrow +\infty$ решения $\psi_p^{(\pm)}(x)$, то решение $\varphi_p^{(+)}$ представляется при $x_3 \rightarrow \infty$ в виде линейной комбинации $\psi_p^{(+)}$ и $\psi_p^{(-)}$. Так же как и в обычной S -матричной теории, квадрат модуля коэффициента при $\psi_p^{(-)}$ определяет импульсную плотность числа частиц, рожденных полем барьера из вакуума. При этом оказывается, что сумма отраженного и прошедшего через барьер токов всегда в точности равна току падающих частиц. Если на барьер вообще не падает частиц, то сумма отраженного и прошедшего токов равняется нулю. Это означает, что отмеченное Клейном превышение тока прошедших барьер частиц над током падающих частиц обусловлено увеличением полного числа частиц в результате рождения пар полем барьера. Тем самым парадокс разрешается.

По аналогии с (7.1) можно рассмотреть поле барьера вида

$$A_0 = a_0 \operatorname{th} k_0 x z, \quad E_z(xz) = a_0 k_0 / \operatorname{ch}^2 k_0 x z, \quad (7.35)$$

для которого задача допускает точное решение [108].

Например, плотность числа рожденных скалярных пар в этом случае есть [ср. с (7.12)]

$$n_p^{(0)} = \operatorname{sh} 2\pi \tilde{\mu} \operatorname{sh} 2\pi \tilde{\nu} / [\cos^2 \pi \theta' + \operatorname{sh}^2 \pi (\tilde{\mu} - \tilde{\nu})], \quad (7.36)$$

где
$$\tilde{\omega}_- = 2k_0 \tilde{\mu}, \quad \tilde{\omega}_+ = 2k_0 \tilde{\nu}, \quad \theta' = \sqrt{1/4 - (ea_0/k_0)^2}.$$

Так же как и для обычной S -матричной теории (рассмотренной в гл. 5), полная вероятность рассеяния частицы на барьере, сопровождающего рождением произвольного числа пар, оказывается равной единице. Таким образом, вторично квантованная теория остается самосогласованной при достижении внешним полем критического значения.

§ 7.3. Постоянное однородное электрическое поле

Как было отмечено в § 6.1, нестационарное однородное электрическое поле можно реализовать лишь с ограниченной точностью. В связи с этим интересно рассмотреть квантовые эффекты в электромагнитных полях, которые являются точными решениями уравнений Максвелла в пустом пространстве. Простейшие примеры таких полей — это постоянное однородное электрическое поле и плоская электромагнитная волна. Однако, как будет показано ниже, плоская волна сама по себе не может рождать пар, а эффект рождения частиц постоянным однородным полем уже рассматривался в § 7.1 в качестве предельного случая при стремлении частоты переменного поля к нулю.

Следует отметить, что электромагнитные поля, являющиеся точными решениями уравнений Максвелла в пустоте, как правило, не выключаются при $t \rightarrow \pm \infty$. В связи с этим возникают определенные трудности при классификации решений волновых уравнений по знаку частоты. В данном параграфе рассматриваются различные полные наборы решений волнового уравнения в постоянном однородном электрическом поле и устанавливается связь между ними [138]. При этом использование результатов § 7.1, в котором постоянное поле получено как предельный случай выходящегося при $t \rightarrow \pm \infty$ поля, позволяет классифицировать решения по знаку частоты и найти другим способом результаты § 7.1 для вероятности рождения пар (матрица плотности, описывающая частицы одного сорта, рожденные однородным электрическим полем, построена в работе [139]). Устанавливаемая здесь связь между различными полными наборами решений в постоянном поле позволит в дальнейшем рассмотреть рождение пар электромагнитным полем более сложных конфигураций,

например полем плоской волны, распространяющейся вдоль направления постоянного однородного электрического поля.

Постоянное однородное электрическое поле зададим вектор-потенциалом

$$A_i(x) = (0, 0, 0, -Et). \quad (7.37)$$

Рассмотрим сначала полную систему решений уравнения Клейна — Гордона — Фока с потенциалом (7.37), нумеруемых собственным значением оператора $P_3 = i\partial/\partial x^3$. Положительно- и отрицательно-частотные при $t \rightarrow -\infty$ решения из этой полной системы есть [138]

$$\left. \begin{aligned} \psi_{p_3}^{(+)} &= B_{p_\perp} \exp(ipx) D_{v^*}(-(1+i)\tau), \\ \psi_{p_3}^{(-)} &= B_{p_\perp} \exp(ipx) D_v(-(1-i)\tau), \end{aligned} \right\} \quad (7.38)$$

где $D_v(z)$ — функции параболического цилиндра; \mathbf{p} — сохраняющийся 3-импульс и введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} v &= (i\lambda - 1)/2; \quad \lambda = (m^2 + p_\perp^2)/eE; \quad \tau = \sqrt{eE}(t + p_3/eE); \\ B_{p_\perp} &= (2eE)^{-1/4} \exp[-\pi\lambda/8 - 3\pi i/4 + (i\lambda/4) \ln 2]. \end{aligned} \quad (7.39)$$

Знаки частотностей (\pm) в (7.38) выбраны так, что если адиабатически выключить внешнее поле при $t \rightarrow -\infty$, то функции (7.38) перейдут в положительно- и отрицательно-частотные решения свободного уравнения. При расстановке частотностей в (7.38) можно также воспользоваться тем, что постоянное поле является частным случаем нестационарного поля (7.1) при $k_0 \rightarrow 0$. Поскольку классификация решений в поле (7.1) по знаку частоты известна, то за положительно-частотное решение (7.38) следует принять функцию, которая получается из положительно-частотного решения в поле (7.1) при указанном предельном переходе.

Аналогично полный набор решений, положительно- и отрицательно-частотных при $t \rightarrow +\infty$, можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \psi_{p_3}^{(+)} &= B_{p_\perp} \exp(ipx) D_v((1-i)\tau), \\ \psi_{p_3}^{(-)} &= B_{p_\perp} \exp(ipx) D_{v^*}((1+i)\tau). \end{aligned} \right\} \quad (7.40)$$

Полные ортонормированные наборы решений (7.38) и (7.40) связаны между собой соотношениями, являющимися частным случаем (5.30):

$$\psi_{p_3}^{(+)} = \tilde{\alpha}^* \varphi_{p_3}^{(+)} + \tilde{\beta} \varphi_{p_3}^{(-)}, \quad \psi_{p_3}^{(-)} = \tilde{\alpha} \varphi_{p_3}^{(-)} + \tilde{\beta}^* \varphi_{p_3}^{(+)}, \quad (7.41)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= \sqrt{2\pi} [\Gamma((1-i\lambda)/2)]^{-1} \exp\left[-\frac{\pi}{4}(\lambda - i)\right], \\ \tilde{\beta}^* &= \exp\left[-\frac{\pi}{2}(\lambda + i)\right]. \end{aligned} \quad (7.42)$$

Отсюда по (5.31) получаем плотность числа рожденных бозонных пар

$$n_p^{(0)} = |\beta|^2 = \exp \{-\pi (m^2 + p_{\perp}^2) / |e| E\}, \quad (7.43)$$

что совпадает с полученным ранее результатом (7.17).

Формулу (7.43) можно обобщить на случай, когда кроме электрического поля имеется также постоянное магнитное. Для этого перейдем в систему координат, в которой $\mathbf{E} \parallel \mathbf{H}$. Вектор-потенциал такого поля записывается в виде

$$A_0 = A_1 = 0, \quad A_2 = Hx_1, \quad A_3 = -Et. \quad (7.44)$$

Как показано в работе [94], для плотности числа пар, рожденных таким полем, сохраняется результат (7.43), если положить

$$p_{\perp}^2 = |e| H (2l + 1), \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (7.45)$$

При вычислении интенсивности рождения пар следует заменить интегрирование по p_{\perp} суммированием по l . В результате получим

$$I^{(0)} = \frac{e^2 EH}{8\pi^2} \frac{\exp(-\pi m^2 / |e| E)}{\text{sh}(\pi H/E)}. \quad (7.46)$$

Как видно из сравнения (7.19) и (7.46), включение магнитного поля приводит к уменьшению $I^{(0)}$ в $\text{sh } x/x$ раз, где $x = \pi H/E$. При $H \gg E$ рождение экспоненциально подавляется.

Иная ситуация имеет место для фермионов. Включение коллинеарного с электрическим магнитного поля приводит к тому, что вместо λ в (7.39) следует брать [94]

$$\lambda_r = [m^2 + 2eH(l + r - 1)]/eE, \quad r = 1, 2, \quad (7.47)$$

в результате чего для интенсивности рождения фермионов получаем

$$I^{(1/2)} = (e^2 EH/4\pi^2) \exp(-\pi m^2 / |e| E) \text{cth}(\pi H/E). \quad (7.48)$$

Сравнивая (7.19) и (7.48), заключаем, что плотность родившихся фермионов в $x \text{cth } x$ раз больше, чем в отсутствие магнитного поля. При $H \gg E$ рождение усиливается линейно по x . Итак, хотя в чисто электрическом поле число рожденных фермионов и бозонов отличается лишь тривиальным множителем 2, включение сильного магнитного поля приводит к подавлению рождения бозонов и усилению рождения фермионов.

При $H \rightarrow 0$ результаты (7.46) и (7.48) переходят в (7.19). В то же время если перейти в (7.46) и (7.48) к пределу $E \rightarrow 0$, то получим $I^{(0)} = I^{(1/2)} = 0$. Это означает, что постоянное однородное магнитное поле не рождает пар.

Формулы (7.46) и (7.48) справедливы в любой лоренцевой системе отсчета, если под \mathbf{E} и H понимать инварианты:

$$E_{inv} = [\sqrt{\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2} - \mathcal{F}]^{1/2}, \quad H_{inv} = [\sqrt{\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2} + \mathcal{F}]^{1/2}, \quad (7.49)$$

где $\mathcal{F} = (\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)/2$, $\mathcal{G} = (\mathbf{E}, \mathbf{H})$.

Рассмотрим другие, отличные от (7.38) и (7.40), полные системы решений уравнения Клейна — Гордона — Фока в постоянном однородном электрическом поле. Вместо квантового числа p_z его решения можно нумеровать собственным значением p_- оператора

$$P_- = i\partial/\partial t - eEx_z - P_z,$$

который не коммутирует с P_z , но коммутирует с оператором Клейна — Гордона — Фока.

Нумеруемое собственным значением p_- решение, которое назовем отрицательно-частотным при $t \rightarrow -\infty$, есть

$$\psi_{p_-}^{(-)} = (4eE)^{-1/4} \exp \left\{ i \left[p_1 x_1 + p_2 x_2 - \frac{p_- x_+}{2} - \frac{eEx_3^2}{2} + \frac{eEx_-^2}{4} - i\nu \ln z \right] \right\}, \quad (7.50)$$

где $z = (eE)^{-1/2} \pi_-$, $\pi_- = p_- - eEx_-$, $x_{\pm} = x_0 \pm x_z$ и выбирается главное значение $\ln z$.

Аналогично решение, которое назовем положительно-частотным при $t \rightarrow +\infty$, имеет вид

$$\varphi_{p_-}^{(+)} = (4eE)^{-1/4} \exp \left\{ i \left[p_1 x_1 + p_2 x_2 - \frac{p_- x_+}{2} + \frac{eEx_3^2}{2} + \frac{eEx_-^2}{4} - i\nu \ln(-z) \right] \right\}. \quad (7.51)$$

Вторая пара решений (положительно-частотное на $-\infty$ и отрицательно-частотное на $+\infty$) дается выражениями

$$\psi_{p_-}^{(+)} = \theta(-\pi_-) \tilde{\alpha}^* \varphi_{p_-}^{(+)}, \quad \varphi_{p_-}^{(-)} = \theta(\pi_-) \tilde{\alpha}^* \psi_{p_-}^{(-)}, \quad (7.52)$$

где $\theta(x)$ — ступенчатая функция, а $\tilde{\alpha}$ определено в (7.42).

Нумеруемые квантовым числом p_- решения (7.50) и (7.51) по форме существенно проще выплывших выше решений (7.38) и (7.40). Однако при $x_- = p_-/eE$ величина $z=0$ и (7.50), (7.51) имеют особую точку. Это обстоятельство связывается в [138] с тем, что для классических частиц, траектории которых характеризуются интегралом движения p_- , плоскость $x_- = p_-/eE$ является плоскостью накопления частиц, за которой возможны лишь частицы с другим знаком заряда. На основе этой классической аналогии и расставлены знаки частотностей в (7.50) и (7.51): при $t \rightarrow -\infty$ функция (7.50) описывает частицу, а при $t \rightarrow +\infty$ функция (7.51) описывает античастицу.

Оправдание расстановки знаков частоты в (7.50) — (7.52) можно дать и не прибегая к классическим аналогиям, если воспользоваться

связью между решениями, нумеруемыми квантовыми числами p_- и p_3 . Эта связь дается интегральным преобразованием

$$\psi_{p_3}^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi eE}} \int_{-\infty}^{\infty} dp_- M(p_3, p_-) \psi_{p_-}^{(\pm)} \quad (7.53)$$

с ядром $M(p_3, p_-) = \exp\{-i[(p_- + 2p_3)^2 - 2p_3^2]/4eE\}$ (и такими же соотношениями для функций $\varphi^{(\pm)}$).

Ядро $M(p_3, p_-)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 M^*(p_3, p'_-) M(p_3, p_-) &= 2\pi eE \delta(p'_- - p_-), \\ \int_{-\infty}^{\infty} dp_- M^*(p'_3, p_-) M(p_3, p_-) &= 2\pi eE \delta(p'_3 - p_3). \end{aligned} \quad (7.54)$$

Преобразование, обратное (7.53), имеет вид

$$\psi_{p_-}^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi eE}} \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 M^*(p_3, p_-) \psi_{p_3}^{(\pm)}. \quad (7.55)$$

Таким образом, решения $\psi_{p_-}^{(+)}$ ($\psi_{p_-}^{(-)}$) получаются соответственно из $\psi_{p_3}^{(+)}$ ($\psi_{p_3}^{(-)}$). Это и оправдывает расстановку знаков частоты в (7.50)—(7.52).

Из (7.53) и (7.54) вытекает формальное соотношение нормировки

$$i \int_{-\infty}^{\infty} dx_3 \psi_{p'_-}^{(-)*}(x) \overleftrightarrow{\partial}_t \psi_{p_-}^{(-)}(x) = 2\pi \delta(p'_- - p_-). \quad (7.56)$$

Формальный характер равенств типа (7.56) связан с тем, что при $x_- = p_-/eE$ функции ψ_{p_-} обладают особенностью и соответствующие интегралы теряют смысл. В работе [138] предложено понимать их в некотором специальном предельном смысле. При этом вводятся зависящие от параметра функции ψ_{p_0} , не обладающие особенностью, которые переходят в ψ_{p_-} при $v \rightarrow 1$.

Рассмотренные выше наборы решений $\psi_{p_-}^{(\pm)}$, $\varphi_{p_-}^{(\pm)}$ обладают тем существенным преимуществом по сравнению с $\psi_{p_3}^{(\pm)}$ и $\varphi_{p_3}^{(\pm)}$, что их легко обобщить на случай, когда в направлении постоянного поля распространяется плоская волна. При этом знание ядра M интегрального оператора (7.53) позволяет далее получить набор решений без особенностей типа $\psi_{p_3}^{(\pm)}$, $\varphi_{p_3}^{(\pm)}$ и для этого более сложного случая.

§ 7.4. Электрическое поле и распространяющаяся вдоль него плоская волна

Следующей по сложности конфигурацией после постоянного однородного поля является суперпозиция постоянного электрического поля и распространяющейся вдоль него плоской волны. Такое электромагнитное поле удовлетворяет уравнениям Максвелла в пустом пространстве. Решения уравнений Клейна — Гордона — Фока и Дирака при наличии постоянного поля и плоской волны получены в работах [140, 141]. Здесь с использованием результатов предыдущего параграфа дана классификация этих решений по знаку частоты и вычислены вероятности рождения пар [138].

Пусть постоянное однородное электрическое поле описывается потенциалом $A_i(x)$ (7.37). Потенциал плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль этого поля, запишем в виде

$$A_i(\varphi) = a_{1i} f_1(\varphi) + a_{2i} f_2(\varphi), \quad (7.57)$$

где a_1, a_2 — взаимно ортогональные 4-амплитуды, $f_{1,2}$ — периодические функции фазы φ с нулевым средним значением. В лоренцевой калибровке, обозначая волновой вектор k_i , имеем:

$$a_1 a_2 = a_n k = k k = 0; \quad \varphi = kx = k_0 x_-; \quad k_i = (k_0, 0, 0, k_0). \quad (7.58)$$

Отрицательно-частотные при $t \rightarrow -\infty$ решения уравнения Клейна — Гордона — Фока с потенциалом $A_i(x) + A_i(\varphi)$ из (7.37) и (7.57), нумеруемые сохраняющимся квантовым числом p_- , можно записать в виде, аналогичном (7.50):

$$\psi_{p_-}^{(-)} = (4 eE)^{-1/4} \exp \{ i [p_1 x_1 + p_2 x_2 - p_- x_+ / 2 - eEx_-^2 / 2 + eEx_-^2 / 4 + (\tilde{\lambda} + i) \ln z / 2 + h_1^{(-)}] \}, \quad (7.59)$$

где введены следующие обозначения:

$$\tilde{\lambda} = \frac{m^2 + p_-^2 + e^2 a_1^2 \bar{f}_1^2 + e^2 a_2^2 \bar{f}_2^2}{eE}; \quad \bar{f}_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi f_n^2(\varphi);$$

$$h_1^{(-)} = h_1^{(-)}(\varphi, \kappa) = - \int_{\varphi}^{\infty} \frac{g(\varphi') d\varphi'}{\kappa - \varphi'} = \int_u^{\infty} \frac{g(u' + \kappa) du'}{u'}, \quad u = \varphi - \kappa; \quad (7.60)$$

$$\kappa = \frac{kp}{eE} = \frac{k_0 p_-}{eE}; \quad g(\varphi) = \sum_{n=1}^2 \{ \alpha_n f_n(\varphi) - 2\beta_n [f_n^2(\varphi) - \bar{f}_n^2] \} =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} (a_l \sin l\varphi + b_l \cos l\varphi); \quad \alpha_n = a_n p / E; \quad \beta_n = e a_n^2 / 4E.$$

Аналогично положительно-частотные при $t \rightarrow +\infty$ решения есть

$$\varphi_{p_{-}}^{(+)} = (4eE)^{-1/4} \exp \{ i [p_1 x_1 + p_2 x_2 - p_- x_+ / 2 - eE x_3^2 / 2 + eE x_-^2 / 4 + (\tilde{\lambda} + i) \ln (-z) / 2 + h_2^{(+)}] \}, \quad (7.61)$$

где

$$h_2^{(+)} = h_2^{(+)}(\varphi, \kappa) = \int_{-\infty}^{\varphi} \frac{g(\varphi') d\varphi'}{\kappa - \varphi'} = - \int_{-\infty}^u \frac{g(u' + \kappa) du'}{u'}.$$

Расстановка знаков частоты в решениях (7.59) и (7.61) оправдывается тем, что при адиабатическом отключении поля волны они переходят соответственно в (7.50) и (7.51).

Положительно-частотные на $-\infty$ и отрицательно-частотные на $+\infty$ решения определяются выражениями (7.52), причем фигурирующие в них функции $\varphi_{p_{-}}^{(+)}$, $\psi_{p_{-}}^{(-)}$ задаются равенствами (7.59) и (7.61), а коэффициент $\tilde{\alpha}$ равен

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(\kappa) = [1 + |\tilde{\beta}(\kappa)|^2]^{1/2}, \quad (7.62)$$

где

$$\tilde{\beta}^*(\kappa) = \exp [-\pi\lambda(\kappa)/2 - i\pi/2 + i\Phi(\kappa)];$$

$$\Phi(\kappa) = \pi \sum_{l=1}^{\infty} (a_l \cos l\kappa - b_l \sin l\kappa); \quad (7.63)$$

$$\lambda(\kappa) = \tilde{\lambda} - 2g(\kappa) = \frac{1}{eE} \left[m^2 + \sum_{n=1}^2 (p_n^2 - 2e(a_n p) f_n(\kappa) + e^2 a_n^2 f_n^2(\kappa)) \right].$$

В рассматриваемом поле оператор $P_3 = i\partial/\partial x^3$ не является сохраняющейся величиной. Поэтому непосредственное построение полного набора решений, аналогичного (7.38) и (7.40), затруднительно. Можно, однако, по определению задать решения $\psi_{p_s}^{(\pm)}$, $\varphi_{p_s}^{(\pm)}$ с помощью формул (7.53), в которых ядро интегрального оператора M остается без изменений, а в качестве функций $\psi_{p_{-}}^{(\pm)}$, $\varphi_{p_{-}}^{(\pm)}$ фигурируют (7.59) и (7.61). В результате, например, для отрицательно-частотных на $-\infty$ и на $+\infty$ решений получаются следующие явные выражения:

$$\left. \begin{aligned}
 \Psi_{p_3}^{(-)} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (eE)^{-1/4} \exp \left[i \left(\mathbf{p}\mathbf{x} - \frac{\tau^2}{2} \right) \right] \int_{-\infty}^{\infty} dz z v^* \times \\
 &\times \exp \left[i \left(-\frac{z^2}{4} - z\tau + h_1^{(-)}(u, \kappa) \right) \right], \\
 \Phi_{p_3}^{(-)} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (eE)^{-1/4} \exp \left[i \left(\mathbf{p}\mathbf{x} - \frac{\tau^2}{2} \right) \right] \int_{-\infty}^{\infty} dz \tilde{\alpha}^*(\kappa) z v^* \times \\
 &\times \exp \left[i \left(-\frac{z^2}{2} - z\tau + h_1^{(-)}(u, \kappa) \right) \right],
 \end{aligned} \right\} (7.64)$$

где τ определено в (7.39), а в интегралах по z в качестве u и κ следует брать

$$u = k_0 z (eE)^{-1/2}, \quad \kappa = \varphi - k_0 z (eE)^{-1/2}.$$

Можно убедиться в том, что функции $\Psi_{p_3}^{(\pm)}$, $\Phi_{p_3}^{(\pm)}$ образуют полные ортонормированные наборы [138].

Для функций, нумеруемых значением p_- , выполняются аналогичные (7.41) соотношения

$$\Psi_{p_-}^{(-)} = \tilde{\alpha} \Phi_{p_-}^{(-)} + \tilde{\beta}^* \Phi_{p_-}^{(+)}, \quad (7.65)$$

где $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ определяются (7.62) и (7.63).

С использованием (5.31) получаем плотность числа частиц и античастиц с квантовыми числами (p_1, p_2, p_-) и $(-p_1, -p_2, -p_-)$ соответственно, рожденных рассматриваемым внешним полем из вакуума

$$n_{p_-}^{(0)} = |\tilde{\beta}(\kappa)|^2 = \exp(-\pi\lambda(\kappa)). \quad (7.66)$$

Очевидно, что (7.66) совпадает с аналогичным результатом для постоянного поля, если совершить в последнем замену $\lambda \rightarrow \lambda(\kappa)$, которая соответствует переходу к физическому импульсу частицы в присутствии плоской волны:

$$p_i \rightarrow \Pi_i = p_i - eA_i(x) \quad (7.67)$$

(ср. с аналогичным рассуждением для однородного поля в § 6.2). Отсюда вытекает, что плотность по физическому импульсу числа рожденных пар фактически не зависит от поля плоской электромагнитной волны и определяется только тем электрическим полем, вдоль которого она распространяется [138, 142]. С использованием функционального подхода в работе [143] установлен несколько более общий результат, а именно показано, что вакуумная добавка к действию суперпозиции постоянного однородного электрического поля и поля плоской волны совпадает с аналогичной величиной при наличии одного лишь постоянного поля.

Предположим теперь, что измеряется плотность числа рождающихся пар, характеризующихся квантовыми числами (p_1, p_2, p_3) .

Разлагая первую из функций (7.64) по полной системе положительно- и отрицательно-частотных при $t \rightarrow +\infty$ функций $\varphi_{p_s}^{(\pm)}$, получаем

$$\psi_{p_s}^{(-)} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \exp \left[i \frac{(p_3 - sk_0)^2 - p_3^2}{2eE} \right] \{ \tilde{\alpha}_s \varphi_{p_s - sk_0}^{(-)} + \tilde{\beta}^* \varphi_{p_s - sk_0}^{(+)} \}, \quad (7.68)$$

где $\tilde{\alpha}_s, \tilde{\beta}_s^*$ — фурье-компоненты величин $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}^*$, например

$$\tilde{\alpha}(x) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}_s \exp(-isx). \quad (7.69)$$

Соотношение (7.68) является примером реализации равенств (5.30) в случае, когда квантовое число, нумерующее состояние, в рассматриваемом внешнем поле не сохраняется. Для плотности числа пар с квантовыми числами (p_1, p_2, p_3) имеем из (5.31)

$$n_{p_s}^{(0)} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} |\beta_s|^2. \quad (7.70)$$

Интенсивность рождения получается интегрированием (7.70) по всем импульсам:

$$\begin{aligned} I^{(0)} &= \frac{1}{(2\pi)^3 T} \int d^3 p n_{p_s}^{(0)} = \frac{1}{(2\pi)^4 T} \int d^3 p \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \exp(-\pi\lambda(\varphi)) = \\ &= \frac{e^2 E^2}{8\pi^3} \exp\left(-\frac{\pi m^2}{|e|E}\right). \end{aligned} \quad (7.71)$$

Выражение (7.71) совпадает с (7.19), которое получено для случая постоянного электрического поля [к такому же результату приводит и (7.66)]. Однако импульсная плотность числа рожденных пар (7.70) отличается от соответствующей величины (7.17) для постоянного поля. Это объясняется тем, что квантовое число p_3 в присутствии волны не сохраняется.

Выше рассматривался простейший случай скалярных частиц. Приведем несколько аналогичных результатов для частиц со спином $1/2$ [138].

Решения уравнения Дирака в поле с потенциалом $A_i(x) + A_i(\varphi)$ из (7.37) и (7.57), нумеруемые сохраняющимся квантовым числом p_- , есть

$$\left. \begin{aligned} \psi_{p_-}^{(-)} &= N_r \exp \left\{ i \left[p_1 x_1 + p_2 x_2 - \frac{p_- x_+}{2} + \frac{eEx_2^2}{4} - \frac{eEx_3^2}{2} + \frac{\tilde{\lambda}}{2} \ln z + h_1^{(-)} \right] \right\}, \\ \psi_{p_-}^{(+)} &= N_r \exp \left\{ i \left[p_1 x_1 + p_2 x_2 - \frac{p_- x_+}{2} + \frac{eEx_2^2}{4} - \frac{eEx_3^2}{2} + \tilde{\lambda} \ln(-z) + h_2^{(+)} \right] \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (7.72)$$

где N_r — некоторые биспинорные множители (см. [138]), остальные обозначения были введены при изложении скалярного случая. Решения $\psi_{r-}^{(-)}$, $\psi_{r-}^{(+)}$ даются соотношениями (7.52), которые сохраняют свой вид, если определить коэффициенты по-новому:

$$\tilde{\beta}^* = \exp[-\pi\lambda(\kappa)/2 + i\Phi(\kappa)], \quad \tilde{\alpha} = [1 - |\tilde{\beta}(\kappa)|^2]^{1/2}. \quad (7.73)$$

С помощью формул вида (7.53) можно теперь получить из (7.72) полные наборы решений уравнения Дирака, нумеруемых индексом p_z , и подсчитать плотность числа рожденных внешним полем пар. Плотность числа фермионов, родившихся в состоянии с квантовыми числами (r, p_1, p_2, p_-) , есть

$$n_{p_-} = |\tilde{\beta}(\kappa)|^2 = \exp[-\pi\lambda(\kappa)] \quad (7.74)$$

и снова получается из формулы (7.16) для постоянного поля заменой $\lambda \rightarrow \lambda(\kappa)$. Интегрирование (7.74) по импульсам приводит к результату $I^{(1/2)} = 2I^{(0)}$, где $I^{(0)}$ определено в (7.71) (множитель 2 из-за суммы по двум спиновым состояниям). Таким образом, и в фермионном случае плотность родившихся пар по физическому импульсу не зависит от поля волны.

Если выключить постоянное электрическое поле E , то $\lambda(\kappa) \rightarrow \infty$ и плотности числа рождающихся пар (7.66) и (7.74) обращаются в нуль. Таким образом, плоская волна не может рождать пар. Этот результат, полученный впервые в работе [89], является следствием того, что для плоской волны оба инварианта электромагнитного поля $\mathcal{F} = \mathcal{G} = 0$ [см. (7.49)].

С помощью изложенных методов можно найти вероятности рождения пар и в других случаях, когда известно точное решение волновых уравнений во внешнем поле. Например, в работе [142] подсчитано число частиц, рождаемых электрическим полем и полем редмондовской конфигурации, т. е. параллельными электрическим и магнитным полями, вдоль которых распространяется плоская волна.

Глава 8. РОЖДЕНИЕ ПОЗИТРОНОВ КУЛОНОВСКИМ ПОЛЕМ СВЕРХТЯЖЕЛЫХ ЯДЕР

§ 8.1. Спектр уравнения Дирака в кулоновском поле и критический заряд ядра

В настоящей главе рассматривается эффект рождения позитронов кулоновским полем сверхтяжелого ядра, предсказанный в работе [144]. Этот эффект представляет существенный интерес по двум причинам. Во-первых, при описании рождения позитронов кулоновским полем оказалось необходимым ввести в рассмотрение важное с теоретической точки зрения понятие заряженного вакуума. Во-вторых,

при столкновении двух обычных тяжелых ядер (например, урана) возникает квазимолекула, имитирующая сверхтяжелое ядро, что позволяет наблюдать эффект рождения экспериментально (такие эксперименты уже ставятся [145]). В связи с большим числом работ по данной теме здесь приведены лишь основные ссылки. Более подробные указания на литературу даны в обзорах [146, 147].

Рассмотрим уравнение Дирака (1.39) в кулоновском поле, задаваемом вектор-потенциалом

$$A_k(x) = (-eZ/r, 0, 0, 0), \quad (8.1)$$

где Z — заряд ядра.

Дискретный спектр уровней энергии электрона в кулоновском поле дается формулой Зоммерфельда [31]

$$E_{n,j} = m [1 + (Z\alpha)^2 / (n - |\kappa| + \sqrt{\kappa^2 - (Z\alpha)^2})^2]^{-1/2}, \quad (8.2)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$, $\kappa = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Очевидно, что при $|\kappa| < Z\alpha$ под корнем в знаменателе (8.2) стоит отрицательная величина, вследствие чего формула теряет смысл. Например, для основного состояния $1s_{1/2}$ имеет место $n = -\kappa = 1$ и энергия электрона

$$E_{1,1/2} = m \sqrt{1 - (Z\alpha)^2}. \quad (8.3)$$

Как видно из (8.3), с ростом Z энергия уменьшается до нуля (при $Z \approx 137$), а при больших Z становится чисто мнимой. Это не означает, однако, что при $Z > 137$ уравнение Дирака не имеет решений. Для нахождения уровней энергии в этом случае необходимо поставить некоторое граничное условие при $r = 0$ (что эквивалентно определению самоспряженного расширения оператора энергии [127]). Физически постановка граничного условия в нуле означает обрезание кулоновского потенциала на малых расстояниях, т. е. учет конечных размеров ядра. Впервые такой учет был проделан в работе [148], причем оказалось, что с ростом Z уровни энергии становятся отрицательными и продолжают опускаться вплоть до границы нижнего континуума — m . Значение Z , при котором $E_{1,1/2} = -m$, называется *критическим*.

Если Z становится больше $Z_{кр}$, то уровень энергии основного состояния «погружается» в нижний континуум. Предположим, что на этом уровне имелись два электрона. Поскольку в картине Дирака все состояния нижнего континуума уже заняты электронами с отрицательной энергией, то погружившиеся в континуум электроны нельзя описать с помощью обычной волновой функции. Для их описания приходится вводить понятие заряженного вакуума [57]. Сильное поле ядра меняет свойства дираковского моря, т. е. вакуума в терминах вторично квантованной теории электрон-позитронного поля. Если из бесконечной плотности заряда дираковского моря, возмущенного сверхкритическим кулоновским полем, вычесть бесконечную плотность заряда без поля, то получается ко-

нечная величина, интеграл от которой по пространству равен $2e$. Если в нижний континуум погружается незаполненный электронами уровень, то в результате распада возникшего квазистационарного состояния рождаются два позитрона, которые под действием кулоновского отталкивания уходят на бесконечность, и происходит такая перестройка вакуума, что он приобретает заряд $2e$. Эти явления более подробно описаны ниже, а сейчас предварительно рассмотрим спектр уравнения Дирака при $Z > 137$ и методы определения величины $Z_{кр}$ [149—151].

После отделения временной и угловых переменных уравнение Дирака в центрально-симметричном поле с потенциалом $A_0(r)$ принимает вид

$$\left. \begin{aligned} dF/dr &= -(\kappa/r) F + (m + E - eA_0) G, \\ dG/dr &= (m - E + eA_0) F + (\kappa/r) G, \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

где $F = rf(r)$, $G = rg(r)$, f и g — радиальные функции из верхней и нижней компонент биспинора [31].

Исключая из (8.4) функцию G и переходя к радиальной функции $\chi(r)$, определяемой согласно

$$F(r) = (m + E - eA_0)^{1/2} \chi(r), \quad (8.5)$$

приходим к уравнению

$$\chi''(r) + k^2(r) \chi(r) = 0, \quad (8.6)$$

где штрих означает производную по r ;

$$k^2(r) = E^2 - m^2 + (e^2 A_0^2 - 2eEA_0 - \kappa(\kappa + 1)/r^2) - \left(\frac{eA_0''}{2(m + E - eA_0)} + \frac{3}{4} \frac{e^2 A_0'^2}{(m + E - eA_0)^2} - \frac{\kappa e A_0'}{r(m + E - eA_0)} \right). \quad (8.7)$$

Из (8.6) и (8.7) легко установить асимптотическое поведение функции F , если предположить, что при $r \rightarrow \infty$ $A_0, A_0', A_0'' \rightarrow 0$. При этом оказывается, что волновые функции экспоненциально убывают, если $|E| < m$, и осциллируют, если $|E| > m$.

Особенно важен случай $|E| = m$ (уровень находится на границе континуума). Для этого случая при $r \rightarrow \infty$

$$F(r) \sim \begin{cases} \exp(-ir\sqrt{8m|eA_0|}), & E = m, \\ \exp(-r\sqrt{8m|eA_0|}), & E = -m, \end{cases} \quad (8.8)$$

т. е. для потенциалов, убывающих медленнее r^{-2} , состояние электрона с $E = -m$ является связанным (электрон на границе нижнего континуума остается локализованным в пространстве). Такое поведение электрона объясняется наличием широкого барьера в эффективном потенциале рассматриваемой задачи. Действительно, уравнения (8.6) и (8.7) можно записать в виде одномерного уравнения Шредингера с эффективной энергией $\varepsilon = (E^2 - m^2)/2m$

и эффективным потенциалом $U_{эф}$. В простейшем случае $E = -m$ для основного состояния в кулоновском поле (8.1) получаем потенциал барьерного типа

$$U_{эф} = Z\alpha/r - [(Z\alpha)^2 - 3/4]/2mr^2.$$

Таким образом, электрон с отрицательной полной энергией на больших расстояниях от ядра не притягивается к нему, а отталкивается подобно позитрону.

Для кулоновского потенциала (8.1) при $E = -m$ уравнение (8.6) решается точно [151]. В результате для решений (8.4) имеем

$$F(r) = K_{iv} (\sqrt{8mZe^2 r}), \quad G(r) = \frac{1}{Ze^2} (rF' + \kappa F), \quad (8.9)$$

где $K_\alpha(z)$ — функция Макдональда; $\nu = 2\sqrt{Z^2 e^4 - \kappa^2}$.

Используя точное решение (8.9), можно найти значение критического заряда ядра. Для этого необходимо учесть конечность размеров ядра. Предположим, что $A_0^{(z)}$ определяется равенством (8.1) вплоть до поверхности ядра, а внутри ядра имеет более сложный вид:

$$A_0^{(z)}(r) = \begin{cases} -Ze/r, & r \geq R, \\ -f^{(b)}(r) Ze/R, & r \leq R, \end{cases} \quad (8.10)$$

где R — радиус ядра. Вид функции $f^{(b)}$ определяется моделью распределения заряда в ядре. Так, для поверхностного распределения заряда (модель I) $f^{(I)}(r) = 1$, а для равномерного распределения по объему (модель II) $f^{(II)}(r) = -(r/R)^2 / 2 + 3/2$.

Чтобы найти спектр уравнения Дирака, необходимо сшить решения внутри и вне ядра при $r = R$. Решение вне ядра при $E = -m$ дается (8.9), решение внутри ядра, например, для модели I, при любой энергии есть [146]

$$F^{(I)}(r) = r j_{l_1}(pr), \quad G^{(I)}(r) = \text{sign}(\kappa) \frac{pr}{E + Ze^2/R + m} j_{l_2}(pr), \quad (8.11)$$

где $l_1 = |\kappa| + (1/2)(\text{sign} \kappa - 1)$, $l_2 = l_1 - \text{sign} \kappa$, $p^2 = (E + Ze^2/R)^2 - m^2$, $j_l(z)$ — сферические функции Бесселя. В случае основного состояния $1s_{1/2}$ при $E = -m$ (8.11) принимает более простой вид

$$F^{(I)} = \frac{\sin pr}{p}, \quad G^{(I)} = -\frac{R}{Ze^2} \left(\frac{\sin pr}{pr} - \cos pr \right). \quad (8.12)$$

Поскольку радиус ядра R мал по сравнению с комптоновской длиной электрона m^{-1} (например, $R = 1,2 \cdot 10^{-12}$ см = $0,03 m^{-1}$), то можно считать $p \approx Ze^2/R$. Тогда условие сшивания решений приводит к трансцендентному уравнению

$$\frac{Z_{кр} e^2}{R} \text{ctg}(Z_{кр} e^2) = \frac{1}{K_{iv} (\sqrt{8Z_{кр} e^2 R m})} \frac{dK_{iv} (\sqrt{8Z_{кр} e^2 r m})}{dr} \Big|_{r=R}. \quad (8.13)$$

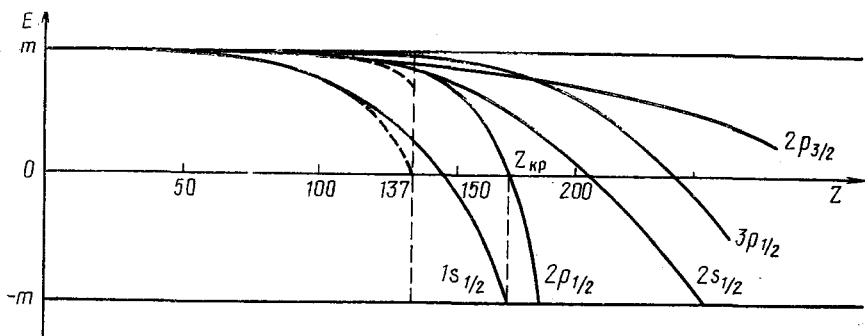


Рис. 6

При фиксированном R (8.13) является уравнением относительно неизвестного $Z_{кр}$. Численное решение его дает $Z_{кр} \approx 170$. Такое же значение получается и при использовании второй модели распределения заряда ядра. Как показано в работе [152], при достаточно широких предположениях этот результат практически не зависит от вида обрезающей кулоновский потенциал функции $f^{(b)}$.

Значение $Z_{кр}$ несколько изменяется при учете некоторых факторов, которыми мы пренебрегали выше. Так, межэлектронные взаимодействия увеличивают критический заряд на две единицы [153]. В то же время поляризация вакуума кулоновским полем практически не изменяет $Z_{кр}$ (оценки поляризации вакуума полем сверхтяжелых ядер приведены в гл. 9).

В работах [150—152] найдены уровни энергии не только основного, но и возбужденных состояний с учетом конечности размеров ядра. Как оказалось, возбужденные уровни, подобно основному, опускаются с ростом Z до границы нижнего континуума. При этом аналогичное (8.13) уравнение (в которое вместо функций Макдональда входят функции Уиттекера) позволяет определить соответствующие критические значения Z . Для состояний $2p_{1/2}$, $2p_{3/2}$, следующих за основным, они оказываются равными 185 и 245.

Некоторые аналитические оценки для уровней энергии и волновых функций удается получить и без использования точного вида решений, если предположить, что в задаче имеется большой параметр $\Lambda = -\ln mR \gg 1$. Хотя для реальных размеров ядра $R \sim \sim 10^{-12}$ см значение этого параметра невелико ($\Lambda \approx 3,5$), такое приближение дает правильную общую картину движения уровней с изменением Z . Графики зависимости нижних энергетических уровней от Z приведены на рис. 6 [150], на котором штрихом указан ход уровней без учета конечности размеров ядра.

Как видно из рис. 6, учет конечности размеров ядра снимает имеющееся в формуле (8.2) вырождение уровней с разными l , но одним и тем же j . Так, уровни $2p_{1/2}$, $2s_{1/2}$ при $Z > 137$ не совпадают между собой.

Изображенный на рис. 6 график справедлив только в том случае, когда кулоновский потенциал является нулевой компонентой 4-вектора (векторная связь). Для спинорного уравнения (1.55) со скалярной связью при $U = -Ze^2/r$ картина уровней изменяется. Как показано в работе [154], дискретные спектры электронов и позитронов для такого уравнения симметричны относительно уровня $E = 0$, причем с ростом константы скалярной связи уровни энергии асимптотически стремятся к нулевому значению, никогда не достигая его.

Спектр скалярных частиц в сильном кулоновском поле существенно отличается от спектра фермионов. Правильная интерпретация поведения бозонов в околоскритическом кулоновском поле требует учета их взаимодействий и поляризации вакуума (эти вопросы обсуждаются ниже в гл. 9).

Выше рассматривался только случай дискретного спектра. Волновые функции непрерывного спектра с учетом конечности размеров ядра можно выразить через функции Уиттекера (см., например, работу [146]). Как следует из (8.8), волновая функция состояния с энергией $E = -m$ является квадратично интегрируемой. Вследствие этого искажение волновых функций нижнего континуума приближающимся к нему дискретным уровнем незначительно. Таким образом, при $Z < Z_{кр}$ спектр уравнения Дирака в поле ядра полностью определен. Однако при $Z > Z_{кр}$ теория должна быть перестроена, поскольку для таких Z дискретный уровень, отвечающий основному состоянию, исчезает, а собственные функции нижнего континуума в определенной области энергий претерпевают значительные изменения. Следствием этого является эффект рождения позитронов и необходимость введения понятия заряженного вакуума

§ 8.2. Свойства непрерывного спектра уравнения Дирака при $Z > Z_{кр}$ и рождение позитронов

При $Z > Z_{кр}$ уровень основного состояния электрона $1 s_{1/2}$ исчезает из дискретного спектра и сливается с нижним континуумом. Низшим состоянием дискретного спектра становится $2 p_{1/2}$. Если уровень $1 s_{1/2}$ не был заполнен электронами, то с точки зрения дираковской картины в нижнем континууме появляется вакансия, которая может быть занята двумя электронами из дираковского моря, различающимися знаком проекции спина. При этом в дираковском море образуются две дырки (позитроны), которые, просочившись через кулоновский барьер в эффективном потенциале, уходят на бесконечность как реальные частицы. С точки зрения вторично квантованной теории сверхкритическое кулоновское поле порождает два позитрона на расстоянии, меньшем m^{-1} от ядра, и изменяет вакуум так, что он приобретает заряд $2e$.

Пользуясь иной терминологией, можно сказать, что поле рождает две электрон-позитронные пары, причем электроны заполняют K -оболочку. Следует, однако, иметь в виду, что плотность заряда на этой оболочке не описывается двухэлектронной волновой функцией, а размазана по континууму в определенном интервале энергий. Рассмотрим сначала явления при $Z > Z_{кр}$ в рамках одночастичной теории [57, 146, 147, 155, 156].

Представим уравнение Дирака (1.39) в форме, аналогичной уравнению Шредингера:

$$i\partial\psi/\partial t = H_D(Z)\psi = (\alpha\mathbf{p} + \beta m + eA_0^{(Z)})\psi, \quad (8.14)$$

где $\alpha = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}$, $\beta = \gamma^0$, $\mathbf{p} = -i\nabla$, $A_0^{(Z)}$ определено в (8.10).

Поскольку $A_0^{(Z)}$ линейно зависит от параметра Z , то для сверхкритического $Z = Z_{кр} + \Delta Z$ можно написать

$$H_D(Z) = H_D(Z_{кр}) + eA_0^{(\Delta Z)}. \quad (8.15)$$

В качестве полной ортонормированной системы решений уравнения Дирака возьмем собственные функции оператора $H_D(Z_{кр})$, причем состояния нижнего континуума обозначим $\psi_E(x)$, а связанное состояние с энергией $E = -m$ обозначим $\psi_B(x)$ (остальные состояния для простоты не рассматриваются, так как ΔZ предполагается не слишком большим, а следующее за $\psi_B(x)$ состояние отделено от него значительным энергетическим интервалом; спиновые индексы опущены). Справедливы соотношения

$$H_D(Z_{кр})\psi_B(x) = E_B\psi_B(x) = -m\psi_B(x), \quad (8.16)$$

$$H_D(Z_{кр})\psi_E(x) = E\psi_E(x)$$

и условия нормировки

$$\int \psi_B^\dagger(x)\psi_B(x)d^3x = 1, \quad \int \psi_E^\dagger(x)\psi_{E'}(x)d^3x = \delta(E - E'). \quad (8.17)$$

Используя (8.15)—(8.17) и вводя обозначение

$$eA_0^{(\Delta Z)}(r) = \Delta Z U(r), \quad (8.18)$$

запишем матричные элементы от $H_D(Z)$ при $Z > Z_{кр}$:

$$\int \psi_B^\dagger(x)H_D(Z)\psi_B(x)d^3x = E_B + \Delta Z \int \psi_B^\dagger U\psi_B d^3x \equiv -m + \Delta E; \quad (8.19)$$

$$\int \psi_E^\dagger(x)H_D(Z)\psi_B(x)d^3x = \Delta Z \int \psi_E^\dagger U\psi_B d^3x \equiv U_E; \quad (8.20)$$

$$\begin{aligned} \int \psi_{E''}^\dagger(x)H_D(Z)\psi_{E'}(x)d^3x &= \int \psi_{E''}^\dagger H_D(Z_{кр})\psi_{E'}d^3x + \\ &+ \int \psi_{E''}^\dagger \Delta Z U\psi_{E'}d^3x \equiv E'\delta(E'' - E') + \Delta Z U_{E''E'}. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Рассмотрим теперь собственные состояния $\varphi_E(x)$ сплошного спектра при $Z > Z_{кр}$. Они определяются условиями

$$H_D(Z_{кр} + \Delta Z)\varphi_E(x) = E\varphi_E(x), \quad \int \varphi_E^\dagger(x)\varphi_{E'}(x)d^3x = \delta(E - E'). \quad (8.22)$$

Разложим состояние ψ_E по полной системе введенных выше собственных функций гамильтониана $H_D (Z_{кр})$:

$$\psi_E = a(E) \psi_B + \int_{E' < -m} dE' b_{E'}(E) \psi_{E'} . \quad (8.23)$$

Для определения коэффициентов этого разложения подставим (8.23) в (8.22), умножим результаты на функции ψ_B^* и $\psi_{E'}^*$ и проинтегрируем по координатам. Тогда с учетом (8.16)—(8.22) получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (E_B + \Delta E) a(E) + \int_{E' < -m} dE' b_{E'}(E) U_{E'}^* &= E a(E) , \\ U_{E'} a(E) + b_{E'}(E) E' + \\ + \int_{E'' < -m} dE'' b_{E''}(E) \Delta Z U_{E'} &= E b_{E'}(E) . \end{aligned} \right\} \quad (8.24)$$

Интегралом во втором уравнении (8.24) можно пренебречь, так как он описывает переходы между состояниями континуума под влиянием малой добавки ΔZ к $Z_{кр}$. В этом приближении (8.24) имеет точное решение

$$\begin{aligned} a(E) &= \frac{U_E^*}{E - E_B - \Delta E - F(E) + i\pi |U_E|^2} , \\ b_{E'}(E) &= \delta(E - E') + \frac{a(E) U_{E'}}{E - E' - i\varepsilon} , \end{aligned} \quad (8.25)$$

где $\varepsilon > 0$ и введено следующее обозначение (\mathcal{P} — главное значение интеграла):

$$F(E) = \mathcal{P} \int_{E' < -m} dE' |U_{E'}|^2 / (E - E') .$$

Таким образом, коэффициенты разложения (8.23) определены.

Выясним теперь, во что переходит исчезнувшее из дискретного спектра при $Z > Z_{кр}$ состояние ψ_B . Величина

$$|a(E)|^2 = \frac{|U_E|^2}{[E - (E_B + \Delta E + F(E))]^2 + \pi^2 |U_E|^4} \quad (8.26)$$

есть вероятность того, что состояние ψ_B под действием сверхкритического потенциала перейдет в состояние с энергией $E < -m$. Выражение (8.26) имеет резонансный характер. Как показывают численные расчеты, матричный элемент U_E слабо зависит от энергии. Поэтому можно пренебречь величиной $F(E)$ и, вводя ширину $\Gamma_0 = 2\pi |U_E|^2$, переписать (8.26) в брейт-вигнеровском виде

$$|a(E)|^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma_0}{[E - (E_B + \Delta E)]^2 + \Gamma_0^2/4} . \quad (8.27)$$

Выражение (8.27) описывает квазистационарный уровень с энергией $E_0 = E_B + \Delta E < -m$ и шириной Γ_0 . С учетом обозначений (8.19) положение центра резонанса определяется равенством

$$E_0 = -m + \Delta Z \int \psi_B^\dagger U \psi_B d^3x \equiv -m - \Delta Z \delta. \quad (8.28)$$

При этом δ слабо зависит от ΔZ и связанное состояние углубляется в континуум приблизительно линейно по ΔZ .

Если ΔZ не слишком мало, то для ширины резонанса получается квадратичная зависимость от ΔZ :

$$\Gamma_0 = 2\pi \left| \Delta Z \int \psi_E^\dagger U \psi_B d^3x \right|^2 \equiv \Delta Z^2 \gamma. \quad (8.29)$$

В случае $\Delta Z \ll Z_{\text{кр}}$ формула (8.29) неприменима и Γ_0 описывается выражением [57]

$$\Gamma_0 = c_1 m \exp(-c_2 \sqrt{Z_{\text{кр}}/\Delta Z}), \quad (8.30)$$

где c_1 и c_2 — численные множители порядка единицы. Экспоненциальная малость Γ_0 при $\Delta Z \ll Z_{\text{кр}}$ объясняется тем, что для медленных позитронов кулоновский барьер в эффективном потенциале $U_{\text{эф}}$ экспоненциально мало проникаем. Практически соотношение (8.29) применимо при $\Delta Z > 3$ [157].

Таким образом, «наследником» нижнего связанного состояния при $Z > Z_{\text{кр}}$ является квазистационарный уровень, распределенный в полосе энергий нижнего континуума шириной Γ_0 . Если состояние $1s_{1/2}$ при $Z < Z_{\text{кр}}$ было незаполненным, то с вероятностью Γ_0 рождаются два позитрона, которые за время $t \gtrsim 1/\Gamma_0$ (время распада квазистационарного состояния) уходят на бесконечность, и происходит перестройка вакуума.

Действительно, при $Z < Z_{\text{кр}}$ имеется электронный вакуум, если все связанные состояния пусты. Однако при $Z > Z_{\text{кр}}$ погрузившийся в континуум уровень приводит к возникновению вакуумной плотности заряда в полосе энергий с центром E_0 и шириной Γ_0 и его нельзя рассматривать как пустой. Вследствие этого основным состоянием при $Z > Z_{\text{кр}}$ является вакуум, обладающий полным зарядом $2e$. Все остальные электронные состояния (когда заполнены один или несколько дискретных уровней) имеют большую энергию, чем это основное состояние. Можно сказать, что при переходе Z через критическое значение происходит распад обычного нейтрального вакуума на заряженный вакуум и два позитрона (понятие заряженного вакуума введено в работах [57, 158]). Если при $Z < Z_{\text{кр}}$ уровень $1s_{1/2}$ был заполнен электронами, то при переходе Z через критическое значение также образуется заряженный вакуум, однако рождения позитронов не происходит.

Очевидно, что явления, возникающие при $Z > Z_{\text{кр}}$, имеют существенно многочастичный характер, и их следует описывать в рамках теоретико-полевого формализма. Простейший вариант такого описания сверхкритического атома дан в следующем параграфе.

§ 8.3. Вторично квантованное описание сверхкритического атома

В гл. 5 рассмотрена теоретико-полевая задача о рождении пар электромагнитным полем произвольного вида, причем предполагалось, что при $t \rightarrow \pm \infty$ порождающая частицы часть поля отключается. Таким образом, результаты гл. 5 можно применить к случаю рождения частиц кулоновским полем, если предположить, что заряд ядра зависит от времени по определенному закону $Z(t)$ с соблюдением условия $Z(\pm\infty) < Z_{кр}$. В такой постановке задачи вычисление вероятностей рождения пар сводится к нахождению асимптотик при $t \rightarrow \pm \infty$ решений уравнения Дирака, обладавших определенной частотностью при $t \rightarrow -\infty$. Однако уравнение Дирака с потенциалом (8.10) и переменным $Z(t)$ не допускает полного разделения переменных, что существенно осложняет исследование его решений. Поэтому здесь рассмотрена более простая теоретико-полевая схема описания сверхкритического ядра, в которой фермионное поле предполагается вторично квантованным, но заряд ядра Z продолжает оставаться адиабатически изменяющимся внешним параметром [159, 146, 147] (результаты, аналогичные изложенным ниже, получены в работах [160, 161] методом диагонализации приближенного гамильтониана преобразованиями Боголюбова).

Введем поверхность Ферми E_F , разделяющую занятые и незанятые электронные состояния (напомним, что уровни нижнего континуума заполнены). Разложение оператора фермионного поля по операторам рождения и уничтожения можно записать в виде

$$\psi(x) = \sum_{E > E_F} a_{E_F}^{-} \psi_{E_F}(x) \exp(-iEt) + \sum_{E < E_F} a_{E_F}^{+} \psi_{E_F}(x) \exp(-iEt). \quad (8.31)$$

Здесь и ниже подразумевается суммирование по дискретным и интегрирование по непрерывным квантовым числам ($r = 1, 2$ соответственно двум возможным ориентациям спина электрона, а индексы момента импульса опущены), ψ_{E_F} — собственные функции оператора H_D , отвечающие собственному значению E .

В случае не слишком сильного кулоновского поля ($Z < 150$) связанные состояния электрона при $E < 0$ отсутствуют и можно положить $E_F = 0$, как это обычно делают в квантовой электродинамике. Рассмотрим, как конкретизируется положение поверхности Ферми и разложение (8.31) в различных ситуациях, возникающих при переходе Z через критическое значение. Для простоты рассмотрим только нижнее связанное состояние $1s_{1/2}$ и соответствующее ему $Z_{кр}$.

Пусть состояние $1s_{1/2}$ заполнено электронами. Тогда поверхность Ферми E_F лежит выше энергии состояния $1s_{1/2}$. Используя полный набор решений уравнения Дирака при $Z = Z_{кр}$, получаем

разложение оператора поля по операторам рождения и уничтожения

$$\begin{aligned} \psi = & \sum_{E > E_F} a_{E_r}^{(-)} \psi_{E_r} \exp(-iEt) + a_{B_1}^{(+)} \psi_{B_1} \exp(imt) + \\ & + a_{B_2}^{(+)} \psi_{B_2} \exp(imt) + \sum_{E < -m} a_{E_r}^{(+)} \psi_{E_r} \exp(-iEt) \end{aligned} \quad (8.32)$$

(через ψ_{E_r} , ψ_{B_r} обозначены соответственно состояния континуумов и связанные состояния с энергией $-m$ при $Z = Z_{кр}$).

Вакуумное состояние $|0\rangle$, отвечающее выбранной таким образом поверхности Ферми, обладает зарядом $2e$ при $Z < Z_{кр}$ и $Z > Z_{кр}$. Следует, однако, подчеркнуть принципиально различные свойства вакуума $|0\rangle$ в докритической и закритической областях. При $Z < Z_{кр}$ имеется по существу обычное двухэлектронное состояние, описывающее электроны на K -оболочке атома. Как известно, для такого состояния нельзя наблюдать плотность заряда (заряд электрона не дробится и, тем более, не меняется непрерывно). Иная ситуация возникает при $Z > Z_{кр}$. Здесь заряженный вакуум $|0\rangle$ обладает принципиально новой классической характеристикой — плотностью электрического заряда (см. § 2.5). По отношению к состоянию $|0\rangle$ вакансию в $1s_{1/2}$ -состоянии при $Z < Z_{кр}$ нужно интерпретировать как связанное состояние позитрона. Энергию в состоянии $1s_{1/2}$ определяют как среднее значение гамильтониана

$$H(Z) = : \int \psi^+ H_D(Z) \psi d^3x : \quad (8.33)$$

(где нормальное упорядочение обеспечивает вычитание бесконечной энергии занятых состояний ниже поверхности Ферми):

$$\begin{aligned} E_{1s} = E_B + \Delta E = & \langle 0 | a_{B_r}^{+(-)} H_D(Z_{кр} + \Delta Z) a_{B_r}^+ | 0 \rangle = \\ = & \langle \Psi_{B_r} | H_D(Z_{кр} + \Delta Z) | \Psi_{B_r} \rangle = -m - \Delta Z \delta \end{aligned} \quad (8.34)$$

[величина δ определена в (8.28), $|\Psi_{B_r}\rangle$ в соответствии с обозначениями § 2.2. есть фоковский столбец $(0, \Psi_{B_r}, 0, \dots)$].

Пусть теперь состояние $1s_{1/2}$ первоначально незаполнено (атом приготовлен с пустой K -оболочкой). В этом случае следует выбрать поверхность Ферми \tilde{E}_F ниже уровня $1s_{1/2}$. Разлагая опять оператор поля по базисным функциям гамильтониана при $Z = Z_{кр}$, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} = & \sum_{E > \tilde{E}_F} a_{E_r}^{(-)} \psi_{E_r} \exp(-iEt) + a_{B_1}^{(-)} \psi_{B_1} \exp(imt) + \\ & + a_{B_2}^{(-)} \psi_{B_2} \exp(imt) + \sum_{E < -m} a_{E_r}^{(+)} \psi_{E_r} \exp(-iEt). \end{aligned} \quad (8.35)$$

Вакуумное состояние $|\tilde{0}\rangle$, соответствующее разложению (8.35), определяется равенствами

$$a_{E_r}^{(-)} |\tilde{0}\rangle = a_{E_r}^{*(-)} |\tilde{0}\rangle = 0. \quad (8.36)$$

Такое состояние обладает нулевым зарядом, но нестабильно при переходе Z через критическое значение. Для того чтобы в этом убедиться, покажем, что при $Z > Z_{кр}$ собственным состоянием гамильтониана является суперпозиция состояния $|\tilde{0}\rangle$ и электрон-позитронных состояний $\tilde{a}_{B1}^{(+)} \tilde{a}_E^{(+)} |\tilde{0}\rangle$:

$$|\tilde{\Psi}(E)\rangle = a(E) |\tilde{0}\rangle + \int_{E' < -m} dE' b_{E'}(E) \tilde{a}_{B1}^{(+)} \tilde{a}_E^{(+)} |\tilde{0}\rangle, \quad (8.37)$$

в которой коэффициенты a и b_E совпадают с определенными в (8.25).

Подставим (8.37) в уравнение Шредингера

$$\tilde{H} |\tilde{\Psi}(E)\rangle = E |\tilde{\Psi}(E)\rangle, \quad (8.38)$$

где

$$\tilde{H} = \int \tilde{\psi}^\dagger H_D(Z) \tilde{\psi} d^3x + E_{1s} \quad (8.39)$$

[постоянная E_{1s} из (8.34) добавлена для удобства]. В явном виде та часть \tilde{H} , которая соответствует состояниям с энергиями ниже поверхности Ферми, есть

$$\begin{aligned} \tilde{H}_R = & \left(1 + \tilde{a}_{B1}^{(+)} \tilde{a}_{B1}^{(-)}\right) E_{1s} + \sum_{E < \tilde{E}_F} \tilde{a}_E^{(-)} \tilde{a}_{B1}^{(-)} U_E + \\ & + \sum_{E < \tilde{E}_F} \tilde{a}_{B1}^{(+)} \tilde{a}_E^{(+)} U_E^* - \Delta Z \sum_{E, E' < \tilde{E}_F} \tilde{a}_E^{(+)} \tilde{a}_{E'}^{(-)} U_{E'E} \end{aligned} \quad (8.40)$$

[обозначения U_E , $U_{EE'}$ введены в (8.20) и (8.21)].

Используя (8.40), получаем следующие значения матричных элементов:

$$\langle \tilde{0} | \tilde{H}_R | \tilde{0} \rangle = E_{1s}, \quad \langle \tilde{0} | \tilde{H}_R \tilde{a}_{B1}^{(+)} \tilde{a}_E^{(+)} | \tilde{0} \rangle = U_E, \quad (8.41)$$

$$\langle \tilde{0} | \tilde{a}_{E'}^{(-)} \tilde{a}_{B1}^{(-)} \tilde{H}_R \tilde{a}_{B1}^{(+)} \tilde{a}_E^{(+)} | \tilde{0} \rangle = E \delta(E - E') + \Delta Z U_{E'E}.$$

Поскольку равенства (8.41) совпадают с (8.19) — (8.21), то коэффициенты разложения (8.37) действительно определяются формулами (8.25).

Если вначале имелось вакуумное состояние $|\tilde{0}\rangle$, то вероятность обнаружить его в конечном состоянии $|\tilde{\Psi}(E)\rangle$ есть

$$p(E) = |\langle \tilde{0} | \tilde{\Psi}(E) \rangle|^2 = |a(E)|^2, \quad (8.42)$$

причем $\int p(E) dE = 1$. Состояние $|\tilde{\Psi}(E)\rangle$ по своим асимптотическим свойствам является состоянием с отрицательной энергией из ниж-

него континуума. Следовательно, экспериментатор с вероятностью $p(E)$ будет наблюдать свободный позитрон, обладающий энергией E .

Выше для простоты рассмотрено погружение в континуум одного уровня и рождение одного позитрона. В действительности в $1s_{1/2}$ -состоянии могут находиться два электрона, различающихся значением проекции спина. Поэтому в (8.37) следует, вообще говоря, включать двухэлектронные и двухпозитронные состояния

$$|\tilde{\Psi}(E)\rangle = a(E)|\tilde{0}\rangle + \int b_{E'}(E) a_{B_1}^{*+} a_{E_1}^{*+} |\tilde{0}\rangle dE' + \int c_{E'}(E) a_{B_2}^{*+} \times \\ \times a_{E_2}^{*+} |\tilde{0}\rangle dE' + \int f_{E'E''}(E) a_{B_1}^{*+} a_{B_2}^{*+} a_{E_1}^{*+} a_{E_2}^{*+} |\tilde{0}\rangle dE' dE''. \quad (8.43)$$

Учет последнего члена в (8.43) (т. е. электрон-электронных взаимодействий) не меняет результаты качественно, и им можно пренебречь. Тогда подстановка (8.43) в уравнение Шредингера (8.38) приводит с точностью до замены $|a(E)|^2$ на $2|a(E)|^2$ к уже полученным выше формулам. Это означает, что в данном приближении оба спиновых состояния распадаются независимо и в результате рождаются два позитрона.

