NEVANLINNA THEORY
AND HOLOMORPHIC MAPPINGS
BETWEEN ALGEBRAIC VARIETIES

BY PHILLIP GRIFFITHS AND JAMES KING

Harvard University, Cambridge, Mass. 02138, USA and M. I. T.,
Cambridge, Mass. 02139, USA

Acta mathematica, v. 130 (1973), pp. 145—220

МАТЕМАТИКА

НОВОЕ В ЗАРУБЕЖНОЙ НАУКЕ

РЕДАКТОРЫ СЕРИИ: А.Н. КОЛМОГОРОВ, С.П. НОВИКОВ

1

Ф. ГРИФФИТС, ДЖ. КИНГ

ТЕОРИЯ НЕВАНЛИННЫ И ГОЛОМОРФНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

Перевод с английского
Е. М. ЧИРКИ

Под редакцией
Б. В. ШАБАТА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» МОСКВА 1976

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА 5

ВВЕДЕНИЕ 7

0. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ТЕРМИНОЛОГИЯ 12
(a) Дивизоры и линейные расслоения 12
(b) Каноническое расслоение и формы объема 16
(c) Дифференциальные формы и потоки 17

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ, ПОТОКИ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ЦИКЛЫ 20
(a) Формула Пуанкаре 20
(b) Формула Пуанкаре для векторных функций 24
(c) Глобализация формул Пуанкаре и Мартинелли 26
(d) Числа Лелона 27

2. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ИСЧЕРПАНИЯ НА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ 29
(a) Определения и некоторые примеры 29
(b) Конструкция специальной фуикции исчерпания 31
(c) Некоторые свойства проекции (2.5) 33

3. НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ . . . 36
(a) Теорема Йенсена 36
(b) Характеристическая функция Неваилинны 39
(c) Теорема Йеисена для векторных фуикций 40

4. УСЛОВИЕ АЛГЕВРАИЧНОСТИ ДИВИЗОРА 42

5. ФУНКЦИЯ ПОРЯДКА ДЛЯ ГОЛОМОРФНЫХ ОТОВРАЖЕНИЙ 47
(a) Определение и осиовные свойства 47
(b) Первая основная теорема (I о. т.) 50
(c) Теоремы об усреднении и плотности 51
(d) Сравнение функции порядка с характеристической функцией Неванлиины 56

6. ФОРМЫ ОВЪЕМА И ВТОРАЯ ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА (II о. т.) 57
(a) Сингуляриые формы объема на проективных многообразиях 57
(b) Вторая основная теорема 62

7. СООТНОШЕНИЯ ДЕФЕКТОВ 65
(a) Неванлинновские дефекты и формулировка основного результата 65
(b) Предварительное соотношение дефектов 68
(c) Доказательство основиого соотношения дефектов 71

8. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ 74
(a) Голоморфные отображения в алгебраические многообразия общего типа 74
(b) Обобщение теорем Пикара 76
(c) Голоморфные отображения конечного порядка 76
(d) Точность результатов 79

9. ЕЩЕ ДВЕ ВАРИАЦИИ НА ТЕМУ КРИВИЗНЫ И ВТОРОЙ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ 81
(a) Аналог «леммы о логарифмической производной» Р. Неванлиины 81
(b) Голоморфные отображения в отрицательно искривленные алгебраические многообразия 84

ПРИЛОЖЕНИЕ. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО БОЛЬШИХ ТЕОРЕМ ПИКАРА В ЛОКАЛЬНОЙ ФОРМЕ 89

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 92

УДК 517.53

Книга входит в серию «Математика. Новое в зарубежной науке», выпуск которой начинается издательством «Мнр». Она представляет собой перевод статьн из журиала «Акта математика», излагающей последние достижения Ф. Гриффитса и его учеников по многомерной теории распределення значений. Геометрический подход и удачное использование современной техники потоков позволнли авторам освободиться от громоздких выкладок, характерных для прежних попыток построения многомерных аналогов неванлинновской теории мероморфных фуикций. Это привело их к красивой содержательной теорни.

В книге кратко описаны применяемые методы, и ее можно читать независимо от другнх работ иа эту тему. Она интересна математикам различных специальностей — аналитикам, геометрам, алгебраистам — и доступна студентам старших курсов математических факультетов.

Редакция литературы по математическим наукам

Г $\frac{20203\text{-}034}{041(01)\text{-}76}$ 34-76

© Перевод на русский язык, «Мир», 1976

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В магистерской диссертации Юлиана Васильевича Сохоцкого (Спб., 1868) и примерно в то же время в работе итальянского математика Ф. Казорати появился первый результат теории распределения значений аналитических функций: образ проколотой окрестности U^* существенно особой точки функции f плотен в комплексной плоскости. (Теорему эту часто приписывали К. Вейерштрассу, хотя он отметил ее лишь в публикации 1876 г.) В 1879 г. Э. Пикар усилил этот результат, показав, что на самом деле $f(U^*)$ может отличаться от полной комплексной плоскости $\mathbf{P}$ не более чем на д в е точки. В трудах Ж. Адамара, Э. Бореля и других математиков теория распределения значений значительно развилась, и двадцатые годы нашего века ознаменовались триумфом этой теории — работы финского математика Рольфа Неванлинны по теории распределения значений явились одним из важнейших событий в математическом анализе. В случае функций одного комплексного переменного теория приобрела стройный и законченный вид.

К тридцатым-сороковым годам относится дальнейшее существенное продвижение теории распределения значений: Ларс Альфорс нашел геометрический подход к этой теории, а в трудах Г. и И. Вейлей и Альфорса она была распространена на случай голоморфных кривых: отображений комплексной плоскости в комплексное проективное пространство. Текущее десятилетие характеризуется резким повышением интереса к теории распределения значений, главным образом — ее многомерным аспектам. Для примера можно указать, что Тулейнский университет (США) в 1973 г. организовал специальный семестр, посвященный этой теории.

Работа, которая предлагается вниманию советских читателей, отражает подход к многомерной теории распределения значений голоморфных отображений, разработанный школой американских математиков во главе с Ф. Гриффитсом. Этот подход характеризуется активным использованием теории потоков — геометрических аналогов теории обобщенных функций, которая устанавливает единый взгляд на обе компоненты интегрирования (многообразия и формы) и в ряде случаев позволяет избежать громоздких и утомительных выкладок, неизбежных при классическом подходе

к многомерному случаю. Другая особенность этого подхода — его глубокие связи с методами алгебраической геометрии.

Основным объектом, который изучается в этой работе, является голоморфное отображение $f\colon A \to V$ алгебраического подмножества A комплексного пространства $\mathbf{C}^n$ в проективное многообразие V (главный пример — комплексное проективное пространство), причем в большинстве случаев предполагается, что f в некотором смысле сохраняет размерность. Как показывает хорошо известный пример Фату невырожденного голоморфного отображения $\mathbf{C}^2$ в $\mathbf{C}^2$, образ которого отличается от $\mathbf{C}^2$ на непустое открытое множество, в пространственном случае говорить о распределении значений в прямом смысле нельзя — нет даже аналога теоремы Сохоцкого. Однако если значения комплексной функции на плоскости (т. е. точки $a \in \mathbf{C}$) рассматривать как аналитические множества коразмерности 1, то теория обобщается. Иными словами, в многомерной теории вместо распределения значений в прямом смысле следует говорить о расположении образа $f(A)$ относительно аналитических подмножеств V (например, относительно комплексных гиперплоскостей в $\mathbf{P}^n$). Точно так же вместо максимума модуля голоморфной функции одного переменного в кругах в качестве характеристики роста отображения в многомерной теории следует выбирать объем образа порций A в областях специального исчерпания этого множества.

В этих терминах удается построить достаточно полные многомерные аналоги двух основных теорем неванлинновской теории распределения значений. Такое построение было выполнено рядом авторов, и в работе Гриффитса и Кинга оно излагается в достаточно полной и совершенной форме. Однако главный упор в ней делается на применения теории, которые стали получаться лишь в самое последнее время и еще не достигли желаемой полноты.

Работа написана в характерном для школы Гриффитса стиле, когда главное внимание уделяется принципиальным аспектам и вскрываются истинные движущие силы теории. При этом формальные моменты отходят на второй план и часто остаются в тени. Конечно, такой стиль поначалу затрудняет чтение, однако он с лихвой окупается, когда им удается овладеть. К сожалению, оригинал статьи изобилует опечатками и мелкими неточностями технического порядка: переводчик и редакторы стремились уменьшить их число.

Нет сомнений, что эта работа, отражающая результаты яркой и активно действующей школы американских аналитиков, будет интересной и для наших математиков, особенно — для молодых.

Б. В. Шабат

ВВЕДЕНИЕ

Пусть A и V — гладкие алгебраические многообразия, причем V — *проективное* (и, следовательно, компактное). Мы будем изучать голоморфные отображения

$$A \xrightarrow{f} V. \tag{1}$$

Наиболее интересен случай, когда A — аффинное многообразие и, следовательно, представляется как алгебраическое подмногообразие $\mathbf{C}^N$; мы это всюду предполагаем. Отображение f в общем случае *не является* алгебраическим, так как оно может иметь существенные особенности в бесконечных точках A. *Теория Неванлинны*, или *теория распределения значений*, изучает расположение образа $f(A)$ относительно алгебраических подмногообразий V. Для данного алгебраического подмногообразия $Z \subset V$ мы полагаем $Z_f = f^{-1}(Z)$ и всюду далее считаем, что

$$\operatorname{codim}_x Z_f = \operatorname{codim}_{f(x)} Z$$

во всех точках $x \in A$. Возникают два основных вопроса, которые мы будем изучать:

(A) Можно ли *оценить сверху* размер Z_f в терминах Z и «роста» отображения f?

(B) Можно ли *оценить снизу* размер Z_f опять-таки в терминах Z и роста отображения?

Мы можем дать достаточно удовлетворительный ответ на вопрос (A) в случае $\operatorname{codim} Z = 1$ и на вопрос (B) в случае, когда $\operatorname{codim} Z = 1$ и образ $f(A)$ содержит открытое подмножество V.

Объясним это подробнее. Аффинно алгебраический характер A проявляется в том, что на A имеется *специальная функция исчерпания* (см. § 2), т. е. функция

$$A \xrightarrow{\tau} \mathbf{R} \cup \{-\infty\}, \tag{2}$$

к многомерному случаю. Другая особенность этого подхода — его глубокие связи с методами алгебраической геометрии.

Основным объектом, который изучается в этой работе, является голоморфное отображение $f\colon A \to V$ алгебраического подмножества A комплексного пространства $\mathbf{C}^n$ в проективное многообразие V (главный пример — комплексное проективное пространство), причем в большинстве случаев предполагается, что f в некотором смысле сохраняет размерность. Как показывает хорошо известный пример Фату невырожденного голоморфного отображения $\mathbf{C}^2$ в $\mathbf{C}^2$, образ которого отличается от $\mathbf{C}^2$ на непустое открытое множество, в пространственном случае говорить о распределении значений в прямом смысле нельзя — нет даже аналога теоремы Сохоцкого. Однако если значения комплексной функции на плоскости (т. е. точки $a \in \mathbf{C}$) рассматривать как аналитические множества коразмерности 1, то теория обобщается. Иными словами, в многомерной теории вместо распределения значений в прямом смысле следует говорить о расположении образа $f(A)$ относительно аналитических подмножеств V (например, относительно комплексных гиперплоскостей в $\mathbf{P}^n$). Точно так же вместо максимума модуля голоморфной функции одного переменного в кругах в качестве характеристики роста отображения в многомерной теории следует выбирать объем образа порций A в областях специального исчерпания этого множества.

В этих терминах удается построить достаточно полные многомерные аналоги двух основных теорем неванлинновской теории распределения значений. Такое построение было выполнено рядом авторов, и в работе Гриффитса и Кинга оно излагается в достаточно полной и совершенной форме. Однако главный упор в ней делается на применения теории, которые стали получаться лишь в самое последнее время и еще не достигли желаемой полноты.

Работа написана в характерном для школы Гриффитса стиле, когда главное внимание уделяется принципиальным аспектам и вскрываются истинные движущие силы теории. При этом формальные моменты отходят на второй план и часто остаются в тени. Конечно, такой стиль поначалу затрудняет чтение, однако он с лихвой окупается, когда им удается овладеть. К сожалению, оригинал статьи изобилует опечатками и мелкими неточностями технического порядка: переводчик и редакторы стремились уменьшить их число.

Нет сомнений, что эта работа, отражающая результаты яркой и активно действующей школы американских аналитиков, будет интересной и для наших математиков, особенно — для молодых.

Б. В. Шабат

ВВЕДЕНИЕ

Пусть A и V — гладкие алгебраические многообразия, причем V — *проективное* (и, следовательно, компактное). Мы будем изучать голоморфные отображения

$$A \xrightarrow{f} V. \tag{1}$$

Наиболее интересен случай, когда A — аффинное многообразие и, следовательно, представляется как алгебраическое подмногообразие $\mathbf{C}^N$; мы это всюду предполагаем. Отображение f в общем случае *не является* алгебраическим, так как оно может иметь существенные особенности в бесконечных точках A. *Теория Неванлинны*, или *теория распределения значений*, изучает расположение образа $f(A)$ относительно алгебраических подмногообразий V. Для данного алгебраического подмногообразия $Z \subset V$ мы полагаем $Z_f = f^{-1}(Z)$ и всюду далее считаем, что

$$\operatorname{codim}_x Z_f = \operatorname{codim}_{f(x)} Z$$

во всех точках $x \in A$. Возникают два основных вопроса, которые мы будем изучать:

(A) Можно ли *оценить сверху* размер Z_f в терминах Z и «роста» отображения f?

(B) Можно ли *оценить снизу* размер Z_f опять-таки в терминах Z и роста отображения?

Мы можем дать достаточно удовлетворительный ответ на вопрос (A) в случае $\operatorname{codim} Z = 1$ и на вопрос (B) в случае, когда $\operatorname{codim} Z = 1$ и образ $f(A)$ содержит открытое подмножество V.

Объясним это подробнее. Аффинно алгебраический характер A проявляется в том, что на A имеется *специальная функция исчерпания* (см. § 2), т. е. функция

$$A \xrightarrow{\tau} \mathbf{R} \cup \{-\infty\}, \tag{2}$$

удовлетворяющая условиям

$$(3)\qquad \begin{cases} \text{отображение } \tau \text{ собственное,} \\ dd^c\tau \geqslant 0, \\ (dd^c\tau)^{m-1} \not\equiv 0, \quad \text{но } (dd^c\tau)^m = 0 \quad (m = \dim_{\mathbf{C}} A)\ ^1). \end{cases}$$

Мы полагаем $A[r] = \{x \in A\colon \tau(x) \leqslant r\}$ и для каждого аналитического подмножества $W \subset A$ определяем

$$(4)\qquad \begin{cases} n(W, t) = \int\limits_{W[t]} (dd^c\tau)^k \quad (k = \dim_{\mathbf{C}} W), \\ N(W, r) = \int\limits_0^r n(W, t)\frac{dt}{t} \quad \text{(считающая функция).} \end{cases}$$

(Поводом для логарифмического усреднения $n(W, t)$, как обычно, служит *формула Йенсена.*) Считающую функцию $N(W, r)$ можно представлять себе как величину, измеряющую *рост* W; например, из теоремы Штолля [17] (которая доказана ниже в § 4 для случая $\operatorname{codim} W = 1$) следует, что

$$W \text{ алгебраическое} \Leftrightarrow N(W, r) = O(\log r).$$

Допустим теперь, что $\{Z_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ есть алгебраическое семейство алгебраических подмногообразий $Z_\lambda \subset V$ (можно представлять себе Z_λ как линейные подпространства $\mathbf{P}^N$; в этом случае пространством параметров Λ будет многообразие Грассмана). Пусть $d\lambda$ — гладкая мера на Λ; мы определяем *усреднение*, или *функцию порядка*, для f и $\{Z_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ как

$$(5)\qquad T(r) = \int\limits_{\lambda\in\Lambda} N(f^{-1}(Z_\lambda), r)\, d\lambda.$$

Первая основная теорема (I о. т.) выражает $N(f^{-1}(Z_\lambda), r)$ через $T(r)$ и в случае, когда Z_λ являются полными пересечениями положительных дивизоров, приводит к неравенству

$$(6)\qquad N(f^{-1}(Z_\lambda), r) \leqslant T(r) + S(r, \lambda) + O(1)$$

(см. § 5). *Остаточный член* $S(r, \lambda)$ неотрицателен, а для дивизоров условие $(dd^c\tau)^m = 0$ в (3) дает $S(r, \lambda) \equiv 0$. В этом случае (6) сводится к неравенству Неванлинны

$$(7)\qquad N(f^{-1}(Z_\lambda), r) \leqslant T(r) + O(1),$$

которое оценивает рост любого $f^{-1}(Z_\lambda)$ усредненным по λ ростом. В случае $\operatorname{codim} Z_\lambda > 1$ таких неравенств совсем нет [7], и отыскание подходящих методов изучения размеров $f^{-1}(Z_\lambda)$ в этой

[1]) При построении такой функции получается короткое и элементарное доказательство *теоремы Чжоу*; оно тоже приведено в § 2.

ситуации остается одной из наиболее важных проблем общей теории Неванлинны.

Наша I о. т. примерно в таком же виде имеется и у многих других авторов; весьма общие результаты, а также историю вопроса можно найти в работе Штолля [18]. Новшеством является систематическое использование нами локальной теории потоков и «раздуваний», при помощи которых мы сводим I о. т. к довольно простому (даже при наличии особенностей) и по существу локальному утверждению (см. § 1). Еще одна характерная черта — выделение специальной исчерпывающей функции, объясняющей «параболический характер» аффинных алгебраических многообразий.

При решении проблемы (B) об оценке $N(f^{-1}(Z_\lambda), r)$ снизу мы сначала доказываем *равнораспределение по мере* (§ 5 (c)), следуя Чжэню, Штоллю и Ву (см. [18] и цитируемую там литературу). Это утверждение состоит в том, что если величины из неравенства (6) удовлетворяют условию

$$(8)\qquad \int\limits_{\lambda\in\Lambda} S(r, \lambda)\, d\lambda = o(T(r)),$$

то образ $f(A)$ пересекает почти все Z_λ (в смысле теории меры). Поскольку в случае дивизоров $S(r, \lambda) \equiv 0$, условие (8) тривиально выполняется, и мы получаем результат типа теоремы *Сохоцкого*[1]) для комплексных многообразий, на которых имеются специальные функции исчерпания.

Более глубокие результаты получаются, когда все Z_λ являются дивизорами и образ $f(A)$ содержит открытое подмножество V. (Заметим, что отсюда не следует, что $\overline{f(A)} = V$; иллюстрацией служит пример Фату — Бибербаха [3].) В этом случае мы используем метод *сингулярных форм объема* (§ 6 (a)), введенный в работе [6], и получаем вторую основную теорему (II о. т.) в виде (§ 6 (b))

$$(9)\qquad T^{\#}(r) + N_1(r) \leqslant N(f^{-1}(Z_\lambda), r) + \log\frac{d^2T^{\#}(r)}{dr^2} + O(\log r)$$

при условиях, что (i) дивизор Z_λ имеет *простые нормальные самопересечения* (определение см. в § 0) и (ii)

$$(10)\qquad c(Z_\lambda) > c(K_V^*),$$

где K_V^* — антиканонический дивизор, а $c(D)$ обозначает *класс Чжэня* дивизора D. В неравенстве (9) $T^{\#}(r)$ — возрастающая выпуклая функция от $\log r$, тесно связанная с функцией порядка $T(r)$ из (5), а второй член слева

$$N_1(r) = N(R, r),$$

[1]) Или Казорати — Вейерштрасса, как ее называют авторы. — *Прим. перев.*

где R — *дивизор критических точек* отображения f. Довольно ясно, что (9) дает оценку снизу для $N(f^{-1}(Z_\lambda), r)$, и если ее аккуратно провести, мы получаем *соотношение дефектов* следующего вида. Назовем *неванлинновским дефектом* величину

$$\delta(Z_\lambda) = 1 - \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(f^{-1}(Z_\lambda), r)}{T(r)}; \tag{11}$$

в силу (7) имеем $0 \leqslant \delta(Z_\lambda) \leqslant 1$, причем $\delta(Z_\lambda) = 1$, если $f(A)$ не пересекает Z_λ. Тогда при указанных выше условиях

$$\delta(Z_\lambda) \leqslant \frac{c(K_V^*)}{c(Z_\lambda)} + \varkappa, \tag{12}$$

где $\varkappa = 0$, если $A = \mathbf{C}^N$ или f — трансцендентное отображение. В качестве следствия из (12) мы получаем *большую теорему Пикара*: если Z_λ имеет простые нормальные самопересечения и $c(Z_\lambda) > c(K_V^*)$, то любое голоморфное отображение $A \to V \setminus Z_\lambda$, образ которого $f(A)$ содержит открытое множество, обязательно является рациональным [1]).

При $V = \mathbf{P}^1$ и $Z_\lambda = \{0, 1, \infty\}$ мы получаем обычную большую теорему Пикара, а в случае $\dim_{\mathbf{C}} V = \dim_{\mathbf{C}} A$ и $c(K_V) > 0$ (когда в качестве Z_λ можно взять пустое множество) получаем основной результат статьи [11].

Следует отметить, что наши большие теоремы Пикара действуют глобально во всей области определения и утверждают, что голоморфное отображение $f\colon A \to V$ между алгебраическими многообразиями при выполнении подходящих условий непременно является рациональным. Соответствующее локальное утверждение состоит в том, что голоморфное отображение $f\colon M \setminus S \to V$, определенное на дополнении к аналитическому подмножеству S комплексного многообразия M, мероморфно продолжается на M; результаты такого рода будут доказаны в приложении. В основном тексте мы формулируем результаты глобально, желая сохранить чисто геометрический аромат теории Неванлинны.

Кроме отыскания оценок сверху для $N(f^{-1}(Z_\lambda), r)$ при $\operatorname{codim} Z_\lambda > 1$, имеется еще одна важная нерешенная проблема общей теории Неванлинны. Это — проблема оценок считающих функций $N(f^{-1}(Z_\lambda), r)$ снизу (соотношений дефектов) в случае, когда Z_λ — дивизор, но образ $f(A)$ не обязательно содержит открытое множество. Кроме соотношений дефектов Альфорса [1] для голоморфных кривых

$$\mathbf{C} \xrightarrow{f} \mathbf{P}^n,$$

[1]) Наша терминология относительно теорем Пикара такова: малая теорема Пикара утверждает, что голоморфное отображение вырожденно, а большая теорема Пикара — что голоморфное отображение не имеет существенных особенностей.

некоторый прогресс в этом вопросе достигнут в работе М. Грина [10]. Так как *в любом случае*

$$\int_{\lambda\in\Lambda} \delta(Z_\lambda)\, d\lambda = 0, \tag{13}$$

то на существование общих соотношений дефектов по крайней мере можно надеяться.

Завершая это введение, мы хотим сказать несколько слов о применениях теории Неванлинны. Глобальное исследование голоморфных отображений, несомненно, обладает большой внутренней красотой и элегантностью, но, как отмечали Альфорс во введении к [1] и Ву [21], испытывает недостаток в применениях. Сейчас положение, кажется, улучшается, и одним из главных моментов в этой работе является как раз то, что мы особо подчеркиваем применения теории Неванлинны.

В § 4 мы воспользуемся I о. т. для получения простого доказательства теоремы Штолля [17] о том, что дивизор D в $\mathbf{C}^n$ является алгебраическим тогда и только тогда, когда

$$\frac{v(D[r])}{r^{2n-2}} = O(1),$$

где $v(D[r])$ — евклидов объем множества $D \cap \{z\colon \|z\| \leqslant r\}$. Это доказательство напоминает первоначальное доказательство самого Штолля, но мы смогли обойтись без использования вырожденных эллиптических уравнений, непосредственно оценивая в I о. т. остаточный член (это единственный известный нам случай, когда такая оценка возможна).

В § 9 (b) мы применяем II о. т. для доказательства одного аналога недавней теоремы М. Квак о продолжении (доказательство и дальнейшие ссылки см. в [11]). Наше утверждение состоит в том, что если V — квазипроективное, *отрицательно искривленное* алгебраическое многообразие, обладающее *ограниченным обильным линейным расслоением* (определения см. в § 9 (b)), то любое голоморфное отображение $f\colon A \to V$ алгебраического многообразия A в V обязательно рационально. Наши условия легко проверяются в случае, когда $V = X/\Gamma$ есть фактор ограниченной симметрической области по арифметической группе (см. [2]), и мы таким образом получаем более наглядное и простое доказательство теоремы А. Бореля [5] о том, что любое голоморфное отображение $f\colon A \to X/\Gamma$ рационально. Эта теорема оказалась очень полезной в алгебраической геометрии; например, недавно Делинь применил ее при доказательстве гипотезы Римана для поверхностей $K3$.

В § 9 (a) мы используем метод сингулярных форм объема для вывода обобщения «леммы о логарифмической производной» Неванлинны [16]. Основное соображение здесь заключается в том, что можно получать оценки, используя метрики или формы объема,

у которых кривизна отрицательна, но не обязательно отграничена от нуля. Такие оценки очень тонки, и мы надеемся найти им применение при изучении голоморфных кривых на общих алгебраических многообразиях.

Наконец, все еще имея в виду применения теории распределения значений, мы хотим привлечь внимание к недавней работе Кодаиры [14], в которой он, между прочим, использует теорию Неванлинны для изучения аналитических поверхностей, содержащих $\mathbf{C}^2$ в виде открытого подмножества. К этому примыкает работа Иитаки (еще не опубликована), который использовал теорию Неванлинны для частичной классификации алгебраических многообразий размерности 3, универсальная накрывающая которых совпадает с $\mathbf{C}^3$.

По поводу «больших теорем Пикара» и их применений мы рекомендуем недавно вышедшую превосходную монографию С. Кобаяси [1]) «Гиперболические многообразия и голоморфные отображения», которая, в частности, содержит первоначальное доказательство теоремы Квак, а также много интересных примеров и открытых вопросов.

0. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ТЕРМИНОЛОГИЯ

(a) ДИВИЗОРЫ И ЛИНЕЙНЫЕ РАССЛОЕНИЯ

Пусть M — комплексное многообразие. Для данного открытого множества $U \subset M$ мы будем обозначать через $\mathscr{M}(U)$ поле мероморфных функций на U, через $\mathscr{O}(U)$ — кольцо голоморфных функций на U, через $\mathscr{O}^*(U)$ — мультипликативную группу функций из $\mathscr{O}(U)$, нигде в U не обращающихся в нуль. Для каждой мероморфной функции $\alpha \in \mathscr{M}(U)$ определен ее дивизор (α). Любой *дивизор* D на M обладает тем свойством, что

$$D \cap U = (\alpha) \quad (\alpha \in \mathscr{M}(U))$$

для достаточно малых открытых подмножеств $U \subset M$. Напомним, что дивизор есть локально конечная сумма неприводимых аналитических гиперповерхностей на M с целыми коэффициентами. Дивизор называется *эффективным*, если локально $D \cap U = (\alpha)$ для некоторой *голоморфной* функции $\alpha \in \mathscr{O}(U)$. Два дивизора D_1, D_2 *линейно эквивалентны*, если $D_1 - D_2 = (\alpha)$ есть дивизор глобальной мероморфной функции α на M. Мы будем обозначать через $|D|$ полную линейную систему эффективных дивизоров, линейно эквивалентных фиксированному эффективному дивизору D.

[1]) Основная часть этой работы переведена: см. сб. *Математика*, 17: 1 (1973), 47—96. — *Прим. ред.*

Предположим теперь, что M — компактное многообразие, и, следовательно, имеется двойственность Пуанкаре между $H_q(M, \mathbf{Z})$ и $H^{2m-q}(M, \mathbf{Z})$. Дивизор D на M является носителем фундаментального класса гомологий

$$\{D\} \in H_{2m-2}(M, \mathbf{Z}) \cong H^2(M, \mathbf{Z}).$$

Мы можем рассматривать $\{D\}$ как элемент $H^2_{\mathrm{DR}}(M, \mathbf{R})$ — группы когомологий де Рама замкнутых дифференциальных форм класса C^∞ по модулю точных форм. Если $\{D\}$ представляется замкнутой положительной (1, 1)-формой ω, то мы будем говорить, что дивизор D *положителен*, и писать $D > 0$. Локально

$$\omega = \frac{i}{2\pi} \sum_{j,k} g_{j\bar{k}}\, dz_j \wedge d\bar{z}_k,$$

где эрмитова матрица $(g_{j\bar{k}})$ положительна. Таким образом на множестве всех дивизоров на M вводится частичный линейный порядок.

Мы хотим иметь метод, позволяющий локализовать рассмотренные понятия, и для этого воспользуемся теорией *линейных расслоений* на произвольном (не обязательно компактном) комплексном многообразии M. Линейное расслоение определяется как голоморфное векторное расслоение

$$L \to M$$

со слоем $\mathbf{C}$. Для достаточно мелкого покрытия $\{U_j\}$ многообразия M возникают тривиализации

$$L|_{U_j} \cong \mathbf{C} \times U_j,$$

которые обычным путем приводят к функциям перехода $\alpha_{jk} \in \mathscr{O}^*(U_j \cap U_k)$ расслоения L. Эти функции перехода удовлетворяют условию коциклов $\alpha_{ij}\alpha_{jk} = \alpha_{ik}$ в $U_i \cap U_j \cap U_k$ и, как хорошо известно, группа классов изоморфных линейных расслоений на M есть группа когомологий Чеха $H^1(M, \mathscr{O}^*)$. Векторное пространство голоморфных сечений $H^0(M, L)$ расслоения L состоит из наборов функций $\sigma = \{\sigma_j\}$, таких, что $\sigma_j \in \mathscr{O}(U_j)$ и

$$\sigma_j = \alpha_{jk}\sigma_k$$

в $U_j \cap U_k$. Для всякого сечения σ условием $D_\sigma \cap U_j = (\sigma_j)$ корректно определяется дивизор D_σ; любые два таких дивизора (для данного расслоения L) линейно эквивалентны. Мы будем обозначать через $|L|$ полную линейную систему эффективных дивизоров D_σ для $\sigma \in H^0(M, L)$. Ясно, что $|L|$ изоморфно $P(H^0(M, L))$ — проективному пространству прямых векторного пространства $H^0(M, L)$ [1]).

[1]) Это следует из того, что σ и $\lambda\sigma$, $\lambda \in \mathbf{C}^*$, определяют один и тот же дивизор. — *Прим. ред.*

у которых кривизна отрицательна, но не обязательно отграничена от нуля. Такие оценки очень тонки, и мы надеемся найти им применение при изучении голоморфных кривых на общих алгебраических многообразиях.

Наконец, все еще имея в виду применения теории распределения значений, мы хотим привлечь внимание к недавней работе Кодаиры [14], в которой он, между прочим, использует теорию Неванлинны для изучения аналитических поверхностей, содержащих $\mathbf{C}^2$ в виде открытого подмножества. К этому примыкает работа Иитаки (еще не опубликована), который использовал теорию Неванлинны для частичной классификации алгебраических многообразий размерности 3, универсальная накрывающая которых совпадает с $\mathbf{C}^3$.

По поводу «больших теорем Пикара» и их применений мы рекомендуем недавно вышедшую превосходную монографию С. Кобаяси [1]) «Гиперболические многообразия и голоморфные отображения», которая, в частности, содержит первоначальное доказательство теоремы Квак, а также много интересных примеров и открытых вопросов.

0. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ТЕРМИНОЛОГИЯ

(a) ДИВИЗОРЫ И ЛИНЕЙНЫЕ РАССЛОЕНИЯ

Пусть M — комплексное многообразие. Для данного открытого множества $U \subset M$ мы будем обозначать через $\mathscr{M}(U)$ поле мероморфных функций на U, через $\mathscr{O}(U)$ — кольцо голоморфных функций на U, через $\mathscr{O}^*(U)$ — мультипликативную группу функций из $\mathscr{O}(U)$, нигде в U не обращающихся в нуль. Для каждой мероморфной функции $\alpha \in \mathscr{M}(U)$ определен ее дивизор (α). Любой *дивизор* D на M обладает тем свойством, что

$$D \cap U = (\alpha) \quad (\alpha \in \mathscr{M}(U))$$

для достаточно малых открытых подмножеств $U \subset M$. Напомним, что дивизор есть локально конечная сумма неприводимых аналитических гиперповерхностей на M с целыми коэффициентами. Дивизор называется *эффективным*, если локально $D \cap U = (\alpha)$ для некоторой *голоморфной* функции $\alpha \in \mathscr{O}(U)$. Два дивизора D_1, D_2 *линейно эквивалентны*, если $D_1 - D_2 = (\alpha)$ есть дивизор глобальной мероморфной функции α на M. Мы будем обозначать через $|D|$ полную линейную систему эффективных дивизоров, линейно эквивалентных фиксированному эффективному дивизору D.

[1]) Основная часть этой работы переведена: см. сб. *Математика*, 17: 1 (1973), 47—96. — *Прим. ред.*

Предположим теперь, что M — компактное многообразие, и, следовательно, имеется двойственность Пуанкаре между $H_q(M, \mathbf{Z})$ и $H^{2m-q}(M, \mathbf{Z})$. Дивизор D на M является носителем фундаментального класса гомологий

$$\{D\} \in H_{2m-2}(M, \mathbf{Z}) \cong H^2(M, \mathbf{Z}).$$

Мы можем рассматривать $\{D\}$ как элемент $H^2_{\mathrm{DR}}(M, \mathbf{R})$ — группы когомологий де Рама замкнутых дифференциальных форм класса C^∞ по модулю точных форм. Если $\{D\}$ представляется замкнутой положительной (1, 1)-формой ω, то мы будем говорить, что дивизор D *положителен*, и писать $D > 0$. Локально

$$\omega = \frac{i}{2\pi} \sum_{j,k} g_{j\bar{k}}\, dz_j \wedge d\bar{z}_k,$$

где эрмитова матрица $(g_{j\bar{k}})$ положительна. Таким образом на множестве всех дивизоров на M вводится частичный линейный порядок.

Мы хотим иметь метод, позволяющий локализовать рассмотренные понятия, и для этого воспользуемся теорией *линейных расслоений* на произвольном (не обязательно компактном) комплексном многообразии M. Линейное расслоение определяется как голоморфное векторное расслоение

$$L \to M$$

со слоем $\mathbf{C}$. Для достаточно мелкого покрытия $\{U_j\}$ многообразия M возникают тривиализации

$$L|_{U_j} \cong \mathbf{C} \times U_j,$$

которые обычным путем приводят к функциям перехода $\alpha_{jk} \in \mathscr{O}^*(U_j \cap U_k)$ расслоения L. Эти функции перехода удовлетворяют условию коциклов $\alpha_{ij}\alpha_{jk} = \alpha_{ik}$ в $U_i \cap U_j \cap U_k$ и, как хорошо известно, группа классов изоморфных линейных расслоений на M есть группа когомологий Чеха $H^1(M, \mathscr{O}^*)$. Векторное пространство голоморфных сечений $H^0(M, L)$ расслоения L состоит из наборов функций $\sigma = \{\sigma_j\}$, таких, что $\sigma_j \in \mathscr{O}(U_j)$ и

$$\sigma_j = \alpha_{jk}\sigma_k$$

в $U_j \cap U_k$. Для всякого сечения σ условием $D_\sigma \cap U_j = (\sigma_j)$ корректно определяется дивизор D_σ; любые два таких дивизора (для данного расслоения L) линейно эквивалентны. Мы будем обозначать через $|L|$ полную линейную систему эффективных дивизоров D_σ для $\sigma \in H^0(M, L)$. Ясно, что $|L|$ изоморфно $P(H^0(M, L))$ — проективному пространству прямых векторного пространства $H^0(M, L)$ [1]).

[1]) Это следует из того, что σ и $\lambda\sigma$, $\lambda \in \mathbf{C}^*$, определяют один и тот же дивизор. — *Прим. ред.*

Пусть D — дивизор на M. Тогда $D \cap U_j = (\alpha_j)$ и отношения

$$\alpha_j/\alpha_k = \alpha_{jk} \in \mathcal{O}^*(U_j \cap U_k)$$

задают функции перехода линейного расслоения $[D] \to M$. Кроме того, если D эффективен, то существует голоморфное сечение $\sigma \in H^0(M, [D])$, такое, что $D = D_\sigma$. Отображение $D \to [D]$ является гомоморфизмом группы дивизоров на M в группу линейных расслоений, причем для любого эффективного дивизора D, очевидно, имеет место соотношение

$$|D| = |[D]|.$$

Вернемся к линейным расслоениям. Кограничный оператор

$$H^1(M, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^2(M, \mathbf{Z})$$

из когомологической последовательности, соответствующей экспоненциальной последовательности пучков $0 \to \mathbf{Z} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}^* \to 1$, дает возможность определить *класс Чжэня* $c(L) = \delta(\{\alpha_{jk}\})$ для любого линейного расслоения $L \to M$. Приведем рецепт вычисления $c(L)$ как элемента группы де Рама $H^2_{\mathrm{DR}}(M, \mathbf{R})$. Для этого напомним, что метрика на L задается положительными C^∞-функциями ρ_j на U_j, удовлетворяющими соотношениям $\rho_j = |\alpha_{jk}|^2 \rho_k$ в $U_j \cap U_k$. Таким образом, если $\sigma = \{\sigma_j\}$ — сечение L, то на всем M корректно определена функция длины

$$|\sigma|^2 = \frac{|\sigma_j|^2}{\rho_j}. \tag{0.1}$$

Замкнутая (1, 1)-форма ω, задаваемая условием

$$\omega|_{U_j} = dd^c \log \rho_j, \tag{0.2}$$

определена глобально — она и представляет класс Чжэня $c(L)$ в $H^2_{\mathrm{DR}}(M, \mathbf{R})$. Мы называем ω *формой кривизны* (для метрики $\{\rho_j\}$) линейного расслоения $L \to M$. Если $\{\rho'_j\}$ — другая метрика на L с формой кривизны ω', то

$$\omega - \omega' = dd^c \varphi, \tag{0.3}$$

где φ — глобальная C^∞-функция на M.

Если M — компактное кэлерово многообразие, то всякая замкнутая (1, 1)-форма ω в классе когомологий $c(L) \in H^2_{\mathrm{DR}}(M, \mathbf{R})$ является формой кривизны для некоторой подходящей метрики на $L \to M$. В частности, любые два представителя класса $c(L)$ в $H^2_{\mathrm{DR}}(M, \mathbf{R})$ будут удовлетворять условию (0.3). Мы будем говорить, что линейное расслоение $L \to M$ *положительно*, и писать $L > 0$, если на L существует метрика, для которой форма кривизны является положительно определенной (1, 1)-формой.

Пусть теперь снова D есть дивизор на M и $[D]$ — соответствующее ему линейное расслоение. Тогда имеет место равенство (по двойственности Пуанкаре)

$$\{D\} = c([D]) \in H^2(M, \mathbf{Z})$$

между классом когомологий дивизора D и классом Чжэня расслоения $[D]$. Кроме того, дивизор D положителен тогда и только тогда, когда положительно линейное расслоение $[D]$. Таким образом, для перехода от дивизоров к линейным расслоениям мы имеем полный словарь:

$$\begin{gathered} D \leftrightarrow [D], \\ |D| \leftrightarrow |[D]|, \\ \{D\} \leftrightarrow c([D]), \\ D > 0 \Leftrightarrow [D] > 0. \end{gathered}$$

Как мы уже говорили, линейные расслоения вводятся потому, что они дают хорошую технику локализации и использования метрических методов при изучении дивизоров. Кроме того, теория линейных расслоений контравариантна в самом удобном смысле. Именно, для данного голоморфного отображения $f\colon N \to M$ и линейного расслоения $L \to M$ существует индуцированное линейное расслоение $L_f \to N$. Кроме того, имеется гомоморфизм

$$\sigma \to \sigma_f$$

из $H^0(M, L)$ в $H^0(N, L_f)$ и выполняется соотношение

$$(\sigma_f) = f^{-1}(D) \underset{\mathrm{def}}{=} D_f.$$

Наконец, метрика на $L \to M$ индуцирует метрику на $L_f \to N$, а формы кривизны тоже контравариантны, так что форма кривизны ω_f расслоения L_f является прообразом формы кривизны ω для L. Итак, теория линейных расслоений придает локализованный и функториальный характер исследованию дивизоров на комплексном многообразии.

И последнее определение. Говорят, что дивизор D на M имеет *нормальные самопересечения*, если локально D задается уравнением

$$z_1 \dots z_k = 0,$$

где $(z_1, \dots, z_m)$ — локальные голоморфные координаты на M. Если, кроме того, каждая неприводимая компонента D является гладким многообразием, то мы будем говорить, что D имеет *простые нормальные самопересечения*. В случае когда $M = \mathbf{P}^m$ — комплексное проективное пространство и $D = H_1 + \dots + H_N$ — линейная комбинация гиперплоскостей, D имеет нормальные самопересечения тогда и только тогда, когда гиперплоскости H_μ $(\mu = 1, \dots, N)$ находятся *в общем положении*.

(b) КАНОНИЧЕСКОЕ РАССЛОЕНИЕ И ФОРМЫ ОБЪЕМА

Пусть M — комплексное n-мерное многообразие и $\{U_j\}$ — покрытие M координатными окрестностями с голоморфными координатами $z_j=(z_j^1, \ldots, z_j^n)$ в U_j. Тогда якобианы

$$\varkappa_{jk}=\det\left(\frac{\partial z_k^\alpha}{\partial z_j^\beta}\right)$$

определяют (как функции перехода) каноническое расслоение $K_M\to M$. Голоморфные сечения этого расслоения — глобально определенные голоморфные n-формы на M.

Формой объема Ψ на M называется всюду положительная (n, n)-форма класса C^∞. Используя обозначение

$$\Phi_j=\frac{i}{2\pi}(dz_j^1\wedge d\bar z_j^1)\wedge\ldots\wedge\frac{i}{2\pi}(dz_j^n\wedge d\bar z_j^n),$$

форму объема локально можно представить в виде

$$\Psi=\rho_j\Phi_j, \tag{0.4}$$

где ρ_j — положительная C^∞-функция. Правило перехода в $U_j\cap U_k$ выглядит так:

$$\rho_j=|\varkappa_{jk}|^2\rho_k,$$

поэтому форма объема есть не что иное, как метрика в каноническом расслоении. Форма кривизны в этом случае называется *формой Риччи* и обозначается $\operatorname{Ric}\Psi$. Таким образом, в U_j

$$\operatorname{Ric}\Psi=dd^c\log\rho_j. \tag{0.5}$$

Решающую роль для нас будут играть условия

$$\begin{aligned}&\operatorname{Ric}\Psi>0,\\ &(\operatorname{Ric}\Psi)^n\geqslant c\Psi\quad(c>0)\ ^1).\end{aligned} \tag{0.6}$$

Геометрически их надо понимать так: «каноническое расслоение имеет положительную кривизну, которая отграничена от нуля». Поясним это. Допустим, что M есть риманова поверхность. Пользуясь соответствием

$$\rho\frac{i}{2\pi}(dz\wedge d\bar z)\leftrightarrow\rho\,dz\otimes d\bar z,$$

мы видим, что форма объема — это то же самое, что эрмитова метрика на M. Далее, форма Риччи равна

$$\operatorname{Ric}\left\{\rho\frac{i}{2\pi}(dz\wedge d\bar z)\right\}=-\varkappa\left\{\rho\frac{i}{4\pi}(dz\wedge d\bar z)\right\}, \tag{0.7}$$

[1]) Последнее неравенство означает, что разность $(\operatorname{Ric}\Psi)^n-c\Psi$ является неотрицательной (n, n)-формой; $(\operatorname{Ric}\Psi)^n$ — внешняя степень $\operatorname{Ric}\Psi$. — *Прим. ред.*

где $\varkappa=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\log\rho}{\partial z\,\partial\bar z}$ — *гауссова кривизна* эрмитовой метрики $\rho\,dz\otimes d\bar z$. Таким образом, в этом случае (0.6) эквивалентно условию

$$\varkappa\leqslant-c_1<0,$$

т. е. гауссова кривизна *отрицательна* и отграничена от нуля. В определении $\operatorname{Ric}\Psi$ мы так выбрали знак, чтобы избежать частого появления множителя $(-1)^n$.

Теория форм объема контравариантна. Если M и N — комплексные многообразия одинаковой размерности, $f\colon M\to N$ — голоморфное отображение и Ψ — форма объема на N, то прообраз $\Psi_f=f^*\Psi$ будет *формой псевдообъема* на M. Это означает, что Ψ_f положительна вне некоторого аналитического подмножества M (в нашем случае — вне дивизора критических точек отображения f).

(c) ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ И ПОТОКИ

(Лелон [15].) Мы обозначаем через $A^{p,q}(M)$ векторное пространство дифференциальных форм класса C^∞ и типа (p, q) на m-мерном комплексном многообразии M; символ $A_c^{p,q}(M)$ обозначает формы с компактным носителем. Если на $A_c^{m-p,m-q}(M)$ ввести топологию Шварца, то сопряженное к нему пространство $C^{p,q}(M)$ будет пространством потоков типа (p, q) на M. Для данного потока T и формы φ мы будем обозначать через $T(\varphi)$ значение T на φ. Градуированное векторное пространство потоков

$$C^*(M)=\bigoplus_{p,q}C^{p,q}(M)$$

образует модуль над совокупностью дифференциальных форм $A^*(M)=\bigoplus_{p,q}A^{p,q}(M)$ с операцией

$$(\varphi\wedge T)(\eta)=T(\varphi\wedge\eta),$$

где $\varphi\in A^*(M)$, $T\in C^*(M)$ и $\eta\in A_c^*(M)$.

Мы будем использовать обозначения

$$\begin{cases} d=\partial+\bar\partial,\\ d^c=\frac{i}{4\pi}(\bar\partial-\partial),\\ dd^c=\frac{i}{2\pi}\partial\bar\partial.\end{cases} \tag{0.8}$$

Множитель $1/4\pi$ перед d^c поставлен для того, чтобы при вычислениях не надо было следить за универсальными постоянными,

такими, например, как объем единичной сферы в $\mathbf{C}^m$. Как обычно, все дифференциальные операторы действуют на потоках по правилам вида

$$(\partial T)(\varphi) = T(\partial\varphi).$$

Действие $A^*(M)$ на $C^*(M)$ совместимо с этими правилами.

Поток $T \in C^{p,p}(M)$ называется *действительным*, если $T = \bar{T}$, *замкнутым*, если $dT = 0$, и *положительным*, если

$$i^{p(p-1)/2}\, T(\eta \wedge \bar{\eta}) \geqslant 0$$

для всех $\eta \in A_c^{m-p,0}(M)$. При $p = 1$ мы можем локально записать $T \in C^{1,1}(M)$ в виде

$$T = \frac{i}{2\pi} \sum_{j,k} t_{jk}\, dz_j \wedge d\bar{z}_k,$$

где t_{jk} можно рассматривать как распределения, действующие на функцию α по правилу

$$(-1)^{j+k+m-1} t_{jk}(\alpha) = T(\alpha\, dz_1 \ldots \widehat{dz_j} \ldots dz_m \wedge d\bar{z}_1 \ldots \widehat{d\bar{z}_k} \ldots d\bar{z}_m).$$

В этом случае поток T действителен и положителен, если распределения

$$T(\lambda) = \sum_{j,k} t_{jk} \lambda_j \bar{\lambda}_k \quad (\lambda_j \in \mathbf{C})$$

неотрицательны на неотрицательных функциях. А тогда при помощи монотонных предельных переходов мы можем расширить область определения $T(\lambda)$ с C^∞-функций до соответствующего класса функций из $L^1(\mathrm{loc}, M)$, интегрируемых по положительной мере Радона

$$\alpha \to T(\lambda)(\alpha),$$

первоначально определенной на C^∞-функциях. Аналогичное рассуждение проходит для положительных потоков типа (p, p).

Для любого положительного потока $T \in C^{1,1}(M)$ каждое из распределений t_{jk} является мерой Радона; кроме того, все t_{jk} абсолютно непрерывны относительно диагональной меры $\sum_j t_{jj}$ [15].

Приведем три примера потоков, которыми мы будем главным образом пользоваться.

(i) Форму $\psi \in A^{p,q}(M)$ можно рассматривать как поток, действующий по правилу

$$\psi(\varphi) = \int_M \psi \wedge \varphi \qquad (\varphi \in A_c^{m-p,\,m-q}(M)). \tag{0.9}$$

Из теоремы Стокса следует, что $d\psi$ в смысле потоков совпадает с $d\psi$ в смысле дифференциальных форм [1]. Кроме того, структура $A^*(M)$-модуля на $C^*(M)$ индуцирует обычное внешнее умножение на подпространстве $A^*(M) \subset C^*(M)$.

(ii) Аналитическое подмножество $Z \subset M$ чистой коразмерности q определяет поток $Z \in C^{q,q}(M)$ по формуле ([15])

$$Z(\varphi) = \int_{\mathrm{reg}\, Z} \varphi \qquad (\varphi \in A_c^{m-q,\,m-q}(M)) \tag{0.10}$$

($\mathrm{reg}\, Z$ обозначает множество регулярных точек Z). Этот поток действителен, замкнут и положителен. По линейности любая аналитическая цепь на M тоже определяет поток.

Замечание о кратностях. Мы говорим, что поток Z является множеством с кратностями, если имеются аналитическое множество $|Z|$ и целочисленная функция $n(z)$ на $\mathrm{reg}\,|Z|$, локально постоянная на этом многообразии; тогда Z есть пара $(|Z|, n)$ и $Z(\varphi) = \int_{|Z|} n(z)\varphi$. Ясно, что $dZ = d^cZ = 0$.

Далее, если даны голоморфные функции $f_1, \ldots, f_r$ и $|Z| = \{f_1 = \ldots = f_r = 0\}$, то *кратность* $\mathrm{mult}_z Z$ в каждой точке z определяется алгебраически, и она локально постоянна на $\mathrm{reg}\,|Z|$ ([8]). Как раз это мы будем иметь в виду, говоря о $Z = \{f_1 = \ldots = f_r = 0\}$ с алгебраическими кратностями. Кратности на множестве $\mathrm{sing}\,|Z|$ особых точек можно игнорировать, так как $\mathrm{sing}\,|Z|$ является множеством меры 0 на $|Z|$.

(iii) Мы будем обозначать через $L^1_{(p,q)}(\mathrm{loc}, M)$ векторное пространство (p, q)-форм, коэффициенты которых являются локально интегрируемыми функциями на M. Каждая форма $\psi \in L^1_{(p,q)}(\mathrm{loc}, M)$ определяет поток по приведенной выше формуле (0.9). В случаях, которые мы будем рассматривать, функции ψ принадлежат классу C^∞ вне некоторого аналитического подмножества $S \subset M$. Более того, ψ имеют на S особенности вполне определенного типа, а $d\psi$ в смысле дифференциальных форм на $M \setminus S$ снова локально принадлежит L^1 на всем M. Обычно, однако, $d\psi$ в смысле потоков *не совпадает* с $d\psi$ в смысле дифференциальных форм. Это происходит потому, что особенности ψ не позволяют непосредственно применить теорему Стокса, и в общем случае мы будем иметь уравнение типа

$$\left\{\begin{matrix} d\psi \text{ в смысле} \\ \text{потоков} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} d\psi \text{ в смысле} \\ \text{форм} \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} \text{поток, сосредото-} \\ \text{ченный на } S \end{matrix}\right\}. \tag{0.11}$$

Соотношение (0.11) послужит основой всех наших интегральных формул.

[1] С точностью до знака, за которым авторы не следят. — *Прим. ред.*

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ, ПОТОКИ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ЦИКЛЫ

(a) ФОРМУЛА ПУАНКАРЕ

Пусть U — открытое множество на комплексном многообразии размерности n и $\alpha \in \mathscr{M}(U)$ — мероморфная функция на U. Обозначим через $D=(\alpha)$ дивизор α. Тогда и D, и $\log|\alpha|^2$ определяют потоки, как это описано в § 0 (c). Мы хотим показать, что

$$D = dd^c \log|\alpha|^2;$$

как будет видно из доказательства, это соотношение представляет собой разновидность формулы вычетов. Фактически мы докажем следующий более сильный результат, который окажется полезным в двух ближайших параграфах.

(1.1) Предложение. *Пусть, как выше, даны α и $D=(\alpha)$, и пусть $X \subset U$ — чисто k-мерное аналитическое подмножество, такое, что* $\dim(X \cap D) = k-1$. *Тогда*

(1.2) $\quad dd^c(X \wedge \log|\alpha|^2) = X \cdot D$ (формула Пуанкаре).

Замечание. Это означает, что для любой $\varphi \in A_c^{k-1,\,k-1}(U)$ имеет место равенство

$$\int_X \log|\alpha|^2\, dd^c\varphi = \int_{X\cdot D} \varphi, \tag{1.3}$$

где интеграл слева всегда сходится, а $X \cdot D$ есть обычное пересечение. В случае $X = U$ имеем

$$\int_U \log|\alpha|^2\, dd^c\varphi = \int_D \varphi.$$

Для доказательства этого предложения нам понадобится лемма, которая будет доказана в конце параграфа.

(1.4) Лемма. *Если α не постоянна ни на одной компоненте X, то $\log|\alpha|^2$ локально интегрируем на X, или, что то же самое, $\int_X \log|\alpha|^2 \mu$ определен для всех $\mu \in A_c^{k,\,k}(U)$. Кроме того, $dd^c(X \wedge \log|\alpha|^2)$ является положительным потоком.*

Доказательство предложения. Так как обе части уравнения линейны, мы можем воспользоваться разбиением единицы и локализовать задачу. Прежде всего мы можем выбрать U настолько малой, что α будет отношением голоморфных функций α_1/α_2. Так как $\log|\alpha_1/\alpha_2|^2 = \log|\alpha_1|^2 - \log|\alpha_2|^2$ и $(\alpha_1/\alpha_2) = (\alpha_1) - (\alpha_2)$, то можно считать, что α голоморфна в U.

Сначала предположим, что X и $X \cap D$ не имеют особых точек; тогда при дальнейшей локализации мы можем выбрать координаты $(w_1, \ldots, w_k)$ на X так, что $X \cap D = \{w_k = 0\}$. В этом случае сужение α на X равно βw_k^r, где β — голоморфная функция, нигде в U не обращающаяся в нуль, а r — натуральное число. Таким образом, у нас $X \cdot D = r\{w_k = 0\}$.

Далее, так как $\log|\alpha|^2 = \log|\beta|^2 + r\log|w_k|^2$ и $dd^c \log|\beta|^2 = 0$, то достаточно доказать предложение для случая, когда $\alpha = w_k$. Итак, пусть $\varphi \in A_c^{k-1,\,k-1}(U)$; тогда

$$\int_X \log|w_k|^2\, dd^c\varphi = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{X_\varepsilon} \log|w_k|^2\, dd^c\varphi, \tag{1.5}$$

где $X_\varepsilon = \{x \in X\colon |w_k(x)| \geqslant \varepsilon\}$. Таким образом, $\partial X_\varepsilon = -S_\varepsilon$, где $S_\varepsilon = \{x \in X\colon |w_k(x)| = \varepsilon\}$ ориентирована так, что ее нормаль идет в направлении возрастания $|w_k|$. По теореме Стокса

$$\int_{X_\varepsilon} \log|w_k|^2\, dd^c\varphi = -\int_{X_\varepsilon} d\log|w_k|^2 \wedge d^c\varphi - \int_{S_\varepsilon} \log|w_k|^2\, d^c\varphi. \tag{1.6}$$

Так как $d\log|w_k|^2 \wedge d^c\varphi = -d^c\log|w_k|^2 \wedge d\varphi$ [1]) и $dd^c\log|w_k|^2 = 0$ на X_ε, то

$$-\int_{X_\varepsilon} d\log|w_k|^2 \wedge d^c\varphi = -\int_{X_\varepsilon} d(d^c\log|w_k|^2 \wedge \varphi) = \int_{S_\varepsilon} d^c\log|w_k|^2 \wedge \varphi. \tag{1.7}$$

Очевидно, что

$$\int_{S_\varepsilon} \log|w_k|^2\, d^c\varphi = (2\log\varepsilon)\int_{S_\varepsilon} d^c\varphi \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Кроме того, если мы положим $w_k = re^{i\theta}$, то $d^c\log|w_k|^2 = (2\pi)^{-1}\, d\theta$. Таким образом,

$$\int_{S_\varepsilon} d^c\log|w_k|^2 \wedge \varphi \to \int_{\{w_k=0\}} \varphi. \tag{1.8}$$

Этим завершается доказательство для несингулярного случая.

Убедимся далее, что (1.2) достаточно доказать для дополнения к малому аналитическому множеству. Точнее, если $Y \subset U$ — подмножество размерности $< k-1$ и если сужения потоков $X \cdot D$ и $dd^c(X \wedge \log|\alpha|^2)$ на $U \setminus Y$ равны, то (1.2) имеет место.

Один путь доказательства — ссылка на известную теорему. В самом деле, оба эти потока представляют собой так называе-

[1]) Левая и правая части равенства отличаются на формы $\bar\partial\log|w_k|^2 \wedge \bar\partial\varphi$ и $\partial\log|w_k|^2 \wedge \partial\varphi$, равные нулю на X, ибо φ — форма бистепени $(k-1,\,k-1)$, а $\dim X = k$. Это соображение используется и в ряде других мест статьи. — *Прим. ред.*

мые плоские потоки, и можно доказать, что два таких потока действительной размерности l, отличающиеся только на множестве действительной размерности $l-2$, на самом деле совпадают (см. [13] и [9]).

Однако это можно доказать и непосредственно, пользуясь тем, что $T=X\cdot D$ и $T'=dd^c(X\wedge\log|\alpha|^2)$ — положительные потоки. Вводя координаты $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ в окрестности произвольной точки из U, достаточно показать, что $T\wedge\omega_I=T'\wedge\omega_I$, где

$$\omega_I=(i/2)^{k-1}\,dz_{i_1}\wedge d\bar z_{i_1}\wedge\ldots\wedge dz_{i_{k-1}}\wedge d\bar z_{i_{k-1}}$$

и $I=(i_1, \ldots, i_{k-1})$ — любой набор. В самом деле, если это условие выполнено, то в обозначениях § 0 мы будем иметь $T_{IJ}=T'_{IJ}$ (равенство коэффициентов-мер формального разложения потоков T и T' по базису $\{dz_I\wedge d\bar z_J\}$). Из определения потока T следует, что Y имеет T_{II}-меру нуль для всех I, так как $Y\cap X\cap D$ есть множество $(2k-2)$-мерной меры нуль на $X\cap D$. Следовательно, T_{IJ}-меры Y тоже равны нулю, ибо ввиду положительности эти меры абсолютно непрерывны относительно $\sum T_{II}$.

Для доказательства равенства $T\wedge\omega_I=T'\wedge\omega_I$ рассмотрим π_I: $U\to\mathbf{C}^{k-1}$ — координатную проекцию $z\longmapsto(z_{i_1}, \ldots, z_{i_{k-1}})$. Для любой $\varphi\in A_c^{0,0}(U)$ имеем $T\wedge\omega_I(\varphi)=T\wedge\varphi(\pi_I^*\omega)=(\pi_I^*T\wedge\varphi)(\omega)$, где ω — форма объема в $\mathbf{C}^{k-1}$. Аналогично $T'\wedge\omega_I(\varphi)=(\pi_I^*T'\wedge\varphi)(\omega)$. Теперь и $\mu=\pi_I^*T\wedge\varphi$, и $\mu'=\pi_I^*T'\wedge\varphi$ принадлежат $C^{0,0}(\mathbf{C}^{k-1})$. Поток μ определяется непрерывной функцией $\sum_{x\in X\cap\pi_I^{-1}(y)}\varphi(x)$ (каждая x считается с соответствующей кратностью). Если бы мы знали, что μ' тоже задается локально интегрируемой функцией, то доказательство было бы закончено, так как эти два потока совпадают на дополнении к $\pi_I(Y)$, которое является множеством меры нуль в $\mathbf{C}^{k-1}$. Можно доказать, что $\mu'\in L^1_{\mathrm{loc}}$, воспользовавшись теоремой Радона — Никодима, т. е. доказав, что μ' абсолютно непрерывна относительно лебеговой $(2k-2)$-меры на $\mathbf{C}^{k-1}$. Итак, пусть E — множество лебеговой меры нуль, тогда

$$\mu'(E)=\int\limits_{X\cap\pi_I^{-1}(E)}\log|\alpha|^2\,dd^c\varphi\wedge\omega_I.$$

Но этот интеграл равен нулю, так как $\pi_I^{-1}(E)\cap\operatorname{reg}X$ имеет $2k$-меру нуль, поскольку ранг π_I максимален всюду на X, за исключением, быть может, множества $2k$-меры нуль (аналитического подмножества X меньшей размерности). Этим заканчивается часть доказательства, относящаяся к продолжению равенства (1.2) с $U\setminus Y$ на все U.

Остается доказать это равенство для дополнения к аналитическому подмножеству $Y\subset U$ размерности $<k-1$. Заметим, что если X — нормальное множество, то, взяв в качестве Y множество

особых точек (которое имеет размерность $<k-1$, см. [15]), мы можем на $U\setminus Y$ воспользоваться доказанным выше. Если X не является нормальным, то существуют однозначно определенная нормализация $\tilde X$ и конечнократное собственное отображение ρ: $\tilde X\to X$, взаимно однозначное над множеством регулярных точек X. Локализуя так, что ρ продолжается до отображения $\tilde U\to U$ $(\tilde X\subset\tilde U)$, мы получаем, что

$$\int\limits_X\log|\alpha|^2\,dd^c\varphi=\int\limits_{\tilde X}\log|\alpha\circ\rho|^2\,dd^c\rho^*\varphi=\int\limits_{\tilde X\cdot(\alpha\circ\rho)}\rho^*\varphi,$$

так как для нормального $\tilde X$ предложение (1.1) уже доказано. Но $Z=\tilde X\cdot(\alpha\circ\rho)$ есть множество размерности $k-1$, а ρ: $Z\to X\cap D$ — конечнократное отображение. Таким образом, этот последний интеграл равен $\int_{\text{„}X\cap D\text{“}}\varphi$, где „$X\cap D$“ есть $X\cap D$, посчитанное с учетом кратностей. Можно проверить, что эти кратности определяют пересечение $X\cdot D$ согласно локальной алгебре (в регулярных точках $X\cdot D$, которые только и влияют на интегрирование); см. [13].