При построении вторично квантованной схемы описания сверхкритического атома вводят два различных вакуумных состояния: заряженное $|0\rangle$ и нейтральное $|\hat{0}\rangle$. Рассмотрим теперь динамику перехода между этими состояниями, т. е. процесс распада нейтрального вакуума [159]. Для этого воспользуемся сверхкритическим базисом $\varphi_E(x)$ (см. § 8.2). Пусть заполненное электронами $1s_{1/2}$ -состояние при $Z > Z_{кр}$ погрузилось в нижний континуум. В терминах сверхкритического базиса разложение оператора поля по операторам рождения и уничтожения есть

$$\psi = \sum_{E > -m} a_E^{(-)} \varphi_E(x) \exp(-iEt) + \sum_{E < -m} a_E^{(+)} \varphi_E(x) \exp(-iEt). \quad (8.44)$$

Разлагая сверхкритическое состояние по собственным функциям гамильтониана при $Z = Z_{кр}$, получаем

$$\varphi_E = \sum_n \left(\int \psi_n^+ \varphi_E d^3x \right) \psi_n \equiv \sum_n a(n, E) \psi_n \quad (8.45)$$

(индекс n нумерует состояния дискретного и сплошного спектров при $Z = Z_{кр}$).

Подставляя (8.45) в (8.44) и используя приближенные соотношения

$$a(1s, E) \approx a(E), \quad a(E', E) \approx b_{E'}(E); \quad E', E < -m, \quad (8.46)$$

$$a(E', E) = \frac{\Delta 2U_{E'E}}{E - E'} + \delta(E - E') \approx \delta(E - E'); \quad E', E > -m,$$

приходим к равенству

$$\begin{aligned} \Psi = \sum_{E > -m} a_E^{(-)} \Psi_E \exp(-iEt) + \left[\int_{E < -m} dE a_E^{(+)} a(E) \right] \Psi_B \exp(imt) + \\ + \sum_{E', E < -m} a_E^{(+)} b_{E'}(E) \Psi_E \exp(-iEt). \end{aligned} \quad (8.47)$$

Как видно из (8.47), удобно ввести «коллективный» оператор 1s-состояния, погрузившегося в нижний континуум, усредняя оператор a_E^{\pm} с весом $a(E)$:

$$\tilde{a}_B^{(+)} = \int_{E < -m} dE a(E) a_E^{(+)} \quad (8.48)$$

Пусть в момент $t = 0$ приготовлено состояние $\tilde{a}_B^{(+)} |0\rangle$ из нижнего континуума, где $|0\rangle$ — определенный выше заряженный вакуум (это 1 s-дырка, или связанное состояние позитрона). Предположим, что со временем это состояние эволюционирует по закону

$$|\Psi(t)\rangle = y(t) \tilde{a}_B^{(+)} |0\rangle + \int_{E < -m} dE w_E(t) a_E^{(+)} |0\rangle, \quad (8.49)$$

$y(0) = 1$, $w_E(0) = 0$ и определим коэффициенты $y(t)$ и $w_E(t)$. Если окажется, что $y(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то это будет означать, что связанный позитрон уходит на бесконечность.

Уравнение Шредингера для состояния (8.49) есть

$$\begin{aligned} H(Z) |\Psi(t)\rangle = i \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = i \frac{\partial y}{\partial t} \tilde{a}_B^{(+)} |0\rangle + \\ + i \int_{E < -m} dE \frac{\partial w_E}{\partial t} a_E^{(+)} |0\rangle, \end{aligned} \quad (8.50)$$

где $H(Z)$ определено в (8.33).

Проектируя равенство (8.50) на состояния $\langle 0 | \tilde{a}_B^{(-)}$ и $\langle 0 | a_E^{(-)}$ и используя значения следующих матричных элементов:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \tilde{a}_B^{(-)} H \tilde{a}_B^{(+)} |0\rangle &= \int |\tilde{a}(E)|^2 E dE \equiv \tilde{E}_{1s}; \\ \langle 0 | \tilde{a}_B^{(-)} H a_E^{(+)} |0\rangle &= a^*(E) E; \\ \langle 0 | \tilde{a}_E^{(-)} H a_{E'}^{(+)} |0\rangle &= E \delta(E - E'); \\ \langle 0 | \tilde{a}_B^{(-)} \tilde{a}_B^{(+)} |0\rangle &= \int |a(E)|^2 dE = 1; \\ \langle 0 | \tilde{a}_B^{(-)} a_E^{(+)} |0\rangle &= a^*(E), \end{aligned} \quad (8.51)$$

получаем систему зацепляющихся интегродифференциальных уравнений для неизвестных функций $y(t)$, $\omega_E(t)$:

$$\left. \begin{aligned} y(t) \tilde{E}_{1s} + \int_{E < -m} \omega_E(t) a^*(E) E dE &= \\ = i \frac{\partial y(t)}{\partial t} + i \int_{E < -m} \frac{\partial \omega_E(t)}{\partial t} a^*(E) dE, & \\ y(t) a(E) E + \omega_E(t) E = i \frac{\partial y(t)}{\partial t} a(E) + i \frac{\partial \omega_E(t)}{\partial t}. & \end{aligned} \right\} \quad (8.52)$$

Решение (8.52) должно удовлетворять не только начальным условиям, но и условию нормировки

$$\langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle = |y(t)|^2 + \int |\omega_E(t)|^2 dE = 1. \quad (8.53)$$

Решение системы (8.52) при этом есть [159]

$$y(t) = \exp\left(-i\tilde{E}_{1s}t - \Gamma_0 \frac{|t|}{2}\right), \quad (8.54)$$

$$\omega_E(t) = a(E) \left[\exp(-iEt) - \exp\left(-i\tilde{E}_{1s}t - \Gamma_0 \frac{|t|}{2}\right) \right],$$

где $\Gamma_0 = 2\pi |U_{\tilde{E}_{1s}}|^2$ — ширина уровня резонансной энергии $\tilde{E}_{1s} = E_{1s} + F(\tilde{E}_{1s})$. Равенства (8.54) описывают экспоненциальный распад дырки, приготовленной в момент $t = 0$. Вероятность найти незанятый $1s$ -уровень в момент t есть

$$p(t) = |y(t)|^2 = \exp(-\Gamma_0 |t|), \quad (8.55)$$

а спектр рожденных позитронов определяется выражением

$$\begin{aligned} |\omega_E(t)|^2 = |a(E)|^2 \left\{ 1 + \exp(-\Gamma_0 |t|) - (\exp[-i(\tilde{E}_{1s} - E)t] + \right. \\ \left. + \exp[i(\tilde{E}_{1s} - E)t]) \exp\left(-\Gamma_0 \frac{|t|}{2}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (8.56)$$

которое при $t \gg 1/\Gamma$ приводит к полученному ранее результату

$$|\omega_E(\infty)|^2 = |a(E)|^2. \quad (8.57)$$

Таким образом, нейтральный вакуум $|0\rangle = \tilde{a}_{B1}^{\dagger} \tilde{a}_{B2}^{\dagger} |0\rangle$ при $Z > Z_{кр}$ становится нестабильным и превращается в заряженный вакуум $|0\rangle$. Можно показать [57, 158], что распределение вакуумного заряда с формальной точки зрения аналогично распределению заряда на K -оболочке докритического атома. В то же время (см. начало настоящего параграфа) эти распределения имеют принципиально разный смысл, поскольку заряд электрона в каждый момент

времени сосредоточен в точке, а заряд вакуума распределен в пространстве.

Выше рождение позитронов сверхкритическим кулоновским полем рассматривалось в простейшем случае, когда в нижний континуум погружается только связанное состояние $1s_{1/2}$. При этом параметр $Ze^2 \approx 1,26$. В работе [162] с использованием квазиклассического приближения рассмотрено положение дискретных уровней E_n , погрузившихся в нижний континуум, когда параметр $Ze^2 \gtrsim 2$. Использование точных решений уравнения Дирака позволяет показать, что при $Ze^2 \gg 1$ для ширины уровня с номером n выполняется $\Gamma_n \ll E_n$, $\Gamma_n \ll E_{n+1} - E_n$. Это означает, что при сверхбольших Z погружившиеся в нижний континуум уровни остаются изолированными (отметим, что при $Ze^2 = 7$ в континуум погружается приблизительно 100 уровней). Если Z столь велико, что $Ze^3 \gtrsim 1$, то порожденная из вакуума электронная оболочка ядра находится внутри него и практически полностью экранирует заряд протонов [163]. Вакуумное состояние такой системы можно назвать *сверхзаряженным*: оно обладает зарядом порядка Ze .

Интересно отметить, что заряженный вакуум дает пример возникновения в системе спонтанного нарушения симметрии под влиянием внешнего поля [146]. Действительно, лагранжиан квантовой электродинамики инвариантен относительно операции зарядового сопряжения как при $Z < Z_{кр}$, так и при $Z > Z_{кр}$. Вакуумное же состояние при $Z > Z_{кр}$ имеет, как минимум, заряд $2e$ и потому C -неинвариантно.

§ 8.4. Рождение позитронов при столкновении тяжелых ядер

Рассматриваемый в настоящей главе эффект рождения позитронов кулоновским полем имеет место для ядер с атомным номером $Z > Z_{кр} \approx 172$. Поскольку такие ядра не наблюдаются в природе, а предположения об их возможном существовании пока не подтверждены, то для экспериментального наблюдения эффекта необходимо искать другие возможности.

Одна из них связана с помещением голого ядра в магнитное поле. Как показано в работе [164], с помощью постоянного однородного магнитного поля можно существенно понизить энергию основного состояния электрона в поле ядра. Так, если поместить голое ядро урана в магнитное поле напряженностью $H \sim 100 m^2/e \approx 5 \cdot 10^{15}$ Э, то энергия основного состояния дойдет до границы нижнего континуума. Это означает, что магнитное поле указанной напряженности уменьшает критический заряд до $Z = 92$. К аналогичному эффекту приводят скрещенные электрическое и магнитное поля напряженностью $\sim m^2/e$ [165]. Однако в связи с чрезвычайно большими значениями E и H эта возможность пока нереализуема в лабораторных условиях.

Другая возможность экспериментального наблюдения эффекта — рождение позитронов при столкновении тяжелых ионов — была предложена в работе [144]. Например, при сближении двух ядер урана с полностью ободранными электронными оболочками на расстояние $R < m^{-1} \sim 10^{-11}$ см = 10^2 ферми (которое значительно превосходит радиус ядра) на электрон действует электрическое поле заряда $2Z = 184$, превышающего $Z_{кр}$ для уровня $1s_{1/2}$. Для нерелятивистских ядер, движущихся со скоростью $v \ll c$, можно считать, что время, которое они проводят на расстоянии ~ 100 ферми друг от друга, составляет $t_c \approx 1,8 \cdot 10^{-19}$ с. Полагая, что скорость электрона на K -оболочке есть $c/2$, для отношения t_c ко времени T одного оборота по боровской орбите получаем

$$t_c/T \approx 20 \gg 1. \quad (8.58)$$

Таким образом, ввиду большого значения массы ядер их движение можно считать классическим, а уровни энергии и волновые функции электронов для каждого момента времени вычислять при фиксированном расстоянии между ядрами $R(t)$ (адиабатическое приближение). Если пренебречь также межэлектронным взаимодействием, то нахождение энергетического спектра системы двух сталкивающихся ядер сводится к нахождению спектра квазимолекулы, состоящей из электрона в поле двух кулоновских центров.

Задачу двух центров удобно рассматривать в эллиптических координатах

$$\xi = (r_1 + r_2)/R, \quad \eta = (r_1 - r_2)/R, \quad \varphi, \quad (8.59)$$

где r_1, r_2 — расстояния между ядрами и электроном; φ — угол поворота вокруг оси, соединяющей ядра. Области изменения ξ, η, φ есть

$$1 \leq \xi < \infty, \quad -1 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (8.60)$$

Как известно, уравнение Шредингера для задачи двух центров допускает в эллиптических координатах (8.59) полное разделение переменных.

Нас интересует то значение расстояния между ядрами $R_{кр}$ (как и заряд в случае одного ядра, оно будет называться критическим), при котором наименьший уровень энергии квазимолекулы доходит до границы нижнего континуума — m . Поскольку энергия связи при этом равна $-2m$, то $R_{кр}$ нельзя искать в нерелятивистском приближении. Итак, необходимо рассматривать уравнение Дирака с потенциалом

$$A_0 = -(Ze/r_1 + Ze/r_2), \quad \mathbf{A} = 0. \quad (8.61)$$

Такое уравнение, в отличие от уравнения Шредингера, не допускает полного разделения переменных ни в одной ортогональной системе координат (это связано с тем, что помимо проекции полного момента для него не существует другого интеграла движения). Поэтому в координатах (8.59) уравнение Дирака записывается в

виде системы уравнений в частных производных относительно двух независимых переменных ξ и η , которая не может быть решена в общем виде. Однако, как показано в работе [166], при выполнении условия «малой надкритичности»

$$\delta = (2Z - Z_{кр})/Z_{кр} \ll 1, \quad (8.62)$$

справедливого для состояния $1s_{1/2}$, можно решить эту задачу приближенно с помощью метода сшивания асимптотик. Из (8.62) следует, что $R_{кр} \ll m^{-1}$. Вблизи ядер волновая функция имеет особенности вида

$$\psi \sim (\xi^2 - \eta^2)^{-1 + \sqrt{1 - Z^2} \alpha^2}. \quad (8.63)$$

Кроме того, вдали от ядер при $r \gg R$ потенциал (8.61) можно приближенно заменить потенциалом (8.1) и воспользоваться известным решением уравнения Дирака в кулоновском поле одного центра. При выполнении (8.62) это решение может быть гладко сшито с (8.63) в области $R \ll r \ll m^{-1}$. Условия сшивки дают

$$R_{кр} = c \exp [-\pi (4Z^2 \alpha^2 - 1)^{-1/2}],$$

$$\ln \frac{R}{R_{кр}} = - \left[\psi \left(-\frac{E}{\sqrt{m^2 - E^2}} \right) + \ln \sqrt{1 - \frac{E^2}{m^2}} + \frac{m + E}{m + E + \sqrt{m^2 - E^2}} \right], \quad (8.64)$$

где c — постоянная порядка m^{-1} , $\psi(z)$ — логарифмическая производная Γ -функции. При $R < R_{кр}$ необходимо заменить $\sqrt{m^2 - E^2}$ на $-i \sqrt{E^2 - m^2}$.

Равенства (8.64) позволяют найти $R_{кр}$, а также положение и ширину $\Gamma_0(R)$ квазистационарного состояния E , возникающего при сближении ядер на расстояние, меньшее критического. При этом вероятность спонтанного рождения позитронов при сближении ядер по классической траектории $R(t)$ определяется формулой

$$p = \int \Gamma_0(R(t)) dt, \quad (8.65)$$

где интегрирование ведется по тому участку траектории, для которого $R(t) < R_{кр}$ [167].

Как видно из (8.64), энергия уровня E зависит от отношения $R/R_{кр}$. Поэтому сечение рождения позитронов в кулоновских столкновениях факторизуется

$$\sigma(E, Z) = \sigma_0(Z) f(\eta), \quad (8.66)$$

где $\eta = E/E_{tr} = R_{кр}/R_0$; E_{tr} — пороговая энергия, при которой ядра в лобовом столкновении сближаются на расстояние $R_{кр}$; R_0 — расстояние наименьшего сближения ядер при лобовом столкновении.

Функция $f(\eta)$ связана с шириной квазистационарного уровня соотношением [166]

$$f(\eta) = \frac{4\pi}{\sqrt{\eta}} \int_{1/\eta}^1 \Gamma_0(x) x^{3/2} \sqrt{x - \frac{1}{\eta}} dx.$$

Значение $\sigma_0(z)$ определяется величиной $R_{кр}$. Эту величину можно определить также и вариационным методом, который сводит задачу решения уравнения Дирака при $E = -m$ к отысканию минимума функционала

$$I[\psi] = \int d^3x \left(\frac{1}{2} |\nabla\psi|^2 + \psi^+ U_{1/2} \psi \right), \quad (8.67)$$

где $U_{1/2}$ — эффективный потенциал квадрированного уравнения Дирака с потенциалом (8.61), ψ — пробная функция [168—171]. В рамках этого метода подсчитаны значения $R_{кр}$ для сталкивающихся ядер с любым $Z < 137$. Так, для двух ядер урана оказывается $R_{кр} = 38,4$ ферми [167]. Величина $\sigma_0(Z)$ зависит от $R_{кр}$ как $R_{кр}^{7/2}$. Для данного примера оказывается $\sigma_0 \approx 25$ мбарн. Энергетическая зависимость сечения рождения позитронов целиком определяется значениями функции f , протабулированной в работе [172]. На пороге, когда $R_0 \rightarrow R_{кр}$ и $E \rightarrow E_t$, f экспоненциально мала, что приводит к малости σ . Это есть следствие наличия кулоновского барьера, который практически непроницаем для медленных позитронов. С увеличением E , однако, f увеличивается до единицы. В рассматриваемом примере двух ядер урана пороговая энергия $E_t \approx 650$ МэВ. Если энергия ядер составляет 1 ГэВ, то их скорость $v = 0,09 c$ и для сечения рождения позитронов получается результат $\sigma = 0,5$ мбарн. Если же $E = 1,5$ ГэВ, то величина σ увеличивается на порядок [167].

По результатам независимого расчета [173] значение $R_{кр}$ для ядер урана несколько меньше приведенного выше и составляет 37 ферми. При учете конечности размеров сталкивающихся ядер критическое расстояние составляет $R_{кр} \approx 35$ ферми. Аналогичные расчеты проведены для случая столкновения ионов урана и калифорния, а также для ионов калифорния друг с другом. Критические расстояния составляют соответственно 48 и 61 ферми [146].

В работе [166] рассчитано также и дифференциальное сечение $d\sigma/d\Omega$ -рассеяния в телесный угол $d\Omega$ при фиксированном угле рассеяния θ :

$$d\sigma/d\Omega = \sigma F(\theta, \eta), \quad (8.68)$$

где F — определенная функция θ при фиксированном η . Если $\eta \rightarrow 1$, то $F(1, \theta)$ имеет вид острого пика вблизи $\theta = \pi$, т. е. позитроны наблюдаются лишь при рассеянии назад.

Все сказанное относилось к случаю столкновения двух голых ядер урана. Трудности постановки такого эксперимента очевидны. Однако, как показано в работе [174], при падении пучка голых ядер

с атомным номером Z_1 на обычный атом с зарядом ядра Z_2 в нижней оболочке объединенного атома образуются свободные состояния, если $Z_1 \geq Z_2$ (столкновение атома с ядром предполагается адиабатическим). При этом сечение рождения позитронов имеет почти ту же величину, что и в случае столкновения голых ядер. Таким образом, для постановки эксперимента по наблюдению рождения позитронов достаточно обеспечить столкновение пучка голых ядер урана с урановой мишенью.

В последнее время появились сообщения (см., например, [145]) об измерениях сечения рождения позитронов, образующихся при столкновении ядер свинца и урана. Интерпретация этих измерений сталкивается, однако, с серьезными трудностями из-за наличия различных фоновых процессов, в которых энергия электрических полей ядер передается электрон-позитронному полю. Простейшим из них является процесс фоторождения, при котором порожденный ядром виртуальный фотон превращается в электрон-позитронную пару. Как показывают простые оценки, вклад фоторождения можно, по-видимому, не учитывать. Значительно большую роль должно играть явление рождения пар путем внутренней конверсии при кулоновском возбуждении ядер [146]. При столкновении тяжелых ядер в них с вероятностью, близкой к единице, происходит возбуждение коллективных степеней свободы. Затем в течение примерно 10^{-13} с более высокие населенные состояния распадаются с испусканием фотонов, которые могут породить пары электрон — позитрон. Вклад этих (и других) эффектов квантовой электродинамики должен быть детально оценен до того, как какую-то часть измеренного сечения можно будет с уверенностью приписать сверхкритическим позитронам. В настоящее время для столкновений ядер свинца (в которых сверхкритические позитроны рождаются не могут) измеренное и теоретическое сечения рождения позитронов расходятся всего в два раза [145]. Это позволяет надеяться, что уже в ближайшие годы эффект рождения позитронов из вакуума сверхкритическим кулоновским полем будет обнаружен экспериментально.

Глава 9. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА ВНЕШНИМ ПОЛЕМ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

§ 9.1. Поляризация вакуума постоянным однородным электромагнитным полем

Первые расчеты эффектов поляризации вакуума внешним электромагнитным полем были выполнены еще в 1930-х годах (нелинейные поправки Гейзенберга — Эйлера к уравнениям поля, поправка Юлинга к закону Кулона). Впоследствии появились расчеты поляризационных эффектов в рамках ковариантной теории возмущений

как поправок высших порядков, связанных с диаграммами, в которых имеются замкнутые электронные петли. Так был вычислен, например, вклад поляризации вакуума в лэмбовский сдвиг, в фотон-фотонное рассеяние и т. п.

В настоящем параграфе изучается поляризация вакуума однородным электромагнитным полем. Сначала с помощью метода собственного времени Фока — Швингера [89, 177] рассмотрен случай постоянного поля, а далее дано обобщение этих результатов для нестационарного поля.

Как было сказано в § 5.1, поляризация вакуума определяется вещественной частью эффективного лагранжиана, в то время как его мнимая часть описывает рождение частиц. При этом вакуумные средние таких операторов, как тензор энергии-импульса и ток, вообще говоря, отличны от нуля.

Оператор тока дираковских частиц можно определить как

$$J_k(x) = (1/2) [\bar{\psi}(x) \gamma_k \psi(x)].$$

Его вакуумное среднее выражается через функцию Грина уравнения Дирака

$$\langle 0 | J_k(x) | 0 \rangle = -i \text{Sp} \gamma_k G(x, x')_{x' \rightarrow x} \quad (9.1)$$

(для вычисления поляризации вакуума вид граничных условий, определяющих конкретный выбор функции Грина, несуществен).

Функцию $G(x, x')$ целесообразно представить формально как матричный элемент оператора G , действующего в некотором абстрактном гильбертовом пространстве, элементами которого являются состояния, нумеруемые пространственно-временными координатами и спинорными индексами

$$G_{rr'}(x, x') = \langle x, r | G | x', r' \rangle.$$

Оператор G удовлетворяет уравнению

$$(\gamma^k \Pi_k - m) G = 1, \quad (9.2)$$

где, как и в гл. 5, $\Pi_k = p_k - eA_k$.

Формальное решение (9.2) есть

$$G = \frac{1}{\gamma \Pi - m + i0} = -i \int_0^{\infty} ds \exp \{i(\gamma \Pi - m)s\}, \quad (9.3)$$

где $\gamma \Pi \equiv \gamma_k \Pi^k$.

С помощью (9.1) и (9.3) вариацию добавки к действию $W^{(1)}$ за счет вакуумного тока можно записать в виде

$$\delta W^{(1)} = -e \int d^4x \delta A_t(x) \langle 0 | J^t(x) | 0 \rangle = \delta \int d^4x \mathcal{L}^{(1)}(x),$$

где с точностью до аддитивной постоянной

$$\mathcal{L}^{(1)}(x) = \frac{i}{2} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} \exp(-im^2 s) \text{Sp} \langle x | \exp(iHs) | x \rangle,$$

$$H = \Pi_h \Pi^k - \frac{i}{2} e \sigma_{ih} F^{lk}$$

(F^{ik} — тензор электромагнитного поля).

Очевидно, что построение $\mathcal{L}^{(1)}(x)$ сводится к нахождению функции преобразования

$$\langle x' | \exp(iHs) | x'' \rangle = \langle x(s)' | x(0)'' \rangle.$$

Здесь H можно рассматривать как оператор сдвига по переменной s , причем имеет место «уравнение Шредингера»

$$i \frac{\partial}{\partial s} \langle x(s)' | x(0)'' \rangle = \langle x(s)' | H | x(0)'' \rangle \quad (9.4)$$

с начальным условием $\langle x(0)' | x(0)'' \rangle = \delta(x' - x'')$. Как показано в работе [177], в одночастичной теории параметр s имеет смысл собственного времени частицы, что объясняет название рассматриваемого метода.

В случае однородного постоянного электромагнитного поля описанный выше метод дает [89]

$$\mathcal{L}^{(1)}(x) = -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^3} \exp[-m^2 s - l(s)] \text{Sp} \exp\left(\frac{ie}{2} \sigma_{ih} F^{lk} s\right),$$

где сделана замена переменной интегрирования s на $-is$, а $l(s)$ — величина, которую в матричном виде можно представить так:

$$l(s) = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln [(eFs)^{-1} \sin(eFs)]. \quad (9.5)$$

В равенстве (9.5) F обозначает матрицу F_{ih} , а Tr есть символ диагонального суммирования по тензорным индексам.

Вычисляя (9.5), получаем следующее выражение:

$$\mathcal{L}^{(1)}(x) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^3} \exp(-m^2 s) \left[(es)^2 \mathcal{G} \frac{\text{Re ch}(esX)}{\text{Im ch}(esX)} - 1 \right], \quad (9.6)$$

где $X = \sqrt{2}(\mathcal{F} + i\mathcal{G})^{1/2}$, $\mathcal{F} = (\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)/2$, $\mathcal{G} = \mathbf{EH}$ — инварианты поля.

Аддитивная постоянная в (9.6) выбрана так, что в отсутствие внешнего поля $\mathcal{L}^{(1)}(x) = 0$.

Для слабого поля

$$\mathcal{L}^{(1)}(x) \approx -\frac{e^2}{12\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \exp(-m^2 s) \mathcal{F}$$

и отличается от лагранжиана свободного электромагнитного поля $\mathcal{L}_{em} = -\mathcal{F}/4\pi$ логарифмически расходящимся множителем. Поэтому полный лагранжиан целесообразно записать в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{em} + \mathcal{L}^{(1)} = -\left[1 + \frac{e^2}{3\pi} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \exp(-m^2 s) \right] \frac{\mathcal{F}}{4\pi} - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} \exp(-m^2 s) \left[(es)^2 \frac{\operatorname{Re} \operatorname{ch} esX}{\operatorname{Im} \operatorname{ch} esX} \mathcal{G} - 1 - \frac{2}{3} (es)^2 \mathcal{F} \right]. \quad (9.7)$$

Как было указано в § 3.2, логарифмически расходящийся множитель в (9.7) можно устранить с помощью перенормировки поля и заряда:

$$\mathcal{F}_R + i\mathcal{G}_R = Z^{-1}(\mathcal{F} + i\mathcal{G}); \quad e_R = Z^{1/2} e; \quad (9.8)$$

$$Z^{-1} = 1 + \frac{e^2}{3\pi} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \exp(-m^2 s).$$

Переходя в систему отсчета, в которой $\mathbf{E} \parallel \mathbf{H}$, можно записать $\mathcal{L}^{(1)}$ в виде

$$\mathcal{L}^{(1)} = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} \exp(-m^2 s) \left[(es)^2 EH \operatorname{cth}(esH) \operatorname{ctg}(esE) - 1 - \frac{1}{3} (es)^2 (H^2 - E^2) \right]. \quad (9.9)$$

Подынтегральное выражение в (9.9) имеет на вещественной оси полюса в точках $s_n = \pi n / |e| E$, которые следует обходить сверху (т. е. полагая $E = \bar{E} + i0$). Вклад этих полюсов дает мнимую часть лагранжиана $\mathcal{L}^{(1)}$:

$$\operatorname{Im} \mathcal{L}^{(1)} = \frac{e^2 EH}{8\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{cth}\left(\pi n \frac{H}{E}\right) \exp\left(-\frac{\pi n m^2}{|e| E}\right). \quad (9.10)$$

связанную с рождением частиц. Легко проверить, что при $H \rightarrow 0$ (9.10) совпадает с формулой (7.23), полученной непосредственно из рассмотрения рождения частиц. При $E \ll E_{кр} = m^2/|e|$ удвоенный первый член суммы (9.10) совпадает с интенсивностью рождения пар (7.48), как и должно быть в слабых полях.

Поляризация вакуума описывается вещественной частью эффективного лагранжиана (9.9). Ее можно вычислить аналитически в предельных случаях слабых и сверхкритических полей.

В слабых полях ($E \ll E_{кр}$, $H \ll H_{кр}$) вещественная часть (9.9) допускает разложение в асимптотический ряд по параметрам $E/E_{кр}$, $H/H_{кр}$; в первом приближении получается известная формула Гейзенберга — Эйлера:

$$\operatorname{Re} \mathcal{L}^{(1)} = \frac{e^4}{360\pi^2 m^4} [(E^2 - H^2)^2 + 7(EH)^2]. \quad (9.11)$$

Рассмотрим теперь противоположный предельный случай сверхкритических полей. При $H \gg H_{кр}$, $E = 0$ (9.9) с логарифмической точностью дает [175, 176]

$$\operatorname{Re} \mathcal{L}^{(1)} = \frac{e^2}{24\pi^2} H^2 \ln \frac{|e|H}{m^2},$$

а при $E \gg E_{кр}$, $H = 0$

$$\operatorname{Re} \mathcal{L}^{(1)} = -\frac{e^2}{24\pi^2} E^2 \ln \frac{|e|E}{m^2}. \quad (9.12)$$

Соответствующая добавка к плотности энергии поля в последнем случае с той же точностью равна

$$\varepsilon = E \frac{\partial \operatorname{Re} \mathcal{L}^{(1)}}{\partial E} - \operatorname{Re} \mathcal{L}^{(1)} \approx -\frac{e^2}{24\pi^2} E^2 \ln \frac{|e|E}{m^2}.$$

Таким образом, в сверхкритическом электрическом поле добавка к плотности энергии, связанная с поляризацией вакуума, отрицательна. Очевидно, полная плотность энергии $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \varepsilon$, где $\mathcal{E}_0 = E^2/8\pi$ — классическая максвелловская плотность энергии, обратится в нуль при

$$E = E_m = E_{кр} \exp(3\pi/e^2).$$

Аналогично при $E = E_m$ обращается в нуль и эффективная диэлектрическая проницаемость вакуума. На этом основании в работе [178] сделан вывод о том, что величина E_m является предельным значением напряженности электрического поля. Заметим, однако, что напряженность E_m настолько велика ($E_m \sim 10^{560} E_{кр}$), что рассмотрение таких полей в рамках существующей теории заведомо лишено смысла (например, кулоновское поле имеет напряженность E_m на расстояниях порядка 10^{-290} см от центра, тогда как уже на расстояниях порядка 10^{-33} см должны быть существенны квантово-гравитационные эффекты).

Сравним вещественную и мнимую части лагранжиана $\mathcal{L}^{(1)}$ в случае $H = 0$. В слабом поле, очевидно, $\operatorname{Im} \mathcal{L}^{(1)}$ экспоненциально мала по $E/E_{кр}$, тогда как вещественная часть имеет лишь степенную малость, $\operatorname{Re} \mathcal{L}^{(1)} \sim (E/E_{кр})^4$. В сверхкритическом поле $\operatorname{Re} \mathcal{L}^{(1)} \sim E^2 \ln(E/E_{кр})$, а мнимая часть, как следует из (9.10), имеет по-

рядок $\text{Im} \mathcal{L}^{(1)} \sim E^2$. Таким образом, эффекты рождения частиц в сильном электрическом поле логарифмически малы по сравнению с поляризацией вакуума.

Для скалярного поля эффективный лагранжиан $\mathcal{L}^{(1)}$, аналогичный (9.6), есть [89]

$$\mathcal{L}^{(1)} = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} \exp(-m^2 s) \left[\frac{(es)^2 \mathcal{F}}{\text{Im ch } esX} - 1 \right].$$

После перенормировки, подобной (9.8), в системе отсчета, где $\mathbf{E} \parallel \mathbf{H}$, его можно записать в виде

$$\mathcal{L}^{(1)} = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} \exp(-m^2 s) \left[\frac{(es)^2 EH}{\text{sh}(esH) \sin(esE)} - 1 + \frac{1}{6} (es)^2 (H^2 - E^2) \right]. \quad (9.13)$$

Мнимая часть (9.13) есть

$$\text{Im} \mathcal{L}^{(1)} = \frac{e^2 EH}{16\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{1}{\text{sh}(\pi n H/E)} \exp\left(-\frac{\pi n m^2}{|e|E}\right).$$

Очевидно, что это выражение совпадает с (7.25) при $H = 0$, а удвоенное первое слагаемое — с (7.46).

Поляризация вакуума скалярного поля описывается вещественной частью (9.13). При $E \ll E_{\text{кр}}$, $H \ll H_{\text{кр}}$ получаем

$$\text{Re} \mathcal{L}^{(1)} = \frac{e^4}{1440 \pi^2 m^4} \left[\frac{7}{4} (E^2 - H^2)^2 + (EH)^2 \right].$$

В сверхкритических полях при $H \gg H_{\text{кр}}$, $E = 0$

$$\text{Re} \mathcal{L}^{(1)} = \frac{e^2}{96\pi^2} H^2 \ln \frac{|e|H}{m^2},$$

а при $E \gg E_{\text{кр}}$, $H = 0$

$$\text{Re} \mathcal{L}^{(1)} = -\frac{e^2}{96\pi^2} E^2 \ln \frac{|e|E}{m^2}. \quad (9.14)$$

Рассмотрим поляризационные эффекты в нестационарном однородном поле [376]. Для этого вычислим средние от тензора энергии-импульса и тока квантованного поля по состоянию $|0\rangle = |0_{-\infty}\rangle$, вакуумному при $t \rightarrow -\infty$, когда поле отсутствует.

В спинорном случае эти средние даются общими выражениями (6.60), (6.61) и (6.68). Нетрудно показать, что входящие в них величины $s(\mathbf{p}, t)$ и $u(\mathbf{p}, t)$ вместе с третьей величиной $v(\mathbf{p}, t)$, определяемой через решения уравнения (6.12) $f^{(+)}(\mathbf{p}, t)$ как

$$v = -2M \frac{d}{dt} (|f^{(+)}|^2)$$

$(M^2 = m^2 + p_{\perp}^2)$, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\dot{s} = (1/2)\omega^{(1/2)}u, \quad \dot{u} = \omega^{(1/2)}(1-2s) - 2\omega v, \quad \dot{v} = 2\omega u \quad (9.15)$$

с начальными условиями $s, u, v \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$. Здесь $\omega^{(1/2)} = eEM/\omega^2$.

Для конечных t асимптотика решений системы (9.15) при $p = |p| \rightarrow \infty$ есть $s \sim u \sim p^{-4}$, $v \sim p^{-2}$. Поэтому выражения (6.60), (6.61) логарифмически расходятся. Для устранения этой расходимости проведем регуляризацию вычтя из s и u в (6.60), (6.61) и (6.68) их ВКБ-асимптотики

$$s_r = \frac{1}{16} \left(\frac{\omega^{(1/2)}}{\omega} \right)^2, \quad u_r = \frac{1}{4\omega} \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega^{(1/2)}}{\omega} \right) \quad (9.16)$$

(подобная регуляризация для гравитационного поля использовалась в работах [272, 277] — см. § 12.3). В результате получим следующие общие выражения:

$$\begin{aligned} e^{(1/2)} &= \frac{1}{2\pi^3} \int d^3p \omega (s - s_r); \\ P_{\perp}^{(1/2)} &= \frac{1}{4\pi^3} \int d^3p \frac{p_{\perp}^2}{\omega} \left[(s - s_r) + \frac{\Pi_3}{2M} (u - u_r) \right]; \\ P_{\parallel}^{(1/2)} &= \frac{1}{2\pi^3} \int d^3p \frac{\Pi_3^2}{\omega} \left[(s - s_r) - \frac{M}{2\Pi_3} (u - u_r) \right]; \\ J_3^{(1/2)} &= \frac{1}{2\pi^3} \int d^3p \frac{\Pi_3}{\omega} \left[(s - s_r) - \frac{M}{2\Pi_3} (u - u_r) \right]. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Нетрудно убедиться в том, что проведенная регуляризация эквивалентна перенормировке заряда (9.8).

Предполагая поле слабым ($E \ll E_{\text{кр}}$), а также считая, что характерная скорость изменения поля $\dot{E}/E = \Omega$ удовлетворяет условию $\Omega \ll m$, будем искать решение (9.15) в виде рядов по степеням величины $W = \omega^{(1/2)}/\omega \leq E/E_{\text{кр}}$ и ее производных. С точностью до $O((E/E_{\text{кр}})^4)$ включительно получим

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{4} \mathcal{D}W - \frac{1}{16} \mathcal{D}^3 W - \frac{3}{32} W^2 \mathcal{D}W, \\ s &= \frac{1}{16} W^2 - \frac{3}{256} W^4 - \frac{1}{32} W \mathcal{D}^2 W + \frac{1}{64} (\mathcal{D}W)^2, \end{aligned} \quad (9.18)$$

где $\mathcal{D} = \omega^{-1} (d/dt)$. Заметим, что первые члены этих рядов совпадают с (9.16), так что регуляризация (9.17) сводится к их отбрасыванию.

Подставляя (9.18) в (9.17), находим (376)

$$\begin{aligned}\varepsilon^{(1/2)} &= \frac{e^4}{120\pi^2 m^4} \left[E^4 + \frac{m^2}{e^2} (\dot{E}^2 - 2\ddot{E}E) \right]; \\ P_{\perp}^{(1/2)} &= \frac{e^4}{120\pi^2 m^4} \left[\frac{1}{3} E^4 - \frac{m^2}{2e^2} (\dot{E}^2 + 3\ddot{E}E) \right]; \\ P_{\parallel}^{(1/2)} &= \frac{e^4}{120\pi^2 m^4} \left[-E^4 + \frac{m^2}{e^2} (3\dot{E}^2 + 4\ddot{E}E) \right]; \\ J^{(1/2)^3} &= \frac{e^3}{60\pi^2 m^4} \left[2\dot{E}E^2 - \frac{m^2}{e^2} \dot{E} \right].\end{aligned}\tag{9.19}$$

Сразу заметим, что выражения (9.19) описывают лишь поляризацию вакуума; экспоненциально малое рождение частиц не улавливается разложением вида (9.18) ни в каком порядке.

Нетрудно проверить, что выполняется соотношение

$$\dot{\varepsilon} = eEJ^3,\tag{9.20}$$

которое является выражением закона сохранения $\partial_k T_i^k = eF_{iR}J^k$ (напомним, что у нас J^k — ток вероятности). В постоянном поле вакуумный ток $J^3 = 0$.

В постоянном поле ($\dot{E} = 0$) выражения (9.19) переходят в те, которые получаются из классического лагранжиана Гейзенберга — Эйлера (9.11). Относительная величина слагаемых в (9.19), связанных с переменностью поля, есть

$$m^2 \dot{E}^2 / e^2 E^4 \sim (E_{\text{кр}}/E)^2 (\Omega/m)^2.\tag{9.21}$$

В то же время поправки к (9.19) имеют порядок $O((\Omega/m)^2)$. Таким образом, переменностью поля можно пренебречь лишь при $\Omega/m \ll \ll E/E_{\text{кр}}$. При оптических частотах ($\Omega/m \sim 10^{-6}$) зависящая от производных часть (9.19) превосходит статическую при $E < 10^{-6} E_{\text{кр}} \sim \sim 10^{10}$ В/см.

Приведем аналогичные результаты для скалярного поля при $E \ll E_{\text{кр}}$ [376], см. также [380]:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{(0)} &= \frac{e^4}{480\pi^2 m^4} \left[\frac{7}{4} E^4 + \frac{m^2}{2e^2} (\dot{E}^2 - 2\ddot{E}E) \right]; \\ P_{\perp}^{(0)} &= \frac{e^4}{480\pi^2 m^4} \left[\frac{7}{12} E^4 + \frac{m^2}{6e^2} (\dot{E}^2 - 2\ddot{E}E) \right]; \\ P_{\parallel}^{(0)} &= \frac{e^4}{480\pi^2 m^4} \left[-\frac{7}{4} E^4 + \frac{m^2}{6e^2} (19\dot{E}^2 + 22\ddot{E}E) \right]; \\ J^{(0)^3} &= \frac{e^3}{480\pi^2 m^4} \left[7\dot{E}E^2 - \frac{m^2}{e^2} \dot{E} \right].\end{aligned}\tag{9.22}$$

В сверхкритических же полях, как показывают расчеты [376], переменностью поля можно пренебречь уже при условии $\Omega/m \ll 1$, и поляризация вакуума в сильном нестационарном поле по-прежнему описывается лагранжианом (9.12) в спинорном и (9.14) в скалярном случаях.

В заключение отметим, что применение метода Фока — Швингера для поля плоской волны приводит к тому же выражению функции преобразования $\langle x(s) | x(0) \rangle$, что и для постоянного однородного поля. Поскольку, однако, в поле плоской волны инварианты $\mathcal{F} = \mathcal{G} = 0$, то никаких нелинейных вакуумных явлений не возникает [89].

§ 9.2. Поляризация электрон-позитронного вакуума кулоновским полем

Поляризация вакуума кулоновским полем описывается значительно более сложной добавкой к максвелловскому лагранжиану, чем в случае однородного поля. При этом, кроме постоянной тонкой структуры α , силу взаимодействия определяет также второй параметр $Z\alpha$, который для тяжелых ядер на два порядка превосходит α . Для сверхкритических ядер ($Z > 172$) этот параметр больше единицы.

Первые вычисления поляризации вакуума кулоновским полем проводились по теории возмущений. Поляризация вакуума проявляется как изменение кулоновского потенциала на малых расстояниях от ядра.

Для точечного ядра в первом порядке теории возмущений по $Z\alpha$ поляризационная добавка к потенциалу ядра есть известный потенциал Юлинга [176]

$$\Delta V_{Uh}(r) = -\frac{2\alpha Z\alpha}{3\pi r} \int_m^{\infty} d\mu \exp(-2\mu r) \left(1 + \frac{m^2}{2\mu^2}\right) \mu^{-2} (\mu^2 - m^2)^{1/2}. \quad (9.23)$$

Учет конечности размеров ядра модифицирует (9.23) следующим образом [146]:

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{V}_{Uh}(\mathbf{r}) = & -\frac{2\alpha^2}{3\pi} \int d^3 r' \int_m^{\infty} d\mu \exp(-2\mu |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \times \\ & \times \left(1 + \frac{m^2}{2\mu^2}\right) (\mu^2 - m^2)^{1/2} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \end{aligned} \quad (9.24)$$

где $\rho(\mathbf{r})$ — функция распределения заряда в ядре, нормируемая условием

$$\int \rho(\mathbf{r}) d^3 r = Z.$$

Потенциал Юлинга экспоненциально убывает при $r \gg m^{-1}$. Поэтому в областях, превосходящих размерами комптоновскую

длину, его влияние мало (например, его вклад в лэмбовский сдвиг для атома водорода составляет около 3%).

Даже вблизи ядра, где потенциал Юлинга приближенно равен

$$\Delta V_{Uh} \approx \frac{2Z\alpha^2}{3\pi r} \ln \frac{1}{mr}, \quad (9.25)$$

его вклад в суммарный потенциал невелик. Так, например, для состояния $1s_{1/2}$ фермия ($Z = 100$) потенциал Юлинга дает вклад $\Delta E^{(1)} = -155$ эВ в полную энергию связи -142 кэВ. Для $Z = Z_{кр}$ его вклад составляет $\Delta E^{(1)} = -12$ кэВ [146]. Ясно, однако что при больших Z теория возмущений, которая привела к потенциалу Юлинга, становится непригодной.

В работе [179] (см. также [180]) развит метод, позволяющий вычислять вакуумную поляризацию во всех порядках по α ($Z\alpha$)ⁿ, основанный на использовании точного электронного пропагатора во внешнем поле. Плотность заряда, характеризующая поляризацию вакуума, есть

$$\rho_V = e \langle 0 | J_0 | 0 \rangle, \quad (9.26)$$

где J_0 — нулевая компонента вакуумного тока. Функцию Грина для постоянного поля можно представить в виде контурного интеграла

$$iG(x, x') \gamma_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_C dz \exp[-i(t-t')] \tilde{G}(x, x'; z) \quad (9.27)$$

и переписать (9.26) как

$$\rho_V = \frac{ie}{2\pi} \int_C dz \text{Sp} \tilde{G}(x, x'; z) |_{x' \rightarrow x}. \quad (9.28)$$

Функция \tilde{G} определена в плоскости комплексного переменного z с разрезами вдоль вещественной оси при $z < -m$, $z > m$ и имеет простые полюса на участке $-m < z < m$, соответствующие связанным состояниям электрона в атоме. Контур C в (9.27), (9.28) проходит вдоль нижнего берега разреза $z < -m$, обходит полюса, соответствующие занятым состояниям, снизу, а незанятым — сверху, после чего идет вдоль верхнего берега разреза $z > m$. При $Z \rightarrow Z_{кр}$ полюс, соответствующий состоянию $1s_{1/2}$, приближается к точке ветвления $z = -m$ и при $Z > Z_{кр}$ уходит с физического листа римановой поверхности функции \tilde{G} через разрез. При этом указанное выше правило обхода полюсов нарушается. Выход из этой ситуации дается введением представления о заряженном вакууме (см. гл. 8).

Для вычисления следа в (9.28) в работе [180] используется разложение по сферическим волнам

$$\text{Sp} \tilde{G}(x, x'; z) |_{x' \rightarrow x} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\kappa} |\kappa| \text{Sp} \tilde{G}_{\kappa}(r, r'; z) |_{r' \rightarrow r}, \quad (9.29)$$

где $\kappa = \pm(j + 1/2)$.

Обозначая величину \tilde{G}_κ в отсутствие внешнего поля $\tilde{G}_\kappa^{(0)}$, получаем следующее разложение в ряд:

$$\tilde{G}_\kappa = \sum_n (Z\alpha)^n \tilde{G}_\kappa^{(n)} = \sum_n (Z\alpha)^n \tilde{G}_\kappa^{(0)} (V_0 \tilde{G}_\kappa^{(0)})^n \quad (9.30)$$

$$\text{Sp } \tilde{G}_\kappa^{(n)}(r, r') = \int \prod_{i=1}^n [dr_i r_i^2 V_0(r_i)] \text{Sp } [\tilde{G}_\kappa^{(0)}(r, r_1) \dots \tilde{G}_\kappa^{(0)}(r_n, r')], \quad (9.31)$$

где V_0 — вершинная функция.

Интеграл (9.28) вычисляется с помощью поворота контура C на угол $\pi/2$. Вклад n -го порядка для моды κ в вакуумную плотность заряда есть [180]

$$\rho_{|\kappa|}^{(n)}(r) = -\frac{e|\kappa|}{2\pi^2} (Z\alpha)^n \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \text{Sp } \tilde{G}_\kappa^{(n)}(r, r', \eta) |_{r' \rightarrow r}. \quad (9.32)$$

Для четных n в силу теоремы Фарри $\rho_{|\kappa|}^{(n)} = 0$.

Для вычисления интегралов (9.32) необходимо проводить процедуру регуляризации. В работе [146] приведены результаты вычисления сдвига энергии за счет высших порядков в вакуумной поляризации (отметим, что эти поправки, в отличие от потенциала Юлинга, ведут к отталкиванию). Для критического заряда при радиусе ядра $R = 10$ ферми вклад поправки $\rho_1^{(3)}(r)$ в энергию связи уровня $1s_{1/2}$ есть $\Delta E^{(3)} \approx 0,570$ кэВ, а сумма вкладов $\rho_1^{(n)}(r)$ для $n \geq 3$ $\Delta E^{(n \geq 3)} \approx 1,150$ кэВ. Это показывает, что поправки высших порядков к потенциалу Юлинга не меняют качественной картины.

Для квазимолекулы $U + U$ подобные расчеты проведены в работе [181] другим методом. При $R = R_{\text{кр}}$ полный сдвиг энергии за счет поляризации вакуума составляет $\Delta E \approx -3,98$ кэВ, из которого $\Delta E^{(1)} \approx -4,62$ кэВ приходится на потенциал Юлинга и $\Delta E_1^{(n \geq 3)} \approx 609$ эВ для $|\kappa| = 1$, $\Delta E_2^{(n \geq 3)} = 34$ эВ для $|\kappa| = 2$ приходится на поправки из-за высших порядков до $Z\alpha$.

Учет собственной энергии электрона во внешнем поле также приводит к появлению соответствующих поправок к энергии связи.

Согласно результатам работы [182], для ядра конечного размера с критическим зарядом эти поправки приближенно компенсируют сдвиг энергии из-за поляризации вакуума.

Таким образом, при переходе через $Z_{\text{кр}}$ поправки, связанные с поляризацией вакуума, остаются не только конечными, но и малыми по сравнению с энергией связи электрона. Это означает, что учет поляризации вакуума не меняет существенно результатов, относящихся к рождению позитронов кулоновским полем.

§ 9.3. Бозонная конденсация в сильном внешнем поле

В сильном внешнем поле вакуум бозе-частиц претерпевает еще более серьезные изменения, чем рассмотренный в гл. 8 и § 9.1, 9.2 электрон-позитронный вакуум.

В отличие от фермионов любое число бозе-частиц может находиться в одном и том же состоянии, образуя так называемый *конденсат*. В работе [183] (см. также обзор [184]) показано, что при увеличении статического поля рождения пар свободных бозонов не происходит: при наличии самодействия вида $\lambda (\varphi^* \varphi)^2$ энергетически более выгодным становится образование конденсата. При этом в случае сильного кулоновского поля возникает экранирующее ядро классическое мезонное поле. Возможность существования π -мезонного конденсата имеет большое значение для теории ядерной материи, где сильное внешнее поле может возникать как эффективное поле нуклонов. Подобное явление представляет интерес, в частности, для физики нейтронных звезд.

Рассмотрим сперва одночастичную задачу для уравнения Клейна — Гордона — Фока во внешнем поле без учета самодействия. Для статического внешнего поля, описываемого скалярным потенциалом U , от (1.34) можно перейти к уравнению для стационарных состояний

$$E^2 \varphi_E = [-\Delta + m(m + U)] \varphi_E. \quad (9.33)$$

Пока потенциальная яма $U = -v_0 f(\mathbf{x}) < 0$ не слишком глубока, уравнение (9.33) имеет полную систему решений, соответствующих непрерывному спектру $|E| > m$. По мере ее углубления из верхнего и нижнего континуумов выходят симметрично расположенные дискретные уровни соответственно частиц и античастиц. Общая схема зависимости энергии уровней от глубины ямы v_0 изображена на рис. 7.

При достижении v_0 некоторого значения $v_{кр}$ уровни частицы и античастицы сталкиваются при $E = 0$. По мере дальнейшего углубления ямы энергия этих уровней становится чисто мнимой.

Аналогичная ситуация имеет место и при векторной связи [уравнение (1.3)]. Однако график зависимости E от v_0 оказывается в этом случае несимметричным [185] и при $v \geq v_{кр}$ энергия имеет ненулевую вещественную и мнимую части (прямоугольная яма с размытым краем рассмотрена в работе [186]).

Как показано в работе [187], при $v_0 \geq v_{кр}$ для короткодействующего потенциала как при скалярной, так и при векторной связи норма основного состояния обращается в нуль, т. е. состояние становится духовым. Схемы квантования в подобных случаях рассматривались в работе [188] (см. также подробный обзор [147]).

Для кулоновского поля по мере увеличения заряда ядра возникает дискретный уровень только с положительной энергией, который при некотором $Z = Z_{кр}$ достигает границы нижнего конти-

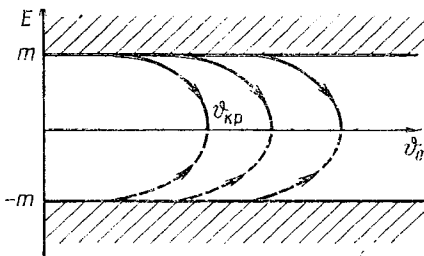


Рис. 7

В рамках вторично квантованной теории с учетом самодействия и взаимодействий заряженных частиц между собой поведение бозонов в сильных полях рассмотрено в работах [183, 184]. Самодействие бозонов можно учесть введением в лагранжиан (1.33) члена $-(\lambda/6) (\varphi^* \varphi)^2$. Тогда уравнение (1.34) перейдет в

$$\partial_r \partial^r \varphi + m(m + U) \varphi + (\lambda/3) \varphi^* \varphi^2 = 0. \quad (9.34)$$

Потенциал возьмем в виде прямоугольной ямы

$$U(x) = \begin{cases} -v_0, & 0 \leq r \leq r_0, \\ 0, & r > r_0. \end{cases}$$

Если глубина ямы $v_0 > m$, то в области $0 \leq r \leq r_0$ уравнение (9.34) имеет нетривиальное решение

$$\varphi = \sqrt{3 m (v_0 - m) / \lambda}. \quad (9.35)$$

неаналитическое по константе λ . По аналогии с теорией сверхтекучести можно сказать, что решение (9.35) соответствует наличию бозе-конденсата.

Таким образом, статическое внешнее поле достаточной интенсивности приводит к спонтанному нарушению калибровочной симметрии (аналогичный эффект для поля сверхвысокой частоты рассмотрен в следующей главе). Согласно работе [183], экранирующее поле, которое при этом возникает, изменяет спектр состояний скалярной частицы во внешнем поле. Оценки показывают, что в случае узкой ямы экранирующее поле имеет протяженность много больше радиуса ямы и не допускает столкновения уровней частицы и античастицы. Поэтому ни рождения пар, ни появления духовых состояний не происходит, т. е. вакуум устойчив.

Для статического электрического поля $A_i = (A_0, 0, 0, 0)$ уравнение (1.3) с учетом самодействия принимает вид

$$[(\partial/\partial t + ieA_0)^2 - \Delta + m^2] \varphi + (\lambda/3) \varphi^* \varphi^2 = 0. \quad (9.36)$$

Можно показать, что и здесь не происходит столкновения уровней частиц и античастиц [183].

нуума. Для модели протяженного ядра с радиусом 14,6 ферми критический заряд в случае пионного поля есть $Z_{кр} \approx 2000$ [147]. Более подробно эти вопросы здесь не рассматриваются, так как все известные бозоны являются адронами и для последовательного описания их поведения в околоскритических полях необходимо учитывать эффекты сильных взаимодействий.

Устойчивость вакуума можно обеспечить не только с помощью самодействия, но и за счет кулоновского взаимодействия скалярных частиц [183] (подробное изложение имеется в работе [147]). Однако, как отмечено в [183], эта возможность менее интересна, так как мезоны являются адронами и константа самодействия $\lambda \gg e^2$.

В связи с тем что для бозонов $Z_{\text{кр}} \sim 10^3$, явление пионной конденсации во внешнем электромагнитном поле представляет лишь академический интерес. В то же время пионная конденсация может играть важную роль в теории ядерной материи. Действительно, эффективное поле сильных взаимодействий нуклонов в ядерном веществе может оказаться достаточно сильным, чтобы произошла указанная выше перестройка вакуумного состояния пионного поля. Есть основания полагать, что при достаточно больших плотностях и малых температурах ядерного вещества эффекты конденсации должны иметь место. Что касается количественной оценки порога пионной конденсации, то по этому поводу в литературе нет полного согласия [189]. Для ядерного вещества, состоящего из нейтронов, пороговая плотность, по-видимому, не превосходит $0,35 \text{ ферми}^{-3}$, что вдвое больше плотности нуклонов в обычных ядрах.

Эффекты пионной конденсации должны быть существенными в физике нейтронных звезд. В частности, они могут понизить критическую массу нейтронной звезды по отношению к гравитационному коллапсу.

Упомянутые в настоящем параграфе вопросы хорошо освещены в литературе (см. обзоры [184, 189, 190] и монографию [191]). Кроме того, указанные эффекты относятся скорее к физике мезон-нуклонных взаимодействий при средних энергиях, чем к взаимодействию квантованных полей с классическим внешним полем. Поэтому здесь мы не рассматриваем их более подробно.

Глава 10. СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ И ВОССТАНОВЛЕНИЕ СИММЕТРИИ ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

§ 10.1. Восстановление спонтанно нарушенной симметрии внешним полем

В последние годы активно развивались различные варианты единых калибровочных теорий слабых, электромагнитных и сильных взаимодействий. Наибольшую известность получила теория слабых и электромагнитных взаимодействий Вайнберга—Салама (см., например, [32]). Она обладает существенными преимуществами по сравнению с фермиевской теорией слабых взаимодействий, которая, как известно, неперенормируема и противоречива при высоких

энергиях. В единых калибровочных теориях взаимодействия осуществляются посредством обмена промежуточными векторными бозонами, масса которых возникает из-за *спонтанного нарушения симметрии* скалярного поля (см. § 3.3) по аналогии с теорией сверхпроводимости. При этом перенормируемость теории является следствием того, что масса векторного поля выражается через вакуумное среднее скалярного поля (механизм Хиггса).

Как известно, достаточно сильное магнитное поле разрушает сверхпроводимость и тем самым приводит к восстановлению первоначально спонтанно нарушенной симметрии. В настоящем параграфе показано, что аналогичное явление имеет место и в единых калибровочных теориях. Если взаимодействие с внешним полем не нарушает симметрию лагранжиана, то можно говорить о *спонтанном восстановлении* симметрии под влиянием внешнего поля. Обратное явление, когда взаимодействие с внешним полем приводит к спонтанному нарушению симметрии в первоначально симметричной системе, изучается в следующих параграфах.

Рассмотрим сначала влияние внешнего поля на абелеву модель Хиггса. Лагранжиан этой модели

$$\mathcal{L} = (D_i^* \varphi^*) D^i \varphi - V(\varphi^* \varphi) - \frac{1}{4} \hat{F}_{ik} \hat{F}^{ik}. \quad (10.1)$$

Здесь φ — оператор заряженного скалярного поля, взаимодействующего с квантованным векторным полем \hat{A}_i и классическим векторным полем A_i :

$$D_k = \partial_k + ie(\hat{A}_k + A_k); \quad \hat{F}_{ik} = \partial_i \hat{A}_k - \partial_k \hat{A}_i; \quad (10.2)$$

$$V(\varphi^* \varphi) = -\mu^2 \varphi^* \varphi + \frac{\lambda}{6} (\varphi^* \varphi)^2, \quad \mu^2 > 0, \quad \lambda > 0.$$

В этой модели массовый член входит с неправильным знаком, что обеспечивает спонтанное нарушение симметрии. В отсутствие внешнего поля минимум классической плотности энергии достигается на независимом от x решении

$$\varphi = \sqrt{3/\lambda} \mu \equiv f_0, \quad \hat{A}_i = 0. \quad (10.3)$$

Рассмотрим теперь, что происходит, когда включено постоянное магнитное поле. Выберем калибровку, в которой $A_0 = 0$, и будем искать минимум плотности энергии

$$T^{00} = (D^0 \varphi^*) D^0 \varphi - (D^{\alpha*} \varphi^*) D_{\alpha} \varphi + V(\varphi^* \varphi) - (1/2) F^{0\alpha} F_{\alpha}^0 + (1/4) F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \quad (10.4)$$

Квантованное поле также можно взять в калибровке $\hat{A}_0 = 0$. Тогда для минимизирующих (10.4) функций $\varphi = f(x)$, $\hat{A}^i = a^i(x)$ получаются уравнения [192] ($\omega_i = a_i + A_i$):

$$\Delta f - e^2(\mathbf{w}, \mathbf{w}) f - V'(f^2) f = 0; \quad (10.5)$$

$$\partial_{\beta} \omega^{\alpha\beta} - 2 e^2 f^2 \omega^{\alpha} = -e J^{\alpha}, \quad (10.6)$$

где $\omega_{ij} = \partial_i \omega_j - \partial_j \omega_i$, $V' \equiv dV(|f|^2)/d|f|^2$. При отсутствии внешнего поля решениями этих уравнений являются $\omega_\beta = a_\beta = 0$, $f = f_0$, что совпадает с (10.3).

Предположим, что внешнее поле отлично от нуля лишь в ограниченной пространственной области. Тогда $f(x) \rightarrow f_0$. С помощью (10.5) можно показать [192], что всюду $|f(x)| \leq f_0$ [это утверждение вытекает из принципа максимума модуля для решения уравнения (10.5)].

Итак, во внешнем поле указанного вида (для нестационарных полей подобный эффект, вообще говоря, отсутствует) возможно уменьшение параметра, характеризующего нарушение абелевой калибровочной симметрии, вплоть до ее восстановления ($|f(x)| = 0$) при некоторых значениях x . Если предположить, что отклонения $f(x)$ от f_0 малы, то (10.6) можно рассматривать как уравнение для векторного поля ω_β , с массой $m^2 = 2e^2 f_0^2$. Решение этого уравнения, удовлетворяющее граничному условию $\omega_\beta(x) \rightarrow 0$, $|x| \rightarrow \infty$ отлично от нуля лишь там, где есть внешний ток J_β , и спадает до нуля на характеристической длине $\sqrt{\lambda}/\sqrt{6} |e| \mu$. Этот эффект аналогичен эффекту Мейснера в теории сверхпроводимости и указывает на компенсацию внешнего поля вакуумным при наличии спонтанного нарушения симметрии. Таким образом, в модели Хиггса возможно восстановление симметрии в некоторой области пространства при включении внешнего поля.

Рассмотрим теперь возможность восстановления внешним полем спонтанно нарушенной симметрии в единой калибровочной теории электромагнитных и слабых взаимодействий Вайнберга — Салама. Уже грубая оценка показывает, что для восстановления симметрии нужны чрезвычайно большие значения напряженностей электромагнитного поля. Действительно, если по аналогии с теорией сверхпроводимости Гинзбурга — Ландау потребовать [193], чтобы плотность энергии внешнего (например, магнитного) поля могла компенсировать плотность энергии конденсата, то для модели с лагранжианом (10.1), (10.2) получим

$$H_c^2/8\pi - \mu^2 f_0^2 + \lambda f_0^4/6 = H_c^2/8\pi - \lambda f_0^4/6 = 0. \quad (10.7)$$

Предполагаемое в теории Вайнберга — Салама $f_0 \sim 300$ ГэВ ведет к значению соответствующего критического поля $H_c \sim \sim 10^{24} \sqrt{\lambda}$ Гс. Если полагать $\lambda \sim 1$, то получаются напряженности поля, не встречающиеся ни в земных, ни в космических условиях.

Однако даже в сильных полях рассматриваемые эффекты могут быть весьма незначительными. Дело в том, что в упомянутых теориях, в отличие от теории сверхпроводимости, конденсат хиггсовских частиц электрически нейтрален. Поэтому изменение его свойств во внешнем электромагнитном поле возможно лишь из-за наличия заряженных частиц в промежуточных состояниях.

Лагранжиан теории Вайнберга — Салама содержит $SU(2)$ -дублет хиггсовских частиц $\varphi = (\varphi^+, \varphi^0)$. Спонтанное нарушение симметрии состоит в появлении отличного от нуля вакуумного среднего

$$\langle 0 | \varphi | 0 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ f_0 \end{pmatrix}. \quad (10.8)$$

В результате взаимодействия лептонов с хиггсовскими частицами электрон приобретает массу $m_e = G_e f_0$ (G_e — константа указанного взаимодействия). Внешнее электромагнитное поле приводит к изменению величины f_0 , а следовательно, и этой массы. В древесном приближении это изменение отсутствует вследствие электрической нейтральности конденсата. Первое неисчезающее приближение дает диаграмма с одной электронной петлей в вершине. Ее относительный вклад в Δm_e составляет [192]

$$\Delta m_e / m_e \sim e^2 G_F H^2 / \mu_\chi^2, \quad (10.9)$$

где G_F — фермиевская константа слабых взаимодействий; H — постоянное магнитное поле; μ_χ — масса хиггсовской частицы [следует иметь в виду, что (10.9) справедливо лишь при $H \ll m_e^2/e \approx 4 \cdot 10^{13}$ Гс]. Даже для μ_χ порядка массы протона в поле $H \sim 10^{13}$ Гс (10.9) дает $\Delta m_e / m_e \sim 10^{-18}$.

В работах [194, 195] рассмотрено восстановление симметрии магнитным полем в моделях без нейтральных токов. В этом случае критическое значение напряженности поля $H \gtrsim 10^{19}$ Гс.

Спонтанное восстановление симметрии в единых калибровочных теориях может происходить также за счет статистических эффектов в среде из частиц, описываемых лагранжианом соответствующей теории, если предположить, что среда находится в термодинамическом равновесии [196, 197]. Механизм этих эффектов, однако, не связан непосредственно с классическим внешним полем, и поэтому здесь они не рассматриваются.

§ 10.2. Спонтанное нарушение симметрии в однородном электрическом поле

В § 10.1 показано, что включение магнитного поля большой интенсивности может приводить к восстановлению спонтанно нарушенной симметрии. Возможно и обратное явление, состоящее в том, что высокочастотное электрическое поле вызывает возникновение спонтанного нарушения симметрии в первоначально симметричной системе (для статического поля это явление рассмотрено в § 9.3).

Рассмотрим скалярное поле с самодействием вида $\lambda \varphi^4$ в пространственно-однородном периодическом во времени электрическом поле и покажем, что при достаточно большой частоте последнего в системе возникает неустойчивость относительно спонтанного образования ненулевого вакуумного среднего скалярного поля [198].

При этом будет установлена аналогия между рассматриваемой моделью и пелинейной колебательной системой с изменяющимися по гармоническому закону параметрами. Возникновение ненулевого вакуумного среднего поля φ в терминах такой системы эквивалентно возможности устойчивых режимов стационарных колебаний в резонансном случае [199].

Поскольку рассматривается заряженное скалярное поле, то неравенство нулю его вакуумного среднего при инвариантном лагранжиане означает спонтанное нарушение калибровочной симметрии. В отличие от моделей, рассмотренных в § 10.1, в которых спонтанное нарушение симметрии возникало благодаря мнимости затравочной массы, здесь $m^2 > 0$, и эффект возникает в результате взаимодействия скалярного поля с внешним векторным полем.

Рассмотрим лагранжиан

$$\mathcal{L}^{(0)} = D_n^* \varphi^* D^n \varphi - m^2 \varphi^* \varphi - (\lambda/6) (\varphi^* \varphi)^2, \quad (10.10)$$

где D_n определено в (1.1).

Выберем классическое векторное поле A_n в виде (6.1) и предположим, что при $t \rightarrow -\infty$ $A_3(t) \rightarrow \text{const}$, а при конечных временах $A_3(t) = a_0 \sin k_0 t$, где k_0 — частота. Если интерпретировать это векторное поле как электромагнитное, то рассматриваемый случай соответствует выключающемуся при $t \rightarrow -\infty$ однородному в пространстве электрическому полю (6.3) с $E_z = a_0 k_0 \cos k_0 t$.

Рассмотрим среднее от оператора поля φ по гейзенберговскому вакууму $|0\rangle$, определенному при $t \rightarrow -\infty$. В силу инвариантности относительно трансляций в пространстве имеем

$$\langle 0 | \varphi(\mathbf{x}, t) | 0 \rangle = \langle 0 | \varphi(0, t) | 0 \rangle = f(t). \quad (10.11)$$

Величина $f(t)$ из (10.11), вообще говоря, зависит от времени из-за нестационарности внешнего поля. Неравенство ее нулю означает наличие спонтанного нарушения симметрии. В силу C -инвариантности вакуумного состояния $|0\rangle$ можно считать, что функция $f(t)$ вещественна, т. е. выполняется соотношение

$$\langle 0 | \varphi(\mathbf{x}, t) | 0 \rangle = \langle 0 | \varphi^*(\mathbf{x}, t) | 0 \rangle = f(t). \quad (10.12)$$

Покажем теперь, что при некотором условии на частоту k_0 внешнего поля действительно реализуется случай $f(t) \neq 0$, соответствующий наличию спонтанного нарушения симметрии.

Усредняя по вакууму $|0\rangle$ уравнение поля

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi + 2ieA_3^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} + (e^2 A_3^3 + m^2) \varphi + \frac{\lambda}{3} \varphi^* \varphi^2 = 0, \quad (10.13)$$

следующее из (10.10), в древесном приближении, когда в силу отсутствия в диаграммах замкнутых внутренних линий математические ожидания факторизуются [200, 201]

$$\langle 0 | \varphi^* \varphi^2 | 0 \rangle \approx \langle 0 | \varphi^* | 0 \rangle \langle 0 | \varphi | 0 \rangle^2 = f^3, \quad (10.14)$$

приходим к уравнению

$$d^2f/dt^2 + (e^2 A_0^2(t) + m^2) f + (\lambda/3) f^3 = 0. \quad (10.15)$$

Вводя обозначения

$$\omega^2 = m^2 + e^2 a_0^2/2, \quad \gamma = \lambda/3, \quad h = (1 + 2 m^2/e^2 a_0^2)^{-1}, \quad (10.16)$$

приводим (10.15) к виду

$$d^2f/dt^2 + \omega^2 (1 - h \cos 2 k_0 t) f + \gamma f^3 = 0, \quad (10.17)$$

где величины h и γ предполагаются малыми.

Уравнение типа (10.17) рассматривалось в работе [199] в связи с классической теорией нелинейных колебаний. Вопрос о наличии спонтанного нарушения симметрии в системе, описываемой лагранжианом (10.10), сводится к вопросу о существовании устойчивых ненулевых решений уравнения (10.17) в тех случаях, когда нулевое решение (10.17) неустойчиво. Последнее имеет место, если частота внешнего поля A_n удовлетворяет неравенству

$$\omega (1 - h/4) < k_0 < \omega (1 + h/4) \quad (10.18)$$

и в системе возникает так называемый главный демультимпликационный резонанс [199].

Если при выполнении (10.18) $\gamma = 0$, то уравнение (10.17) не имеет устойчивых решений. Кроме неустойчивого решения $f(t) = 0$ имеются решения, экспоненциально возрастающие со временем, которые соответствуют первой зоне неустойчивости уравнения Матье на диаграмме рис. 3 (условие $k_0 \approx \omega$ в обозначениях § 6,4 есть $a \approx 1$).

Учет $\gamma \neq 0$ существенно меняет характер решений (10.17). Как показано в работе [199], при выполнении (10.18) решение уравнения (10.17) в первом приближении по параметрам h , γ представляется в виде

$$f(t) = a(t) \cos [k_0 t + \theta(t)], \quad (10.19)$$

где амплитуда и фаза определяются из соотношений

$$\left. \begin{aligned} da/dt &= (-ah\omega^2/4 k_0) \sin 2\theta, \\ d\theta/dt &= \omega - k_0 + 3\gamma a^2/8 k_0 - (h\omega^2/4 k_0) \cos 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (10.20)$$

Можно убедиться в том, что наличие нелинейного члена приводит к ограниченности всех резонансных решений. Для доказательства этого факта полезно совершить в (10.20) ту же замену переменных $u = a \cos \theta$, $v = a \sin \theta$, которая использовалась в работе [199] в линейном случае. При этом (10.20) сводится к

$$du/d\tau = [p - (u^2 + v^2)] v, \quad dv/d\tau = [q + (u^2 + v^2)] u, \quad (10.21)$$

где

$$p = -\frac{8k_0}{3\gamma} \left[\frac{h\omega^2}{4k_0} + (\omega - k_0) \right]; \quad q = -\frac{8k_0}{3\gamma} \left[\frac{h\omega^2}{4k_0} - (\omega - k_0) \right];$$

$$\tau = \frac{3\gamma}{8k_0} t. \quad (10.22)$$

Легко видеть, что система (10.21) имеет интеграл

$$(u^2 + v^2)^2 + 2qu^2 - 2pv^2 = C. \quad (10.23)$$

Равенство (10.23) определяет параболу в координатах $x = u^2$, $y = v^2$, причем значения координат всех точек параболы, лежащих в первом квадранте ($x \geq 0$, $y \geq 0$), ограничены одним и тем же числом, которое определяется величинами C , p и q . Отсюда с использованием (10.19) и равенства $a(t) = \sqrt{u^2 + v^2}$ получаем

$$|f(t)| \leq (p + \sqrt{p^2 + C})^{1/2}, \quad \gamma < 0;$$

$$|f(t)| \leq (-q + \sqrt{q^2 + C})^{1/2}, \quad \gamma > 0, \quad (10.24)$$

что и означает ограниченность решения (10.17).

В отличие от случая $\gamma = 0$ система (10.20) имеет стационарные решения, определяемые условиями

$$\frac{ah\omega^2}{4k_0} \sin 2\theta = 0, \quad \omega - k_0 + \frac{3\gamma a^2}{8k_0} - \frac{h\omega^2}{4k_0} \cos 2\theta = 0. \quad (10.25)$$

Эти решения имеют вид

$$f(t) = a \cos(k_0 t + \theta), \quad (10.26)$$

где допустимые значения амплитуды связаны с частотой внешнего поля формулой

$$a^2 = (4/3\gamma) (k_0^2 - \omega^2 \mp (1/2) h\omega^2), \quad (10.27)$$

а соответствующие значения θ определяются из (10.25).

График зависимости a^2 от k_0^2 приведен на рис. 8. Как видно из рисунка, при значениях $k_0^2 > \omega^2 (1 - h/2)$ тривиальное решение $f(t) = 0$ делается неустойчивым. Вакуум $|0\rangle$ перестраивается так, что возникает спонтанное нарушение симметрии с аномальным средним $\langle 0 | \varphi(\mathbf{k}, t) | 0 \rangle = f(t) \neq 0$, где $f(t)$ определено в (10.26) и (10.27). Как известно [32], характерной чертой моделей со спонтанным нарушением симметрии является неаналитичность вакуумного среднего по константе связи. Этим свойством обладает и данная модель, поскольку при стремлении параметра γ , характеризую-

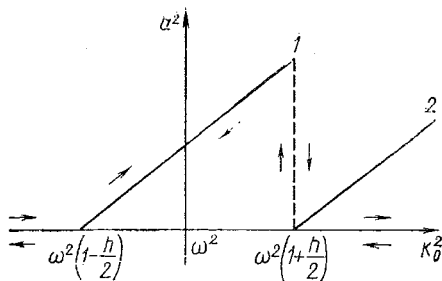


Рис. 8

щего силу нелинейного взаимодействия, к нулю a^2 из (10.27) стремится к бесконечности как γ^{-1} .

Физический смысл имеет лишь прямая 1 на рис. 8 [соответствующая знаку плюс в формуле (10.27)], так как вне интервала (10.18) устойчивым остается нулевое решение. С ростом частоты k_0 до значения $\omega(1 + h/4)$ происходит срыв колебаний. Обратное, если ча-

стота внешнего поля уменьшается от значений, больших $\omega(1 + h/4)$, то при достижении этого значения происходит скачкообразное возбуждение колебаний.

Если в качестве m взять массу π -мезона, то с учетом (10.16) и (10.18) получаем для частоты внешнего поля, при которой происходит спонтанное нарушение симметрии, значение $k_0 \sim 10^{23} \text{ с}^{-1}$. При этом требование $h \ll 1$, использованное выше, выполняется для полей $E = a_0 k_0 \leq 10^{20} \text{ В/см}$, т. е. не является ограничительным. Условие $\gamma \ll 1$ для константы, стоящей при нелинейном члене, означает, что рассматриваются умеренно сильные взаимодействия ($\lambda < 0,3$).

Выше рассматривался случай главного демультипликационного резонанса, возникающего при $k_0 \approx \omega$ (частота внешнего поля равняется собственной частоте системы). В работе [202] исследовано уравнение (10.17) при условии, что частоты k_0 и ω удовлетворяют соотношению $q\omega = 2pk_0$, где p и q — взаимно простые целые числа. Согласно результатам работы [202], в первом приближении резонансное поведение решения обнаруживается только в уже рассмотренном случае $p = 1, q = 2$. Анализ второго приближения выявляет новый резонанс, который имеет место при $q = 4, p = 1$, т. е. $k_0 = 2\omega$. Таким образом, он соответствует еще большей частоте внешнего поля, чем главный демультипликационный.

§ 10.3. Феномен Хиггса в нестационарном электрическом поле

Рассмотрим явления, происходящие в зоне главного демультипликационного резонанса при $k_0 \approx m$. Для определения спектра задачи удобно перейти от полевых переменных φ, φ^* к переменным φ_1, φ_2 :

$$\varphi = (\varphi_1 + i\varphi_2)/\sqrt{2}, \quad \varphi_1' = \varphi_1 - \sqrt{2} f(t), \quad (10.28)$$

подобно тому, как это делается в модели Голдстоуна [200]. С использованием (10.17) и (10.28) в зоне резонанса (10.18) получаем

для действия, соответствующего плотности лагранжиана (10.10), следующее выражение:

$$S = \int \mathcal{L} d^4 x = \frac{1}{2} \int d^4 x \left[\partial^n \varphi_1' \partial_n \varphi_1' - \left(k_0^2 + \frac{2}{3} \lambda f^2 \right) \varphi_1'^2 + \right. \\ \left. + \partial^n \varphi_2 \partial_n \varphi_2 - k_0^2 \varphi_2^2 - \frac{\lambda \sqrt{2}}{3} f \varphi_1' (\varphi_1'^2 + \varphi_2^2) - \frac{\lambda}{12} (\varphi_1'^2 + \varphi_2^2)^2 + \right. \\ \left. + 2e A_n \varphi_1' \partial^n \varphi_2 - 2e A_n \varphi_2 \partial^n \varphi_1' \right], \quad (10.29)$$

где отброшены c -числовые слагаемые.

Действие (10.29) описывает два квантованных поля φ_1' и φ_2 , взаимодействующих между собой и с векторным полем A_n и обладающих массами

$$m_1^2 = k_0^2 + (2/3) \lambda f^2, \quad m_2^2 = k_0^2. \quad (10.30)$$

Очевидно, что симметрия между φ_1' и φ_2 нарушена, поскольку $f \neq 0$.

Если наряду с внешним полем учесть и квантованное поле \hat{A}_n , то плотность лагранжиана модели принимает вид

$$\mathcal{L} = [\partial^n - ie (\hat{A}^n + A^n)] \varphi^* [\partial_n + ie (\hat{A}_n + A_n)] \varphi - m^2 \varphi^* \varphi - \\ - \frac{\lambda}{6} (\varphi^* \varphi)^2 - \frac{1}{4} \hat{F}_{kl} \hat{F}^{kl}, \quad (10.31)$$

где $\hat{F}_{kl} = \partial_k \hat{A}_l - \partial_l \hat{A}_k$.

Выбирая в качестве нулевого приближения в (10.31) операторы в представлении Фарри с внешним потенциалом A_n указанного выше вида, приходим к выводу, что матричный элемент (10.12) отличен от нуля и в модели имеется спонтанное нарушение симметрии. Вследствие этого, как и в случае феномена Хиггса [203], в лагранжиане появляется слагаемое $m_V^2 \hat{A}_n \hat{A}^n$, где

$$m_V^2 = e^2 \langle 0 | \varphi^* | 0 \rangle \langle 0 | \varphi | 0 \rangle = e^2 f^2 \neq 0. \quad (10.32)$$

Таким образом, первоначально безмассовый векторный бозон приобретает некоторую массу.

Рассмотренные явления имеют место при частотах внешнего поля $k_0 \sim m$. Как показано в § 6.1, для применимости приближения классического однородного поля в этом случае должно выполняться условие $E \gg E_{кр}$.

Предположим теперь, что в некоторый момент $t = t_0$ внешнее поле A_n выключается. Из требования непрерывности функции $A_3(t)$ и ее первой производной в момент выключения следует, что при $t \geq t_0$, $A_3(t) = \pm a_0$. Уравнение (10.17) при $t \geq t_0$ принимает вид уравнения Дюффинга

$$d^2 f / dt^2 + (\omega^2 + e^2 a_0^2 / 2) f + \gamma f^3 = 0. \quad (10.33)$$

Его решение в первом приближении есть [199]

$$f = a_1 \cos (\omega_I(a_1) t + \theta_1), \quad \omega_I^2(a_1) = e^2 a_0^2 + m^2 + (3/4) a_1^2 \gamma, \quad (10.34)$$

а значение амплитуды берется из условия сшивания решений (10.26) и (10.34) при $t = t_0$.

Сохраняя во всех вычислениях лишь линейные по \hbar слагаемые и предполагая, что значение амплитуды принадлежит прямой 1 (см. рис. 8), с учетом (10.16), (10.18) и (10.27) получаем

$$ak_0 = a_1 \omega_I(a_1), \quad \omega_I(a_1) = k_0 (1 + 3\hbar/4), \\ a_1 = a (1 - 3\hbar/4). \quad (10.35)$$

При выводе (10.35) необходимо учитывать, что в случае прямой 1 (см. рис. 8) точка сшивания t_0 является корнем решений (10.26) и (10.34), поскольку (10.25) в этом случае дает $\theta = \pi$.

Отличное от нуля при $t \geq t_0$ решение (10.34) носит формальный характер и не означает, что спонтанное нарушение симметрии должно сохраняться и после выключения внешнего поля. Это связано с тем, что при выключении поля его частота уменьшается от значения $k_0 \sim m$ до нуля не мгновенным скачком, как предполагалось при выводе (10.34) и (10.35), а за некоторый конечный промежуток времени. В течение этого промежутка квадрат амплитуды решения f уменьшается до нуля (прямая 1 на рис. 8). Масса векторной частицы (10.32) также обращается в нуль при выключении внешнего поля. Таким образом, переменное электрическое поле осуществляет своеобразную «накачку», в результате которой роль вакуумного состояния начинает выполнять состояние с определенной положительной энергией. Это состояние представляет собой конденсат заряженных частиц с нулевой средней плотностью заряда. По мере прекращения накачки имеет место переход в обычное вакуумное состояние с нулевой энергией.

При рассмотрении рождения частиц периодическим во времени полем в § 6.4 мы пренебрегали их взаимодействием между собой. Для лептонов такое пренебрежение оправдано, поскольку электромагнитные и слабые силы малы по сравнению с взаимодействием с интенсивным внешним полем. Для скалярных же частиц, являющихся адронами, ситуация не столь очевидна. Действительно, как следует из результатов данного параграфа, спонтанное нарушение симметрии для самодействующего поля влечет за собой необходимость переопределения понятия физической частицы, а значит, и необходимость соответствующих изменений в теории рождения скалярных пар. Поскольку, однако, спонтанное нарушение симметрии имеет место лишь при чрезвычайно высоких частотах внешнего поля $k_0 \sim m$, то при $k_0 \ll m$ и для бозонов остаются справедливыми изложенные в гл. 6 результаты.

Глава 11. КОРПУСКУЛЯРНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ
КВАНТОВАННЫХ ПОЛЕЙ ВО ВНЕШНЕМ
ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

§ 11.1. Особенности взаимодействия квантованных
полей с классическим гравитационным полем

Включение гравитации в общую схему квантовой теории поля относится к числу фундаментальных проблем современной теоретической физики. Интерес к объединению общей теории относительности и квантовой теории диктуется не только соображениями общего характера, но и внутренними потребностями обеих теорий.

До недавнего времени в теории элементарных частиц гравитационное взаимодействие традиционно игнорировалось. Оправдывалось это малостью гравитационной константы связи ($Gm^2 \approx 2 \times 10^{-45}$ для электрона) по сравнению с константами других взаимодействий [7]. Имеется, однако, много примеров того, что, несмотря на малость поправок, более точная теория ведет к существенным качественным следствиям. В частности, уже давно высказывались надежды на то, что учет гравитации позволит избавиться от теоретико-полевых расходимостей. Полученные в этом направлении результаты [204—206] показывают, что гравитация может действительно сыграть роль подобного «универсального регуляризатора».

Кроме того, изучение квантовогравитационных эффектов необходимо и для самой общей теории относительности (ОТО). Теоретическое доказательство неизбежности сингулярностей (теоремы Хокинга — Пенроуза), а также наблюдательное подтверждение горячей модели Вселенной (открытие реликтового излучения) и существования черных дыр свидетельствуют о наличии в природе сильных гравитационных полей. В таких полях должны быть существенными квантовые эффекты других полей: рождение частиц и поляризация вакуума. В достаточно сильном гравитационном поле будут сказываться и его собственные квантовые эффекты.

Квантование гравитационного поля в линейном приближении было выполнено еще в тридцатых годах. В работах [18, 207] вычислены сечения различных процессов с участием гравитонов (в частности, рождения пар). За последние годы в решении проблемы квантования гравитации достигнуты значительные успехи [208—215], но полностью решенной ее в настоящее время считать еще нельзя.

Сложность задачи квантования гравитации выявляется уже при анализе принципиальной измеримости квантованного гравита-

ционного поля. Если для электромагнитного поля в схеме Бора — Розенфельда [26] отношение заряда классических пробных частиц к их массе может быть сделано сколь угодно малым, то в гравитации соответствующее отношение гравитационной массы к инертной определяется принципом эквивалентности. Универсальность гравитационного взаимодействия, а также его нелинейность (следствием которой является неаддитивность измеряемого поля и поля пробного тела) приводят к тому, что в мысленных экспериментах с приборами типа Бора — Розенфельда имеются существенные ограничения на измеримость гравитационного поля [216].

Что касается формализма, то трудности квантования гравитации определяются двумя особенностями классической ОТО: нелинейностью уравнений Эйнштейна и инвариантностью теории относительно бесконечнопараметрической группы общих преобразований координат.

Нелинейности возникают и в стандартной квантовой теории поля, но там они появляются как квантовые поправки к линейным классическим уравнениям или же вводятся феноменологически для описания самодействия. Гравитационное поле, однако, нелинейно изначально в том смысле, что в гравитационном лагранжиане в общем случае нельзя универсальным образом выделить «свободную» часть, приводящую к линейным уравнениям. Эта фундаментальная нелинейность есть следствие геометрической природы гравитационного поля, и, в частности, она проявляется в том, что уравнения Эйнштейна в отсутствие материи не содержат никакой константы связи (гравитационная постоянная G определяет связь тяготения с другими полями).

Вторая из отмеченных выше особенностей также имеет геометрическое происхождение. Она приводит к тому, что гравитационное поле определяется не самим метрическим тензором g_{ik} , а его классом эквивалентности относительно общих координатных преобразований. Аналогичная ситуация имеет место и в электродинамике. Там, однако, соответствующая калибровочная группа абелева. Наличие неабелевой калибровочной группы значительно усложняет канонический формализм, поскольку возникает необходимость учета нелинейных связей [208, 209].

Недостатков канонического квантования удастся избежать в ковариантной схеме, основанной на использовании метода континуального интеграла [210—213]. Основные результаты в этом подходе, однако, получены лишь в рамках теории возмущений для S -матричной постановки задачи, когда пространство—время считается асимптотически плоским. Это ограничивает область его применимости слабыми полями и не позволяет рассматривать приложения к космологии и проблеме сингулярностей. Кроме того, остается вопрос об устранении расходимостей, поскольку теория оказывается формально перенормируемой (перенормируемость удается доказать лишь в однопетлевом приближении [214, 215]).

Из сказанного выше ясно, что мы еще далеки от замкнутой теории квантованного гравитационного поля. Заметим, однако, что квантовая природа гравитации, по-видимому, существенна лишь в случаях, когда или гравитационное поле столь сильно, что кривизна пространства — времени характеризуется планковской длиной $l_{pl} = G^{1/2} \approx 1,6 \cdot 10^{-33}$ см, или рассматриваются процессы, происходящие на расстояниях порядка l_{pl} . В то же время квантовые эффекты других полей проявляются уже в масштабе комптоновской длины $l_c = m^{-1}$. Если исключить из рассмотрения гипотетические частицы с планковской массой $m_{pl} = G^{-1/2} \approx 10^{-5}$ г, для которых $l_c = l_{pl}$, то имеется широкая область, в которой взаимодействие квантованных полей с гравитационным можно описывать, считая последнее классическим.

Таким образом, приходим к схеме, аналогичной квантовой электродинамике во внешнем поле. Однако по сравнению с электродинамикой здесь возникают специфические проблемы.

Гравитационное поле, в отличие от электромагнитного, описывается не внешним потенциалом в пространстве Минковского, а метрикой искривленного риманова пространства. Это приводит к задаче квантования полей в римановом пространстве, что сопряжено как с техническими, так и с принципиальными трудностями. В частности, уравнения поля здесь имеют переменные коэффициенты при старших производных, топология пространства может быть неевклидовой, пространство может иметь горизонты событий и т. п.

Естественная в электродинамике S -матричная картина возможна только в асимптотически плоских пространствах, так что, например, в реалистических космологических моделях S -матричный подход неприменим. Возможность появления в пространстве — времени сингулярностей в большинстве случаев делает неясной даже саму постановку задачи о квантовании поля.

Если предположить, что пространство — время не имеет горизонтов и сингулярностей и является глобально гиперболическим [54], то до тех пор, пока мы интересуемся чисто полевыми аспектами теории (например, определением полей как операторнозначных обобщенных функций, абстрактной алгебры наблюдаемых, коммутаторов и т. п.), наличие кривизны приводит к физически почти очевидным ковариантным обобщениям теории свободных полей в пространстве Минковского. Затруднения принципиального характера возникают при построении вторично квантованной теории.

Здесь мы сталкиваемся с двумя связанными между собой проблемами. Первая — это конструкция гильбертова пространства состояний квантованного поля, вторая — получение конечных значений наблюдаемых.

С физической точки зрения построение пространства состояний сводится к определению вакуума и интерпретации квантованного поля в терминах частиц. Как было показано в § 2.2, различные системы базисных функций приводят, вообще говоря, к различным определениям понятия частицы.

В плоском пространстве—времени корпускулярная интерпретация свободного поля основана на инвариантности относительно группы Пуанкаре [6, 33]. При этом можно ввести сохраняющееся во времени разбиение оператора поля на положительно- и отрицательно-частотные части $\psi^{(\pm)}(x)$ и определить вакуумное состояние требованием

$$\psi^{(-)}(x)|0\rangle = 0. \quad (11.1)$$

Такая конструкция пространства Фока не зависит от выбора базиса в пространстве классических решений уравнений поля, если только базисные функции удовлетворяют условиям

$$\partial_0 \psi_\alpha^{(\pm)}(x) = \pm i\omega_\alpha \psi_\alpha^{(\pm)}(x). \quad (11.2)$$

В произвольном римановом пространстве нет подобного принципа выбора системы базисных функций, основанного на требованиях инвариантности, так что обычная корпускулярная интерпретация здесь непригодна.

Вторая проблема — построение физических наблюдаемых, наиболее важной из которых для гравитации является тензор энергии-импульса. Эта проблема тесно связана с первой, поскольку для того чтобы определить наблюдаемую как среднее от соответствующего оператора по состоянию поля, надо предварительно построить пространство состояний. К тому же средние от операторов, билинейных по полю, всегда будут содержать расходимости.

Проблеме получения конечных средних значений тензора энергии-импульса посвящена следующая глава. Здесь же рассмотрен вопрос о корпускулярной интерпретации квантованных полей во внешнем гравитационном поле.

§ 11.2. Корпускулярная интерпретация поля и рождение частиц

Как было сказано в предыдущем параграфе, неоднозначность конструкции пространства Фока связана с отсутствием инвариантного разбиения оператора поля на положительно- и отрицательно-частотные части. Об этом говорят как о *перемешивании положительно- и отрицательно-частотных решений* уравнений поля. В связи с гравитацией на это явление впервые обратил внимание Шредингер [217]. На языке вторично квантованной теории перемешивание частотностей означает рождение частиц (происходит параметрическое возбуждение осцилляторов квантованного поля). Следует заметить, что такое утверждение имеет строгий смысл, только когда определено понятие частицы во внешнем поле. Тем не менее полезно сначала провести качественное рассмотрение эффекта рождения частиц на эвристическом уровне.

Пусть в окрестности некоторой точки M риманова пространства — времени инвариант тензора кривизны имеет величину порядка

$$R_{iklm} R^{iklm} \sim \rho^{-4} \quad (11.3)$$

(ρ — характерный радиус кривизны). Тогда в точке M можно ввести систему координат K , которая будет локально галилеевой вплоть до расстояний порядка ρ от M . В этой системе можно построить полный набор одночастичных функций $\psi_{\alpha}^{(\pm)}(x)$, которые для частот $\omega_{\alpha} \gg \rho^{-1}$ будут с экспоненциальной точностью положительно- и отрицательно-частотными относительно временной координаты в K . Однако для частот

$$\omega_{\alpha} \lesssim \rho^{-1} \quad (11.4)$$

различие между положительно- и отрицательно-частотными функциями, вообще говоря, пропадает, что соответствует неопределенности порядка единицы для числа частиц в состоянии α .

По аналогии с электродинамикой рождение частиц можно качественно описать как «разрыв вакуумных петель» внешним гравитационным полем. Поскольку гравитация одинаково действует на частицы и античастицы, разрыв виртуальных пар здесь объясняется действием приливных сил.

Характерное расстояние между частицами виртуальной пары — комптоновская длина $l_c = m^{-1}$. Для того чтобы определить разрывающую эту пару приливную силу, рассмотрим уравнение девиации геодезических [54, 218]:

$$d^2 n^i / ds^2 = R^i_{klm} u^k n^l u^m, \quad (11.5)$$

где u^i — вектор 4-скорости одной из частиц пары; n^i — пространственноподобный вектор, соединяющий ее со второй частицей, причем $n_i n^i \sim -l_c^2$. Равенство (11.5) определяет их относительное (приливное) ускорение.

Для того чтобы приливные силы могли эту виртуальную пару «разорвать», превратив ее в реальную, необходимо, чтобы в системе покоя их работа на расстоянии порядка l_c превышала $2m$ (см. аналогичное рассуждение для электрического поля в § 6.1). Полагая в (11.5) $u^i = \delta^i_0$, $n^0 = 0$, $|n^{\mu}| \sim l_c$, получаем следующее условие:

$$|R^{\alpha}_{0\beta 0}| \gtrsim l_c^{-2} = m^2. \quad (11.6)$$

Другими словами, для того чтобы эффект рождения частиц был существенным, кривизна пространства — времени должна быть по крайней мере порядка обратной комптоновской длины.

Для безмассового поля подобный порог отсутствует, но, как видно из (11.4) (с учетом фазового объема), спектр рожденных частиц в этом случае сосредоточен в области энергий $\omega \sim \rho^{-1}$, так что и здесь эффект будет заметным лишь при достаточно большой кривизне пространства — времени.

В сильном гравитационном поле, когда кривизна $\rho^{-1} \gg m$, рождаются преимущественно ультрарелятивистские частицы с энергией $\omega \gg m$ (для меньших энергий мал фазовый объем). Тензор энергии-импульса рожденного вещества по порядку величины равен

$$|T_{ik}| \sim \int^{\rho^{-1}} \omega^3 d\omega \sim \rho^{-4}. \quad (11.7)$$

В то же время из уравнений Эйнштейна следует, что такое гравитационное поле создается распределением материи с тензором энергии-импульса

$$|T_{ik}^{(b)}| \sim G^{-1} |R_{iklm}^i| \sim G^{-1} \rho^{-2}, \quad (11.8)$$

где G — гравитационная постоянная, $G = 2,6 \cdot 10^{-66}$ см². Сравнивая (11.7) и (11.8), видим, что если $\rho \sim G^{1/2} \sim 10^{-33}$ см, то рожденное вещество будет существенно влиять на метрику пространства — времени, так как при этом $T_{ik} \sim T_{ik}^{(b)}$. В частности, как показано в работах [219—221], подобное явление может приводить к быстрой изотропизации расширения в анизотропных космологических моделях (подробнее см. гл. 15). Следует, впрочем, заметить, что кривизна $\rho \sim G^{1/2}$, по-видимому, соответствует границе применимости концепции классического гравитационного поля [222].

Рождение частиц слабым гравитационным полем на фоне плоского пространства — времени (в рамках теории возмущений) рассматривалось в работе [223]. Однако для описания рождения частиц сильным гравитационным полем необходим подход, не опирающийся на теорию возмущений.

Очевидно, что неоднозначность конструкции пространства Фока в T -искривленном пространстве можно устранить только введением какого-либо дополнительного принципа, не связанного с пуанкаре-инвариантностью.

Так, например, конструкция, предложенная в работах [224, 225] для пространства де Ситтера, основана на замене группы Пуанкаре группой де Ситтера $O(4,1)$. При этой корпускулярной интерпретации в пространстве де Ситтера частицы не рождаются. Однако физические соображения [226, 227], связанные с требованием положительной определенности энергии и рассмотрением процедуры измерения наблюдаемых, заставляют смотреть на эту интерпретацию лишь как на чисто математическую возможность.

Другая интерпретация, основанная на введенном *ad hoc* принципе минимизации числа рожденных пар и его производных по времени, рассматривалась в работе [228].

В работах [53, 229] предложена корпускулярная интерпретация квантованного поля, которая основана на диагонализации мгновенного гамильтониана, построенного по метрическому тензору энергии-импульса, с помощью канонических преобразований Боголюбова. Согласно этой интерпретации, физическими частицами называются те, операторы рождения и уничтожения которых $b^{(\pm)}(t)$ диагонализуют мгновенный гамильтониан. Физическое вакуум-

ное состояние $|0_t\rangle$ определяется как основное состояние гамильтониана и удовлетворяет условию $b^{(-)}(t)|0_t\rangle = 0$.

Нестационарность метрики приводит к тому, что операторы рождения и уничтожения в гейзенберговской картине зависят от времени явно (помимо обычного экспоненциального фактора). Это означает, что в каждый момент времени происходит переопределение понятия физических частиц и, следовательно, вакуума. Физические основания метода диагонализации гамильтониана обсуждались в § 3.4. В гл. 13 этот метод используется для изучения квантовых эффектов в однородных изотропных космологических моделях.

По существу аналогичная корпускулярная интерпретация в более аксиоматическом духе была предложена для скалярного поля в работе [230]. Она основана на определении зависящей от времени комплексификации пространства классических решений уравнения Клейна — Гордона — Фока.

Оба эти подхода дают определение понятия частицы как кванта энергии поля. Важно отметить, что такое определение зависит от выбора времениподобного векторного поля ξ^i , т. е. от выбора расслоения пространства — времени на семейство пространственноподобных гиперповерхностей $\{\Sigma\}$. Интегральные кривые поля ξ^i можно рассматривать как мировые линии системы наблюдателей, так что определение понятия частицы зависит от системы отсчета [226, 227, 230—233].

Подобная относительность корпускулярной интерпретации имеет место и для плоского пространства — времени Минковского. Для различных инерциальных наблюдателей операторы рождения и уничтожения частиц связаны между собой преобразованием Боголюбова вида (2.22) с $\Psi_{\alpha\beta} = 0$. Для взаимно неинерциальных наблюдателей преобразование Боголюбова (2.22) будет уже нетривиальным ($\Psi_{\alpha\beta} \neq 0$), и определение понятия частиц в таких системах отсчета будет существенно различным. Впервые это явление было обнаружено в работе [226], где рассматривалось квантование в плоском пространстве в так называемых риндлеровских координатах, описывающих систему отсчета наблюдателя, движущегося с постоянным ускорением [218].

С физической точки зрения зависимость определения частиц от системы отсчета обсуждалась в работе [233], где дан анализ мысленных опытов по регистрации частиц ускоренно движущимися детекторами, например типа двухуровневой системы, причем показано, что подобный детектор будет регистрировать частицы, определенные относительно его собственной системы отсчета (см. также [234]).

Таким образом, неоднозначность корпускулярной интерпретации не есть следствие кривизны пространства — времени как таковой. Однако в плоском пространстве, благодаря пуанкаре-инвариантности, существуют предпочтительные системы отсчета — инерциальные, в которых определяющее их времениподобное векторное поле ξ^i является генератором группы движений пространства, т. е. вектор-

ным полем Киллинга [54, 218]. В этих системах корпускулярная интерпретация поля однозначна с точностью до лоренц-преобразования. Предпочтительная система отсчета существует и в пространствах Фридмана (см. § 13.1). Произвольное риманово пространство не обладает группой движений, и в нем же не существует предпочтительных систем отсчета. Поэтому в таком пространстве инвариантное определение понятия частицы невозможно.

Ниже рассмотрен случай, когда риманово пространство — время имеет симметрию, позволяющую определить естественную, не зависящую от времени корпускулярную интерпретацию.

§ 11.3. Статическое и асимптотически статическое пространство — время

Пространство — время называется *статическим*, если оно обладает глобальным времениподобным векторным полем Киллинга ζ^i , ортогональным к некоторому семейству пространственноподобных гиперповерхностей $\{\Sigma\}$ [54]. В качестве временной координаты тогда можно взять любой параметр τ на интегральных кривых поля ζ^i , а семейство $\{\Sigma\}$ рассматривать как гиперповерхности постоянного времени. Тогда метрика статического пространства — времени имеет вид

$$ds^2 = g_{00}d\tau^2 - g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (11.9)$$

где g_{00} и $g_{\mu\nu}$ зависят только от пространственных координат x^μ .

Пусть T_{ik} — метрический тензор энергии-импульса рассматриваемого поля ψ . Трансляционная симметрия, генератором которой является ζ^i , приводит к сохранению величины

$$H^{(\zeta)} = \int_{\Sigma} T_{ik} \zeta^i d\sigma^k, \quad (11.10)$$

поскольку $\nabla^i (T_{ik} \zeta^k) = 0$. Очевидно, что $H^{(\zeta)}$ играет роль энергии. Поскольку ζ^i — поле Киллинга, то (11.10) не изменится, если T_{ik} заменить на канонический $T_{ik}^{(\text{can})}$, который для скалярного поля не совпадает с метрическим [13]. В квантовой теории $H^{(\zeta)}$ является генератором унитарных преобразований поля ψ при трансляциях в направлении ζ^i :

$$[H^{(\zeta)}, \psi] = i\mathcal{L}_{\zeta}\psi, \quad (11.11)$$

где \mathcal{L}_{ζ} — производная Ли в направлении вектора Киллинга ζ^i [54, 218].

В этом случае систему собственных функций $\psi_{\alpha}^{(\pm)}(x)$ можно выбрать так, чтобы

$$\mathcal{L}_{\zeta} \psi_{\alpha}^{(\pm)}(x) = \pm i\omega_{\alpha} \psi_{\alpha}^{(\pm)}(x). \quad (11.12)$$

Равенство (11.12) аналогично определению (11.2) для пространства Минковского, только теперь роль времени играет параметр на

интегральных кривых ξ^i . Используя функции $\psi_\alpha^{(\pm)}$ в качестве базисных функций в (2.5), получаем корпускулярную интерпретацию теории в терминах соответствующих операторов $a_\alpha^{(\pm)}$. Вакуумное состояние $|0_\xi\rangle$, определяемое равенствами $a_\alpha^{(\pm)}|0_\xi\rangle = 0$, устойчиво, и рождения частиц не происходит.

Оператор энергии имеет вид

$$H = \int_\Sigma : T_{ih} : \xi^i d\sigma^h, \quad (11.13)$$

где: T_{ih} : — оператор тензора энергии-импульса, нормально упорядоченный по операторам $a_\alpha^{(\pm)}$. Нетрудно проверить, что если $|\Psi_\alpha\rangle$ — состояние с энергией E_α

$$H |\Psi_\alpha\rangle = E_\alpha |\Psi_\alpha\rangle,$$

то

$$H a_\alpha^{(\pm)} |\Psi_\alpha\rangle = (E_\alpha \pm \omega_\alpha) |\Psi_\alpha\rangle,$$

т. е. $a_\alpha^{(\pm)}$ есть операторы рождения и уничтожения частиц с энергией ω_α .

Рассмотренная схема аналогична картине Фарри в квантовой электродинамике [7, 176].

Если в статическом пространстве—времени координаты таковы, что компоненты метрического тензора g_{ih} имеют особенности (как, например, в метрике Шварцшильда или Керра), то изложенный выше формализм неприменим. В таких случаях оказывается некорректной даже одночастичная задача; как показано в работах [235, 236], здесь возникают явления типа падения на центр в квантовой механике, и ситуация напоминает кулоновское поле точечного заряда с $Z > 137$ (см. гл. 8). Причиной подобных патологий является в данном случае неполнота статической системы координат. Квантование поля в нестатической метрике, описывающей гравитационный коллапс, рассмотрено в гл. 16.

Аналогично решается вопрос о корпускулярной интерпретации, когда пространство не статично, а лишь *стационарно* (т. е. имеется глобальный времениподобный вектор Киллинга ξ^i , но он не ортогонален к системе гиперповерхностей $\{\Sigma\}$). В этом случае координаты можно выбрать так, что g_{ih} по-прежнему не зависят от времени, но $g_{0\mu} \neq 0$. Математически строгое изложение описанной здесь конструкции можно найти в работах [230, 237, 238].

Если вектор Киллинга ξ^i в некоторых областях пространства перестает быть времениподобным, то построить пространство Фока со стабильным вакуумом невозможно [239]. Подобные ситуации возникают, например, при гравитационном коллапсе вращающихся звезд (см. гл. 16).

Остановимся еще на случае, когда задача о квантовании поля допускает постановку, аналогичную S -матричной задаче в плоском пространстве. Пусть пространство—время имеет топологию пространства Минковского и в нем имеется векторное поле ξ^i , которое

в достаточно отдаленном прошлом и будущем совпадает с полями Киллинга ζ_{\pm}^i . При этом можно ввести координаты, в которых метрический тензор при $x^0 \rightarrow \pm \infty$ стремится к независимым от x^0 значениям $\pm g_{ik}(x^\mu)$. Такое пространство — время называется асимптотически статическим.

Для уравнения поля в асимптотически статическом пространстве можно найти две системы базисных функций ψ_{α}^{\pm} , φ_{β}^{\pm} , таких, что $\psi_{\alpha}^{(\pm)}$ будут положительно- и отрицательно-частотными при $x^0 \rightarrow -\infty$ в смысле (11.12) с $\zeta^i = \zeta_{-}^i$, а $\varphi_{\beta}^{(\pm)}$ — при $x^0 \rightarrow +\infty$ с $\zeta^i = \zeta_{+}^i$. Действуя далее по методике, изложенной в гл. 5 для случая внешнего электромагнитного поля, можно построить корпускулярную интерпретацию в терминах in- и out-частиц. Отличие состоит лишь в том, что последние определяются теперь согласно изложенному выше формализму статического гравитационного поля.

Вероятности рождения пар даются соответствующими формулами из § 5.4, причем входящие в них коэффициенты преобразования Боголюбова $\Phi_{\alpha\beta}$ и $\Psi_{\alpha\beta}$ выражаются через решения классических уравнений поля в рассматриваемой метрике g_{ik} . При использовании в асимптотически статическом пространстве метода диагонализации гамильтониана результаты при $t \rightarrow +\infty$ совпадают с результатами, которые получаются в рамках изложенной выше корпускулярной интерпретации. Строгое изложение схемы квантования в асимптотически статической метрике дано в работе [240]. Теория безмассового поля в асимптотически плоском пространстве подробно излагается в обзоре [241].

Глава 12. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА КВАНТОВАННЫХ ПОЛЕЙ В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ—ВРЕМЕНИ

§ 12.1. Общие требования к регуляризованному тензору энергии-импульса

Как известно, наиболее важной величиной, характеризующей материю в общей теории относительности, является тензор энергии-импульса (ТЭИ), поскольку именно он играет роль источника гравитационного поля в уравнениях Эйнштейна

$$G_{ik} = R_{ik} - (1/2) g_{ik} R = -8\pi G T_{ik}. \quad (12.1)$$

Для учета обратного влияния квантованного поля на метрику (в пренебрежении квантовыми эффектами самой гравитации) в правую часть (12.1) можно подставить среднее от оператора ТЭИ рассматриваемого поля T_{ik} по соответствующему квантовому состоянию

$$G_{ik} = -8\pi G \langle \Psi | T_{ik} | \Psi \rangle. \quad (12.2)$$

Этот «полуклассический» подход аналогичен тому, который используется в квантовой электродинамике внешнего поля (см. гл. 9) и соответствует однопетловому приближению к полностью квантованной теории.

Итак, основными объектами нашего исследования должны быть средние $\langle \Psi | T_{ik} | \Psi \rangle$. Выше отмечалось, что для придания смысла подобным выражениям надо, во-первых, определить пространство состояний, элементом которого является $|\Psi\rangle$, и, во-вторых, устранить возникающую здесь расходимость. Первый вопрос проще всего решается в предположении, что пространство — время является асимптотически статическим в прошлом (см. § 11.3). Более общее решение, адекватное задачам космологии, дается в рамках метода диагонализации гамильтониана (см. § 11.2). Второй вопрос — о методах устранения расходимостей в средних $\langle \Psi | T_{ik} | \Psi \rangle$ — рассмотрен ниже. Здесь же мы предварительно обсудим общие требования, которым должны удовлетворять регуляризованные средние

$$\langle T_{ik} \rangle_{\text{reg}} = \text{reg} \langle \Psi | T_{ik} | \Psi \rangle.$$

Прежде всего, $\langle T_{ik} \rangle_{\text{reg}}$ должен быть причинным функционалом метрики, т. е. его значения в любой точке M пространства — времени должны зависеть только от геометрии в точке M и ее причинном прошлом (вообще говоря, этот функционал нелокален).

Далее, $\langle T_{ik} \rangle_{\text{reg}}$ должен обладать свойством консервативности

$$\nabla_k \langle T_i^k \rangle_{\text{reg}} = 0, \quad (12.3)$$

поскольку таким же свойством обладает тензор Эйнштейна G_{ik} в левой части (12.2). Отметим, что условие (12.3) не противоречит возможности рождения частиц: в ОТО свойство консервативности, вообще говоря, не означает сохранения соответствующей интегральной величины [88, 242].

Однако рождение классических частиц из вакуума гравитационным полем все же оказывается невозможным. В ОТО имеется теорема [54], гласящая, что если в замкнутой области пространства в некоторый момент $T_{ik} = 0$ и отсутствует поток вещества через границу области, то $T_{ik} = 0$ во все последующие моменты. Доказательство этого утверждения существенным образом базируется на предположении об энергодоминантности T_{ik} [54].

Говорят что ТЭИ удовлетворяет условиям энергодоминантности, если для любого времениподобного вектора u^i выполнены неравенства

$$T_{ik} u^i u^k \geq 0, \quad (12.4)$$

$$S_i S^i \geq 0, \quad (12.5)$$

где $S_i = T_{ik} u^k$. Если u^i — 4-скорость наблюдателя, то условие (12.4), называемое *слабым энергетическим условием*, означает отрицательность плотности энергии в его системе отсчета, а (12.5) означает, что локальный поток энергии непространственноподобен.

Эти условия эквивалентны утверждению, что в любом локальном ортонормированном координатном базисе компоненты ТЭИ удовлетворяют неравенству

$$T_{00} \geq |T_{ik}| \quad (12.6)$$

(отсюда название «энергодоминантность»).

ТЭИ всех известных форм классической материи относятся к одному из двух типов, которые в собственном базисе имеют канонический вид

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon & & & \\ & P_1 & & \\ & & P_2 & \\ & & & P_3 \end{pmatrix} \quad (12.7)$$

(тип 1) или

$$T_{ik} = \left(\begin{array}{cc|c} \mu & \pm\mu & 0 \\ \pm\mu & \mu & \\ \hline & & 0 \end{array} \right) \quad (12.8)$$

(тип 2; этим типом ТЭИ обладает безмассовое излучение, целиком распространяющееся вдоль оси x^1). Для ТЭИ типа 1 условие (12.6) выполняется при

$$\varepsilon \geq 0, \quad |P_\alpha| \leq \varepsilon \quad (12.9)$$

(оно гарантирует, что скорость звука в веществе не превосходит скорости света), а для типа 2 — при $\mu \geq 0$.

Классическое вещество в большинстве случаев подчиняется еще и так называемому *сильному энергетическому условию* [54]:

$$T_{ik} u^i u^k \geq (1/2) T_i^i \quad (12.10)$$

для любого единичного времениподобного вектора u^i . Для ТЭИ типа 1 оно выполняется, если

$$\varepsilon + \sum_{\alpha=1}^3 P_\alpha \geq 0, \quad \varepsilon + P_\alpha \geq 0, \quad (12.11)$$

а для ТЭИ типа 2 оно совпадает со слабым энергетическим условием ($\mu \geq 0$).

В квантовой теории как сильное энергетическое условие, так и условия энергодоминантности могут нарушаться. Например, в работе [243] приведена явная конструкция состояний $|\Psi\rangle$, в которых $\langle\Psi| T_{00} |\Psi\rangle < 0$ для свободного поля в пространстве Минковского. Примеры нарушения условий энергодоминантности дают ТЭИ различных квантованных полей на ограниченных многообразиях, рассматривавшиеся в гл. 4 в связи с эффектом Казимира. Поэтому упомянутая выше теорема о сохранении в замкнутой области равенства $T_{ik} = 0$ в квантовой теории неприменима. Более

того, как показано в работе [55] (см. также [244, 245]), рождение квантовых частиц из вакуума обязательно сопровождается нарушением условий энергодоминантности.

Физически нарушение условий энергодоминантности при рождении частиц объясняется тем, что вакуумные средние $\langle T_{ik} \rangle_{\text{reg}}$ содержат не только вклад рожденных частиц, но и поляризацию вакуума гравитационным полем [55], так что $\langle T_{ik} \rangle_{\text{reg}}$ нельзя рассматривать как ТЭИ классического вещества. Здесь следует заметить, что любое разделение $\langle T_{ik} \rangle_{\text{reg}}$ на ТЭИ рожденных частиц и поляризацию вакуума в нестационарном внешнем поле носит в значительной мере условный характер, что связано с неоднозначностью корпускулярной интерпретации квантованного поля.

В асимптотически плоском пространстве при $t \rightarrow \infty$ рождение частиц прекращается и поляризация вакуума исчезает. Условие энергодоминантности ТЭИ при этом восстанавливается и рожденные частицы ведут себя подобно обычному веществу.

В статической метрике рождения частиц не происходит. При этом $\langle T_{ik} \rangle_{\text{reg}}$ следует целиком интерпретировать как поляризацию вакуума гравитационным полем. Условия энергодоминантности и здесь могут нарушаться подобно тому, как это имеет место в эффекте Казимира.

В связи со сказанным интересно отметить, что условия энергодоминантности и условие (12.10) существенным образом входят в формулировки теорем Хокинга — Пенроуза о сингулярностях [54]. Поэтому возникает заманчивая возможность предотвратить появление сингулярностей в теории в результате учета квантовых эффектов. Подобная попытка «остановить» коллапс к сингулярности за счет рождения частиц в сжимающейся модели Фридмана была предпринята в работе [246] (см., однако, [247]), где показано, что предполагаемое в [246] специальное начальное состояние крайне маловероятно).

При некоторых естественных предположениях, включающих причинность и консервативность $\langle T_{ik} \rangle_{\text{reg}}$, можно доказать [248, 249], что любая регуляризация определяет среднее ТЭИ квантованного поля однозначно с точностью до локальных «геометрических» слагаемых, выражающихся через тензор кривизны и метрический тензор и удовлетворяющих условию консервативности* (12.3). Поскольку в плоском пространстве такие слагаемые во всяком случае обращаются в нуль, то в асимптотически плоской метрике ТЭИ рожденных частиц определяется единственным образом.

В общем случае в $\langle T_{ik} \rangle_{\text{reg}}$ присутствуют конечные локальные слагаемые «геометрического» происхождения. Их естественно интерпретировать как поляризацию вакуума гравитационным полем. По аналогии с электродинамикой (см. § 9.1) их можно перенести в левую часть (12.2) и рассматривать как квантовые поправки к уравнениям Эйнштейна. При этом поправки, содержащие производные от g_{ik} выше второй (например, $g_{ik} \nabla^l \nabla_l R$), могут привести к качественному изменению решений уравнений Эйнштейна независимо от величины

стоящих при них коэффициентов [248, 249] и, следовательно, к радикальному изменению ОТО.

При построении теории квантованных полей в римановом пространстве важную роль играют соображения, связанные с конформной инвариантностью.

В гл. 1 отмечалось, что классические уравнения для безмассовых полей со спином $0, 1/2$ и 1 инвариантны относительно конформных преобразований метрики $g_{ik} \rightarrow \exp(2\sigma(x)) g_{ik}$ [уравнение Клейна — Гордона — Фока этим свойством обладает только в варианте (1.16), а электромагнитное поле конформно-инвариантно лишь в четырехмерном пространстве — времени]. Отсюда сразу следует, что в конформно-плоском пространстве с метрикой

$$ds^2 = \exp(2\sigma(x)) ds_0^2, \quad (12.12)$$

где $\sigma(x)$ — произвольная гладкая функция координат, а ds_0^2 — метрика плоского пространства — времени, рождения безмассовых частиц не происходит [228, 219] (это утверждение не распространяется на гравитоны, уравнение которых не является конформно-инвариантным [250]).

В то же время как показывают проведенные различными методами расчеты (см., например, [86, 251—255]), гравитационное поле, описываемое конформно-плоской метрикой (12.10), приводит к отличной от нуля поляризации вакуума конформно-инвариантных полей. При этом если ТЭИ классических полей обладает при $m = 0$ нулевым следом, то след $\langle T_{ik} \rangle_{\text{reg}}$, вообще говоря, оказывается отличным от нуля.

Впервые подобное явление обнаружено в работах [256, 257] при использовании метода размерной регуляризации в теории возмущений; оно получило название *конформной аномалии*. Подтверждение существования аномального следа было дано в многочисленных работах при использовании различных методов регуляризации вне рамок теории возмущений [76, 86, 251—255, 258—269] (заметим, однако, что в частном случае конформно-плоского пространства теорию безмассового скалярного поля можно построить с сохранением конформной инвариантности на каждом этапе; при этом конформных аномалий не возникает [13, 119, 228, 229]). В § 12.3 конформные аномалии рассмотрены более подробно.

Здесь обсуждались общие требования к регуляризованным средним ТЭИ. Перейдем теперь непосредственно к проблеме получения $\langle T_{ik} \rangle_{\text{reg}}$ и интерпретации регуляризационной процедуры в терминах перенормировок.

§ 12.2. Анализ расходимостей

Общие принципы устранения расходимостей при квантовании полей во внешнем гравитационном поле такие же, как в квантовой электродинамике. Прежде всего надо регуляризовать расходящиеся

выражения, т. е. тем или иным способом выделить из них бесконечные части так, чтобы после их отбрасывания получались конечные значения наблюдаемых, удовлетворяющие общим физическим требованиям. Затем отбрасыванию бесконечных частей следует дать оправдание в терминах перенормировок констант взаимодействия в лагранжиане поля.

Возможность такой процедуры в случае внешнего гравитационного поля обеспечивается тем, что ультрафиолетовые расходимости определяются характером пространства — времени на малых расстояниях и, следовательно, не зависят от его глобальных свойств. Иными словами, расходящаяся часть эффективного лагранжиана квантованного поля является чисто локальным объектом. Ниже показано, что она содержит слагаемые, пропорциональные $\sqrt{-g}$, $\sqrt{-g}R$, и квадратичные по тензору кривизны члены. Это позволяет интерпретировать устранение расходимостей как перенормировку констант в обобщенном затравочном лагранжиане гравитационного поля, который можно записать в виде

$$\mathcal{L}_{gr, 0} = \sqrt{-g} \left[-\Lambda_0 + \frac{1}{16\pi G_0} R + \alpha_0 \left(R^{ik} R_{ik} - \frac{1}{3} R^2 \right) + \beta_0 R^2 \right], \quad (12.13)$$

где Λ_0 , G_0 , α_0 и β_0 — затравочные (голые) значения соответственно космологической постоянной, гравитационной постоянной и коэффициентов перед квадратичными членами. Заметим, что рассмотрение лагранжиана (12.13) означает выход за рамки ОТО в затравочной теории. Значения ренормированных констант Λ_{ren} , G_{ren} , α_{ren} , β_{ren} должны определяться из эксперимента. Возможно, что $\Lambda_{ren} = \alpha_{ren} = \beta_{ren} = 0$. Следует иметь в виду, что классическая теория гравитации с α , $\beta \neq 0$ отличается от ОТО радикальным образом (в частности, уравнения поля в ней содержат производные четвертого порядка от g_{ik}).

При квантовании во внешнем гравитационном поле вне рамок теории возмущений между задачами устранения расходимостей и интерпретации регуляризации в терминах перенормировок имеется определенное методическое противоречие. Дело в том, что перенормировочная процедура, очевидно, должна быть общековариантной. В то же время при получении конечных средних значений наблюдаемых приходится работать с конкретными моделями и использовать определенные координаты. Контролировать общековариантный вид результатов и выявлять локальные геометрические члены бывает при этом затруднительно.

Большинство имевшихся до недавнего времени ковариантных схем устранения расходимостей (см., например, [215, 270, 271]) по существу применимы лишь к случаю слабого гравитационного поля в асимптотически плоском пространстве, когда возможна S -матричная постановка задачи. В то же время пригодные для произвольно сильного поля метод регуляризации Зельдовича — Старобинского [272] и эквивалентный ему метод адиабатической регу-

ляризации [273, 274], требующие знания полной системы решений уравнения квантуемого поля в данной метрике, первоначально не имели строгого оправдания в рамках теоретико-полевого формализма.

В последние годы появились многочисленные работы, посвященные проблеме устранения расходимостей в теории квантованных полей во внешнем гравитационном поле как в общей постановке, так и в связи с приложениями к космологии и физике черных дыр [60, 86, 119, 249, 251—255, 258—261, 265—269, 274—280]. При этом результаты, полученные различными методами, согласуются между собой.

В настоящем параграфе изложена общая схема исследования характера расходимостей средних значений ТЭИ с помощью метода собственного времени Фока — Швингера — де Витта, а в следующем — рассмотрены различные методы регуляризации и связь между ними. В гл. 13, 15 эти методы используются в задачах космологии.

Для изучения характера расходимостей удобно предположить, что пространство — время является асимптотически статическим, так что можно ввести фоковские пространства состояний F_{in} и F_{out} . Как будет видно из дальнейшего, если метрика пространства — времени всюду регулярна (\dot{g}_{ik} являются гладкими функциями координат), то расходимости имеют чисто локальный характер, так что результаты не зависят от предположения об асимптотической статичности.

Наибольший интерес для нас представляют средние вида $\langle \Psi_{in} | T_{ik}(x) | \Psi_{in} \rangle$, где $|\Psi_{in}\rangle \in F_{in}$. Фактически достаточно изучить расходимости в вакуумных средних $\langle 0_{in} | T_{ik} | 0_{in} \rangle$, поскольку разность между ними и средними по произвольному состоянию всегда конечна и ее легко вычислить.

С использованием формул (5.34), (5.38) и (5.46) вакуумное среднее $\langle 0_{in} | T_{ik}(x) | 0_{in} \rangle$ можно выразить через матричный элемент оператора $T_{ik}(x)$ между in- и out-вакуумами:

$$\langle 0_{in} | T_{ik}(x) | 0_{in} \rangle = \langle 0_{out} | T_{ik}(x) | 0_{in} \rangle / \langle 0_{out} | 0_{in} \rangle - \sum_{\alpha, \beta} (\Phi^{T^{-1}} \Psi^+)_{\alpha\beta} T_{ik} \{ \psi_{\alpha}^{(+)}(x), \psi_{\beta}^{(+)}(x) \}, \quad (12.14)$$

где Φ, Ψ — матрицы преобразования Боголюбова между in- и out-операторами; $\psi_{\alpha}^{(+)}$ — положительно-частотные в in-области одночастичные базисные функции; $T_{ik} \{f, g\}$ — квадратичная форма, определяемая классическим ТЭИ. Все расходимости содержатся в первом слагаемом (12.14). Второе слагаемое всегда конечно и при отсутствии рождения частиц обращается в нуль. Поэтому достаточно изучить первое слагаемое в (12.14)

$$\langle 0_{out} | T_{ik} | 0_{in} \rangle / \langle 0_{out} | 0_{in} \rangle \equiv \langle T_{ik} \rangle_M. \quad (12.15)$$

Пусть δg_{ik} — вариация метрики, обращающаяся в нуль в i -и out -областях пространства—времени. Следуя работе [90], определим оператор действия равенством

$$\delta \langle 0_{out} | 0_{in} \rangle = i \langle 0_{out} | \delta S | 0_{in} \rangle. \quad (12.16)$$

При этом оператор ТЭИ

$$T_{ik} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{ik}}. \quad (12.17)$$

Матричный элемент $\langle T_{ik} \rangle_M$ можно получить вариацией по метрике эффективного действия $W^{(1)}$

$$\langle T_{ik} \rangle_M = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta W^{(1)}}{\delta g^{ik}}, \quad (12.18)$$

равного

$$W^{(1)} = -i \ln \langle 0_{out} | 0_{in} \rangle, \quad (12.19)$$

которое определяется соответствующим эффективным лагранжианом $\mathcal{L}^{(1)}$:

$$W^{(1)} = \int d^4x \mathcal{L}^{(1)}. \quad (12.20)$$

Таким образом, исследование расходимостей в вакуумных средних ТЭИ сводится к исследованию расходимостей эффективного лагранжиана.

Чтобы найти $\mathcal{L}^{(1)}$, воспользуемся обобщением де Витта [60, 281] метода собственного времени Фока—Швингера [89, 177] на случай внешнего гравитационного поля. Для определенности рассмотрим скалярное поле, описываемое лагранжианом $\mathcal{L}^{(0)}$ (1.21). Значение константы конформной связи ξ пока фиксировать не будем.

Введем причинную функцию Грина

$$G(x, x') = i \frac{\langle 0_{out} | T_i \{ \Phi(x), \Phi(x') \} | 0_{in} \rangle}{\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle} \quad (12.21)$$

(T — символ хронологического упорядочения), удовлетворяющую уравнению

$$\sqrt{-g} (\nabla^i \nabla_i + m^2 + \xi R) G(x, x') = \delta(x, x'). \quad (12.22)$$

Здесь $\delta(x, x')$ — δ -функция в римановом пространстве [которая по трансформационным свойствам является скалярной плотностью, т. е. $\int d^4x' f(x') \delta(x, x') = f(x)$]. Функцию $G(x, x')$ можно представить в виде

$$G(x, x') = G^{(s)}(x, x') + (i/2) G^{(1)}(x, x'), \quad (12.23)$$

где $G^{(s)} = (G_{adv} + G_{ret})/2$, а $G^{(1)}$ — симметричное решение однородного уравнения Клейна — Гордона — Фока, называемое функцией Адамара и определяемое равенством

$$G^{(1)}(x, x') = \langle 0_{out} | [\Phi(x), \Phi(x')]_+ | 0_{in} \rangle / \langle 0_{out} | 0_{in} \rangle. \quad (12.24)$$

В плоском пространстве—времени G , $G^{(s)}$ и $G^{(1)}$ переходят в функции, обозначенные в книге [6] D^c , D^s , D^1 .

Перейдем от $G(x, x')$ к

$$\tilde{G}(x, x') = (-g(x))^{1/4} G(x, x') (-g(x'))^{1/4}, \quad (12.25)$$

где $g(x)$ — определитель метрического тензора в точке x , и представим $\tilde{G}(x, x')$ (см. § 9.1) в виде матричного элемента некоторого оператора

$$\tilde{G}(x, x') = \langle x | \tilde{G} | x' \rangle. \quad (12.26)$$

При этом будем предполагать, что векторы $|x\rangle$ нормированы условием $\langle x | x' \rangle = \delta(x, x')$ и, таким образом, имеют трансформационные свойства плотности веса $1/2$. Именно это обстоятельство диктует введение множителей $(-g)^{1/4}$ в (12.25). Обратный к \tilde{G} оператор \tilde{F} определяется равенством $\tilde{F}\tilde{G} = 1$ и имеет координатное представление

$$\tilde{F} = (-g)^{1/4} \nabla^i \nabla_i (-g)^{-1/4} + m^2 + \xi R. \quad (12.27)$$

Представим \tilde{G} в виде интеграла по «собственному времени» s (ср. § 9.1):

$$\tilde{G} = \frac{1}{\tilde{F} - i0} = i \int_0^\infty ds \exp(-i \tilde{F} s). \quad (12.28)$$

Возвращаясь к координатному представлению (12.26), можно написать:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(x, x') &= i \int_0^\infty ds \langle x(s) | x(0)' \rangle, \\ \langle x(s) | x(0)' \rangle &= \langle x | \exp(-is \tilde{F}) | x' \rangle. \end{aligned} \quad (12.29)$$

Функция преобразования $\langle x(s) | x(0)' \rangle$ удовлетворяет уравнению типа Шредингера по собственному времени s :

$$i \frac{\partial}{\partial s} \langle x(s) | x(0)' \rangle = (\nabla^i \nabla_i + m^2 + \xi R) \langle x(s) | x(0)' \rangle \quad (12.30)$$

и начальному условию

$$\langle x(s) | x(0)' \rangle|_{s=0} = \langle x | x' \rangle = \delta(x, x'). \quad (12.31)$$

Найти решение уравнения (12.30) в замкнутом виде [как и аналогичного уравнения (9.4) в электродинамике] удастся только в исключительных случаях, например для пространства де Ситтера [280]. Чтобы установить характер расходимостей в $\mathcal{L}^{(1)}$, достаточно изучить поведение $G(x, x')$ при сближении x и x' , для чего воспользуемся ВКБ-приближением. Заметим, однако, что при этом мы пол-

ностью потеряем информацию о мнимой части функции $G^{(1)}$, которая, вообще говоря, отлична от нуля и связана с рождением частиц.