Доказательство леммы 1.4. Пусть π: $X\to\Delta\subset\mathbf{C}^k$ — собственное конечнократное голоморфное отображение степени s, т. е. конечнолистное разветвленное накрытие. Мы можем считать, что $\log|\alpha|^2<0$ на X. Если $\varphi\in A_c^{k,k}(\Delta)$, то $\int_X\log|\alpha|^2\pi^*\varphi=\int_\Delta\log|\alpha(x)|^2\,\pi_*(X\wedge\log|\alpha|^2)\,\varphi$, где $\pi_*(X\wedge\log|\alpha|^2)$ есть функция $\zeta(y)=\sum_{x\in X\cap\pi^{-1}(y)}\log|\alpha(x)|^2$. На $\Delta\setminus\pi(X\cap D)$ имеем $dd^c\zeta=\pi_*(X\wedge dd^c\log|\alpha|^2)=0$, и, значит, там ζ — гладкая плюригармоническая функция. Так как $\zeta=-\infty$ на $\pi(X\cap D)$, то ζ плюрисубгармонична и, следовательно, локально интегрируема в Δ ([15]). Мы видим, что на X выполняется неравенство $\zeta\circ\pi\leqslant\log|\alpha|^2$ (<0). Так как $\int_X(\zeta\circ\pi)\,\pi^*\varphi=s\int_\Delta\zeta\varphi$ конечен, то $\int\log|\alpha|^2\,\pi^*\varphi$ тоже существует.

Можно считать, что $X\subset U\subset\mathbf{C}^n$, причем координаты выбраны так, что любая координатная проекция π_I: $X\to\pi_I(U)\subset\mathbf{C}^k$ локально такая же, как описанная выше проекция π. Тогда [1])

$$\int\limits_X\log|\alpha|^2\,d\,(\text{объем})=\frac{1}{k!}\int\limits_X\log|\alpha|^2\omega,\ \text{где}\ \omega=\sum\omega_I\ \text{и}\ \omega_I=\pi_I^*\varphi,$$

а φ — форма объема в $\mathbf{C}^k$. Этим доказана первая часть леммы.

[1]) Здесь используется теорема Виртингера; см. Л. И. Ронкин, Введение в теорию целых функций многих переменных, «Наука», М., 1971, стр. 343. — *Прим. ред.*

Вторая часть непосредственно следует отсюда, так как существует монотонно убывающая последовательность $\zeta_1 \geqslant \zeta_2 \geqslant \ldots$ гладких плюрисубгармонических функций, сходящаяся к $\log|\alpha|^2$ (например, $\zeta_r = \log(|\alpha|^2 + 1/r)$), а поэтому для любой положительной формы $\varphi \in A_c^{k-1,\,k-1}(U)$ согласно теореме о монотонной сходимости

$$0 \leqslant \int_X dd^c\zeta_r \wedge \varphi = \int_X \zeta_r dd^c\varphi \to \int_X \log|\alpha|^2\, dd^c\varphi = dd^c(X \wedge \log|\alpha|^2)\,\varphi.$$

(b) ФОРМУЛА ПУАНКАРЕ ДЛЯ ВЕКТОРНЫХ ФУНКЦИЙ

Здесь мы хотим вывести формулу Пуанкаре для нескольких функций. Сначала определим формы, играющие роль, аналогичную $\log|z|^2$ для одной переменной. Пусть $(z_1, \ldots, z_r)$ — линейные координаты в $\mathbf{C}^r$; положим $\|z\|^2 = |z_1|^2 + \ldots + |z_r|^2$ и

$$\text{(1.9)} \qquad \begin{cases} \theta_l = (dd^c \log\|z\|^2)^l, \\ \Theta_l = \log\|z\|^2 \cdot \theta_l. \end{cases}$$

Если $F = (f_1, \ldots, f_r)\colon U \to \mathbf{C}^r$ — голоморфное отображение комплексного многообразия U, то $F^*\theta_l = (dd^c \log\|f\|^2)^l$ и $F^*\Theta_l = \log\|f\|^2 \cdot F^*\theta_l$.

(1.10) Предложение (формула Пуанкаре — Мартинелли). *Пусть U — комплексное n-мерное многообразие и $F\colon U \to \mathbf{C}^r$ — голоморфное отображение. Тогда формы $F^*\theta_l$ и $F^*\Theta_l$ принадлежат $L^1_{(l,\,l)}(U, \mathrm{loc})$ для всех l. Если $W = F^{-1}(0)$ имеет размерность $n-r$, то $dd^cF^*\Theta_{l-1} = F^*\theta_l$ при $l < r$ и $dd^cF^*\Theta_{r-1} = W$, где W считается с соответствующими алгебраическими кратностями, т. е.*

$$\text{(1.10)} \qquad \int_U F^*\Theta_{r-1} \wedge dd^c\varphi = \int_W \varphi$$

для всех $\varphi \in A_c^{n-r,\,n-r}(U)$.

Замечание. Из доказательства будет видно, что если $X \subset U$ есть k-мерное аналитическое подмножество и размерность $X \cap W$ равна $k-r$, то

$$dd^c(X \wedge F^*\Theta_{r-1}) = X \cdot W.$$

Прежде чем начинать доказательство, мы подробнее изучим формы θ_l и Θ_l, раздувая начало координат в $\mathbf{C}^r$ и переходя к новому многообразию $\hat{\mathbf{C}}^r$. Если $(z_1, \ldots, z_r)$ — линейные координаты в $\mathbf{C}^r$ и $[w_1, \ldots, w_r]$ — однородные координаты в $\mathbf{P}^{r-1}$, то $\hat{\mathbf{C}}^r$ есть подмногообразие в $\mathbf{C}^r \times \mathbf{P}^{r-1}$, определяемое системой уравнений $w_iz_j - w_jz_i = 0$ $(1 \leqslant i,\ j \leqslant n)$. Проекция на координаты z задает собственное отображение $\pi\colon \hat{\mathbf{C}}^r \to \mathbf{C}^r$. Если $E = \pi^{-1}(0)$, то

отображение $\pi\colon \hat{\mathbf{C}}^r \setminus E \to \mathbf{C}^r \setminus \{0\}$ биголоморфно, а дивизор E равен $\{0\} \times \mathbf{P}^{r-1}$. Проекция $\rho\colon \hat{\mathbf{C}}^r \to \mathbf{P}^{r-1}$ на координаты w превращает $\hat{\mathbf{C}}^r$ в голоморфное линейное расслоение над $\mathbf{P}^{r-1}$.

Если $U_i = \{w_i \neq 0\} \subset \mathbf{P}^{r-1}$ и $\hat{\mathbf{C}}^r_i = \hat{\mathbf{C}}^r \cap (\mathbf{C}^r \times U_i)$, то локальными координатами на $\hat{\mathbf{C}}^r_i$ будут $(u_{1i}, \ldots, u_{i-1,\,i}, z_i, u_{i+1,\,i}, \ldots, u_{ri})$, где $u_{ji} = w_j/w_i$. В этих координатах отображение $\pi\colon \hat{\mathbf{C}}^r_i \to \mathbf{C}^r$ задается формулой $\pi(u_{1i}, \ldots, z_i, \ldots, u_{ri}) = (u_{1i}z_i, \ldots, z_i, \ldots, u_{ri}z_i)$. Поэтому в $\hat{\mathbf{C}}^r_i$

$$\text{(1.11)} \qquad \pi^* \log\|z\|^2 = \log|z_i|^2 + \log\Bigl(1 + \sum_{j \neq i} |u_{ji}|^2\Bigr),$$

где второе слагаемое является, очевидно, C^∞-функцией. А тогда

$$\text{(1.12)} \qquad \pi^* dd^c \log\|z\|^2 = dd^c \log\Bigl(1 + \sum_{j \neq i} |u_{ji}|^2\Bigr) = \rho^*\omega,$$

где ω — обычная кэлерова форма на $\mathbf{P}^{r-1}$.

Доказательство предложения (1.10). Пусть задано отображение $F\colon U \to \mathbf{C}^r$, и пусть $\Gamma = \{(x, F(x))\} \subset U \times \mathbf{C}^r$ — его график. Пусть $\hat{\Gamma} \subset U \times \hat{\mathbf{C}}^r$ — замыкание $\pi^{-1}(\Gamma \setminus (W \times 0))$ и $\hat{W} = \hat{\Gamma} \cdot (0 \times \mathbf{P}^{r-1})$; эти многообразия имеют размерности n и $r-1$ соответственно, причем следующая диаграмма коммутативна (U отождествляется с Γ):

$$\text{(1.13)} \qquad \begin{array}{ccccccc} \hat{W} & \overset{\hat{i}}{\subset} & \hat{\Gamma} & \overset{\hat{j}}{\subset} & U \times \hat{\mathbf{C}}^r & \overset{\rho}{\to} & \mathbf{P}^{r-1} \\ \downarrow\pi & & \downarrow\pi & & \downarrow\pi & & \\ W & \overset{i}{\subset} & \Gamma & \overset{j}{\subset} & U \times \mathbf{C}^r & & \end{array}$$

Кроме того, каждое отображение π собственное, $\pi\colon \Gamma \setminus \hat{W} \to \Gamma \setminus W$ биголоморфно и $\pi^{-1}(w) = w \times \mathbf{P}^{r-1}$ для каждой $w \in W$.

Теперь мы хотим показать, что $\int_U F^*\Theta_{r-1} \wedge dd^c\varphi = \int_W \varphi$. Интеграл слева равен $\int_\Gamma p_2^*\Theta_{r-1} \wedge dd^c p_1^*\varphi$, где p_1, p_2 — проекции $U \times \mathbf{C}^r$ соответственно на U и на $\mathbf{C}^r$. Последний интеграл в свою очередь равен $\int_{\hat{\Gamma}} \pi^* p_2^*\Theta_{r-1} \wedge dd^c\pi^* p_1^*\varphi$, так как π — отображение степени 1.

Согласно (1.11) и (1.12), в $U_i \times \mathbf{C}^r$

$$\pi^* p_2^*\Theta_{r-1} = \Bigl(\log|z_i|^2 + \log\Bigl(1 + \sum_{j \neq i} |u_{ji}|^2\Bigr)\Bigr)(\rho^*\omega)^{r-1},$$

Кроме того, $^1dd^c\left(\log\left(1+\sum|u_{jl}|^2\right)\rho^*\omega^{r-1}\right)=\rho^*\omega^r=0$, так как на $\mathbf{P}^{r-1}$ нет форм степени $2r$. Таким образом, наш интеграл принимает вид $\int_{\hat{\Gamma}}\log|z_l|^2\,dd^c(\rho^*\omega^{r-1}\wedge\pi^*p_1^*\varphi)$ и равен

$$\int_{\hat{\Gamma}\cdot(0\times\mathbf{P}^{r-1})}\rho^*\omega^{r-1}\wedge\pi^*p_1^*\varphi=\int_{\hat{W}}\rho^*\omega^{r-1}\wedge\pi^*p_1^*\varphi=\int_W\varphi,$$

так как $\int_{\mathbf{P}^{r-1}}\omega^{r-1}=1$ и каждый слой $\pi\colon\hat{W}\to W$ есть $\mathbf{P}^{r-1}$. Строго говоря, мы здесь доказали только соотношение $dd^cF^*\Theta_{r-1}=„W“$, где, как и выше, кавычки обозначают, что интегрирование по W производится с учетом некоторой кратности. То, что это на самом деле алгебраическая кратность, нетрудно доказать, учитывая свойства последней (см. [13]).

Для доказательства остальной части предложения мы замечаем, что и $F^*\Theta_l$, и $F^*\theta_l$ принадлежат $L^1_{(l,\,l)}(U,\ \mathrm{loc})$, поскольку $\pi^*p_1^*F^*\Theta_l$ и $\pi^*p_1^*F^*\theta_l$ принадлежат $L^1_{(l,\,l)}(U,\ \mathrm{loc})$ на $\hat{\Gamma}$ согласно лемме (1.4). Проверка того, что $dd^cF^*\Theta_{l-1}=F^*\theta_l$ при $l<r$, делается тем же методом, только на последнем шаге надо воспользоваться тем, что $\int_{\hat{W}}\rho^*\omega^{l-1}\wedge\pi^*p_1^*\varphi=0$, если $l<r$ (здесь $\pi^*p_1^*\varphi$ должна содержать более чем $2n-2r$ дифференциалов координат базы).

(c) ГЛОБАЛИЗАЦИЯ ФОРМУЛ ПУАНКАРЕ И МАРТИНЕЛЛИ

Используя обозначения и терминологию 0 (a), рассмотрим комплексное многообразие M, линейное расслоение $L\to M$, имеющее метрику с формой кривизны ω, и голоморфное сечение $\sigma\in H^0(M,\,L)$ с дивизором D. Функция $\log|\sigma|^2$ локально интегрируема на M, и предложение (1.1) в глобальной форме выглядит так:

(1.14) Предложение. *На M имеет место уравнение в потоках*

$$dd^c\log|\sigma|^2=D-\omega.$$

Доказательство. Утверждение следует непосредственно из (0.1), (0.2) и (1.1).

Это предложение утверждает, что D и ω когомологичны. Точнее, мы можем рассматривать когомологии *комплекса потоков*

$$\ldots\to C^r(M)\xrightarrow{d}C^{r+1}(M)\to\ldots$$

по аналогии с когомологиями де Рама, возникающими из комплекса C^∞-форм

$$\ldots\to A^r(M)\xrightarrow{d}A^{r+1}(M)\to\ldots.$$

Стандартные рассуждения, использующие сглаживание потоков, показывают, что

$$H^*_C(M,\,\mathbf{R})=H^*_{\mathrm{DR}}(M,\,\mathbf{R}),$$

а по теореме де Рама это обычные когомологии. Таким образом, предложение утверждает, что класс когомологий дивизора D есть $c(L)\in H^2(M,\,\mathbf{R})$. С другой стороны, рассматривая D как цепь, это можно сформулировать так: класс гомологий в $H_{2n-2}(M,\,\mathbf{R})$, представляемый дивизором D, является двойственным по Пуанкаре классу Чжэня $c(L)$.

Так как пересечение в гомологиях двойственно $\cup$-произведению в когомологиях (внешнему произведению в когомологиях де Рама), то следующее предложение не является неожиданным.

(1.15) Предложение. *Если $\sigma_1,\ldots,\sigma_r$ — голоморфные сечения линейного расслоения $L\to M$ с формой кривизны ω и если дивизоры D_{σ_i} пересекаются по множеству комплексной коразмерности r, то справедливо уравнение в потоках*

$$\omega^r-D_{\sigma_1}\cdot D_{\sigma_2}\ldots D_{\sigma_r}=dd^c\Lambda,$$

где Λ — локально интегрируемая форма

$$\Lambda=\log\frac{1}{\|\sigma\|^2}\sum_{k=0}^{r-1}\omega_0^{r-1-k}\wedge\omega^k$$

и $\omega_0=\omega+dd^c\log\|\sigma\|^2=\omega+dd^c\left(\log\sum_{j=1}^r|\sigma_j|^2\right)$. Кроме того, если $\omega\geqslant0$ и $\|\sigma\|\leqslant1$, то $\Lambda\geqslant0$.

Доказательство. Если σ_j в локальных координатах задаются функциями s_j, а метрика — функцией a_α, то $\|\sigma\|^2=(1/a_\alpha)\times(|s_1|^2+\ldots+|s_r|^2)$. Таким образом, локально $\omega_0^\rho=s^*\theta_\rho$; кроме того, $\log\|\sigma\|^{-2}=\log a_\alpha-\log\|s\|^2$. В этих координатах по предложению (1.10) имеем $s^*\theta_{r-k}=dd^cs^*\Theta_{r-1-k}$, $dd^c(s^*\Theta_{r-1})=D_{\sigma1}\ldots D_{\sigma r}$ и, значит,

$$dd^c\Lambda=\sum_{k=0}^{r-1}(s^*\theta_{r-1-k}\wedge\omega^{k+1}-dd^c(s^*\Theta_{r-1-k}\wedge\omega^k))=\omega^r-D_{\sigma_1}\ldots D_{\sigma_r}.$$

Так как $s^*\theta_l\geqslant0$, то из $\omega\geqslant0$ и $\log\|\sigma\|^{-2}\geqslant0$ вытекает, что $\Lambda\geqslant0$.

(d) ЧИСЛА ЛЕЛОНА

Пусть U — открытое множество в $\mathbf{C}^n$, содержащее замкнутый шар $\mathbf{C}^n[R]$ радиуса R с центром в 0. Мы сохраним прежнее обозначение

$$\theta_l=(dd^c\log\|z\|^2)^l$$

и положим

$$\varphi_l=(dd^c\|z\|^2)^l.$$

Допустим, что $Z \subset U$ — аналитическое множество размерности k, и положим $Z[r] = Z \cap \mathbf{C}^n[r]$ и $Z[r, R] = Z[R] \setminus Z[r]$ для $r < R$. Тогда $2k$-мерный объем $Z[r]$ равен

$$v(Z, r) = \int_{Z[r]} \varphi_k.$$

(1.16) Лемма. *Объем $v(Z, r)$ удовлетворяет соотношению*

$$\int_{Z[r, R]} \theta_k = \frac{v(Z, R)}{R^{2k}} - \frac{v(Z, r)}{r^{2k}}.$$

Доказательство. Простые вычисления показывают, что

$$d^c \log \|z\|^2 \wedge \theta_{k-1} = \frac{d^c \|z\|^2 \wedge \varphi_{k-1}}{\|z\|^{2k}} + d\|z\|^2 \wedge \lambda,$$

где λ — некоторая форма. Замечая, что $\theta_k = d(d^c \log \|z\|^2 \wedge \theta_{k-1})$, и применяя теорему Стокса, получаем, что

$$\int_{Z[r, R]} \theta_k = \int_{\partial Z[r, R]} d^c \log \|z\|^2 \wedge \theta_{k-1} = \int_{\partial Z[R]} \frac{d^c \|z\|^2 \wedge \varphi_{k-1}}{\|z\|^{2k}} - \int_{\partial Z[r]} \frac{d^c \|z\|^2 \wedge \varphi_{k-1}}{\|z\|^{2k}},$$

так как сужение $d\|z\|^2$ на $\partial Z[r]$ равно нулю. Но $\|z\|^{2k} = R^{2k}$ на $\partial Z[R]$ и т. д., поэтому

$$\int_{Z[r, R]} \theta_k = \frac{1}{R^{2k}} \int_{\partial Z[R]} d^c \|z\|^2 \wedge \varphi_{k-1} - \frac{1}{r^{2k}} \int_{\partial Z[r]} d^c \|z\|^2 \wedge \varphi_{k-1} = \frac{1}{R^{2k}} \int_{Z[R]} \varphi_k - \frac{1}{r^{2k}} \int_{Z[r]} \varphi_k = \frac{v(Z, R)}{R^{2k}} - \frac{v(Z, r)}{r^{2k}}.$$

Замечание. Эта лемма остается верной, если вместо Z мы возьмем любой замкнутый положительный поток; см. [15].

Из леммы следует, что существует предел

$$\mathscr{L}_0(Z) = \lim_{r \to 0+} \frac{v(Z, r)}{r^{2k}};$$

он называется *числом Лелона* множества Z в точке 0. Докажем следующий результат Ти [20] и Дрейпера [8], хотя он и не очень необходим для наших целей:

(1.17) Предложение. *Число $\mathscr{L}_0(Z)$ целое, а именно это кратность Z в начале координат.*

Доказательство. Покажем сначала (примерно как в доказательстве предложения (1.10)), что для любой $\lambda \in A_c^0(U)$ выполняется соотношение

$$dd^c(Z \wedge \Theta_{k-1})(\lambda) = \mathrm{Mult}_0(Z) \cdot \lambda(0).$$

Мы снова воспользуемся раздуванием π: $\hat{\mathbf{C}}^n \to \mathbf{C}^n$ и сохраним обозначения § 1 (b). Пусть $\hat{Z}$ — замыкание множества $\pi^{-1}(Z \setminus \{0\})$. Тогда если $\pi^{-1}(0) = E \cong \mathbf{P}^{n-1}$, то пересечение $\hat{Z} \cdot E$ является касательным конусом Зариского, а $\mathrm{Mult}_0(Z)$ есть степень $\hat{Z} \cdot E$ в $E \cong \mathbf{P}^{n-1}$, которая в свою очередь равна $\int_{\hat{Z} \cdot E} \rho^* \omega^{k-1}$.

Согласно (1.12) и предложению (1.1), мы имеем

$$\int_Z \Theta_{k-1} \wedge dd^c \lambda = \int_{\hat{Z}} \log \|z\|^2 \, dd^c(\pi^* \lambda \rho^* \omega^{k-1}) = \int_{\hat{Z} \cdot E} \pi^* \lambda \rho^* \omega^{k-1} = \lambda(0) \int_{\hat{Z} \cdot E} \rho^* \omega^{k-1}.$$

С другой стороны, если $\lambda \equiv 1$ для малых r, то

$$dd^c(Z \wedge \Theta_{k-1})(\lambda) = \lim_{r \to 0+} \int_{Z \setminus Z[r]} \Theta_{k-1} \wedge dd^c \lambda$$

($d^c \lambda = 0$ для малых r), а интеграл справа по теореме Стокса равен

$$-\int_{Z \setminus Z[r]} d\Theta_{k-1} \wedge d^c \lambda = \int_{Z \setminus Z[r]} d^c \Theta_{k-1} \wedge d\lambda = -\int_{Z \setminus Z[r]} d(\lambda d^c \Theta_{k-1}) = \int_{\partial Z[r]} \lambda d^c \Theta_{k-1} = \frac{1}{r^{2k}} \int_{\partial Z[r]} d^c \|z\|^2 \wedge \varphi_{k-1} = \frac{1}{r^{2k}} \int_{Z[r]} \varphi_k = \frac{v(Z, r)}{r^{2k}}.$$

2. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ИСЧЕРПАНИЯ НА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

(a) ОПРЕДЕЛЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ

Пусть M — комплексное многообразие размерности m. Мы будем говорить, что функция τ: $M \to [-\infty, +\infty)$ имеет *логарифмическую особенность* в точке $z_0 \in M$, если в подходящей координатной системе $(z_1, \ldots, z_m)$ в окрестности z_0

$$\tau(z) = \log \|z\| + r(z),$$

где $r(z)$ — функция класса C^∞. *Функция исчерпания* — это функция

$$\tau\colon M \to [-\infty, +\infty),$$

бесконечно дифференцируемая вне конечного числа логарифмических особенностей и такая, что подмножества

$$M[r] = \{z \in M\colon e^{\tau(z)} \leqslant r\}$$

компактны для всех $r \in [0, +\infty)$. *Критические значения* такой функции исчерпания τ — это, как обычно, те значения r, для которых $d\tau(z) = 0$ в некоторой точке $z \in \partial M[r] = \{z\colon \tau(z) = r\}$. Если r не является критическим значением, то множество уровня $\partial M[r]$ является C^∞-гиперповерхностью в M. Через $T_z^{(1,0)}(\partial M[r])$ мы будем обозначать комплексное касательное пространство к $\partial M[r]$ в точке z.

Определение. *Специальная функция исчерпания* — это функция исчерпания $\tau\colon M \to [-\infty, +\infty)$, которая имеет лишь конечное число критических значений и для которой *форма Леви* $dd^c\tau$ удовлетворяет условиям ($m = \dim_{\mathbf{C}} M$):

$$(2.1)\qquad \begin{cases} dd^c\tau \geqslant 0, \\ (dd^c\tau)^{m-1} \not\equiv 0 \text{ на } T_z^{(1,0)}(\partial M[r]), \\ (dd^c\tau)^m = 0. \end{cases}$$

Примеры. (i) Пусть M — аффинная алгебраическая кривая. Тогда $M = \bar{M} \setminus \{z_1, \ldots, z_N\}$, где $\bar{M}$ — компактная риманова поверхность. Для данной фиксированной точки $z_0 \in M$ мы можем подобрать гармонические на $\bar{M}$ функции τ_α, $\alpha = 1, \ldots, N$, с изолированными особенностями, такие, что

$$\tau_\alpha \sim \log|z - z_0| \text{ в окрестности } z_0,$$
$$\tau_\alpha \sim -\log|z - z_\alpha| \text{ в окрестности } z_\alpha,$$

где в каждом случае z — локальная голоморфная координата. Сумма $\tau = \sum_{\alpha=1}^{N} \tau_\alpha$ дает специальную функцию исчерпания (а именно, *функцию гармонического исчерпания*) для M.

(ii) В $\mathbf{C}^m$ с комплексными координатами $(z_1, \ldots, z_m)$ в качестве специальной функции исчерпания можно взять $\tau = \log\|z\|$. Объясним это из геометрических соображений, следуя в какой-то мере доказательству предложения (1.10).

Сначала заметим, что множество уровня $\partial M[r]$ есть не что иное, как сфера $\|z\| = r$ в $\mathbf{C}^m$. Тогда мы имеем обычное расслоение Хопфа

$$\pi\colon \partial M[r] \to \mathbf{P}^{m-1}$$

сферы $\partial M[r]$ над проективным пространством комплексных прямых, проходящих через начало координат в $\mathbf{C}^m$. Дифференциал

$$(2.2)\qquad \pi_*\colon T_z^{(1,0)}(\partial M[r]) \to T_{\pi(z)}^{(1,0)}(\mathbf{P}^{m-1})$$

является изоморфизмом, а форма Леви удовлетворяет условию

$$(2.3)\qquad 2dd^c \log\|z\| = \pi^*(\omega),$$

где ω есть (1, 1)-форма, соответствующая метрике Фубини — Штуди в $\mathbf{P}^{m-1}$. Из (2.3) следует, что $dd^c \log\|z\| \geqslant 0$ и $(dd^c \log\|z\|)^m = 0$, а из (2.2) следует, что форма $(dd^c \log\|z\|)^{m-1}$ положительна на $T_z^{(1,0)}(\partial M[r])$. Следовательно, $\log\|z\|$ — специальная функция исчерпания в $\mathbf{C}^m$.

(b) КОНСТРУКЦИЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ИСЧЕРПАНИЯ

Два рассмотренных выше примера объединяются в следующем утверждении:

(2.4) Предложение. *Пусть A — гладкое аффинное алгебраическое многообразие. Тогда на A существует специальная функция исчерпания τ.*

Доказательство использует разрешение особенностей и проводится в два шага.

Шаг 1. Сначала мы несколько по-другому опишем функцию исчерпания в $\mathbf{C}^{n+1}$, определенную в примере (ii).

Пусть $\mathbf{P}^n$ — комплексное проективное пространство и $H \xrightarrow{\pi} \mathbf{P}^n$ — стандартное положительное линейное расслоение. Тогда существуют специальные голоморфные сечения $\sigma_0, \ldots, \sigma_n$ расслоения $H \to \mathbf{P}^n$, такие, что соответствующее отображение

$$[\sigma_0, \ldots, \sigma_n]\colon \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$$

просто тождественно. С другой стороны, индуцированное расслоение

$$\pi^*H \to H$$

имеет тавтологическое сечение ζ, множество нулей которого ($\zeta = 0$) определяет вложение $\mathbf{P}^n$ в H как нулевого сечения. Отображение

$$[\pi^*\sigma_0, \ldots, \pi^*\sigma_n;\ \zeta]\colon H \to \mathbf{P}^{n+1}$$

является вложением H в $\mathbf{P}^{n+1}$, причем нулевое сечение $\mathbf{P}^n$ расслоения H переходит в гиперплоскость, которая в однородных координатах $[\xi_0, \ldots, \xi_{n+1}]$ пространства $\mathbf{P}^{n+1}$ задается уравнением $\xi_{n+1} = 0$. Образ H совпадает с дополнением к точке $\xi = [0, \ldots, 0, 1]$ в $\mathbf{P}^{n+1}$, а расслоение $H \to \mathbf{P}^n$ геометрически есть просто проекция из этой точки на гиперплоскость $\xi_{n+1} = 0$ в $\mathbf{P}^{n+1}$.

Метрика в $\mathbf{C}^{n+1}$ индуцирует метрику в $H \xrightarrow{\pi} \mathbf{P}^n$, форма кривизны которой $c(H)$ есть обычная кэлерова форма ω в $\mathbf{P}^n$. Эта метрика в свою очередь индуцирует метрику в $\pi^*H \to H$, и мы рассмотрим на $H \setminus \mathbf{P}^n$ функцию

$$\tau_0 = -\log|\zeta|,$$

где ζ — указанное выше сечение. Множества уровня $\{z \in H\colon \tau_0(z) = r\}$ совпадают с границами трубчатых окрестностей нулевого

сечения $\mathbf{P}^n$ в H. Пользуясь вложением $H \hookrightarrow \mathbf{P}^{n+1}$, мы видим, что τ_0 задает специальную функцию исчерпания на $\mathbf{P}^{n+1} \setminus \mathbf{P}^n = \mathbf{C}^{n+1}$. На самом деле это та же функция исчерпания, которая была построена выше в примере (ii), только теперь мы ее рассмотрели с точки зрения бесконечно удаленной гиперплоскости в $\mathbf{C}^{n+1}$. Выделенная точка ξ — это как раз начало координат в $\mathbf{C}^{n+1}$.

Шаг 2. Пусть $\bar{A}$ обозначает гладкое пополнение A, удовлетворяющее следующим условиям: (i) $\bar{A}$ — гладкое проективное многообразие, (ii) $D_\infty = \bar{A} \setminus A$ — дивизор с нормальными самопересечениями на $\bar{A}$ и (iii) существует проективное вложение $\bar{A} \hookrightarrow \mathbf{P}^N$, такое, что $D_\infty = \bar{A} \cap \mathbf{P}^{N-1}$ совпадает с гиперплоским сечением $\bar{A}$ (*без учета* кратностей). Такое вложение существует, согласно [12], при условии, что A — аффинное многообразие [1]).

Предположим, что $\dim_{\mathbf{C}} A = m$, и выберем линейное подпространство $\mathbf{P}^{N-m-1}$ в $\mathbf{P}^N$, которое лежит в гиперплоскости $\mathbf{P}^{N-1}$ и не пересекается с $\bar{A}$. Выбирая пространство $\mathbf{P}^m$ так, чтобы оно не пересекало $\mathbf{P}^{N-m-1}$, рассмотрим проекции

$$\begin{array}{ccccc} \bar{A} \hookrightarrow \mathbf{P}^N \setminus \mathbf{P}^{N-m-1} & \hookleftarrow & \mathbf{P}^{N-1} \setminus \mathbf{P}^{N-m-1} & & \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathbf{P}^m & = & \mathbf{P}^m & \hookleftarrow & \mathbf{P}^{m-1} \end{array} \tag{2.5}$$

Тогда $\pi^{-1}(\mathbf{P}^{m-1}) \cap \bar{A} = D_\infty$ и, значит, (2.5) индуцирует конечнолистное разветвленное накрывающее отображение

$$\pi\colon A \to \mathbf{C}^m, \tag{2.6}$$

где $\mathbf{C}^m = \mathbf{P}^m \setminus \mathbf{P}^{m-1}$. Положим $\tau = \tau_0 \circ \pi$, где функция τ_0 была построена на первом шаге. Из обсуждавшейся там геометрической картины, а также из примера (ii) мы видим, что для τ все множества $A[r]$ компактны и что выполняются условия (2.1) на форму Леви. Остается показать, что τ имеет лишь конечное число критических значений; это сразу не очевидно, так как множество ветвлений отображения (2.6) простирается в бесконечность, если $m > 1$.

Проведем локальный анализ в окрестности бесконечности. Пусть $L \to \bar{A}$ есть прообраз $\pi^* H$ в (2.5). Возьмем в L метрику, индуцированную метрикой в H, и рассмотрим сечение $\zeta \in H^0(\bar{A}, \mathcal{O}(L))$, определяющее дивизор D_∞ на $\bar{A}$. Тогда $\tau = -\log|\zeta|$ в окрестности D_∞ на $\bar{A}$.