ВКБ-решение уравнения (12.30) с начальным условием (12.31) ищем в виде [60, 281]

$$\langle x(s) | x(0)' \rangle = -\frac{i}{(4\pi s)^2} D^{1/2}(x, x') \Omega(x, x'; s) \times \exp \left[-i \left(\frac{\sigma}{2s} + m^2 s \right) \right], \quad (12.32)$$

где Ω — функция, подлежащая определению; $\sigma = \sigma(x, x')$ — геодезический интервал (определяемый как половина квадрата длины геодезической, соединяющей x и x'); $D(x, x')$ — так называемый определитель Ван Флека

$$D(x, x') = -\det \left(\frac{\partial^2 \sigma(x, x')}{\partial x^i \partial x'^k} \right). \quad (12.33)$$

Функции $\sigma(x, x')$ и $D(x, x')$ симметричны по своим аргументам и удовлетворяют уравнениям

$$\partial^i \sigma \partial_i \sigma = 2\sigma, \quad \nabla^i (D \partial_i \sigma) = 4D, \quad (12.34)$$

причем

$$\sigma(x, x) = 0, \quad D(x, x) = -\det g_{ik} = -g(x). \quad (12.35)$$

Функция $\sigma(x, x')$, вообще говоря, неоднозначна: может существовать несколько геодезических, соединяющих x и x' . В таком случае в (12.32) следует брать то ее значение, которое минимально при достаточно близких x и x' .

Подставляя (12.32) в (12.30), получаем уравнение для функции $\Omega(x, x'; s)$:

$$i \frac{\partial \Omega}{\partial s} + \frac{i}{s} \partial^k \Omega \partial_k \sigma + D^{-1/2} \nabla^k \nabla_k (D^{1/2} \sigma) + \xi R \Omega = 0. \quad (12.36)$$

Его решение будем искать в виде ряда по степеням is :

$$\Omega(x, x'; s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, x') (is)^n. \quad (12.37)$$

В силу (12.31) и (12.32) $a_0(x, x') = \Omega(x, x'; 0) = 1$. Для остальных коэффициентов подстановка (12.37) в (12.36) дает рекуррентные уравнения

$$(\partial^k \sigma \partial_k + n) a_n(x, x') + \Delta^{-1/2} \nabla^k \nabla_k (\Delta^{1/2} a_{n-1}(x, x')) + \xi R a_{n-1}(x, x') = 0, \quad (12.38)$$

где производные берутся по аргументу x и введено обозначение

$$\Delta = \Delta(x, x') = (-g(x))^{-1/2} D(x, x') (-g(x'))^{-1/2}. \quad (12.39)$$

В дальнейшем нам понадобятся значения $a_n(x, x')$ при совпадающих аргументах. Непосредственное вычисление [267, 281] дает

$$a_1 \equiv a_1(x, x) = (1/6 - \xi) R,$$

$$a_2 \equiv a_2(x, x) = \frac{1}{180} (R^{iklm} R_{iklm} - R^{i\#} R_{i\#}) -$$

$$- \frac{1}{6} \left(\frac{1}{5} - \xi \right) \nabla^k \nabla_k R + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} - \xi \right)^2 R^2. \quad (12.40)$$

Подставляя (12.32) с Ω в виде (12.37) в (12.29) и переходя от \tilde{G} к G согласно (12.25), получаем

$$G(x, x') = \frac{\Delta^{1/2}}{(4\pi)^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, x') i^n \int_0^{\infty} ds s^{n-2} \exp \left[-i \left(m^2 s + \frac{\sigma}{2s} \right) \right] =$$

$$= \frac{\Delta^{1/2}}{16\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, x') \left(\frac{\sigma}{2m^2} \right)^{(n-1)/2} H_{n-1}^{(2)}(\sqrt{2m^2 \sigma}), \quad (12.41)$$

где $H_{\nu}^{(2)}(z)$ — функции Ханкеля второго рода. Интеграл в (12.41) понимается как предельное значение аналитической в нижней полуплоскости функции, т. е. подразумевается $\sigma = \sigma - i0$, $m^2 = m^2 - i0$. Нетрудно проверить, что в плоском пространстве отличен от нуля только первый член суммы (12.41), который совпадает с обычной причинной функцией Грина D^c в определении [6]. Коэффициенты $a_n(x, x')$ по порядку величины равны $a_n(x, x') \sim \rho^{-2n}$, где ρ — характерный радиус кривизны пространства — времени [см. (11.3)]; убедиться в этом проще всего с помощью уравнения (12.38), вводя в метрику масштабный фактор. Поэтому ряд (12.41) можно рассматривать как разложение $G(x, x')$ по степеням $(m\rho)^{-2} = (l_c/\rho)^2$ (l_c — комptonовская длина).

Нам понадобится асимптотика функции $G^{(1)}(x, x')$ при $\sigma \rightarrow 0$. Для ее нахождения следует разложить функции Ханкеля в (12.41) в степенной ряд и в полученном разложении игнорировать добавку $-i0$. В результате имеем

$$G^{(1)}(x, x') = \frac{\Delta^{1/2} m^2}{4\pi^2} \left\{ -\frac{1}{m^2 \sigma} + L \left(1 - \frac{m^2 \sigma}{4} \right) - \frac{1}{2} + \right.$$

$$+ \frac{5}{16} m^2 \sigma + \dots - \frac{a_1(x, x')}{m^2} \left[L \left(1 - \frac{m^2 \sigma}{2} \right) + \frac{m^2 \sigma}{2} + \dots \right] +$$

$$\left. + \frac{a_2(x, x')}{m^4} \left[\frac{1}{2} - \frac{L m^2 \sigma}{2} + \frac{m^2 \sigma}{4} + \dots \right] + \dots \right\}, \quad (12.42)$$

где $L = (1/2) \ln \left| \frac{1}{2} m^2 \sigma \right| + C$, $C = 0,577 \dots$ — постоянная Эйлера. Здесь выписаны члены до $O(m^2 \sigma)$ и $O((m\rho)^{-4})$ включительно.

Обращает на себя внимание, что при конформной связи ($\xi = = 1/6$) структура сингулярностей функции Грина та же, что и в плоском пространстве, поскольку в этом случае $a_1 = 0$ [282].

Продолжим теперь вычисление эффективного лагранжиана $\mathcal{L}^{(1)}$. С помощью (12.16) и (12.24) можно показать [60], что вариация $\delta W^{(1)}$ равна

$$\delta W^{(1)} = \frac{1}{4} \lim_{x' \rightarrow x} \int d^4 x \langle x | \tilde{G}^{(1)} \delta \tilde{F} | x \rangle.$$

Используя (12.28) и (12.29), это выражение можно представить в виде полной вариации (см. § 9.1), если считать, что в G заменяется $\sigma - i0 \rightarrow \sigma$:

$$\delta W^{(1)} = -\frac{i}{2} \lim_{x' \rightarrow x} \delta \int_0^\infty \frac{ds}{s} \langle x(s) | x(0)' \rangle.$$

Это позволяет выразить эффективный лагранжиан $\mathcal{L}^{(1)}$ в виде интеграла по собственному времени от пропагатора (12.32) при $x' \rightarrow x$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(1)} &= -\frac{1}{32\pi^2} \lim_{x' \rightarrow x} D^{1/2}(x, x') \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} \exp \left[-i \left(m^2 s + \frac{\sigma}{2s} \right) \right] \times \\ &\times \Omega(x, x'; s) = -\frac{\sqrt{-g}}{32\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} \exp(-im^2 s) \Omega(x, x; s). \end{aligned} \quad (12.43)$$

Из (12.37) видно, что при мнимых s функция Ω принимает вещественные значения. Повернем контур интегрирования в (12.43) на угол $-\pi/2$. Если $\Omega(x, x; s)$ имеет полюса при $\text{Im } s < 0$, контур за них «зацепится» и они дадут в (12.43) конечный вклад, который соответствует рождению частиц (см. [89]). Расходимости будут содержаться в интеграле по мнимой оси

$$\mathcal{L}^{(1)'} = \frac{\sqrt{-g}}{32\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^2} \exp(-m^2 \tau) \Omega(x, x; -i\tau). \quad (12.44)$$

Для выделения расходимостей воспользуемся ВКБ-разложением (12.37). Бесконечный вклад дают первые три слагаемых

$$\mathcal{L}_{\text{div}}^{(1)} = \frac{\sqrt{-g}}{32\pi^2} \{ m^4 \mathcal{Y}_3 + m^2 a_1 \mathcal{Y}_2 + a_2 \mathcal{Y}_1 \}, \quad (12.45)$$

где коэффициенты a_1 и a_2 определяются равенствами (12.40), а \mathcal{Y}_n — расходящиеся интегралы

$$\mathcal{Y}_n = \int_0^\infty dz z^{-n} \exp(-z).$$

Воспользуемся тем, что интеграл

$$\mathcal{G} = \int d^4 x \sqrt{-g} (R^{iklm} R_{iklm} - 4R^{ik} R_{ik} + R^2) \quad (12.46)$$

является топологическим инвариантом (аналогичным двумерному инварианту Гаусса — Бонне), т. е. $\delta\mathcal{G}/\delta g_{ik} = 0$. Это позволяет отбросить в (12.45) вклад, пропорциональный \mathcal{G} . Точно так же можно отбросить вклад 4-дивергенции $\nabla^k \nabla_k R$. В результате получим

$$\mathcal{L}_{\text{div}}^{(1)} = \sqrt{-g} \left[-\Lambda_\infty + \frac{1}{16\pi G_\infty} R + \alpha_\infty \left(R^{ik} R_{ik} - \frac{1}{3} R^2 \right) + \beta_\infty R^2 \right], \quad (12.47)$$

где Λ_∞ , G_∞^{-1} , α_∞ , β_∞ — бесконечные константы, обозначения для которых диктуются сравнением (12.13) и (12.47). Они связаны с расходящимися интегралами \mathcal{Y}_n в (12.45) равенствами:

$$\begin{aligned} \Lambda_\infty &= -\frac{m^4}{32\pi^2} \mathcal{Y}_3; & G_\infty^{-1} &= \frac{m^2}{2\pi} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \mathcal{Y}_2; \\ \alpha_\infty &= \frac{1}{1920\pi^2} \mathcal{Y}_1; & \beta_\infty &= \frac{1}{64\pi^2} \left(\xi - \frac{1}{6} \right)^2 \mathcal{Y}_1. \end{aligned}$$

Очевидно, что устранение расходимостей в эффективном лагранжиане $\mathcal{L}^{(1)}$ можно истолковать как перенормировку космологической постоянной Λ_0 , гравитационной постоянной G_0 и коэффициентов α_0 и β_0 в затравочном лагранжиане гравитационного поля (12.13). Значения физических (ренормированных) констант Λ_{ren} , G_{ren} , α_{ren} и β_{ren} должны быть определены экспериментально.

Заметим, что при $\xi = 1/6$ (конформная связь) $G_\infty^{-1} = 0$, $\beta_\infty = 0$.

Выпишем выражение для расходящейся части вакуумного среднего ТЭИ:

$$\begin{aligned} \langle T_{ik} \rangle_{\text{div}} &= \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{ik}} \int d^4 x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{div}}^{(1)} = \\ &= \Lambda_\infty g_{ik} + \frac{1}{16\pi G_\infty} G_{ik} + \alpha_\infty {}^{(2)}H_{ik} + \left(\beta_\infty - \frac{1}{3} \alpha_\infty \right) {}^{(1)}H_{ik}, \quad (12.48) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} {}^{(1)}H_{ik} &= \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{ik}} \int d^4 x \sqrt{-g} R^2 = \\ &= 2(\nabla_i \nabla_k R - g_{ik} \nabla^l \nabla_l R) + 2R \left(R_{ik} - \frac{1}{4} R g_{ik} \right); \\ {}^{(2)}H_{ik} &= \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{ik}} \int d^4 x \sqrt{-g} R^{lm} R_{lm} = \\ &= \nabla_i \nabla_k R - \nabla^l \nabla_l R_{ik} - \frac{1}{2} (\nabla^l \nabla_l R + R^{lm} R_{lm}) g_{ik} + 2R^{lm} R_{lkm}. \end{aligned} \quad (12.49)$$

Рассмотрим ситуацию, возникающую для безмассового поля. При $m = 0$ интеграл \mathcal{Y}_1 в (12.45) расходится не только на нижнем, но и на верхнем пределе (что соответствует инфракрасной расходимости в импульсном пространстве). Эту расходимость нельзя включать в \mathcal{L}_{div} , так как это привело бы к появлению такой же расходимости в \mathcal{L}_{ren} . Устранить ее можно введением обрезания при $\tau = \tau_m$. Значение τ_m произвольно: его изменение приведет к конечной перенормировке константы α_0 .

Для спинорного и векторного полей получаются результаты, подобные (12.47) и (12.48). Значения коэффициентов, аналогичных a_1, a_2 , для этих случаев приведены в работах [265, 281]. Отметим, что здесь уже $G_\infty^{-1} \neq 0$.

Остановимся еще на важном частном случае пространства — времени, метрика которого имеет вид

$$ds^2 = H(u, y, z) du^2 + 2 dudv - dy^2 - dz^2,$$

$$H(u, y, z) = (y^2 - z^2) f(u) + 2 yz g(u),$$

где u, v — нулевые (световые) координаты, а f, g — произвольные гладкие функции с компактным носителем. Эта метрика описывает плоскую гравитационную волну типа сандвича, распространяющуюся в направлении $x = (v - u)/2$ [54]. В работе [279] показано, что такое гравитационное поле не рождает частиц и не вызывает поляризации вакуума. Отсутствие рождения частиц объясняется существованием в этом случае глобального светоподобного вектора Киллинга $\partial/\partial v$. Что касается поляризации вакуума, то ее не возникает по той причине, что все инварианты тензора кривизны здесь равны нулю. В этом отношении гравитационная плоская волна ведет себя вполне аналогично электромагнитной (см. § 9.1).

Таким образом, структура расходимостей тензора энергии-импульса установлена. Конечный перенормированный лагранжиан $\mathcal{L}_{\text{ren}} = \mathcal{L}^{(1)'} - \mathcal{L}_{\text{div}}^{(1)}$ описывает поляризацию вакуума гравитационным полем (мы исключили часть, соответствующую рожденным реальным частицам). С помощью ВКБ-разложения (12.37) можно получить поправки, аналогичные поправкам Гейзенберга — Эйлера в электродинамике (9.1). Однако их область применимости ограничивается слабыми полями, для которых характерная кривизна пространства — времени $\rho^{-1} \ll m$. Для получения регуляризованных средних ТЭИ в случае сильных гравитационных полей надо использовать более эффективные методы регуляризации, описанные в § 12.3.

§ 12.3. Методы регуляризации

В § 12.2 показано, что расходимости в средних ТЭИ имеют локальный характер и что их можно устранить с помощью перенормировок в лагранжиане гравитационного поля. Рассмотрим теперь различные методы регуляризации, пригодные для сильного гравитационного поля.

Одним из наиболее эффективных является метод Зельдовича — Старобинского [272], который суть модификация метода Паули—Вилларса. Он состоит в следующем.

Пусть $\{\psi_\lambda^{(\pm)}(x)\}$ — набор положительно- и отрицательно-частотных решений классического уравнения поля, нумеруемых непрерывным импульсным квантовым числом λ (и, возможно, другими квантовыми числами, которые, как и спиновые индексы, здесь опущены).

В § 4.1 показано, что среднее оператора ТЭИ по вакууму $|0\rangle$ представляется в виде

$$\langle 0 | T_{ik} | 0 \rangle = \int d\mu(\lambda) T_{ik} \{\psi_\lambda^{(-)}(x), \psi_\lambda^{(+)}(x)\}, \quad (12.50)$$

где $T_{ik}\{f, g\}$ — билинейная форма классического ТЭИ, а $d\mu(\lambda)$ — мера на множестве квантовых чисел (возможную в неоднородном пространстве—времени зависимость от координат мы ниже выписывать не будем). В результате вычисления $T_{ik}\{\psi_\lambda^{(-)}, \psi_\lambda^{(+)}\}$ придем к расходящемуся интегралу вида

$$\langle 0 | T_{ik} | 0 \rangle = \int d\lambda \tau_{ik}(\lambda, m), \quad (12.51)$$

где m — масса поля, который следует регуляризовать. Согласно [272], каждой моде $\psi_\lambda^{(\pm)}$ сопоставляется « h -мода», $h^{-1/2} \psi_{h\lambda}^{(\pm)}$; для нее

$$\tau_{ik}^{(h)}(\lambda, m) = (1/h) \tau_{ik}(h\lambda, hm). \quad (12.52)$$

Регуляризация интеграла (12.51) осуществляется регуляризацией вклада каждой моды

$$\tau_{ik}^{\text{reg}}(\lambda, m) = \lim_{h \rightarrow \infty} \left\{ \tau_{ik}(\lambda, m) - \sum_{n=0}^2 \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial (h^{-2})^n} \tau_{ik}^{(h)}(\lambda, m) \right\}, \quad (12.53)$$

$$\langle T_{ik} \rangle_{\text{reg}} = \int d\lambda \tau_{ik}^{\text{reg}}(\lambda, m).$$

Этот метод по своей конструкции обеспечивает консервативность результата.

Если спектр λ дискретный (например, когда 3-пространство замкнуто), процедура (12.53) требует некоторой модификации. Дело в том, что хотя в этом случае в (12.51) стоит сумма по дискретным λ , вычитать в (12.53) все равно следует интегралы того же вида от $\tau_{ik}^{(h)}$ и первых двух производных. Причина этого заключается в том, что расходимости (см. § 12.2) всегда связаны с локальными свойствами пространства—времени и не зависят от его глобальных, в частности топологических, характеристик [грубо говоря, можно считать, что в h -модах (12.52) при $h \rightarrow \infty$ исчезает разница между дискретным и непрерывным спектром]. Таким образом, вместо (12.53) мы теперь должны считать

$$\langle T_{ik} \rangle_{\text{reg}} = \lim_{h \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{\lambda} \tau_{ik}(\lambda, m) - \int d\lambda \sum_{n=0}^2 \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial (h^{-2})^n} \tau_{ik}^{(h)}(\lambda, m) \right\}. \quad (12.54)$$

Разность между расходящейся суммой и расходящимся интегралом в (12.54) следует понимать так, как было объяснено в гл. 4, и можно вычислять с помощью описанных там методов. Следует заметить, что использованная там регуляризация является частным случаем изложенного здесь метода.

Методу Зельдовича — Старобинского эквивалентен метод «адиабатической регуляризации» [273, 274], основанный на введении параметра адиабатичности изменения метрики и вычитании из (12.50) первых членов асимптотического разложения T_{ik} по обратным степеням этого параметра. В работе [60] показано, что оба эти метода дают те же результаты, что и подход Швингера В гл. 13 и 15 метод Зельдовича — Старобинского применен в конкретных ситуациях.

Другой способ регуляризации — это метод раздвижения аргументов операторов поля в билинейной форме ТЭИ [60, 86, 252, 267, 268].

Вариант этого метода [86, 252], основанный на раздвижении аргументов в разложении вакуумного среднего ТЭИ по собственным функциям, мы использовали в гл. 4. В римановом пространстве при построении выражения (4.67) надо учитывать правило переноса производных в операторе ТЭИ вдоль геодезической, соединяющей раздвинутые точки. В пространстве—времени размерности $n > 2$ этот метод технически очень сложен. К тому же для придания результатам общеквариантного характера необходимо отождествить слагаемые, состоящие из компонент g_{ik} и их производных, с комбинациями тензора кривизны и его сверток, а такая процедура в случае $n > 2$ неоднозначна. При этом для получения консервативного конечного результата приходится отбрасывать конечные члены, зависящие от направления раздвижения.

Оправдание отбрасыванию подобных членов дает несколько более общий подход, развитый в работах [87, 267, 268]. В этих работах вычисляется матричный элемент (12.15) с раздвинутыми аргументами у операторов поля с помощью определенной в (12.24) функции Грина $G^{(1)}(x, x')$. Например, для скалярного поля с конформной связью, классический ТЭИ которого дается формулой (1.23) с $\xi = 1/6$, указанный матричный элемент есть

$$\begin{aligned} \langle T_{ik} \rangle_M = \lim_{x' \rightarrow x} & \left[\frac{1}{6} (\nabla_i \nabla_{k'} + \nabla_{i'} \nabla_k) - \frac{1}{12} g_{ik} \nabla^{i'} \nabla_i - \right. \\ & \left. - \frac{1}{12} (\nabla_i \nabla_k + \nabla_{i'} \nabla_{k'}) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{48} g_{ik} (\nabla^i \nabla_i + \nabla^{i'} \nabla_{i'}) + \frac{1}{12} \left(R_{ik} - \frac{1}{4} R g_{ik} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{8} m^2 g_{ik} \right] G^{(1)}(x, x'). \end{aligned} \quad (12.55)$$

Выделение в (12.55) бесконечной части $\langle T_{ik} \rangle_{\text{div}}$ проводится методом Швингера с использованием асимптотического разложения

(12.42), параметром которого является геодезический интервал $\sigma(x, x')$ [использованный в гл. 4 вектор раздвижения τ^i — см. (4.69) — связан с $\sigma(x, x')$ соотношением $\tau^i = \nabla^{i'} \sigma(x, x')$]. В $\langle T_{ik} \rangle_{\text{div}}$ включаются те члены разложения $\langle T_{ik} \rangle_M$ по степеням σ , которые содержат коэффициенты a_0, a_1 и a_2 и по параметру m^2 имеют порядок $O(m^0)$ и выше.

Лагранжиан, которому соответствует определенный таким образом $\langle T_{ik} \rangle_{\text{div}}$, получается, если в (12.43) выполнить интегрирование по s до предельного перехода $x' \rightarrow x$:

$$\mathcal{L}^{(1)} = -\frac{1}{2} \lim_{x' \rightarrow x} \frac{\partial}{\partial \sigma} \tilde{G}^{(1)}(x, x'),$$

а для $\tilde{G}^{(1)}$ воспользоваться разложением (12.42)

$$\mathcal{L}_{\text{div}}^{(1)} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{D^{1/2} m^4}{8\pi^2} \left\{ \frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{2\delta} - \frac{1}{4} L + \frac{3}{16} - \frac{a_1(x, x')}{m^2} \left(\frac{1}{2\delta} - \frac{1}{2} L + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{2} \frac{a_2(x, x')}{m^4} L \right\}, \quad (12.56)$$

где $\delta = m^2 \sigma$, а $L = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{2} \delta \right| + C$. Очевидно, это представление эквивалентно (12.45).

Явное выражение для $\langle T_{ik} \rangle_{\text{div}}$ заняло бы несколько страниц, и здесь не приводится (в работе [268] оно выписано для скалярного, спинорного и векторного полей). Оно может быть полезно при конкретных расчетах средних $\langle 0 | T_{ik} | 0 \rangle$ по методу [86, 252], так как позволяет однозначно определить подлежащие отбрасыванию члены в разложении

$$\langle 0 | T_{ik} \{ \Phi(x), \Phi(x') \} | 0 \rangle.$$

Найдем след регуляризованного ТЭИ. Поскольку

$$\langle T_{ik} \rangle_{M \text{reg}} = \langle T_{ik} \rangle_M - \langle T_{ik} \rangle_{\text{div}}, \quad (12.57)$$

то

$$\langle T_i^i \rangle_{M \text{reg}} = \langle T_i^i \rangle_M - \langle T_i^i \rangle_{\text{div}}. \quad (12.58)$$

Из (12.43) и (12.55) нетрудно получить

$$\langle T_i^i \rangle_M = -\frac{1}{2} m^2 \lim_{x' \rightarrow x} G^{(1)}(x, x') = -2 \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \ln m^2}. \quad (12.59)$$

Аналогично

$$\langle T_i^i \rangle_{\text{div}} = -2 \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{div}}^{(1)}}{\partial \ln m^2}. \quad (12.60)$$

Подставляя (12.56) в последнее равенство, находим с учетом (12.40) при $\xi = 1/6$

$$\langle T_i^i \rangle_{\text{div}} = \frac{11}{16\pi^2} a_2 = \frac{1}{2880\pi^2} [R^{iklm} R_{iklm} - R^{ik} R_{ik} + \nabla^k \nabla_k R]. \quad (12.61)$$

По самому построению в пределе $m \rightarrow 0$ след $\langle T_i^i \rangle_M$ формально равен нулю. Поэтому при $m = 0$ след регуляризованного тензора конформно-инвариантного скалярного поля равен

$$\langle T_i^i \rangle_{M \text{ reg}} = -\frac{1}{2880\pi^2} [R^{iklm} R_{iklm} - R^{ik} R_{ik} + \nabla^k \nabla_k R]. \quad (12.62)$$

Итак, в результате регуляризации вакуумное среднее ТЭИ приобрело отличный от нуля след. Это — конформная аномалия, которая упоминалась в § 12.1.

Как показано в работах [255, 269], к аномальному следу $\langle T_{ik} \rangle_{\text{reg}}$ приводит и метод Зельдовича—Старобинского (см. § 13.7). Такой же аномальный след ТЭИ дают и другие известные методы регуляризации, которые обсуждаются ниже.

Аномальный след удобно выразить через конформный тензор Вейля, определяемый как [54, 218]

$$C_{iklm} = R_{iklm} - R_{l[i}g_{k]m} + R_{m[i}g_{k]l} + (1/3)Rg_{l[i}g_{k]m} \quad (12.63)$$

(квадратные скобки означают антисимметризацию по заключенным в них индексам). Из (12.63) следует, что

$$C^{iklm}C_{iklm} = R^{iklm}R_{iklm} - 2R^{ik}R_{ik} + (1/3)R^2. \quad (12.64)$$

В конформно-плоском пространстве $C_{iklm} = 0$.

Приведем значения следа $\langle T_i^i \rangle_{\text{reg}}$ для скалярного, спинорного и векторного полей сразу:

$$\langle T_i^i \rangle_{\text{reg}} = -\frac{1}{2880\pi^2} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 7/4 \\ -13 \end{pmatrix} C^{iklm} C_{iklm} + \begin{pmatrix} 1 \\ 11/2 \\ 62 \end{pmatrix} \left(R^{ik} R_{ik} - \frac{1}{3} R^2 \right) + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 18 \end{pmatrix} \nabla^k \nabla_k R \right\}. \quad (12.65)$$

Очевидно, аномалия возникает из-за последнего члена в \mathcal{L}_{div} (12.56), который логарифмически расходится при $\sigma \rightarrow 0$. С ним же связана инфракрасная расходимость при $m^2 \rightarrow 0$, но сам след при этом остается конечным.

Существенно, что восстановить конформную инвариантность теории введением в \mathcal{L}_{gr} локального контрчлена невозможно [257, 260]. Из соображений размерности очевидно, что такой контрчлен должен был бы иметь вид комбинации инвариантов $R^{iklm}R_{iklm}$, $R^{ik}R_{ik}$ и R^2 , или, что эквивалентно, $C^{iklm}C_{iklm}$, $R^{iklm}R_{iklm} - 4R^{ik}R_{ik} + R^2$ и R^2 . Член с квадратом тензора Вейля всегда даст при вариации по g_{ik} тензор с нулевым следом. Вторая комбинация при интегрировании по $d^4x \sqrt{-g}$ дает тополо-

гический инвариант (12.46), вариация которого тождественно равна нулю. Только контрчлен, пропорциональный R^2 , дает при вариации тензор ${}^{(1)}H_{ih}$ из (12.49), след которого ${}^{(1)}H_i^i = -6\nabla^i\nabla_i R$, что, однако, не исчерпывает аномального следа (12.65).

Остановимся еще на двух методах регуляризации. В работах [260—263] использовался метод размерной регуляризации в координатном пространстве. Исходным пунктом здесь является представление расходящихся величин через интегралы по собственному времени типа (12.43), которые в d -мерном пространстве—времени имеют вид

$$\mathcal{Y} = \int_0^\infty ds s^{-d/2} f(s) \exp(-im^2s). \quad (12.66)$$

Идея метода состоит в рассмотрении \mathcal{Y} в плоскости комплексного переменного d . Интеграл (12.66) сходится при $\text{Re } d < \delta_0$ [величина δ_0 зависит от вида $f(s)$] и определяет аналитическую функцию $\mathcal{Y}(d)$. Ее аналитическое продолжение в область $\text{Re } d > \delta_0$ имеет полюс при $d = 4$ (физическая размерность пространства—времени). Регуляризация сводится к вычитанию из (12.66) главной части лорановского разложения $\mathcal{Y}(d)$ в окрестности этого полюса. Для лагранжиана $\mathcal{L}^{(1)}$ это эквивалентно вычитанию $\mathcal{L}_{\text{div}}^{(1)}$, определяемого равенствами (12.45), (12.53).

Близким к размерной регуляризации является метод [76, 251], основанный на использовании обобщенной ζ -функции для оператора G [283]. С помощью этого метода в работе [265] дано доказательство существования конформной аномалии, не опирающееся на предел $m \rightarrow 0$ в массивной теории.

Таким образом, различные методы регуляризации приводят к одному и тому же выражению для следа регуляризованного вакуумного среднего ТЭИ безмассового поля. Поскольку лагранжиан рассматриваемой теории конформно-инвариантен, то отличие следа ТЭИ от нуля означает спонтанное нарушение конформной симметрии во внешнем гравитационном поле.

Аналогичная аномалия возникает для аксиального тока, причем аномальный аксиальный заряд выражается через так называемый индекс *Понтрягина* рассматриваемого гравитационного поля [284—286]

$$P = \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x R_{ikln} \varepsilon^{ikrs} R_{rs}^{in}$$

где ε^{ikrs} — единичный антисимметричный тензор.

Этот результат можно получить без использования каких-либо методов регуляризации с помощью теоремы Атья — Зингера об индексе дифференциального оператора [287], которая для данного случая утверждает, что число нулевых собственных значений евклидова оператора Дирака в поле с индексом P равно P . Электро-

магнитное поле топологически тривиально (так как оно является абелевым калибровочным полем) и имеет нулевой индекс Понтрягина. Неабелевы же калибровочные поля (в том числе и гравитационное) могут иметь $P \neq 0$. Не исключено, что аномальный след ТЭИ также можно получить независимо от конкретных регуляризационных схем.

Глава 13. РОЖДЕНИЕ ЧАСТИЦ И ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА В ОДНОРОДНОМ ИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 13.1. Геометрия однородной изотропной Вселенной

В этой главе изучается рождение частиц и поляризация вакуума гравитационным полем, которое описывается метрикой однородного изотропного пространства. Высокая симметрия позволяет в этом случае провести полное и последовательное количественное изучение квантовых эффектов.

Пространство — время называется *однородным*, если оно имеет такую группу изометрий (группу движений), что под действием преобразований этой группы остаются инвариантными некоторые пространственноподобные гиперповерхности, которые называются гиперповерхностями транзитивности (или однородности). Если гиперповерхности однородности есть максимально симметричные 3-пространства (гиперповерхности постоянной кривизны), то пространство — время называется *изотропным*.

Рассмотрим семейство гиперповерхностей однородности $\{\Sigma\}$ и времениподобное векторное поле ξ^i , всюду ортогональное к гиперповерхностям этого семейства. Интегральные кривые $x^i(t)$ этого векторного поля можно рассматривать как мировые линии системы наблюдателей, для каждого из которых 3-пространство представляется изотропным. Пространственные координаты можно выбрать так, чтобы на каждой интегральной кривой они были постоянны: $x^\alpha(t) = \text{const}$. Задаваемая таким образом система отсчета называется *сопутствующей*.

В реальной Вселенной подобная система отсчета задается крупномасштабным распределением галактик и фоном реликтового радиоизлучения. Она является привилегированной в том смысле, что только в ней 3-пространство выглядит изотропным. Интересно, что недавние наблюдения дипольной компоненты температуры реликтового фона с амплитудой $\Delta T/T \approx 10^{-3}$ позволили измерить абсолютную скорость солнечной системы относительно этой системы отсчета [288].

В сопутствующих координатах метрика однородного изотропного пространства — времени имеет вид [88, 245, 289].

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = dt^2 - a^2(t) dl^2, \quad (13.1)$$

где t — синхронное собственное время, dl^2 — метрика 3-пространства постоянной кривизны $\kappa = -1, 0, +1$:

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = dr^2 + f^2(r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (13.2)$$

$f(r) = \text{sh}r$, r , $\sin r$ соответственно для $\kappa = -1, 0, +1$. Координаты r , θ , φ — безразмерные, а функция $a(t)$, называемая масштабным фактором, имеет размерность длины.

При $\kappa = -1$ метрика (13.1), (13.2) описывает гиперболическое пространство—время (открытая модель). Гиперповерхности $t = \text{const}$ в этом случае неограничены и имеют группу симметрии $O(3,1)$; на них реализуется трехмерный аналог геометрии Лобачевского. Координата r здесь меняется в пределах $0 \leq r < \infty$. При $\kappa = +1$ метрика (13.1), (13.2) описывает сферическое пространство—время (закрытая модель). Здесь $0 \leq r \leq \pi$ и 3-пространство замкнуто: сечения $t = \text{const}$ есть 3-сферы (группа симметрии $O(4)$). Масштабный фактор $a(t)$ в обоих случаях имеет смысл радиуса кривизны 3-пространства в момент t .

При $\kappa = 0$ 3-пространство (13.2) плоское (хотя кривизна четырехмерного пространства—времени отлична от нуля). Такая метрика называется квазиевклидовой. В этом случае величина $a(t)$ абсолютного смысла не имеет: фиксирование ее значения в некоторый момент задает лишь масштаб длины.

Вместо синхронного времени t удобно пользоваться безразмерным «конформным временем» η :

$$\eta = \int a^{-1}(t) dt. \quad (13.3)$$

В терминах η метрика (13.1) имеет конформно-статический вид

$$ds^2 = a^2(\eta) \tilde{ds}^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - dl^2), \quad (13.4)$$

т. е. отличается от статической метрики \tilde{ds}^2 лишь конформным множителем $a^2(\eta)$. Это есть следствие того, что однородное изотропное пространство допускает группу масштабных преобразований, являющуюся однопараметрической подгруппой конформной группы. Масштабные преобразования порождаются генератором

$$D = i\zeta^k \partial / \partial x^k = i\partial / \partial \eta, \quad (13.5)$$

где ζ^k — конформный вектор Киллинга, имеющий в координатах $(\eta, r, \theta, \varphi)$ компоненты $(1, 0, 0, 0)$. Напомним [15], что векторное поле ζ^k называется конформным полем Киллинга, если соответствующий генератор $i\zeta^k \partial_k$ порождает конформные преобразования пространства. Конформное поле Киллинга удовлетворяет уравнению

$$\nabla_i \zeta_k + \nabla_k \zeta_i = 2f(x) g_{ik}, \quad (13.6)$$

где $f(x)$ — функция координат. При $f(x) \equiv 0$ (13.6) переходит в уравнение Киллинга и $i\zeta^k \partial_k$ есть генератор изометрий. В рассматриваемом случае легко проверить, что $f = \dot{a}(\eta)/a(\eta)$, так что в статической метрике генератор временных трансляций D порождает

преобразования симметрии (точка здесь и ниже означает производную по η).

Однородное изотропное пространство—время является не только конформно-статическим, но и конформно-плоским [290]. Это означает, что во всех трех случаях $\kappa = -1, 0, +1$ существуют координаты x^i , в которых метрический тензор имеет вид $g_{ih} = \exp(2\sigma(x))g_{ih}^{(0)}$ ($g_{ik}^{(0)}$ — метрический тензор пространства Минковского). В конформно-плоском пространстве тензор Вейля $C_{iklm} \equiv 0$ и согласно (12.63) тензор кривизны полностью определяется тензором Риччи.

Приведем выражения для компонент тензора Риччи в метрике (13.4):

$$\begin{aligned} R_{00} &= 3a^{-2} (\ddot{a}a - \dot{a}^2), & R_{0\alpha} &= 0, \\ R_{\alpha\beta} &= -\gamma_{\alpha\beta} a^{-2} (\ddot{a}a + \dot{a}^2 + 2\kappa a^2), \end{aligned} \quad (13.7)$$

где $\gamma_{\alpha\beta}$ определено в (13.2). Скалярная кривизна

$$R = R_i^i = 6a^{-3} (\ddot{a} + \kappa a). \quad (13.8)$$

Параметром, характеризующим интенсивность гравитационного поля, здесь является так называемый параметр Хаббла

$$h = \dot{a}/a^2 = (1/a)(da/dt) \quad (13.9)$$

(его значение для нашей Вселенной на современном этапе ее эволюции $h_0 \approx 50 \text{ км}/(\text{с} \cdot \text{Мпс}) \approx 6 \cdot 10^{-27} \text{ см}^{-1}$ называется постоянной Хаббла). Из оценки (11.6) можно получить критическое значение $h_{\text{кр}}$, при котором эффект рождения частиц массы m станет заметным: $h_{\text{кр}} \sim m$. Для современной Вселенной $h_0/h_{\text{кр}} \sim 10^{-37}$ (в оценках используется масса электрона), так что квантовые эффекты не играют сколь угодно заметной роли. Существенными они могли быть лишь на ранних стадиях эволюции, вблизи космологической сингулярности.

Количественный расчет квантовых эффектов для космологических моделей Фридмана вблизи сингулярности приведен в § 13.7.

§ 13.2. Классические решения скалярного волнового уравнения

В метрике (13.4) уравнение Клейна—Гордона—Фока (1.16) имеет вид

$$\ddot{\varphi} + 2\dot{a}\dot{\varphi}/a - \Delta_2^{(3)}\varphi + (m^2 a^2 + \ddot{a}/a + \kappa)\varphi = 0. \quad (13.10)$$

Здесь $\Delta_2^{(3)}$ — оператор Лапласа—Бельтрами (1.20) на 3-пространстве с метрикой (13.2).

Замена

$$\varphi(x) = a^{-1}(\eta) \tilde{\varphi}(x) \quad (13.11)$$

преобразует (13.10) к уравнению

$$\ddot{\tilde{\varphi}} - \Delta_2^{(3)}\tilde{\varphi} + (m^2 a^2 + \kappa)\tilde{\varphi} = 0,$$

описывающему поле $\tilde{\varphi}$ с переменной массой $ma(\eta)$ в статическом пространстве—времени с метрикой $\tilde{ds}^2 = d\eta^2 - dt^2$, скалярная кривизна которого $\tilde{R} = 6\kappa$.

Метрический тензор энергии-импульса скалярного поля $T_{ik}^{(0)}$ определяется равенством (1.23). Если Σ — пространственноподобная гиперповерхность, а ξ^i — векторное поле Киллинга, то интеграл

$$M(\xi) = \int_{\Sigma} \xi^i T_{ik}^{(0)} d\sigma^k \quad (13.12)$$

не зависит от Σ , т. е. является сохраняющейся величиной. Если же ξ^i — конформный вектор Киллинга, определяемый равенством (13.6), то $M(\xi)$ уже не сохраняется (за исключением случая безмассового поля). При этом (13.12) можно представить в виде [13]

$$M(\xi) = \int_{\Sigma} \xi^i T_{ik}^{(0)\text{can}} d\sigma^k + \int_{\Sigma} f(x) \overleftrightarrow{\partial}_h \varphi^*(x) \varphi(x) d\sigma^k, \quad (13.13)$$

где $T_{ik}^{(0)\text{can}}$ — канонический ТЭИ (1.22), а $f(x)$ определена в (13.6). Очевидно, что если ξ^i — вектор Киллинга, т. е. $f(x) = 0$, то в (13.13) второй интеграл исчезает и как метрический, так и канонический ТЭИ определяют одну и ту же сохраняющуюся величину. Для конформного вектора Киллинга метрический и канонический ТЭИ при интегрировании в (13.12) дают различные результаты и при построении интегральных величин типа (13.12) следует использовать метрический ТЭИ.

Выбирая в качестве ξ^i в (13.12) конформное поле Киллинга ζ^i , ортогональное к поверхностям однородности, получаем гамильтониан

$$H^{(0)}(\eta) = \int_{\Sigma} \zeta^i T_{ik}^{(0)} d\sigma^k = a^2 \int_{\eta=\text{const}} d^3x \sqrt{\gamma} T_{00}^{(0)}. \quad (13.14)$$

В квантовой теории оператор, соответствующий (13.14), играет роль генератора масштабных преобразований [330].

Полный заряд поля определяется как интеграл от 4-тока (1.24):

$$Q^{(0)} = \int_{\Sigma} d\sigma^i J_i^{(0)} = i \int_{\eta=\text{const}} d^3x \sqrt{-{}^{(3)}g} \rho^{(0)}(x),$$

где ${}^{(3)}g = \det g_{\alpha\beta}$, а $\rho^{(0)}(x)$ — пространственная плотность заряда

$$\rho^{(0)}(x) = ia^{-1} \varphi^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_\eta \varphi(x). \quad (13.15)$$

Динамические величины удобно записывать в терминах полевой переменной $\tilde{\varphi}(x) = a\varphi(x)$. Выпишем явные выражения для диаго-

нальных компонент метрического ТЭИ в метрике (13.4), которые нам понадобятся в дальнейшем:

$$T_{00}^{(0)} = \frac{1}{a^2} \left\{ \tilde{\varphi}^* \tilde{\varphi} - \frac{1}{3} [(\Delta_2^{(3)} \tilde{\varphi}^*) \tilde{\varphi} + \tilde{\varphi}^* \Delta_2^{(3)} \tilde{\varphi} - \Delta_1^{(3)} (\tilde{\varphi}^*, \tilde{\varphi})] + (m^2 a^2 + \kappa) \tilde{\varphi}^* \tilde{\varphi} \right\}, \quad (13.16)$$

$$T_{\alpha\alpha}^{(0)} = \frac{1}{3a^2} \{ 4\partial_\alpha \tilde{\varphi}^* \partial_\alpha \tilde{\varphi} - [(\tilde{\nabla}_\alpha \partial_\alpha \tilde{\varphi}^*) \tilde{\varphi} + \tilde{\varphi}^* \tilde{\nabla}_\alpha \partial_\alpha \tilde{\varphi}] + \gamma_{\alpha\alpha} [\tilde{\varphi}^* \tilde{\varphi} - \Delta_1^{(3)} (\tilde{\varphi}^*, \tilde{\varphi}) - (m^2 a^2 - \kappa) \tilde{\varphi}^* \tilde{\varphi}] \}.$$

Здесь $\tilde{\nabla}_\alpha$ — символ ковариантной производной в 3-пространстве с метрикой (13.2), а оператор $\Delta_1^{(3)}$ определен в (1.20).

Для нахождения полной ортонормированной системы решений уравнения Клейна—Гордона—Фока (13.10) нам понадобятся собственные функции $\Phi_{\mathcal{Y}}(r, \theta, \varphi)$ оператора Лапласа—Бельтрами

$$(\Delta_2^{(3)} + k^2_{\mathcal{Y}}) \Phi_{\mathcal{Y}} = 0, \quad (13.17)$$

которые образуют базис унитарного представления группы изометрий 3-пространства постоянной кривизны; \mathcal{Y} — коллективный индекс, нумерующий собственные функции.

В гиперболическом случае ($\kappa = -1$) разделение переменных в (13.17) приводит к системе функций $\Phi_{\mathcal{Y}}$, классифицируемых набором индексов (квантовых чисел) $\mathcal{Y} = \{\lambda, l, m\}$, $0 \leq \lambda < \infty$; $l = 0, 1, 2, \dots$; $m = -l, -l+1, \dots, l$. Явный вид этих функций [291]

$$\Phi_{\mathcal{Y}}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\text{sh } r}} \frac{|\Gamma(i\lambda + l + 1)|}{|\Gamma(i\lambda)|} P_{i\lambda - 1/2}^{-l-1/2}(\text{ch } r) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (13.18)$$

где $P_\nu^\mu(z)$ — присоединенные функции Лежандра, а $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ — сферические функции, определенные так, что $Y_{lm}^* = (-1)^m Y_{l,-m}$.

В сферическом пространстве ($\kappa = +1$) собственными функциями $\Delta_2^{(3)}$ являются четырехмерные шаровые функции [292, 293]

$$\Phi_{\mathcal{Y}}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\sin r}} \sqrt{\frac{\lambda(\lambda+l)!}{(\lambda-l+1)!}} P_{\lambda-1/2}^{-l-1/2}(\cos r) Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (13.19)$$

В отличие от (13.18) здесь $\lambda = 1, 2, \dots$; $l = 0, 1, \dots, \lambda - 1$.

В квазиевклидовом пространстве $\Phi_{\mathcal{Y}}(r, \theta, \varphi)$ — обычные трехмерные сферические функции, которые получаются из (13.18) заменой $r \rightarrow r/r_0$, $\lambda \rightarrow r_0 \lambda$ и последующим предельным переходом $r_0 \rightarrow \infty$ (в этом случае, конечно, можно использовать и декартовы координаты).

Собственные значения $k^2_{\mathcal{Y}}$ во всех трех случаях $\kappa = \pm 1, 0$ можно записать в виде $k^2_{\mathcal{Y}} = \lambda^2 - \kappa$.

Назовем λ импульсным квантовым числом; ему соответствует физический импульс $k = \lambda/a$ (η), который в нестационарной метрике, конечно, не сохраняется. Квантовые числа l и m имеют смысл момента и его проекции на ось $\theta = 0$.

Соотношения ортогональности и нормировки для функций (13.18) и (13.19) имеют вид

$$\int d^3x \sqrt{\gamma} \Phi_{\mathcal{Y}}^*(x) \Phi_{\mathcal{Y}'}(x) = \delta_{\mathcal{Y}\mathcal{Y}'}, \quad (13.20)$$

где $x = (r, \theta, \varphi)$, а

$$\delta_{\mathcal{Y}\mathcal{Y}'} = \begin{cases} \delta(\lambda - \lambda') \delta_{ll'} \delta_{mm'}, & \kappa = -1, 0, \\ \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}, & \kappa = +1. \end{cases} \quad (13.21)$$

Условие полноты можно записать в виде

$$\int d\mu(\mathcal{Y}) \Phi_{\mathcal{Y}}^*(x) \Phi_{\mathcal{Y}}(x') = \delta(x, x'), \quad (13.22)$$

где $\delta(x, x') = \delta(r - r') \delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi')$, $d\mu(\mathcal{Y})$ — мера на множестве квантовых чисел:

$$\int d\mu(\mathcal{Y}) = \begin{cases} \int_0^\infty d\lambda \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^l, & \kappa = -1, 0, \\ \sum_{\lambda=1}^\infty \sum_{l=0}^{\lambda-1} \sum_{m=-l}^l, & \kappa = 1. \end{cases} \quad (13.23)$$

Приведем некоторые свойства функций $\Phi_{\mathcal{Y}}(x)$, необходимые в дальнейшем [291, 292]. Используя формулу

$$\int \left(\frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \frac{\partial Y_{l'm'}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \varphi} \frac{\partial Y_{l'm'}}{\partial \varphi} \right) \sin \theta d\theta d\varphi = \\ = l(l+1) \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

(которая выводится с помощью условия ортонормированности сферических функций), а также рекуррентные соотношения для функций Лежандра, можно получить следующее равенство:

$$\int d^3x \sqrt{\gamma} \gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi_{\mathcal{Y}}(x) \partial_\beta \Phi_{\mathcal{Y}'}(x) = (\lambda^2 - \kappa) \delta_{\mathcal{Y}\mathcal{Y}'}. \quad (13.24)$$

С помощью теорем сложения для сферических функций и функций Лежандра приходим к формуле суммирования функций $\Phi_{\mathcal{Y}}$ по индексам l, m :

$$\sum_{l, m} \Phi_{\mathcal{Y}}^*(x) \Phi_{\mathcal{Y}}(x') = \frac{\lambda}{2\pi^2} \frac{\sin \lambda\beta}{f(\beta)}. \quad (13.25)$$

Здесь $f(\beta) = \text{sh } \beta$, β или $\sin \beta$ соответственно при $\kappa = -1, 0$ или $+1$, а β — расстояние между точками x и x' , которое определяется равенствами:

$$\begin{aligned} \text{ch } \beta &= \text{chrchr}' - \text{shrshr}' \cos \chi, \quad \kappa = -1; \\ \cos \beta &= \cos r \cos r' + \sin r \sin r' \cos \chi, \quad \kappa = +1; \\ \beta &= [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \chi]^{1/2}, \quad \kappa = 0, \end{aligned}$$

где $\cos \chi = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\varphi - \varphi')$.

При $x = x'$ из (13.25) во всех трех случаях получаем

$$\sum_{l,m} |\Phi_{\mathcal{J}}(x)|^2 = \frac{\lambda^2}{2\pi^2}. \quad (13.26)$$

Применяя к равенству (13.25) оператор $\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x'^\beta}$ и переходя к пределу $x' \rightarrow x$, получаем

$$\sum_{l,m} \partial_\alpha \Phi_{\mathcal{J}}^*(x) \partial_\beta \Phi_{\mathcal{J}}(x) = \gamma_{\alpha\beta} \frac{\lambda^2 (\lambda^2 - \kappa)}{6\pi^2}. \quad (13.27)$$

Сворачивая (13.27) с тензором $\gamma^{\alpha\beta}$, получаем

$$\sum_{l,m} \Delta_1^{(3)}(\Phi_{\mathcal{J}}^*(x), \Phi_{\mathcal{J}}(x)) = \frac{\lambda^2 (\lambda^2 - \kappa)}{2\pi^2}. \quad (13.28)$$

Вычисляя вторую ковариантную производную $\tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta$ в метрике (13.2) от (13.26) и используя (13.28), находим

$$\sum_{l,m} \{(\tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \Phi_{\mathcal{J}}^*) \Phi_{\mathcal{J}} + \Phi_{\mathcal{J}}^* \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \Phi_{\mathcal{J}}\} = -\gamma_{\alpha\beta} \frac{\lambda^2 (\lambda^2 - \kappa)}{3\pi^2}. \quad (13.29)$$

Продолжим теперь построение полного набора решений $\Phi_{\mathcal{J}}(x)$ уравнения Клейна—Гордона—Фока (13.10). Положим

$$\Phi_{\mathcal{J}}(x) = a^{-1}(\eta) g(\eta) \Phi_{\mathcal{J}}(x). \quad (13.30)$$

Явное выделение масштабного фактора $a(\eta)$ удобно в силу указанного выше конформного соответствия между $\varphi(x)$ и $\tilde{\varphi}(x)$.

Подставляя (13.30) в (13.10), получаем уравнение для временной функции

$$\ddot{g}(\eta) + \omega^2(\eta)g(\eta) = 0, \quad \omega^2(\eta) = \lambda^2 + m^2 a^2(\eta). \quad (13.31)$$

Из-за изотропии 3-пространства имеет место вырождение: частота, а следовательно, и временные функции зависят лишь от импульсного квантового числа λ . Поэтому в дальнейшем будем обозначать последние $g_\lambda(\eta)$.

$$\varphi_{\mathcal{J}^+}^{(+)}(x) = \frac{i}{\sqrt{2}a(\eta)} g_{\lambda}(\eta) \Phi_{\mathcal{J}^+}^*(\mathbf{x}), \quad \varphi_{\mathcal{J}^-}^{(-)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}a(\eta)} g_{\lambda}^*(\eta) \Phi_{\mathcal{J}^-}(\mathbf{x}) \quad (13.32)$$

образуют полный набор классических решений уравнения (13.10), ортонормированный в смысле индефинитного скалярного произведения (1.25), если вронскиан, составленный из $g_{\lambda}(\eta)$ и $g_{\lambda}^*(\eta)$, равен

$$g_{\lambda} g_{\lambda}^* - \dot{g}_{\lambda} \dot{g}_{\lambda}^* = -2i. \quad (13.33)$$

Начальные условия на функции $g_{\lambda}(\eta)$, задаваемые в некоторый момент $\eta = \eta_0$,

$$g_{\lambda}|_{\eta=\eta_0} = \frac{1}{\sqrt{\omega(\eta_0)}}, \quad \dot{g}_{\lambda}|_{\eta=\eta_0} = i\sqrt{\omega(\eta_0)} \quad (13.34)$$

определяют $\varphi_{\mathcal{J}^+}^{(\pm)}$ и $\varphi_{\mathcal{J}^-}^{(\pm)}$ как положительно- и отрицательно-частотные при $\eta = \eta_0$ решения (13.10).

Нестационарность метрики приводит к тому, что $\varphi_{\mathcal{J}^+}^{(\pm)}$ при $\eta > \eta_0$ уже не являются положительно- (отрицательно-) частотными. Как неоднократно говорилось выше, на квантовом языке это означает, что происходит рождение частиц. Величина эффекта определяется параметром адиабатичности осциллятора (13.31)

$$\delta = \dot{\omega}/\omega^2 = m^2 \dot{a} \dot{a} / \omega^3,$$

максимальное значение которого (при $\lambda = 0$) есть $\delta_{\text{макс}} = h(\eta)/m$, $h(\eta)$ — параметр Хаббла (13.9). Для того чтобы эффект был заметным, должно быть $\delta_{\text{макс}} \sim 1$, т. е. $h(\eta) \sim m$, что совпадает с оценкой, приведенной в конце § 13.1.

§ 13.3. Классические решения уравнения Дирака

Общий вид уравнения Дирака и динамических величин для спинорного поля во внешнем гравитационном поле приведен в § 1.2. В однородном изотропном пространстве—времени с метрикой (13.4) реперные векторы $h_{(a)l}$, определяемые равенством (1.45), естественно выбрать касательными к координатным линиям:

$$\begin{aligned} h_{(0)0} &= -h_{(1)1} = a(\eta); & h_{(2)2} &= -a(\eta)f(r); \\ h_{(3)3} &= -a(\eta)f(r)\sin\theta; & h_{(a)l} &= 0, \quad a \neq l. \end{aligned} \quad (13.35)$$

Подставляя (13.35) в (1.49) с использованием (1.47), получаем уравнение Дирака в метрике (13.4)

$$\begin{aligned} \frac{i}{a} \left[\gamma^0 \frac{\partial}{\partial \eta} + \gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} + \gamma^2 \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial \theta} + \gamma^3 \frac{1}{f \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{3\dot{a}}{2a} \gamma^0 + \right. \\ \left. + \frac{f'}{f} \gamma^1 + \frac{c \operatorname{tg} \theta}{2f} \gamma^2 \right] \psi - m\psi = 0. \end{aligned} \quad (13.36)$$

Для нахождения ТЭИ спинорного поля надо в выражении (1.51) вычислить спинорные ковариантные производные (1.46). В результате получаем

$$T_{ik}^{(1/2)} = \frac{i}{4} \left[h_{(a)i} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial}_k \gamma^a \psi + h_{(a)k} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial}_i \gamma^a \psi + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} C_{abc} (h_{(a)i} h^{(c)}_k + h_{(a)k} h^{(c)}_i) \bar{\psi} [\gamma^a, \gamma^b \gamma^c]_+ \psi \right]. \quad (13.37)$$

По правилу (13.14) строим гамильтониан спинорного поля

$$H^{(1/2)}(\eta) = \int_{\Sigma} \xi^i T_{ik}^{(1/2)} d\sigma^k = \frac{i}{2} a^3(\eta) \int d^3x \sqrt{\gamma} \psi^+ \overleftrightarrow{\partial}_\eta \psi. \quad (13.38)$$

Полный заряд поля определяется интегралом от плотности спинорного 4-тока (1.52).

$$Q = \int d\sigma^i J_i^{(1/2)}(x) = \int d^3x \sqrt{-^{(3)}g} \rho^{(1/2)}(x),$$

$\rho^{(1/2)}(x)$ — пространственная плотность заряда

$$\rho^{(1/2)}(x) = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^+ \psi. \quad (13.39)$$

Найдем теперь полную систему решений уравнения Дирака в метрике (13.4). Разделение переменных в (13.36) осуществляется следующим образом [294—296]. Положим

$$\psi_{\lambda j l M} = a^{-3/2}(\eta) B_\lambda(\eta) M_{\lambda j l}(r) S(\theta, \varphi) Z_{j l M}(\theta, \varphi), \quad (13.40)$$

где индексы принимают значения $0 \leq \lambda < \infty$, $j = 1/2, 3/2, \dots$ для $\kappa = -1$; $\lambda = 3/2, 5/2, \dots$, $j = 1/2, 3/2, \dots$, $\lambda - 1$ для $\kappa = +1$; $l = j \pm 1/2$ и $-j \leq M \leq j$ в обоих случаях,

$$B_\lambda(\eta) = \begin{pmatrix} f_{\lambda+}(\eta) \mathbf{I} & 0 \\ 0 & f_{\lambda-}(\eta) \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad (13.41)$$

$$M_{\lambda, j, j \pm 1/2}(r) = \begin{pmatrix} q_{\lambda j}^{\pm}(r) \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \pm q_{\lambda j}^{\mp}(r) \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad (13.42)$$

\mathbf{I} — единичная матрица 2×2 ,

$$S(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}, \quad G = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \exp[i(\theta + \varphi)/2], & -i \exp[i(\theta - \varphi)/2] \\ \exp[-i(\theta - \varphi)/2], & i \exp[-i(\theta + \varphi)/2] \end{pmatrix}. \quad (13.43)$$

а $Z_{j l M}(\theta, \varphi)$ — биспинор, составленный из шаровых спиноров [175]:

$$Z_{j l M}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i^{l-l'+1} \Omega_{j l M}(\theta, \varphi) \\ \Omega_{j l' M}(\theta, \varphi) \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} l = j \pm 1/2, \\ l' = j \mp 1/2. \end{matrix} \quad (13.44)$$

Функции $q_{\lambda j}^{\pm}(r)$, входящие в (13.42), выражаются через присоединенные функции Лежандра. Например, для $\kappa = -1$

$$q_{\lambda j}^{\pm}(r) = \frac{1}{\sqrt{2\sinh r (\ch r \mp 1)}} \frac{|\Gamma(i\lambda + j + 1)|}{|\Gamma(i\lambda + 1/2)|} [P_{i\lambda}^{-j}(\ch r) \mp P_{-i\lambda}^{-j}(\ch r)]. \quad (13.45)$$

Явное выделение множителя $a^{-3/2}$ в (13.40) удобно ввиду конформных свойств спинорного поля [см. (1.53)].

Выражение (13.40) удовлетворяет уравнению Дирака (13.36), если временные функции $f_{\lambda\pm}(\eta)$, входящие в матрицу $B_{\lambda}(\eta)$, удовлетворяют системе уравнений

$$\dot{f}_{\lambda\pm} + i\lambda f_{\lambda\mp} \pm im a \dot{f}_{\lambda\pm} = 0. \quad (13.46)$$

Переход от гиперболического ($\kappa = -1$) к квазиевклидову ($\kappa = 0$) пространству осуществляется так же, как и в скалярном случае. При этом, если $a(\eta) = \text{const}$, $\psi_{\lambda\mu M}$ переходят в обычные сферические спинорные гармоники [175].

Для квантовых чисел λ, j, l, M введем коллективный индекс \mathcal{J} и решения (13.40) обозначим $\psi_{\mathcal{J}}(x)$.

Присоединенные функции Лежандра удовлетворяют интегральному соотношению [297]

$$\int_{-1}^{\infty} [P_{i\lambda}^{-j}(x) P_{i\lambda'}^{-j}(x) - (i\lambda + j + 1)(i\lambda' + j + 1) P_{i\lambda}^{-j-1}(x) P_{i\lambda'}^{-j-1}(x)] dx = 2 \left| \frac{\Gamma(i\lambda + 1/2)}{\Gamma(i\lambda + j + 1)} \right|^2 \delta(\lambda - \lambda').$$

Аналогичное соотношение имеет место для функций Лежандра на разрезе $P_{\nu}^{\mu}(x)$, $-1 < x < 1$. Эти соотношения, вместе со свойством ортонормированности шаровых спиноров $\Omega_{\lambda\mu M}$ [175], позволяют непосредственно проверить ортонормированность биспиноров $\psi_{\mathcal{J}}(x)$

$$\int_{\Sigma} d\sigma^{\alpha} \bar{\psi}_{\mathcal{J}}(x) h_{(\alpha)l} \gamma^{\alpha} \psi_{\mathcal{J}'}(x) = a^3(\eta) \int d^3x \sqrt{\bar{\gamma}} \psi_{\mathcal{J}}^{\dagger}(x) \psi_{\mathcal{J}'}(x) = \delta_{\mathcal{J}\mathcal{J}'}, \quad (13.47)$$

где $\delta_{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ отличается от (13.21) дополнительным множителем $\delta_{jj'}$. Нормировка (13.47) предполагает, что на независящую от времени комбинацию решений (вронскиан) системы (13.46) наложено условие

$$|f_{\lambda+}(\eta)|^2 + |f_{\lambda-}(\eta)|^2 = 2. \quad (13.48)$$

Решения системы (13.46) удовлетворяют уравнениям второго порядка [296, 298]

$$\ddot{f}_{\lambda\pm} + [\omega^2(\eta) \pm im \dot{a}(\eta)] f_{\lambda\pm} = 0, \quad \omega^2(\eta) = \lambda^2 + m^2 a^2(\eta), \quad (13.49)$$

которые описывают осциллятор с переменной комплексной частотой. Сравнивая его со скалярным аналогом (13.31), видим, что при адиабатическом изменении $a(\eta)$ ($\hbar(\eta)/m \ll 1$) мнимой частью частоты можно пренебречь и, следовательно, не будет существенного различия между рождением спинорных и скалярных частиц. В антиадиабатическом режиме, наоборот, мнимая часть в (13.49) при $\lambda \lesssim ma$ доминирует, поэтому здесь рождение нерелятивистских частиц со спинами 0 и 1/2 будет различным [299]. Это обстоятельство является косвенным следствием принципа Паули.

Положительно- и отрицательно-частотные в момент $\eta = \eta_0$ решения системы (13.46) фиксируем начальными условиями

$$f_{\lambda\pm}^{(+)}(\eta_0) = \pm \left(\frac{\omega \mp ma}{\omega} \right)^{1/2} \Big|_{\eta=\eta_0}, \quad f_{\lambda\pm}^{(-)}(\eta_0) = \left(\frac{\omega \pm ma}{\omega} \right)^{1/2} \Big|_{\eta=\eta_0}. \quad (13.50)$$

Легко проверить, что при этом выполняются равенства:

$$\begin{aligned} \dot{f}_{\lambda\pm}^{(+)}(\eta_0) &= i\omega(\eta_0) f_{\lambda\pm}^{(+)}(\eta_0); & \dot{f}_{\lambda\pm}^{(-)}(\eta_0) &= -i\omega(\eta_0) f_{\lambda\pm}^{(-)}(\eta_0); \\ f_{\lambda+}^{(-)}(\eta) &= -(f_{\lambda-}^{+})^*(\eta); & f_{\lambda-}^{(-)}(\eta) &= (f_{\lambda+}^{+})^*(\eta), \end{aligned}$$

которые позволяют исключить из последующих формул отрицательно-частотные решения.

Подставляя $f_{\lambda\pm}^{(+)}(\eta)$ и $f_{\lambda\pm}^{(-)}(\eta)$ в (13.40), получаем полный набор решений $\psi_{\mathcal{J}}^{(\pm)}(x)$ уравнения Дирака (13.36).

Ниже в этом параграфе приведены свойства спиноров $\psi_{\mathcal{J}}^{(\pm)}$, которые потребуются в дальнейшем [296, 300].