Выберем голоморфные координаты $w_1, \ldots, w_m$ в окрестности какой-нибудь точки на D_∞, такие, что

$$\zeta = w_1^{\alpha_1} \ldots w_k^{\alpha_k}.$$

[1]) Описанное пополнение и есть разрешение особенностей, о котором говорилось выше. — *Прим. ред.*

Тогда

$$\tau = -\sum_{\mu=1}^{k} \alpha_\mu \log|w_\mu| + \rho(w), \tag{2.7}$$

где $\rho(w)$ — функция класса C^∞. Из (2.7) мы получаем, что

$$\partial\tau = -\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{k} \alpha_\mu \frac{dw_\mu}{w_\mu} + \partial\rho,$$

а отсюда следует, что $d\tau \neq 0$ при $\|w\| < \varepsilon$. Используя компактность D_∞, мы видим, что $d\tau \neq 0$ вне некоторого компактного подмножества A.

(c) НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРОЕКЦИИ (2.5)

Для гладкого алгебраического многообразия A размерности m мы построили алгебраическое разветвленное накрытие

$$A \xrightarrow{\pi} \mathbf{C}^m, \tag{2.8}$$

такое, что $\tau = \log\|\pi(x)\|$ является специальной функцией исчерпания на A. Можно считать, что π не разветвлено над началом координат и, значит,

$$\pi^{-1}(0) = \{x_1, \ldots, x_d\} \quad (d - \text{степень } A),$$

где $x_1, \ldots, x_d$ — логарифмические особенности τ. Перечислим некоторые свойства накрытия (2.8).

Пусть $\Phi = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{i}{2\pi} dz_j \wedge d\bar{z}_j\right)$ — форма евклидова объема в $\mathbf{C}^m$ и $\Phi_\pi = \pi^*\Phi$ — прообраз Φ на A. Рассмотрим на A всюду положительную C^∞-форму объема Ω и положим $\Omega = \zeta\Phi_\pi$, где $\zeta \geqslant 0$ на A и $\log\zeta \in L^1(\mathrm{loc}, A)$.

(2.9) Лемма. *Имеет место уравнение в потоках*

$$dd^c \log\zeta = \mathrm{Ric}\,\Omega - B,$$

где $\mathrm{Ric}\,\Omega$ *— форма Риччи для объема* Ω *и* B *— множество ветвлений проекции* (2.8).

Доказательство. Пользуясь локальными голоморфными координатами $w_1, \ldots, w_m$ на A, мы получим соотношения

$$\Phi_\pi = |j(w)|^2 \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{i}{2} dw_k \wedge d\bar{w}_k\right),$$

$$\Omega = a(w) \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{i}{2} dw_k \wedge d\bar{w}_k\right),$$

где $f(w)=0$ — локальное уравнение B и $a(w)>0$ — коэффициент формы Ω. Отсюда следует, что

$$\zeta=\frac{a(w)}{|f(w)|^2},$$

а тогда, используя формулу Пуанкаре (1.2), мы получаем, что

$$dd^c\log\zeta=dd^c\log a-B$$

в смысле потоков.

Для доказательства следующего свойства проекции (2.8) нам нужна

(2.10) Лемма. *Пусть Z есть k-мерное аналитическое подмножество $\mathbf{C}^n$, для которого в бесконечно удаленной гиперплоскости $\mathbf{P}^{n-1}\subset\mathbf{P}^n$ найдется такое $\mathbf{P}^{n-k-1}$, что $\bar{Z}\cap\mathbf{P}^{n-k-1}=\emptyset$. Тогда Z — алгебраическое множество.*

Доказательство. Предположим сначала, что $k=n-1$; тогда $Z\subset\mathbf{C}^n$ — гиперповерхность, а в «бесконечности» $\mathbf{P}^n\setminus\mathbf{C}^n$ найдется точка ξ, не принадлежащая $\bar{Z}$ (замыканию в $\mathbf{P}^n$). Проекция $\mathbf{P}^n\setminus\{\xi\}\xrightarrow{\pi}\mathbf{P}^{n-1}$ определяет стандартное положительное линейное расслоение $H\xrightarrow{\pi}\mathbf{P}^{n-1}$ (см. шаг 1 в доказательстве предложения (2.4)). Сужение $Z\xrightarrow{\pi}\mathbf{P}^{n-1}$ является собственным отображением и определяет d-листное аналитическое накрытие $Z\xrightarrow{\pi}\mathbf{C}^{n-1}$. Таким образом,

$$\pi^{-1}(z)=\{\sigma_1(z),\ \dots,\ \sigma_d(z)\},$$

где $\sigma_r(z)$ — многозначные голоморфные сечения расслоения $H\xrightarrow{\pi}\mathbf{C}^{n-1}$. Каждую однородную симметрическую функцию от $\sigma_r(z)$, скажем

$$\sigma_1(z)\dots\sigma_d(z),$$

можно рассматривать как (однозначное) голоморфное сечение $\zeta(z)$ расслоения $H^b\xrightarrow{\pi}\mathbf{C}^{n-1}$ для подходящего b. Кроме того, в окрестности $\mathbf{P}^{n-2}$, рассматриваемой как бесконечность в $\mathbf{C}^{n-1}$, сечение $\zeta(z)$ локально определяется *ограниченной* голоморфной функцией, определенной в проколотом поликруге. По теореме Римана об устранении особенностей, каждая такая $\zeta(z)$ голоморфно продолжается в этот поликруг и поэтому является (глобальным) голоморфным сечением расслоения $H^b\xrightarrow{\pi}\mathbf{P}^{n-1}$. Голоморфные сечения расслоения $H^b\xrightarrow{\pi}\mathbf{P}^{n-1}$ задаются (фактически по определению) голоморфными функциями $F_\zeta(z)$ на $\mathbf{C}^n\setminus\{0\}$, удовлетворяющими условию

$$F_\zeta(\lambda z)=\lambda^b F_\zeta(z),\quad\lambda\in\mathbf{C}.$$

По теореме Хартогса об устранении компактных особенностей, F_ζ продолжается до функции, голоморфной в $\mathbf{C}^n$, а она является многочленом степени b в силу условия однородности. Таким образом, любая рассматриваемая функция ζ алгебраическая, а отсюда следует, что и Z — алгебраическое множество: в самом деле, для каждой такой ζ множество Z удовлетворяет полиномиальному уравнению

$$\xi_n^b=F_\zeta(\xi_0,\ \dots,\ \xi_{n-1}).$$

В общем случае диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} Z\subset\bar{Z}\subset\mathbf{P}^n & \setminus & \mathbf{P}^{n-k-1} \\ \downarrow\quad\downarrow & & \downarrow\pi \\ \mathbf{C}^k\subset\mathbf{P}^k & = & \mathbf{P}^k \end{array}$$

задает векторное расслоение $E\to\mathbf{P}^k$, для которого Z можно рассматривать как многозначное сечение над $\mathbf{C}^k\subset\mathbf{P}^k$. Выбирая координаты так, что π задается отображением

$$[\xi_0,\ \dots,\ \xi_n]\to[\xi_0,\ \dots,\ \xi_k],$$

мы получаем изоморфизм

$$E\cong\underbrace{H\oplus\dots\oplus H}_{n-k}.$$

Используя это, мы можем повторить приведенные выше рассуждения и для любой точки $a\in\mathbf{P}^n\setminus\bar{Z}$ найти однородный многочлен $P(\xi_0,\ \dots,\ \xi_n)$, такой, что $P(\xi)=0$ на $\bar{Z}$, но $P(a)\neq0$. Этот многочлен будет сечением некоторой симметрической степени π^*E.

Можно действовать и по-другому. Заметим, что для произвольного $\mathbf{P}^{n-1}\subset\mathbf{P}^n$ найдется открытое множество U на бесконечно удаленной гиперплоскости, такое, что если рассмотреть проекцию $\pi_x\colon\mathbf{P}^n\setminus\{x\}\to\mathbf{P}^{n-1}$ из любой точки $x\in U$, то множество $\pi_x(Z)\subset\overline{\pi_x(Z)}\subset\mathbf{P}^{n-1}\setminus\pi(\mathbf{P}^{n-k-1})$ будет удовлетворять условиям леммы. Таким образом, индукцией по коразмерности Z мы получаем, что множество $\pi_x^{-1}(\pi_x(Z))$ является алгебраическим и Z принадлежит алгебраическому множеству $\bigcap_{x\in U}\pi_x^{-1}(\pi_x(Z))$. На самом деле эти два множества равны, так как если $y\in\mathbf{C}^n\setminus Z$, то множество тех точек $x\in U$, для которых $\pi_x(y)\in\pi_x(Z)$, имеет размерность, равную размерности Z, а она меньше размерности U. Поэтому $Z=\bigcap_{x\in U}\pi_x^{-1}(\pi_x(Z))$ — алгебраическое множество.

Следствие (теорема Чжоу). *Всякое аналитическое множество в $\mathbf{P}^n$ определяется системой полиномиальных уравнений и поэтому является алгебраическим.*

Замечание. Приведенное выше доказательство использует только теорему об устранении особенностей и теорему Хартогса, а потому является элементарным и достаточно простым.

Вернемся теперь к конечнократной алгебраической проекции $A \xrightarrow{\pi} \mathbf{C}^m$ из (2.8). Пусть $Z \subset A$ есть аналитическое подмножество и $\pi(Z)$ — его проекция в $\mathbf{C}^m$.

(2.11) Лемма. *Z является алгебраическим подмножеством A тогда и только тогда, когда $\pi(Z)$ — алгебраическое подмножество $\mathbf{C}^m$.*

Доказательство. Достаточно предположить, что $\pi(Z)$ алгебраическое, и доказать, что тогда и Z алгебраическое [1]). По предположению существует линейное подпространство $\mathbf{P}^{m-k-1} \subset \mathbf{P}^{m-1} = \mathbf{P}^m \setminus \mathbf{C}^m$, такое, что $\overline{\pi(Z)} \cap \mathbf{P}^{m-k-1} = \emptyset$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A & \subset \mathbf{P}^N \setminus & \mathbf{P}^{N-m-1} \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi \\ \mathbf{C}^m & \subset & \mathbf{P}^m \end{array}$$

Из нее следует, что $\overline{\pi^{-1}(\mathbf{P}^{m-k-1})}$ — это $\mathbf{P}^{N-k-1}$ в $\mathbf{P}^N \setminus \mathbf{C}^N$, такое, что $\bar{Z} \cap \mathbf{P}^{N-k-1} = \emptyset$. А тогда по лемме (2.10) Z — алгебраическое множество.

3. НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

(a) ТЕОРЕМА ЙЕНСЕНА

Пусть M — комплексное m-мерное многообразие с функцией исчерпания $\tau\colon M \to [-\infty, +\infty)$. Введем обозначение $M[r] = \{x \in M\colon \tau(x) \leqslant \log r\}$ и выберем r_0 настолько большим, что все критические значения $\tau(x)$ лежат в интервале $[-\infty, \log r_0)$. Будем предполагать, что форма Леви функции τ удовлетворяет условию

$$\psi = dd^c\tau \geqslant 0.$$

Пусть D — дивизор на M и $D[r] = D \cap M[r]$. Если D не проходит ни через одну логарифмическую особенность τ, то мы полагаем по определению

$$(3.1)\qquad \begin{cases} n(D, t) = \int\limits_{D[t]} \psi^{m-1}, \\ N(D, r) = \int\limits_0^r n(D, t)\frac{dt}{t} \quad (\textit{считающая функция}). \end{cases}$$

[1]) Здесь используется теорема Реммерта о сохранении аналитических множеств при собственных отображениях; см. Ганнинг и Росси [10*]. — *Прим. ред.*

Если D проходит через некоторые логарифмические особенности τ, то формулы (3.1) надо подправить с использованием чисел Лелона, как это обсуждалось в § 1 (d). Мы будем предполагать, что это проделано в каждом нужном случае.

(3.2) Предложение (теорема Йенсена). *Пусть α — мероморфная функция на M с дивизором D. Тогда*

$$N(D, r) = \int\limits_{\partial M[r]} \log|\alpha|^2\eta + \int\limits_{M[r]} \log\frac{1}{|\alpha|^2}\psi^m + O(1) \quad (r \geqslant r_0),$$

где $\eta = d^c\tau \wedge \psi^{m-1} \geqslant 0$ на $\partial M[r]$ и слагаемое

$$O(1) = N(D, r_0) + \int\limits_{M[r_0]} \log\frac{1}{|\alpha|^2}\psi^m - \int\limits_{\partial M[r_0]} \log|\alpha|^2\eta$$

зависит от D, но не зависит от r.

Доказательство. Вспомним формулу Пуанкаре (1.2), возьмем в ней $X = M$ и получим равенство в потоках

$$dd^c \log|\alpha|^2 = D.$$

Пусть γ_t — характеристическая функция множества $M[t]$. Так как поток $d^c \log|\alpha|^2$ является мерой Радона, то определен поток $d^c \log|\alpha|^2 \wedge \gamma_t$. Мы утверждаем, что

$$(3.3)\qquad d(d^c \log|\alpha|^2 \wedge \gamma_t) = D \wedge \gamma_t - \partial M[t] \wedge d^c \log|\alpha|^2.$$

Согласно равенству (1.2) или обычной теореме Стокса, это, очевидно, так в окрестности произвольной точки $x \notin D \cap \partial M[t]$. Как и в доказательстве предложения (1.1), для проверки этого равенства на $D \cap \partial M[t]$ есть два пути. Один путь — заметить, что это плоские потоки размерности $2m-2$ в смысле Федерера. Так как они различаются лишь на множестве $D \cap \partial M[t]$ действительной размерности $2m-3$, то они равны (см. [13]).

Другой путь — метод, использованный при доказательстве предложения (1.10). В нашем случае в плохих точках удобнее раздувать начало координат, вклеивая туда действительную сферу, а не комплексное проективное пространство. Таким образом получится некоторое множество $\hat{\Gamma}$, действительно аналитическое с границей, и проекция $\pi\colon \hat{\Gamma} \to M$, такая, что форма $\pi^*(d^c \log|\alpha|^2)$ гладкая. Из обычной теоремы Стокса равенство (3.3) получается для форм, поднятых на $\hat{\Gamma}$, а отсюда следует, что это равенство справедливо в общем случае (см. (1.13) и доказательство предложения (1.10)). Применим теперь потоки, фигурирующие в равенстве (3.3), к форме ψ^{m-1}, заменяя γ_t на $\gamma_t - \gamma_{r_0}$. Тогда

$$(3.4)\qquad \int\limits_{D[t]} \psi^{m-1} = \int\limits_{\partial M[t]} d^c \log|\alpha|^2 \wedge \psi^{m-1},$$

Замечание. Приведенное выше доказательство использует только теорему об устранении особенностей и теорему Хартогса, а потому является элементарным и достаточно простым.

Вернемся теперь к конечнократной алгебраической проекции $A \xrightarrow{\pi} \mathbf{C}^m$ из (2.8). Пусть $Z \subset A$ есть аналитическое подмножество и $\pi(Z)$ — его проекция в $\mathbf{C}^m$.

(2.11) Лемма. *Z является алгебраическим подмножеством A тогда и только тогда, когда $\pi(Z)$ — алгебраическое подмножество $\mathbf{C}^m$.*

Доказательство. Достаточно предположить, что $\pi(Z)$ алгебраическое, и доказать, что тогда и Z алгебраическое[1]). По предположению существует линейное подпространство $\mathbf{P}^{m-k-1} \subset \mathbf{P}^{m-1} = \mathbf{P}^m \setminus \mathbf{C}^m$, такое, что $\overline{\pi(Z)} \cap \mathbf{P}^{m-k-1} = \emptyset$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A & \subset & \mathbf{P}^N \setminus \mathbf{P}^{N-m-1} \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi \\ \mathbf{C}^m & \subset & \mathbf{P}^m \end{array}$$

Из нее следует, что $\overline{\pi^{-1}(\mathbf{P}^{m-k-1})}$ — это $\mathbf{P}^{N-k-1}$ в $\mathbf{P}^N \setminus \mathbf{C}^N$, такое, что $\bar{Z} \cap \mathbf{P}^{N-k-1} = \emptyset$. А тогда по лемме (2.10) Z — алгебраическое множество.

3. НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

(a) ТЕОРЕМА ЙЕНСЕНА

Пусть M — комплексное m-мерное многообразие с функцией исчерпания $\tau: M \to [-\infty, +\infty)$. Введем обозначение $M[r] = \{x \in M: \tau(x) \leqslant \log r\}$ и выберем r_0 настолько большим, что все критические значения $\tau(x)$ лежат в интервале $[-\infty, \log r_0)$. Будем предполагать, что форма Леви функции τ удовлетворяет условию

$$\psi = dd^c\tau \geqslant 0.$$

Пусть D — дивизор на M и $D[r] = D \cap M[r]$. Если D не проходит ни через одну логарифмическую особенность τ, то мы полагаем по определению

$$(3.1)\quad \begin{cases} n(D, t) = \int\limits_{D[t]} \psi^{m-1}, \\ N(D, r) = \int\limits_0^r n(D, t)\frac{dt}{t} \quad \textit{(считающая функция)}. \end{cases}$$

[1]) Здесь используется теорема Реммерта о сохранении аналитических множеств при собственных отображениях; см. Ганнинг и Росси [10*]. — *Прим. ред.*

Если D проходит через некоторые логарифмические особенности τ, то формулы (3.1) надо подправить с использованием чисел Лелона, как это обсуждалось в § 1 (d). Мы будем предполагать, что это проделано в каждом нужном случае.

(3.2) Предложение (теорема Йенсена). *Пусть α — мероморфная функция на M с дивизором D. Тогда*

$$N(D, r) = \int\limits_{\partial M[r]} \log|\alpha|^2\eta + \int\limits_{M[r]} \log\frac{1}{|\alpha|^2}\psi^m + O(1) \quad (r \geqslant r_0),$$

где $\eta = d^c\tau \wedge \psi^{m-1} \geqslant 0$ на $\partial M[r]$ и слагаемое

$$O(1) = N(D, r_0) + \int\limits_{M[r_0]} \log\frac{1}{|\alpha|^2}\psi^m - \int\limits_{\partial M[r_0]} \log|\alpha|^2\eta$$

зависит от D, но не зависит от r.

Доказательство. Вспомним формулу Пуанкаре (1.2), возьмем в ней $X = M$ и получим равенство в потоках

$$dd^c \log|\alpha|^2 = D.$$

Пусть γ_t — характеристическая функция множества $M[t]$. Так как поток $d^c \log|\alpha|^2$ является мерой Радона, то определен поток $d^c \log|\alpha|^2 \wedge \gamma_t$. Мы утверждаем, что

$$(3.3)\quad d(d^c \log|\alpha|^2 \wedge \gamma_t) = D \wedge \gamma_t - \partial M[t] \wedge d^c \log|\alpha|^2.$$

Согласно равенству (1.2) или обычной теореме Стокса, это, очевидно, так в окрестности произвольной точки $x \notin D \cap \partial M[t]$. Как и в доказательстве предложения (1.1), для проверки этого равенства на $D \cap \partial M[t]$ есть два пути. Один путь — заметить, что это плоские потоки размерности $2m-2$ в смысле Федерера. Так как они различаются лишь на множестве $D \cap \partial M[t]$ действительной размерности $2m-3$, то они равны (см. [13]).

Другой путь — метод, использованный при доказательстве предложения (1.10). В нашем случае в плохих точках удобнее раздувать начало координат, вклеивая туда действительную сферу, а не комплексное проективное пространство. Таким образом получится некоторое множество $\hat{\Gamma}$, действительно аналитическое с границей, и проекция $\pi: \hat{\Gamma} \to M$, такая, что форма $\pi^*(d^c \log|\alpha|^2)$ гладкая. Из обычной теоремы Стокса равенство (3.3) получается для форм, поднятых на $\hat{\Gamma}$, а отсюда следует, что это равенство справедливо в общем случае (см. (1.13) и доказательство предложения (1.10)). Применим теперь потоки, фигурирующие в равенстве (3.3), к форме ψ^{m-1}, заменяя γ_t на $\gamma_t - \gamma_{r_0}$. Тогда

$$(3.4)\quad \int\limits_{D[t]} \psi^{m-1} = \int\limits_{\partial M[t]} d^c \log|\alpha|^2 \wedge \psi^{m-1},$$

так как $d\psi^{m-1}=0$ (надо проверить также, что предельное слагаемое, возникающее при применении формулы Стокса к (3.3) из-за логарифмических особенностей τ, равно нулю). В (3.4) мы предполагаем, что D не проходит через логарифмические особенности τ и что $\log t$ не является критическим значением τ. Как уже упоминалось, первое из этих ограничений можно устранить, используя числа Лелона.

Теперь проинтегрируем (3.4) относительно dt/t от r_0 до r, применим теорему Фубини и получим, что

$$N(D, r)=\int_{M[r_0, r]} d\tau\wedge d^c\log|\alpha|^2\wedge\psi^{m-1}+O(1). \tag{3.5}$$

Пользуясь соотношением

$$d\tau\wedge d^c\log|\alpha|^2\wedge\psi^{m-1}=d(\log|\alpha|^2\eta)-\log|\alpha|^2\psi^m$$

и применяя к правой части (3.5) теорему Стокса, мы получаем теорему Йенсена. ■

Предположим теперь, что функция α голоморфна, т. е. $\alpha\in\mathscr{O}(M)$, и положим по определению

$$M_\alpha(r)=\max_{x\in M[r]}\log|\alpha(x)|^2.$$

Из (3.2) мы получаем оценку

$$N(D, r)\leqslant M_\alpha(r)\left(\int_{\partial M[r]}\eta\right)+\int_{M[r]}\log\frac{1}{|\alpha|^2}\psi^m+O(1). \tag{3.6}$$

В общем случае это неравенство не представляется особенно полезным, поскольку нули α дают положительный вклад в слагаемое $\int_{M[r]}\log\frac{1}{|\alpha|^2}\psi^m$ справа. Однако если τ — *специальная* функция исчерпания, определенная в § 2, то $\psi^m=0$, а $\int_{\partial M[r]}\eta$ есть константа, не зависящая от r. Взяв эту константу равной 1, мы увидим, что (3.6) сводится к *неравенству Неванлинны*

$$N(D, r)\leqslant M_\alpha(r)+O(1). \tag{3.7}$$

Несмотря на простое доказательство, это неравенство выражает замечательный факт: размер дивизора $\alpha=0$ можно оценить при помощи максимума модуля α. Чтобы проиллюстрировать, к каким следствиям существенно глобального характера приводит наличие специальной функции исчерпания, докажем следующее

(3.8) Предложение (теорема Сохоцкого). *Пусть M имеет специальную функцию исчерпания и α — непостоянная мероморфная функция на M. Тогда образ $\alpha(M)$ является плотным подмножеством* $\mathbf{P}^1$.

Доказательство. Предположим, что это не так; тогда, сделав подходящую дробно-линейную замену α, мы можем считать ее ограниченной голоморфной функцией с непустым дивизором $\alpha=0$, не проходящим через логарифмические особенности τ. Из (3.7) мы получаем тогда с некоторой постоянной $c>0$ неравенство

$$c\log r\leqslant N(D, r)\leqslant O(1)$$

для произвольно больших r, а это уже противоречие. ■

Замечание. Для римановой поверхности M определено понятие *параболичности* (см. Ahlfors — Sario, Riemann Surfaces, Princeton University Press, 1960, стр. 26 и 204). Далее, имеется теорема, что это свойство эквивалентно существованию на M специальной функции исчерпания в смысле § 2 (см. M. Nakai, On Evans Potential, *Proc. Japan Acad.*, 38 (1962), 624—629). Эти факты вместе с предложением (3.8), быть может, подскажут обобщение понятия параболичности на комплексные многообразия.

(b) ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ НЕВАНЛИННЫ

Пусть M — комплексное многообразие со специальной функцией исчерпания τ: $M\to[-\infty, +\infty)$. Следуя Р. Неванлинне [16], мы приведем теорему Йенсена к более симметричному виду. Пусть α — мероморфная функция на M и D_a обозначает дивизор

$$\alpha(z)=a,$$

где точка $a\in\mathbf{P}^1(=\mathbf{C}\cup\{\infty\})$. Используя обозначения

$$\log^+t=\max(\log t, 0)\ (t\geqslant 0),\quad m(\alpha, r)=\int_{\partial M[r]}\log^+\frac{1}{|\alpha|^2}\eta, \tag{3.9}$$

мы можем переписать теорему Йенсена (3.2) в виде

$$N(D_0, r)+m(\alpha, r)+O(1)=N(D_\infty, r)+m(1/\alpha, r). \tag{3.10}$$

Правая часть (3.10) обозначается через $T_0(\alpha, r)$ и называется *характеристической функцией Неванлинны* для α. Воспользовавшись неравенствами

$$\log^+(t_1t_2)\leqslant\log^+t_1+\log^+t_2,$$
$$\log^+(t_1+t_2)\leqslant\log^+t_1+\log^+t_2+\log 2,$$

мы получаем из (3.10) соотношения

$$\begin{cases} T_0(\alpha_1\alpha_2, r)\leqslant T_0(\alpha_1, r)+T_0(\alpha_2, r),\\ T_0(\alpha_1+\alpha_2, r)\leqslant T_0(\alpha_1, r)+T_0(\alpha_2, r)+O(1),\\ T_0(\alpha-a, r)=T_0(\alpha, r)+O(1),\\ T_0(1/\alpha, r)=T_0(\alpha, r)+O(1).\end{cases} \tag{3.11}$$

Из (3.11) немедленно следует

(3.12) Предложение. *Пусть* $\Lambda(r)$ *— положительная возрастающая функция от* r, *такая, что* $\lim_{r\to\infty}\Lambda(r)=+\infty$. *Тогда множество всех мероморфных на* M *функций* α, *которые при* $r\to\infty$ *удовлетворяют условию роста*

$$T_0(\alpha,\ r)=O(\Lambda(r)),$$

образует подполе $\mathscr{M}_\Lambda$ *поля* $\mathscr{M}$ *всех мероморфных функций на* M.

Все еще следуя классической теории, мы положим $N(r,\ e^{i\theta})=N(D_{e^{i\theta}},\ r)$ и докажем тождество А. Картана в случае $M=\mathbf{C}$.

(3.13) Предложение. *Характеристическая функция Неванлинны удовлетворяет соотношению*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N(r,\ e^{i\theta})\,d\theta=T_0(\alpha,\ r)+O(1).$$

Доказательство. Теорема Йенсена, примененная к функции $\alpha(z)=z-a$ на комплексной плоскости, дает

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|a-e^{i\theta}|\,d\theta=\log^+|a|, \tag{3.14}$$

включая даже предельный случай $a=\infty$. Заменяя $\alpha(z)$ на $\alpha(z)-e^{i\theta}$ и применяя (3.2), имеем

$$N(r,\ e^{i\theta})=N(D_\infty,\ r)+\int_{\partial M[r]}\log|\alpha(z)-e^{i\theta}|^2\eta(z)+O(1).$$

Интегрируя это равенство по $d\theta$ и используя (3.14), мы приходим к соотношению

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N(r,\ e^{i\theta})\,d\theta=\int_{\partial M[r]}\log^+|\alpha(z)|^2\eta(z)+N(D_\infty,\ r)+O(1).$$

Сравнивая правую часть этого соотношения с правой частью (3.10), получаем требуемое утверждение. ■

Из (3.13) следует, что $T_0(\alpha,\ r)$ является выпуклой возрастающей функцией от $\log r$; это утверждение можно рассматривать как вариант «теоремы о трех кругах».

(c) ТЕОРЕМА ЙЕНСЕНА ДЛЯ ВЕКТОРНЫХ ФУНКЦИИ

Мы по-прежнему считаем, что M — комплексное многообразие с функцией исчерпания τ: $M\to[-\infty,\ +\infty)$, для которой форма Леви $\psi=dd^c\tau\geqslant 0$. Пусть f: $M\to\mathbf{C}^n$ — голоморфное отображение,

такое, что множество $Z=f^{-1}(0)$ имеет чистую коразмерность n. Используя обозначения

$$\begin{cases} M[r]=\{z\in M:\ \tau(z)\leqslant\log r\},\\ Z[r]=Z\cap M[r],\\ n(Z,\ t)=\int\limits_{Z[t]}\psi^{m-n} \quad (m=\dim_{\mathbf{C}}M),\\ N(Z,\ r)=\int\limits_0^r n(Z,\ t)\frac{dt}{t}, \end{cases} \tag{3.15}$$

мы хотим получить формулу для считающей функции $N(Z,\ r)$ в терминах f и ψ. В соответствии с (1.9) положим

$$\begin{cases} \omega_l=(dd^c\log\|f\|^2)^l,\\ \Omega_l=\log\|f\|^2\omega_l,\\ \psi=dd^c\tau,\quad \eta_k=d^c\tau\wedge\psi^k. \end{cases} \tag{3.16}$$

(3.17) Предложение. *В обозначениях* (3.15) *и* (3.16) *имеют место соотношения*

$$N(Z,\ r)=\int_{\partial M[r]}\Omega_{n-1}\wedge\eta_{m-n}-\int_{M[r]}\Omega_{n-1}\wedge\psi^{m-n+1}+O(1),$$

$$\int_{M[r]}\omega_l\wedge\psi^{m-l}=\int_{\partial M[r]}\Omega_{l-1}\wedge\eta_{m-l}-\int_{M[r]}\Omega_{l-1}\wedge\psi^{m-l+1}+O(1)$$

$$(l\leqslant n-1),$$

где $\eta_k=d^c\tau\wedge\psi^k\geqslant 0$ *на* $\partial M[r]$.

Доказательство. Это предложение доказывается так же, как и (3.2), двукратным интегрированием равенств в потоках:

$$\begin{cases} dd^c\omega_l=0,\\ dd^c\Omega_l=\omega_{l+1}\ (l<n-1),\\ dd^c\Omega_{n-1}=Z. \end{cases} \tag{3.18}$$

Сужения этих равенств на $M[r]$ трактуются так же, как в доказательстве (3.2).

Замечания. Для f: $M\to\mathbf{C}^n$ введем обозначения

$$M_f(r)=\max_{z\in M[r]}\log\|f(z)\|^2,$$

$$V(r)=\int_{M[r]}\omega_{n-1}\wedge\psi^{m-n+1},$$

$$S(r)=\int_{M[r]}\log\frac{1}{\|f\|^2}\omega_{n-1}\wedge\psi^{m-n+1}.$$

Тогда теорема Йенсена (3.17) дает оценку

$$N(Z, r) \leqslant M_f(r)\, V(r) + S(r) + O(1). \tag{3.19}$$

Первый член $M_f(r)\, V(r)$ в правой части является, так сказать, внутренним — он отражает рост всего отображения f, а не нулевого уровня $Z = f^{-1}(0)$, который связан со специальным выбором начала координат в пространстве значений f. С другой стороны, остаточный член $S(r)$ внутренним не является. Априори возникает надежда, что $M_f(r)\, V(r)$ является более существенным слагаемым. Однако если мы рассмотрим, например, частный случай голоморфного отображения

$$\mathbf{C}^2 \xrightarrow{f=(f_1,\ f_2)} \mathbf{C}^2,$$

где f имеет *конечный порядок* в том смысле, что $M_f(r) \leqslant c_1 r^{\lambda}$, то из предположения о малости $S(r)$ по сравнению с первым слагаемым вытекала бы оценка

$$N(Z, r) \leqslant c_2 r^{2\lambda} \tag{3.20}$$

для числа общих нулей f_1 и f_2 в шаре $\|z\| \leqslant r$. Но недавний пример (см. Корналба и Шифман [7]) показывает, что *оценка Безу* (3.20) может оказаться *неверной* (см. также у Штолля [19] оценку Безу «в среднем»). Таким образом, для высших коразмерностей в общем случае нельзя получить оценок типа неравенства Неванлинны (3.7). Более того, как показывает известный пример Фату — Бибербаха, теорема Сохоцкого (3.8) для высших коразмерностей тоже неверна. За исключением одного результата Чжэня — Штолля — Ву (см. предложение (5.20) на стр. 53), теория распределения значений для высших коразмерностей остается загадкой.

4. УСЛОВИЕ АЛГЕБРАИЧНОСТИ ДИВИЗОРА

Пусть A — аффинное многообразие размерности m, а

$$\pi\colon A \to \mathbf{C}^m, \quad \tau(z) = \log \|\pi(z)\|^2,$$

— проекция и специальная функция исчерпания, построенные в § 2 (b). Пусть D — эффективный аналитический дивизор на A, $\psi = dd^c\tau$ — форма Леви для τ и

$$N(D, r) = \int_0^r \left\{ \int_{D[t]} \psi^{m-1} \right\} \frac{dt}{t}$$

— считающая функция для D (см. (3.1)).

(4.1) Предложение. *D является алгебраическим дивизором тогда и только тогда, когда*

$$N(D, r) = O(\log r).$$

Доказательство. Непосредственно из определения (3.1) следует, что $N(D, r)$ есть $O(\log r)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{D[r]} \psi^{m-1} = O(1) \tag{4.2}$$

для всех r. С другой стороны, по лемме (2.11), D является алгебраическим подмножеством A тогда и только тогда, когда $\pi(D)$ есть алгебраическое подмножество $\mathbf{C}^m$. Используя это вместе с соотношением (4.2), мы сводим наше предложение к следующему результату Штолля [17]:

(4.3) Предложение. *Пусть D — эффективный аналитический дивизор в $\mathbf{C}^m$ и $\psi = dd^c \log\|z\|^2$. Дивизор D является алгебраическим тогда и только тогда, когда*

$$\int_{D[r]} \psi^{m-1} = O(1).$$

Мы приведем два доказательства этого результата. Первое использует элементарные свойства плюрисубгармонических функций и разрешимость второй проблемы Кузена в $\mathbf{C}^m$. Второе доказательство использует теорию Неванлинны — это одна из немногих ситуаций, когда можно справиться с остаточным членом в первой основной теореме (5.14), которая здесь будет применяться; ее доказательство см. ниже в § 5.

Первое доказательство. Предположим, что D — алгебраический дивизор в $\mathbf{C}^m$ степени d. Считая, что начало координат лежит вне D, рассмотрим проекцию

$$D \to \mathbf{P}^{m-1}$$

дивизора D в пространство комплексных прямых, проходящих через начало координат в $\mathbf{C}^m$. Для каждой такой прямой ξ пересечение $\xi \cdot D$ состоит не более чем из d точек (с учетом кратностей). Отсюда следует, что

$$\int_{D[r]} \psi^{m-1} \leqslant d \left\{ \int_{\mathbf{P}^{m-1}} \omega^{m-1} \right\} = d, \qquad \lim_{r\to\infty} \left(\int_{D[r]} \psi^{m-1} \right) \leqslant d,$$

где $\omega = dd^c \log\|z\|^2$ — обычная $(1, 1)$-форма на $\mathbf{P}^{m-1}$.

Обратно, предположим, что $\int_{D[r]} \psi^{m-1} \leqslant d$ для всех r. Тогда *в среднем* (см. (5.18)) каждая прямая ξ, проходящая через начало координат, пересекает D не более чем в d точках. Основной шаг состоит в доказательстве того, что это имеет место для *всех* прямых ξ.

Решая вторую проблему Кузена в $\mathbf{C}^m$, мы находим целую голоморфную функцию $\alpha(z)$, такую, что $(\alpha) = D$. Нормируем ее условием $\alpha(0) = 1$ и по теореме Йенсена (3.2) получим, что

$$N(D, r) = \int_{\|z\|=r} \log|\alpha(z)|^2\, \eta(z), \tag{4.4}$$

где $\eta(z) = d^c \log \|z\|^2 \wedge (dd^c \log \|z\|^2)^{m-1}$. Для точки $z \neq 0$ в $\mathbf{C}^m$ обозначим через ξ_z комплексную прямую, проходящую через z и начало координат, и положим $\xi_z[r] = \xi_z \cap \mathbf{C}^m[r]$. Теорема Йенсена, примененная к сужению $\alpha|_{\xi_z}$ на прямую ξ_z, дает равенство

$$N(D \cap \xi_z,\ r\|z\|) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\alpha(re^{i\theta} z)|\, d\theta. \tag{4.5}$$

Из (4.5) видно, что считающая функция $N(D \cap \xi_z,\ r\|z\|)$ является плюрисубгармонической функцией от $z \in \mathbf{C}^m$, так как она представляет собой среднее значение плюрисубгармонической функции $\log|\alpha(re^{i\theta}z)|$.

Мы хотим применить к $N(D \cap \xi_z,\ r\|z\|)$ неравенство, выражающее основное свойство субгармонических функций. Для этого обозначим через $B(z, \rho)$ шар радиуса ρ с центром в точке z в $\mathbf{C}^m$, а через Φ — элемент евклидова объема, нормированный условием $\int_{\|z\| \leqslant 1} \Phi(z) = 1$. Тогда свойство субгармоничности приводит к неравенству

$$\begin{aligned} N(D \cap \xi_z,\ r\|z\|) &\leqslant \frac{1}{\rho^{2m}} \int_{w \in B(z,\rho)} N(D \cap \xi_w,\ r\|w\|)\Phi(w) \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{\rho^{2m}} \int_{w \in B(0,\|z\|+\rho)} N(D \cap \xi_w,\ r\|w\|)\,\Phi(w) \leqslant \\ &\leqslant \left(\frac{\|z\|+\rho}{\rho}\right)^{2m} \int_{\xi \in \mathbf{P}^{m-1}} N(D \cap \xi,\ r(\|z\|+\rho))\psi^{m-1}(\xi) \leqslant \\ &\leqslant \left(\frac{\|z\|+\rho}{\rho}\right)^{2m} d \cdot \log(r(\|z\|+\rho))\ ^{1}). \end{aligned}$$

Взяв $\|z\| = 1$, мы получаем оценку

$$\frac{N(D \cap \xi,\ r)}{\log r} \leqslant d \cdot \left(\frac{1+\rho}{\rho}\right)^{2m} + O(1) \qquad (\xi \in \mathbf{P}^{m-1}). \tag{4.6}$$

Из (4.6) следует, что $D \cap \xi$ является дивизором на ξ степени $\leqslant d((1+\rho)/\rho)^{2m}$ для любого $\rho > 0$. Полагая $\rho \to \infty$, мы получаем, что все пересечения $D \cap \xi$ являются дивизорами степени $\leqslant d$ на прямых ξ, проходящих через начало координат в $\mathbf{C}^m$.

Пусть d_0 — наименьшее целое, такое, что $\deg(D \cap \xi) \leqslant d_0$ для всех ξ, а ξ_0 — некоторая прямая, на которой этот максимум достигается; тогда существуют окрестность U точки ξ_0 в $\mathbf{P}^{m-1}$ и

[1]) Здесь используется, что ψ^{m-1} — форма объема в $\mathbf{P}^{m-1}$, что $\int_{\xi \in \mathbf{P}^{m-1}} N(D \cap \xi,\ r)\,\psi^{m-1} = N(D, r)$ и что, согласно (3.1), $N(D, r) \leqslant d \cdot \log r$, если $\int_{D[t]} \psi^{m-1} \leqslant d$. — *Прим. ред.*

число $0 < R_0 < \infty$, такие, что $D \cap \xi \subset B(0, R_0)$ для всех $\xi \in U$. Таким образом, D удовлетворяет условиям леммы (2.10) и потому является алгебраическим дивизором.

Второе доказательство. Как и выше, нам надо показать, что

$$\deg(D \cap \xi) \leqslant d < \infty \tag{4.7}$$

для всех комплексных прямых ξ, проходящих через начало координат в $\mathbf{C}^m$. Допустим, что мы умеем доказывать оценку

$$\int_{H \cap D} \psi^{m-2} \leqslant d < \infty \tag{4.8}$$

для всех гиперплоскостей H, проходящих через начало координат в $\mathbf{C}^m$. Тогда мы можем повторить это доказательство, заменяя D на $H \cap D$, и таким путем, понижая размерность, дойдем, наконец, до нужной оценки (4.7).

Рассмотрим отображение

$$D \xrightarrow{f} \mathbf{P}^{m-1}, \tag{4.9}$$

которое каждой точке $z \in D$ ставит в соответствие комплексную прямую, проходящую через z и 0 (здесь мы считаем, что $0 \notin D$). Функция $\tau(z) = \log\|z\|^2$ является функцией исчерпания на D, а ее форма Леви равна

$$dd^c\tau = f^*(\omega) = \omega_f, \tag{4.10}$$

где ω — стандартная кэлерова форма на $\mathbf{P}^{m-1}$. Мы хотим применить I о. т. (5.14) для дивизоров к отображению (4.9) и функции исчерпания τ. Несмотря на то что D может иметь особенности, это можно сделать ввиду предложения (1.1).

Пусть $L \to \mathbf{P}^{m-1}$ — стандартное линейное расслоение, сечениями которого являются линейные функции на $\mathbf{C}^m$; тогда $|L|$ — полная линейная система гиперплоскостей в $\mathbf{P}^{m-1}$. Возьмем на L стандартную метрику, такую, что класс Чжэня $c(L) = \omega$, и обозначим через H_σ гиперплоскость в $\mathbf{C}^m$, определяемую сечением $\sigma \in H^0(\mathbf{P}^{m-1}, L)$. Введя обозначения

$$N(H_\sigma,\ r) = \int_0^r \left\{ \int_{H_\sigma[t]} \omega_f^{m-1} \right\} \frac{dt}{t},$$

$$T(r) = \int_0^r \left\{ \int_{D[t]} \omega_f^{m-1} \right\} \frac{dt}{t},$$

$$S(H_\sigma,\ r) = \int_{D[r]} \log \frac{1}{|\sigma|^2}\, \omega_f^{m-1},$$

мы получаем из I о. т. (см. неравенство (5.14)) вместе с (4.10) оценку

$$N(H_\sigma, r) \leqslant T(r) + S(H_\sigma, r) + O(1). \tag{4.11}$$

Из (5.18) мы имеем формулу усреднения

$$T(r) = \int\limits_{\substack{\sigma \in H^0(\mathbf{P}^{m-1}, L) \\ \sup|\sigma|=1}} N(H_\sigma, r)\, d\mu(\sigma) + O(1),$$

а неравенство (4.8) можно вывести из оценки

$$\lim_{r\to\infty} \frac{S(H_\sigma, r)}{T(r)} = 0. \tag{4.12}$$

В самом деле, из (4.11) и (4.12) имеем

$$\lim_{r\to\infty} \frac{N(H_\sigma, r)}{T(r)} \leqslant 1.$$

Далее, так как у нас $\int\limits_D \omega_f^{m-1} = d < \infty$, то $T(r) \leqslant d \cdot \log r$, а если $\int\limits_{H_\sigma[t]} \omega_f^{m-1} = c$, то $N(H_\sigma, r) \geqslant c \log r + O(1)$ для больших r. Тогда из предыдущего неравенства мы получаем, что $c \leqslant d$ для всех t и, следовательно, справедлива нужная оценка

$$\int\limits_{H_\sigma} \omega_f^{m-1} \leqslant d.$$

Для доказательства (4.12) мы рассмотрим на $\mathbf{P}^{m-1}$ сингулярную форму объема

$$\Omega_\sigma = \frac{1}{|\sigma|^{1/2}}\, \omega^{m-1}.$$

Пользуясь вогнутостью логарифма, получим [1])

$$S(H_\sigma, r) \leqslant \log\left\{\int\limits_{D[r]} \Omega_\sigma + O(1)\right\}. \tag{4.13}$$

С другой стороны, мы имеем соотношение

$$dd^c(|\sigma|^{1/2}\omega^{m-2}) = \Omega_\sigma + \Theta,$$

где Θ — *ограниченная* форма объема на $\mathbf{P}^{m-1}$. Из него следует, что

$$S(H_\sigma, r) \leqslant \log\left\{\int\limits_{D[r]} dd^c|\sigma|^{1/2}\omega_f^{m-2} + c\omega_f^{m-1}\right\} \quad (c > 0). \tag{4.14}$$

[1]) Подсчеты ведутся с точностью до несущественных множителей. — *Прим. ред.*

Теперь, дважды применяя теорему Стокса, мы получим соотношение

$$\int\limits_0^R \left\{\int\limits_{D[r]} dd^c|\sigma|^{1/2}\omega_f^{m-2}\right\}\frac{dr}{r} = \int\limits_{D[R]} |\sigma|^{1/2}\omega_f^{m-1} - \int\limits_{\partial D[R]} |\sigma|^{1/2}\omega_f^{m-2} \wedge d^c\tau \tag{4.15}$$

(см. доказательство предложения (3.2)). Так как $|\sigma|$ ограничена и $\int\limits_{D[R]} \omega_f^{m-1} = \int\limits_{\partial D[R]} \omega_f^{m-2} \wedge d^c\tau = O(1)$, то, объединяя (4.14) и (4.15), мы приходим к оценке

$$\int\limits_0^R e^{S(H_\sigma, r)}\, \frac{dr}{r} = O(\log R). \tag{4.16}$$

Так как $S(H_\sigma, r)$ — неотрицательная возрастающая функция от r, то (4.12) следует из (4.16). ■

Замечание. Второе доказательство проходит для произвольного дивизора $D \subset \mathbf{C}^m$ и приводит к оценке

$$N(H_\sigma, r) \leqslant T(r) + o\{T(r)\} \qquad \|$$

(объяснение символа $\|$ см. сразу после леммы (7.23)). Это неравенство оценивает рост $H \cap D$ в терминах роста D для *всех* гиперплоскостей H. В случае $\operatorname{codim} D > 1$ никакого аналогичного утверждения не известно.

5. ФУНКЦИЯ ПОРЯДКА ДЛЯ ГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

(a) ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Пусть M — комплексное многообразие со специальной функцией исчерпания τ: $M \to [-\infty, +\infty)$ (см. § 2). Предположим, что V — гладкое проективное алгебраическое многообразие и что $L \to V$ — положительное линейное расслоение, наделенное метрикой с положительной формой кривизны ω (см. § 0). Пусть f: $M \to V$ — голоморфное отображение. Положим $\omega_f = f^*\omega$ и определим функции порядка $T_1, \ldots, T_m$ следующим образом:

$$T_q(r) = \int\limits_0^r \left\{\int\limits_{M[t]} \omega_f^q \wedge (dd^c\tau)^{m-q}\right\}\frac{dt}{t}. \tag{5.1}$$

Полная функция порядка $T(f, r)$ определяется формулой

$$T(f, r) = \sum_{q=0}^{m} T_q(r);$$

здесь $T_0(r) = \int_0^r \left\{ \int_{M[t]} (dd^c\tau)^m \right\} \frac{dt}{t} = \text{const}$, так как τ — специальная функция исчерпания. Геометрически, если мы рассмотрим график $\Gamma_f \subset M \times V$ отображения f, обозначим через $\Gamma_f[t] = \Gamma_f \cap (M[t] \times V)$ часть графика, лежащую над $M[t]$, а через

$$v(t) = \int_{\Gamma_f[t]} (dd^c\tau + \omega)^m$$

объем $\Gamma_f[t]$ относительно кэлеровой псевдометрики $dd^c\tau + \omega$ на $M \times V$, то

$$T(f, r) = \int_0^r v(t) \frac{dt}{t}, \tag{5.2}$$

с точностью до некоторых несущественных постоянных множителей.

(5.3) Предложение. *Если на* $L \to V$ *взять другую метрику, приводящую к форме кривизны* $\tilde{\omega}$ *и функциям порядка* $\tilde{T}_q(r)$, *то*

$$T_q(r) - \tilde{T}_q(r) = O\left(r \frac{dT_{q-1}(r)}{dr} + 1\right).$$

Доказательство. Пусть $\theta \in A^{m-1, m-1}(M)$ — форма на M класса C^∞. Тогда по теореме Стокса

$$\int_0^r \left(\int_{M[t]} dd^c\theta \right) \frac{dt}{t} = \int_0^r \left(\int_{\partial M[t]} d^c\theta \right) \frac{dt}{t} = \int_{M[r]} d\tau \wedge d^c\theta,$$

откуда

$$\int_0^r \left(\int_{M[t]} dd^c\theta \right) \frac{dt}{t} = \int_{\partial M[r]} \theta \wedge d^c\tau - \int_{M[r]} \theta \wedge dd^c\tau. \tag{5.4}$$

Согласно (0.3), мы имеем соотношение $\tilde{\omega} = \omega + dd^c\rho$, где $\rho \in C^\infty(M)$. Подставляя это в определение функций порядка и используя (5.4), мы получаем

$$T_q(r) - \tilde{T}_q(r) = \tag{5.5}$$

$$= \sum_{k=0}^{q-1} \left\{ a_k \int_{\partial M[r]} \rho_f (dd^c\rho_f)^{q-k-1} \wedge \omega_f^k \wedge (dd^c\tau)^{m-q} \wedge d^c\tau + \right.$$

$$\left. + b_k \int_{M[r]} \rho_f (dd^c\rho_f)^{q-k-1} \wedge \omega_f^k \wedge (dd^c\tau)^{m-q+1} \right\}.$$

Применяя к (5.5) неравенство $\rho(dd^c\rho)^{q-k-1} \leqslant c_k\omega^{q-k-1}$ и пользуясь теоремой Стокса, мы получаем нужную оценку. ■

(5.6) Следствие. *Функции порядка, соответствующие двум различным метрикам на* $L \to V$, *удовлетворяют соотношению*

$$T_1(r) = \tilde{T}_1(r) + O(1).$$

Замечание. Предыдущее предложение и следствие наводят на мысль, что $T_1(r)$ является наиболее интересным слагаемым в полной функции порядка $T(f, r)$. Так, например, при $q > 1$ функции порядка $T_q(r)$ определены корректно (т. е. фактически независимо от метрики на $L \to V$) только в том случае, если

$$\lim_{r \to \infty} \frac{rdT_{q-1}(r)/dr}{T_q(r)} = 0. \tag{5.7}$$

Приведем еще два предложения, подтверждающих, что $T_1(r)$ — наиболее важный член в $T(f, r)$. Прежде всего введем обозначение $T_1(r) = T_1(f, r)$, подчеркивая зависимость от f. Предположим, что заданы два голоморфных отображения $f\colon M \to V$ и $g\colon M \to W$ многообразия M в гладкие проективные многообразия V и W; тогда мы можем рассмотреть произведение отображений $f \times g\colon M \to V \times W$.

(5.8) Предложение. *Отображения* f, g *и* $f \times g$ *удовлетворяют соотношению*

$$T_1(f \times g, r) = T_1(f, r) + T_1(g, r) + O(1).$$

Однако это функториальное свойство **не** *обязательно верно для* $T_q(r)$ *при* $q \geqslant 2$.

Доказательство. Равенство следует непосредственно из определения. То, что, например, $T_2(r)$ не обязательно обладает таким функториальным свойством, можно увидеть, взяв $\dim_{\mathbf{C}} M = 2$. Тогда нам нужно было бы оценить $\int \omega_f \wedge \omega_g$ в терминах $\int \omega_f \wedge \omega_f$ и $\int \omega_g \wedge \omega_g$, а это в общем случае невозможно. ■

Второе предложение будет доказано ниже, в конце § 5 (c). Для его формулировки мы предположим, что $M = A$ — гладкое аффинное многообразие со специальной функцией исчерпания τ, построенной в § 2 (b).

(5.9) Предложение. *Отображение* f *рационально тогда и только тогда, когда*

$$T_1(r) = O(\log r).$$

Эта оценка в свою очередь справедлива тогда и только тогда, когда

$$T(f, r) = O(\log r).$$

(b) ПЕРВАЯ ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА (I о. т.)

Продолжим исследование отображения $f\colon M \to V$ из § 5 (a). Сначала мы приведем I о. т. для дивизоров, представляющую собой глобальный аналог теоремы Йенсена (3.2) для мероморфных функций. Пусть $D \in |L|$ — произвольный эффективный дивизор, определяемый нулями голоморфного сечения $\sigma \in H^0(V, L)$. Так как σ и $\lambda\sigma$ $(\lambda \neq 0)$ определяют один и тот же дивизор, то мы можем считать, что $|\sigma(x)| \leqslant 1$ для всех $x \in V$. Пусть $L_f \to M$ есть прообраз $L \to V$ и σ_f — прообраз σ. Предположим, что $\sigma_f \not\equiv 0$, и определим *форму близости*

$$m(D, r) = \int_{\partial M[r]} \log \frac{1}{|\sigma_f|^2}\,\eta \geqslant 0, \tag{5.10}$$

где форма $\eta = d^c\tau \wedge (dd^c\tau)^{m-1}$ положительна на $\partial M[r]$; $m = \dim_{\mathbf{C}} M$.

(5.11) Предложение (I о. т. для дивизоров). *Пусть D_f — дивизор сечения $\sigma_f \in H^0(M, L_f)$; тогда*

$$N(D_f, r) + m(D, r) = T_1(r) + O(1),$$

где $O(1)$ зависит только от D и не зависит от r.

Доказательство. Это следует из уравнения в потоках (1.14), примененного к расслоению $L_f \to M$ и сечению σ_f. Уравнение надо дважды проинтегрировать точно так же, как мы интегрировали уравнение (1.2) при доказательстве теоремы Йенсена (3.2). ■

Замечание. Из (5.10) и (5.11) получается оценка

$$N(D_f, r) < T_1(r) + O(1), \tag{5.12}$$

которая является вариантом основного неравенства Неванлинны (3.7). В обоих случаях суть этого неравенства состоит в оценке роста любого конкретного дивизора *усредненным ростом* всех дивизоров из одной и той же линейной системы (см. (3.10), (3.13) и предложение (5.18)).

Для формулировки I о. т. в общем виде предположим, что $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in H^0(V, L)$ — голоморфные сечения расслоения $L \to V$, такие, что подмножество $Z \subset V$, определяемое системой уравнений $\sigma_1 = \ldots = \sigma_n = 0$, имеет чистую коразмерность n на V. Предположим, что $f\colon M \to V$ — голоморфное отображение, такое, что

$Z_f = f^{-1}(Z)$ имеет чистую коразмерность n на M. Воспользуемся обозначением (1.15) для Λ с заменой r на n и положим

$$\sigma_f = (\sigma_1 \circ f, \ldots, \sigma_n \circ f), \quad \Lambda_f = f^*\Lambda,$$
$$\psi_l = (dd^c\tau)^l, \quad \eta_l = d^c\tau \wedge \psi_{l-1},$$

$$m(Z, r) = \int_{\partial M[r]} \Lambda_f \wedge \eta_{m-n+1} \quad \text{(форма близости)}, \tag{5.13}$$

$$S_n(Z, r) = \int_{M[r]} \Lambda_f \wedge \psi_{m-n+1} \quad \text{(остаток)}.$$

(5.14) Предложение (I о. т. — общий случай). *В обозначениях* (5.13), (5.1) *и* (3.15) *имеет место соотношение*

$$N(Z_f, r) + m(Z, r) = T_n(r) + S_n(Z, r) + O(1),$$

где $O(1)$ зависит от Z, но не от r.

Доказательство получается двукратным интегрированием уравнения в потоках (1.15), как при доказательстве (3.17).

Замечание. Как и в случае дивизоров, можно считать, что $\|\sigma(x)\| \leqslant 1$ для всех $x \in V$. Тогда, согласно (1.15), форма близости $m(Z, r) \geqslant 0$ и (5.14) приводит к оценке

$$N(Z_f, r) < T_n(r) + S_n(Z, r) + O(1). \tag{5.15}$$

При $n = 1$ оценка (5.15) сводится к неравенству Неванлинны (5.12), так как $\psi_m = 0$, и тогда остаток $S_1(Z, r) \equiv 0$. Однако для $n > 1$ остаточный член положителен, и мы попадаем в ситуацию, аналогичную предложению (3.17).

(c) ТЕОРЕМЫ ОБ УСРЕДНЕНИИ И ПЛОТНОСТИ

В этом параграфе мы предполагаем, что расслоение $L \to V$ является достаточно *обильным*. Это означает, что полная линейная система $|L|$ задает вложение V в $\mathbf{P}^{N-1}$, где $N = \dim_{\mathbf{C}} H^0(V, L)$, и что образ V при этом не содержит никакого собственного линейного подпространства. Выбирая на $H^0(V, L)$ метрику, индуцированную обычной формой Фубини — Штуди на $\mathbf{P}^{N-1}$ (инвариантной относительно унитарных преобразований), мы можем считать, что метрика и форма кривизны на $L \to V$ индуцируются из $\mathbf{P}^{N-1}$.

Пусть $G(n, N)$ — грассманово многообразие n-мерных плоскостей в $H^0(V, L)$, и пусть $C\{G(n, N)\}$ обозначает *грассманов конус*, состоящий из всех приводимых векторов $\sigma = \sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n \in \in \bigwedge^n H^0(V, L)$. Для любого такого σ мы обозначаем через $Z(\sigma)$

множество $\sigma = 0$ на V; заметим, что $\operatorname{codim} Z(\sigma) = n$, так как $L \to V$ — обильное расслоение. Затем по формуле (1.15) мы построим форму близости $\Lambda = \Lambda(\sigma)$, и она будет сужением на V аналогичной формы в $\mathbf{P}^{N-1}$, задаваемой той же формулой. В частности, если T: $H^0(V, L) \to H^0(V, L)$ — произвольное унитарное преобразование, то по правилам линейной алгебры T индуцирует действие на $C\{G(n, N)\}$ и $\mathbf{P}^{N-1}$, причем

$$\Lambda(T\sigma) = T^*\Lambda(\sigma). \tag{5.16}$$

Мы обозначаем через $C_1\{G(n, N)\}$ подмножество в $C\{G(n, N)\}$, состоящее из векторов длины единица, а через $d\mu(\sigma)$ — меру на $C_1\{G(n, N)\}$, инвариантную относительно унитарных преобразований. Точнее,

$$d\mu(\sigma) = cd^c \log\|\sigma\| \wedge (dd^c \log\|\sigma\|)^{n(N-n)},$$

где константа c будет определена ниже.

(5.17) Лемма. *При подходящем выборе константы c имеет место формула*

$$\int_{\sigma \in C_1\{G(n, N)\}} \Lambda(\sigma)\, d\mu(\sigma) = \omega^{n-1}.$$

Доказательство. Из нашей конструкции следует, что $\int_{\{\sigma\}} \Lambda(\sigma)\, d\mu(\sigma)$ является $(n-1, n-1)$-формой на $\mathbf{P}^{N-1}$, инвариантной относительно унитарных преобразований. Отсюда следует, что $\int_{\{\sigma\}} \Lambda(\sigma)\, d\mu(\sigma) = c_1\omega^{n-1}$, так как *любая* инвариантная форма кратна ω^{n-1}. Легко проверить, что $c_1 \neq \pm\infty$, и, значит, подходящим выбором c можно сделать $c_1 = 1$. ■

Пусть f: $M \to V$ — голоморфное отображение, такое, что $\operatorname{codim} Z_f(\sigma) = n$ для почти всех $\sigma \in C\{G(n, N)\}$.

(5.18) Предложение. *Справедлива следующая формула усреднения*:

$$\int_{\sigma \in C_1\{G(n, N)\}} N(Z_f(\sigma), r)\, d\mu(\sigma) = T_n(r) + O(1).$$

Доказательство. Приведем формальное вычисление. Сходимость интеграла доказывается при помощи теоремы Фубини точно так же, как у Штолля [18]. Учитывая (5.14), нам достаточно доказать, что

$$\int_{\{\sigma\}} m(Z(\sigma), r)\, d\mu(\sigma) = \int_{\{\sigma\}} S_n(Z(\sigma), r)\, d\mu(\sigma) + O(1). \tag{5.19}$$

Подставим сюда выражение (5.13), изменим порядок интегрирования и применим формулу (5.17); тогда нам останется проверить, что

$$\int_{\partial M[r]} \omega^{n-1} \wedge \eta_{m-n+1} = \int_{M[r]} \omega^{n-1} \wedge \psi_{m-n+1} + O(1).$$

Но это следует из равенства $d\eta_{m-n+1} = \psi_{m-n+1}$ и теоремы Стокса. ■

Замечание. Формула усреднения (5.18) является аналогом *формулы Крофтона* [1]) из интегральной геометрии, утверждающей, что длина любой кусочно-гладкой замкнутой кривой $C \subset \mathbf{R}^2$ равна усреднению по всем прямым $L \subset \mathbf{R}^2$ числа точек пересечения L и C.

В качестве применения предложения (5.18) докажем следующий результат, который является вариантом одного результата Чжэня, Штолля и Ву (см. Штолль [18]).

(5.20) Предложение. *Пусть f: $M \to V$ такое же, как и выше. Предположим, что*

$$\varliminf_{r \to \infty} \frac{r dT_{n-1}(r)/dr}{T_n(r)} = 0.$$

Тогда образ $f(M)$ пересекает $Z(\sigma)$ для почти всех $\sigma \in C_1\{G(n, N)\}$.

Доказательство. Предположим, что множество I всех тех $\sigma \in C_1\{G(n, N)\}$, для которых $f(M)$ пересекает $Z(\sigma)$, имеет меру $1 - \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Объединяя (5.15) и (5.18), мы получаем тогда, что

$$\begin{aligned}
T_n(r) &= \int_{\{\sigma\}} N(Z_f(\sigma), r)\, d\mu(\sigma) + O(1) = && \text{(по (5.18))}\\
&= \int_{\sigma \in I} N(Z_f(\sigma), r)\, d\mu(\sigma) + O(1) = && \text{(очевидно)}\\
&= \int_{\sigma \in I} \{T_n(r) + S_n(Z(\sigma), r) + O(1)\}\, d\mu(\sigma) \leqslant && \text{(по (5.15))}\\
&\leqslant (1-\varepsilon)\, T_n(r) + r\frac{dT_{n-1}(r)}{dr} + O(1),
\end{aligned}$$

где последнее неравенство следует из того, что

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma \in I} S_n(Z(\sigma), r)\, d\mu(\sigma) &\leqslant \int_{\{\sigma\}} S_n(Z(\sigma), r)\, d\mu(\sigma) = && \text{(по (5.19))}\\
&= \int_{\partial M[r]} \omega_f^{n-1} \wedge \psi_{m-n+1} = && \text{(по определению (5.1))}\\
&= \frac{r dT_{n-1}(r)}{dr}.
\end{aligned}$$

[1]) Подробнее об этом см. в статьях Карлсона и Гриффитса [2*] и Шифмана [5*]. — *Прим. ред.*

Таким образом,

$$1 \leqslant (1-\varepsilon) + \frac{r dT_{n-1}(r)/dr}{T_n(r)}. \tag{5.21}$$

Переходя к нижнему пределу, мы получаем противоречие, которое и доказывает наше предложение. ■

(5.22) Следствие. *Если M имеет специальную функцию исчерпания, то образ $f(M)$ пересекает почти все дивизоры $D \in |L|$.*

Замечания. (i) Это следствие — утверждение того же типа, что и теорема Сохоцкого (3.8); оно выражает свойство плотности образа $f(M)$.