Прежде всего с помощью соотношений для $P_{\mu}^{\nu}(x)$ можно доказать формулы (ϵ, δ — знаки частотности в произвольной комбинации)

$$\begin{aligned} & a^3 \int d^3x \sqrt{\gamma} \psi_{\mathcal{J}}^{(\delta)+} \partial_{\eta} \psi_{\mathcal{J}'}^{(\epsilon)-} = \\ & = \frac{1}{2} \left[f_{\lambda+}^{(\delta)*} \dot{f}_{\lambda+}^{(\epsilon)} + f_{\lambda-}^{(\delta)*} \dot{f}_{\lambda-}^{(\epsilon)} - \frac{3\dot{a}}{a} \right] \delta_{\mathcal{J}\mathcal{J}'}. \end{aligned} \quad (13.51)$$

Нам понадобятся также формулы суммирования различных билинейных комбинаций спиноров $\psi_{\mathcal{J}}^{(\pm)}$ по квантовым числам j, l, M . Для получения этих формул необходимо использовать выражения для сумм по M произведений шаровых спиноров и их производных по θ и φ [292], а также свойства функций Лежандра $P_{\mu}^{\nu}(z)$. Приведем формулы суммирования, которые будут использованы при вычислении плотности числа родившихся частиц:

$$\sum_{j,l,M} \psi_{\mathcal{J}}^{(\pm)} \psi_{\mathcal{J}}^{(\pm)} = \frac{1}{\pi^2 a^3} \left(\lambda^2 - \frac{\kappa}{4} \right), \quad (13.52)$$

плотности энергии:

$$\sum_{l,l,M} \psi_{\mathcal{J}}^{(\pm)+} \dot{\psi}_{\mathcal{J}}^{(\pm)} = \frac{\lambda^2 - \kappa/4}{\pi^2 a^3} \left[\mp i\lambda \operatorname{Re}(f_+^* f_-) \pm ima(1 - |f_+|^2) - \frac{3a}{2a} \right],$$

$$\sum_{l,l,M} \psi_{\mathcal{J}}^{(+)+} \dot{\psi}_{\mathcal{J}}^{(-)} = \frac{\lambda^2 - \kappa/4}{2\pi^2 a^3} [i\lambda(f_+^{*2} - f_-^{*2}) - 2maf_+^* f_-], \quad (13.53)$$

$$\sum_{l,l,M} \psi_{\mathcal{J}}^{(-)+} \dot{\psi}_{\mathcal{J}}^{(+)} = \frac{\lambda^2 - \kappa/4}{2\pi^2 a^3} [i\lambda(f_+^2 - f_-^2) + 2maf_+ f_-]$$

и давления:

$$\sum_{l,l,M} \psi_{\mathcal{J}}^{(\pm)+} \gamma_0 \gamma_\alpha \partial_\beta \psi_{\mathcal{J}}^{(\pm)} = \mp \frac{i\lambda \sqrt{\gamma_{\alpha\beta}}}{3\pi^2 a^3} \left(\lambda^2 - \frac{\kappa}{4} \right) \operatorname{Re}(f_+^* f_-),$$

$$\sum_{l,l,M} \psi_{\mathcal{J}}^{(+)+} \gamma_0 \gamma_\alpha \partial_\beta \psi_{\mathcal{J}}^{(-)} = \frac{i\lambda \sqrt{\gamma_{\alpha\beta}}}{6\pi^2 a^3} \left(\lambda^2 - \frac{\kappa}{4} \right) (f_+^{*2} - f_-^{*2}), \quad (13.54)$$

$$\sum_{l,l,M} \psi_{\mathcal{J}}^{(-)+} \gamma_0 \gamma_\alpha \partial_\beta \psi_{\mathcal{J}}^{(+)} = \frac{i\lambda \sqrt{\gamma_{\alpha\beta}}}{6\pi^2 a^3} \left(\lambda^2 - \frac{\kappa}{4} \right) (f_+^2 - f_-^2).$$

В формулах (13.53), (13.54) для краткости обозначено $f_{\lambda\pm}^{\pm}$ $\equiv f_{\pm}$.

§ 13.4. Квантование и корпускулярная интерпретация поля в асимптотически статической метрике

Перейдем теперь к квантовой теории. Квантование скалярного поля в однородном изотропном пространстве впервые рассматривалось в работах [53, 228, 293, 301], а спинорного поля — в работах [228, 295, 302, 303].

Квантование скалярного поля $\varphi(x)$ осуществляется наложением канонических коммутационных соотношений (2.3). Представим оператор поля $\varphi(x)$ в виде разложения по собственным функциям (13.32) уравнения Клейна—Гордона—Фока

$$\varphi(x) = \int d\mu(\mathcal{Y}) \{ \varphi_{\mathcal{J}}^{(-)}(x) a_{\mathcal{J}}^{(-)} + \varphi_{\mathcal{J}}^{(+)}(x) a_{\mathcal{J}}^{(+)} \}, \quad (13.55)$$

где операторы рождения (уничтожения) частиц $a_{\mathcal{J}}^{(\pm)}$ ($a_{\mathcal{J}}^{(\mp)*}$) и античастиц $a_{\mathcal{J}}^{(\mp)}$ ($a_{\mathcal{J}}^{(\mp)*}$) в состоянии $\mathcal{Y} = \{\lambda, l, m\}$ подчиняются обычным коммутационным соотношениям вида (5.11).

В случае спинорного поля на оператор $\psi(x)$ налагаются антикоммутационные соотношения, которые можно представить в ковариантном виде следующим образом:

$$\int d\sigma^i(x') f(x') [\bar{\psi}_A(x), (h_{(a)n} \gamma^a \psi(x'))^B]_+ = \delta_A^B f(x),$$

где $A, B = 1, 2, 3, 4$ — спинорные индексы (остальные антикоммутаторы равны нулю). Разложение оператора поля по собственным спинорам $\psi_{\mathcal{Y}}^{(\pm)}(x)$ уравнения Дирака (13.36)

$$\psi(x) = \int d\mu(\mathcal{Y}) \{ \psi_{\mathcal{Y}}^{(-)}(x) a_{\mathcal{Y}}^{(-)} + \psi_{\mathcal{Y}}^{(+)}(x) a_{\mathcal{Y}}^{(+)} \} \quad (13.56)$$

определяет операторы рождения и уничтожения частиц со спином $1/2$ $a_{\mathcal{Y}}^{(\pm)}, \bar{a}_{\mathcal{Y}}^{(\pm)}$ в состоянии $\mathcal{Y} = \{\lambda, j, l, M\}$, подчиняющиеся антикоммутационным соотношениям (5.11).

Для скалярного и спинорного полей можно определить вакуум $|0\rangle$ как состояние, уничтожаемое операторами $a_{\mathcal{Y}}^{(-)}, \bar{a}_{\mathcal{Y}}^{(-)}$, и, взяв его в качестве циклического вектора, построить соответственно симметричное или антисимметричное пространство Фока F_s или F_a (см. § 2.1). Эта конструкция дает корпускулярную интерпретацию квантованного поля в момент $\eta = \eta_0$, когда функции $\varphi_{\mathcal{Y}}^{(\pm)}$ и $\psi_{\mathcal{Y}}^{(\pm)}$ определяются начальными условиями (13.34) и (13.50) как положительно- и отрицательно-частотные. Нестационарность метрики приводит к перемешиванию частотностей при $\eta > \eta_0$ и, следовательно, к неустойчивости вакуума $|0\rangle$ (см. гл. 11, а также работу [304]).

В настоящем параграфе рассмотрен случай асимптотически статической метрики, допускающей корпускулярную интерпретацию, описанную в § 11.3.

Пусть конформное время η изменяется в интервале $-\infty < \eta < \infty$ и масштабный фактор $a(\eta)$ метрики (13.4) имеет пределы при $\eta \rightarrow \pm\infty$:

$$\lim_{\eta \rightarrow \pm\infty} a(\eta) = a_{\pm}, \quad (13.57)$$

к которым он стремится достаточно быстро. Вся теория строится в этом случае в полной аналогии со схемой, изложенной в § 6.2 применительно к внешнему электрическому полю.

Для уравнения Клейна—Гордона—Фока (13.10) можно построить полные системы in- (out-)решений $\varphi_{\mathcal{Y}_{in}}^{(\pm)}, (\varphi_{\mathcal{Y}_{out}}^{(\pm)})$, потребовав, чтобы соответствующие временные функции $g_{\lambda}(\eta)$ в (13.32) были положительно-частотными при $\eta \rightarrow -\infty (+\infty)$:

$$\left. \begin{aligned} g_{\lambda in} &\sim (\omega_-)^{-1/2} \exp(i\omega_- \eta), \\ g_{\lambda out} &\sim (\omega_+)^{-1/2} \exp(i\omega_+ \eta). \end{aligned} \right\} \quad (13.58)$$

Разложения вида (13.55) по функциям $\varphi_{\mathcal{Y}_{in}}^{(\pm)}, (\varphi_{\mathcal{Y}_{out}}^{(\pm)})$ определяют in- (out-)операторы $a_{\mathcal{Y}_{in}}^{(\pm)}, (a_{\mathcal{Y}_{out}}^{(\pm)})$ и вакуумные состояния $|0_{in}\rangle, (|0_{out}\rangle)$.

Связь между in- и out-операторами дается преобразованием Боголюбова, которое благодаря однородности пространства диагонально [305]:

$$\left. \begin{aligned} a_{\mathcal{Y} \text{ in}}^{(-)} &= \alpha_{\lambda}^* a_{\mathcal{Y} \text{ out}}^{(-)} - \alpha_{\lambda} a_{\mathcal{Y} \text{ out}}^{(+)} \quad |\alpha_{\lambda}|^2 - |\beta_{\lambda}|^2 = 1, \\ a_{\mathcal{Y} \text{ in}}^{(+)} &= \alpha_{\lambda} a_{\mathcal{Y} \text{ out}}^{(+)} - \beta_{\lambda}^* a_{\mathcal{Y} \text{ out}}^{(-)}. \end{aligned} \right\} \quad (13.59)$$

Коэффициенты α_{λ} и β_{λ} определяются из равенства

$$g_{\lambda \text{ in}}(\eta) = \alpha_{\lambda}^* g_{\lambda \text{ out}}(\eta) + \beta_{\lambda} g_{\lambda \text{ out}}^*(\eta). \quad (13.60)$$

В гиперболическом и квазиевклидовом пространстве преобразование (13.59) всегда несобственное, так что представления коммутационных соотношений операторами $a_{\mathcal{Y} \text{ in}}^{(\pm)}$ и $a_{\mathcal{Y} \text{ out}}^{(\pm)}$ унитарно неэквивалентны. В случае сферического пространства условие унитарной эквивалентности (2.23) имеет вид

$$\int d\mu(\mathcal{Y}) |\beta_{\lambda}|^2 = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda^2 |\beta_{\lambda}|^2 < \infty. \quad (13.61)$$

Как и в электродинамике (см. § 6.2), величина $|\beta_{\lambda}|^2$ определяет импульсный спектр рожденных частиц; в закрытой модели величина (13.61) дает полное число рожденных пар. Вероятность того, что в квантовом состоянии $\mathcal{Y} = \{\lambda, l, m\}$ родится n пар, есть [228]

$$\omega_{\mathcal{Y}}^{(p)}(n) = |\alpha_{\lambda}|^{-2} |\beta_{\lambda}/\alpha_{\lambda}|^{2n}. \quad (13.62)$$

Она зависит только от квантового числа λ из-за однородности и изотропии пространства.

Для нахождения числа пар, рожденных в единице объема, следует вычислить среднее по состоянию $|0_{\text{in}}\rangle$ от оператора плотности out-частиц $n_{\pm}^{(0)}$ или out-античастиц $n_{\mp}^{(0)}$ [сравни с (13.15)]:

$$n_{\pm}^{(0)} = ia^{-1} \varphi^{*(+)} \overleftrightarrow{\partial}_{\eta} \varphi^{(-)}, \quad n_{\mp}^{(0)} = ia^{-1} \varphi^{(+)} \overleftrightarrow{\partial}_{\eta} \varphi^{*(-)}, \quad (13.63)$$

где $\varphi = \varphi^{(+)} + \varphi^{(-)}$ — разбиение оператора поля (13.55) на положительно- и отрицательно-частотные части в терминах операторов $a_{\mathcal{Y} \text{ out}}^{(\pm)}$. Применяя (13.33) и формулу суммирования (13.26), находим для $\kappa = -1, 0$:

$$n^{(0)} = \langle 0_{\text{in}} | n_{\pm}^{(0)} | 0_{\text{in}} \rangle = \frac{1}{2\pi^2 a_0^3} \int_0^{\infty} d\lambda \lambda^2 |\beta_{\lambda}|^2. \quad (13.64)$$

Для $\kappa = +1$ (сферическое пространство) здесь, как и во всех аналогичных формулах настоящей главы, $\int d\lambda$ заменяется на $\sum_{\lambda=1}^{\infty}$.

Подобным же образом получаются результаты и для спинорных частиц. Вероятность рождения пары фермионов в состоянии $\mathcal{J} = \{\lambda, j, l, M\}$ равна

$$\omega_{\mathcal{J}} = |\beta_{\lambda}|^2, \quad (13.65)$$

где β_{λ} — коэффициент преобразования Боголюбова, связывающего фермионные in- и out-операторы. Операторы плотности числа частиц и античастиц в соответствии с (13.39) есть

$$n_{\pm}^{1/2}(x) = \psi^{(\pm)+}(x) \psi^{(+)}(x), \quad (13.66)$$

где $\psi = \psi^{(+)} + \psi^{(-)}$ — разбиение оператора поля (13.56) на положительно- и отрицательно-частотные части в терминах out-операторов. С помощью формулы (13.52) получаем плотность числа рожденных пар

$$n^{(1/2)} = \langle 0_{in} | n_{\pm}^{1/2} | 0_{in} \rangle = \frac{1}{\pi^2 a_{\pm}^2} \int_0^{\infty} d\lambda \left(\lambda^2 - \frac{\kappa}{4} \right) |\beta_{\lambda}|^2. \quad (13.67)$$

Рассмотрим конкретные примеры, допускающие точное решение, причем для краткости ограничимся случаем скалярного поля.

Пусть в момент $\eta = 0$ происходит скачкообразное изменение масштабного фактора

$$a(\eta) = \begin{cases} a_-, & \eta < 0, \\ a_+, & \eta > 0. \end{cases}$$

Положительно-частотные при $\eta \rightarrow \infty$ и $\eta \rightarrow -\infty$ решения уравнения (13.31) суть

$$g_{\lambda in}(\eta) = (\omega_-)^{-1/2} \exp(i\omega_- \eta), \quad g_{\lambda out}(\eta) = (\omega_+)^{-1/2} \exp(i\omega_+ \eta),$$

где $\omega_{\pm}^2 = \lambda^2 + m^2 a_{\pm}^2$. Легко проверить, что определяемые соотношением (13.60) коэффициенты α_{λ} и β_{λ} равны

$$\alpha_{\lambda} = (1/2)(\rho + 1/\rho), \quad \beta_{\lambda} = (1/2)(\rho - 1/\rho),$$

где $\rho = (\omega_+/\omega_-)^{1/2}$. Импульсный спектр рожденных частиц есть

$$n_{\mathcal{J}}^{(0)} = |\beta_{\lambda}|^2 = (\omega_+ - \omega_-)^2 / 4\omega_+ \omega_-. \quad (13.68)$$

Полагая $a_+ > a_-$ и вычисляя плотность числа рожденных частиц по (13.64), получаем

$$n^{(0)} = \frac{m^3}{24\pi^2} [(1 + q'^2) E(q) - 2q' K(q)], \quad (13.69)$$

где $q'^2 \equiv 1 - q^2 = a_-/a_+$, а $E(q)$ и $K(q)$ — полные эллиптические интегралы. При $a_+ \gg a_-$ асимптотика (13.69) есть

$$n^{(0)} \approx (m^3/24\pi^2) [1 - (3/2)(a_-/a_+)^2] \ln(a_+/a_-). \quad (13.70)$$

Другой интересный пример, допускающий точное решение, дает функция

$$a(\eta) = (1/2) [(a_+ - a_-) \operatorname{th} \eta + a_+ + a_-]. \quad (13.71)$$

Решение уравнения (13.31), как и уравнения Клейна—Гордона—Фока в электромагнитном поле с потенциалом (7.1), можно в этом случае выразить через гипергеометрическую функцию. Импульсный спектр рожденных частиц дается формулой

$$n_{\mathcal{J}}^{(0)} = |\beta_{\lambda}|^2 = \frac{\operatorname{ch} [\pi (\omega_+ - \omega_-) / \gamma] + \cos \pi \nu}{2 \operatorname{sh} (\pi \omega_+ / \gamma) \operatorname{sh} (\pi \omega_- / \gamma)},$$

где $\nu = \sqrt{1 - m^2 (a_+^2 - a_-^2) / \gamma^2}$. При $\gamma \gg \omega_{\pm}$ этот результат переходит в (13.68). Другой предельный случай $\gamma \ll m (a_+ - a_-)$, $\lambda \gg m a_+$ соответствует адиабатическому режиму расширения, при этом $n_{\lambda}^{(0)}$ оказывается экспоненциально малой:

$$n_{\lambda}^{(0)} \approx \exp (-2\pi\lambda/\gamma).$$

Полученный результат аналогичен известной экспоненциальной малости параметрического возбуждения осциллятора в адиабатической области. Он справедлив для любых аналитических на вещественной оси функций $a(\eta)$.

§ 13.5 Корпускулярная интерпретация поля в нестационарных изотропных пространствах

Для того чтобы определить понятие частицы и вакуумного состояния в произвольный момент η , воспользуемся методом диагонализации гамильтониана [53, 229, 306]. Рассмотрим сначала случай скалярного поля.

Гамильтониан квантованного поля в метрике (13.4) определяется равенствами (13.14), (13.16):

$$H^{(0)}(\eta) = \int d^3x V \sqrt{\gamma} \left\{ \tilde{\varphi}^* \dot{\tilde{\varphi}} - \frac{1}{3} [(\Delta_2^{(3)} \tilde{\varphi}^*) \tilde{\varphi} + \tilde{\varphi}^* \Delta_2^{(3)} \tilde{\varphi} - \Delta_1^{(3)}(\tilde{\varphi}^*, \tilde{\varphi})] + (m^2 a^2 + \kappa) \tilde{\varphi}^* \tilde{\varphi} \right\}, \quad (13.72)$$

где $\tilde{\varphi} = a\varphi$. Подставляя сюда разложение (13.55) и используя формулы (13.20) и (13.24), представим гамильтониан в терминах операторов рождения и уничтожения:

$$H^{(0)}(\eta) = \int d\mu(\mathcal{J}) \omega(\eta) \left\{ E_{\mathcal{J}}(\eta) \left(a_{\mathcal{J}}^{(+)} a_{\mathcal{J}}^{(-)} + a_{\overline{\mathcal{J}}}^{(-)} a_{\overline{\mathcal{J}}}^{(+)} \right) + F_{\mathcal{J}}(\eta) a_{\mathcal{J}}^{(+)} a_{\overline{\mathcal{J}}}^{(+)} + F_{\overline{\mathcal{J}}}^*(\eta) a_{\overline{\mathcal{J}}}^{(-)} a_{\mathcal{J}}^{(-)} \right\}, \quad (13.73)$$

где $\overline{\mathcal{J}} = \{\lambda, l, -m\}$ — совокупность квантовых чисел функции, комплексно-сопряженной с $\Phi_{\mathcal{J}}$. Коэффициенты $E_{\mathcal{J}}$ и $F_{\mathcal{J}}$ выражаются через решения уравнения (13.31):

$$E_{\mathcal{J}}(\eta) = \frac{1}{2\omega} (|\dot{g}_{\lambda}|^2 + \omega^2 |g_{\lambda}|^2), \quad F_{\mathcal{J}}(\eta) = \frac{(-1)^m}{2\omega} (\dot{g}_{\lambda}^2 + \omega^2 g_{\lambda}^2). \quad (13.74)$$

При этом, с учетом (13.33), $E_{\mathcal{Y}}^2 - |F_{\mathcal{Y}}|^2 = 1$. Отметим, что величина $E_{\mathcal{Y}}$ есть адиабатический инвариант классического осциллятора (13.31). В силу начальных условий (13.34), $E_{\mathcal{Y}}(\eta_0) = 1$, $F_{\mathcal{Y}}(\eta_0) = 0$. Однако, если $a(\eta) \neq \text{const}$, при $\eta > \eta_0$ уже $E_{\mathcal{Y}} > 1$, $F_{\mathcal{Y}} \neq 0$ (происходит параметрическое возбуждение осциллятора).

Корпускулярная интерпретация поля дается операторами рождения и уничтожения $b_{\mathcal{Y}}^{(\pm)}$, в терминах которых гамильтониан диагонален. Диагонализация осуществляется зависящим от времени преобразованием Боголюбова

$$\begin{aligned} a_{\mathcal{Y}}^{(\pm)} &= \alpha_{\mathcal{Y}}^*(\eta) b_{\mathcal{Y}}^{(\pm)}(\eta) - (-1)^m \beta_{\mathcal{Y}}(\eta) b_{\mathcal{Y}}^{(\mp)*}(\eta), \quad |\alpha_{\mathcal{Y}}|^2 - |\beta_{\mathcal{Y}}|^2 = 1, \\ a_{\mathcal{Y}}^{(\pm)*} &= \alpha_{\mathcal{Y}}^*(\eta) b_{\mathcal{Y}}^{(\mp)*}(\eta) - (-1)^m \beta_{\mathcal{Y}}(\eta) b_{\mathcal{Y}}^{(\pm)}(\eta). \end{aligned} \quad (13.75)$$

Для нахождения $\alpha_{\mathcal{Y}}$ и $\beta_{\mathcal{Y}}$ следует подставить (13.75) в (13.73) и потребовать обращения в нуль коэффициентов при недиагональных членах $b_{\mathcal{Y}}^{(\pm)}$, $b_{\mathcal{Y}}^{(\pm)*}$. В результате получаем

$$|\beta_{\mathcal{Y}}(\eta)|^2 = (1/2)(E_{\mathcal{Y}} - 1), \quad \alpha_{\mathcal{Y}}^*(\eta)\beta_{\mathcal{Y}}(\eta) = (1/2)(-1)^m F_{\mathcal{Y}}. \quad (13.76)$$

Очевидно, что $|\alpha_{\mathcal{Y}}(\eta_0)| = 1$, $\beta_{\mathcal{Y}}(\eta_0) = 0$; произвольную общую фазу $\alpha_{\mathcal{Y}}$ и $\beta_{\mathcal{Y}}$ фиксируем, положив $\alpha_{\mathcal{Y}}(\eta_0) = 1$. Из вида $E_{\mathcal{Y}}$ и $F_{\mathcal{Y}}$ (13.74) следует, что $\alpha_{\mathcal{Y}}$ и $\beta_{\mathcal{Y}}$ зависят лишь от квантового числа λ , так что в дальнейшем будем писать α_{λ} и β_{λ} .

Вакуумное состояние $|0_{\eta}\rangle$, определяемое равенствами

$$b_{\mathcal{Y}}^{(\pm)}(\eta)|0_{\eta}\rangle = b_{\mathcal{Y}}^{(\mp)*}(\eta)|0_{\eta}\rangle = 0, \quad (13.77)$$

как и сами операторы $b_{\mathcal{Y}}^{(\pm)}$, оказывается зависящим от времени. При этом $b_{\mathcal{Y}}^{(\pm)}(\eta_0) = a_{\mathcal{Y}}^{(\pm)}$, а $|0_{\eta_0}\rangle = |0\rangle$.

В терминах операторов $b_{\mathcal{Y}}^{(\pm)}$ гамильтониан имеет обычный диагональный вид

$$H^{(0)}(\eta) = \int d\mu(\mathcal{Y}) \omega(\eta) (b_{\mathcal{Y}}^{(+)*}(\eta) b_{\mathcal{Y}}^{(-)}(\eta) + b_{\mathcal{Y}}^{(-)*}(\eta) b_{\mathcal{Y}}^{(+)}(\eta)). \quad (13.78)$$

Таким образом, мы приходим к зависящей от времени корпускулярной интерпретации теории. Физическая мотивировка такого определения понятия частиц обсуждалась в § 3.4 (см. также § 11.2).

Из (13.76) с учетом (13.31) можно получить систему уравнений первого порядка непосредственно для α_{λ} и β_{λ}^* [119]:

$$\dot{\alpha}_{\lambda} = \frac{\dot{\omega}}{2\omega} \beta_{\lambda}^* \exp(2i\Theta), \quad \dot{\beta}_{\lambda}^* = \frac{\dot{\omega}}{2\omega} \alpha_{\lambda} \exp(-2i\Theta), \quad (13.79)$$

где $\Theta(\eta) = \int_{\eta_0}^{\eta} \omega(\eta') d\eta'$. Функции $g_\lambda(\eta)$ и $\dot{g}_\lambda(\eta)$ выражаются через α_λ^* и β_λ следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} g_\lambda(\eta) &= \omega^{-1/2}(\eta) [\alpha_\lambda^*(\eta) \exp(i\Theta(\eta)) + \beta_\lambda(\eta) \exp(-i\Theta(\eta))], \\ \dot{g}_\lambda(\eta) &= i\omega^{1/2}(\eta) [\alpha_\lambda^*(\eta) \exp(i\Theta(\eta)) - \beta_\lambda(\eta) \exp(-i\Theta(\eta))]. \end{aligned} \right\} \quad (13.80)$$

Подставляя (13.80) в разложение (13.55) для оператора поля и используя преобразования Боголюбова, обратные к (13.75), можно записать оператор $\Phi(x)$ в виде

$$\Phi(x) = \frac{1}{a(\eta)} \int \frac{d\mu(\mathcal{J})}{\sqrt{2\omega(\eta)}} [\Phi_{\mathcal{J}}(x) c_{\mathcal{J}}^{(\pm)}(\eta) + \Phi_{\bar{\mathcal{J}}}(x) c_{\bar{\mathcal{J}}}^{(\mp)}(\eta)]. \quad (13.81)$$

Здесь мы ввели гейзенберговские операторы

$$c_{\mathcal{J}}^{(\pm)}(\eta) = b_{\mathcal{J}}^{(\pm)}(\eta) \exp\left(\pm i \int_{\eta_0}^{\eta} \omega(\eta') d\eta'\right). \quad (13.82)$$

С помощью (13.75) и (13.79) для этих операторов получаются уравнения

$$\frac{dc_{\mathcal{J}}^{(\pm)}}{d\eta} = \pm i\omega c_{\mathcal{J}}^{(\pm)} + (-1)^m \frac{\dot{\omega}}{2\omega} c_{\bar{\mathcal{J}}}^{(\mp)},$$

которым можно придать вид гейзенберговских уравнений движения

$$\frac{dc_{\mathcal{J}}^{(\pm)}(\eta)}{d\eta} = (-1)^m \frac{\dot{\omega}}{2\omega} c_{\bar{\mathcal{J}}}^{(\mp)}(\eta) + i [H^{(0)}(\eta), c_{\mathcal{J}}^{(\pm)}(\eta)], \quad (13.83)$$

где $H^{(0)}(\eta)$ — гамильтониан (13.78).

Эти уравнения показывают, что эволюция операторов $c_{\mathcal{J}}^{(\pm)}(\eta)$ определяется двумя факторами. Во-первых, это обычная зависимость от времени гейзенберговских операторов из-за экспоненциального множителя в (13.82) [ее описывает последний член в (13.83)]. Во-вторых, зависимость от времени, связанная с тем, что в каждый момент происходит переопределение понятия частицы; ей отвечает первое слагаемое в правой части (13.83). Нормальное упорядочение по операторам $c_{\mathcal{J}}^{(\pm)}(\eta)$ эквивалентно вычитанию вклада нулевых колебаний физического вакуума $|0_\eta\rangle$ [119] (см. § 6.3):

$$N_\eta(A) = A - \langle 0_\eta | A | 0_\eta \rangle. \quad (13.84)$$

Операторы числа физических частиц и античастиц с набором квантовых чисел \mathcal{J} в момент η определяются как

$$n_{\mathcal{J}}^+(\eta) = c_{\mathcal{J}}^{(+)}(\eta) c_{\mathcal{J}}^{(-)}(\eta), \quad n_{\bar{\mathcal{J}}}(\eta) = c_{\bar{\mathcal{J}}}^{(+)}(\eta) c_{\bar{\mathcal{J}}}^{(-)}(\eta). \quad (13.85)$$

Вычисляя с помощью (13.75), (13.82) средние значения этих операторов в состоянии $|0\rangle = |0_{\eta_0}\rangle$, находим

$$n_{\mathcal{J}}^{(0)}(\eta) = \langle 0 | n_{\mathcal{J}}^{\pm} | 0 \rangle = |\beta_{\lambda}(\eta)|^2, \quad (13.86)$$

Очевидно, что $n_{\mathcal{J}}^{(0)}(\eta) > 0$ при $\eta > \eta_0$, т. е. состояние $|0\rangle$ уже не является вакуумом для частиц, отвечающих операторам $c_{\mathcal{J}}^{(\pm)}$ (η). Иными словами, происходит рождение частиц из вакуума. Величина $n_{\mathcal{J}}^{(0)}$ описывает спектр рожденных частиц, которые рождаются парами с квантовыми числами \mathcal{J} и $\bar{\mathcal{J}}$. Зависимость $n_{\mathcal{J}}^{(0)}$ лишь от импульсного квантового числа λ объясняется изотропией пространства.

Если в начальный момент η_0 имеется не вакуум, а статистическая смесь чистых многочастичных состояний, описываемая равновесной матрицей плотности ρ , то средние числа частиц и античастиц с квантовыми числами \mathcal{J} в момент η даются формулой

$$n_{\mathcal{J}}^{(0)\pm}(\eta) = n_{\mathcal{J}}^{(0)\pm}(\eta_0) + \beta_{\mathcal{J}}(\eta) \left| 1 + n_{\mathcal{J}}^{(0)+}(\eta_0) + n_{\mathcal{J}}^{(0)-}(\eta_0) \right|, \quad (13.87)$$

где $n_{\mathcal{J}}^{(0)+}(\eta_0) = \text{Sp}(\rho a_{\mathcal{J}}^+ a_{\mathcal{J}}^-)$, $n_{\mathcal{J}}^{(0)-}(\eta_0) = \text{Sp}(\rho a_{\mathcal{J}}^- a_{\mathcal{J}}^+)$ — средние числа частиц и античастиц в состоянии \mathcal{J} в момент η_0 (см. также работу [228]). Из (13.87) очевидно, что наличие бозе-частиц в начальном состоянии стимулирует их рождение.

Операторы плотности числа физических частиц и античастиц $n_{\pm}^{(0)}$ даются выражениями (13.63), где теперь $\varphi^{(\pm)}$ — положительно- и отрицательно-частотные части оператора поля $\varphi(x)$ в смысле операторов $c_{\mathcal{J}}^{(\pm)}$ (η) [см. (13.81)]. Число пар, рожденных из вакуума $|0\rangle$ в единице объема физического пространства к моменту η , есть [53, 229, 307]

$$n^{(0)}(\eta) = \langle 0 | n_{\pm}^{(0)} | 0 \rangle = \frac{1}{2\pi^2 a^3(n)} \int_0^{\infty} d\lambda \lambda^2 |\beta_{\lambda}(\eta)|^2. \quad (13.88)$$

Как видно из уравнений (13.79), если $\dot{a}(\eta) \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow \infty$, коэффициенты $\alpha_{\lambda}(\eta)$ и $\beta_{\lambda}(\eta)$ стремятся к постоянным предельным значениям α_0 и β_0 . Величина $n_{\mathcal{J}}^{(0)} = |\beta_0|^2$ описывает предельный спектр рожденных частиц. Если к тому же $\dot{a}(\eta) = 0$ и при $\eta = \eta_0$ (или $a \rightarrow 0$), то мы имеем описанную в предыдущем параграфе S-матричную картину. Сравнение формул (13.60) и (13.80) показывает, что метод диагонализации гамильтониана при $\eta \rightarrow \infty$ дает те же результаты, что и in- и out-формализм.

Перейдем теперь к корпускулярной интерпретации спинорного поля [296]. Подставляя разложение (13.56) в гамильтониан (13.38) и используя формулы (13.47), (13.50) и (13.51), получаем квадратичную форму по операторам $a_{\mathcal{J}}^{(\pm)}$ того же вида, что и (13.73), но теперь

коэффициенты $E_{\mathcal{Y}}$ и $F_{\mathcal{Y}}$ выражаются через положительно-частотные решения f_{\pm} уравнений (13.46) с начальными условиями (13.50):

$$\begin{aligned} E_{\lambda}(\eta) &= (1/\omega)[ma(1 - |f_{+}|^2) - \lambda \operatorname{Re}(f_{+}^* f_{-})], \\ F_{\lambda}(\eta) &= (1/\omega)[maf_{+}f_{-} - (\lambda/2)(f_{+}^2 - f_{-}^2)]. \end{aligned} \quad (13.89)$$

При этом $E_{\lambda}(\eta_0) = 1$, $F_{\lambda}(\eta_0) = 0$, а $E_{\lambda}^2 + |F_{\lambda}|^2 = 1$ для всех η . Диагонализация гамильтониана здесь осуществляется преобразованиями Боголюбова, сохраняющими антикоммутиационные соотношения

$$\left. \begin{aligned} a_{\mathcal{Y}}^{(\pm)} &= \alpha_{\lambda}^*(\eta) b_{\mathcal{Y}}^{(\mp)}(\eta) - \beta_{\lambda}(\eta) b_{\mathcal{Y}}^{(\pm)}(\eta), \quad |\alpha_{\lambda}|^2 + |\beta_{\lambda}|^2 = 1, \\ \dot{a}_{\mathcal{Y}}^{(\pm)} &= \alpha_{\lambda}^*(\eta) \dot{b}_{\mathcal{Y}}^{(\mp)}(\eta) + \beta_{\lambda}(\eta) \dot{b}_{\mathcal{Y}}^{(\pm)}(\eta). \end{aligned} \right\} \quad (13.90)$$

Коэффициенты α_{λ} и β_{λ} определяются равенствами

$$|\beta|^2 = (1 - E_{\lambda})/2, \quad \alpha_{\lambda}^* \beta_{\lambda} = F_{\lambda}/2. \quad (13.91)$$

Произвольную общую фазу α_{λ} и β_{λ} зафиксируем так, чтобы $\alpha_{\lambda}(\eta_0) = 1$; очевидно, что $\beta_{\lambda}(\eta_0) = 0$. С помощью (13.46) и (13.89) можно получить систему дифференциальных уравнений, аналогичную (13.79) [300]:

$$\dot{\alpha}_{\lambda} = \frac{\lambda m \dot{a}}{2\omega^2} \beta_{\lambda}^* \exp(2i\Theta), \quad \dot{\beta}_{\lambda}^* = -\frac{\lambda m \dot{a}}{2\omega^2} \alpha_{\lambda} \exp(-2i\Theta). \quad (13.92)$$

Функции $f_{\lambda\pm}(\eta)$ и их производные $\dot{f}_{\lambda\pm}(\eta)$ выражаются через α_{λ}^* и β_{λ} в виде

$$\left. \begin{aligned} f_{\lambda\pm}(\eta) &= \omega^{-1/2} \left[\pm \sqrt{\omega \mp ma} \alpha_{\lambda}^* \exp(i\Theta) - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\omega \pm ma} \beta_{\lambda} \exp(-i\Theta) \right], \\ \dot{f}_{\lambda\pm}(\eta) &= i\omega^{1/2} \left[\pm \sqrt{\omega \mp ma} \alpha_{\lambda}^* \exp(i\Theta) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\omega \pm ma} \beta_{\lambda} \exp(-i\Theta) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (13.93)$$

Гейзенберговские операторы $c_{\mathcal{Y}}^{(\pm)}(\eta)$ определяются равенством (13.82), где теперь $b_{\mathcal{Y}}^{(\pm)}(\eta)$ — антикоммутирующие операторы, определяемые соотношениями (13.90). Для них имеют место уравнения движения, аналогичные (13.83).

Спектр рожденных фермионов находится так же, как и в скалярном случае:

$$n_{\mathcal{Y}}^{(1/2)} = |\beta_{\lambda}(\eta)|^2. \quad (13.94)$$

В силу соотношения $|\alpha_{\lambda}|^2 + |\beta_{\lambda}|^2 = 1$ величина $n_{\mathcal{Y}}^{(1/2)}$ не превосходит единицы, что является отражением действия принципа Паули для фермионов. При этом $n_{\mathcal{Y}}^{(1/2)}$ имеет смысл вероятности рождения пары с квантовыми числами $\mathcal{Y} = \{\lambda, j, j \pm 1/2, M\}$ и $\bar{\mathcal{Y}} = \{\lambda, j, j \mp 1/2, -M\}$.

Если начальное состояние было не вакуумным, а описывалось матрицей плотности ρ , диагональной в представлении чисел заполнения, то аналогом формулы (13.87) для скалярных частиц здесь является [228]

$$n_{\mathcal{J}}^{(1/2)\pm}(\eta) = n_{\mathcal{J}}^{(1/2)\pm}(\eta_0) + |\beta_{\lambda}(\eta)|^2 \left(1 - n_{\mathcal{J}}^{(1/2)+}(\eta_0) - n_{\mathcal{J}}^{(1/2)-}(\eta_0)\right). \quad (13.95)$$

Видно, что наличие фермионов в начальном состоянии подавляет эффект рождения.

Плотность числа пар, рожденных из вакуума, вычисляется как среднее по состоянию $|0\rangle$ от оператора (13.66), где теперь $\psi^{(\pm)}(x)$ есть разбиение оператора поля на положительно- и отрицательно-частотные части в смысле операторов $c_{\mathcal{J}}^{(\pm)}(\eta)$ физических частиц в момент η . С использованием (13.52) получаем [296]

$$n^{(1/2)}(\eta) = \frac{1}{\pi^2 a^3(\eta)} \int_0^{\infty} d\lambda \left(\lambda^2 - \frac{\kappa}{4}\right) |\beta_{\lambda}(\eta)|^2. \quad (13.96)$$

Таким образом, эффект рождения частиц определяется коэффициентами $\alpha_{\lambda}(\eta)$, $\beta_{\lambda}(\eta)$ преобразования Боголюбова (13.75) или (13.90), диагонализующего гамильтониан в представлении вторичного квантования. Вместо двух комплексных функций α_{λ} и β_{λ} , связанных условием $|\alpha_{\lambda}|^2 \mp |\beta_{\lambda}|^2 = 1$, удобнее использовать три вещественные функции (см. [272]):

$$\begin{aligned} s_{\lambda}(\eta) &= |\beta_{\lambda}|^2, \quad u_{\lambda}(\eta) = \pm 2\text{Re}(\alpha_{\lambda}\beta_{\lambda}\exp(-2i\Theta)), \\ v_{\lambda}(\eta) &= \pm 2\text{Im}(\alpha_{\lambda}\beta_{\lambda}\exp(-2i\Theta)). \end{aligned} \quad (13.97)$$

Здесь и далее $\Theta(\eta) = \int_{\eta_0}^{\eta} \omega(\eta')d\eta'$, а верхние и нижние знаки относятся соответственно к скалярному ($s = 0$) и спинорному ($s = 1/2$) полям. С помощью уравнений (13.79) и (13.92) легко убедиться, что эти функции удовлетворяют в обоих случаях $s = 0, 1/2$ системе дифференциальных уравнений [272, 300]

$$\left. \begin{aligned} \dot{s}_{\lambda} &= (1/2)\omega^{(s)}u_{\lambda}, \quad \dot{v}_{\lambda} = 2\omega u_{\lambda}, \\ \dot{u}_{\lambda} &= \omega^{(s)}(1 \pm 2s_{\lambda}) - 2\omega v_{\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (13.98)$$

Для скалярного случая

$$\omega^{(0)} = \dot{\omega}/\omega = m^2 a \dot{a}/\omega^2, \quad (13.99)$$

а для спинорного

$$\omega^{(1/2)} = m \dot{a}/\omega^2. \quad (13.100)$$

Поскольку $\beta_{\lambda}(\eta_0) = 0$, то начальные условия для системы (13.98) имеют вид

$$s_{\lambda}(\eta_0) = u_{\lambda}(\eta_0) = v_{\lambda}(\eta_0) = 0. \quad (13.101)$$

Исследуем поведение функций s_λ , u_λ , v_λ при больших импульсах λ . Для этого воспользуемся системой интегральных уравнений Вольтерра [308], которой эквивалентна система (13.98) с начальными условиями (13.101)

$$\left. \begin{aligned} u_\lambda + iv_\lambda &= \int_{\eta_0}^{\eta} w^{(s)}(\eta') [1 \pm 2s_\lambda(\eta')] \exp \left\{ 2i \int_{\eta'}^{\eta} \omega(\eta'') d\eta'' \right\} d\eta', \\ s_\lambda &= \frac{1}{2} \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta' w^{(s)}(\eta') \int_{\eta_0}^{\eta'} d\eta'' w^{(s)}(\eta'') [1 \pm 2s_\lambda(\eta'')] \times \\ &\times \cos \left[2 \int_{\eta'}^{\eta''} \omega(\eta_1) d\eta_1 \right]. \end{aligned} \right\} (13.102)$$

При $\lambda \gg ma$ можно считать $\omega(\eta) \approx \lambda$, а $w^{(0)} \approx m^2 a \dot{a} / \lambda^2$, $w^{(1/2)} \approx \approx m \dot{a} / \lambda$. Если к тому же $\lambda / ma \gg \dot{a} / a$, то $w^{(s)} \ll 1$. При этом условии достаточно ограничиться первой итерацией (13.102)

$$\left. \begin{aligned} u_\lambda + iv_\lambda &\approx \int_{\eta_0}^{\eta} w^{(s)}(\eta') \exp(2i\lambda(\eta - \eta')) d\eta', \\ s_\lambda &\approx \frac{1}{4} \left| \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta' w^{(s)}(\eta') \exp(2i\lambda\eta') \right|^2. \end{aligned} \right\} (13.103)$$

Если функция $\dot{a}(\eta)$ достаточно гладкая в интервале (η_0, η) , то асимптотика (13.103) при $\lambda \rightarrow \infty$ в скалярном случае есть $s_\lambda \sim \lambda^{-6}$, $u_\lambda \sim \lambda^{-4}$, $v_\lambda \sim \lambda^{-3}$, а в спинорном $s_\lambda \sim \lambda^{-4}$, $u_\lambda \sim \lambda^{-3}$, $v_\lambda \sim \sim \lambda^{-2}$. Отсюда видно, что плотность числа рожденных частиц (13.88) и (13.96) конечна в том и другом случаях.

§ 13.6. Регуляризация тензора энергии-импульса

Перейдем теперь к изучению средних значений оператора тензора энергии-импульса квантованного поля. Как говорилось в § 12.2, наибольший интерес представляют вакуумные средние $\langle 0 | T_{ik} | 0 \rangle$, причем в качестве вакуума $|0\rangle$ можно взять либо in-вакуум, задаваемый при $\eta \rightarrow -\infty$ в S -матричной задаче, либо определенное в предыдущем параграфе начальное вакуумное состояние в момент η_0 . При этом будем предполагать, что при $\eta \rightarrow -\infty$ (или $\eta \rightarrow \eta_0$) $\dot{a}(\eta)$ и достаточное число его высших производных обращаются в нуль.

Рассмотрим сначала скалярный случай. Подставляя в (13.16) и аналогичные выражения для недиагональных компонент ТЭИ опе-

ратор поля $\varphi(x)$ (13.55) и усредняя по состоянию $|0\rangle$, после вычислений находим

$$\begin{aligned} \langle 0 | T_{00}^{(0)} | 0 \rangle &= \frac{1}{2\pi^2 a^2} \int_0^\infty d\lambda \lambda^2 \omega E_\lambda(\eta), \\ \langle 0 | T_{\alpha\beta}^{(0)} | 0 \rangle &= \frac{1}{6\pi^2 a^2} \gamma_{\alpha\beta} \int_0^\infty d\lambda \lambda^2 \omega \left[E_\lambda(\eta) - \frac{m^2 a^2}{\omega} |g_\lambda(\eta)|^2 \right], \quad (13.104) \\ \langle 0 | T_{0\alpha}^{(0)} | 0 \rangle &= 0, \end{aligned}$$

где $g_\lambda(\eta)$ — решение уравнения (13.31) с начальными условиями (13.34), $E_\lambda(\eta)$ определено в (13.74). Для получения этих выражений использовались формулы суммирования собственных функций $\Phi_{\mathcal{F}}(x)$ (13.26)–(13.29).

Из (13.31) и (13.34) видно, что при $\lambda \rightarrow \infty$ решение $g_\lambda(\eta) \approx \approx \lambda^{-1/2} \exp(i\lambda(\eta - \eta_0))$ и, следовательно, $E_\lambda(\eta) \rightarrow 1$. Поэтому интегралы (13.104) расходятся на верхнем пределе как λ^4 .

Для устранения этой расходимости применим к $T_{ik}^{(0)}$ операцию нормального упорядочения N_η согласно (13.84). Чтобы вычислить средние $\langle 0_\eta | T_{ik}^{(0)} | 0_\eta \rangle$, следует подставить в (13.16) разложение оператора поля $\varphi(x)$ по операторам $c^{\left(\pm\right)}(\mathcal{F})(\eta)$ (13.81) и усреднить по вакууму $|0_\eta\rangle$. В результате получаем

$$\langle 0_\eta | T_{ik}^{(0)} | 0_\eta \rangle = \frac{1}{2\pi^2 a^2} \int_0^\infty d\lambda \lambda^2 \left(\frac{\omega}{0} \left| \frac{0}{\frac{1}{3} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\lambda^2}{\omega}} \right. \right). \quad (13.105)$$

Эти равенства, очевидно, определяют ТЭИ нулевых колебаний мгновенного вакуума $|0_\eta\rangle$.

Вычитание (13.105) из (13.104) в подынтегральных выражениях дает $\langle 0 | N_\eta (T_{ik}^{(0)}) | 0 \rangle$ [119], который с помощью (13.76) и (13.80) можно выразить через введенные в (13.97) функции $s_\lambda(\eta)$ и $u_\lambda(\eta)$:

$$\begin{aligned} \langle 0 | N_\eta (T_{ik}^{(0)}) | 0 \rangle &= \frac{1}{\pi^2 a^2} \int_0^\infty d\lambda \lambda^2 \mathcal{F}_{ik}^{(0)}(s_\lambda, u_\lambda), \\ \mathcal{F}_{ik}^{(0)}(s_\lambda, u_\lambda) &= \left(\frac{\omega s_\lambda}{0} \left| \frac{0}{\frac{1}{3} \gamma_{\alpha\beta} \left[\frac{\lambda^2}{\omega} s_\lambda - \frac{m^2 a^2}{2\omega} u_\lambda \right]} \right. \right). \end{aligned} \quad (13.106)$$

Как показано в конце предыдущего параграфа, в случае скалярного поля $s_\lambda \sim \lambda^{-6}$, $u_\lambda \sim \lambda^{-4}$ при $\lambda \rightarrow \infty$, так что интегралы в (13.106) сходятся.

Легко проверить, что для $\langle 0 | N_{\eta} (T_{ik}^{\circ}) | 0 \rangle$ выполняется условие консервативности

$$\nabla_k \langle 0 | N_{\eta} (T_i^{(0)k}) | 0 \rangle = 0,$$

которое сводится здесь к первому уравнению (13.98).

Заметим, что для безмассового поля $\langle 0 | N_{\eta} (T_{ik}^{(0)}) | 0 \rangle \equiv 0$, поскольку в этом случае $\omega^{(0)}$ в системе (13.98) обращается в нуль и ее решения $s_{\lambda} = u_{\lambda} = 0$. По той же причине $\langle 0 | N_{\eta} (T_{ik}^{(0)}) | 0 \rangle = 0$ (независимо от массы) в статическом пространстве с $a(\eta) = \text{const}$.

Таким образом, для скалярного поля в изотропном пространстве вакуумные средние от нормально упорядоченного ТЭИ уже оказываются конечными и можно не делать дальнейших перенормировок. В таком варианте теории не возникает конформных аномалий для безмассового поля. Однако для спинорного поля в изотропном пространстве (а в произвольных пространствах — для любых полей) нормального упорядочения недостаточно для устранения всех расходимостей.

Действительно, для спинорного поля величину $\langle 0 | N_{\eta} (T_{ik}^{(1/2)}) | 0 \rangle$ с использованием формул суммирования для собственных спиноров (13.52)—(13.54), определения (13.89) и соотношений (13.91), (13.93) и (13.97) можно записать в виде [277, 300]

$$\langle 0 | N_{\eta} (T_{ik}^{(1/2)}) | 0 \rangle = \frac{2}{\pi^2 a^2} \int_0^{\infty} d\lambda \left(\lambda^2 - \frac{\kappa}{4} \right) \mathcal{F}_{ik}^{(1/2)}(s_{\lambda}, u_{\lambda}),$$

$$\mathcal{F}_{ik}^{(1/2)}(s_{\lambda}, u_{\lambda}) = \left(\frac{\omega s_{\lambda}}{0} \left| \frac{0}{\frac{1}{3} \gamma_{\alpha\beta} \left[\frac{\lambda^2}{\omega} s_{\lambda} - \frac{\lambda m a}{2\omega} u_{\lambda} \right]} \right. \right), \quad (13.107)$$

где s_{λ}, u_{λ} — решения системы (13.98), с $\omega = \omega^{(1/2)}$. Заметим, что в этом случае как $\langle 0 | T_{ik}^{(1/2)} | 0 \rangle$, так и $\langle 0_{\eta} | T_{ik}^{(1/2)} | 0_{\eta} \rangle$ отрицательны (как и в пространстве Минковского [7]), но их разность (13.107) — положительная величина.

Выше показано, что для спинорных частиц $s_{\lambda} \sim \lambda^{-4}$, $u_{\lambda} \sim \lambda^{-3}$ при $\lambda \rightarrow \infty$, поэтому интегралы (13.107) логарифмически расходятся.

Тем не менее выражения $\langle 0 | N_{\eta} (T_{ik}^{(1/2)}) | 0 \rangle$ формально удовлетворяют условию консервативности (в смысле дифференцирования под знаком интеграла).

Рассмотрим полученные результаты с точки зрения изложенной в § 12.2 общей характеристики расходимостей вакуумных средних ТЭИ во внешнем гравитационном поле.

Очевидно, что приведение оператора T_{ik} к нормальной форме устраняет расходимость λ^4 . Такая расходимость есть и в пространстве Минковского, где она также устраняется нормальным упорядочением. Квадратичная расходимость в скалярном случае отсутствует,

поскольку, как было показано в § 12.2, $G_{\infty}^{-1} = 0$ (при конформной связи). В спинорном случае $G_{\infty}^{-1} \neq 0$, но из-за симметрии пространства расходимость является лишь логарифмической. Члены в (12.48) с коэффициентом α_{∞} не дают вклада, так как рассматриваемое пространство — время является конформно-плоским. Дело в том, что в конформно-плоском пространстве для тензоров (12.49) выполняется тождество ${}^{(1)}H_{ih} \equiv 3{}^{(2)}H_{ih}$. Что касается последнего слагаемого в (12.48), то $\beta_{\infty} = 0$ как для скалярного поля с конформной связью, так и для спинорного.

Таким образом, тот факт, что в результате одного лишь нормального упорядочения в скалярном случае мы получили конечное выражение, а в спинорном сохранилась только логарифмическая расходимость, объясняется конформными свойствами полей и симметрией пространства — времени.

В то же время естественно предполагать, что процедура регуляризации вакуумных средних ТЭИ должна быть общей для всех гравитационных полей и не зависеть от симметрии. В качестве такой процедуры удобно использовать регуляризацию (12.53) (те же результаты получаются при использовании адиабатической регуляризации [273, 274]).

Рассмотрим сначала случай, когда пространство гиперболическое ($\kappa = -1$) или квазиевклидово ($\kappa = 0$). Нетрудно убедиться в том, что выполненное выше приведение ТЭИ к нормальной форме эквивалентно вычитанию члена с $n = 0$ в (12.53). Что касается следующих двух вычитаний ($n = 1, 2$), то можно показать, что они эквивалентны вычитанию из s_{λ} и u_{λ} в (13.106) и (13.107) первых двух членов асимптотических разложений этих величин по степеням ω^{-1} .

Эти разложения, которые можно получить, например, применяя метод итераций к системе интегральных уравнений (13.102), имеют вид

$$s_{\lambda} \sim s_2 + s_4 + \dots, \quad u_{\lambda} \sim u_2 + u_4 + \dots, \quad v_{\lambda} \sim v_1 + v_3 + \dots, \quad (13.108)$$

где номер члена указывает его порядок по ω^{-1} . При этом [255, 269]:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{2} \frac{\omega^{(s)}}{\omega}; & u_2 &= \frac{1}{4\omega} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\omega^{(s)}}{\omega} \right); & s_2 &= \frac{1}{16} \left(\frac{\omega^{(s)}}{\omega} \right)^2; \\ v_3 &= -\frac{1}{8\omega} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{\omega} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\omega^{(s)}}{\omega} \right) \right) \pm \frac{1}{16} \left(\frac{\omega^{(s)}}{\omega} \right)^3; \\ u_4 &= -\frac{1}{16\omega} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{\omega} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{\omega} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\omega^{(s)}}{\omega} \right) \right) \right) \pm \\ &\pm \frac{3}{32\omega} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\omega^{(s)}}{\omega} \right) \left(\frac{\omega^{(s)}}{\omega} \right)^2; \end{aligned} \quad (13.109)$$

$$\begin{aligned} \dot{s}_4 = & -\frac{1}{32\omega} \left(\frac{\omega^{(s)}}{\omega} \right) \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{\omega} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\omega^{(s)}}{\omega} \right) \right) + \frac{1}{64} \left[\frac{1}{\omega} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\omega^{(s)}}{\omega} \right) \right]^2 \pm \\ & \pm \frac{3}{256} \left(\frac{\omega^{(s)}}{\omega} \right)^4. \end{aligned}$$

Здесь верхний знак относится к скалярному, а нижний—к спинорному полю; соответственно $\omega^{(0)}$ и $\omega^{(1/2)}$ определяются выражениями (13.99) и (13.100).

Согласно сказанному выше, регуляризованное вакуумное среднее ТЭИ скалярного поля есть

$$\langle T_{ik}^{(0)} \rangle_{\text{reg}} = \frac{1}{\pi^2 a^2} \int_0^\infty d\lambda \lambda^2 [\mathcal{F}_{ik}^{(0)}(s_\lambda, u_\lambda) - \mathcal{F}_{ik}^{(0)}(s_2, u_2) - \mathcal{F}_{ik}^{(0)}(s_4, u_4)], \quad (13.110)$$

где $\mathcal{F}_{ik}^{(0)}(s, u)$ — выражения того же вида, то и в (13.106).

Для спинорного поля регуляризованное вакуумное среднее имеет вид

$$\begin{aligned} \langle T_{ik}^{(1/2)} \rangle_{\text{reg}} = & \frac{2}{\pi^2 a^2} \int_0^\infty d\lambda \left(\lambda^2 - \frac{\kappa}{4} \right) [\mathcal{F}_{ik}^{(1/2)}(s_\lambda, u_\lambda) - \mathcal{F}_{ik}^{(1/2)}(s_2, u_2)] - \\ & - \frac{2}{\pi^2 a^2} \int_0^\infty d\lambda \lambda^2 \mathcal{F}_{ik}^{(1/2)}(s_4, u_4), \end{aligned} \quad (13.111)$$

где функции $\mathcal{F}_{ik}^{(1/2)}(s, u)$ определены в (13.107). В (13.111) отсутствует подынтегральный член $(\kappa/4) \mathcal{F}_{ik}^{(1/2)}(s_4, u_4)$. Этот член, как показывает вычисление, имеет порядок $O((ma)^{-2})$, а согласно изложенной в § 12.2 общей схеме, в $\langle T_{ik} \rangle_{\text{div}}$ должны включаться только члены $O(m^n)$ с $n \geq 0$. Нетрудно убедиться в том, что вычитание $\mathcal{F}_{ik}^{(1/2)}(s_2, u_2)$ в (13.111) устраняет оставшуюся в (13.107) логарифмическую расходимость: для этого достаточно сравнить асимптотики s_λ и u_λ из (13.103) и s_2 и u_2 из (13.109) при $\lambda \rightarrow \infty$.

Формулы (13.110) и (13.111) относятся к случаю, когда спектр непрерывный. В случае сферического 3-пространства ($\kappa = +1$) (см. § 13.2 и 13.3) спектр λ дискретный ($\lambda = 1, 2, \dots$ для скалярного поля и $\lambda = 3/2, 5/2, \dots$ для спинорного). Вместо формулы (12.53) для регуляризации ТЭИ здесь следует пользоваться формулой (12.54). Нормальное упорядочение в этом случае не эквивалентно вычитанию члена с $n = 0$ в (12.54), поскольку последний совпадает с интегралами вида (13.105), а не суммами. (С аналогичной ситуацией мы сталкивались при рассмотрении эффекта Казимира в гл. 4). Учтеть это

обстоятельство можно, записав $\langle T_{ik} \rangle_{\text{reg}}$ для скалярного поля в виде

$$\langle T_{ik}^{(0)} \rangle_{\text{reg}} = \frac{1}{\pi^2 a^2} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda^2 \mathcal{F}_{ik}^{(0)}(s_\lambda, u_\lambda) - \frac{1}{\pi^2 a^2} \int_0^\infty d\lambda \lambda^2 \times \\ \times [\mathcal{F}_{ik}^{(0)}(s_2, u_2) + \mathcal{F}_{ik}^{(0)}(s_4, u_4)] + \Delta T_{ik}^{(0)}, \quad (13.112)$$

где $\Delta T_{ik}^{(0)}$ — разность между суммой и интегралом вида (13.105):

$$\Delta T_{ik}^{(0)} = \frac{1}{2\pi^2 a^2} \left(\sum_{\lambda=1}^{\infty} - \int_0^\infty d\lambda \right) \left(\begin{array}{c|c} \lambda^2 \omega i & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\lambda^4}{\omega} \end{array} \right). \quad (13.113)$$

Для спинорного поля в сферическом пространстве аналогично получаем

$$\langle T_{ik}^{(1/2)} \rangle_{\text{reg}} = \frac{2}{\pi^2 a^2} \left[\sum_{\lambda=3/2}^{\infty} \left(\lambda^2 - \frac{1}{4} \right) \mathcal{F}_{ik}^{1/2}(s_\lambda, u_\lambda) - \int_0^\infty d\lambda \left(\lambda^2 - \frac{1}{4} \right) \times \right. \\ \left. \times \mathcal{F}_{ik}^{(1/2)}(s_2, u_2) - \int_0^\infty d\lambda \lambda^2 \mathcal{F}_{ik}^{(1/2)}(s_4, u_4) \right] + \Delta T_{ik}^{(1/2)}, \quad (13.114)$$

где

$$\Delta T_{ik}^{(1/2)} = \frac{1}{\pi^2 a^2} \left(- \sum_{\lambda=3/2}^{\infty} + \int_0^\infty d\lambda \right) \left(\begin{array}{c|c} \left(\lambda^2 - \frac{1}{4} \right) \omega & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} \gamma_{\alpha\beta} \left(\lambda^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{\lambda^2}{\omega} \end{array} \right) \quad (13.115)$$

[напомним, что $\langle 0_\eta | T_{ik}^{(1/2)} | 0_\eta \rangle$, так и $\tau_{ik}^{(1/2)}(\lambda, m)$ из (12.51), отрицательны].

Наличие «топологических» добавок $\Delta T_{ik}^{(s)}$, возникающих из-за ограниченности 3-пространства, было впервые продемонстрировано в работах [309, 310]. Они имеют ту же природу, что и рассмотренные в гл. 4 вакуумные ТЭИ на ограниченных многообразиях без кривизны.

В выражениях (13.110)—(13.112) и (13.114) первые слагаемые, определяемые функциями $s_\lambda(\eta)$ и $u_\lambda(\eta)$, имеют нелокальный характер, т. е. зависят от всей истории изменения $a(\eta)$ до рассматриваемого момента η . Согласно изложенной выше корпускулярной интерпретации, они описывают ТЭИ рожденных частиц. Остальные слагаемые в $\langle T_{ik} \rangle_{\text{reg}}$, как видно из (13.109), (13.113) и (13.115), локальны, — они зависят лишь от значений g_{ik} и нескольких его производных в данный момент. Поэтому можно сказать, что эти члены описывают поляризацию вакуума гравитационным полем.

Следует, однако, иметь в виду, что такое разделение $\langle T_{ik} \rangle_{\text{reg}}$ на ТЭИ рожденных частиц и поляризацию вакуума в нестационарном гравитационном поле [когда $\dot{a}(\eta) \neq 0$] является весьма условным. Это видно хотя бы из того, что для спинорного поля первое слагаемое (с s_λ, u_λ) расходится, тогда как $\langle T_{ik} \rangle_{\text{reg}}$ конечен. Поэтому в нестационарном поле о слагаемых с s_λ и u_λ следует говорить как о ТЭИ квазичастиц, которые совпадают с реальными частицами лишь при $\dot{a}(\eta) \rightarrow 0$. Ниже показано, что при $\dot{a}(\eta) \rightarrow 0$ поляризация вакуума обращается в нуль (за исключением топологических членов $\Delta T_{ik}^{(s)}$ в сферическом пространстве) и тогда $\langle T_{ik}^{(s)} \rangle_{\text{reg}}$ описывает реальные рожденные частицы.

Если масса поля $m = 0$, то первые слагаемые в $\langle T_{ik} \rangle_{\text{reg}}$ обращаются в нуль (безмассовые частицы не рождаются). Используя явные выражения для s_2 и u_2 из (13.109), нетрудно установить, что интегралы

$$\int_0^\infty d\lambda \lambda^2 \mathcal{F}_{ik}^{(s)}(s_2, u_2) \quad (13.116)$$

также обращаются в нуль при $m \rightarrow 0$. Что касается всех остальных слагаемых в $\langle T_{ik}^{(s)} \rangle_{\text{reg}}$, то они отличны от нуля и при $m \rightarrow 0$. Поэтому целесообразно разделить $\langle T_{ik}^{(s)} \rangle_{\text{reg}}$ на две части:

$$\langle T_{ik}^{(s)} \rangle_{\text{reg}} = \langle T_{ik}^{(s)} \rangle_m + \langle T_{ik}^{(s)} \rangle_0, \quad (13.117)$$

из которых первая исчезает в пределе $m \rightarrow 0$, а вторая — нет. Конкретно в моделях с $\kappa = -1, 0$ для скалярного поля

$$\langle T_{ik}^{(0)} \rangle_m = \frac{1}{\pi^2 a^2} \int_0^\infty d\lambda \lambda^2 [\mathcal{F}_{ik}^{(0)}(s_\lambda, u_\lambda) - \mathcal{F}_{ik}^{(0)}(s_2, u_2)], \quad (13.118)$$

а для спинорного

$$\langle T_{ik}^{(1/2)} \rangle_m = \frac{2}{\pi^2 a^2} \int_0^\infty d\lambda \left[\left(\lambda^2 - \frac{\kappa}{4} \right) \mathcal{F}_{ik}^{(1/2)}(s_\lambda, u_\lambda) - \lambda^2 \mathcal{F}_{ik}^{(1/2)}(s_2, u_2) \right] \quad (13.119)$$

[в закрытой модели в первых слагаемых интегрирование заменяется суммированием согласно (13.112) и (13.114)]. Остальные члены в выражениях для $\langle T_{ik}^{(s)} \rangle_{\text{reg}}$ относятся к $\langle T_{ik}^{(s)} \rangle_0$.

Величины $\langle T_{ik}^{(s)} \rangle_0$ можно вычислить аналитически независимо от вида функции $a(\eta)$.

Рассмотрим сначала скалярное поле. В открытой и квазиевклидовой моделях $\langle T_{ik}^{(0)} \rangle_0$ исчерпывается членом

$$\langle T_{ik}^{(0)} \rangle_0 = -\frac{1}{\pi^2 a^2} \int_0^\infty d\lambda \lambda^2 \mathcal{F}_{ik}^{(0)}(s_4, u_4). \quad (13.120)$$

Длинное, но элементарное вычисление с использованием выражений для s_k и u_k из (13.109) дает [255]

$$\begin{aligned} \langle T_{00}^{(0)} \rangle_0 &= \frac{1}{480\pi^2 a^2} (2\ddot{c}c - \dot{c}^2 - 2c^4), \quad \langle T_{0\alpha}^{(0)} \rangle_0 = 0, \\ \langle T_{\alpha\beta}^{(0)} \rangle_0 &= \frac{1}{1440\pi^2 a^2} \gamma_{\alpha\beta} (-2c^{(3)} + 2\ddot{c}c - \dot{c}^2 + 8\dot{c}c^2 - 2c^4), \end{aligned} \quad (13.121)$$

где $c \equiv a/\dot{a}$, а $c^{(3)} \equiv d^3 c/d\eta^3$. Заметим, что сюда не входит масса поля.

В сферической модели к (13.121) следует добавить согласно (13.112) топологическое слагаемое $\Delta T_{ik}^{(0)}$. Для его вычисления можно использовать методы, изложенные в § 4.1. Применяя к (13.113) формулу (4.13), получаем [119]

$$\begin{aligned} \Delta T_{ik}^{(0)} &= \\ &= \frac{1}{\pi^2 a^2} \int_{ma}^{\infty} \frac{d\lambda \lambda^2}{\exp(2\pi\lambda) - 1} \left(\frac{(\lambda^2 - m^2 a^2)^{1/2}}{0} \left| \begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{3} \gamma_{\alpha\beta} (\lambda^2 - m^2 a^2)^{-1/2} \lambda^2 \end{array} \right. \right). \end{aligned} \quad (13.122)$$

Для частиц с массой покоя $m = 0$ интегралы вычисляются аналитически:

$$\Delta T_{ik}^{(0)} (m = 0) = \frac{1}{240\pi^2} J_{ik}, \quad (13.123)$$

где J_{ik} — тензор, имеющий в используемых координатах компоненты

$$J_{ik} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{0} \left| \begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{3} \gamma_{\alpha\beta} \end{array} \right. \right). \quad (13.124)$$

Для массивного поля в работе [311] приведены результаты численного расчета $\Delta T_{ik}^{(0)}$ в интервале $0 \leq ma \leq 1,5$. Интересно, что начиная с $ma \approx 0,5$ для $\Delta T_{ik}^{(0)}$ нарушается условие энергодоминантности (12.6). При $ma \gg 1$ величину $\Delta T_{ik}^{(0)}$ можно оценить с помощью леммы Ватсона; она оказывается экспоненциально малой [119]:

$$\Delta T_{00}^{(0)} \approx \frac{(ma)^{5/2}}{4\pi^3 a^2} \exp(-2\pi ma), \quad \Delta T_{\alpha\beta}^{(0)} = \gamma_{\alpha\beta} \frac{(ma)^{7/2}}{6\pi^2 a^2} \exp(-2\pi ma).$$

Заметим, что при $m = 0$ распределение по λ в (13.122) совпадает с планковским распределением для излучения абсолютно черного тела при температуре $kT = \hbar c/2\pi a(\eta)$ (в обычных единицах).

С помощью явных выражений для тензора Риччи (13.7) и скалярной кривизны (13.8) выражения (13.121) можно записать в «геометрическом» виде:

$$\langle T_{ik}^{(0)} \rangle_0 = \frac{1}{1440\pi^2} \left({}^{(3)}H_{ik} - \frac{1}{6} {}^{(1)}H_{ik} - 6\kappa^2 J_{ik} \right), \quad (13.125)$$

где ${}^{(1)}H_{ih}$ и J_{ih} определены соответственно в (12.49) и (13.124), а

$${}^{(3)}H_{ih} = R_i^l R_{lh} - \frac{2}{3} R R_{ih} - \frac{1}{2} \left(R^{lm} R_{lm} - \frac{1}{2} R^2 \right) g_{ih}. \quad (13.126)$$

В отличие от ${}^{(1)}H_{ih}$ тензор ${}^{(3)}H_{ih}$ обладает свойством консервативности лишь в конформно-плоском пространстве—времени, и его нельзя получить вариацией локального действия [222].

В сферическом пространстве к (13.125) следует добавить член $\Delta T_{ik}^{(0)}$.

Остановимся на случае безмассового поля, когда $\langle T_{ih} \rangle_{\text{reg}}^{(m=0)} = \langle T_{ih} \rangle_0$. При этом в закрытой модели ($\kappa = +1$) член $\Delta T_{ik}^{(0)}$ (13.123) компенсирует последнее слагаемое в (13.125), в результате чего получаем для моделей с $\kappa = 0, +1$

$$\langle T_{ik}^{(0)} \rangle_{\text{reg}}^{(m=0)} = \frac{1}{1440\pi^2} \left({}^{(3)}H_{ih} - \frac{1}{6} {}^{(1)}H_{ih} \right). \quad (13.127)$$

Для открытой модели ($\kappa = -1$) подобной компенсации не произойдет и к (13.127) добавится член $-J_{ih}/240\pi^2$.

Вычислим след (13.127). Из (12.49) и (13.126) имеем

$${}^{(1)}H_i^i = -6\nabla^l \nabla_l R, \quad {}^{(3)}H_i^i = -R^{lm} R_{lm} + R^2/3. \quad (13.128)$$

Поскольку след $J_i^i = 0$, то во всех трех случаях ($\kappa = -1, 0, +1$) находим

$$\langle T_i^{(0)i} \rangle_{\text{reg}}^{(m=0)} = \frac{1}{1440\pi^2} \left(-R^{lm} R_{lm} + \frac{1}{3} R^2 + \nabla^l \nabla_l R \right). \quad (13.129)$$

Это согласуется с (12.65), поскольку здесь $C_{ihlm} = 0$ (конформно-плоское пространство) и рассматривается комплексное скалярное поле, так что все результаты удваиваются по сравнению со случаем вещественного поля.

Результат (13.127) впервые получен в работах [252, 312] методом ковариантного раздвижения точек с использованием известных коэффициентов конформной аномалии.

Рассмотрим теперь регуляризованный ТЭИ спинорного поля. Та его часть, которая обращается в нуль при $m \rightarrow 0$, имеет вид (13.119), а исчезающая при $m = 0$ часть для квазиевклидова и гиперболического пространств есть

$$\langle T_{ik}^{(1/2)} \rangle_0 = \frac{2}{\pi^2 a^2} \int_0^\infty d\lambda \left[\frac{\kappa}{4} \mathcal{F}_{ik}^{(1/2)}(s_2, u_2) - \lambda^2 \mathcal{F}_{ik}^{(1/2)}(s_4, u_4) \right] \quad (13.130)$$

[в сферическом пространстве сюда добавляется еще топологическое слагаемое $\Delta T_{ik}^{(1/2)}$ (13.115)].

Подставляя в (13.130) явные выражения для $\mathcal{J}_{ik}^{(1/2)}$ через s_2, u_2 и s_4, u_4 из (13.109), после интегрирования получаем [255]:

$$\begin{aligned} \langle T_{00}^{(1/2)} \rangle_0 &= \frac{1}{480\pi^2 a^2} \left(6\ddot{c}c - 3\dot{c}^2 - \frac{7}{2} c^4 + 5\kappa c^2 \right), \quad \langle T_{0\alpha}^{(1/2)} \rangle_0 = 0, \\ \langle T_{\alpha\beta}^{(1/2)} \rangle_0 &= \frac{1}{1440\pi^2 a^2} \gamma_{\alpha\beta} \left(-6c^{(3)} + 6\ddot{c}c - 3\dot{c}^2 + 14\dot{c}c^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{7}{2} c^4 - 10\kappa\dot{c} + 5\kappa c^2 \right) \end{aligned} \quad (13.131)$$

($c = \dot{a}/a$). Этот результат можно представить в виде, аналогичном (13.125):

$$\langle T_{ik}^{(1/2)} \rangle_0 = \frac{1}{1440\pi^2} \left(\frac{11}{2} {}^{(3)}H_{ik} - \frac{1}{2} {}^{(1)}H_{ik} - \frac{51}{2} \kappa^2 J_{ik} \right). \quad (13.132)$$

Топологическое слагаемое $\Delta T_{ik}^{(1/2)}$ вычисляется по аналогии со случаем скалярного поля, только теперь для суммирования по полужелым значениям λ в (13.115) следует использовать формулу (4.15). При $m = 0$ получаем [82, 311, 266]:

$$\Delta T_{ik}^{(1/2)}(m=0) = \frac{2}{\pi^2} J_{ik} \int_0^\infty d\lambda \frac{\lambda^3 + \lambda/4}{\exp(2\pi\lambda) + 1} = \frac{17}{960\pi^2} J_{ik}. \quad (13.133)$$

В случае безмассового спинорного поля $\langle T_{ik}^{(1/2)} \rangle_{m=0}$ и $\langle T_{ik}^{(1/2)} \rangle_{\text{reg}} = \langle T_{ik}^{(1/2)} \rangle_0$. При этом согласно (13.132) и (13.133) в квазивеклидовой и сферической моделях

$$\langle T_{ik}^{(1/2)} \rangle_{\text{reg}}^{(m=0)} = \frac{1}{1440\pi^2} \left(\frac{11}{2} {}^{(3)}H_{ik} - \frac{1}{2} {}^{(1)}H_{ik} \right), \quad (13.134)$$

а в гиперболической модели к этому выражению добавляется член $-17J_{ik}/960\pi^2$ (см. также [313, 314]).

С помощью (13.128) находим аномальный след ТЭИ безмассового спинорного поля

$$\langle T_i^{(1/2)t} \rangle_{\text{reg}}^{(m=0)} = \frac{1}{1440\pi^2} \left[-\frac{11}{2} \left(R^{lm} R_{lm} - \frac{1}{3} R^2 \right) + 3\nabla^l \nabla_l R \right] \quad (13.135)$$

[отличие от (12.65) на множитель 2 объясняется тем, что мы рассматриваем спинорное поле с двумя состояниями спиральности, тогда как в (12.65) приведен результат для нейтрино].

Приведем значение регуляризованного ТЭИ для безмассовых векторных частиц (фотонов) [314]. Для моделей с $\kappa = 0, +1$

$$\langle T_{ik}^{(1)} \rangle_{\text{reg}}^{(m=0)} = \frac{1}{2880\pi^2} [62 {}^{(3)}H_{ik} - 3 {}^{(1)}H_{ik}],$$

а для гиперболической модели к этому выражению добавляется величина $-61J_{ih}/1440\pi^2$.

Квазиевклидова модель с $a(\eta) = 0$ — это пространство Минковского. В этом случае, как и должно быть, $\langle T_{ik}^{(s)} \rangle_{\text{reg}} = 0$ для всех полей (независимо от массы). В статическом гиперболическом пространстве поляризация вакуума также отсутствует. В сферическом же пространстве с $a = \text{const}$ (так называемая модель Эйнштейна) $\langle T_{ik}^{(s)} \rangle_{\text{reg}}$ сводится к одним лишь топологическим слагаемым.

Принципиальный интерес представляет метрика с $\kappa = -1$ и масштабным фактором $a(\eta) = a_0 \exp \eta$ (так называемая метрика Милна). Легко убедиться, что она описывает часть пространства — времени Минковского. Как показывает непосредственный расчет, средние ТЭИ (13.110), (13.111) по вакуумному состоянию, совпадающему с обычным вакуумом пространства Минковского, тождественно обращаются в нуль, как и должно быть в плоском пространстве — времени. Это является дополнительным аргументом в пользу правильности использованной здесь процедуры регуляризации.

Следует заметить, что слагаемые с ${}^{(1)}H_{ih}$ в (13.127) и (13.134) содержат третью и четвертую производные от масштабного фактора. Как отмечалось в § 12.1, подобные слагаемые радикальным образом меняют характер уравнений Эйнштейна в самосогласованной задаче [см. (12.2)]. Однако то обстоятельство, что ${}^{(1)}H_{ih}$ получается как вариационная производная от $\int d^4x \sqrt{-g} R^2$ [см. (12.49)] дает возможность устранить эти слагаемые из $\langle T_{ik}^{(s)} \rangle_{\text{reg}}$ путем перенормировки константы β_0 в затравочном лагранжиане (12.13). При этом и в статическом гиперболическом пространстве $\langle T_{ik}^{(s)} \rangle_{\text{reg}} \neq 0$.

§ 13.7. Расчет рождения частиц и поляризации вакуума во фридмановских космологических моделях

В настоящем параграфе изложенная выше теория, относящаяся к произвольному однородному изотропному пространству, применена к космологическим моделям Фридмана. Как известно, модель Фридмана лежит в основе современной теории горячей Вселенной, которая находит свое подтверждение во всей совокупности наблюдательных данных [245, 289].

Общим свойством фридмановских моделей Вселенной является наличие сингулярности: в некоторый момент, принимаемый обычно за начало отсчета времени $t = 0$, масштабный фактор $a(t)$ обращается в нуль. При этом параметр Хаббла $h = (1/a)(da/dt)$, а также инварианты гравитационного поля обращаются в бесконечность. Как следует из оценок, приведенных в начале этой главы, именно вблизи сингулярности следует ожидать существенных квантовых эффектов.

Наблюдаемая изотропия реликтового излучения свидетельствует о том, что расширение Вселенной происходило изотропно, начиная,

по-видимому с $t \sim t_{pl}$ от сингулярности [245]. Квантовые эффекты гравитации могли быть существенны лишь в эпоху $t \lesssim t_{pl}$. В то же время, как показано ниже, характерным временем, когда рождение частиц массы m происходит наиболее интенсивно, является комптоновское время $t_c = m^{-1} \sim 10^{-21}$ с (для электрона). Неравенство $t_{pl} \ll t_c$ оправдывает рассмотрение рождения частиц в рамках квантовой теории во внешнем гравитационном поле.

Поскольку нас интересует эпоха, близкая к сингулярности, предположим, что масштабный фактор зависит от времени по степенному закону

$$a(t) = a_0 t^q, \quad 0 < q < 1, \quad (13.136)$$

или, в терминах «конформного» времени η (13.3),

$$a(\eta) = a_1 \eta^p, \quad (13.137)$$

где $a_1 = (1 - q)^{q/(1-q)} a_0^{1/(1-q)}$; $p = q/(1 - q)$; $0 < p < \infty$.

Действительно, для реальных моделей Вселенной плотность вещества, задающего метрику, не слишком сильно отличается от критической плотности, при которой 3-пространство будет плоским [245, 289]. В этом случае в эпоху $t \sim t_c = m^{-1}$ влияние пространственной кривизны на расширение еще очень мало, т. е. радиус кривизны $a(t_c) \gg m^{-1}$. Поэтому $ma_1 \gg 1$, $\eta \ll 1$ (для электронов $ma_1 \gtrsim 10^{37}$) и эволюцию всех трех моделей — открытой, закрытой и квазиевклидовой — вблизи сингулярности можно описывать законом (13.136), (13.137).

Связь между плотностью энергии ε_b и давлением P_b фонового вещества, которое задает метрику, эволюционирующую по закону (13.136), имеет вид $P_b = (2/3q - 1)\varepsilon_b$.

В теории горячей Вселенной при $t < t_* \sim 10^{13}$ с фон является радиационно-доминированным: $P_b = \varepsilon_b/3$. При этом $a(t) = a_0 t^{1/2}$. Однако, поскольку здесь речь будет идти об эпохе, весьма близкой к сингулярности, когда плотность вещества фона настолько велика, что о его уравнении состояния можно только строить гипотезы, не будем фиксировать значение q (в 13.136). (Значения $q < 1/3$, по-видимому, физически нереализуемы, так как в подобном веществе скорость звука будет превышать скорость света.)

Чтобы исключить влияние области $0 < t < t_{pl}$, о которой мы вообще не имеем никакой информации, предположим, что при $t \lesssim t_{pl}$ масштабный фактор изменяется по закону вида (13.137) с достаточно большим значением p , чтобы нужное число производных от $a(\eta)$ при $\eta \rightarrow 0$ обращалось в нуль.

Ниже вычислены плотность и числа рожденных частиц и вакуумное среднее ТЭИ скалярного и спинорного полей. При этом предполагается, что вакуумное состояние $|0\rangle$ задается в самой сингулярности, при $t = \eta = 0$. Возможность такой постановки задачи объясняется тем, что, как показано ниже, нелокальные квантовые эффекты наиболее существенны при $t \sim m^{-1}$ (и отсутствуют для безмассовых полей), локальные же эффекты от наличия сингулярности в прошлом не зависят.

Напомним, что локальные члены в $\langle T_{ik} \rangle_{\text{reg}}$, не обращающиеся в нуль при $m = 0$, найдены в предыдущем параграфе; их роль во фридмановской Вселенной обсуждается ниже. Сейчас же займемся вычислением плотности числа рожденных частиц $n^{(s)}(\eta)$ и той части $\langle T_{ik}^{(s)} \rangle_{\text{reg}}$, которая отлична от нуля лишь для массивного поля [$\langle T_{ik}^{(s)} \rangle_m$ в (13.117)].

Основными величинами, описывающими квантовые эффекты массивного поля, являются введенные в (13.97) функции $s_\lambda(\eta)$ и $u_\lambda(\eta)$. Они вместе с $v_\lambda(\eta)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (13.98) с начальными условиями вида (13.101) при $\eta = 0$. Вместо системы (13.98) иногда удобнее использовать эквивалентную ей систему интегральных уравнений (13.102).

При $q \leq 1/3$ в скалярном случае ($q \leq 1/2$ в спинорном) в выражениях для физических величин возникают дополнительные нелокальные расходимости, связанные с сингулярностью при $t = 0$. Поскольку характер метрики в непосредственной близости от сингулярности неизвестен, то ниже эти случаи не рассматриваются. Если же $q > 1/3$ ($q > 1/2$), то точка $\eta = 0$ есть регулярная точка для систем (13.98) и (13.102), а поэтому начальные условия можно задавать в самой сингулярности.

Для вычисления интересующих нас величин необходимо найти функции $s_\lambda(\eta)$ и $u_\lambda(\eta)$ во всей области $0 < \lambda < \infty$. Это удастся сделать в двух предельных случаях: $t \ll m^{-1}$ и $t \gg m^{-1}$.

Сначала рассмотрим скалярное поле. В этом случае

$$\omega^{(0)} = m^2 a a_0 \omega^{-2} = p m^2 a_0^2 \eta^{2p-1} \omega^{-2}.$$

Пусть сперва $t \ll m^{-1}$. Интервал $0 < \lambda < \infty$ можно разбить на две области: $\lambda \ll \eta^{-1}$ и $\lambda \gg m a$. Поскольку $m a \eta = m t / (1 - q) \ll 1$, эти области перекрываются.

В области $\lambda \ll \eta^{-1}$ справедлива оценка

$$\Theta(\eta) = \int_0^\eta \sqrt{\lambda^2 + m^2 a^2} d\eta' \leq \lambda \eta + m t / (1 - q) \ll 1. \quad (13.138)$$

При этом согласно (13.102) можно положить $v_\lambda(\eta) = 0$ и тогда система (13.98) легко решается:

$$s_\lambda(\eta) = (\omega - \lambda^2) / 4\omega\lambda, \quad u_\lambda(\eta) = m^2 a^2(\eta) / 2\omega\lambda. \quad (13.139)$$

В области $\lambda \gg m a$ величины $s_\lambda, u_\lambda \ll 1$. Для их нахождения можно использовать первую итерацию уравнений (13.102), полагая $\omega \approx \approx \lambda, \Theta \approx \lambda \eta$:

$$\left. \begin{aligned} u_\lambda &= \frac{p m^2 a_1^2}{\lambda^2} \int_0^\eta \eta_1^{2p-1} \cos 2\lambda \eta_1 d\eta_1, \\ s_\lambda &= \frac{p^2 m^4 a_1^4}{4\lambda^4} \int_0^\eta d\eta_1 \eta_1^{2p-1} \int_0^{\eta_1} d\eta_2 \eta_2^{2p-1} \cos 2\lambda(\eta_1 - \eta_2). \end{aligned} \right\} (13.140)$$

Для вычисления интегралов по λ удобно ввести переходный импульс λ_0 , такой, что $ma \ll \lambda_0 \ll \eta^{-1}$ и в интервале $(0, \lambda_0)$ пользоваться приближением (13.139), а в интервале (λ_0, ∞) — приближением (13.140). При этом λ_0 из ответа выпадает.

Таким образом, согласно (13.88), находим плотность числа рожденных пар [119, 229]

$$n^{(0)}(t) = \frac{1}{2\pi^2 a^3} \int_0^\infty d\lambda \lambda^2 s_\lambda = \frac{m^3}{24 \pi^2}. \quad (13.141)$$

Фактически в $n^{(0)}(t)$ область $\lambda \gg ma$ вклада не дает; результат (13.141) определяется областью $\lambda \sim ma$, что соответствует физическим импульсам $k = \lambda/a \sim m$. Для таких импульсов расширение происходит антиадиабатично, почему и достаточно ограничиться приближением внезапных возмущений (13.139) [ср. с (13.70), где следует положить $a_- = 0$].

Очевидно, $n^{(0)}(t)$ в первом приближении не зависит от закона расширения $a(t)$ [необходимо лишь, чтобы интеграл $\int_0^t dt/a(t)$ сходил-ся]. Поправки к (13.141) имеют порядок $m^3(mt)$ и уже зависят от вида $a(t)$.

Тот факт, что $n^{(0)}(t)$ не зависит от времени, означает, что рождение частиц компенсирует уменьшение их плотности за счет расширения Вселенной. Число частиц в «лагранжевом» объеме $V(t) \sim a^3(t)$ -

$$N_V^{(0)} = n^{(0)}(t)V(t) \sim (mt)^{3q}, \quad (13.142)$$

очевидно, возрастает.

Перейдем к вакуумным средним ТЭИ скалярного поля. Согласно сказанному выше, необходимо найти лишь определенную в (13.118) часть $\langle T_{ik} \rangle_m$, причем в силу изотропии, достаточно вычислить плотность энергии $\varepsilon^{(0)}$ и давление $P^{(0)}$:

$$\varepsilon^{(0)} = \langle T_0^{(0) 0} \rangle_m, \quad P^{(0)} = -\langle T_\alpha^{(0) \alpha} \rangle_m. \quad (13.143)$$

Поскольку интегралы от обоих слагаемых в (13.118) сходятся, их можно вычислить по отдельности. Представим в соответствии с этим $\varepsilon^{(0)}$ и $P^{(0)}$ в виде

$$\varepsilon^{(0)} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad P^{(0)} = P_1 + P_2. \quad (13.144)$$

Сначала вычислим ε_2 и P_2 . Заменяя в определении величин $\mathcal{T}_{ik}^{(0)}$ (13.106) s_λ , u_λ на s_2 , u_2 из (13.109) и используя явный вид $a(\eta)$ и связь η и t , находим

$$\varepsilon_2 = -\frac{1}{\pi^2 a^4} \int_0^\infty d\lambda \lambda^2 \omega s_2 = -\frac{q^2 m^2}{48 \pi^2 t^2}, \quad (13.145)$$

$$P_2 = -\frac{1}{3\pi^2 a^4} \int_0^\infty d\lambda \lambda^2 \left[\frac{\lambda^2}{\omega} s_2 - \frac{m^2 a^2}{2\omega} u_2 \right] = \frac{q(3q-2)m^2}{144\pi^2 t^2}.$$

Отметим, что ε_2 и P_2 имеют локальный характер и выражения (13.145) справедливы при любых t .

Расчет слагаемых ε_1 и P_1 в (13.144) проводится с помощью перекрывающихся асимптотик (13.139) и (13.140) по той же схеме, что и расчет $n^{(0)}(t)$. Здесь вносят вклад как область $\lambda < \lambda_0$, так и $\lambda > \lambda_0$, причем в последней интегрирование по λ удобно выполнить до интегрирования по η_1 и η_2 в (13.140) (подробности см. в [119]). В результате находим

$$\varepsilon_1 = \frac{m^4}{16\pi^2} \left(\ln \frac{1}{mt} + D \right), \quad P_1 = -\frac{m^4}{16\pi^2} \left(\ln \frac{1}{mt} + D - \frac{1}{3q} \right), \quad (13.146)$$

где $D = \Psi \left(\frac{1+q}{1-q} \right) + \ln(1-q) + \frac{1}{4q} - \frac{1}{2}$, $\Psi(z)$ — логарифмическая производная гамма-функции. При $q = 1/2$ (радиационно-доминированный фон) имеем $D = -C - \ln 2 + 3/2$, $C = 0,577\dots$ — постоянная Эйлера.

С точки зрения изложенной в § 13.5 корпускулярной интерпретации ε_1 и P_1 определяют плотность энергии и давление рожденных частиц, тогда как локальные члены ε_2 , P_2 описывают поляризацию вакуума. Очевидно, что $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_2$ и $P_1 \ll P_2$ (за исключением случая пылевидного фона с $q = 2/3$, когда $P_2 = 0$). При этом условие консервативности, которое в изотропном пространстве можно записать в виде $\dot{\varepsilon} = -3\dot{a}(\varepsilon + P)/a$, выполняется в отдельности для ε_1 , P_1 и ε_2 , P_2 .

Заметим, что справедливо приближенное равенство $P^{(0)} \approx \approx (2/3q - 1)\varepsilon^{(0)}$, т. е. вакуумное среднее $\langle T_i^{(0)k} \rangle_m$ удовлетворяет тому же уравнению состояния, что и вещество фона.

Очевидно, что $\varepsilon^{(0)} < 0$. Это значит, что нарушается условие энергодоминантности (12.6), что и должно иметь место при рождении частиц. В то же время плотность энергии и давление рождающихся частиц ε_1 и P_1 удовлетворяет приближенно «вакуумоподобному» [315, 316] уравнению состояния $P_1 \approx -\varepsilon_1$. При этом $\varepsilon_1 + P_1 \approx \approx m^4/48\pi^2 q > 0$, но $\varepsilon_1 + 3P_1 < 0$, т. е. нарушается сильное энергетическое условие (12.11).

Плотность энергии фонового вещества, задающего метрику с масштабным фактором (13.136), есть

$$\varepsilon_b \approx (3/8\pi G)(q^2/t^2) \quad (13.147)$$

(в моделях с $\kappa = \pm 1$ — приближенно, а в квазиевклидовой модели — точно). Сравнивая это с $\varepsilon^{(0)}$, видим, что $|\varepsilon^{(0)}/\varepsilon_b| \sim Gm^2 \sim \sim 10^{-46}$. Малость этого отношения показывает, что часть $\langle T_{ik}^{(0)} \rangle_m$ вакуумного среднего ТЭИ (для обычных элементарных частиц) оказывает пренебрежимое влияние на метрику пространства—времени.

Выражения (13.146) относятся, строго говоря, к моделям открытого типа с $\kappa = -1, 0$. Вследствие условия $ma_1 \gg 1$ они являются верными и для закрытой модели ($\kappa = +1$), за исключением очень

малого отрезка времени в начале расширения ($t \lesssim m^{-1}(ma_1)^{(q-1)/q}$), когда $ma(\eta) \lesssim 1$. Для реальных моделей Вселенной ma_1 настолько велико, что при $t > t_{pl}$ формулы (13.146) уже справедливы.

Предыдущее рассмотрение относилось к эпохе $t \ll m^{-1}$. Перейдем теперь к противоположному случаю $t \gg m^{-1}$.

Здесь удобнее исходить из уравнений (13.79) для $\alpha_\lambda(\eta)$ и $\beta_\lambda(\eta)$. В первом приближении по параметру $(mt)^{-1} \ll 1$ их решение имеет вид

$$\begin{aligned}\alpha_\lambda(\eta) &\approx \alpha_0 - \frac{i\dot{\omega}}{4\omega^2} \beta_0^* \exp(2i\Theta), \\ \beta_\lambda^*(\eta) &\approx \beta_0^* + \frac{i\dot{\omega}}{4\omega^2} \alpha_0 \exp(-2i\Theta),\end{aligned}\tag{13.148}$$

где $\alpha_0 = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \alpha_\lambda(\eta)$, $\beta_0 = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \beta_\lambda(\eta)$ — функции λ . Существование этих предельных значений следует из того, что $\omega^{(0)} \rightarrow 0$ при любом λ , и означает, что при $\eta \rightarrow \infty$ рождение частиц прекращается.

Согласно (13.97) получаем в том же приближении

$$\left. \begin{aligned}s_\lambda(\eta) &= n^{(0)}(\lambda) + s_2 + A(\lambda, \eta), \\ u_\lambda(\eta) &= u_2 + B(\lambda, \eta),\end{aligned} \right\}\tag{13.149}$$

где $n^{(0)}(\lambda) = |\beta_0|^2$, s_2 и u_2 — те же, что и в (13.109), а $A(\lambda, \eta)$, $B(\lambda, \eta)$ — осциллирующие члены, вклады которых в последующие интегралы пренебрежимо малы (и потому ниже они опущены). Величина $n^{(0)}(\lambda)$ есть предельная функция распределения рожденных частиц по импульсам при $\eta \rightarrow \infty$.

Плотность числа рожденных пар при $t \gg m^{-1}$ есть

$$n^{(0)}(t) = \frac{1}{2\pi^2 a^3} \int_0^\infty d\lambda \lambda^2 n^{(0)}(\lambda) + \frac{mh^2}{512\pi},\tag{13.150}$$

где $h = q/t$ — параметр Хаббла для закона расширения (13.136). Основной вклад в интеграл от $n^{(0)}(\lambda)$ дает область малых импульсов $k = \lambda/a \sim m(mt)^{-q} \ll m$. С учетом этого получаем

$$n^{(0)}(t) = K^{(0)} m^3 (mt)^{-3q} + \frac{q^2 m}{512\pi t^2},\tag{13.151}$$

где $K^{(0)}$ — постоянная, зависящая от q (выражение для плотности числа рожденных пар, имеющее вид второго слагаемого (13.150), получено в работах [317, 318] из иных соображений). При $q = 1/2$ численное интегрирование приведенного ниже точного выражения для $n^{(0)}(\lambda)$ (13.158) дает $K^{(0)} = 5,3 \cdot 10^{-4}$. При $0 < q < 2/3$ первое слагаемое в (13.151) доминирует. Число частиц в лагранжевом объеме $V(t)$ в этом случае постоянно:

$$N^{(0)} = n^{(0)}(t)V(t) \sim n^{(0)}(t)t^{3q} = \text{const}.\tag{13.152}$$

Переходя к вычислению $\varepsilon^{(0)}$ и $P^{(0)}$, замечаем, что слагаемые в ε_1 , P_1 , содержащие s_2 и u_2 согласно (13.149), сокращаются с ε_2 и P_2 [см. (13.145)]. Вкладом же слагаемых $A(\lambda, \eta)$ и $B(\lambda, \eta)$ в s_λ и u_λ , как сказано выше, можно пренебречь. В результате получаем [119]

$$\varepsilon^{(0)} = \frac{1}{\pi^2 a^3} \int_0^\infty d\lambda \lambda^2 \omega n^{(0)}(\lambda) \approx 2K^{(0)} m^4 (mt)^{-3q}, |P^{(0)}| \ll \varepsilon^{(0)}. \quad (13.153)$$

Здесь стоит та же постоянная $K^{(0)}$, что и в (13.151), поскольку значения обоих интегралов определяются областью $\lambda \ll ma$. Очевидно, что формулы (13.153) описывают газ нерелятивистских частиц ($\varepsilon^{(0)} \approx \approx 2mn^{(0)}$, давление малó), плотность которого убывает в соответствии с расширением Вселенной.

Из этих результатов следует, что при $t \gg m^{-1}$ процесс рождения частиц практически завершился: формулы (13.153) описывают реальные частицы, рожденные в более раннюю эпоху. Сравнение с аналогичными формулами для $t \ll m^{-1}$ (см. выше) показывает, что наиболее интенсивно процесс рождения происходит при $t \sim m^{-1}$.

Исследуем предельную функцию распределения $n^{(0)}(\lambda)$. При $a(t) = a_0 t^q$ эта функция зависит только от безразмерного параметра

$$\delta = \lambda/m^{1-q} a_0 = (1-q)^q \lambda/(ma_1)^{1-q} \quad (13.154)$$

и имеет смысл отношения $k/m = \lambda/ma$ в момент $t = m^{-1}$.

При $\delta \ll 1$ [$\lambda \ll (ma_1)^{1-q}$; напомним, что $ma_1 \gg 1$] в уравнении (13.31) можно пренебречь величиной λ^2 по сравнению с $m^2 a^2$. Тогда решение этого уравнения с начальными условиями $g_\lambda(0) = \lambda^{-1/2}$, $g'_\lambda(0) = i\lambda^{1/2}$ [при $\eta_0 = 0$, $\omega(\eta_0) = \lambda$] есть

$$g_\lambda = \lambda^{-1/2} \Gamma[(1+q)/2] (mt/2)^{(1-q)/2} J_{-(1-q)/2}(mt) \quad (13.155)$$

[$J_\nu(z)$ — функция Бесселя]. Вычисляя $n^{(0)}(\delta) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} |\beta_\lambda(\eta)|^2$ с помощью (13.74) и (13.76), получаем при $\delta \ll 1$

$$n^{(0)}(\delta) = (1/\pi) 2^{q-2} \Gamma^2[(1+q)/2] \delta^{-1}. \quad (13.156)$$

При $\delta \gg 1$ величина $n(\delta)$ в основном определяется поведением $a(t)$ вблизи $t = 0$, поэтому можно формально применять теорию возмущений [в данном случае возмущением является величина $U(\eta) = -m^2 a^2(\eta) \theta(\eta)$]. Вычисления дают [119]

$$n^{(0)}(\delta) = \frac{1}{16} \left(\frac{1-q}{2} \right)^{4q/(1-q)} \Gamma^2 \left(\frac{1+q}{1-q} \right) \delta^{-4/(1-q)}. \quad (13.157)$$

Таким образом, $n^{(0)}(\delta) \sim \delta^{-1}$ при $\delta \ll 1$ и $n^{(0)}(\delta) \sim \delta^{-4/(1-q)}$ при $\delta \gg 1$.

При $q = 1/2$ удается найти точное выражение для $n^{(0)}(\delta)$ [119]:

$$n^{(0)}(\delta) = \frac{\pi}{\sqrt{2} \delta} \exp\left(-\frac{\pi\delta^2}{2}\right) \left[\left| \Gamma\left(\frac{1}{4} + i\frac{\delta^2}{2}\right) \right|^{-2} + \frac{\delta^2}{2} \left| \Gamma\left(\frac{3}{4} + i\frac{\delta^2}{2}\right) \right|^{-2} \right] - \frac{1}{2}. \quad (13.158)$$

Теперь рассмотрим спинорное поле; в этом случае в уравнениях для s_λ и u_λ коэффициент $\omega^{(1/2)} = \lambda m a \omega^{-2} = \rho \lambda m a_0 \eta^{\rho-1} \omega^{-2}$. Методика расчета $n^{1/2}(t)$ такая же, как и для скалярного поля.

При $t \ll m^{-1}$, как и в скалярном случае, находим перекрывающиеся асимптотики $s_\lambda(\eta)$ и $u_\lambda(\eta)$ решений системы (13.98) с $\omega^{(1/2)}$. При $\lambda \ll \eta^{-1}$ приближение внезапных возмущений дает $v_\lambda(\eta) = 0$, а

$$s_\lambda(\eta) \approx (1/2)(1 - \lambda/\omega), \quad u_\lambda(\eta) \approx m a / \omega, \quad (13.159)$$

в то время как при $\lambda \gg m a$ из (13.102) получаем

$$\left. \begin{aligned} u_\lambda(\eta) + i v_\lambda(\eta) &= \frac{\rho m a_1}{\lambda} \exp(2i\lambda\eta) \int_0^\eta d\eta_1 \eta_1^{\rho-1} \exp(-2i\lambda\eta_1) = \\ &= \frac{m a(\eta)}{\lambda} \exp(2i\lambda\eta) \Phi(\rho, \rho+1; -2i\lambda\eta); \\ s_\lambda(\eta) &= \frac{m^2 a^2(\eta)}{4\lambda^2} |\Phi(\rho, \rho+1; -2i\lambda\eta)|^2, \end{aligned} \right\} \quad (13.160)$$

где $\Phi(\alpha, \beta, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Интегрирование по λ согласно (13.96) дает плотность числа рожденных пар в квазиевклидовой модели ($\kappa = 0$) [277, 308, 319]

$$n^{(1/2)}(t) = \frac{1}{\pi^2 a^3} \int_0^\infty d\lambda \lambda^2 s_\lambda = \frac{q^2}{3q-1} \frac{m^2}{8\pi t} \quad (13.161)$$

[в интервале $(0, \lambda_0)$ берем s_λ из (13.159), а в интервале (λ_0, ∞) — из (13.160), причем в последнем случае используем интегральное представление

$$|\Phi(\rho, \rho+1; ix)|^2 = \frac{\rho^2 \Gamma(\rho)}{x^\rho} \int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{\operatorname{ch} t} \exp[(1-\rho)t] J_\rho\left(\frac{x}{\operatorname{ch} t}\right),$$

которое можно получить из формул, приведенных в [320]. Поправки к (13.161) имеют порядок m^3 . Очевидно, что уже в первом приближении $n^{(1/2)}(t)$ зависит от показателя q в законе расширения (13.136). Число частиц в лагранжевом объеме увеличивается со временем: $N_V^{(1/2)} = n^{(1/2)}(t)V(t) \sim (mt)^{3q-1}$. Заметим, что основной вклад в интеграл (13.161) дает область импульсов $k = \lambda/a \sim 1/t \gg m$.

В моделях с $\kappa = \pm 1$ при условии $ma_1 \gg 1$ и $t > t_{pl}$ поправки в (13.161) малы. Например, в открытой модели поправка из-за наличия члена $-\kappa/4$ в (13.96) равна [298]

$$\Delta n^{(1/2)} = m/8\pi^2 a^2 (t). \quad (13.162)$$

Перейдем к вычислению $\langle T_{ik}^{(1/2)} \rangle_m$. Поскольку оба интеграла в выражениях (13.119) расходятся, вычитание должно проводиться до интегрирования по λ . Вычисление с использованием (13.159) и (13.160), а также s_2 и u_2 из (13.109) с $\omega^{(1/2)}$ дает при $t \ll m^{-1}$ [277, 321]:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(1/2)} &= -\frac{q^2}{8\pi^2} \frac{m^2}{t^2} \left(\ln \frac{1}{mt} + C_0 \right), \\ P^{(1/2)} &= -\left(\frac{2}{3q} - 1 \right) \frac{q^2}{8\pi^2} \frac{m^2}{t^2} \left(\ln \frac{1}{mt} + C_0 - \frac{1}{3q-2} \right), \end{aligned} \quad (13.163)$$

где C_0 — константа, зависящая от закона расширения. Напомним, что при выводе (13.163) предполагалось $q > 1/2$. Однако этот результат применим на радиационно-доминированной стадии расширения в адронную эру ($t < 10^{-6}$ с), поскольку в то время во Вселенной имелись массивные частицы и показатель q следует считать несколько превосходящим $1/2$.

Очевидно, что условие энергодоминантности здесь также нарушается. Отношение $\varepsilon^{(1/2)}$ к плотности энергии фона при $t \ll m^{-1}$ есть $\varepsilon^{(1/2)}/\varepsilon_b \sim -Gm^2 \ln(1/mt)$.

Рассмотрим теперь эпоху $t \gg m^{-1}$. Решение системы (13.92) для α_λ и β_λ^* в первом приближении по $(mt)^{-1} \gg 1$ есть

$$\alpha_\lambda = \alpha_0 - \frac{\lambda m \dot{a}}{4\omega^3} \beta_0^* \exp(2i\Theta), \quad \beta_\lambda^* = \beta_0^* + \frac{\lambda m \dot{a}}{4\omega^3} \alpha_0 \exp(-2i\Theta), \quad (13.164)$$

где α_0 , β_0 — предельные значения $\alpha_\lambda(\eta)$ и $\beta_\lambda(\eta)$ при $\eta \rightarrow \infty$. Вычисляя s_λ и u_λ согласно (13.97), находим, что они по-прежнему даются формулами (13.149), только теперь s_2 и u_2 совпадают с (13.109) при $\omega^{(s)} = \omega^{(1/2)}$. Предельная функция распределения $n(\delta) = |\beta_0|^2 [\delta - \text{безразмерный параметр, введенный в (13.154)}]$ имеет асимптотики

$$n(\delta) \sim \begin{cases} \frac{1}{2} - \delta \Gamma(1-q) 2^{q-1} \cos \frac{\pi q}{2}, & \delta \ll 1, \\ \left(\frac{1-q}{2} \right)^{2/(1-q)} \Gamma^2 \left(\frac{1}{1-q} \right) \delta^{-2/(1-q)}, & \delta \gg 1. \end{cases} \quad (13.165)$$

Вычисляя $n^{(1/2)}$, $\varepsilon^{(1/2)}$ и $P^{(1/2)}$ с учетом того, что при $t \gg m^{-1}$ основной вклад дают $\lambda \ll ma$ ($k \ll m$), находим

$$\begin{aligned} n^{(1/2)}(t) &\approx K^{(1/2)} m^3 (mt)^{-3q} + \frac{3q^2 m^2}{256\pi t^2}, \\ \varepsilon^{(1/2)}(t) &\approx 2K^{(1/2)} m^4 (mt)^{-3q}, \quad |P^{(1/2)}| \ll \varepsilon^{(1/2)}, \end{aligned} \quad (13.166)$$

где $K^{(1/2)}$ — постоянная, зависящая от q ; для $q = 1/2$ численный расчет дает $K^{(1/2)} = 3,9 \cdot 10^{-3}$ [322]. Очевидно, результаты (13.166) при $t \gg m^{-1}$ аналогичны результатам (13.151), (13.153) для скалярных частиц.

Найдем отношение плотности энергии поля к плотности энергии вещества фона (13.147) при $t \gg m^{-1}$. Как в скалярном, так и в спинорном случаях имеем

$$\varepsilon^{(s)}/\varepsilon_b \sim Gm^2 (mt)^{2-3q}. \quad (13.167)$$

Очевидно, что это отношение при $q < 2/3$ растет. В эпоху t_* , когда вещество фона остывает настолько, что $P_b = 0$ (показатель q становится равным $2/3$), отношение (13.167) замораживается:

$$\varepsilon^{(s)}/\varepsilon_b \sim Gm^2 (mt_*)^{2-3q}. \quad (13.168)$$

Если при $t < t_*$ считать $q = 1/2$ и $t_* \sim 10^{13}$ с [289], то получаем $\varepsilon^{(s)}/\varepsilon_b \sim 10^{-28}$.

До сих пор рассматривалась часть ТЭИ, связанная с рождением массивных частиц. Обратимся теперь к вычисленным в предыдущем параграфе слагаемым $\langle T_{ik} \rangle_0$, которые отличны от нуля и при $m = 0$. Из (13.121) и (13.131) очевидно, что при законе расширения (13.137) соответствующие плотность энергии $\varepsilon_0^{(s)}$ и давление $P_0^{(s)}$, определяемые как

$$\varepsilon_0^{(s)} = \langle T_0^{(s)0} \rangle_0, \quad P_0^{(s)} = - \langle T_\alpha^{(s)\alpha} \rangle_0, \quad (13.169)$$

имеют порядок $\varepsilon_0^{(s)} \sim P_0^{(s)} \sim 1/t^4$. Сравнивая $\varepsilon_0^{(s)}$ с плотностью энергии вещества фона (13.147), видим, что даже в эпоху $t \sim m^{-1}$ роль этих членов пренебрежимо мала. Однако при $t \sim t_{pl} = G^{1/2}$ имеем $\varepsilon_0^{(s)} \sim \varepsilon_b$, так что влияние этих членов на эволюцию Вселенной существенно.

Рассмотрим в качестве примера самосогласованную задачу типа (12.2), в которой метрика полностью определяется вакуумным средним ТЭИ скалярного или спинорного полей. В соответствии с замечанием § 13.6, слагаемые в выражениях (13.127), (13.132), содержащие ${}^{(1)}H_{ik}$, можно отбросить, после чего вакуумные средние при $\kappa = 0$, $+1$ принимают вид:

$$\langle T_{ik}^{(s)} \rangle_{\text{reg}} = \frac{A^{(s)}(c^2 + \kappa)}{480\pi^2 a^2} \left(\begin{array}{c|c} c^2 + \kappa & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{3}(c^2 - 4c + \kappa) \gamma_{\alpha\beta} \end{array} \right).$$

Здесь $c = \dot{a}/a$; $A^{(0)} = 1$; $A^{(1/2)} = 11/2$. Подставляя это выражение в правую часть (12.2) и решая дифференциальное уравнение относительно $a(\eta)$, получаем [381, 382]

$$a(\eta) = \begin{cases} a_1/\eta, & \kappa = 0; \\ a_1/\cos\eta, & \kappa = +1, \end{cases} \quad (13.170)$$

где $a_1 = (GA^{(s)}/180\pi)^{1/2}$.

Метрика (13.4) с масштабными факторами (13.170) определяют одно и то же пространство— время де Ситтера [54] с положительной кривизной $R = 2160\pi/GA^{(s)}$, которое в этом случае является само-согласованным решением уравнений (12.2). Следовательно, вакуумные квантовые эффекты могут полностью определять геометрию пространства—времени.

Глава 14. СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

§ 14.1. Спонтанное нарушение калибровочной симметрии в однородном изотропном пространстве открытого типа

Во второй части книги дано несколько примеров спонтанного нарушения симметрии скалярного поля с самодействием во внешних полях. К спонтанному нарушению симметрии приводит, в частности, взаимодействие с сильным статическим либо высокочастотным переменным электрическими полями (см. § 8.3, 9.3 и 10.2). Здесь будет показано, что гравитационное поле, описываемое метрикой однородного изотропного пространства открытого типа, также служит инициатором спонтанного нарушения симметрии в первоначально симметричной системе. Этот эффект представляет интерес, во-первых, потому, что дает механизм возникновения ненулевых масс элементарных частиц, обусловленных кривизной пространства—времени, т. е. в конечном счете наличием материи во Вселенной. Масса частицы и ее инерция возникают при этом по одной и той же причине. Во-вторых, эффект спонтанного нарушения симметрии в искривленном пространстве—времени позволяет связать единые калибровочные теории слабых, электромагнитных и сильных взаимодействий с возможным изменением геометрии на малых расстояниях. В большинстве из этих теорий спонтанное нарушение симметрии вводится искусственно путем приписывания отрицательного квадрата голой массы хиггсовской частице. В то же время экспериментальное установление составной природы адронов вызвало рост интереса к геометрическим моделям адрона [206], предполагающим изменение геометрии пространства на малых расстояниях.

Для возникновения спонтанного нарушения симметрии во внешнем гравитационном поле, вообще говоря, существенно то, что скалярное поле описывается уравнением с конформной связью (1.16). Тот факт, что при этом член $R/6$ может играть ту же роль, что и отрицательный квадрат массы, и приводить к спонтанному нарушению симметрии, указан впервые в работах [323, 324]. В частности, в работе [323] обнаружен эффект спонтанного нарушения симметрии в однородном изотропном пространстве—времени постоянной кри-

визны. Однако, как показано в работах [325, 326], эффект спонтанного нарушения симметрии связан не столько со знаком R , сколько с отрицательным знаком кривизны 3-пространства в моделях открытого типа. Так, эффект имеется в открытой модели Фридмана с уравнением состояния вещества фона $P_b = \varepsilon_b/3$, хотя в этом случае $R = 0$.

Рассмотрим самодействующее комплексное скалярное поле $\varphi(x)$ в открытой модели Фридмана с метрикой (13.4) при $\kappa = -1$, удовлетворяющее уравнению

$$\nabla_i \nabla^i \varphi(x) + (m^2 + R/6)\varphi(x) + (\Lambda/3)\varphi^*(x)\varphi^2(x) = 0, \quad (14.1)$$

где $\Lambda > 0$, которое конформно-инвариантно при $m = 0$. Оно является обобщением свободного уравнения (1.16) и получается как уравнение Эйлера из плотности лагранжиана

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}[g^{ik} \partial_i \varphi^* \partial_k \varphi - (m^2 + R/6)\varphi^* \varphi - (\Lambda/6)(\varphi^* \varphi)^2], \quad (14.2)$$

инвариантной относительно калибровочных преобразований вида $\varphi \rightarrow \varphi \exp(i\alpha)$, $\varphi^* \rightarrow \varphi^* \exp(-i\alpha)$. (В моделях закрытого типа эффект спонтанного нарушения имеет место, если $\Lambda < 0$).

Обозначим $|0\rangle$ гейзенберговское вакуумное состояние, определенное, как и в § 13,7, при $\eta = 0$. Из пространственной однородности рассматриваемой метрики вытекает, что если вакуумное среднее φ отлично от нуля, то оно может зависеть только от η :

$$\langle 0 | \varphi(\eta, \mathbf{x}) | 0 \rangle = \langle 0 | \varphi(\eta, 0) | 0 \rangle \equiv g(\eta). \quad (14.3)$$

Вследствие C -инвариантности состояния $|0\rangle$ величина g вещественна. Отличие g от нуля означает спонтанное нарушение калибровочной симметрии. Покажем, что такое нарушение действительно происходит в открытом пространстве Фридмана.

Усредняя уравнение (14.1) по состоянию $|0\rangle$ и полагая (в древесном приближении)

$$\langle 0 | \varphi^* \varphi^2 | 0 \rangle \approx \langle 0 | \varphi^* | 0 \rangle \langle 0 | \varphi | 0 \rangle^2 = g^3,$$

получаем с учетом (14.3)

$$\ddot{g} + \frac{2\dot{a}}{a} \dot{g} + \left(m^2 a^2 - 1 + \frac{\ddot{a}}{a} \right) g + \frac{\Lambda a^2}{3} g^3 = 0. \quad (14.4)$$

Делая в уравнении (14.4) замену

$$g(\eta) = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \frac{f(\eta)}{a(\eta)}, \quad (14.5)$$

получаем для функции $f(\eta)$ уравнение

$$\ddot{f} + (m^2 a^2 - 1) f + f^3 = 0. \quad (14.6)$$

Отметим, что слагаемое $-f$ в (14.6), играющее роль члена с отрицательным квадратом массы, появляется вследствие наличия у 3-пространства кривизны $\kappa = -1$.

Будем считать, что при $\eta = 0$ имеется сингулярность $a(0) = 0$. Это позволяет в качестве асимптотики решения (14.6) при $\eta \rightarrow 0$ взять решение уравнения Дюффинга

$$\ddot{f} - f + f^3 = 0. \quad (14.7)$$

Как известно [327], тривиальное решение этого уравнения $f = 0$ неустойчиво, устойчивыми же решениями являются $f(\eta) = \pm 1$. Поэтому в качестве начальных условий для решения (14.6) следует взять

$$f(0) = \pm 1, \quad \dot{f}(0) = 0. \quad (14.8)$$

Уравнение (14.6) имеет тогда ненулевое решение, соответствующее спонтанному нарушению симметрии. Отметим, что для безмассового поля (14.6) совпадает с (14.7) и устойчивые решения при всех η суть $f(\eta) = \pm 1$. В этом случае начальное условие можно задавать не в сингулярности, а в произвольный момент.

Итак, реализуется несимметричное вакуумное состояние $|0\rangle$. Оно должно быть энергетически более выгодным, чем симметричный вакуум. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим вакуумные средние от компонент метрического тензора энергии-импульса поля Φ , определенного равенством (1.23).

Усредняя этот тензор по состоянию $|0\rangle$ с использованием (14.3) и (14.5), получаем вакуумную плотность энергии и давление:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\eta) &= \langle 0 | T_0^0 | 0 \rangle = \frac{3f^2}{\Lambda a^4} \left(m^2 a^2 - 1 + \frac{f^2}{2} + \frac{\dot{f}^2}{f^2} \right), \\ P(\eta) &= -\langle 0 | T_\alpha^\alpha | 0 \rangle = \frac{f^2}{\Lambda a^4} \left(-m^2 a^2 - 1 + \frac{f^2}{2} + \frac{\dot{f}^2}{f^2} \right). \end{aligned} \quad (14.9)$$

В случае $m = 0$ из (14.9) вытекает более простой результат [325, 328]:

$$\varepsilon(\eta) = -3/2 \Lambda a^4(\eta), \quad P(\eta) = -1/2 \Lambda a^4(\eta). \quad (14.10)$$

Таким образом, для безмассового поля вакуумное состояние со спонтанно нарушенной калибровочной симметрией обладает отрицательной энергией и является предпочтительным (по сравнению с обладающим нулевой энергией симметричным состоянием) на всех стадиях эволюции. Полная энергия поля в вакуумном состоянии

$$E = \int_{\eta = \text{const}} d\sigma^i \langle 0 | T_{0i} | 0 \rangle,$$

являющаяся вакуумным средним от генератора масштабных преобразований (см. § 13.2), на нетривиальном решении (14.5) обращается в $-\infty$ (на тривиальном решении она равна нулю). Этот факт является следствием различия между энергиями, построенными по метрическому и каноническому тензору энергии-импульса, в случае,

когда временная координата определяется векторным полем, не являющимся полем Киллинга [13].

Для массивного поля плотность энергии $\varepsilon(\eta)$ из (11.9) отрицательна лишь в определенном интервале времени $(0, t_0)$. Предполагая, что масштабный фактор имеет вид $a(\eta) = a_1 \eta^p$, где $p > 0$ (см. § 13.7), получаем для t_0 оценку [326]

$$t_0 \approx [a_1/(p+1)] (\sqrt{2} m a_1)^{-(p+1)/p}. \quad (14.11)$$

Если положить $m \sim 10^{-25}$ г и учесть, что для реалистических моделей Вселенной выполняется условие $m a_1 \gtrsim 10^{39}$, то при $p = 1$ из (14.11) вытекает $t_0 \ll t_{pl} = \sqrt{G} \sim 10^{-43}$ с, а при $p = 2$ $t_0 \sim t_{pl}$ (G — гравитационная постоянная). При $t > t_0$ сколь угодно малые взаимодействия, не учтенные в лагранжиане (14.2), переводят систему в симметричное состояние, обладающее нулевой энергией. Поскольку при $t \leq t_{pl}$ приближение классического гравитационного поля неприменимо, эффект спонтанного нарушения симметрии рассматривается ниже только для безмассового поля при $t \gg t_{pl}$.

§ 14.2. Феномен Хиггса в однородном изотропном пространстве

Перейдем теперь, подобно модели Голдстоуна, от поля φ к полям φ_1^0, φ_2 с нулевыми вакуумными средними

$$\varphi = (\varphi_1 + i\varphi_2)/\sqrt{2}, \quad \varphi_1^0 = \varphi_1 - \sqrt{6/\Lambda} (f/a), \quad f = \pm 1 \quad (14.12)$$

и определим спектр масс физических частиц.

Подставляя (14.12) в (14.2) с использованием (14.4), для действия рассматриваемой модели получаем (c -числа и 4-дивергенции отброшены):

$$\begin{aligned} S = \int \mathcal{L} d^4 x = & \frac{1}{2} \int d^4 x \sqrt{-g} \left[g^{ik} \partial_i \varphi_1^0 \partial_k \varphi_1^0 - \left(\frac{3}{a^2} + \frac{R}{6} \right) \varphi_1^0{}^2 + \right. \\ & \left. + g^{ik} \partial_i \varphi_2 \partial_k \varphi_2 - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{R}{6} \right) \varphi_2^2 - \right. \\ & \left. - \sqrt{\frac{2\Lambda}{3}} \frac{f}{a} \varphi_1^0 (\varphi_1^0{}^2 + \varphi_2^2) - \frac{\Lambda}{12} (\varphi_1^0{}^2 + \varphi_2^2)^2 \right]. \quad (14.13) \end{aligned}$$

Таким образом, вследствие спонтанного нарушения симметрии вместо безмассового поля возникают два поля с отличными от нуля массами.

Перепишем теперь действие (14.13) в конформном исходному статическом пространстве — времени с метрическим тензором $\underline{g}_{ih} = = a^{-2} g_{ih}$. Согласно (1.17) новые полевые переменные связаны со ста-

рыми соотношениями $\tilde{\varphi}_1^0 = a\tilde{\varphi}_1^0$, $\varphi_2 = a\varphi_2$, так что (14.13) принимает вид

$$S = \frac{1}{2} \int d^4 x \sqrt{-g} \left[\tilde{g}^{ik} \partial_i \tilde{\varphi}_1^0 \partial_k \tilde{\varphi}_1^0 - 2\tilde{\varphi}^{0a} + \tilde{g}^{ik} \partial_i \tilde{\varphi}_2 \partial_k \tilde{\varphi}_2 - \right. \\ \left. - \frac{\Lambda}{12} (\tilde{\varphi}_1^{0a} + \varphi_2^a)^2 - \sqrt{\frac{2\Lambda}{3}} f \tilde{\varphi}_1^0 (\tilde{\varphi}_1^{0a} + \varphi_2^a) \right], \quad (14.14)$$

формально совпадающий с выражением для действия модели Голдстоуна [32].

В отличие от модели Голдстоуна здесь пространство является 3-гиперболоидом. Отрицательность его кривизны играет роль отрицательного квадрата массы в модели Голдстоуна и ведет к возникновению спонтанного нарушения симметрии.

Пусть теперь скалярное поле φ взаимодействует еще и с безмассовым векторным полем, описываемым потенциалом A_k . Пользуясь инвариантностью относительно калибровочных преобразований

$$\varphi'(x) = \exp[i\lambda(x)] \varphi(x), \quad A'_k(x) = A_k(x) - \frac{1}{e} \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x^k}, \quad (14.15)$$

запишем плотность лагранжиана в виде

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[g^{kl} (\partial_k - ieA'_k) \varphi'^* (\partial_l + ieA'_l) \varphi' - \right. \\ \left. - \frac{R}{6} \varphi'^* \varphi' - \frac{\Lambda}{6} (\varphi'^* \varphi')^2 - \frac{1}{4} F'_{kl} F'^{kl} \right], \quad (14.16)$$

где $F'_{kl} = \partial_k A'_l - \partial_l A'_k$.

Рассматривая теорию с лагранжианом (14.2) при $m = 0$ в качестве нулевого приближения к теории с лагранжианом (14.16), в унитарной калибровке [32] имеем

$$\langle 0 | \varphi' | 0 \rangle = i \langle 0 | \varphi | 0 \rangle = i \sqrt{3/\Lambda} (f/a), \quad (14.17)$$

где $\varphi' = (\varphi_1 + i\varphi_2)/\sqrt{2}$, $\varphi_1 = 0$.

Вводя поле Хиггса

$$\chi(x) = \varphi_2' - \sqrt{6/\Lambda} (f/a) \quad (14.18)$$

и используя (14.16)—(14.18), получаем действие для рассматриваемой модели

$$S = \int d^4 x \mathcal{L} = \frac{1}{2} \int d^4 x \sqrt{-g} \left\{ g^{ik} \partial_i \chi \partial_k \chi - \left(\frac{3}{a^2} + \frac{R}{6} \right) \chi^2 + \right. \\ \left. + e^2 g^{ik} A'_i A'_k \chi^2 - \frac{1}{2} F'_{ik} F'^{ik} + m_V^2 g^{ik} A'_i A'_k - \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{2\Lambda}{3}} \frac{f}{a} \chi^3 - \frac{\Lambda}{12} \chi^4 + 2e^2 \sqrt{\frac{6}{\Lambda}} \frac{f}{a} g^{ik} A'_i A'_k \chi \right\}, \quad (14.19)$$

где $m_V^2 = 6e^2/\Lambda a^2$ (η) — квадрат массы, приобретаемой первоначально безмассовой векторной частицей по механизму Хиггса.

На современной стадии эволюции Вселенной $a \sim 10^{28}$ см и, полагая $\Lambda \sim 1$, имеем для массы фотона величину $m_V \sim 10^{-66}$ г (такая же численная величина для массы фотона получена из иных соображений в работе [317]). На ранних стадиях расширения Вселенной эта величина была существенно большей. Например, в случае радиационно-доминированного вещества фона при $t \sim 10^{-26}$ с масса $m_V \sim 10^{-44}$ г.

Совершая в (14.19) конформное преобразование к модели со статической метрикой \tilde{g}_{ik} и полю $\tilde{\chi} = a\chi$, получаем действие

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left\{ \tilde{g}^{ik} \partial_i \tilde{\chi} \partial_k \tilde{\chi} - 2\tilde{\chi}^2 + e^2 \tilde{g}^{ik} A_i' A_k' \tilde{\chi}^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \tilde{g}^{il} \tilde{g}^{km} F_{ik}' F_{lm}' + m_V^2 a^2 \tilde{g}^{ik} A_i' A_k' - \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{2\Lambda}{3}} f \tilde{\chi}^3 - \frac{\Lambda}{12} \tilde{\chi}^4 + 2e^2 \sqrt{\frac{6}{\Lambda}} f \tilde{g}^{ik} A_i' A_k' \tilde{\chi} \right\}, \quad (14.20)$$

совпадающее с действием абелевой модели Хиггса (с тем лишь отличием, что здесь 3-пространство обладает отрицательной кривизной).

Выражение (14.19) содержит действие массивного скалярного поля (хотя затравочное поле φ было безмассовым). Таким образом, безмассовое самодействующее скалярное поле (заряженное и нейтральное) в открытой модели Фридмана вследствие спонтанного нарушения симметрии приобретает массу. Поскольку геометрия открытой модели Фридмана, а следовательно, и спонтанное нарушение симметрии определяются в конечном счете веществом фона согласно уравнениям Эйнштейна, то можно сказать, что в рассмотренной модели массы скалярной и векторной частиц «создаются» влиянием всех остальных тел Вселенной (как если бы действовал принцип Маха).

Обсудим возможную интерпретацию безмассового затравочного поля φ . Для этого совершим конформное отображение (1.15) при $\sigma = -\ln \varphi$. Из (1.19) при $N = 4$ получается следующее уравнение, связывающее значения скалярной кривизны в пространствах с метрическими тензорами g_{ik} и \tilde{g}_{ik} [329]:

$$(\nabla_k \nabla^k + R/6) \varphi - (1/6) \tilde{R} \varphi^3 = 0. \quad (14.21)$$

Если предположить, что $\tilde{R} = \text{const}$, то (14.21) совпадает с уравнением (14.1), записанным для вещественного безмассового поля, при $\tilde{R} = -2\Lambda$. Считая, что пространство с метрикой \tilde{g}_{ik} — пустое (например, модель де Ситтера), и учитывая соотношение $g_{ik} = \varphi^{-2} \tilde{g}_{ik}$, можно сказать, что φ связано с той частью гравитационного поля, которая создается материальными телами. В этой связи представляет интерес возможность построения космологической модели, в ко-

торой пространство Фрийдмана возникает из пространства де Ситтера в результате рождения частиц (см., например, работу [330]). Отметим, что постоянная Λ может быть при этом очень малой величиной.

Выше рассматривалось спонтанное нарушение симметрии скалярного поля, вызванное отличием геометрии пространства от евклидовой. Симметрия вакуума на ранних стадиях эволюции Вселенной зависит также от целого ряда физических процессов. Исследование различных калибровочных моделей с учетом статистических эффектов в рамках теории горячей зарядово-несимметричной Вселенной показывает, что на ранних этапах эволюции могут конкурировать два фактора: нарушение симметрии вакуума при большой плотности фермионного заряда и ее восстановление при высокой температуре. В частности, как показано в работе [331], при достаточно большом значении отношения разности плотностей нейтрино и антинейтрино к плотности фотонов не происходит восстановления симметрии с ростом температуры по мере приближения к сингулярности.

Если симметрия вакуума непосредственно вблизи сингулярности не нарушена, а фазовый переход происходит лишь впоследствии при уменьшении температуры, то может образоваться доменная структура вакуума [332, 333]. Однако в рассматриваемой здесь модели калибровочно-несимметричный, но инвариантный относительно трансляций в пространстве вакуум с самого начала эволюции является преимущественным состоянием, вследствие чего доменов не возникает.