Интересно отметить, что условие

$$\lim_{r\to\infty} \frac{r\,dT_{n-1}(r)/dr}{T_n(r)} = 0,$$

при котором имеет место теорема о плотности образа, есть не что иное, как условие (5.7) независимости функции порядка $T_n(r)$ от выбора метрики на $L \to V$.

(ii) Предположим, что наше отображение

$$f\colon M \to V$$

удовлетворяет условиям

$$r\frac{dT_{q-1}(r)}{dr} = o(T_n(r)) \qquad (q \leqslant n). \tag{5.23}$$

Тогда, конечно, $f(M)$ пересекает $Z(\sigma)$ для почти всех $\sigma \in \in C_1\{G(n, N)\}$.

Вопрос. Предположим, что выполняются оценки (5.23). Будет ли тогда *неравенство Неванлинны*

$$N(Z_f(\sigma), r) \leqslant T_n(r) + o(N(Z_f(\sigma), r))$$

справедливо для любого $Z(\sigma)$?

Мотивировка этого вопроса такова: существование оценки роста произвольного $Z_f(\sigma)$ в терминах среднего роста с геометрической точки зрения означает, по-видимому, что образ $f(M)$ пересекает почти все $Z(\sigma)$. Для доказательства надо оценить остаточный член в I о. т. (5.14), но пока это никому не удается, даже в случае дивизоров (исключением, пожалуй, является наше доказательство теоремы Штолля в § 4).

Доказательство предложения (5.9). Замена положительного линейного расслоения L на

$$L^k = \underbrace{L \otimes \ldots \otimes L}_{k \text{ раз}}$$

переводит $T_1(r)$ в $kT_1(r)$ и поэтому не меняет условий предложения. Выбирая k достаточно большим, мы можем считать расслоение $L \to V$ обильным, так что полная линейная система $|L|$ индуцирует проективное вложение V. Теперь ясно, что отображение $f\colon A \to V$ является рациональным тогда и только тогда, когда дивизоры

$$D_f = f^{-1}(D)$$

являются алгебраическими, с равномерно ограниченной степенью для всех $D \in |L|$.

Предположим сначала, что f — рациональное отображение. Тогда, согласно § 4, мы имеем для любого $D \in |L|$ неравенство

$$N(D_f, r) \leqslant d \cdot \log r + O(1), \tag{5.24}$$

где d — степень $\pi(D_f)$ в $\mathbf{C}^m$. Здесь $O(1)$ зависит от D, но из сказанного о числах Лелона в § 1 (d) следует, что при фиксированном r оценка (5.24) справедлива для *всех* $D \in |L|$. Интегрируя (5.24) по инвариантной мере $d\mu(D)$ на $|L|$ и применяя (5.18) [1]), получаем, что

$$T_1(r) \leqslant d \cdot \log r + O(1),$$

где теперь уже, как легко проверить, $O(1)$ не зависит от r. Этим доказана одна часть нашего предложения.

Для доказательства другой, более важной части предположим, что $T_1(r) = d \cdot \log r + O(1)$. Из неравенства Неванлинны (5.12) следует, что

$$N(D_f, r) \leqslant d \cdot \log r + O(1)$$

для любого $D \in |L|$. Применяя предложение (4.1), мы заключаем, что все дивизоры D_f алгебраические и имеют на A степень $\leqslant d$.

Остается доказать, что

$$T_1(r) = O(\log r) \Rightarrow T(f, r) = O(\log r).$$

При условии $T_1(r) = O(\log r)$, как мы только что показали, f — рациональное отображение. Выберем рациональное проективное вложение $g\colon A \to \mathbf{P}^N$. Заменяя f произведением $h = f \times g\colon A \to V \times \times \mathbf{P}^N$, имеем, очевидно, неравенство

$$T(f, r) \leqslant T(h, r).$$

Отображение h обладает тем преимуществом, что оно является алгебраическим вложением A в полное проективное многообразие, и мы, очевидно, можем считать, что образ $h(A)$ находится в общем положении относительно данного семейства алгебраических подмножеств многообразия-образа. Наконец, достаточно

[1]) Там $n = 1$, ибо речь идет о дивизорах. — *Прим. ред.*

доказать, что $T(f, r) = O(\log r)$, в предположении, что расслоение $L \to V$ обильно и что

$$\operatorname{codim} f^{-1}(Z(\sigma)) = n$$

для всех подмногообразий $Z(\sigma)$, соответствующих векторам $\sigma \in \bigwedge^n H^0(V, L)$, $\sigma \neq 0$.

В этом предположении все $Z_f(\sigma) = f^{-1}(Z(\sigma))$ являются алгебраическими подмножествами A размерности $m-n$ и степени всех $\pi(Z_f(\sigma))$ в $\mathbf{C}^m$ ограничены одним и тем же числом d. Отсюда следует, что

$$N(Z_f(\sigma), r) \leqslant d \cdot \log r + O(1),$$

и наш результат получается усреднением этого неравенства по всем $Z(\sigma)$ и использованием формулы (5.18).

(d) СРАВНЕНИЕ ФУНКЦИИ ПОРЯДКА С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ НЕВАНЛИННЫ

Пусть M — комплексное многообразие со специальной функцией исчерпания τ: $M \to [-\infty, +\infty)$, и пусть $\alpha(z)$ — мероморфная функция на M. В § 3 (b) мы определили характеристическую функцию Неванлинны (см. (3.10)) как

$$T_0(\alpha, r) = N(D_\infty, r) + \int_{\partial M[r]} \log^+ |\alpha|^2 \eta, \tag{5.25}$$

где $\eta = d^c\tau \wedge (dd^c\tau)^{m-1}$ — неотрицательная форма на $\partial M[r]$. Эта характеристическая функция обладает хорошими алгебраическими свойствами, перечисленными в (3.11). Кроме того, если $M = A$ — аффинное алгебраическое многообразие, то из (3.10) и предложения (4.1) вытекает, что функция α рациональна относительно алгебраической структуры на A тогда и только тогда, когда

$$T_0(\alpha, r) = O(\log r).$$

А теперь мы хотим ввести другую функцию $T_1(\alpha, r)$, которая совпадает с функцией порядка $T_1(r)$, соответствующей стандартному положительному линейному расслоению на $\mathbf{P}^1$ по формуле (5.1), если рассматривать α как голоморфное отображение α: $M \to \mathbf{P}^1$. Локально на M мы можем положить $\alpha = \beta/\gamma$, где β и γ — взаимно простые голоморфные функции. Из соотношения

$$\log(1 + |\alpha|^2) = \log(|\gamma|^2 + |\beta|^2) - \log|\gamma|^2$$

следует, что на M определена локально интегрируемая дифференциальная форма типа (1, 1)

$$\omega_\alpha = dd^c \log(|\gamma|^2 + |\beta|^2),$$

причем имеет место равенство в потоках

$$dd^c \log(1 + |\alpha|^2) = \omega_\alpha - D_\infty. \tag{5.26}$$

Используя уже знакомые обозначения

$$T_1(\alpha, r) = \int_0^r \left\{ \int_{M[t]} \omega_\alpha \wedge (dd^c\tau)^{m-1} \right\} \frac{dt}{t},$$

$$m_1(\alpha, r) = \int_{\partial M[r]} \log(1 + |\alpha|^2)\, \eta \geqslant 0,$$

мы можем дважды проинтегрировать (5.26), как при доказательстве (3.2) и (5.11), и тогда получится формула

$$N(D_\infty, r) + m_1(\alpha, r) = T_1(\alpha, r) + O(1). \tag{5.27}$$

В классической теории соотношение (5.27) называется сферической I о. т. в форме Альфорса — Шимицу. Пользуясь неравенством

$$\log^+|\alpha|^2 \leqslant \log(1 + |\alpha|^2) \leqslant \log^+|\alpha|^2 + \log 2$$

и сравнивая (5.25) и (5.27), мы получаем, что

$$T_0(\alpha, r) = T_1(\alpha, r) + O(1). \tag{5.28}$$

Следовательно, функции $T_0(\alpha, r)$ и $T_1(\alpha, r)$ при изучении порядка роста взаимозаменяемы.

Есть надежда, что (5.28) позволит объединить вопросы, рассматриваемые в § 3 (b) и § 5 (b).

6. ФОРМЫ ОБЪЕМА И ВТОРАЯ ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА (II о. т.)

(a) СИНГУЛЯРНЫЕ ФОРМЫ ОБЪЕМА НА ПРОЕКТИВНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Пусть V — гладкое проективное многообразие размерности n и $L \to V$ — голоморфное линейное расслоение. Мы хотим построить формы объема на V с особенностями вдоль некоторых дивизоров и с положительными формами Риччи; при этом мы будем следовать изложению в статье [6]. Мы будем рассматривать дивизоры D следующего типа:

(6.1) $D \in |L|$ — дивизор с нормальными самопересечениями;
$D = D_1 + \ldots + D_k$, где все D_j — дивизоры без особенностей;

другими словами, D имеет простые нормальные самопересечения (§ 0).

Пусть L_j — линейное расслоение $[D_j]$; тогда найдется сечение σ_j этого расслоения, такое, что $(\sigma_j) = D_j$. Далее, $L = L_1 \otimes \ldots \otimes L_k$ и сечение $\sigma = \sigma_1 \otimes \ldots \otimes \sigma_k$ имеет дивизор $(\sigma) = D$.

доказать, что $T(f, r) = O(\log r)$, в предположении, что расслоение $L \to V$ обильно и что

$$\operatorname{codim} f^{-1}(Z(\sigma)) = n$$

для всех подмногообразий $Z(\sigma)$, соответствующих векторам $\sigma \in \bigwedge^n H^0(V, L)$, $\sigma \neq 0$.

В этом предположении все $Z_f(\sigma) = f^{-1}(Z(\sigma))$ являются алгебраическими подмножествами A размерности $m-n$ и степени всех $\pi(Z_f(\sigma))$ в $\mathbf{C}^m$ ограничены одним и тем же числом d. Отсюда следует, что

$$N(Z_f(\sigma), r) \leqslant d \cdot \log r + O(1),$$

и наш результат получается усреднением этого неравенства по всем $Z(\sigma)$ и использованием формулы (5.18).

(d) СРАВНЕНИЕ ФУНКЦИИ ПОРЯДКА С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ НЕВАНЛИННЫ

Пусть M — комплексное многообразие со специальной функцией исчерпания τ: $M \to [-\infty, +\infty)$, и пусть $\alpha(z)$ — мероморфная функция на M. В § 3 (b) мы определили характеристическую функцию Неванлинны (см. (3.10)) как

$$T_0(\alpha, r) = N(D_\infty, r) + \int_{\partial M[r]} \log^+ |\alpha|^2 \eta, \tag{5.25}$$

где $\eta = d^c\tau \wedge (dd^c\tau)^{m-1}$ — неотрицательная форма на $\partial M[r]$. Эта характеристическая функция обладает хорошими алгебраическими свойствами, перечисленными в (3.11). Кроме того, если $M = A$ — аффинное алгебраическое многообразие, то из (3.10) и предложения (4.1) вытекает, что функция α рациональна относительно алгебраической структуры на A тогда и только тогда, когда

$$T_0(\alpha, r) = O(\log r).$$

А теперь мы хотим ввести другую функцию $T_1(\alpha, r)$, которая совпадает с функцией порядка $T_1(r)$, соответствующей стандартному положительному линейному расслоению на $\mathbf{P}^1$ по формуле (5.1), если рассматривать α как голоморфное отображение α: $M \to \mathbf{P}^1$. Локально на M мы можем положить $\alpha = \beta/\gamma$, где β и γ — взаимно простые голоморфные функции. Из соотношения

$$\log(1 + |\alpha|^2) = \log(|\gamma|^2 + |\beta|^2) - \log|\gamma|^2$$

следует, что на M определена локально интегрируемая дифференциальная форма типа (1, 1)

$$\omega_\alpha = dd^c \log(|\gamma|^2 + |\beta|^2),$$

причем имеет место равенство в потоках

$$dd^c \log(1 + |\alpha|^2) = \omega_\alpha - D_\infty. \tag{5.26}$$

Используя уже знакомые обозначения

$$T_1(\alpha, r) = \int_0^r \left\{ \int_{M[t]} \omega_\alpha \wedge (dd^c\tau)^{m-1} \right\} \frac{dt}{t},$$

$$m_1(\alpha, r) = \int_{\partial M[r]} \log(1 + |\alpha|^2)\, \eta \geqslant 0,$$

мы можем дважды проинтегрировать (5.26), как при доказательстве (3.2) и (5.11), и тогда получится формула

$$N(D_\infty, r) + m_1(\alpha, r) = T_1(\alpha, r) + O(1). \tag{5.27}$$

В классической теории соотношение (5.27) называется сферической I о. т. в форме Альфорса — Шимицу. Пользуясь неравенством

$$\log^+|\alpha|^2 \leqslant \log(1 + |\alpha|^2) \leqslant \log^+|\alpha|^2 + \log 2$$

и сравнивая (5.25) и (5.27), мы получаем, что

$$T_0(\alpha, r) = T_1(\alpha, r) + O(1). \tag{5.28}$$

Следовательно, функции $T_0(\alpha, r)$ и $T_1(\alpha, r)$ при изучении порядка роста взаимозаменяемы.

Есть надежда, что (5.28) позволит объединить вопросы, рассматриваемые в § 3 (b) и § 5 (b).

6. ФОРМЫ ОБЪЕМА И ВТОРАЯ ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА (II о. т.)

(a) СИНГУЛЯРНЫЕ ФОРМЫ ОБЪЕМА НА ПРОЕКТИВНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Пусть V — гладкое проективное многообразие размерности n и $L \to V$ — голоморфное линейное расслоение. Мы хотим построить формы объема на V с особенностями вдоль некоторых дивизоров и с положительными формами Риччи; при этом мы будем следовать изложению в статье [6]. Мы будем рассматривать дивизоры D следующего типа:

(6.1)
$D \in |L|$ — дивизор с нормальными самопересечениями;
$D = D_1 + \ldots + D_k$, где все D_j — дивизоры без особенностей;

другими словами, D имеет простые нормальные самопересечения (§ 0).

Пусть L_j — линейное расслоение $[D_j]$; тогда найдется сечение σ_j этого расслоения, такое, что $(\sigma_j) = D_j$. Далее, $L = L_1 \otimes \ldots \otimes L_k$ и сечение $\sigma = \sigma_1 \otimes \ldots \otimes \sigma_k$ имеет дивизор $(\sigma) = D$.

(6.2) Предложение. *Предположим, что* $c(L)+c(K_V)>0$ [1]) *и что дивизор* $D\in|L|$ *удовлетворяет условиям* (6.1). *Тогда на* V *существует форма объема* Ω, *а на* L_j *— метрики, такие, что сингулярная форма объема*

$$\Psi=\frac{\Omega}{\prod_{j=1}^{k}(\log|\sigma_j|^2)^2|\sigma_j|^2} \tag{6.3}$$

удовлетворяет условиям

$$\operatorname{Ric}\Psi>0,\quad (\operatorname{Ric}\Psi)^n\geqslant\Psi,\quad \int_{V\setminus D}(\operatorname{Ric}\Psi)^n<\infty. \tag{6.4}$$

Доказательство. Мы знаем, что на L существует метрика с формой кривизны ω, такой, что $\omega+\operatorname{Ric}\Omega>0$. Выберем на $L_1, \ldots, L_{k-1}$ произвольные метрики и положим

$$|\zeta_k|=|\zeta_1\otimes\ldots\otimes\zeta_k|\,/\,|\zeta_1|\ldots|\zeta_{k-1}|$$

для любых не обращающихся в нуль сечений ζ_j расслоений L_j. Домножая метрики на константы, можно считать, что $|\sigma_j|<\delta$ для любого фиксированного $\delta>0$.

Используя (0.1), (0.2) и (0.5), получаем

$$\operatorname{Ric}\Psi=\omega+\operatorname{Ric}\Omega-\sum_{j=1}^{k}dd^c\log(\log|\sigma_j|^2)^2. \tag{6.5}$$

Далее,

$$-dd^c\log(\log|\sigma_j|^2)^2=\frac{-2dd^c\log|\sigma_j|^2}{\log|\sigma_j|^2}+\frac{2d\log|\sigma_j|^2\wedge d^c\log|\sigma_j|^2}{(\log|\sigma_j|^2)^2}.$$

Первый член является непрерывной формой на V; поэтому, выбирая, если потребуется, меньшее δ и полагая $\omega+\operatorname{Ric}\Omega=\omega_0$, мы имеем неравенство

$$\operatorname{Ric}\Psi\geqslant c_1\omega_0+2\sum_{j=1}^{k}\frac{d\log|\sigma_j|^2\wedge d^c\log|\sigma_j|^2}{(\log|\sigma_j|^2)^2}\geqslant 0 \tag{6.6}$$

с некоторой постоянной $c_1>0$. Здесь сумма также неотрицательна, поскольку $d\lambda\wedge d^c\lambda=(i/2\pi)\,\partial\lambda\wedge\bar\partial\lambda\geqslant 0$ для любой действительной λ.

Для любой точки $x\in V$ можно выбрать координаты $(z_1, \ldots, z_n)$ в окрестности $U\ni x$, такие, что $x=(0, \ldots, 0)$ и $D_l=(z_l)$ в U (поскольку D имеет нормальные самопересечения). Тогда $\log|\sigma_j|^2=\log b_j+\log|z_j|^2$, где $b_j>0$ — функция класса C^∞. Поэтому

$$d\log|\sigma_j|^2\wedge d^c\log|\sigma_j|^2=\frac{i}{2\pi}\frac{dz_j\wedge d\bar z_j}{|z_j|^2}+\rho_j. \tag{6.7}$$

Форма

$$\rho_j=\frac{i}{2\pi}\left(\frac{\partial b_j\wedge\bar\partial b_j}{b_j^2}+\frac{\partial b_j\wedge d\bar z_j}{b_j\bar z_j}+\frac{dz_j\wedge\bar\partial b_j}{z_jb_j}\right)$$

такова, что $|z_j|^2\rho_j$ — гладкая форма, коэффициенты которой равны нулю на D_j.

Таким образом, замечая, что $\omega_0\geqslant c_2 i\sum_{j=1}^{n}dz_j\wedge d\bar z_j$ с некоторой постоянной $c_2>0$, мы видим, что

$$(\operatorname{Ric}\Psi)^n\geqslant c_3 i^n\frac{dz_1\wedge d\bar z_1\wedge\ldots\wedge dz_n\wedge d\bar z_n+c_4\Lambda}{\prod_{i=1}^{k}(\log|z_i|^2)^2|z_i|^2}, \tag{6.8}$$

где коэффициенты формы Λ равны 0 в точке $(0, \ldots, 0)$ и c_3, $c_4>0$. А тогда найдется постоянная $c_5>0$, такая, что $(\operatorname{Ric}\Psi)^n>c_5\Psi$ в некоторой окрестности $U'\subset U$ точки x, где коэффициенты Λ малы. Так как V — компакт, то мы можем покрыть V конечным числом таких U' и получим на V неравенство $(\operatorname{Ric}\Psi)^n>c_6\Psi$ с некоторой постоянной $c_6>0$. Далее мы можем упростить это неравенство, заменяя Ω на $c_6\Omega$. Форма $\operatorname{Ric}\Psi$ от этого не изменится, и мы получим неравенство

$$(\operatorname{Ric}\Psi)^n>\Psi.$$

Наконец, нам надо показать, что $\int_{V\setminus D}(\operatorname{Ric}\Psi)^n<\infty$. Ввиду компактности V достаточно доказать сходимость локально, в окрестности каждой точки x. Выберем компактную окрестность $U'\subset U$ точки x; согласно нашим предыдущим вычислениям, получим, что локально

$$(\operatorname{Ric}\Psi)^n=\frac{\Phi}{\prod_{j=1}^{k}(\log|z_j|^2)^2|z_j|^2},$$

где Φ — гладкая форма на U'. Таким образом, $\int_{U'\setminus D}(\operatorname{Ric}\Psi)^n<\infty$, так как функция $\prod_{j=1}^{k}(\log|z_j|^2)^{-2}|z_j|^{-2}$ локально интегрируема в $\mathbb{C}^n$, поскольку $\int_0^\varepsilon(\log t)^{-2}t^{-1}\,dt<\infty$. ■

[1]) Напомним, что K_V — каноническое расслоение на V; см. § 0 (b). — *Прим. ред.*

Доказанное предложение можно слегка модифицировать, допуская случай $c(L)+c(K_V)=0$ при условии, что $c(L)>0$.

(6.9) Предложение. *Предположим, что* $c(L)+c(K_V)=0$ *и что дивизор* $D\in|L|$ *удовлетворяет условиям* (6.1). *Тогда существуют форма объема* Ω *на* V *и метрики на* L_j, *такие, что сингулярная форма объема*

$$\Psi_\varepsilon=\frac{\Omega}{\prod_{j=1}^{k}(\log|\sigma_j|^2)^2|\sigma_j|^{2+2\varepsilon}} \tag{6.10}$$

удовлетворяет условиям

$$\operatorname{Ric}\Psi_\varepsilon>0,\qquad (\operatorname{Ric}\Psi_\varepsilon)^n\geqslant|\sigma|^{2\varepsilon}\Psi_\varepsilon. \tag{6.11}$$

Доказательство. Выберем метрики на L_j так, чтобы $\omega=-dd^c\log|\sigma|^2=-\sum_{j=1}^{k}dd^c\log|\sigma_j|^2>0$. Тогда для любой формы объема Ω'

$$\omega+\operatorname{Ric}\Omega'=dd^c\rho,$$

где ρ — некоторая действительная C^∞-функция. Пусть $\Omega=e^{-\rho}\Omega'$; тогда форма $\omega+\operatorname{Ric}\Omega=0$.

Проводя те же вычисления, которые привели нас к (6.5), получаем

$$\operatorname{Ric}\Psi_\varepsilon=\varepsilon\omega-\sum_{j=1}^{k}dd^c\log(\log|\sigma_j|^2)^2, \tag{6.12}$$

а так как $\varepsilon\omega>0$, то, по аналогии с (6.6),

$$\operatorname{Ric}\Psi_\varepsilon\geqslant c_1\varepsilon\omega+\sum_{j=1}^{k}\frac{d\log|\sigma_j|^2\wedge d^c\log|\sigma_j|^2}{(\log|\sigma_j|^2)^2}\geqslant 0. \tag{6.13}$$

Продолжая, как выше, и используя те же обозначения, мы приходим к неравенству

$$(\operatorname{Ric}\Psi_\varepsilon)^n\geqslant\prod_{j=1}^{k}|z_j|^{2\varepsilon}\frac{c_3 i^n\,dz_1\wedge d\bar z_1\wedge\ldots\wedge dz_n\wedge d\bar z_n+c_4\Lambda}{\prod_{j=1}^{k}(\log|z_j|^2)^2|z_j|^{2+2\varepsilon}}\geqslant \tag{6.14}$$

$$\geqslant c_6|\sigma|^{2\varepsilon}\Psi_\varepsilon.$$

Заменяя Ω на $c_6\Omega$, мы заключаем, что $(\operatorname{Ric}\Psi_\varepsilon)^n\geqslant|\sigma|^{2\varepsilon}\Psi_\varepsilon$.

Остальное делается точно так же, как при доказательстве предложения (6.2). ■

(6.15) Пример. Предложение (6.9) можно применять, когда $c(K_V^*)>0$ [1]; особенно нас будет интересовать случай, когда $V=\mathbf{P}^n$ и $D=\sum_{l=0}^{n}H_l$ — объединение $n+1$ гиперплоскостей в общем положении.

Замечание. В случае $n=1$ многообразие V является компактной римановой поверхностью рода g и $D=\{x_1,\ldots,x_N\}$ состоит из N различных точек. Условие $c(L)+c(K_V)>0$ в (6.2) сводится к неравенству

$$2g-2+N>0,$$

и в этом случае предложение (6.2) равнозначно возможности построения на $V\setminus\{x_1,\ldots,x_N\}$ метрики с гауссовой кривизной $K(x)\leqslant-1$. Если $g>1$, то мы можем взять $N=0$; если $g=1$, можно взять $N=1$, а для $V=\mathbf{P}^1$ должно быть $N\geqslant 3$. Во всех этих случаях метрика, задаваемая формулой (6.3), полна.

Предложение (6.9) (при $n=1$) применимо только к $\mathbf{P}^1$; оно утверждает, что на $\mathbf{P}^1\setminus\{0,\infty\}\cong\mathbf{C}^*$ существует метрика, гауссова кривизна которой всюду отрицательна и удовлетворяет неравенству $K(z)\leqslant-|z|^{2\varepsilon}$ в окрестности точки $z=0$ и аналогичному неравенству в окрестности $z=\infty$. Из результатов Грина и Ву следует, что эта оценка точная.

Наше последнее предложение о формах объема применимо в ситуации, прямо противоположной ситуации предложения (6.9). А именно напомним, что гладкое проективное многообразие V_n называется многообразием *общего типа*, если

$$\varlimsup_{k\to\infty}\frac{\dim H^0(V,K_V^k)}{k^n}>0.$$

Это условие заведомо выполняется, если, например, каноническое расслоение V положительно. Из [14] мы знаем, что если V — многообразие общего типа и $L\to V$ — обильное линейное расслоение, то

$$H^0(V,K_V^k\otimes L^*)\neq 0$$

для некоторого достаточно большого k.

(6.16) Предложение. *Если* Ω — *некоторая* C^∞-*форма объема на комплексном многообразии* V, $L\to V$ — *положительное голоморфное линейное расслоение и* $\sigma\in H^0(V,K_V^k\otimes L^*)$ — *сечение, не обра-*

[1]) Здесь и далее K_V^* — антиканоническое расслоение на V; его форма Чжэня $c(K_V^*)=-c(K_V)$. — *Прим. ред.*

щающееся в 0, *то форма объема* $\Psi = |\sigma|^{2/k}\Omega$ *на всем* V *удовлетворяет условию*

$$\mathrm{Ric}\,\Psi > 0$$

(*метрика на* K_V *индуцируется формой* Ω).

Доказательство. Учитывая (0.1), (0.2) и (0.5), имеем

$$\mathrm{Ric}\,\Psi = k^{-1}dd^c \log|\sigma|^2 + \mathrm{Ric}\,\Omega =$$
$$= k^{-1}[-kc(K_V) + c(L)] + c(K_V) = \frac{1}{k}c(L) > 0. \blacksquare$$

(b) ВТОРАЯ ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Мы сохраним обозначения из § 6 (a) и рассмотрим голоморфное отображение

$$f\colon A_m \to V_n \qquad (m \geqslant n)$$

гладкого аффинного многообразия A в V, причем будем предполагать, что f имеет максимальный ранг n. Это требование эквивалентно тому, что образ $f(A)$ содержит некоторое открытое множество на V. Мы будем также пользоваться проекцией

$$\pi\colon A \to \mathbf{C}^m,$$

рассмотренной в § 2 (b). Введем еще следующие обозначения, относящиеся к π:

$$\tau = \log\|\pi(x)\|^2 \quad (x \in A), \qquad \eta = d^c\tau \wedge \psi_{m-1},$$
$$\psi = dd^c\tau, \qquad \varphi = dd^c\|\pi(x)\|^2,$$
$$\psi_k = \underbrace{\psi \wedge \ldots \wedge \psi}_{k}, \qquad \Phi = \varphi_m.$$

Прежде чем формулировать и доказывать нашу II о. т., нужно доказать одну локальную лемму о сингулярных формах объема. Пусть $U \subset \mathbf{C}^m$ — открытое множество, $\Phi(w) = \prod_{j=1}^{m}\left(\frac{i}{2}dw_j \wedge d\bar{w}_j\right)$ — евклидова форма объема в $\mathbf{C}^m$ и

$$\Psi = \frac{|\gamma|^2\,\Phi(w)}{(\log|\delta|^2)^2\,|\delta|^{2\lambda}} \tag{6.17}$$

— сингулярная форма объема; здесь $\gamma = \alpha e^a$ и $\delta = \beta e^b$, $\alpha, \beta \in \mathscr{O}(U)$, $a, b \in C^\infty(U)$. Ясно, что $\mathrm{Ric}\,\Psi \in L^1_{(1,1)}(\mathrm{loc}, U)$.

(6.18) Лемма. *Представим* Ψ *в виде* $\Psi = \zeta\Phi(w)$. *Тогда функция* $\log\zeta$ *локально интегрируема на* U *и удовлетворяет уравнению в потоках*

$$dd^c\log\zeta = \mathrm{Ric}\,\Psi + D_\alpha - \lambda D_\beta,$$

где $D_\alpha = (\alpha)$ *и* $D_\beta = (\beta)$.

Доказательство. Учитывая (0.5) и (0.11), нам надо показать, что

$$\left\{\begin{matrix} dd^c\log(\log|\delta|^2)^2 \\ \text{в смысле потоков}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} dd^c\log(\log|\delta|^2)^2 \\ \text{в смысле дифференциальных форм}\end{matrix}\right\}.$$

Совпадение этих объектов следует из того, что

$$\int_U \partial\bar{\partial}\log(\log|\delta|^2)^2 \wedge \sigma = \int_U \log(\log|\delta|^2)^2\,\partial\bar{\partial}\sigma$$

для всех $\sigma \in A_c^{n-1,\,n-1}(U)$. Это равенство в свою очередь легко проверяется прямым вычислением. ■

Возвращаясь к голоморфному отображению $f\colon A \to V$, рассмотрим дивизор D на V, удовлетворяющий условиям (6.1), и обозначим через $\Psi_f = f^*\Psi$ прообраз формы объема, построенной в предложении (6.2). Так как f имеет максимальный ранг, то Ψ_f отлична от тождественного нуля. Поэтому мы можем выбрать линейные координаты $z_1, \ldots, z_m$ в $\mathbf{C}^m$ так, что

$$\Psi_f \wedge \pi^*\left\{\prod_{j=1}^{m-n}\left(\frac{i}{2}dz_j \wedge d\bar{z}_j\right)\right\} = \xi\Phi, \tag{6.19}$$

где функция $\xi \geqslant 0$ отлична от тождественного нуля. Локальное поведение ξ в основных чертах таково:

(i) $\xi = +\infty$ вдоль дивизора $D_f = f^{-1}(D)$;

(ii) $\xi = +\infty$ вдоль множества ветвления B отображения $A \xrightarrow{\pi} \mathbf{C}^m$;

(iii) $\xi = 0$ вдоль дивизора R критических точек отображения f;

(iv) $\xi = 0$ вдоль дивизора T, определяемого условиями

$$\Psi_f \wedge \pi^*\left\{\prod_{j=1}^{m-n}\left(\frac{i}{2}dz_j \wedge d\bar{z}_j\right)\right\} = 0, \quad \text{но} \quad \Psi_f \not\equiv 0;$$

(v) в остальном ξ конечна и отлична от нуля.