Ниже рассмотрено спонтанное нарушение симметрии только в результате действия внешнего гравитационного поля; при этом статистические эффекты не учитываются.

§ 14.3. Спонтанное нарушение P - и CP -симметрий в открытой модели Фрийдмана

Введем теперь взаимодействие поля φ , которое будем считать псевдоскалярным, с массивным фермионным полем ψ . Поскольку в открытой модели Фрийдмана поле φ обладает ненулевым вакуумным средним, то при таком взаимодействии проявляются следствия спонтанного нарушения P - и CP -симметрий (для простоты предполагаем φ вещественным).

Плотность лагранжиана запишем в виде [334]

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} (L_\varphi + L_\psi + L_{\varphi\psi});$$

$$L_\varphi = \frac{1}{2} g^{ik} \partial_i \varphi \partial_k \varphi - \frac{R}{12} \varphi^2 - \frac{\Lambda}{24} \varphi^4; \quad L_{\varphi\psi} = ik \bar{\psi} \gamma^5 \psi \varphi; \quad (14.22)$$

$$L_\psi = \frac{i}{2} (\bar{\psi} h_{(a)}^k \gamma^a \vec{\nabla}_k \psi - \vec{\nabla}_k \bar{\psi} h_{(a)}^k \gamma^a \psi) - m \bar{\psi} \psi.$$

Здесь ковариантная производная $\vec{\nabla}_k$ от биспинора ψ определена равенством (1.46), $h_{(a)}^k$ — реперные коэффициенты (13.35), соответствующие метрике открытой модели Фридмана.

Из плотности лагранжиана (14.22) получаются уравнения для полей

$$\left. \begin{aligned} \nabla_l \nabla^l \varphi + (R/6) \varphi + (\Lambda/6) \varphi^3 - ik \bar{\psi} \gamma^5 \psi = 0, \\ ih_{(a)}^l \gamma^a \vec{\nabla}_l \psi - m \psi + ik \gamma^5 \psi \varphi = 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.23)$$

Операция пространственного отражения определяется как переход от точки $x = (\eta, r, \theta, \varphi)$ к точке $x' = (\eta', r', \theta', \varphi')$, где

$$\eta' = \eta; \quad r' = r; \quad \theta' = \pi - \theta; \quad \varphi' = \pi + \varphi. \quad (14.24)$$

При этом псевдоскалярное поле φ и фермионное поле ψ преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} P\varphi(\eta, r, \theta, \varphi)P^{-1} &= \varphi_P(\eta, r, \theta', \varphi') = -\varphi(\eta, r, \theta, \varphi), \\ P\psi(\eta, r, \theta, \varphi)P^{-1} &= \psi_P(\eta, r, \theta', \varphi') = S_0\psi(\eta, r, \theta, \varphi). \end{aligned} \quad (14.25)$$

Матрица S_0 определяется требованием инвариантности лагранжиана L_ψ из (14.22) относительно P -отражения:

$$S_0 = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{pmatrix}.$$

Лагранжиан (14.22) инвариантен относительно операции пространственного отражения (14.24) и (14.25). В случае нейтрального поля, согласно результатам § 14.1, вакуумное среднее

$$\langle 0 | \varphi(x) | 0 \rangle = g(\eta) = \sqrt{6/\Lambda} (f/a(\eta)). \quad (14.26)$$

Отличие (14.26) от нуля означает (вследствие псевдоскалярности поля φ) спонтанное нарушение P -, а в силу сохранения C -инвариантности и CP -симметрии. При этом калибровочная симметрия для фермионного поля остается ненарушенной: $\langle 0 | \psi(x) | 0 \rangle = 0$. В случае стационарной метрики (14.26) ведет к модели Ли [201] спонтанного CP -нарушения, причем величина нарушения определяется значением g .

Если перейти в (14.23) к полю с нулевым вакуумным средним

$$\varphi^0 = \varphi - \langle 0 | \varphi | 0 \rangle$$

и пренебречь в фермионном уравнении членом, содержащим φ^0 (см. [201]), то оно приобретает вид

$$ih_{(a)}^l \gamma^a \vec{\nabla}_l \psi - m \psi + ik g(\eta) \gamma^5 \psi = 0. \quad (14.27)$$

Величина $g(\eta)$ в (14.27) играет роль нестационарного внешнего поля. Таким образом, поле ψ взаимодействует сразу с двумя внешними полями: гравитационным полем и возникающим вследствие спонтанного нарушения симметрии классическим полем g .

Гамильтониан поля ψ , удовлетворяющего уравнению (14.27):

$$H^{(1/2)}(\eta) = (i/2) a^3 \int d^3 x \sqrt{\gamma} (\psi^+ \overleftrightarrow{\partial}_\eta \psi) \quad (14.28)$$

по форме совпадает с (13.38).

Уравнение (14.27) допускает полное разделение переменных, причем полную ортонормированную систему решений можно занумеровать индексами $0 < \lambda < \infty$, $j = 1/2, 3/2, \dots$, $\varepsilon = \pm 1$ и $-j \leq M \leq j$. Индексы λ , j и M имеют тот же смысл, что и в § 13.3, а индекс ε связан с четностью решения: при отсутствии спонтанного нарушения симметрии [$g(\eta) = 0$] операция P -отражения переводит совокупность решений с $\varepsilon = 1$ в совокупность решений с $\varepsilon = -1$, и наоборот. Используя обозначения, введенные в § 13.3, запишем полную систему решений в виде, аналогичном (13.40):

$$\Psi_{\lambda j \varepsilon M}^{(\pm)}(x) = a^{-3/2} B_{\lambda \varepsilon}^{(\pm)}(\eta) (E - \varepsilon \gamma^5) M_{\lambda j}(r) S(\theta, \varphi) Z_{j, j+1/2, M}(\theta, \varphi), \quad (14.29)$$

где E — единичная матрица 4×4 , $M_{\lambda j}$, S и $Z_{j, j+1/2, M}$ те же, что в (13.42)—(13.44), а матрица $B_{\lambda j}(\eta)$ вида (13.41) теперь составлена из функций $v_{\lambda \varepsilon \pm}(\eta)$, снабженных индексом ε . Подстановка (14.29) в (14.27) дает систему уравнений для этих функций

$$\dot{v}_{\lambda \varepsilon \pm} + i(\lambda \pm i\varepsilon\mu) v_{\lambda \varepsilon \mp} \pm i m a(\eta) v_{\lambda \varepsilon \pm} = 0, \quad (14.30)$$

где обозначено $\mu = fk\sqrt{6/\Lambda}$. Эту систему, как и (13.46), можно свести к двум уравнениям второго порядка

$$\ddot{v}_{\lambda \varepsilon \pm} + (\omega_\mu^2 \pm i m a) v_{\lambda \varepsilon \pm} = 0, \quad (14.31)$$

где, в отличие от (13.49),

$$\omega_\mu^2(\eta) = \lambda^2 + m^2 a^2(\eta) + \mu^2. \quad (14.32)$$

Начальные условия, определяющие положительно- и отрицательно-частотные решения $v_{\lambda \varepsilon \pm}^{(\pm)}$, возьмем в виде (13.50) с заменой $\omega(\eta_0)$ на $\omega_\mu(\eta_0)$.

Оператор поля ψ представляется в виде разложения по полной ортонормированной системе $\psi_{\mathcal{Y}}^{(\pm)}$ ($\mathcal{Y} = \{\lambda, j, \varepsilon, M\}$):

$$\psi = \int d\mathcal{Y} [\psi_{\mathcal{Y}}^{(-)}(x) a_{\mathcal{Y}}^{(+)} + \psi_{\mathcal{Y}}^{(+)}(x) a_{\mathcal{Y}}^{(-)}]. \quad (14.33)$$

Подставляя (14.33) в (14.28) с использованием равенства

$$\begin{aligned} & a^3 \int (\psi_{\mathcal{Y}}^{\dagger} \dot{\psi}_{\mathcal{Y}'}^{\dagger} - \dot{\psi}_{\mathcal{Y}}^{\dagger} \psi_{\mathcal{Y}'}) \sqrt{\gamma} d^3 x = \\ & = [(v_{\lambda \varepsilon +}^* \dot{v}_{\lambda \varepsilon +} - \dot{v}_{\lambda \varepsilon +}^* v_{\lambda \varepsilon +}) + (v_{\lambda \varepsilon -}^* \dot{v}_{\lambda \varepsilon -} - \dot{v}_{\lambda \varepsilon -}^* v_{\lambda \varepsilon -})] \delta_{\mathcal{Y} \mathcal{Y}'}, \end{aligned} \quad (14.34)$$

которому удовлетворяют функции $\psi_{\mathcal{Y}}$ (знаки частотностей можно расставить произвольно), можно получить следующее выражение для гамильтониана через операторы рождения — уничтожения:

$$\begin{aligned} H^{(1/2)}(\eta) = & \int d\mu(\mathcal{Y}) \omega_\mu(\eta) [E_{\lambda \varepsilon}(\eta) (a_{\mathcal{Y}}^{(+)*} a_{\mathcal{Y}}^{(-)} - a_{\mathcal{Y}}^{(-)*} a_{\mathcal{Y}}^{(+)} + \\ & + F_{\lambda \varepsilon}(\eta) a_{\mathcal{Y}}^{(+)*} a_{\mathcal{Y}}^{(+)} + F_{\lambda \varepsilon}^*(\eta) a_{\mathcal{Y}}^{(-)*} a_{\mathcal{Y}}^{(-)}], \end{aligned} \quad (14.35)$$

где обозначено

$$\begin{aligned}
 E_{\lambda\varepsilon} &= \frac{1}{\omega_\mu} [m\alpha (1 - 2|v_{\lambda\varepsilon+}|^2) - 2\lambda \operatorname{Re}(v_{\lambda\varepsilon+}^* v_{\lambda\varepsilon-}) + \\
 &\quad + 2\varepsilon\mu \operatorname{Im}(v_{\lambda\varepsilon+}^* v_{\lambda\varepsilon-})], \\
 F_{\lambda\varepsilon} &= \frac{1}{\omega_\mu} [2m\alpha v_{\lambda\varepsilon+} v_{\lambda\varepsilon-} - \lambda (v_{\lambda\varepsilon+}^2 - v_{\lambda\varepsilon-}^2) + \\
 &\quad + i\varepsilon\mu (v_{\lambda\varepsilon+}^2 + v_{\lambda\varepsilon-}^2)].
 \end{aligned}
 \tag{14.36}$$

Начальные условия на функции $v_{\lambda\varepsilon\pm}$ выбраны так, чтобы $E_{\lambda\varepsilon}(0) = 1$, $F_{\lambda\varepsilon}(0) = 0$ и гамильтониан при $\eta = 0$ был диагонален. Однако в любой момент $\eta > 0$ будет $E_{\lambda\varepsilon} < 1$, $F_{\lambda\varepsilon} \neq 0$ и гамильтониан становится недиагональным. Это означает, что имеет место эффект рождения фермионных пар из вакуума. В отсутствие спонтанного нарушения симметрии этот эффект подробно изучен в гл.13. Легко убедиться в том, что в пределе $\mu \rightarrow 0$ (спонтанное нарушение симметрии исчезает) (14.32) и (14.36) переходят в (13.49) и (13.89). В связи с этим можно определить, какое влияние на интенсивность рождения пар оказывает наличие дополнительного внешнего поля $g(\eta)$.

С этой целью (см. гл. 13) диагонализуем гамильтониан (14.35) с помощью преобразования Боголюбова вида (13.90). Операторы рождения — уничтожения физических частиц, в терминах которых $H^{(1/2)}(\eta)$ диагонален, обозначим $b_{\lambda\varepsilon}^{(\pm)}$ (η) [единственным отличием используемого здесь преобразования от (13.90) является то, что α и β снабжены индексом ε].

Разбивая оператор ψ на положительно- и отрицательно-частотные части в смысле этих операторов и усредняя по исходному вакууму $|0\rangle$ оператор плотности числа физических частиц $n_{\pm}^{(1/2)} = \psi^{(+)\dagger} \psi^{(+)}$, для числа родившихся в единице объема фермионов, подобно (13.96), находим

$$\begin{aligned}
 n^{(1/2)}(\eta) &= \langle 0 | n_{\pm}^{(1/2)} | 0 \rangle = \frac{1}{2\pi^2 a^3} \int_0^\infty d\lambda \times \\
 &\quad \times \left(\lambda^2 + \frac{1}{4} \right) (|\beta_{\lambda,-1}|^2 + |\beta_{\lambda,-1}|^2).
 \end{aligned}
 \tag{14.37}$$

Вероятность рождения пары в состоянии с импульсом λ есть

$$|\beta_{\lambda\varepsilon}|^2 = (1 - E_{\lambda\varepsilon})/2.
 \tag{14.38}$$

Эта же формула дает и плотность числа рожденных античастиц.

Приведем теперь количественные оценки эффекта рождения фермионных пар с учетом спонтанного нарушения симметрии. Будем считать, что $a(\eta) = a_1 \eta$. Для оценки величины (14.37) можно вос-

пользоваться методом, изложенным в § 13.7 (с учетом замены $\lambda \rightarrow \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$). Тогда в случае $t \ll m^{-1}$, $\mu \ll ma$ получаем [334]

$$n^{(1/2)}(t) = \frac{m^2}{16\pi t} \left[1 + \frac{1}{\pi m a_1} - \frac{2\mu^2}{\pi m a_1} \right]. \quad (14.39)$$

Это соотношение в случае $\mu \rightarrow 0$ переходит в полученные ранее выражения (13.161) и (13.162). Отметим, что условие $\mu \ll ma$ при $t \gg t_{pl}$ эквивалентно $0 < \mu \lesssim 10^9$. Как видно из (14.39), добавка $\Delta n^{(1/2)}$ из-за $\mu \neq 0$ отрицательна, т. е. спонтанное нарушение симметрии уменьшает плотность числа родившихся пар. Однако это уменьшение незначительно в силу чрезвычайно большого значения величины ma_1 для реалистических моделей Вселенной.

Если рассматривать космологические модели, у которых плотность вещества фона много меньше критической, то для моментов $t \ll m^{-1}$ величина $ma \ll 1$. Полагая $ma_1 \sim 10$ [что соответствует $a(t \sim m^{-1}) \sim m^{-1}$], $ma \ll \mu \sim 1$, для поправки $\Delta n^{(1/2)}$ получаем

$$\Delta n^{(1/2)} = \frac{m^2}{16\pi t} \left(-\sqrt{\frac{2t}{a_1}} \mu \right). \quad (14.40)$$

Таким образом, снова $\Delta n^{(1/2)} < 0$, причем $|\Delta n^{(1/2)}| \ll n^{(1/2)} = m^2/16\pi t$.

Случай предельно больших μ также представляет интерес. Действительно, легко убедиться в том, что имеет место численное соотношение между фундаментальными величинами

$$G_F m_p^5 \sim m_{pl}^2, \quad (14.41)$$

где $G_F = 10^{-5} m_p^{-2}$ — фермиевская константа слабых взаимодействий; m_p — масса протона; $m_{pl} = G^{-1/2} \sim 10^{-5}$ г — планковская масса; a — значение масштабного фактора для настоящей стадии эволюции Вселенной. Если считать, что константа слабых взаимодействий возникает по схеме шпуриона [335]

$$G_F m_p^3 = \langle 0 | \phi | 0 \rangle = \mu/ka, \quad (14.42)$$

то при $k \sim 1$ имеем для μ очень большое значение $\mu \sim 10^{38}$. Для таких μ при всех λ справедливо адиабатическое приближение и полное число родившихся пар

$$n^{(1/2)} = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{a_1}{32t}} \frac{m^2}{16\pi t}. \quad (14.43)$$

Поскольку при $t \gg t_{pl}$ множитель $\mu^{-1} (a_1/32t)^{1/2} \lesssim 10^{-8}$, то рождение пар оказывается подавленным. Таким образом, учет спонтанного нарушения симметрии приводит во всех рассмотренных случаях к уменьшению плотности числа рождающихся фермионных пар.

Как видно из (14.46), эффект космологического нарушения CP характеризуется на современной стадии эволюции Вселенной чрезвы-

чайной малой величиной $\sim a^{-1}$. Тем не менее, согласно схеме, предложенной в работе [336], даже столь малая величина может приводить к наблюдаемым следствиям в теории распадов K^0 -мезона.

Действительно, рассмотрим лагранжиан

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_{st}(x) + \mathcal{L}_1(x) + \mathcal{L}_2(x) + \mathcal{L}_3(x), \quad (14.44)$$

где \mathcal{L}_{st} — $SU(2)$ -инвариантный лагранжиан сильных взаимодействий; \mathcal{L}_1 — адрон-лептонное взаимодействие, \mathcal{L}_2 — слабое адрон-адронное взаимодействие с $|\Delta Y| = 1$; $|\Delta T| = 1/2$; \mathcal{L}_3 — слабое лептон-лептонное и адрон-адронное взаимодействия с $\Delta Y = 0$. Лагранжиан \mathcal{L}_2 , имеющий кварковую структуру $\bar{n}\Lambda$ [337], удобно записывать в виде

$$\mathcal{L}_2 = (G_F/\sqrt{2})(\mathcal{L}_{1/2} + \mathcal{L}_{1/2}^\dagger). \quad (14.45)$$

Далее предположим, что $\mathcal{L}_{1/2}$ является электрически нейтральной компонентой $SU(2)$ мультиплетов ϕ безмассовых скалярных полей, удовлетворяющих уравнению (14.1). Космологическое нарушение калибровочной [здесь — $SU(2)$] симметрии ведет к отклонению от нуля матричного элемента (14.3). В результате $SU(2)$ -преобразований всегда можно добиться, чтобы выполнялось соотношение

$$\langle 0 | \phi | 0 \rangle = m_p^{-1} \langle 0 | \mathcal{L}_{1/2} | 0 \rangle = \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{\lambda}} \frac{f}{a} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (14.46)$$

Если, как в σ -модели, считать поле $\mathcal{L}_{1/2}$ ненаблюдаемым, то физическими будут те входящие в ϕ поля, которые преобразуются по нелинейному представлению группы $SU(2)$ и являются голдстоуновскими бозонами. Эти голдстоуновские бозоны приобретают в результате $SU(2)$ -неинвариантного взаимодействия \mathcal{L}_2 массу, квадрат которой обратно пропорционален g [336].

Для того чтобы сделать эти массы вещественными, используем следующий прием. В модели имеется новая степень свободы — угол β между направлением в изопространстве, определяемым вакуумом при космологическом нарушении $SU(2)$ -симметрии, и направлением, задаваемым \mathcal{L}_1 . Пусть фаза \mathcal{L}_1 как-то фиксирована. Тогда фаза \mathcal{L}_2 должна совпадать с фазой, фиксируемой вакуумом \mathcal{L}_{st} (иначе массы голдстоуновских бозонов, значения которых не зависят от адрон-лептонных взаимодействий, не будут вещественными). Итак, лагранжиан (14.51) следует записывать в виде

$$\mathcal{L}_2 = \frac{G_F}{\sqrt{2}} (\exp(-i\beta) \mathcal{L}_{1/2} + \exp(i\beta) \mathcal{L}_{1/2}^\dagger). \quad (14.47)$$

Значение $\beta = 3\pi/2$, требуемое моделью миллслабого CP -нарушения, является здесь лишь одним из возможных. В результате для масс голдстоуновских бозонов при $\Lambda \sim 1$ можно получить оценку [338]

$$m_B^2 = G_F m_p^5 / g \sim G_F m_p^5 a.$$

С учетом (14.41) заключаем отсюда, что $m_B \sim m_{pl}$ (голдстоуновские бозоны с планковской массой рассматривались в работе [339]).

Таким образом, несмотря на малость величины (14.46), масса голдстоуновских бозонов оказывается большой (другие возможности существенных для теории элементарных частиц следствий при учете гравитации рассмотрены в работах [340, 341]).

§ 14.4. Спонтанное нарушение конформной симметрии в неинерциальной системе отсчета

В предыдущих параграфах рассматривалось однородное изотропное пространство открытого типа. Ниже показано, что эффект спонтанного нарушения симметрии скалярного поля $\tilde{\varphi}$ с самодействием имеет место и в пространстве — времени Минковского при использовании неинерциальной системы отсчета. При этом отличие от нуля вакуумных средних тензоров энергии-импульса приводит к изменению геометрических свойств пространства (см. [227]). Самоогласованной моделью, в которой спонтанное нарушение симметрии является следствием отрицательности кривизны 3-пространства, а сама эта кривизна создается вакуумными плотностью энергии и давлением, оказывается однородное изотропное пространство с масштабным фактором определенного вида.

Метрика пространства — времени Минковского в сферических координатах $y^\kappa = (t, R, \theta, \varphi)$ есть

$$d\tilde{s}^2 = \tilde{\eta}_{ik} dy^i dy^k = dt^2 - dR^2 - R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (14.48)$$

Обозначая $\tilde{g}(x) = \langle 0 | \tilde{\varphi}(x) | 0 \rangle$, получаем в древесном приближении следующее уравнение для функции $\tilde{g}(x)$:

$$(\partial^2/\partial t^2 - \Delta^{(3)})\tilde{g}(x) + (\Lambda/3)\tilde{g}^3(x) = 0. \quad (14.49)$$

Как известно, тривиальное решение этого уравнения $\tilde{g} = 0$ устойчиво, если задавать начальные данные на гиперповерхности $t = \text{const}$. Это означает, что при использовании координатной системы (14.48) вакуумное состояние $|0\rangle$ конформно-инвариантно.

Рассмотрим теперь «расширяющиеся» координаты $x^\kappa = (\eta, r, \theta, \varphi)$, определяемые равенствами

$$R = A \exp(\eta) \text{sh } r, \quad t = A \exp(\eta) \text{ch } r, \quad (14.50)$$

где A — постоянная. Эти координаты являются сопутствующими для сферически-симметричной расширяющейся системы частиц. Отметим, что эта система координат является неполной: она покрывает лишь область $t^2 - R^2 > 0$. В терминах координат x^κ квадрат интервала (14.48) имеет вид

$$d\tilde{s}^2 = \tilde{g}_{ik} dx^i dx^k = A^2 \exp(2\eta) [d\eta^2 - dr^2 - \text{sh}^2 r (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (14.51)$$

Нестационарная метрика (14.51) называется метрикой Милна.

Пусть $|0'\rangle$ — вакуумное состояние в координатах Милна. Вследствие однородности пространства имеем $\langle 0' | \tilde{\varphi}(x) | 0' \rangle = \tilde{g}(\eta)$. Легко видеть, что если начальные данные задавать на лоренц-инвариантной гиперповерхности $\eta = \text{const}$ [342], то реализуется случай $\tilde{g}(\eta) \neq 0$.

Действительно, если искать решение уравнения (14.49), записанного в терминах координат x^k с учетом (14.50), в виде

$$\tilde{g}(\eta) = \sqrt{\frac{3}{\Lambda} \frac{\exp(-\eta)}{A}} f(\eta), \quad (14.52)$$

то для функции $f(\eta)$ получается уравнение Дюффинга (14.7), общее решение которого есть

$$\eta = \int \frac{df}{\sqrt{C + f^2 - f^4/2}}, \quad (14.53)$$

где C — постоянная и $-1/2 \leq C < \infty$.

Формулы (14.52) и (14.53) дают все решения (14.49), зависящие только от величины интервала $s = A \exp(\eta) = \sqrt{t^2 - R^2}$ (отметим, что общий вид $O(4)$ -инвариантных решений уравнения (14.49) найден в работе [343]). Решение уравнения (14.49) [342, 344]

$$\tilde{g} = \sqrt{6/\Lambda} a_0 / (s^2 + a_0^2), \quad (14.54)$$

где a_0 — постоянная, соответствует (14.52) и (14.53) при $C = 0$.

Единственными устойчивыми решениями (14.7) являются $f(\eta) = \pm 1$, получающиеся из (14.53) при $C = -1/2$. Таким образом, решение (14.54) неустойчиво, а устойчивые решения есть

$$\tilde{g} = \pm \sqrt{\frac{3}{\Lambda} \frac{\exp(-\eta)}{A}} = \pm \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \frac{1}{s}. \quad (14.55)$$

Видно, что в координатах Милна имеет место эффект спонтанного нарушения конформной и (для заряженного поля) калибровочной симметрий [345, 346]. Вследствие этого отличны от нуля вакуумные средние от метрического тензора энергии-импульса (1.23) по устойчивому вакуумному состоянию $|0'\rangle$. Последнее, в свою очередь, должно приводить к изменению геометрии пространства—времени, которая перестает быть геометрией Минковского.

Для нахождения самосогласованной модели совершим вейлевское преобразование

$$\tilde{\eta}_{ik} \rightarrow g_{ik} = \frac{a^2(\eta)}{A^2 \exp(2\eta)} \tilde{\eta}_{ik}, \quad \tilde{\varphi} \rightarrow \varphi = \frac{A \exp(\eta)}{a(\eta)} \tilde{\varphi}. \quad (14.56)$$

В результате этого преобразования метрика (14.48) перейдет в (13.4), а уравнение для поля $\tilde{\varphi}$ — в (14.1) с $m = 0$. Как показано в § 14.1, в такой теории имеет место спонтанное нарушение симметрии, характеризуемое отличием от нуля величины $g = \langle 0 | \varphi | 0 \rangle = \sqrt{3f/\sqrt{\Lambda a}}$ с $f = \pm 1$. Очевидно, что g получается из \tilde{g} в (14.55) при вейлевском преобразовании (14.56).

Таким образом, геометрией самосогласованной модели является в данном случае однородное изотропное пространство открытого типа. Для того чтобы найти масштабный фактор $a(\eta)$, необходимо решить уравнения Эйнштейна (12.1), в правой части которых стоит тензор энергии-импульса с компонентами (14.10):

$$\dot{a}^2 - 2\ddot{a}a + a^2 = -4\pi G\Lambda^{-1}, \quad a^2 - \dot{a}^2 = 4\pi G\Lambda^{-1}. \quad (14.57)$$

В результате получаем [345, 346]

$$a(\eta) = \sqrt{4\pi G/\Lambda} \operatorname{ch} \eta. \quad (14.58)$$

Согласно результатам § 14.1, эффект спонтанного нарушения симметрии приводит к появлению ненулевых масс у первоначально безмассового скалярного поля. Как следует из (14.13), эти массы есть $m_1^2 = 3/a^2$, $m_2^2 = 1/a^2$, т.е. для случая самосогласованной модели (14.58)

$$m_1 = \frac{1}{2 \operatorname{ch} \eta} \sqrt{\frac{3\Lambda}{\pi G}}, \quad m_2 = \frac{1}{2 \operatorname{ch} \eta} \sqrt{\frac{\Lambda}{\pi G}} \quad (14.59)$$

и изменяются от значения порядка планковской массы (если $\Lambda \sim 1$) при $\eta = 0$ до нуля при $\eta \rightarrow \infty$.

Если скалярное поле взаимодействует с безмассовым векторным полем, то наличие спонтанного нарушения симметрии приводит по схеме § 14.2 к возникновению массы у векторных частиц

$$m_V^2 = 9e^2/2\pi G \operatorname{ch}^2 \eta.$$

Если же рассматривать взаимодействие скалярного поля с фермионным, то вследствие результатов § 14.3 имеет место CP -нарушение.

Итак, в теории безмассового скалярного поля с самодействием в неинерциальной системе координат возникают эффекты спонтанного нарушения конформной и калибровочной симметрий. Такая теория в пространстве—времени Минковского является противоречивой. Непротиворечивая же схема возможна лишь в рамках ОТО, т.е. с учетом искривления пространства—времени. Вследствие связи между решениями уравнения скалярного поля и уравнений янг-миллсовских векторных полей [344] аналогичные эффекты могут иметь место и в теории Янга—Миллса.

§ 15.1. Анизотропные метрики в космологии

Как указано в § 13.7, наблюдательные данные свидетельствуют о том, что расширение нашей Вселенной происходит изотропно начиная с весьма ранней эпохи, возможно, уже с $t \sim t_{pl} \sim 10^{-43}$ с. В то же время известно, что общее решение уравнений Эйнштейна вблизи сингулярности является анизотропным [245, 347]. «Случайная» симметрия начальных условий, ведущая к изотропному выходу из сингулярности, представляется маловероятной, поэтому на ранних стадиях эволюции Вселенной должны были происходить какие-то физические процессы, приводящие к быстрой изотропизации космологического расширения. Однако известные классические механизмы недостаточно эффективны для того, чтобы обеспечить изотропизацию за время $t_F \sim t_{pl}$ [245, 289].

В работе [219] высказана гипотеза, что ранняя изотропизация космологического расширения может произойти в результате квантового эффекта рождения частиц вблизи сингулярности. Проведенные впоследствии модельные расчеты [220, 221, 348] подтвердили это предположение.

Рассмотрим пространственно-однородные космологические модели с метрикой вида

$$ds^2 = dt^2 - a_1^2(t)(dx^1)^2 - a_2^2(t)(dx^2)^2 - a_3^2(t)(dx^3)^2, \quad (15.1)$$

где $a_\alpha(t)$ — некоторые неотрицательные функции времени. Пространство — время, описываемое метрикой (15.1), имеет абелеву группу изометрий, т. е. относится к типу I по классификации Бианки [54, 88, 245]. Пространственные сечения $t = \text{const}$ здесь плоские, но пространство — время конформно-плоским, вообще говоря, не является. При $a_1 = a_2 = a_3$ (15.1) переходит в изотропную квазиевклидову метрику (13.1).

Анизотропия характеризуется относительной величиной трех параметров Хаббла

$$h_\alpha = (1/a_\alpha)(da_\alpha/dt). \quad (15.2)$$

Сами функции $a_\alpha(t)$ определены с точностью до постоянного численного множителя; метрика (15.1) допускает произвольные масштабные преобразования координат x^α (не одинаковые по различным осям).

Вместо времени t часто удобно использовать координату η :

$$\eta = \int dt V^{-1/3}(t), \quad V \equiv a_1 a_2 a_3 \quad (15.3)$$

[ср. с определением (13.3)]; производную по η обозначим точкой.

Уравнения Эйнштейна в метрике (15.1) имеют вид

$$\begin{aligned}
 V^{-2/3} (c_1 c_2 + c_2 c_3 + c_3 c_1) &= 8\pi G \varepsilon_b, & (15.4) \\
 -V^{-2/3} [\dot{c}_2 + \dot{c}_3 + (2/3)(c_1^2 + c_2^2) - (1/3)(c_1 c_2 + c_1 c_3 - c_2 c_3)] &= \\
 &= 8\pi G P_{b1}
 \end{aligned}$$

(и аналогичные для G_2^3 и G_3^3), где $c_\alpha = \dot{a}_\alpha/a_\alpha$; ε_b — плотность энергии, а $P_{b\alpha}$ — давление по оси x_α вещества, задающего метрику.

Вакуумным решением уравнений (15.4) ($\varepsilon_b = P_{b\alpha} = 0$) является так называемая метрика Казнера [88, 245]

$$a_\alpha(t) = a_{0\alpha} t^{p_\alpha}, \quad (15.5)$$

где показатели p_α удовлетворяют соотношениям

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1. \quad (15.6)$$

Из (15.6) следует, что все $|p_\alpha| \leq 1$, причем если условиться считать $p_1 \leq p_2 \leq p_3$, то имеют место неравенства

$$-1/3 \leq p_1 \leq 0, \quad 0 \leq p_2 \leq 2/3, \quad 2/3 \leq p_3 \leq 1.$$

Случай $p_1 = p_2 = 0, p_3 = 1$ — вырожденный: такая метрика Казнера описывает часть пространства — времени Минковского в некоторой неинерциальной системе отсчета и в этом смысле аналогична изотропной метрике Милна (см. § 14.4). В остальных случаях $p_1 < 0, p_2, p_3 > 0$, т. е. по оси x_1 происходит сжатие, а по осям x_2, x_3 — расширение. Заметим, что метрика Казнера не содержит изотропного случая — уравнения Эйнштейна не имеют изотропного вакуумного решения с плоским 3-пространством, отличного от пространства Минковского.

Важность казнеровской метрики в космологии обуславливается следующим обстоятельством [245]. Вблизи сингулярности $t = 0$, когда $a_\alpha(t) \rightarrow 0$ или ∞ , левые части уравнений (15.4) имеют порядок t^{-2} . В то же время если вещество фона обладает уравнением состояния вида $P_b = (\gamma - 1)\varepsilon_b$, то правые части (15.4) пропорциональны $T_b^t \sim V^{-\gamma} \sim t^{-\gamma}$. Поэтому, за исключением случая вещества с предельно жестким уравнением состояния ($\gamma = 2$), при $t \rightarrow 0$ правой частью (15.4) можно пренебречь. Иными словами, любая метрика из класса (15.1) вблизи сингулярности является асимптотически вакуумной и имеет казнеровский вид (15.5).

§ 15.2. Квантование поля

Квантованию поля в различных анизотропных космологических моделях посвящены работы [272, 274, 276, 349—351]. Здесь, следуя работе [272], рассмотрено квантование вещественного скалярного поля с конформной связью в пространстве—времени с метрикой (15.1).

Схема квантования и построения регуляризованного среднего ТЭИ аналогична развитой в гл. 13 для изотропного пространства.

В метрике (15.1) уравнение Клейна—Гордона—Фока (1.16) имеет классические решения вида

$$\varphi_k(x) = 2^{-1/2} (2\pi)^{-3/2} V^{-1/3}(\eta) g_k(\eta) \exp(-ikx), \quad (15.7)$$

где $\mathbf{k} \equiv \{k^1, k^2, k^3\}$, $-\infty < k_\alpha < \infty$, $x = \{x^1, x^2, x^3\}$. Временная функция $g_k(\eta)$ удовлетворяет уравнению осциллятора типа

$$\ddot{g}_k + [\omega_k^2(\eta) + Q(\eta)]g_k = 0, \quad (15.8)$$

где

$$\omega^2 \equiv \omega_k^2(\eta) = V^{2/3} \left(\sum_{\alpha=1}^3 k_\alpha^2 / a_\alpha^2 + m^2 \right), \quad (15.9)$$

$$Q(\eta) = (1/18)[(c_1 - c_2)^2 + (c_2 - c_3)^2 + (c_3 - c_1)^2]. \quad (15.10)$$

В отличие от изотропного пространства здесь постановка задачи с начальными условиями в сингулярности, когда $a_\alpha \rightarrow 0$, невозможна. Будем считать, что начальные условия задаются либо при $\eta \rightarrow -\infty$, когда $a_\alpha(\eta) \rightarrow \text{const}$ (например, в задаче о коллапсе), либо в момент η_0 , когда все $a_\alpha(\eta_0)$ конечны и отличны от нуля.

Оператор квантованного поля запишем в виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2} (2\pi)^3 V^{1/3}} \int d^3 k [g_k^*(\eta) \exp(ikx) a_k^{(-)} + g_k(\eta) \exp(-ikx) a_k^{(+)}]. \quad (15.11)$$

Начальные условия на функции $g_k(\eta)$, обеспечивающие диагональность метрического гамильтониана поля в начальный момент, аналогичны (13.34). Начальное вакуумное состояние $|0_{\eta_0}\rangle$ определяется требованием $a_k^{(-)} |0_{\eta_0}\rangle = 0$ для всех \mathbf{k} .

Интерпретацию квантованного поля в терминах частиц можно построить методом диагонализации мгновенного гамильтониана (см. § 13.5). При этом соответствующие квазичастицы характеризуются квазиэнергией $\Omega_k(\eta) = [\omega_k^2(\eta) - Q(\eta)]^{1/2}$. Очевидно, что если характерный радиус кривизны пространства — времени меньше комптоновской длины, то при достаточно малых импульсах квазиэнергия Ω_k будет чисто мнимой (что соответствует зоне неустойчивости — ср. с результатами работы [127]).

Здесь однако мы проведем регуляризацию ТЭИ согласно работе [272]. Представим решения уравнения (15.8) в виде

$$g_k = \omega^{-1/2} [\alpha_k^* \exp(i\Theta(\eta)) + \beta_k \exp(-i\Theta(\eta))],$$

$$g_k = i\omega^{1/2} [\alpha_k^* \exp(i\Theta(\eta)) - \beta_k \exp(-i\Theta(\eta))],$$

где $\Theta(\eta) = \int_{\eta_0}^{\eta} \omega(\eta') d\eta'$, причем $\alpha_k(\eta_0) = 1$, $\beta_k(\eta_0) = 0$. Отметим, что определяемые таким образом величины $\alpha_k(\eta)$ и $\beta_k(\eta)$ в анизотропной метрике не совпадают с коэффициентами преобразования Боголюбова, диагонализующего гамильтониан. Легко видеть, что они удовлетворяют уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha}_k &= \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega} - i \frac{Q}{\omega} \right) \beta_k^* \exp(2i\Theta) - i \frac{Q}{2\omega} \alpha_k, \\ \dot{\beta}_k^* &= \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega} + i \frac{Q}{\omega} \right) \alpha_k \exp(-2i\Theta) + i \frac{Q}{2\omega} \beta_k^*. \end{aligned} \right\} \quad (15.12)$$

В изотропном случае $Q = 0$ и (15.12) переходят в (13.79).

Введем, как в § 13.5, три вещественные функции s_k , u_k , v_k , связанные с α_k и β_k равенствами (13.97). Для них с помощью (15.12) можно получить систему уравнений, обобщающую (13.98):

$$\left. \begin{aligned} \dot{s}_k &= \frac{1}{2} \frac{\dot{\omega}}{\omega} u_k - \frac{1}{2} \frac{Q}{\omega} v_k; \\ \dot{u}_k &= \frac{\dot{\omega}}{\omega} (2s_k + 1) - \left(\frac{Q}{\omega} + 2\omega \right) v_k; \\ \dot{v}_k &= \frac{Q}{\omega} (2s_k + 1) + \left(\frac{Q}{\omega} + 2\omega \right) u_k \end{aligned} \right\} \quad (15.13)$$

с начальными условиями $s_k(\eta_0) = u_k(\eta_0) = v_k(\eta_0) = 0$.

Для нахождения регуляризованных вакуумных средних метрического ТЭИ воспользуемся вычитательной процедурой (12.53). Результат первого вычитания согласно этой процедуре можно выразить через s_k , u_k и v_k в следующем виде:

$$\begin{aligned} \langle T_0^0 \rangle_I &= \frac{1}{(2\pi)^3 V^{4/3}} \int d^3 k \left[\omega s_k - \frac{Q}{2\omega} \left(s_k + \frac{1}{2} u_k + \frac{1}{2} \right) \right], \\ \langle T_\alpha^\alpha \rangle_I &= -\frac{1}{(2\pi)^3 V^{2/3}} \int d^3 k \left\{ \frac{k_\alpha^2}{\gamma_\alpha^2 \omega} \left(s_k + \frac{1}{2} u_k \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{6} \omega u_k + \frac{1}{6\omega} \left[\left(\frac{\dot{\gamma}_\alpha}{\gamma_\alpha} \right) - Q(\eta) \right] \left(s_k + \frac{1}{2} u_k + \frac{1}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \frac{\dot{\gamma}_\alpha}{6\gamma_\alpha} v_k \right\}, \end{aligned} \quad (15.14)$$

где $\gamma_\alpha \equiv a_\alpha V^{-1/3}$; вакуумные средние от недиагональных компонент ТЭИ обращаются в нуль.

Для исследования ультрафиолетового поведения величин s_k , u_k и v_k представим, как и в § 13.6, решения системы (15.13) асимптотическими рядами по степеням ω^{-1} . Эти ряды имеют тот же вид, что и (13.108), только теперь ω определяется равенством (15.9) и первые их члены суть

$$v_1 = \frac{\dot{\omega}}{2\omega^2}, \quad u_2 = \frac{1}{4\omega} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \right) - \frac{Q}{2\omega^2}, \quad s_2 = \frac{\dot{\omega}^2}{16\omega^4}. \quad (15.15)$$

Выражения для v_3 , u_4 , s_4 приведены в работе [272]. С учетом (15.9) находим, что в анизотропном случае $s_k \sim k^{-2}$, $u_k \sim k^{-2}$, $v_k \sim k^{-1}$ при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, интегралы в (15.14) квадратично расходятся. Таким образом, здесь мы сталкиваемся с общим случаем, рассмотренным в § 12.2.

Дальнейшая регуляризация вакуумных средних ТЭИ (15.14) [второе и третье вычитания в (12.53)] осуществляется вычитанием из подынтегральных выражений (15.14) членов порядка ω^{-1} и ω^{-3} их асимптотических разложений по ω^{-1} . (Этот метод эквивалентен использованной в работах [221, 274] адиабатической регуляризации.)

Асимптотики (15.15) справедливы в той области изменения k и η , в которой расширение происходит адиабатически ($\dot{\omega}/\omega^2 \ll 1$). В то же время эффект рождения частиц существен лишь в антиадиабатической области, в которой можно применить метод внезапных возмущений. Пусть при $t = 0$ имеется сингулярность, причем

$$\lim_{t \rightarrow 0} a_\alpha(t)/t = \infty.$$

Тогда для тех значений η и k , для которых $\Theta(\eta) \ll 1$, решения системы (15.12) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \alpha_k &= C_1 \left(V\bar{\omega} - (i/V\bar{\omega}) \int Q(\eta) d\eta \right) + C_2/V\bar{\omega}, \\ \beta_k^* &= C_1 \left(V\bar{\omega} + (i/V\bar{\omega}) \int Q(\eta) d\eta \right) - C_2/V\bar{\omega}, \end{aligned} \right\} \quad (15.16)$$

где C_1 , C_2 — константы, зависящие от k и удовлетворяющие условию $\text{Re } C_1^* C_2 = 1/4$.

Величины s_k , u_k , v_k получаются из (15.16) по формулам (13.97). В частности, для степенных зависимостей $a_\alpha(t)$ вблизи сингулярности $Q(\eta) \sim \eta^{-2}$ и $s_k \approx -(1/2)u_k \sim 1/\omega\eta^2$, $v_k \sim \eta^{-1}$.

Регуляризованные значения ϵ_{reg} , $P_{\alpha \text{ reg}}$ находятся путем сшивания двух найденных асимптотик в области $\Theta(\eta) \sim 1$.

Для задачи о коллапсе к сингулярности, когда $a_\alpha(t) \rightarrow \text{const}$ при $t \rightarrow -\infty$ и $a_\alpha(t) = a_{0\alpha} |t|^{p_\alpha}$ при $t \rightarrow -\infty$ в [276] получен следующий результат:

$$\varepsilon_{\text{рег}} = K_0 t^{-4} \ln^\delta \left| \frac{t}{t_0} \right|, \quad P_{\alpha \text{рег}} = K_\alpha t^{-4} \ln^\delta \left| \frac{t}{t_0} \right|, \quad (15.17)$$

где $\delta \geq 0$ и K_i — численные коэффициенты. Появление логарифмического множителя связано с наличием инфракрасной расходимости при $m = 0$. Величина t_0 в случае $m = 0$ определяется моментом анизотропизации при сжатии; если $m \neq 0$, то можно считать, что $t_0 \sim m^{-1}$.

Таким образом, с точностью до логарифмических множителей компоненты регуляризованного ТЭИ вблизи сингулярности оказываются по порядку величины такими же, как в изотропном случае (при использовании общей процедуры регуляризации): $\langle T_i^k \rangle_{\text{рег}} \sim \sim t^{-4}$. Следует, однако, ожидать, что обратное влияние на метрику здесь будет качественно иным — отличный от нуля $\langle T_i^k \rangle_{\text{рег}}$ может менять характер анизотропии пространства. Этому вопросу посвящен следующий параграф.

§ 15.3. Изотропизация космологического расширения в результате эффекта рождения пар

В космологической задаче о рождении частиц в анизотропной метрике вида (15.1), (15.5) имеется принципиальная трудность. Как указывалось в предыдущем параграфе, характер сингулярности при $t = 0$ здесь таков, что в ней нельзя ставить начальные условия, т.е. при $t = 0$ невозможно корректное определение исходного состояния квантованного поля (в отличие от изотропного случая).

Поскольку представление о классическом внешнем гравитационном поле, по-видимому, справедливо лишь при $t > t_{pl}$, то указанную трудность можно обойти следующим образом [220]. Пусть при $t < < t_0$, где $t_0 \gg t_{pl}$, рождение частиц отсутствует и «включается» лишь в момент t_0 , когда квантовое состояние поля допускает корректное определение методом диагонализации гамильтониана. При $t \geq \geq t_0$ самосогласованная задача (12.2) уже имеет смысл.

В силу отмеченной в § 15.1 асимптотической независимости метрики (15.1) вблизи сингулярности от наличия вещества фона при $t \leq t_0$ можно использовать казнеровскую метрику (15.5), (15.6) и в качестве состояния квантованного поля взять вакуумное при $t = = t_0$ состояние $|0_{t_0}\rangle$.

Решение самосогласованной задачи упрощает следующее обстоятельство. Как показано в [220], при $t_0 < t < t^*$, где

$$t^* = t_0 (t_0/t_{pl})^{2/(1+p_1)}, \quad (15.18)$$

обратное влияние рожденных частиц на метрику еще мало и им можно пренебрегать, т. е. рассчитывать рождение частиц в заданной казнеровской метрике (15.5). В то же время при $t \gg t^*$ можно пренебречь локальными квантовыми эффектами и описывать эволюцию метрики уравнениями Эйнштейна, в правой части которых стоит лишь классический ТЭИ частиц, рожденных в эпоху $t \sim t_0$.

Действительно, вклад в $\langle T_{ij}^k \rangle_{\text{reg}}$ локальных членов, связанных с рождением частиц и поляризацией вакуума в данный момент t , убывает как t^{-4} . В то же время, как показано в [220], вклад частиц, рожденных при $t \sim t_0$ (когда процесс рождения шел наиболее интенсивно), убывает с ростом t лишь как $t^{-2+p} t_0^{-2-p}$, где $p \geq 0$. При $t \gg t_0$ он является доминирующим, и $\langle T_{ij} \rangle_{\text{reg}}$ имеет вид ТЭИ газа классических частиц

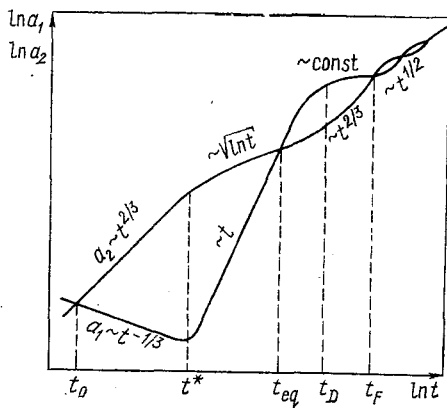


Рис. 9

$$\varepsilon_{\text{reg}} = \langle T_0^0 \rangle_{\text{reg}} \approx \frac{1}{(2\pi)^3 V^{4/3}} \int d^3 k \omega n(k), \quad (15.19)$$

$$P_{\alpha \text{ reg}} = -\langle T_{\alpha}^{\alpha} \rangle_{\text{reg}} \approx \frac{1}{(2\pi)^3 V^{2/3} a_{\alpha}^2} \int \frac{d^3 k k_{\alpha}^2}{\omega} n(k).$$

Функция распределения $n(k)$ аналогична введенной в § 13.7 функции $n(\lambda)$; она конечна и не зависит от способа перенормировки локальных слагаемых. Основной вклад в (15.19) вносят частицы с энергиями $k_0 = \omega V^{-1/3} \sim t_0^{-1}$ и при $t_0 \ll m^{-1}$ их массой можно пренебречь.

Для $n(k)$ в [220] получены следующие приближенные выражения

$$n(k) = b^{(s)} \theta\left(\frac{\pi}{t_0} - k_0(t_0)\right), \quad (15.20)$$

где $b^{(0)} = \pi/(2k_0(t_0)t_0)$ для бозонов и $b^{(1/2)} = 1/2$ — для фермионов, а $\theta(x)$ — ступенчатая функция. Эти формулы хорошо описывают поведение $n(k)$ при $k_0 \lesssim t_0^{-1}$ и быстрое ее убывание при $k \gtrsim t_0^{-1}$, т. е. в области, где длина волны меньше горизонта.

В рамках изложенной схемы в работе [220] рассчитана эволюция осесимметричной казнеровской модели с показателями: $p_1 = -1/3$, $p_2 = p_3 = 2/3$. За время изотропизации t_F принимался момент, когда относительная анизотропия $|(h_1 - h_3)/h_1| < 1$, h_{α} — параметры Хаббла (15.2).

На рис. 9 показано, как изменяются масштабные факторы $a_1(t)$ и $a_2(t) = a_3(t)$ для случая, когда $\tau_0 \equiv t_0/t_{pl} \gg 1$. При этом масштабные факторы $a_{0\alpha}$ в (15.5) выбраны так, что $a_1(t_0) = a_2(t_0) = a_3(t_0)$.

В интервале $t_0 < t < t^*$, где $t^* = t_0\tau_0^{3/2}$ [ср. с (15.18)] реализуется вакуумная казнеровская стадия. При $t \sim t^*$ давление потока рожденных частиц начинает существенно влиять на эволюцию метрики (большинство рожденных частиц движется параллельно оси x_1 поровну в каждом направлении). При $t > t^*$ эволюция происходит таким образом, чтобы погасить аномально высокое давление по оси x^1 : $a_1 \sim t$, $a_2 \sim \ln^{1/2} t$, $P_3 \sim t^{-1}$. В эпоху $t \approx t_{eq} = t^*\tau_0^{3/2} (2\ln\tau_0)^{1/2}$ давления выравниваются ($P_1 = P_2$) и $a_1 = a_2$.

Следующая стадия, непосредственно предшествующая фридмановскому этапу расширения, начинается при $t \sim t_D = t_0\tau_0^3 \ln^{3/2} \tau_0$. При $t > t_D$ происходит «демпфирование» анизотропии. В эту эпоху $a_1 \sim \text{const}$, $a_2 \sim (t/t_D)^{2/3}$.

Стадия демпфирования продолжается вплоть до $t \sim t_F$, где

$$t_F = t_D(\ln\tau_0)^{3/2} = t_0(\tau_0 \ln \tau_0)^3. \quad (15.21)$$

При $t > t_F$ анизотропия быстро убывает:

$$\ln(a_2/a_1) \approx (t_F/t)^{1/4} \sin(A \ln t + \text{const})$$

($A \sim 1$) и $a_1 \approx a_2 \sim t^{1/2}$, т. е. наступает фридмановская стадия расширения.

Качественный учет взаимодействий рождающихся частиц [220] приводит к тому, что оценка времени изотропизации (15.21) меняется на $t_F \sim t_0(\tau_0 \ln \tau_0)^2$.

Описанные выше результаты справедливы при $t_0 \gg t_{pl}$ ($\tau_0 \gg 1$). Если полагать $t_0 \sim t_{pl}$, то они дают грубую оценку $t_F \sim t_{pl}$. Иными словами, если рождение частиц «включается» при планковском времени, изотропизация происходит практически мгновенно.

Аналогичные результаты для той же модели были позднее получены в работе [221]. В этой работе квантование поля и вычисление $\langle T_{ih} \rangle_{\text{reg}}$ проводилось так же, как и в работе [220], но учет обратного влияния осуществлялся непосредственно численным интегрированием уравнений Эйнштейна с $\langle T_{ih} \rangle_{\text{reg}}$ в правой части (взаимодействия рождающихся частиц не учитывались). Для $t_0 = t_{pl}$ [221] получено $t_F \sim 10t_0$, а для $t_0 = 3t_{pl}$ значение $t_F \sim 10^3 t_0$.

Таким образом, квантовый эффект рождения частиц вблизи сингулярности в рассмотренной анизотропной модели приводит к ее быстрой изотропизации. Можно надеяться, что этот результат будет справедлив и для других анизотропных моделей (например, он имеет место в так называемой вихревой космологической модели [352]). Отметим, что в теориях гравитации с кручением возможен обратный эффект изотропизации первоначально изотропного расширения из-за рождения частиц [378].

§ 16.1. Гравитационный коллапс и черные дыры

Выше рассмотрены различные квантовые эффекты вблизи космологической сингулярности. В настоящей главе обсуждается другая ситуация, когда возникают сильные гравитационные поля и, следовательно, могут быть существенными квантовые эффекты — гравитационный коллапс.

В отличие от пространственно-однородных гравитационных полей здесь имеются не решенные до сих пор принципиальные проблемы. В частности, не найден конечный, регуляризованный тензор энергии-импульса квантованных полей во внешнем гравитационном поле черной дыры в 4-мерном пространстве—времени (в работе [259] получены лишь частичные результаты). Поэтому в настоящей главе изложены только достаточно твердо установленные результаты, относящиеся к потоку рожденных частиц вдали от черной дыры.

Как известно [218, 242], после завершения всех циклов термоядерной эволюции звезда остывает и начинает сжиматься. Если при этом масса звезды $M > M_{\text{кр}} \sim 2M_{\odot}$ (M_{\odot} — масса Солнца), то у такой звезды отсутствует предельное равновесное состояние: происходит гравитационный коллапс и возникает черная дыра.

Различные аспекты физики черных дыр хорошо освещены в литературе (см., например, [54, 88, 218, 242, 353, 354]); напомним лишь основные факты.

При сферически-симметричном гравитационном коллапсе пространство—время вне звезды описывается метрикой Шварцшильда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (16.1)$$

Здесь M — масса звезды, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ — элемент телесного угла. На поверхности звезды $r = R(t)$ метрика (16.1) сшивается с внутренней метрикой, которая зависит от деталей строения звезды.

При $r = r_g = 2GM$ метрика Шварцшильда имеет фиктивную (координатную) сингулярность; r_g называется *гравитационным радиусом*.

Когда поверхность звезды достигает r_g , происходит гравитационное самозамыкание, т. е. образуется черная дыра. Поверхность $r = r_g$ становится *горизонтом событий*.

Если коллапсирующая звезда имеет отличный от нуля момент импульса J , то пространство — время вне ее описывается метрикой Керра

$$ds^2 = dt^2 - \frac{r_g r}{\rho^2} (a \sin^2 \theta d\varphi - dt)^2 - \rho^2 \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) - (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (16.2)$$

где $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2\theta$, $\Delta = r^2 - rr_g + a^2$, $a = J/M$ — удельный момент импульса. При $a = 0$ (16.2) переходит в метрику Шварцшильда. По-видимому, физически реализуемы лишь такие значения J , для которых $a < r_g/2$ [54, 88, 218, 242].

Горизонт здесь определяется уравнением

$$r = r_h = r_g/2 + \sqrt{(r_g/2)^2 - a^2}. \quad (16.3)$$

Метрика Керра имеет вторую фиктивную особенность при

$$r = r_e = r_g/2 + \sqrt{(r_g/2)^2 - a^2 \cos^2\theta}. \quad (16.4)$$

Область $r_h < r < r_e$ называется *эргосферой*, а поверхность $r = r_e$ — пределом статичности, или границей эргосферы. Внутри эргосферы тела не могут покоиться относительно удаленного наблюдателя — они обязательно вращаются вокруг черной дыры в направлении ее вращения. Частицы, пересекающие поверхность горизонта $r = r_h$, имеют угловую скорость

$$\Omega = 4\pi J/MS, \quad (16.5)$$

где площадь поверхности горизонта

$$S = 2\pi r_g (r_g + \sqrt{r_g^2 - 4a^2}). \quad (16.6)$$

Напряженность гравитационного поля на горизонте характеризуется *поверхностной гравитацией*

$$\kappa = (2\pi/S) \sqrt{r_g^2 - 4a^2}. \quad (16.7)$$

Для статической черной дыры ($a = 0$) $S = 4\pi r_g^2$; при этом $\kappa = 1/4GM = GM/r_g^2$, что совпадает с классическим выражением для ускорения свободного падения на расстоянии r_g от массы M .

Третьей возможной характеристикой черной дыры является электрический заряд Q ; метрика заряженной черной дыры (метрика Керра—Ньюмена) получается из (16.2), если там положить

$$\Delta = r^2 - r_g r + a^2 + GQ^2.$$

Согласно современным представлениям, гравитационный коллапс всегда приводит к образованию стационарной черной дыры, описываемой в общем случае метрикой Керра—Ньюмена. Параметрами M , J и Q стационарная черная дыра определяется однозначно и никаких других характеристик она иметь не может, — вся остальная информация о звезде после ухода ее поверхности под горизонт делается недоступной для внешнего наблюдателя.

При коллапсе быстро затухают мультипольные моменты $l \geq s$ полей со спином s , исчезают лептонный и барионный заряды и т. п. Стационарные черные дыры с одинаковыми значениями M , J и Q неотличимы друг от друга (в дальнейшем для простоты будем рассматривать лишь незаряженные черные дыры).

Применение глобальных методов общей теории относительности позволяет установить некоторые общие законы, справедливые для любых черных дыр [54, 218, 354]. К их числу относится теорема Хо-

кинга, согласно которой при любых классических процессах с участием черных дыр суммарная площадь их горизонтов не может уменьшаться. Из нее, в частности, следует невозможность уменьшения массы статической черной дыры. Массу вращающейся черной дыры можно уменьшить только за счет уменьшения ее момента импульса.

Если в ходе некоторого процесса изменяются параметры M и J так, что площадь горизонта (16.6) остается постоянной, то такой процесс называется обратимым.

Имеет место далеко идущая аналогия между законами физики черных дыр и законами классической термодинамики [355].

Подобно термодинамической системе, черная дыра в стационарном состоянии характеризуется конечным числом параметров. При изменении площади горизонта на величину δS и момента на δJ внутренняя энергия (масса) черной дыры изменяется на величину

$$\delta E = (\kappa/8\pi G)\delta S + \Omega\delta J. \quad (16.8)$$

Это равенство формально аналогично первому закону термодинамики для тела, вращающегося с угловой скоростью Ω , если величину, пропорциональную κ , рассматривать как температуру, а величину, пропорциональную S , — как энтропию черной дыры.

Последнее подкрепляется неравенством $\delta S \geq 0$, выражающим теорему Хокинга, которое аналогично второму закону термодинамики. Обратимые процессы с $\delta S = 0$ аналогичны термодинамическим обратимым процессам.

Поверхностная гравитация κ , подобно температуре в равновесном состоянии, постоянна во всех точках горизонта. Далее, подобно третьему закону термодинамики, величину κ нельзя обратить в нуль за конечное число шагов.

Описанная выше формальная аналогия имеет глубокие физические основания. Возникновение величины S , аналогичной энтропии, как и в термодинамике, связано с невозможностью получить детальную информацию о системе. При образовании горизонта в процессе коллапса информация об области за горизонтом безвозвратно теряется.

Как показано в работе [355] с помощью мысленных экспериментов, величина S действительно пропорциональна логарифму числа различных возможных конфигураций, приводящих к образованию одной и той же черной дыры. Однако коэффициент пропорциональности между S и эффективной энтропией \tilde{S} можно установить только в рамках квантовой теории (как и в классической термодинамике).

Пусть \tilde{S} — суммарная энтропия черных дыр в системе, а S_m — энтропия вещества, находящегося вне черных дыр. Тогда для такой системы имеет место обобщенный второй закон термодинамики

$$\delta(\tilde{S} + S_m) \geq 0. \quad (16.9)$$

В рамках этой аналогии должна существовать возможность обмена энергией между черными дырами и окружающим веществом. В

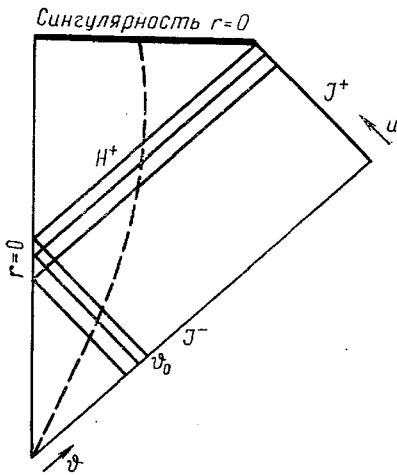


Рис. 10

частности, черная дыра с температурой T , находясь в среде с температурой $T_1 < T$, должна излучать энергию. Оказалось, что такое явление действительно имеет место и что оно связано с рождением частиц гравитационным полем.

§ 16.2. Эффект Хокинга

Поскольку для наблюдателя на бесконечности при гравитационном коллапсе метрика становится стационарной за характерное время $\tau \sim r_g$, естественно, казалось бы, ожидать, что так же ведет себя и поток рожденных частиц.

Действительный характер этого явления, однако, оказался весьма неожиданным. Как было показано в работе [356], кроме быстро затухающего потока рожденных частиц, определяемого деталями процесса коллапса, после образования горизонта событий возникает стационарный поток, зависящий лишь от параметров черной дыры M и J . Последний имеет планковский спектр (модулированный фактором, возникающим из-за наличия гравитационного и центростремительного барьеров), причем соответствующая температура

$$kT = \kappa/2\pi, \quad (16.10)$$

где κ определена в (16.7), а k — постоянная Больцмана. Для сферической черной дыры массы M (16.10) дает $T = (M_\odot/M)10^{-6}$ К.

Поток рожденных частиц уносит энергию, и при этом масса черной дыры уменьшается. Противоречия с теоремой Хокинга здесь нет, так как последняя справедлива лишь если выполнены энергетические условия (см. § 12.1), которые в квантовых процессах могут нарушаться.

Рассмотрим, как возникает излучение Хокинга, на примере вещественного скалярного поля с $m = 0$ при сферически-симметричном коллапсе. Картину коллапса удобно представить на диаграмме Пенроуза [54, 218, 354], на которой пространство—время с помощью конформного преобразования отображено в компактную область. На рис. 10 показано сечение $\theta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$. Границы \mathcal{J}^+ (\mathcal{J}^-) соответствуют световым бесконечностям будущего (прошлого). Световые геодезические изображаются прямыми линиями, наклоненными под углом $\pm 45^\circ$. Штриховая линия — мировая линия поверхности коллапсирующей звезды; H^+ — горизонт событий.

Предположим, что при $t \rightarrow -\infty$ имелось статическое сферически-симметричное распределение вещества, которое затем претерпевает

гравитационный коллапс, и при $t \rightarrow \infty$ образуется статическая черная дыра. Очевидно, задача носит S -матричный характер, и рождение частиц можно описать по схеме, изложенной в § 11.3.

Квантование поля в in -области осуществляется обычным образом. Введем полную ортонормированную согласно (2.4) систему решений уравнения Клейна—Гордона—Фока $\{\varphi_\alpha\}$, которые в окрестности световой бесконечности прошлого \mathcal{I}^- имеют вид

$$\varphi_\alpha \equiv \varphi_{\omega l m} = \omega^{-1/2} r^{-1} F_\omega(r) \exp(i\omega v) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (16.11)$$

где $F_\omega(r)$ — радиальная функция, явный вид которой несуществен, а v — опережающее время, определяемое вместе с запаздывающим временем u соотношениями

$$v = t + r^*, \quad u = t - r^*, \quad r^* = r + r_g \ln(r/r_g - 1). \quad (16.12)$$

Соответствующие in -операторы рождения и уничтожения $a_\alpha^{(\pm)}$ и вакуум $|0_{in}\rangle$ определяются согласно (2.6) и (2.19).

В качестве полной поверхности Коши в out -области можно выбрать объединение световой бесконечности будущего \mathcal{I}^+ и горизонта H^+ . Одночастичное гильбертово пространство \mathcal{H}_{out} можно тогда построить как прямую сумму $\mathcal{H}_{out} = \mathcal{H}(\mathcal{I}^+) \oplus \mathcal{H}(H^+)$. В пространство $\mathcal{H}(\mathcal{I}^+)$ входят функции ψ_α , удовлетворяющие нулевым условиям Коши на горизонте H^+ и ведущие себя в окрестности \mathcal{I}^+ как

$$\psi_\alpha = \psi_{\omega l m} = r^{-1} \omega^{-1/2} P_\omega(r) \exp(i\omega u) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (16.13)$$

где u — запаздывающее время (16.12), а $P_\omega(r)$ — соответствующие радиальные функции. Пространство $\mathcal{H}(H^+)$ состоит из решений χ_α , удовлетворяющих нулевым условиям Коши на \mathcal{I}^+ и описывающих частицы, падающие в черную дыру. Явный вид χ_α несуществен, так как нас интересуют лишь значения наблюдаемых на \mathcal{I}^+ .