(6.20) Лемма. *Положим* $S = R + T$. *Функция* $\log\xi$ *локально интегрируема на* A *и удовлетворяет уравнению в потоках*

$$dd^c\log\xi = S - B - D_f + \mathrm{Ric}\,\Psi_f. \tag{6.21}$$

Доказательство. Это следует из лемм (2.9), (6.18) и соотношений (6.3) и (6.17). ■

Наша II о. т. представляет собой дважды проинтегрированный вариант соотношения (6.21), подобно тому, как I о. т. (5.11) — дважды проинтегрированный вариант (1.14). Учитывая

сказанное в § 1 (d) о числах Лелона и следуя (3.1), предположим, что ни один из дивизоров S, B, D_f не пересекает $\pi^{-1}(0)$, и введем следующие обозначения:

$$(6.22)\quad \begin{cases} T^{\#}(r) = \int_0^r \left\{ \int_{A[t]} \mathrm{Ric}\,\Psi_f \wedge \varphi_{m-1} \right\} \frac{dt}{t^{2m-1}}, \\ N(E, r) = \int_0^r \left\{ \int_{E[t]} \psi_{m-1} \right\} \frac{dt}{t} \quad (E - \text{дивизор на } A), \\ \mu(r) = \int_{\partial A[r]} \log \xi \cdot \eta. \end{cases}$$

(6.23) Предложение (II о. т.). *Для $r \geqslant r_0$ имеет место соотношение*

$$T^{\#}(r) + N(S, r) = N(B, r) + N(D_f, r) + \mu(r).$$

Доказательство. Следуя методу, который использовался при доказательстве предложения (3.2), мы можем проинтегрировать (6.21) один раз и получить соотношение

$$(6.24)\quad \int_{A[t]} \mathrm{Ric}\,\Psi_f \wedge \psi_{m-1} + \int_{S[t]} \psi_{m-1} = \int_{B[t]} \psi_{m-1} + \int_{D_f[t]} \psi_{m-1} + \int_{\partial A[t]} d^c \log \xi \wedge \psi_{m-1},$$

справедливое для всех t, исключая не более чем конечное число значений. Далее, $\mathrm{Ric}\,\Psi_f \in L^1_{(1,1)}(\mathrm{loc}, A)$ и $d\,\mathrm{Ric}\,\Psi_f = 0$ в смысле потоков. Так как π: $A \to \mathbf{C}^m$ — конечнократное и, значит, собственное отображение, то можно проинтегрировать $\mathrm{Ric}\,\Psi_f$ по слоям и получить форму $\pi_*\,\mathrm{Ric}\,\Psi_f \in L^1_{(1,1)}(\mathrm{loc}, \mathbf{C}^m)$, по-прежнему замкнутую. Таким образом, $\pi_*\,\mathrm{Ric}\,\Psi_f = d\rho$, где ρ — локально интегрируемая дифференциальная форма на $\mathbf{C}^m$, и

$$\begin{aligned} \int_{A[t]} \mathrm{Ric}\,\Psi_f \wedge \psi_{m-1} &= \int_{\mathbf{C}^m[t]} \pi_*\,\mathrm{Ric}\,\Psi_f \wedge (dd^c \log \|z\|^2)^{m-1} = \\ &= \int_{\partial \mathbf{C}^m[t]} \rho \wedge (dd^c \log \|z\|^2)^{m-1} = && \text{(теорема Стокса)} \\ &= \frac{1}{t^{2m-2}} \int_{\partial \mathbf{C}^m[t]} \rho \wedge (dd^c \|z\|^2)^{m-1} = && \text{(доказательство (1.16))} \\ &= \frac{1}{t^{2m-2}} \int_{\mathbf{C}^m[t]} \pi_*\,\mathrm{Ric}\,\Psi_f \wedge (dd^c \|z\|^2)^{m-1} = && \text{(теорема Стокса)} \\ &= \frac{1}{t^{2m-2}} \int_{A[t]} \mathrm{Ric}\,\Psi_f \wedge \varphi_{m-1}. \end{aligned}$$

Используя это соотношение и интегрируя (6.24) по dt/t от 0 до r, находим

$$(6.25)\quad T^{\#}(r) + N(S, r) = N(B, r) + N(D_f, r) + \int_{A[r]} d\tau \wedge d^c\xi \wedge (dd^c\tau)^{m-1}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} d\tau \wedge d^c\xi \wedge (dd^c\tau)^{m-1} &= -\,d^c\tau \wedge d\xi \wedge (dd^c\tau)^{m-1} = \\ &= d\xi \wedge d^c\tau \wedge (dd^c\tau)^{m-1} = \\ &= d(\xi\eta), \end{aligned}$$

так как $(dd^c\tau)^m = 0$. Используя это равенство и применяя теорему Стокса к последнему члену справа в (6.25), мы получаем нашу формулу. ■

7. СООТНОШЕНИЯ ДЕФЕКТОВ

(a) НЕВАНЛИННОВСКИЕ ДЕФЕКТЫ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Пусть A — гладкое аффинное алгебраическое многообразие и V — гладкое проективное многообразие, на котором имеется положительное линейное расслоение $L \to V$ с формой кривизны ω. Мы хотим изучить голоморфное отображение

$$f\colon A \to V,$$

обращая особое внимание на расположение образа $f(A)$ относительно дивизоров $D \in |L|$. Пусть $\omega_f = f^*\omega$ и τ — специальная функция исчерпания на A, построенная в предложении (2.4). Определим *функцию порядка для линейного расслоения* $L \to V$ формулой

$$(7.1)\quad T(L, r) = \int_0^r \left\{ \int_{A[t]} \omega_f \wedge (dd^c\tau)^{m-1} \right\} \frac{dt}{t}.$$

В § 5 эта функция обозначалась через $T_1(r)$, но здесь мы хотим подчеркнуть ее зависимость от L. Обращаясь к (5.3), (5.8) и (5.9), убеждаемся, что $T(L, r)$ обладает следующими свойствами:

$$(7.2)\quad \begin{cases} T(L, r) \text{ определена с точностью до члена } O(1); \\ T(L_1 \otimes L_2, r) = T(L_1, r) + T(L_2, r); \\ \text{отображение } f \text{ рационально} \Leftrightarrow T(L, r) = O(\log r). \end{cases}$$

Для любого дивизора $D \in |L|$ справедлива первая основная теорема (5.11) и вытекающее из нее неравенство Неванлинны (5.12);

повторим их здесь, чтобы удобнее было ссылаться:

$$N(D_f, r)+m(D, r)=T(L, r)+O(1),$$
$$N(D_f, r)\leqslant T(L, r)+O(1). \tag{7.3}$$

Сошлемся еще раз на § 3 (c), где рассматривался член $O(1)$, зависящий от D, но не зависящий от r. Имея в виду неравенство из (7.3), мы можем определить *дефект* дивизора D:

$$\delta(D)=1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(D_f, r)}{T(L, r)}; \tag{7.4}$$

он обладает следующими основными свойствами:

(7.5) $0\leqslant\delta(D)\leqslant 1$, причем $\delta(D)=1$, если $f(A)$ не пересекает D.

В общем случае дивизор $D\in|L|$ называется *дефектным*, если $\delta(D)>0$. Это означает, что дивизор $D_f=f^{-1}(D)$ меньше (в смысле роста объема), чем в среднем. Из (5.18) получаем соотношение

$$\int_{D\in|L|}\delta(D)\,d\mu(D)=0, \tag{7.6}$$

которое означает, что в смысле теории меры почти все дивизоры D_f имеют такой же асимптотический рост, как и функция порядка $T(L, r)$. Основная проблема теории распределения значений дивизоров на алгебраических многообразиях в общих чертах такова:

(*) Доказать существование константы $c=c(V, L)$, такой, что если $D_1, \ldots, D_k\in|L|$ — гладкие дивизоры, $D=D_1+\ldots+D_k$ имеет нормальные самопересечения и образ $f(A)$ удовлетворяет слабому требованию общего положения, то

$$\sum_{j=1}^{k}\delta(D_j)\leqslant c. \tag{7.7}$$

Из такого *соотношения дефектов* (7.7) следовало бы, в частности, что если расслоение $L\to V$ обильное, то дефектные дивизоры образуют не более чем счетное семейство элементов $|L|$. Таким образом, если $\dim_{\mathbf{C}}|L|=N$ и если $\triangle=\{D\in|L|\colon \delta(D)>0\}$ — множество дефектных дивизоров, то его $(2N-1)$-мерная мера Хаусдорфа должна равняться нулю. Однако до сих пор даже это слабое утверждение не доказано.

Геометрически простейшая ситуация возникает, когда образ $f(A)$ содержит множество, открытое на V. В этом случае наш основной результат заключается в следующем соотношении дефектов (с. д.):

(7.8) Теорема. *Предположим, что образ $f(A)$ содержит открытое подмножество из V, и пусть $D_1, \ldots, D_k\in|L|$ — гладкие дивизоры, такие, что $D=D_1+\ldots+D_k$ имеет нормальные самопересечения. Тогда*

$$\sum_{j=1}^{k}\delta(D_j)\leqslant\frac{c(K_V^*)}{c(L)}+\varkappa, \tag{с. д.}$$

где $\varkappa$ — константа, равная нулю, если $A=\mathbf{C}^m$ или если отображение f трансцендентно [1]).

Замечание. Прежде чем приступать к формальному доказательству (с. д.), приведем некоторые эвристические соображения. Предположим, что $L_1\to V$ — положительное линейное расслоение, удовлетворяющее условию

$$c(L_1)+c(K_V)>0,$$

и возьмем дивизор $D\in|L_1|$ с нормальными самопересечениями. (В доказательстве теоремы (7.8) мы будем брать $L_1=L^k$.) Тогда мы можем построить форму объема Ψ, задаваемую формулой (6.3) с особенностями вдоль D. Объединяя I о. т. (5.11) и II о. т. (6.23), получаем неравенства

$$\begin{cases} N(D_f, r)\leqslant T(L_1, r)+O(1), \\ T^{\#}(r)\leqslant N(B, r)+N(D_f, r)+\mu(r). \end{cases} \tag{7.9}$$

Первое из них дает оценку считающей функции $N(D_f, r)$ *сверху*, а второе, как окажется потом, дает оценку $N(D_f, r)$ *снизу*. Сопоставление этих двух оценок и приведет к соотношению (7.8).

Подробнее, пользуясь условием $(\mathrm{Ric}\,\Psi)^n\geqslant\Psi$, мы получим приблизительное неравенство

$$\mu(r)\leqslant\log\frac{d^2T^{\#}(r)}{dr^3}. \tag{7.10}$$

Из (6.5) мы выведем также приблизительное равенство

$$T^{\#}(r)=T(L_1, r)+T(K_V, r). \tag{7.11}$$

Неравенство (7.10) делает вполне правдоподобным соотношение

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\mu(r)}{T^{\#}(r)}=0.$$

Если теперь воспользоваться (7.11), то второе неравенство в (7.9) можно будет переписать в виде

$$1\leqslant\varkappa_1+\frac{N(D_f, r)}{[T(L_1, r)+T(K_V, r)]}+o(1), \tag{7.12}$$

[1]) Неравенство в (с. д.) означает, что справедливо неравенство с (1, 1)-формами, которое получается из (с. д.) умножением обеих частей на $c(L)$. — *Прим. ред.*

где $\varkappa_1 = \overline{\lim}_{r\to\infty} [N(B, r)/T^{\#}(r)]$ — член, не зависящий от D и равный нулю в случае, когда $A = \mathbf{C}^m$. Если пренебречь $\varkappa_1$, то из неравенства (7.12) легко понять, что II о. т. действительно дает оценку снизу величины $N(D_f, r)$. Если все это проделать точно, мы получим (7.8).

(b) ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ СООТНОШЕНИЕ ДЕФЕКТОВ

В этом параграфе мы предполагаем, что f: $A \to V$ — голоморфное отображение, образ которого $f(A)$ содержит открытое подмножество V, что $L_1 \to V$ — положительное линейное расслоение, удовлетворяющее условию

$$c(L_1) + c(K_V) > 0,$$

и что $D \in |L_1|$ — дивизор с простыми нормальными самопересечениями. В этом случае применимы результаты § 6 (b), и, в частности, для изучения дивизора D_f на A мы можем использовать II о. т. (6.23). Имея в виду лемму (6.20), обозначим через $N_1(r) = \int_0^r \left\{ \int_{R[t]} \psi_{m-1} \right\} \frac{dt}{t}$ считающую функцию для множества критических точек отображения f: $A \to V$ и перепишем (6.23) в виде неравенства

$$T^{\#}(r) + N_1(r) \leqslant N(B, r) + N(D_f, r) + \mu(r). \tag{7.13}$$

(7.14) Лемма. *Существует константа $c > 0$, такая, что при $r \geqslant 1$*

$$T^{\#}(r) \geqslant c \log r.$$

Доказательство. Ссылаясь на доказательство (6.23), при $r \geqslant 1$ мы получаем соотношение

$$T^{\#}(r) = \int_0^r \left\{ \int_{\mathbf{C}^m[t]} \pi_*(\mathrm{Ric}\,\Psi_f) \wedge \psi_{m-1} \right\} \frac{dt}{t},$$

из которого следует неравенство

$$T^{\#}(r) \geqslant c_1 \log r + O(1),$$

где

$$c_1 = \int_{\mathbf{C}^m[1]} \pi_*(\mathrm{Ric}\,\Psi_f) \wedge \psi_{m-1} = \int_{\mathbf{C}^m[1]} \pi_*(\mathrm{Ric}\,\Psi_f) \wedge \varphi_{m-1}$$

— положительная константа в силу первого из условий (6.4) на Ψ (мы снова воспользовались доказательством (6.23)).

(7.15) Лемма. *Справедливо неравенство*

$$\varkappa_1 = \overline{\lim}_{r\to\infty} \frac{N(B, r)}{T^{\#}(r)} < \infty.$$

Доказательство. Так как множество ветвления B проекции π: $A \to \mathbf{C}^m$ является алгебраическим дивизором, то из (4.1) следует, что при больших r

$$N(B, r) \leqslant d \cdot \log r,$$

где d, $0 < d < \infty$, — некоторая константа. Учитывая (7.14), получаем, что

$$\frac{N(B, r)}{T^{\#}(r)} \leqslant \frac{d}{c}$$

для всех достаточно больших r. ■

Наше предварительное соотношение дефектов заключается в следующем.

(7.16) Предложение. *В принятых выше обозначениях имеет место неравенство*

$$1 + \varliminf_{r\to\infty} \frac{N_1(r)}{T^{\#}(r)} \leqslant \varkappa_1 + \overline{\lim}_{r\to\infty} \frac{N(D_f, r)}{T^{\#}(r)}.$$

Доказательство. Мы хотим использовать условие на кривизну

$$(\mathrm{Ric}\,\Psi_f)^n \geqslant \Psi_f, \tag{7.17}$$

чтобы оценить $T^{\#}(r)$ снизу. При этом мы принимаем следующие обозначения:

(i) $z = (z_1, \ldots, z_m)$ — координаты в $\mathbf{C}^m$;

(ii) $I = \{1, \ldots, m\}$ и $J \subset I$ пробегает все подмножества, содержащие n различных элементов;

(iii) $J_0 = \{1, \ldots, n\}$;

(iv) $\Phi_K = \prod_{j\in K} \left(\frac{i}{2} dz_j \wedge d\bar{z}_j \right)$ для любого $K \subset I$.

Если положить $\Psi_f = \sum_{J\subset I} \xi_J \Phi_J$, то из определения (6.19) получится, что $\xi = \xi_{J_0}$. Определим вспомогательную функцию порядка

$$T^{\#\#}(r) = \int_0^r \left\{ \int_{A[t]} n \xi^{1/n} \Phi \right\} \frac{dt}{t^{2m-1}}. \tag{7.18}$$

(7.19) Лемма. *Имеет место оценка*

$$T^{\#\#}(r) \leqslant T^{\#}(r).$$

Доказательство. Запишем $(\mathrm{Ric}\,\Psi_f)^n$ в виде $(\mathrm{Ric}\,\Psi_f)^n = \sum_{J\subset I} \zeta_J \Phi_J$ $(\zeta_J \geqslant 0)$; тогда из условия на кривизну (7.17) получается, что $\zeta_J \geqslant \xi_J$ для всех J и, в частности,

$$n\xi_{J_0}^{1/n} \leqslant n\zeta_{J_0}^{1/n}. \tag{7.20}$$

Имеем $\mathrm{Ric}\,\Psi_f \wedge \varphi_{m-1} = \sum_{J\subset I} \left\{\sum_{j\in J} \mathrm{Ric}\,\Psi_f \wedge \Phi_{J\setminus\{j\}}\right\} \wedge \Phi_{I\setminus J}$; применяя еще неравенство $\mathrm{tr}\,H \geqslant n\,(\det H)^{1/n}$ для следа положительных эрмитовых матриц H, мы получим неравенства с формами

$$n\xi_{J_0}^{1/n}\Phi \leqslant \sum_{j\in J_0} \mathrm{Ric}\,\Psi_f \wedge \Phi_{J_0\setminus\{j\}} \wedge \Phi_{I\setminus J_0} \leqslant \mathrm{Ric}\,\Psi_f \wedge \varphi_{m-1} \tag{7.21}$$

(H — матрица из коэффициентов $\mathrm{Ric}\ \Psi_f$). Лемма получается теперь из неравенств (7.20) и (7.21) интегрированием. ■

(7.22) Лемма. *Введем обозначение* $d/ds = r^{2m-1}(d/dr)$; *имеет место неравенство*

$$\mu(r) \leqslant n \log \frac{d^2 T^{\#\#}(r)}{ds^2} - n(4m-2)\log r.$$

Доказательство. Используя определение (6.22) и вогнутость логарифма, получаем

$$\begin{aligned}
\mu(r) &= \int_{\partial A[r]} n \log \xi^{1/n}\eta \leqslant n \log\left\{\int_{\partial A[r]} \xi^{1/n}\eta\right\} = \\
&= n \log\left\{\frac{1}{r^{2m-1}}\frac{d}{dr}\int_{A[r]} n\xi^{1/n}\Phi\right\} - n\log n = \\
&= n \log\left\{\frac{1}{r^{2m-1}}\frac{d}{dr}\left[r^{2m-1}\frac{dT^{\#\#}(r)}{dr}\right]\right\} + O(1) = \\
&= 2n \log\frac{1}{r^{2m-1}} + n\log\frac{d^2T^{\#\#}(r)}{ds^2} + O(1). \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Теперь нам надо избавиться от производных перед $T^{\#\#}(r)$. Для этого воспользуемся следующей леммой из действительного переменного (см. [16, стр. 253]):

(7.23) Лемма. *Предположим, что* $f(r)$, $g(r)$ *и* $\alpha(r)$ *— положительные возрастающие функции от* r, *причем* $g'(r)$ *непрерывна, а* $f'(r)$ *кусочно-непрерывна. Предположим, кроме того, что* $\int^\infty \frac{dr}{\alpha(r)} < \infty$. *Тогда*

$$f'(r) \leqslant g'(r)\,\alpha(f(r))$$

всюду, за исключением открытого множества $I \subset \mathbf{R}^+$, *такого, что*

$$\int_I dg \leqslant \int^\infty \frac{dr}{\alpha(r)}.$$

Введем обозначение

$$a(r) \leqslant b(r) \qquad \|_g,$$

указывающее, что написанное неравенство имеет место всюду, за исключением некоторого открытого множества $I \subset \mathbf{R}^+$, такого, что $\int_I dg < \infty$. Полагая $f(r) = T^{\#\#}(r)$, $g(r) = r^\mu/\mu$ и $\alpha(r) = r^\nu$, где μ и $\nu > 1$, мы получаем из (7.23) неравенство

$$\frac{dT^{\#\#}(r)}{dr} \leqslant r^{\mu-1}(T^{\#\#})^\nu \qquad \|_g. \tag{7.24}$$

Сохраняя те же α и g и полагая $f(r) = r^{2m-1}(dT^{\#\#}(r)/dr) = \int_{A[r]} n\xi^{1/n}\Phi$, находим, что

$$\frac{d}{dr}\left(r^{2m-1}\frac{dT^{\#\#}(r)}{dr}\right) \leqslant r^{\mu-1}r^{(2m-1)\nu}\left(\frac{dT^{\#\#}(r)}{dr}\right)^\nu \qquad \|_g. \tag{7.25}$$

Сопоставление (7.24) и (7.25) приводит к оценке

$$\frac{d^2T^{\#\#}(r)}{ds^2} \leqslant r^{4m-2+\varepsilon}\,(T^{\#\#}(r))^{2+\delta} \qquad \|_g, \tag{7.26}$$

где ε, $\delta > 0$ можно сделать сколь угодно малыми, выбирая μ и ν достаточно близкими к 1. Комбинируя (7.26) с (7.22) и (7.19), получаем

$$\mu(r) \leqslant n\varepsilon \log r + (2+\delta)\log T^{\#}(r) + O(1) \qquad \|_g. \tag{7.27}$$

Теперь уже почти все готово, так как из (7.13) в сочетании с (7.27) получается оценка

$$\begin{aligned}
1 + \frac{N_1(r)}{T^{\#}(r)} \leqslant \frac{N(B,r)}{T^{\#}(r)} + \frac{N(D_f,r)}{T^{\#}(r)} + \frac{n\varepsilon\log r}{T^{\#}(r)} + \\
+ (2+\delta)\frac{\log T^{\#}(r)}{T^{\#}(r)} + \frac{O(1)}{T^{\#}(r)} \qquad \|_g.
\end{aligned} \tag{7.28}$$

Переходя в (7.28) к пределу при $r \to \infty$ и используя при этом (7.15) и (7.14), имеем неравенство

$$1 + \varliminf_{r\to\infty} \frac{N_1}{T^{\#}} \leqslant \varkappa_1 + \varlimsup_{r\to\infty} \frac{N(D_f)}{T^{\#}} + \frac{n\varepsilon}{c},$$

из которого при $\varepsilon \to 0$ получается наше предложение (7.16). ■

(c) ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО СООТНОШЕНИЯ ДЕФЕКТОВ

Примем обозначения и предположения теоремы (7.8). Из соотношения (7.6) видно, что почти все дивизоры $D \in |L|$ имеют дефект нуль. Добавление конечного числа таких дивизоров

в левой части неравенства (7.8) только увеличит число k, но не изменит суммы $\sum_j \delta(D_j)$. Таким образом, можно считать, что

$$c(L^k)+c(K_V)=kc(L)+c(K_V)>0. \tag{7.29}$$

Мы хотим применить предложение (7.16), взяв в качестве L_1 расслоение L^k. Кроме того, надо суметь сравнить функцию $T^{\#}(r)$, задаваемую формулой (6.22), с $kT(L, r)+T(K_V, r)$.

(7.30) Лемма. *Имеют место неравенства*

$$0\leqslant[kT(L, r)+T(K_V, r)]-T^{\#}(r)\leqslant 2\log[kT(L, r)+c].$$

Доказательство. Пусть $\sigma\in H^0(V, L^k)$ — сечение, определяющее D. Тогда, используя равенство $kT(L, r)=T(L^k, r)$ и соотношение (6.5), мы находим, что

$$kT(L, r)+T(K_V, r)-T^{\#}(r)= \tag{7.31}$$
$$=\int_0^r\left\{\int_{A[t]} dd^c\log(\log|\sigma_f|^2)^2\wedge\psi_{m-1}\right\}\frac{dt}{t}.$$

Рассуждая так же, как в доказательстве II о. т. (6.23) (см. также доказательство (6.18)), мы находим, что правая часть (7.31) равна

$$\int_{\partial A[r]}\log(\log|\sigma_f|^2)^2\eta.$$

Если взять $\|\sigma\|_V$ достаточно малой, то это выражение будет неотрицательным, и таким образом получится левое неравенство в (7.30). Для доказательства второго неравенства воспользуемся вогнутостью логарифма и из (5.10) и (5.11) найдем, что

$$\int_{\partial A[r]}\log(\log|\sigma_f|^2)^2\eta\leqslant 2\log\left(\int_{\partial A[r]}\log\frac{1}{|\sigma_f|^2}\eta\right)=$$
$$=2\log[m(D, r)]\leqslant 2\log(T(L^k, r)+c)\,^{1}).$$

Учитывая неравенство (7.29), обозначим через l произвольное положительное действительное число, такое, что

$$k-l\geqslant\frac{c(K_V^*)}{c(L)}. \tag{7.32}$$

[1]) Здесь использовано, что (5.11) в новых обозначениях переписывается в виде $N(D, r)+m(D, r)=T(L^k, r)$ и что $N(D, r)\geqslant 0$. — *Прим. ред.*

Затем, воспользовавшись определением (7.4), а также леммой (7.30) и предложением (7.16), получим

$$\sum_{j=1}^k\delta(D_j)=\sum_{j=1}^k\left[1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(D_j, r)}{T(L, r)}\right]\leqslant k-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(D, r)}{T(L, r)}=$$
$$=k-l\,\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(D, r)}{lT(L, r)}\leqslant k-l\,\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(D, r)}{kT(L, r)+T(K_V, r)}=$$
$$=k-l\,\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(D, r)}{T^{\#}(r)}\leqslant k-l(1-\varkappa_1).$$

Таким образом, доказано неравенство

$$\sum_{j=1}^k\delta(D_j)\leqslant k-l+\varkappa,$$

где $\varkappa=l\varkappa_1$. Так как l выбиралось только из одного условия (7.32), то мы доказали нашу теорему, кроме той части, где утверждается, что $\varkappa=0$, если $A=\mathbf{C}^m$ или f — трансцендентное отображение.

Вспоминая лемму (7.15), мы сразу получаем, что $\varkappa=\varkappa_1=0$, если $A=\mathbf{C}^m$, так как в этом случае дивизор ветвления $B=0$.

Предположим теперь, что $\varkappa=l\varkappa_1>0$; тогда, как видно из доказательства леммы (7.15),

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log r}{T^{\#}(r)}=c>0.$$

С учетом (7.30) это неравенство приводит к такому:

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log r}{T(L, r)}=c_1>0. \tag{7.33}$$

Полагая $v(L, r)=\int_{A[r]}\omega_f\wedge\psi_{m-1}$, мы по определению имеем

$$T(L, r)=\int_0^r v(L, t)\frac{dt}{t}.$$

Так как $v(L, r)$ — возрастающая функция от r, то $T(L, r)=O(\log r)$ тогда и только тогда, когда для всех r выполняется оценка

$$v(L, r)\leqslant c_3<\infty. \tag{7.34}$$

Если (7.34) не выполняется, то для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $r_0(\varepsilon)$, что для всех $r\geqslant r_0(\varepsilon)$

$$v(L, r)>\frac{1}{\varepsilon}.$$

Отсюда

$$T(L, r) > \frac{1}{\varepsilon}\log r - \frac{1}{\varepsilon}\log r_0(\varepsilon)$$

при $r \geqslant r_0(\varepsilon)$. Таким образом,

$$\frac{\log r}{T(L, r)} < \varepsilon \frac{\log r}{\log r - \log r_0},$$

откуда следует, что

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log r}{T(L, r)} \leqslant \varepsilon.$$

Сравнивая это с (7.33), мы приходим к утверждению

$$\varkappa \neq 0 \Rightarrow T(L, r) = O(\log r).$$

Но тогда из предложения (5.9) следует, что f — рациональное отображение. ■

8. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ

(а) ГОЛОМОРФНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ ОБЩЕГО ТИПА

Пусть V — гладкое проективное многообразие. Мы говорим, что V является многообразием общего типа, если

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\dim H^0\left(V, K_V^k\right)}{k^n} > 0,$$

где $K_V \to V$ — каноническое расслоение на V. Если K_V положительно, то V — общего типа, но обратное не совсем верно. В самом деле, свойство быть многообразием общего типа является бирациональным инвариантом, а положительность K_V таковым не является. Частные случаи следующего результата были получены в работах [11] и [14].

(8.1) Предложение. *Пусть A — алгебраическое многообразие и V — многообразие общего типа. Тогда любое голоморфное отображение $f\colon A \to V$, образ которого содержит открытое подмножество V, обязательно является рациональным.*

Доказательство. Очевидно, достаточно предположить, что A гладкое и аффинное. Пусть $\pi\colon A \to \mathbf{C}^m$ — проекция, построенная в § 2, и Ψ — форма объема, фигурирующая в предложении (6.16). Так как f на открытом множестве имеет максимальный

ранг, то форма $f^*\Psi = \Psi_f$ на A отлична от тождественного нуля и мы можем так выбрать координаты в $\mathbf{C}^m$, что

$$\Psi_f \wedge \pi^*\left\{\prod_{j=n+1}^{m}\left(\frac{i}{2}\,dz_j \wedge d\bar{z}_j\right)\right\} = \xi\Phi,$$

где $\xi \geqslant 0$ и $\not\equiv 0$. Используя (6.11), мы, так же как в лемме (6.20) получаем следующее равенство потоков на A:

$$dd^c \log \xi = S + \frac{1}{k}D_f - B + \operatorname{Ric}\Psi_f. \tag{8.2}$$

Теперь можно повторить доказательство II о. т. (6.23) и, используя обозначения (6.22), получить соотношение

$$T^{\#}(r) + N(S, r) + \frac{1}{k}N(D_f, r) = N(B, r) + \mu(r). \tag{8.3}$$

Так как форма $\operatorname{Ric}\Psi$ бесконечно дифференцируема и положительно определена на V, то, полагая

$$T^{\#\#}(r) = \int_0^r \left\{\int_{A[t]} \xi^{1/n}\Phi\right\}\frac{dt}{t^{2m-1}},$$

мы получаем, как в доказательстве леммы (7.19), оценку

$$cT^{\#\#}(r) \leqslant T^{\#}(r) \quad (c > 0). \tag{8.4}$$

Теперь воспользуемся уже известными неравенствами:

$$N(B, r) \leqslant c_2 \log r \text{ (см. (4.1)) и}$$

$$\mu(r) \leqslant n \log \frac{d^2T^{\#\#}(r)}{ds^2} + c_3 \log r \text{ (см. (7.22)).}$$

Тогда из (8.4) и (8.3) мы получим неравенство

$$T^{\#\#}(r) + \varepsilon N(D_f, r) \leqslant c_4 \log r + \log \frac{d^2T^{\#\#}(r)}{ds^2}. \tag{8.5}$$

Рассуждая так же, как сразу после леммы (7.23), выводим из (8.5) соотношение

$$1 + \varepsilon \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(D_f, r)}{T^{\#\#}(r)} \leqslant c_4 \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log r}{T^{\#\#}(r)}. \tag{8.6}$$

Из этой оценки снизу для правой части (8.6), очевидно, вытекает неравенство

$$T^{\#\#}(r) \leqslant c_5 \log r.$$

Используя его в левой части (8.6), мы приходим к оценке

$$N(D_f, r) \leqslant c_6 \log r.$$

Но тогда по предложению (4.1) все дивизоры D_f — алгебраические и ограниченной степени. А отсюда уже следует, что f — рациональное отображение. ■

(8.7) Следствие (Кодаира). *Пусть V — алгебраическое многообразие общего типа. Тогда любое голоморфное отображение f: $\mathbf{C}^m \to V$ всюду имеет ранг, меньший чем $n = \dim_{\mathbf{C}} V$.*

(b) ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМ ПИКАРА

Большая теорема Пикара в теории функций одного комплексного переменного допускает следующую глобальную формулировку: «Пусть A — аффинная алгебраическая кривая. Тогда любое невырожденное голоморфное отображение f: $A \to \mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ обязательно рационально. Если $A = \mathbf{C}$, то таких отображений не существует».

В нашем обобщении этого результата мы предполагаем, что V — гладкое проективное многообразие, $L \to V$ — положительное линейное расслоение, такое, что

$$c(L) + c(K_V) > 0,$$

и $D \in |L|$ — дивизор с простыми нормальными самопересечениями.

(8.8) Предложение. *Пусть f: $A \to V \setminus D$ — голоморфное отображение алгебраического многообразия A в V, такое, что образ $f(A)$ содержит некоторое открытое подмножество V. Тогда f рационально, а если $A = \mathbf{C}^m$, то таких отображений не существует.*

Доказательство. Так как $f(A)$ не пересекает D, то считающая функция $N(D_f, r) \equiv 0$. Поэтому из предложения (7.16) мы получаем, что $\varkappa_1 > 0$, а отсюда, как и в доказательстве предложения (8.1), следует, что f — рациональное отображение.