Оператор поля $\varphi(x)$ можно разложить по функциям ψ_α и χ_α :

$$\varphi = \sum_\alpha (\psi_\alpha^* b_\alpha^{(-)} + \psi_\alpha b_\alpha^{(+)} + \chi_\alpha^* c_\alpha^{(-)} + \chi_\alpha c_\alpha^{(+)}), \quad (16.14)$$

где $b_\alpha^{(\pm)}$, $c_\alpha^{(\pm)}$ — операторы рождения и уничтожения на \mathcal{I}^+ и H^+ соответственно (подробно эта конструкция изложена в работе [240]).

Для вычисления средних значений наблюдаемых на \mathcal{I}^+ в состоянии $|0_{in}\rangle$ необходимо найти преобразование Боголюбова вида (2.22), определяющее связь между операторами $a_\alpha^{(\pm)}$ и $b_\alpha^{(\pm)}$. Его коэффициенты $\Phi_{\alpha\alpha'}$ и $\Psi_{\alpha\alpha'}$ можно определить из соотношений (2.21) между базисными функциями φ_α и ψ_α . Для этого следует найти асимптотический вид в окрестности \mathcal{I}^- функций ψ_α , которые в окрестности \mathcal{I}^+ определяются равенством (16.13).

Будем интересоваться лишь стационарной частью потока рожденных частиц, которая остается при больших значениях u в окрестности \mathcal{I}^+ (т. е. когда наблюдатель на \mathcal{I}^+ видит уже застывшую черную дыру). В этой области функции ψ_α , имеющие на \mathcal{I}^+ асимптотику (16.13), можно представить в виде суммы $\psi_\alpha = \psi_\alpha^{(1)} + \psi_\alpha^{(2)}$,

где $\psi_{\alpha}^{(1)}$ — волна, рассеянная на статическом внешнем поле Шварцшильда без перемешивания частотностей, а $\psi_{\alpha}^{(2)}$ — волна, прошедшая через коллапсирующее тело и ушедшая на \mathcal{Y}^+ непосредственно перед образованием горизонта. Именно волна $\psi_{\alpha}^{(2)}$ содержит информацию о рождении частиц.

Для вычисления $\psi_{\alpha}^{(2)}$ достаточно проследить распространение одностичных решений через коллапсирующее вещество в приближении геометрической оптики. Это объясняется следующим обстоятельством. Пусть v_0 — такое значение опережающего времени, что световая геодезическая $v = v_0$ достигает горизонта как раз в момент его образования и уже не уходит на \mathcal{Y}^+ (см. рис. 10). Тогда волна, выходящая из \mathcal{Y}^- при v , близком к v_0 , проходит вблизи горизонта и попадает на \mathcal{Y}^+ при большом значении u :

$$u = C - \kappa^{-1} \ln(v_0 - v), \quad (16.15)$$

где константа C зависит от деталей процесса коллапса. Такая волна достигает \mathcal{Y}^+ с тем большим красным смещением, чем ближе v к v_0 . Поэтому вид $\psi_{\alpha}^{(2)}$ на \mathcal{Y}^+ определяется ее коротковолновой асимптотикой внутри коллапсирующего тела и на \mathcal{Y}^- .

Вычисления дают для коэффициента преобразования Боголюбова $\Psi_{\alpha'\alpha}$ следующее выражение [60, 356]:

$$\Psi_{\alpha'\alpha} = \frac{B_{\omega l}}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \Gamma\left(1 - \frac{i\omega}{\kappa}\right) (i\omega')^{i\omega/\kappa - 1} \exp[i(\omega\omega' + C\omega)] \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (16.16)$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция, константа C определена в (16.15), а $B_{\omega l}$ — коэффициент прохождения для эффективного потенциала в поле Шварцшильда. Величина $\Gamma_{\omega l} = |B_{\omega l}|^2 < 1$ показывает, какая часть падающей сферической волны в моде ωl проходит внутрь черной дыры.

Средние значения наблюдаемых на \mathcal{Y}^+ можно вычислить с помощью формализма, аналогично развитому в гл. 4 и 5. Например, вычисляя поток энергии через сферу радиуса $R \gg r_g$, находим [60, 241, 357]

$$L = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\omega \sum_l (2l+1) \Gamma_{\omega l} \frac{\omega}{\exp(2\pi\omega/\kappa) - 1}. \quad (16.17)$$

Очевидно, что этот поток стационарен и с точностью до множителя $\Gamma_{\omega l}$ имеет планковский спектр, причем характерная температура T дается равенством (16.10) [в рассматриваемом случае $\kappa = 1/4GM$ и $T = (8\pi GM)^{-1}$]. Возникновение фактора $\Gamma_{\omega l}$ связано с тем, что рожденные частицы, чтобы уйти на \mathcal{Y}^+ , должны преодолеть эффективный центробежный и гравитационный барьер; прозрачность этого барьера совпадает с $\Gamma_{\omega l}$.

Приведенные выше результаты были воспроизведены различными способами (см., например, [60, 233, 240, 357, 358]). В работах [240, 359, 360] показано, что состояние квантованного поля вне черной дыры описывается матрицей плотности, совпадающей с матрицей плотности излучения черного тела при температуре $kT = \kappa/2\pi$. Возникновение матрицы плотности здесь связано с тем, что при образовании горизонта событий наблюдатель на γ^+ безвозвратно теряет информацию о состоянии части системы, находящейся за горизонтом. В результате возможна ситуация, когда система, находившаяся в чистом квантовом состоянии, переходит в смешанное состояние.

Аналогичное явление имеет место при квантовании поля в неинерциальных системах координат с горизонтом событий [63, 227, 233, 361]. Например, при использовании координат Риндлера, описывающих систему отсчета наблюдателя, движущегося с постоянным ускорением ω , возникает поток теплового излучения с температурой $kT = \omega/2\pi$ [361] (для $\omega = 10^8$ см/с² получается $T = 10^{-20}$ К).

§ 16.3. Обобщения и астрофизические следствия эффекта Хокинга

В предыдущем параграфе изучался эффект Хокинга для безмассового скалярного поля в случае шварцшильдовской черной дыры. Рассмотрим теперь различные обобщения этого эффекта и его возможные следствия.

Для фотонов и гравитонов имеет место результат, аналогичный (16.17) (с другими значениями $\Gamma_{\omega l}$). Для нейтрино знаменатель в (16.17) заменяется на $[\exp(2\pi\omega/\kappa) + 1]$, как и должно быть для теплового излучения фермионов.

Для полей с ненулевой массой покоя μ эффект Хокинга также имеет место. При этом в (16.17) следует полагать $\omega = (k^2 + \mu^2)^{1/2}$, где k — импульс рождающейся частицы, и интегрирование по ω заменить интегрированием по k (связанных состояний в поле статической черной дыры нет [235]). Очевидно, что при $\mu > \kappa$ (это соответствует $r_g > l_c$, где l_c — комптоновская длина) излучение будет экспоненциально малым.

В работе [362] рассчитана светимость черных дыр с учетом возможности излучения различных элементарных частиц. Для черных дыр с массой $M > 10^{17}$ г ($r_g > 10^{-11}$ см) она равна

$$L = 3,4 \cdot 10^{48} M^{-2} \text{ эрг/с}, \quad (16.18)$$

где M измеряется в граммах. Для $M = M_\odot$ получается $L \sim \sim 10^{-20}$ эрг/с (в то время как светимость Солнца порядка 10^{33} эрг/с). При этом 81% излучения приходится на электронные и мюонные нейтрино (и антинейтрино), 17% — на фотоны и 2% — на гравитоны.

Если $10^{14} < M < 10^{17}$ г, то становится существенным рождение электронов и позитронов (при этом $r_g < l_c$ для электрона). В этой области множитель 3,4 в (16.18) заменяется на 6,3. Для черных дыр меньшей массы он возрастает, поскольку становится возможным излучение более тяжелых частиц.

Рассмотрим теперь эффект Хокинга для вращающейся черной дыры, описываемой метрикой Керра (16.2). Результат (16.17) в этом случае обобщается следующим образом [60, 356]:

$$[L = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\omega \sum_{l,m} \Gamma_{\omega lm} \frac{\omega}{\exp [2\pi (\omega - m\Omega)/\kappa] - 1}, \quad (16.19)$$

где Ω и κ определены в (16.5) и (16.7), а $\Gamma_{\omega lm}$ — прозрачность потенциального барьера для частицы с квантовыми числами (ω, l, m) , равная

$$\Gamma_{\omega lm} = 1 - |A_{\omega lm}|^2. \quad (16.20)$$

Здесь $A_{\omega lm}$ — коэффициент отражения падающей из \mathcal{U} -сферической волны в моде (ω, l, m) от черной дыры.

Очевидно, что при

$$\omega < m\Omega \quad (16.21)$$

знаменатель в подынтегральном выражении (16.19) отрицателен. Оказывается, что при условии (16.21) становится отрицательным и коэффициент $\Gamma_{\omega lm}$, т. е. $|A_{\omega lm}|^2 > 1$.

Таким образом, в области (16.21) для классических волн происходит усиление при отражении от вращающейся черной дыры. Это явление, обнаруженное впервые для случая отражения электромагнитных волн от вращающегося цилиндра [363, 364], получило название сверхизлучения.

Сверхизлучение при отражении от вращающихся черных дыр для классических полей исследовано в работах [365, 366]. При этом оказалось, что для электромагнитных волн максимальное увеличение энергии составляет примерно 4%, а для гравитационных — 137%. Для спинорного поля сверхизлучение отсутствует [367], что, очевидно, связано с действием принципа Паули.

При рассмотрении в рамках квантовой теории оказывается возможным не только вынужденное сверхизлучение, но и спонтанное рождение квантов в поле вращающейся черной дыры [363—365]. Ситуация здесь аналогична парадоксу Клейна (см. § 7.2). Этот эффект, являющийся составной частью эффекта Хокинга, есть следствие того, что у вращающейся черной дыры имеется эргосфера. Рождение пары с нулевой суммарной энергией и моментом возможно, если одна из частиц находится в эргосфере (где ее энергия отрицательна), а другая — вне ее. При этом первая уходит под горизонт событий, а другая — на бесконечность, отбирая энергию и момент у вращающейся черной дыры. Для рассматриваемого процесса площадь поверхности горизонта событий (16.6) не уменьшается, т. е. выполнена тео-

рема Хокинга (см. § 16.1). Как показано в работах [60, 368], поток энергии спонтанно рожденных скалярных частиц на бесконечности

$$L = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{m\Omega} d\omega \sum_{\substack{l, m \\ m\Omega > 0}} \omega (|A_{\omega lm}|^2 - 1). \quad (16.22)$$

Очевидно, что этот же результат получается из общей формулы (16.19) в пределе $\kappa \rightarrow 0$, когда спектральную плотность в (16.19) можно аппроксимировать ступенчатой функцией $-\theta(m\Omega - \omega)$. Таким образом, для вращающихся черных дыр большой массы тепловое излучение пренебрежимо мало по сравнению со спонтанным рождением.

Интересно рассмотреть, к каким следствиям для физики черных дыр приводит эффект Хокинга. Вследствие излучения рожденных частиц масса черной дыры уменьшается, в результате чего согласно (16.10) увеличивается ее температура. Это, в свою очередь, приводит к увеличению интенсивности излучения.

Для последовательного описания эволюции черной дыры с учетом эффекта Хокинга необходимо рассматривать самосогласованную задачу. В квазистатическом приближении изменение массы черной дыры можно описать уравнением

$$dM/dt = -L(M), \quad (16.23)$$

где $L(M)$ — светимость, определяемая равенством (16.17).

С учетом (16.18) для времени жизни черной дыры получается результат

$$\tau \sim M^3 \cdot 10^{-27} \text{ с}, \quad (16.24)$$

где M измеряется в граммах.

Как видно из (16.24), для черных дыр с массой, большей 10^{15} г, τ превышает время существования Вселенной.

Преыдущие результаты не учитывали наличия вокруг черной дыры теплового фона реликтового излучения. В то же время наличие теплового фона с температурой T_b приводит к тому, что черная дыра с температурой $T < T_b$ не излучает, а поглощает излучение фона [369, 370]. Поскольку для черных дыр, которые могли образоваться в процессе коллапса ($M \gtrsim M_\odot$), температура $T \lesssim 10^{-6}$ К, то тепловое излучение для них вообще отсутствует. Таким образом, эффект Хокинга существен лишь для так называемых первичных черных дыр небольшой массы, которые могли образоваться в результате флуктуаций плотности вблизи космологической сингулярности [371, 372]. При этом, как следует из (16.24), черные дыры с массой, меньшей 10^{15} г, к настоящему времени должны были испариться. Различные астрофизические следствия эффекта Хокинга для первичных черных дыр рассматривались, например, в работах [373—375].

Список литературы

1. Делоне Н. Б., Крайнов В. П. Атом в сильном световом поле. — М.: Атомиздат, 1978.
2. Ритус В. И. — Труды ФИАН СССР, 1979, т. 111, с. 5.
3. Рапопорт Л. П., Зон Б. А., Манаков Н. Л. Теория многофотонных процессов в атомах. — М.: Атомиздат, 1978.
4. Байер В. Н., Катков В. М., Фадин В. С. Излучение релятивистских электронов. — М.: Атомиздат, 1973.
5. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. — М.: Наука, 1974.
6. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. — М.: Наука, 1976.
7. Швeбер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля: Пер. с англ. — М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
8. Callan C. G., Coleman S., Jackiw R. — *Ann. Phys.*, 1970, v. 59, p. 42.
9. Вентцель Г. Введение в квантовую теорию волновых полей: Пер. с нем. — М.—Л.: Гостехтеориздат, 1947.
10. Velo G., Zwanziger D. — *Phys. Rev.*, 1969, v. 188, p. 2218.
11. Penrose R. In: *Relativity, groups and topology*. — N. Y.—L.: Gordon and Breach, 1964.
12. Gürsey F. — *Ann. Phys.*, 1963, v. 24, p. 211.
13. Chernikov N. A., Tagirov E. A. — *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1968, v. 9A, p. 109.
14. Tugov I. I. — *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1969, v. 11A, p. 207.
15. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия: Пер. с англ. — М.: Изд-во иностр. лит., 1948.
16. Коккедэ Я. Теория кварков: Пер. с англ. — М.: Мир, 1971.
17. Fock V., Iwanenko D. — *Comp. rend. Acad. sci. Paris*, 1929, t. 188, p. 147.
18. Brill D., Wheeler J. — *Rev. Mod. Phys.*, 1957, v. 29, p. 265.
19. Velo G., Zwanziger D. — *Phys. Rev.*, 1969, v. 186, p. 1337.
20. Хриплович И. Б. — *Ядерная физика*, 1972, т. 16, с. 823.
21. Seiler R. — In: *Lectures from the Coral Gables Conference on fundamental interactions at high energy*. V. 4. — N. Y., 1971.
22. Prabhakaran J., Seetharaman M., Mathews P. M. — *J. Phys. A.*, 1975, v. 8, p. 560.
23. Prabhakaran J., Govindarajan T. R., Satharaman M. — *Nucl. Phys. B*, 1977, v. 127, p. 537.
24. Khalil M. A. K. — *Progr. Theor. Phys.*, 1977, v. 58, p. 1538.
25. Фушич В. И., Никитин А. Г. — *ЭЧАЯ*, 1978, т. 9, вып. 3, с. 501.
26. Бор Н., Розенфельд Л. — В кн.: Бор Н. Избранные научные труды. Т. 2. М., Наука, 1971.
27. DeWitt B. — In: *Foundations of quantum mechanics. Scuola int. di fisica «Enrico Fermi». Corso 49*, 1973.
28. Ландау Л. Д., Пайерлс Р. — В кн.: Ландау Л. Д. Собрание научных трудов. М., Наука, 1969.
29. Розенфельд Л. — В кн.: Нильс Бор и развитие физики: Пер. с англ. — М., Изд-во иностр. лит., 1958.
30. Adler S., Lieberman J., Ng Y. J., Hung-Sheng Tsao. — *Phys. Rev. D*, 1976, v. 14, p. 359.

31. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М.; Питаевский Л. П. Релятивистская квантовая теория. Ч. 1. — М.: Наука, 1968.
32. Гриб А. А. Проблема неинвариантности вакуума в квантовой теории поля. — М.: Атомиздат, 1978.
33. Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. — М.: Наука, 1969.
34. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. — М.: Наука, 1965.
35. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики: Пер. с англ. Т. 2. — М.: Мир, 1978.
36. Боголюбов Н. Н., Толмачев В. В.; Ширков Д. В. Новый метод в теории сверхпроводимости. — М.: Изд-во АН СССР, 1958.
37. Завьялов О. И., Сушко В. Н. — В кн.: Статистическая физика и квантовая теория поля. М., Наука, 1973.
38. Эмх Ж. Алгебраические методы в статистической физике и квантовой теории поля: Пер. с англ. — М.: Мир, 1976.
39. Agaki H., Wyss W. — Helv. Phys. Acta, 1964, v. 37, p. 136.
40. Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я. Обобщенные функции. Т. 4. — М.: Физматгиз, 1961.
41. Наймарк М. А. Нормированные кольца. — М.: Наука, 1968.
42. Шилов Г. Е. Гуревич Б. Л. Интеграл, мера и производная. — М.: Наука, 1967.
43. Fucutome H. — Progr. Theor. Phys., 1960, v. 23, p. 989.
44. Сигал И. Математические проблемы релятивистской физики: Пер. с англ. — М.: Мир, 1968.
45. Provost J. P., Rocca F., Sirugue M., Vallee G. — J. Math. Phys., 1974, v. 15, p. 2079.
46. Алимов А. Л.; Дамаскинский Е. В. — Теорет. и мат. физ., 1978, т. 38, с. 58.
47. Гриб А. А.; Дамаскинский Е. В., Максимов В. М. — Успехи физ. наук, 1970, т. 102, с. 587.
48. Зельдович Я. Б. — Письма в ЖЭТФ, 1967, т. 6, с. 922.
49. Сахаров А. Д. — Докл. АН СССР, 1967, т. 177, с. 70.
50. Перина Я. Когерентность света: Пер. с англ. — М.: Мир, 1974.
51. Aharonov Y.; Sabko J. L. — App. Phys., 1975, v. 91, p. 279.
52. Широков М. И. — Ядерная физика, 1968, т. 7, с. 672.
53. Гриб А. А., Мамаев С. Г. — Ядерная физика, 1969, т. 10, с. 1276.
54. Хокинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства—времени: Пер. с англ. — М.: Мир, 1977.
55. Zeldovič Ya. B., Pitaevskii L. P. — Comm. Math. Phys., 1971, v. 23, p. 185.
56. Фон Нейман И. Математические основы квантовой механики: Пер. с нем. — М.: Наука, 1964.
57. Зельдович Я. Б., Попов В. С. — Успехи физ. наук, 1971, т. 105, с. 403.
58. Johnson K. — Acta Phys. Polonica, 1975, v. B6, p. 865.
59. Hasenfratz P., Kubi J. — Phys. Rep. C, 1978, v. 40, p. 75.
60. DeWitt B. S. — Phys. Rep. C, 1975, v. 19, p. 297.
61. Candelas P., Deutsch D. — Proc. Roy. Soc. Lond., 1977, v. A354 p. 79; 1978, v. A362, p. 251.
62. Fulling S. A.; Davies P. C. W. — Proc. Roy. Soc. Lond., 1976, v. A348, p. 393.
63. Davies P. C. W.; Fulling S. A. — Proc. Roy. Soc. Lond., 1977, v. A356, p. 237.
64. Fulling S. A. — J. Phys. A, 1977, v. 10, p. 917.
65. Casimir H. B. G. — Proc. Kon. Nederl. Akad. Wet., 1948, v. 51, p. 793.
66. Spaarnay M. J. — Physica, 1958, v. 24, p. 751.
67. Tabor D.; Winterton R. H. S. — Proc. Roy. Soc. Lond., 1969, v. A312, p. 435.
68. Лифшиц Е. М. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1955, т. 29, с. 94.
69. Ландау Л. Д.; Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Физматгиз, 1959.
70. Boyer T. H. — App. Phys., 1970, v. 56, p. 474.

71. Бараш Ю. С., Гинзбург В. Л. — Успехи физ. наук, 1975, т. 116, с. 5.
72. Schwinger J., DeRaad L. L., Milton K. A. — App. Phys., 1978, v. 115, p. 1.
73. Евграфов М. А. Аналитические функции. — М.: Наука, 1968.
74. Мамаев С. Г., Трунов Н. Н. — Теорет. и мат. физ., 1979, т. 38, с. 345.
75. Dowker J. S., Critchley R. — J. Phys. A, 1976, v. 9, p. 535.
76. Hawking S. W. — Comm. Math. Phys., 1977, v. 55, p. 133.
77. Casimir H. V. G. — Physica, 1953, v. 19, p. 846.
78. Boyer T. H. — Phys. Rev., 1968, v. 174, p. 1764.
79. Davies B. — J. Math. Phys., 1972, v. 13, p. 1324.
80. Balian R., Duplantier B. — App. Phys., 1978, v. 112, p. 165.
81. Мамаев С. Г., Трунов Н. Н. — Изв. вузов, Сер. физ., 1979, № 7, с. 88.
82. Старобинский А. А. — В сб.: Классическая и квантовая теория гравитации. Минск, Изд-во АН БССР, 1976.
83. Bender C. M., Hays P. — Phys. Rev. D, 1976, v. 14, p. 2622.
84. Balian R., Bloch C. — App. Phys., 1971, v. 64, p. 271.
85. Moore G. T. — J. Math. Phys., 1970, v. 11, p. 2679.
86. Davies P. C. W., Fulling S. A. — Proc. Roy. Soc. Lond., v. A354, p. 59.
87. Adler S. L., Lieberman J., Ng Y. J. — App. Phys., 1977, v. 106, p. 279.
88. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: Наука, 1973.
89. Schwinger J. — Phys. Rev., 1951, v. 82, p. 664.
90. Schwinger J. — Phys. Rev., 1954, v. 93, p. 615.
91. Фрадкин Е. С. — Труды ФИАН СССР, 1965, т. 29, с. 7.
92. Brezin E., Itzykson C. — Phys. Rev. D, 1970, v. 2, p. 1191.
93. Feynman R. — Phys. Rev., 1949, v. 76, p. 749.
94. Никишов А. И. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1969, т. 57, с. 1210.
95. Боголюбов Н. Н. Лекции по квантовой статистике. — В кн.: Избранные труды в трех томах. Т. 2. — Киев, Наукова думка, 1970.
96. Дирак П. А. М. Лекции по квантовой теории поля: Пер. с англ. — М.: Мир, 1971.
97. Фейнман Р. Квантовая электродинамика: Пер. с англ. — М.: Мир, 1964.
98. Широков М. И. — Ядерная физика, 1967, т. 6, с. 1277.
99. Labonté G., Carpi A. Z. — Nuovo cimento, 1972, v. B10, p. 583.
100. Гриб А. А., Мостепаненко В. М., Фролов В. М. — Теорет. и мат. физ., 1972, т. 13, с. 377.
101. Гриб А. А., Мостепаненко В. М., Фролов В. М. — Теорет. и мат. физ., 1976, т. 26, с. 221.
102. Нарожный Н. Б., Никишов А. И. — Теорет. и мат. физ., 1976, т. 26, с. 16.
103. Никишов А. И. — В кн.: Проблемы теоретической физики. М., Наука, 1972.
104. Seiler R. — Comm. Math. Phys., 1972, v. 25, p. 127.
105. Polubarinov I. V. — Preprint JINR E2-1120; E2-1121, Dubna, 1978.
106. Gitman D. M. — J. Phys. A, 1977, v. 10, p. 2007.
107. Нарожный Н. Б., Никишов А. И. — Ядерная физика, 1970, т. 11, с. 1072.
108. Nikishov A. I. — Nucl. Phys. B, 1970, v. 21, p. 346.
109. Никишов А. И. — Теорет. и мат. физ., 1974, т. 20, с. 48.
110. Попов В. С. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1972, т. 62, с. 1248.
111. Маринов М. С., Попов В. С. — Теорет. и мат. физ., 1973, т. 17, с. 34.
112. Попов В. С. — Ядерная физика, 1974, т. 19, с. 1140.
113. Маринов М. С., Попов В. С. — Ядерная физика, 1972, т. 15, с. 1271.
114. Group G. J., Perlman H. S. — Phys. Rev. D, 1972, v. 6, p. 2299.
115. Попов В. С., Маринов М. С. — Ядерная физика, 1972, т. 16, с. 809.
116. Переломов А. М. — Теорет. и мат. физ., 1974, т. 19, с. 83.
117. Переломов А. М. — Теорет. и мат. физ., 1973, т. 16, с. 303.
118. Marinov M. S., Popov V. S. — Fortschr. Phys., 1977, Bd 25, S. 373.
119. Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М., Старобинский А. А. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1976, т. 70, с. 1577; — Письма в астроном. журн., 1976, т. 2, с. 136.
120. Малкин И. А., Манько В. И. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. — М.: Наука, 1979.

121. Переломов А. М. — Успехи физ. наук, 1977, т. 123, с. 23.
122. Олейник В. П. — Укр. физ. ж., 1973, т. 18, с. 105.
123. Нарожный Н. Б., Никишов А. И. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1973, т. 65, с. 862.
124. Мостепаненко В. М., Фролов В. М. — Ядерная физика, 1974, т. 19, с. 885.
125. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — М., Наука, 1972.
126. Бункин Ф. В., Тугов И. И. — Докл. АН СССР, 1969, т. 187, с. 541.
127. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяния, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. — М., Наука, 1971.
128. Попов В. С. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1971, т. 61, с. 1334.
129. Попов В. С. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1972, т. 63, с. 1586.
130. Никишов А. И. — Труды ФИАН СССР, 1979, т. 111, с. 152.
131. Ваняшин В. С., Терентьев М. В. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1965, т. 48, с. 565.
132. Байер В. Н., Катков В. М., Страховенко В. М. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1975, т. 68, с. 405.
133. Байер В. Н., Катков В. М., Страховенко В. М. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1974, т. 67, с. 453.
134. Багров В. Г., Гитман Д. М., Шварцман Ш. М. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1975, т. 68, с. 392.
135. Klein O. — Z. Phys., 1929, Bd 53, S. 157.
136. Sauter F. — Z. Phys., 1931, Bd 69, S. 742.
137. Зоммерфельд А. Строение атома и спектры. Т. 2: Пер. с нем. — М.; Гостехтеориздат, 1956.
138. Нарожный Н. Б., Никишов А. И. — Теорет. и матем. физ., 1976, т. 26, с. 16.
139. Гитман Д. М., Фролов В. П. — Ядерная физика, 1978, т. 28, с. 552.
140. Багров В. Г., Клименко Ю. И., Шаповалов В. Н., Шахматов В. М., Экле Г. Г. — Изв. вуз. Сер. физ., № 7, с. 95.
141. Боргард А. А., Карпенко Д. Я. — Укр. физ. ж., 1974, т. 19, с. 227.
142. Багров В. Г., Гитман Д. М., Шварцман Ш. М. — Ядерная физика, 1976, т. 23, с. 394.
143. Баталин И. А., Фрадкин Е. С. — Теорет. и мат. физ., 1970, т. 5, с. 190.
144. Герштейн С. С., Зельдович Я. Б. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1969, т. 57, с. 654.
145. Backe H., Handschnung L. e. a. — Phys. Rev. Lett., 1978, v. 40, p. 1443.
146. Reinhardt J., Greiner W. — Rep. Progr. Phys., 1977, v. 40, p. 219.
147. Rafelski J., Fulcher L. P., Klein A. — Phys. Rep. C, 1978, v. 38, p. 227.
148. Pomeranchuk I., Smorodinsky Ya. — J. Phys. USSR, 1945, v. 9, p. 97.
149. Rein D. — Z. Phys., 1969, Bd 221, S. 423.
150. Pieper W., Greiner W. — Z. Phys., 1969, Bd 218, S. 327.
151. Попов В. С. — Ядерная физика, 1970, т. 12, с. 429.
152. Попов В. С. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1971, т. 60, с. 1228.
153. Soff G., Müller B., Rafelski J. — Z. Naturforsch., 1974, Bd 29a, S. 1267.
154. Soff G., Müller B., Rafelski J., Greiner W. — Z. Naturforsch., 1973, Bd 28a, S. 1389.
155. Попов В. С. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1970, т. 59, с. 965.
156. Мигдал А. Б., Переломов А. М., Попов В. С. — Ядерная физика, 1971, т. 14, с. 874.
157. Rafelski J. — Preprint CERN N TH. 2414, 1977.
158. Müller B., Rafelski J., Greiner W. — Z. Phys., 1972, Bd 257, S. 62.
159. Rafelski J., Müller B., Greiner W. — Nucl. Phys. B, 1974, v. 68, p. 585.
160. Fulcher L., Klein A. — Phys. Rev. D., 1973, v. 8, p. 2455.
161. Fulcher L., Klein A. — Ann. Phys., 1974, v. 84, p. 335.
162. Мур В. Д., Попов, В. С., Воскресенский Д. Н. — Ядерная физика, 1978, т. 27, с. 529.

163. Мигдал А. Б., Попов В. С., Воскресенский Д. Н.— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1977, т. 72, с. 834.
164. Ораевский В. Н., Рез А. И., Семикоз В. Б. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1977, т. 72, с. 820.
165. Нарожный Н. Б., Никишов А. И.—Журн. эксперим. и теорет. физ., 1972, т. 63, с. 1135.
166. Попов В. С.— Ядерная физика, 1974, т. 19, с. 155.
167. Попов В. С.— Изв. АН СССР, Сер. физ. 1977, т. 41, с. 2577.
168. Müller V., Rafelski J., Greiner W.— Phys. Lett., 1973, v. 47B, p. 5.
169. Попов В. С.— Ядерная физика, 1971, т. 14, с. 458.
170. Маринов М. С., Попов В. С. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1975, т. 68, с. 421.
171. Маринов М. С., Попов В. С.— Ядерная физика, 1976, т. 23, с. 479.
172. Маринов М. С., Попов В. С.— Ядерная физика, 1974, т. 20, с. 1223.
173. Müller V., Greiner W.— Z. Naturforsch., 1976, Bd 31a, S. 1.
174. Gershtein S. S., Popov V. S.— Lett. Nuovo Cimento, 1973, v. 6, p. 593.
175. Ахизер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика.— М.: Наука, 1969.
176. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Релятивистская квантовая теория. Ч. 2.— М.: Наука, 1971.
177. Фок В. А.— Изв. АН СССР, Сер. физ., 1937, № 4—5, с. 551.
178. Greenman M., Rohrlich F.— Phys. Rev. D, 1973, v. 8, p. 1103.
179. Wichmann E. H., Kroll N. M.— Phys. Rev., 1954, v. 96, p. 232.
180. Gyulassy M.— Nucl. Phys. A, 1975, v. 244, p. 497.
181. Rinker G. A., Wilets L.— Phys. Rev. A, 1975, v. 12, p. 748.
182. Cheng K. T., Johnson W. R.— Phys. Rev. A, 1976, v. 14, p. 1943.
183. Мигдал А. Б.— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1971, т. 61, с. 2209.
184. Мигдал А. Б.— Успехи физ. наук, 1977, т. 123, с. 369.
185. Shiff L. I., Snyder H., Weinberg J.— Phys. Rev., 1940, v. 57, p. 315.
186. Арбузов Б. А., Рочев В. Е.— Теорет. и мат. физ., 1972, т. 12, с. 204.
187. Мостепаненко В. М.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1973, № 16, с. 137.
188. Schroer B., Swieca J. A.— Phys. Rev. D, 1970, v. 2, p. 2938.
189. Brown G. E., Weise W.— Phys. Rep. C, 1976, v. 27, p. 1.
190. Migdal A. B.— Rev. Mod. Phys., 1978, v. 50, p. 107.
191. Мигдал А. Б. Фермионы и бозоны в сильных полях.— М.: Наука, 1978.
192. Bender I., Gromes D., Rothe H. J.— Nuovo cimento, 1976, v. A32, p. 211.
193. Salam A., Strathdee J.— Preprint ICTP IC/76/62, Trieste, 1976.
194. Salam A., Strathdee J.— Nucl. Phys. B, 1975, v. 90, p. 203.
195. Linde A. D.— Phys. Lett., 1976, v. 62B, p. 435.
196. Киржниц Д. А., Линде А. Д.— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1974, т. 67, с. 1263.
197. Weinberg S.— Phys. Rev. D, 1974, v. 9, p. 3357.
198. Гриб А. А., Мостепаненко В. М., Фролов В. М.— Теорет. и мат. физ., 1976, т. 29, с. 370.
199. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1974.
200. Goldstone J., Salam A., Weinberg S.— Phys. Rev., 1962, v. 127, p. 965.
201. Lee T. D.— Phys. Rep. C, 1974, v. 9, p. 145.
202. Митропольский Ю. А., Козубовская И. Г.— В кн.: Математическая физика. Вып. 20. Киев, Наукова думка, 1976.
203. Higgs P. W.— Phys. Rev., 1966, v. 145, p. 1156.
204. DeWitt B.— Phys. Rev. Lett., 1964, v. 13, p. 114.
205. Хриплович И. Б.— Ядерная физика, 1966, т. 3, с. 575.
206. Салам А.— В кн.: Квантовая гравитация и топология. М., Мир, 1973.
207. Иваненко Д. Д., Соколов А. А.— Вестн. Моск. ун-та, 1947, № 8, с. 103.
208. Quantum Gravity. An Oxford symposium.— Oxford: Clarendon Press, 1975.
209. Ashtekar A., Geroch R.— Rep. Progr. Phys., 1974, v. 37, p. 1211.
210. DeWitt B. S.— Phys. Rev., 1967, v. 162, p. 1195, 1239.
211. Фаддеев Л. Д., Попов В. Н.— Успехи физ. наук, 1973, т. 111, с. 427.
212. Fradkin E. S., Tjutin I. V.— Phys. Rev. D, 1970, v. 2, p. 2841.

213. Fradkin E. S., Vilkovisky G. A. — Phys. Rev. D., 1973, v. 8, p. 4241.
214. Fradkin E. S., Vilkovisky G. A. — Lett. Nuovo cimento, 1977, v. 19 p. 47.
215. 't Hooft G., Veltmann M. — App. Inst. H. Poincaré, 1974, v. 20A, p. 69.
216. De Witt B. — J. Math. Phys., 1962, v. 3, p. 1073.
217. Schrödinger E. — Physica, 1939, v. 6, p. 899.
218. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. Т. 1—3: Пер. с англ. — М.: Мир, 1977.
219. Зельдович Я. Б. — Письма в ЖЭТФ, 1970, т. 12, с. 433.
220. Лукаш В. Н., Старобинский А. А. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1974, т. 66, с. 1515.
221. Hu B. L., Parker L. — Phys. Rev. D, 1978, v. 17, p. 933.
222. Гинзбург В. Л., Киржниц Д. А., Любушин А. А. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1971, т. 60, с. 451.
223. Sexl R. U., Urbantke H. K. — Phys. Rev., 1969, v. 179, p. 1247.
224. Nachtmann O. — Comm. Math. Phys., 1967, v. 6, p. 1.
225. Менский М. Б. Метод индуцированных представлений. — Пространство — время и концепция частиц. — М.: Наука, 1976.
226. Fulling S. A. — Phys. Rev. D, 1973, v. 7, p. 2850.
227. Gibbons G., Hawking S. — Phys. Rev. D, 1977, v. 15, p. 2738.
228. Parker L. — Phys. Rev., 1969, v. 183, p. 1057; 1971, v. D3, p. 346.
229. Grib A. A., Mamaev S. G., Mostepanenko V. M. — Gen. Relat. and Grav., 1976, v. 7, p. 535.
230. Ashtekar A., Magnon A. Proc. Roy. Soc. Lond., 1975, v. A346, p. 375.
231. Гриб А. А. — В кн.: Тезисы докладов Всесоюзного симпозиума «Новейшие проблемы гравитации». М., 1973.
232. Mostepanenko A. M., Mostepanenko V. M. — Int. Logic Rev., 1976, v. 7, p. 160.
233. Unruh W. G. — Phys. Rev. D, 1976, v. 14, p. 870.
234. Hájiček P. — Phys. Rev. D, 1977, v. 15, p. 2757.
235. Мамаев С. Г. — В кн.: Тезисы докладов III Советской гравитационной конференции. Ереван, 1972.
236. Мамаев С. Г. — В кн.: Тезисы докладов Всесоюзного симпозиума «Новейшие проблемы гравитации». М., 1973.
237. Chevalier M. — J. Math. Pures et Appliquées, 1974, v. 53, p. 223.
238. Moreno C. — J. Math. Phys., 1977, v. 18, p. 2153.
239. Ashtekar A., Magnon-Ashtekar A. — Compt. rend. Acad. sci., Paris, 1975, t. 281, p. 875.
240. Wald R. M. — Comm. Math. Phys., 1975, v. 45, p. 9.
241. Волович И. В., Загребнов В. А., Фролов В. П. — ЭЧАЯ, 1978, т. 9, вып. 1, с. 147.
242. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Теория тяготения и эволюция звезд. — М.: Наука, 1971.
243. Epstein H., Glaser V., Jaffe A. — Nuovo cimento, 1965, v. 31, p. 1016.
244. Markov M. A. — In: Gravitational radiation and gravitational collapse. Dordrecht — Boston, 1974.
245. Зельдович Я. Б.; Новиков И. Д. Строение и эволюция Вселенной. — М.: Наука, 1975.
246. Parker L., Fulling S. A. — Phys. Rev. D, 1973, v. 7, p. 2357.
247. Старобинский А. А. — Письма в астроф. журнале., 1978, т. 4, с. 155.
248. Wald R. M. — Comm. Math. Phys., 1977, v. 54, p. 1.
249. Wald R. M.; — App. Phys., 1978, v. 110, p. 472.
250. Грицук Л. П. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1974, т. 67, с. 825.
251. Dowker J. S., Critchley R. — Phys. Rev. D, 1976, v. 13, p. 3224.
252. Davies P. C. W., Fulling S. A., Christensen S. M., Bunch T. S. — App. Phys., 1977, v. 109, p. 108.
253. Bunch T. S. — J. Phys. A., 1978, v. 11, p. 603.
254. Duncan A. — Phys. Rev. D, 1978, v. 17, p. 964.
255. Мамаев С. Г. — Теорет. и матем. физ., 1980, т. 42, с. 350.
256. Capper D. M., Duff M. J. — Nuovo cimento, 1974, v. A23, p. 173.
257. Deser S.; Duff M. J., Isham C. J. — Nucl. Phys. B, 1976, v. 111, p. 45.

258. Davies P. C. W.; Fulling S. A., Unruh W. G. — Phys. Rev. D, 1976, v. 13, p. 2720.
259. Christensen S. M., Fulling S. A. — Phys. Rev. D, 1977, v. 15, p. 2088.
260. Brown L. S. — Phys. Rev., D., 1977, v. 15, p. 1469.
261. Brown L. S., Cassidy J. P. — Phys. Rev. D, 1977, v. 15 p. 2810.
262. Brown L. S., Cassidy J. P. — Phys. Rev. D, 1977, v. 16, p. 1712.
263. Bunch T. S. — Preprint UWM 4867-78-6, Milwaukee, 1978.
264. Wald R. M. — Phys. Rev. D, 1978, v. 17, p. 1477.
265. Dowker J. S., Critchley R. — Phys. Rev. D, 1977, v. 16, p. 3390.
266. Dowker J. S., Altaie B. M. — Phys. Rev. D, 1978, v. 17, p. 417.
267. Christensen S. M. — Phys. Rev. D, 1976, v. 14, p. 2490.
268. Christensen S. M. — Phys. Rev. D, 1978, v. 17, p. 946.
269. Mamaev S. G., Mostepanenko V. M. — Phys. Lett., 1978, v. 67A, p. 165.
270. Utiyama R., DeWitt B. S. — J. Math. Phys., 1962, v. 3, p. 608.
271. Deser S., Van Nieuwenhuizen P. — Phys. Rev. D, 1974, v. 10, p. 401.
272. Зельдович Я. Б., Старобинский А. А. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1971, т. 61, с. 2161.
273. Parker L., Fulling S. A. — Phys. Rev. D, 1974, v. 9, p. 341.
274. Fulling S. A., Parker L., Hu B. L. — Phys. Rev. D, 1974, v. 10, p. 3905.
275. Parker L. — In: Proc. of the Symp. on Asymptotic properties of space-time. — N. Y.: Plenum Publ. Corp., 1977.
276. Зельдович Я. Б.; Старобинский А. А. — В кн.: Проблемы ядерной физики и физики элементарных частиц. М., Наука, 1975.
277. Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М. — Ядерная физика, 1978, т. 28, с. 1640.
278. Bernard C., Duncan A. — Ann. Phys., 1977, v. 107, p. 201.
279. Gibbons G. W. — Comm. Math. Phys., 1975, v. 45, p. 191.
280. Dowker J. S., Critchley R. — Phys. Rev. D, 1976, v. 13, p. 224.
281. DeWitt B. S. Dynamical theory of groups and fields. — N. Y.: Gordon and Breach, 1965.
282. И'юн С. В., Тагиров Е. А. — Comm. JINR E2-8323, Dubna, 1974.
283. Шубин М. А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. — М.: Наука, 1978.
284. Hawking S.W. — Phys. Lett., 1977, v. 60A, p. 81.
285. Römer H.; Schroer B. — Phys. Lett., 1977, v. 71B, p. 182.
286. Dowker J. S. — J. Phys. A, 1978, v. 11, p. 347.
287. Atiyah M. F., Singer I. M. — Ann. Math., 1968, v. 87, p. 596.
288. Smoot G. F., Gorenstein M. V., Muller R. A. — Phys. Rev. Lett., 1977, v. 39, p. 898.
289. Гуревич Л. Э., Чернин А. Д. Введение в космологию. — М.: Наука, 1978.
290. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. — М.: Физматгиз, 1961.
291. Гриб А. А., Левитский Б. А., Мостепаненко В. М. — Теорет. и мат. физ., 1974, т. 19, с. 59; т. 21, с. 431.
292. Левитский Б. А., Мостепаненко В. М., Фролов В. М. — Докл. АН СССР, 1975, т. 220, с. 61.
293. Бронников К. А., Тагиров Э. А. — Препринт P2-4151, Дубна, 1968.
294. Левитский Б. А. — Вестн. Ленингр. ун-та, 1973, № 4, с. 7.
295. Левитский Б. А. — В кн.: Тезисы докладов Всесоюзного симпозиума «Новейшие проблемы гравитации». М., 1973.
296. Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М., Фролов В. М. — Ядерная физика 1976, т. 23, с. 1118.
297. Левитский Б. А., Мостепаненко В. М., Фролов В. М. — Изв. вузов. Сер. физ., 1977, № 2, с. 29.
298. Мамаев С. Г.; Мостепаненко В. М., Фролов В. М. — Письма в астроном. журн., 1975, т. 1, № 9, с. 8.
299. Frolov V. M., Mamaev S. G., Mostepanenko V. M. — Phys. Lett., 1976, v. 55A, p. 389.

300. **Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М., Фролов В. М.** — Ядерная физика, 1977, т. 26, с. 215.
301. **Parker L.** — *Phys. Rev. Lett.*, 1968, v. 21, p. 562.
302. **Черников Н. А., Шавохина Н. С.** — Теорет. и мат. физ., 1973, т. 15, с. 91.
303. **Черников Н. А.; Шавохина Н. С.** — Теорет. и мат. физ., 1973, т. 16, с. 77.
304. **Parker L.** — *Phys. Rev. D*, 1972, v. 5, p. 2905.
305. **Imamura T.** — *Phys. Rev.*, 1960, v. 118, p. 1430.
306. **Гриб А. А., Мамаев С. Г.** — Ядерная физика, 1971, т. 14, с. 800.
307. **Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М.** — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 9. М., Атомиздат, 1978.
308. **Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М.** — Препринт ИТФ-77-74Р. Киев, 1977.
309. **Starobinsky A. A.** — In: Proc. «Marcel Grossman» Relativity Meeting, Trieste, Italy, 1975.
310. **Ford L. H.** — *Phys. Rev. D*, 1975, v. 11, p. 3370.
311. **Ford L. H.** — *Phys. Rev. D*, 1976, v. 14, p. 3304.
312. **Bunch T. S., Davies P. C. W.** — *Proc. Roy. Soc. Lond.*, 1977, v. A357, p. 381.
313. **Davies P. C. W.** — Preprint Kings College, 1978.
314. **Bunch T. S., Davies P. C. W.** — *Proc. Roy. Soc. Lond.*, 1977, v. A356, p. 569.
315. **Зельдович Я. Б.** — Успехи физ. наук, 1968, т. 95, с. 209.
316. **Глинер Э. Б., Дымникова И. Г.** — Письма в астроном. журн., 1975, т. 1, № 9, с. 7.
317. **Станюкович К. П.** Гравитационное поле и элементарные частицы. — М.: Наука, 1965.
318. **Станюкович К. П.** — В кн.: Тезисы докладов III Советской гравитационной конференции. Ереван, 1972.
319. **Grib A. A., Mamayev S. G., Mostepanenko V. M.** — In: Abstracts of contributed papers 8th International Conference on GRG, Waterloo, 1977.
320. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Т. 1. — М.: Наука, 1965.
321. **Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М.** — Письма в астроном. журн., 1978, т. 4, с. 203.
322. **Мамаев С. Г.** — Изв. вузов. Сер. физ., 1976, № 3, с. 58.
323. **Domokos G.** — Preprint DESY, N 76/24, 1976.
324. **Janson M. M.** — *Lett. Nuovo cimento*, 1976, v. 15, p. 231.
325. **Гриб А. А., Мостепаненко В. М.** — Письма в ЖЭТФ, 1977, т. 25, с. 302.
326. **Гриб А. А., Мостепаненко В. М., Фролов В. М.** — Preprint ИТФ-77-76 Е, Киев, 1977; Теорет. и мат. физ., 1977, т. 33, с. 42.
327. **Моисеев Н. Н.** Асимптотические методы нелинейной механики. — М.: Наука, 1969.
328. **Grib A. A., Mostepanenko V. M.** — In: Abstracts of contributed papers 8th International Conference on GRG, Waterloo, 1977.
329. **Tagirov E. A., Todorov I. T.** — *Comm. JINR*, E2-11079, Dubna, 1977.
330. **Brout R., Englert F., Gunzig E.** — *Ann. Phys.*, 1978, v. 115, p. 78.
331. **Криве И. В., Линде А. Д., Чудновский Е. М.** — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1976, т. 71, с. 825.
332. **Bogoliubov N. N.** — *Nuovo cimento Suppl.*, 1966, v. 4, p. 347.
333. **Зельдович Я. Б., Кобзарев И. Ю., Окунь Л. Б.** — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1974, т. 67, с. 3.
334. **Гриб А. А., Мостепаненко В. М., Фролов В. М.** — Препринт ИФВЭ ОТФ 78-44, Серпухов, 1978; Теорет. и мат. физ., 1978, т. 37, с. 68.
335. **Salam A., Ward I. C.** — *Phys. Rev. Lett.*, 1960, v. 5, p. 390.
336. **Гриб А. А., Мостепаненко В. М.** — Вестн. Ленингр. ун-та, 1975, № 4, с. 14.
337. **Зельдович Б. Я., Окунь Л. Б.** — Ядерная физика, 1965, т. 2, с. 198.

338. Грив А. А., Мостепаненко В. М. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 10., М., Атомиздат, 1979.
339. Georgy H., Quinn H. R., Weinberg S. — Phys. Rev. Lett., 1974, v. 33, p. 451.
340. Фомин П. И. — ЭЧАЯ, 1976, т. 7, вып. 4, с. 687.
341. Chagar J. M., Duff M. J. — Phys. Lett., 1977, v. 69B, p. 445.
342. Fubini S. — Nuovo cimento, 1976, v. A34, p. 521.
343. Castell L. Phys. Rev. D, 1972, v. 6, p. 536.
344. De Alfaro V., Fubini S., Furlan G. — Phys. Lett., 1976, v. 65B, p. 163.
345. Frolov V. M., Grib A. A., Mostepanenko V. M. — Phys. Lett., 1978, v. 65A, p. 282.
346. Грив А. А., Мостепаненко В. М., Фролов В. М. — Теорет. и мат. физ., 1978, т. 37, с. 347.
347. Белинский В. А., Лифшиц Е. М., Халатников И. М. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1972, т. 62, с. 1606.
348. Lukash V. N., Novikov I. D., Starobinsky A. A., Zeldovich Ya. B. — Nuovo cimento, 1976, v. B35, p. 293.
349. Hu B. L. — Phys. Rev. D, 1973, v. 8, p. 1048; 1974, v. 9, p. 3263.
350. Hu B. L., Fulling S. A., Parker L. — Phys. Rev. D, 1973, v. 8, p. 2377.
351. Berger V. K. — Ann. Phys., 1974, v. 83, p. 478.
352. Лукаш В. Н., Новиков И. Д., Старобинский А. А. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1975, т. 69, с. 1484.
353. Фролов В. П. — Успехи физ. наук, 1976, т. 118, с. 473.
354. Black holes. N. Y., Gordon and Breach, 1973.
355. Bekenstein J. D. — Phys. Rev. D, 1973, v. 7, p. 2333; 1974, v. 9, p. 3292.
356. Hawking S. W. — Comm. Math. Phys., 1975, v. 43, p. 199.
357. Волович И. В., Загребнов В. А., Фролов В. П. — Теорет. и мат. физ., 1976, т. 29, с. 191.
358. Hartle J. B., Hawking S. W. — Phys. Rev. D, 1976, v. 13, p. 2188.
359. Parker L. — Phys. Rev. D, 1975, v. 12, p. 1519.
360. Hawking S. W. — Phys. Rev. D, 1976, v. 14, p. 2460.
361. Davies P. C. W. — J. Phys. A, 1975, v. 8, p. 609.
362. Page D. N. — Phys. Rev. D, 1976, v. 13, p. 198; v. 14, p. 1360; 1977.
363. Зельдович Я. Б. — Письма в ЖЭТФ, 1971, т. 14, с. 270.
364. Зельдович Я. Б. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1972, т. 62, с. 2076.
365. Старобинский А. А. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1973, т. 64, с. 48.
366. Старобинский А. А., Чурилов С. М. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1973, т. 65, с. 3.
367. Unruh W. G. — Phys. Rev. Lett., 1973, v. 31, p. 1265.
368. Unruh W. G. — Phys. Rev. D, 1974, v. 10, p. 3194.
369. Hawking S. W. — Phys. Rev. D, 1976, v. 13, p. 191.
370. Gibbons G. W., Perry M. J. — Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, p. 985.
371. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. — Астрон. журн., 1966, т. 43, с. 758.
372. Hawking S. W. — Mon. Not. Roy. Astr. Soc., 1971, v. 152, p. 75.
373. Зельдович Я. Б., Старобинский А. А. — Письма в ЖЭТФ, 1976, т. 24, с. 616.
374. Chapline G. F. — Phys. Rev. D, 1975, v. 12, p. 2949.
375. Carr B. J., Hawking S. W. — Mon. Not. Roy. Astr. Soc., 1974, v. 168, p. 399.
376. Мамаев С. Г., Трунов Н. Н. — Ядерная физика, 1979, т. 30, с. 1301.
377. Мостепаненко В. М. — Ядерная физика, 1979, т. 30, с. 208.
378. Пономарев В. Н., Пронин П. И. — Изв. вузов. Сер. физ., 1978, № 9, с. 105.
379. Deutsch D., Candelas P. Univ. of Texas preprint, Austin, 1978.
380. Mostepanenko V. M. — Phys. Lett A, 1979, v. 75, p. 11.
381. Мостепаненко В. М. — Ядерная физика, 1980, т. 31, № 3.
382. Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1980, т. 78, № 1.

Алфавитно-предметный указатель ¹

Адиабатическая область 120, 224

Аксиальный заряд 208

Аномальный след 207

Вакуум заряженный 139, 147

— и спонтанное нарушение симметрии 154

— сверхзаряженный 154

— физический 82, 101, 186, 226

Вакуумная энергия 56, 58

Вакуумный функционал 32, 37

Вейлевское (конформное) преобразование 10, 210, 263

Виртуальные частицы 43, 185

ВКБ-приближение 198

Горизонт событий 183, 273, 276

Горячая модель Вселенной 3, 181, 240

Гравитационная постоянная 182, 195

Гравитационный радиус 273

Демультимпликационный резонанс 176

Диагонализация гальмилтониана 48,

75, 100, 186, 224, 267

Древесное приближение 175, 251

Затравочный лагранжиан гравитационного поля 195, 202

Измеримость электромагнитного поля 22

Индекс Понтрягина 208

Интенсивность рождения 126, 138

Квантование гравитационного поля 181

Конденсат 46, 105, 169, 180

Конформная аномалия 193, 207, 238

— инвариантность 10, 15, 66, 70, 194

Конформное время 210

— поле Киллинга 210, 212

Конформно-плоское пространство 194, 211, 233

Конформный тензор Вейля 207, 211

Космологическая постоянная 195

Критический заряд 140, 148

— для пионного поля 170

Критическое поле 3, 96, 124

S-матричная задача 48, 81, 189, 227, 277

Метод адиабатической регуляризации 195, 205

— вычисления вероятности рождения пар с помощью преобразований Боголюбова 75

— — — — Фейнмана 74

— — — — Швингера 73, 127

— регуляризации Зельдовича — Старобинского 195, 204, 207

— ковариантным раздвижением точек 57, 68, 205

— с помощью обобщенной дзета-функции 57, 208

— — — — формулы Абея—Плана 55

— размерной регуляризации 57, 208

— собственного времени Фока — Швингера 159, 196

Метрика Казнера 266

— Керра 189, 273

— Керра — Ньюмена 274

— Милна 240, 262, 266

— однородного изотропного пространства—времени 209

— Шварцшильда 189, 273

Модель Голдстоуна 254

— Ли 257

— мешка 51, 64

— Хиггса 172, 255

Нестабильность вакуума 82, 92

Нефоковские представления коммутационных соотношений 39, 42

Нормальное упорядочение 54, 106, 226

Нулевые колебания вакуума 42, 44, 52, 56, 226

Обобщенные когерентные состояния 108

Оператор Гильберта — Шмидта 29, 78

Операторы рождения и уничтожения физических частиц 101, 186

Определитель Ван Флека 199

¹ Указатель дополняет оглавление книги, не повторяя его.

- Параметр адиабатичности 120, 216
 — Хаббла 211, 240, 265
 Параметрический резонанс 115
 Первичные черные дыры 281
 Перенормировки во внешнем гравитационном поле 202
 — — — электромагнитном поле 41, 161, 164
 Пионная конденсация 171
 Планковская длина 183
 — масса 183
 Планковское время 241, 265
 Плоская волна электромагнитная 34, 135, 166
 — — — гравитационная 203
 Плотность числа частиц, рожденных вблизи фридмановской сингулярности, скалярных 243, 245
 — — — — —, спинорных 247
 Поверхностная гравитация 274
 Поверхность Ферми 148
 Подбарьерная траектория 118
 Поле Киллинга 188
 Поляризация вакуума гравитационным полем 193, 235
 Потенциал Юлинга 166
 Представление когерентных состояний 36
 Преобразования Боголюбова 29, 78, 100, 187, 196, 222, 226, 228, 278
 Приливные силы 185
 Пространство де Ситтера 186, 198, 250, 255
 — Фока 27, 184, 221
 — Фридмана 188, 251
 Реликтовое радиоизлучение 209
 Риндлеровские координаты 187, 279
 Сверхизлучение 280
 Сила Казимира 52
 Сильное энергетическое условие 192, 244
 Сингулярность гравитационного поля 183, 240, 265
 Спонтанное восстановление симметрии 172, 174
 — нарушение симметрии 45, 170, 172, 255
 Стационаризация гамильтониана 49
 Температура 56, 58, 237, 275, 278
 Тензор энергии-импульса канонический 8, 11, 212, 252
 — метрический 9, 11, 188, 212, 252
 Теорема Атья — Зингера 208
 — Гамильтона — Келли 113
 — Голдстоуна 46
 — Коулмена 45
 — Радона — Никодима 32
 — фон Неймана 33
 — Хокинга 274
 Теоремы Хокинга — Пенроуза 181, 193
 Теория Вайнберга — Салама 171, 173
 Тетрада 14
 Топологические слагаемые в тензоре энергии-импульса 235, 237
 Укороченное действие 122
 Унитарно-неэквивалентные представления 24, 33, 49, 75, 109, 222
 Уравнение Баба — Гупты 21
 — Дирака 13, 97
 Уравнение Дирака в гравитационном поле 15, 216
 — Дюффинга 179, 252
 — Клейна — Гордона — Фока 3, 103, 169
 — — — — — в гравитационном поле с минимальной связью 10
 — — — — — с конформной связью 11, 211
 — Матье 116
 — Прока 9, 12
 — Рариты — Швингера 16
 Уравнения Фиска — Тейта 21
 — Эйнштейна 182, 190, 193, 240, 264, 266
 Условия энергодоминантности 48, 191, 244
 Физический импульс 105, 137
 Фоковское представление 26, 33
 Формула Абеля — Плана 55
 — Гейзенберга — Эйлера 162
 Функция Адамара 197
 — Грина 74, 159, 197
 Электрическая квадрупольная связь 20
 Энергия и давление рожденных частиц вблизи изотропной сингулярности, скалярных 243, 248
 — — — — —, спинорных 248
 Энтропия черной дыры 275
 Эргосфера 274
 Эффект экспоненциального роста плотности числа частиц в периодическом поле 115
 Эффективный лагранжиан во внешнем гравитационном поле 197
 — — — — — электромагнитном поле 163
 — потенциал 142, 278

Оглавление

Предисловие	3
Основные обозначения	7
ЧАСТЬ I. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ В КЛАССИЧЕСКИХ ВНЕШНИХ ПОЛЯХ	8
Глава 1. Волновые уравнения классических полей во внешнем поле	8
§ 1.1. Скалярное и векторное волновые уравнения во внешних полях	8
§ 1.2. Уравнение Дирака во внешних полях	13
§ 1.3. Каузальные аномалии для волновых уравнений с высшими спинами во внешнем электромагнитном поле	16
Глава 2. Вторичное квантование и представления канонических коммутационных соотношений	22
§ 2.1. Соотношение между понятиями классического и квантованного полей	22
§ 2.2. Каноническое квантование в классическом внешнем поле	25
§ 2.3. Классификация неэквивалентных представлений коммутационных соотношений	30
§ 2.4. Представление классического электромагнитного поля	34
§ 2.5. Микроскопические и макроскопические наблюдаемые	38
Глава 3. Вакуумные эффекты при наличии внешнего поля	40
§ 3.1. Вакуум в квантовой теории поля	40
§ 3.2. Поляризация вакуума	41
§ 3.3. Неинвариантность вакуума и спонтанное нарушение симметрии	44
§ 3.4. Корпускулярная интерпретация квантовой теории во внешнем поле.	47
Глава 4. Квантовые эффекты во внешнем поле, задаваемом граничными условиями	51
§ 4.1. Эффект Казимира	51
§ 4.2. О зависимости эффекта Казимира от геометрии и топологии области	59
§ 4.3. Излучение безмассовых частиц движущимся зеркалом	65
ЧАСТЬ II. КВАНТОВЫЕ ЭФФЕКТЫ ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ	73
Глава 5. Рождение и рассеяние частиц нестационарным электромагнитным полем	73
§ 5.1. Методы изучения эффекта рождения частиц электромагнитным полем	73

§ 5.2. Определение плотности рожденных частиц методом преобразований Боголюбова	76
§ 5.3. Связь между in- и out-вакуумами	82
§ 5.4. Вероятность рождения и рассеяния частиц	88
§ 5.5. Связь спина со статистикой при наличии внешнего поля	92
Глава 6. Рождение частиц однородным электрическим полем	95
§ 6.1. Приближение пространственно-однородного электрического поля	95
§ 6.2. Задача о рождении пар как задача о параметрическом возбуждении квантового осциллятора	105
§ 6.3. Свойства конденсата из рожденных пар	109
§ 6.4. Рождение пар периодическим во времени полем	117
§ 6.5. Метод мнимого времени в задачах о рождении пар	
Глава 7. Рождение частиц электромагнитными полями специальных конфигураций	123
§ 7.1. Рождение пар одиночным импульсом электрического поля	123
§ 7.2. Рождение пар потенциальным барьером и парадокс Клейна	128
§ 7.3. Постоянное однородное электрическое поле	130
§ 7.4. Электрическое поле и распространяющаяся вдоль него плоская волна	135
Глава 8. Рождение позитронов кулоновским полем сверхтяжелых ядер	139
§ 8.1. Спектр уравнения Дирака в кулоновском поле и критический заряд ядра	139
§ 8.2. Свойства непрерывного спектра уравнения Дирака при $Z > Z_{кр}$ и рождение позитронов	144
§ 8.3. Вторично квантованное описание сверхкритического атома	148
§ 8.4. Рождение позитронов при столкновении тяжелых ядер	154
Глава 9. Поляризация вакуума внешним полем в квантовой электродинамике	158
§ 9.1. Поляризация вакуума постоянным однородным электромагнитным полем	158
§ 9.2. Поляризация электрон-позитронного вакуума кулоновским полем	166
§ 9.3. Бозонная конденсация в сильном внешнем поле	169
Глава 10. Спонтанное нарушение и восстановление симметрии во внешнем электромагнитном поле	171
§ 10.1. Восстановление спонтанно нарушенной симметрии внешним полем	171
§ 10.2. Спонтанное нарушение симметрии в однородном электрическом поле	174
§ 10.3. Феномен Хиггса в нестационарном электрическом поле	178
ЧАСТЬ III. КВАНТОВЫЕ ЭФФЕКТЫ В СИЛЬНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЯХ	181
Глава 11. Корпускулярная интерпретация квантованных полей во внешнем гравитационном поле	181
§ 11.1. Особенности взаимодействия квантованных полей с классическим гравитационным полем	181

§ 11.2. Корпускулярная интерпретация поля и рождение частиц	184
§ 11.3. Статическое и асимптотически статическое пространство — время	188
Глава 12. Тензор энергии-импульса квантованных полей в искривленном пространстве — времени	190
§ 12.1. Общие требования к регуляризованному тензору энергии-импульса	190
§ 12.2. Анализ расходимостей	194
§ 12.3. Методы регуляризации	203
Глава 13. Рождение частиц и поляризация вакуума в однородном изотропном пространстве	209
§ 13.1. Геометрия однородной изотропной Вселенной	209
§ 13.2. Классические решения скалярного волнового уравнения	211
§ 13.3. Классические решения уравнения Дирака	216
§ 13.4. Квантование и корпускулярная интерпретация поля в асимптотически статической метрике	220
§ 13.5. Корпускулярная интерпретация поля в нестационарных изотропных пространствах	224
§ 13.6. Регуляризация тензора энергии-импульса	230
§ 13.7. Расчет рождения частиц и поляризации вакуума во фридмановских космологических моделях	240
Глава 14. Спонтанное нарушение симметрии в гравитационном поле	250
§ 14.1. Спонтанное нарушение калибровочной симметрии в однородном изотропном пространстве открытого типа	250
§ 14.2. Феномен Хиггса в однородном изотропном пространстве	253
§ 14.3. Спонтанное нарушение P- и CP-симметрий в открытой модели Фридмана	256
§ 14.4. Спонтанное нарушение конформной симметрии в неинерциальной системе отсчета	262
Глава 15. Квантовые эффекты в анизотропных космологических моделях	265
§ 15.1. Анизотропные метрики в космологии	265
§ 15.2. Квантование поля	266
§ 15.3. Изотропизация космологического расширения в результате эффекта рождения пар	270
Глава 16. Квантовые эффекты при гравитационном коллапсе	273
§ 16.1. Гравитационный коллапс и черные дыры	273
§ 16.2. Эффект Хокинга	276
§ 16.3. Обобщения и астрофизические следствия эффекта Хокинга	279
Список литературы	282
Алфавитно-предметный указатель	291