Замечание. Большая теорема Пикара в локальной форме будет доказана ниже, в приложении. В этом дополнительном доказательстве будет использовано только предложение (6.2), лемма Альфорса (см. предложение (2.7) в [11]) и элементарные свойства потоков и плюрисубгармонических функций.

(c) ГОЛОМОРФНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Пусть V — гладкое проективное многообразие, $L \to V$ — положительное линейное расслоение с функцией порядка $T(L, r)$ и

$$f\colon A \to V$$

— голоморфное отображение аффинного многообразия A в V.

Определение. Голоморфное отображение f имеет *конечный порядок*, если $T(L, r) = O(r^\lambda)$ для некоторого $\lambda > 0$.

Замечание. Из (7.2) видно, что отображения конечного порядка обладают следующими функториальными свойствами:

(i) определение конечности порядка является внутренним (т. е. не зависит от выбора положительного линейного расслоения L и метрики на L);

(ii) для заданных отображений f: $A \to V$ и g: $A \to W$ произведение $f \times g$: $A \to V \times W$ имеет конечный порядок тогда и только тогда, когда оба отображения f и g конечного порядка.

Одним из важных свойств отображений конечного порядка является то, что они образуют класс трансцендентных отображений, наиболее естественно возникающий при изучении аналитических колец Гротендика для аффинных алгебраических многообразий. Кроме того, в классической ситуации на плоскости $\mathbf{C}$ класс функций конечного порядка содержит большинство трансцендентных функций, возникающих в анализе и теории чисел.

В теории распределения значений отображения конечного порядка обладают одним приятным свойством: для них не надо выбрасывать исключительные интервалы, которые появлялись в доказательстве предложения (7.16) (см. лемму (7.23)).

(8.9) Предложение. *Сохраняя обозначения и условия теоремы* (7.8), *предположим еще, что f имеет конечный порядок. Тогда I о. т. и II о. т. дают следующие неравенства, справедливые для* **всех** *достаточно больших r*:

$$N(D_f, r) \leqslant kT(L, r) + O(1),$$
$$T^{\#}(r) \leqslant N(D_f, r) + O(\log r),$$
$$T^{\#}(r) = kT(L, r) + T(K_V, r) + O(\log r).$$

Замечание. Эти неравенства еще раз показывают, как из первой и второй основных теорем получаются соответственно верхняя и нижняя оценки считающей функции $N(D_f, r)$.

Доказательство. Первое неравенство — это просто другая формулировка (5.12), а третье следует из (7.30) и предположения о конечности порядка

$$T(L, r) = O(r^\lambda). \tag{8.10}$$

Для доказательства оставшегося неравенства мы используем II о. т. (6.23):

$$T^{\#}(r) + N(S, r) = N(B, r) + N(D_f, r) + \mu(r). \tag{8.11}$$

Если учесть (8.11) и (4.1), то нужно лишь доказать следующую лемму (у нас $N(S, r) \geqslant 0$, а $N(B, r) = O(\log r)$ — *Ред.*).

(8.12) Лемма. *Величина* $\mu(r)$ *в* (8.11) *для всех достаточно больших* r *удовлетворяет оценке*

$$\mu(r) = O(\log r).$$

Доказательство. Неравенства (7.22) и (7.19) дают

$$(8.13)\qquad \begin{cases} \mu(r) \leqslant n \log \dfrac{d^2 T^{\#\#}(r)}{ds^2} + O(\log r), \\ T^{\#\#}(r) \leqslant T^{\#}(r). \end{cases}$$

По соображениям, изложенным после леммы (7.23), для любого $\mu_0 > 0$ из неравенств (8.13) вытекает оценка

$$(8.14)\qquad \mu(r) \leqslant c \log T^{\#}(r) + O(\log r) \qquad \|_g,$$

где объединение исключительных интервалов I удовлетворяет условию $\int_I dr^{\mu_0} < \infty$.

Все будет доказано, если мы, используя (8.10), покажем, что (8.14) справедливо для *всех* больших r.

Выберем $\mu_0 > \lambda$, где λ взято из оценки (8.10). Полагая

$$n(D_f, r) = \int_{D_f[r]} \psi_{m-1},$$

обычным интегрированием по частям формул для $N(D_f, r)$ и $n(D_f, r)$ (см. [16, стр. 223 русского перевода]) получим, что $n(D_f, r) = O(r^{\lambda})$. Отсюда следует, что

$$\int_I \frac{n(D_f, r)}{r}\, dr \leqslant c_1 \int_I dr^{\mu_0} < \infty.$$

Пусть (r_1, r_2) — интервал из исключительного множества I и $r_1 < r < r_2$. Тогда, согласно (8.11) и поскольку B — алгебраический дивизор,

$$\begin{aligned} \mu(r) &= T^{\#}(r) + N(S, r) - N(B, r) - N(D_f, r) \leqslant \\ &\leqslant T^{\#}(r_2) + N(S, r_2) - N(D_f, r_1) + O(\log r) = \\ &= \mu(r_2) + N(D_f, r_2) - N(D_f, r_1) + O(\log r) = \\ &= O(\log r_2) + \int_{r_1}^{r_2} \frac{n(D_f, r)\, dr}{r} = O(\log r_2) + O(1). \end{aligned}$$

Кроме того, $\log r_2 = \log r + \int_r^{r_2} \frac{dr}{r} < \log r + O(1)$ и, следовательно,

$$\mu(r) = O(\log r). \quad \blacksquare$$

(d) ТОЧНОСТЬ РЕЗУЛЬТАТОВ

В классическом случае голоморфных отображений

$$A \xrightarrow{f} V,$$

комплексно одномерных многообразий ($\dim_{\mathbf{C}} A = 1 = \dim_{\mathbf{C}} V$) хорошо известно, что соотношение дефектов (7.8) и его следствия, такие, как предложение (8.8), являются точными утверждениями. В случае $\dim_{\mathbf{C}} V > 1$ интересующие нас условия на дивизор D таковы:

$$(8.15)\qquad \begin{cases} c(D) + c(K_V) > 0, \\ D \text{ имеет простые нормальные самопересечения.} \end{cases}$$

Возникает вопрос, насколько эти условия точны. Имеется несколько соображений в пользу их точности, однако полного доказательства у нас нет.

Вот одно из таких соображений. Пусть $V = \mathbf{P}^2$ и $D = L_1 + \ldots + L_k$ — сумма комплексных прямых. Спрашивается, будет ли любое голоморфное отображение

$$f\colon \mathbf{C}^2 \to \mathbf{P}^2 \setminus D$$

вырожденным? Если $k \leqslant 3$, то $c(D) + c(K_{\mathbf{P}^2}) \leqslant 0$, и при $k \leqslant 2$ существуют невырожденные рациональные отображения, а при $k = 3$ — невырожденные трансцендентные отображения. Например, если $k = 3$ и D имеет нормальные самопересечения, то

$$\mathbf{P}^2 \setminus D \cong \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^* \quad (\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}).$$

Предположим теперь, что $k = 4$, но $D = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$ не имеет нормальных самопересечений; скажем, L_1, L_2 и L_3 проходят через одну точку. Если в качестве L_4 взять бесконечно удаленную прямую, то

$$\mathbf{P}^2 \setminus D \cong (\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}) \times \mathbf{C}^*.$$

Любое голоморфное отображение $\mathbf{C}^2 \xrightarrow{f} \mathbf{P}^2 \setminus D$ вырождено, однако если взять $A = (\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}) \times \mathbf{C}$ и положить $f(z, w) = (z, e^w)$, то мы получим невырожденное трансцендентное отображение

$$A \xrightarrow{f} \mathbf{P}^2 \setminus D,$$

и, таким образом, в этой ситуации большая теорема Пикара (8.8) окажется неверной.

В общем случае предположим, что M — (возможно, не компактное) комплексное многообразие размерности n, обладающее

C^∞-формой объема Ω. Пусть $\rho=(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ и

$$P(\rho)=\{z=(z_1, \ldots, z_n)\in \mathbf{C}^n\colon |z_j|\leqslant \rho_j\}$$

— поликруг. Обозначим через $\Phi=\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{i}{2\pi}\,dz_j\wedge d\bar{z}_j\right)$ стандартную форму объема в $\mathbf{C}^n$ и условимся говорить, что M обладает *свойством Шотки — Ландау*, если для любого нормированного голоморфного отображения

$$f\colon P(\rho)\to M, \qquad (f^*\Omega)(0)\geqslant\Phi(0),$$

произведение радиусов

$$\rho_1\ldots\rho_n\leqslant c<\infty.$$

(8.16) Предложение. *Если* $\operatorname{Ric}\Omega>0$ *и* $(\operatorname{Ric}\Omega)^n\geqslant\Omega$, *то* M *обладает свойством Шотки — Ландау.*

Доказательство. Это следует из леммы Альфорса; см. предложение (2.7) в [11]. Другое доказательство можно получить при помощи II о.т., как сделано в § 6 (а) статьи [6]. ■

Предположим теперь, что V — проективное многообразие, D — дивизор на V и $M=V\setminus D$. Тогда M обладает свойством Шотки — Ландау, если выполняются условия (8.15). Обратно, если $V=\mathbf{P}^n$, а D — сумма гиперплоскостей и если $V\setminus D$ обладает свойством Шотки — Ландау, то условия (8.15) справедливы для некоторого дивизора $\tilde{D}\leqslant D$ (выше мы проверили это в случае $n=2$).

Вообще обратный вопрос очень интересен, и даже в случае, когда D — пустой дивизор. Чтобы сформулировать возникающий здесь вопрос, мы сначала заметим, что требования (8.16) слишком сильны для того, чтобы гладкое проективное многообразие V обладало свойством Шотки — Ландау. В самом деле, из (6.16) следует, что V обладает этим свойством, если оно является многообразием общего типа (подробнее см. [14]).

(8.17) Вопрос. Если V обладает свойством Шотки — Ландау, то будет ли оно многообразием общего типа?

Замечание. Если V — кривая, то ответ, очевидно, положителен. Вопрос можно выяснить и для поверхностей, разве что за исключением поверхностей $K3$. Это достигается проверкой на основе классификации поверхностей, причем нетривиальным является только эллиптический случай.

В общем случае трудности при проверке (8.17) заключаются в отсутствии теоремы униформизации при $\dim_{\mathbf{C}}V>1$ — из-за этого совсем не очевидно, как строить голоморфные отображения в V.

9. ЕЩЕ ДВЕ ВАРИАЦИИ НА ТЕМУ КРИВИЗНЫ И ВТОРОЙ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

(а) АНАЛОГ «ЛЕММЫ О ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ПРОИЗВОДНОЙ» Р. НЕВАНЛИННЫ

Все результаты § 7 и 8 основывались на существовании формы объема Ψ на $V\setminus D$, удовлетворяющей трем условиям из (6.4). Среднее из этих условий можно понимать как утверждение о том, что «кривизна отрицательна и отграничена от нуля» (см. обсуждение после (0.6)). Мы хотим здесь отметить, что это условие иногда можно ослабить до такого: «кривизна отрицательна, но может стремиться к нулю при подходе к D». При использовании такого условия можно, вероятно, получить более тонкие оценки, чем в предыдущем случае.

Пусть V — гладкое проективное многообразие, обладающее обильным антиканоническим расслоением $K_V^*\to V$. Рассмотрим мероморфную n-форму Λ на V, у которой нет нулей, а полярный дивизор D имеет простые нормальные самопересечения.

Пример. Пусть $V=\mathbf{P}^n$ с аффинными координатами $(w_1, \ldots, w_n)$ и однородными координатами $[\xi_0, \ldots, \xi_n]$. Тогда рациональная n-форма

$$\Lambda=\frac{\sum_{\alpha=0}^{n}(-1)^\alpha\xi_\alpha\,d\xi_0\wedge\cdots\wedge\widehat{d\xi_\alpha}\wedge\cdots\wedge d\xi_n}{\xi_0\cdots\xi_n}=\frac{dw_1\wedge\cdots\wedge dw_n}{w_1\cdots w_n} \tag{9.1}$$

удовлетворяет нашим требованиям.

Предположим, что $f\colon \mathbf{C}^n\to V$ — трансцендентное невырожденное голоморфное отображение, сохраняющее размерность. Тогда $f^*\Lambda=\Lambda_f$ — мероморфная n-форма, не равная тождественно нулю в $\mathbf{C}^n$, и мы полагаем

$$\Lambda_f=\zeta\,dz_1\wedge\ldots\wedge dz_n, \qquad \nu_f(r)=\int_{\partial c^n[r]}\log^+|\zeta|\,\eta. \tag{9.2}$$

Обозначим через $T_1(r)=T(K_V^*, r)$ функцию порядка (7.1) для антиканонического расслоения.

(9.3) Предложение. *Имеет место оценка*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\nu_f(r)}{T_1(r)}=0.$$

Замечание. Чтобы лучше понять смысл этого предложения, рассмотрим классический случай целой трансцендентной мероморфной функции $w=f(z)$. Взяв в качестве Λ форму (9.1) при $n=1$, мы получим из (9.2), что

$$\nu_f(r)=\int_{|z|=r}\log^+\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|d\theta \qquad (z=re^{i\theta}).$$

Если обозначить функцию порядка для f просто через $T(r)$, то предложение (9.3) примет вид

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\int\limits_{|z|=r}\log^+\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|d\theta}{T(r)}=0. \tag{9.4}$$

Этот результат является слабой формой «леммы о логарифмической производной» Р. Неванлинны, изложенной в [16, стр. 241—247]. Напомним, что Неванлинна доказал более сильную оценку, справедливую для любой, не обязательно трансцендентной $f(z)$, а именно

$$\int\limits_{|z|=r}\log^+\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|d\theta=O(\log r+\log T(r)) \qquad \|_g. \tag{9.5}$$

Наш метод, по-видимому, можно усовершенствовать настолько, чтобы он позволил доказать (9.5) (см. [16, стр. 259]). Однако в любом случае свойства (9.4) достаточно для вывода неванлинновских соотношений дефектов из его довольно элементарной второй основной теоремы, приведенной на стр. 240 в [16].

Доказательство. Пусть $\sigma\in H^0(V,\ K_V^*)$ — голоморфное сечение, определяющее полярный дивизор D формы Λ, и пусть C^∞-форма объема Ω на V такова, что $\operatorname{Ric}\Omega=c_1(K_V)=dd^c\log|\sigma|^2$. Как обычно, мы можем считать, что $\|\sigma\|_V<\delta_0$ для любого заданного $\delta_0>0$. Рассмотрим сингулярную форму объема

$$\Psi_\varepsilon=\frac{\Omega}{(\log|\sigma|^2)^2\|\sigma\|^{2+2\varepsilon}}$$

из (6.10). Полагая $f^*\Psi_\varepsilon=\xi_\varepsilon\Phi$, мы непосредственно получаем, что

$$\log^+|\zeta|\leqslant\log^+|\xi_\varepsilon|+\varepsilon\log\frac{1}{|\sigma|^2}+\log(\log|\sigma|^2)^2. \tag{9.6}$$

Положим $\mu_\varepsilon(r)=\frac{1}{n}\int\limits_{\partial C^n[r]}\log^+|\xi_\varepsilon|\,\eta$ (вспомните (5.10)); интегрируя (9.6) и используя вогнутость логарифма, находим, что

$$2v(r)\leqslant n\mu_\varepsilon(r)+\varepsilon m(D,\ r)+2\log[m(D,\ r)]+O(1).$$

Применяя (5.11), получаем неравенство

$$\lim_{r\to\infty}\frac{v(r)}{T_1(r)}\leqslant\frac{n}{2}\lim_{r\to\infty}\frac{\mu_\varepsilon(r)}{T_1(r)}+\varepsilon,$$

Так как $\varepsilon>0$ произвольно, то наше предложение будет следовать из оценки

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\mu_\varepsilon(r)}{T_1(r)}\leqslant\frac{\varepsilon}{n}. \tag{9.7}$$

Мы докажем (9.7), выводя II о. т. для формы объема Ψ_ε. Согласно (6.9), функция $\log\xi_\varepsilon$ локально интегрируема, и мы имеем следующее равенство в потоках:

$$dd^c\log\xi_\varepsilon=R-(1+\varepsilon)D_f+\operatorname{Ric}\Psi_\varepsilon, \tag{9.8}$$

где R — дивизор критических точек отображения f. Дважды интегрируя (9.8), как в доказательстве (6.23), приходим к соотношению

$$\int\limits_0^r\left\{\int\limits_{C^n[t]}\operatorname{Ric}f^*\Psi_\varepsilon\wedge\varphi_{n-1}\right\}\frac{dt}{t^{2n-1}}+N_1(r)=$$
$$=(1+\varepsilon)N(D_f,\ r)+\int\limits_{\partial C^n[r]}\log\xi_\varepsilon\cdot\eta. \tag{9.9}$$

Из (9.9) и I о. т. выводится неравенство

$$\int\limits_0^r\left\{\int\limits_{C^n[t]}\operatorname{Ric}f^*\Psi_\varepsilon\wedge\varphi_{n-1}\right\}\frac{dt}{t^{2n-1}}\leqslant cT_1(r)+n\mu_\varepsilon(r). \tag{9.10}$$

Используя предложение (6.9) и те же соображения, что и в доказательстве (7.19), мы получим из оценки (9.10) неравенство

$$\int\limits_0^r\left\{\int\limits_{C^n[t]}\xi_\varepsilon^{1/n}|\sigma|^{2\varepsilon/n}\Phi\right\}\frac{dt}{t^{2n-1}}\leqslant c_1T_1(r)+\mu_\varepsilon(r). \tag{9.11}$$

Так как $\alpha\geqslant e^{\log^+\alpha}-1$ $(\alpha\geqslant0)$ и $\log|\sigma|\leqslant0$, то

$$\exp\left(\frac{1}{n}\log^+\xi_\varepsilon+\frac{\varepsilon}{n}\log|\sigma|^2\right)\leqslant\xi_\varepsilon^{1/n}|\sigma|^{2\varepsilon/n}+1.$$

Подставляя это в (9.11) и еще раз интегрируя, мы придем к неравенству

$$\int\limits_0^r\left\{\int\limits_0^t\left(\int\limits_{\partial C^n[s]}\exp\left(\frac{1}{n}\log^+\xi_\varepsilon+\frac{\varepsilon}{n}\log|\sigma|^2\right)\eta\right)s^{2n-1}\,ds\right\}\frac{dt}{t^{2n-1}}\leqslant \tag{9.12}$$
$$\leqslant c_1T_1(r)+c_2r^2+\mu_\varepsilon(r).$$

Чтобы устранить в (9.12) интегралы, сошлемся на лемму (7.23) и, взяв $g(r)=r$, $\alpha(r)=r^{1+\lambda}$ $(\lambda>0)$, получим, что

$$f'(r)\leqslant[f(r)]^{1+\lambda} \qquad \|_g. \tag{9.13}$$

Применим это неравенство к левой части (9.12) в качестве $f(r)$; мы найдем, что

$$(9.14)\quad \int_0^r \left(\int_{\partial \mathbf{C}^n[t]} \exp\left(\frac{1}{n}\log^+ \xi_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{n}\log|\sigma|^2\right)\eta \right) t^{2n-1}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant r^{2n-1}(c_1 T_1(r) + c_2 r^2 + \mu_\varepsilon(r))^{1+\lambda} \qquad \|_\varepsilon.$$

Еще раз применяя (9.13), теперь уже к левой части (9.14), мы придем к оценке

$$(9.15)\quad \int_{\partial \mathbf{C}^n[r]} \exp\left(\frac{1}{n}\log^+ \xi_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{n}\log|\sigma|^2\right)\eta \leqslant$$

$$\leqslant r^{\delta_1}(c_1 T_1(r) + c_2 r^2 + \mu_\varepsilon(r))^{1+\delta_2} \qquad \|_\varepsilon,$$

где δ_1 и δ_2 можно сделать сколь угодно малыми. Теперь в левой части (9.15) воспользуемся вогнутостью логарифма и свойством $\log^+(\alpha+\beta) \leqslant \log^+\alpha + \log^+\beta + \log 2$; это даст

$$(9.16)\quad \mu_\varepsilon(r) \leqslant \frac{\varepsilon}{n} m(D, r) + c_3 \log T_1(r) + c_4 \log r + c_5 \log \mu_\varepsilon(r) \qquad \|_\varepsilon.$$

Разделив на $T_1(r)$ и воспользовавшись трансцендентностью f (согласно которой $\varlimsup_{r\to\infty} \log r/T_1(r) = 0$), мы получим из (9.16), что

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\mu_\varepsilon(r)}{T_1(r)} \leqslant \frac{\varepsilon}{n}. \blacksquare$$

Замечание. Изложенное доказательство дает оценку

$$(9.17)\quad \mu_\varepsilon(r) \leqslant \frac{\varepsilon}{n} T_1(r) + O(\log T_1(r)) + O(\log r) \qquad \|_\varepsilon,$$

в которой исключительные интервалы зависят от ε. Очевидно, это утверждение менее сильно, чем (9.5).

(b) ГОЛОМОРФНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В ОТРИЦАТЕЛЬНО ИСКРИВЛЕННЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

До сих пор наши применения II о. т. ограничивались голоморфными отображениями f: $A \to V$, образ которых содержит открытое подмножество V. Однако этот метод применим и в других ситуациях. В качестве иллюстрации мы докажем один вариант недавней теоремы М. Квак.

Начнем с двух определений.

Определение. Комплексное многообразие V называется *отрицательно искривленным*, если на нем существует эрмитова метрика ds^2_V, для которой все *кривизны* K *голоморфных сечений* удовлетворяют условию $K \leqslant -c < 0$.

Следующая лемма стандартна (дальнейшее обсуждение и ссылки на литературу см. в [11]).

(9.18) Лемма. *Предположим, что V — отрицательно искривленное многообразие, S — комплексное многообразие и $S \xrightarrow{f} V$ — голоморфное погружение. Тогда кривизны голоморфных сечений для индуцированной метрики $f^* ds^2_V$ не превосходят соответствующих кривизн для метрики ds^2_S. В частности, S — тоже отрицательно искривленное многообразие.*

Обозначим через ω_V (1, 1)-форму, соответствующую ds^2_V.

Определение. Предположим, что V — квазипроективное отрицательно искривленное комплексное многообразие. Обильное линейное расслоение $L \to V$ называется *ограниченным*, если существуют метрика на L и сечения $\sigma_0, \ldots, \sigma_N \subset H^0(V, L)$, такие, что (i) кривизна $c(L)$ для этой метрики удовлетворяет условию

$$0 < c(L) < A\omega_V \qquad (A = \text{const});$$

(ii) сечения $\sigma_0, \ldots, \sigma_N$ имеют ограниченную длину, и отображение $[\sigma_0, \ldots, \sigma_N]$: $V \hookrightarrow \mathbf{P}^N$ индуцирует алгебраическое вложение V.

Пример 1. Если V — проективное (и, значит, компактное) и отрицательно искривленное многообразие, то любое линейное расслоение на V ограничено. (*Замечание.* Кажется, еще не известно, является ли отрицательно искривленное компактное многообразие обязательно проективным.)

Пример 2. Предположим, что X — *ограниченная симметрическая область* и Γ — *арифметическая подгруппа* группы автоморфизмов X. В общем случае Γ не обязана действовать свободно на X; но некоторая подгруппа конечного индекса будет действовать без неподвижных точек на X, и мы не много потеряем, если предположим, что это условие выполняется. Хорошо известно, что $V = X/\Gamma$ — отрицательно искривленное многообразие, так как *метрика Бергмана* на X имеет отрицательные кривизны голоморфных сечений (эти кривизны $\leqslant -c < 0$) и инвариантна относительно Γ. Важная теорема Бейли — Бореля [2] утверждает, что V — квазипроективное многообразие.

(9.19) Лемма. *На V существует обильное ограниченное линейное расслоение.*

Доказательство. Пусть $K \to X$ — каноническое линейное расслоение с единственной (с точностью до константы) метрикой, инвариантной относительно группы автоморфизмов X. Для этой метрики форма кривизны

$$c(K) = \omega_X$$

является (1, 1)-формой, соответствующей ds^2_X. Таким образом, остается показать, что для достаточно большого μ найдутся Γ-инвариантные голоморфные сечения $\sigma_0, \ldots, \sigma_N$ расслоения $K^\mu \to X$, которые имеют ограниченные длины и индуцируют проективное вложение X/Γ. Такие сечения σ в общем случае называются *автоморфными формами веса* μ на Γ; среди этих автоморфных форм есть *параболические формы* (cusp forms), так сказать, «равные нулю в бесконечности» на X/Γ (см. [2]). Эти формы имеют ограниченные длины и, как показано в [2], при достаточно большом μ индуцируют проективное вложение X/Γ. ■

(9.20) Предложение. *Предположим, что V — квазипроективное отрицательно искривленное комплексное многообразие, обладающее ограниченным обильным линейным расслоением $L \to V$. Тогда любое голоморфное отображение $f\colon A \to V$ алгебраического многообразия A в V является рациональным.*

Замечание. Эта большая теорема Пикара будет доказана в локальной форме в приложении (следующее ниже доказательство тоже можно локализовать).

(9.21) Следствие (Квак). *Если V — отрицательно искривленное проективное многообразие, то любое голоморфное отображение $A \xrightarrow{f} V$ рационально.*

(9.22) Следствие ([5]). *Если $V = X/\Gamma$ — фактор ограниченной симметрической области по арифметической группе автоморфизмов, то любое голоморфное отображение $A \xrightarrow{f} V$ рационально.*

Доказательство предложения (9.20). Очевидно, можно считать, что A — аффинное многообразие. Пусть σ — сечение L, имеющее ограниченную длину и дивизор D. Нам надо показать, что дивизоры

$$D_f = f^{-1}(D)$$

указанного вида являются алгебраическими и имеют на A равномерно ограниченную степень. Так как можно рассматривать лишь алгебраические кривые, лежащие в A, то достаточно доказать, что

$$\deg D_f \leqslant c < \infty$$

в случае, когда A само представляет собой аффинную кривую.

Итак, пусть $A \subset \mathbf{C}^N$ — аффинная кривая с гармонической функцией исчерпания

$$\tau(x) = \log |\pi(x)|,$$

где $A \xrightarrow{\pi} \mathbf{C}$ — проекция (см. § 2). Мы хотим доказать соотношение

$$N(D_f, r) = O(\log r) \tag{9.23}$$

для считающей функции, соответствующей дивизору D_f, с равномерной оценкой "O". Будем считать, что $|\sigma(z)| \leqslant 1$ для всех $z \in V$, и положим

$$\begin{cases} \varphi = dd^c |\pi(x)|^2, \\ \theta_\varepsilon = |\sigma_f|^{2\varepsilon} \omega_f = \xi_\varepsilon \varphi, \\ T(r) = \int\limits_0^r \left(\int\limits_{A[t]} \omega_f \right) \frac{dt}{t} \quad \text{(функция порядка)}, \end{cases} \tag{9.24}$$

где $\omega_f = f^* \omega_V$ и $\sigma_f = f^*(\sigma) \in H^0(A, f^*L)$. Из леммы (9.18) и определения ограниченности линейного расслоения $L \to V$ следует, что

$$\operatorname{Ric} \theta_\varepsilon = -\varepsilon f^* c(L) + \operatorname{Ric} \omega_f \geqslant c_1 \omega_f \quad (c_1 > 0), \tag{9.25}$$

если ε выбрано достаточно малым. Комбинируя (9.24) и (9.25), мы получаем следующее равенство в потоках на A (см. § 6 (b)):

$$dd^c \log \xi_\varepsilon = R + \varepsilon D_f - B + \operatorname{Ric} \theta_\varepsilon \geqslant R + \varepsilon D_f - B + c_1 \omega_f, \tag{9.26}$$

где R — дивизор критических точек f и B — дивизор ветвления проекции $A \xrightarrow{\pi} \mathbf{C}$. Полагая

$$\omega_f = \xi \varphi \ (\geqslant \xi_\varepsilon \varphi, \text{ ибо } |\sigma_f| \leqslant 1), \quad \mu(r) = \int\limits_{\partial A[r]} \log \xi \cdot d^c \tau,$$

мы можем дважды проинтегрировать (9.26) и получить оценку

$$c_1 T(r) + N(R, r) + \varepsilon N(D_f, r) \leqslant N(B, r) + \mu(r). \tag{9.27}$$

Далее, $N(B, r) \leqslant d \cdot \log r$, где d — число точек ветвления проекции $A \xrightarrow{\pi} \mathbf{C}$, и, согласно (7.22),

$$\mu(r) \leqslant \log \frac{d^2 T(r)}{ds^2} \qquad \left(\frac{d}{ds} = r \frac{d}{dr} \right).$$

Используя эти два неравенства в (9.27), получаем

$$T(r) + \frac{\varepsilon}{c_1} N(D_f, r) \leqslant c_2 \log r + c_3 \log \frac{d^2 T(r)}{dr^2}. \tag{9.28}$$

Разделив на $T(r)$ и перейдя к пределу в (9.28), мы приходим, как и в § 7 (b), к оценке

$$1 + \frac{\varepsilon}{c_1} \varliminf_{r \to \infty} \frac{N(D_f, r)}{T(r)} \leqslant c_3 \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\log r}{T(r)}. \tag{9.29}$$

Рассматривая ее как оценку снизу для правой части, мы получаем неравенство

$$T(r) \leqslant c_4 \log r,$$

а затем из оценки для левой части (9.29) находим, что

$$N(D_f, r) \leqslant c_5 \log r.$$

Это и есть нужная нам оценка (9.23). ■

Замечание. Оригинальная формулировка теоремы Квак такова. Предположим, что $\overline{V}$ — компактное аналитическое пространство, содержащее комплексное многообразие V как дополнение к некоторому подмножеству S. Предположим, что V отрицательно искривлено, и обозначим через $d_V(p, q)$ расстояние между точками p и q в метрике ds^2_V на V. Предположим, что выполняется следующее условие[1]):

(9.30) «если $\{p_n\}, \{q_n\} \in V$ и $p_n \to p$, $q_n \to q$,
где $p, q \in \overline{V}$, причем $d_V(p_n, q_n) \to 0$, то $p = q$».

Тогда любое голоморфное отображение $f\colon D^* \to V$ проколотого круга $D^* = \{0 < |t| < 1\} \subset \mathbf{C}$ в V продолжается в точку $t = 0$ до отображения $\bar{f}\colon D \to \overline{V}$, где $D = \{|t| < 1\}$.

Наше доказательство, основанное на теории Неванлинны, можно применить для получения аналога этого результата. Чтобы его сформулировать, предположим, что $\overline{V}$ — проективное многообразие (возможно, с особенностями) с кэлеровой метрикой $\varphi_{\overline{V}}$. Пусть ω_V есть (1, 1)-форма, соответствующая отрицательно искривленной метрике ds^2_V на V, и пусть $K_V(\xi)$ — кривизна голоморфного сечения вдоль (1, 0)-вектора $\xi \in T^1(V)$. Предположим еще, что выполняется следующее условие:

(9.31) $$cK_V(\xi)\,\omega_V(\xi) \leqslant -\varphi_{\overline{V}}(\xi) \qquad (\xi \in T'(V), \quad c > 0)$$

(это верно, в частности, если удовлетворяется условие

(9.32) $$\varphi_{\overline{V}}(\xi) \leqslant c\omega_V(\xi) \qquad (\xi \in T'(V)),$$

в некотором смысле аналогичное (9.30)).

(9.33) Предложение. *При условии* (9.31) *любое голоморфное отображение* $A \xrightarrow{f} V$ *рационально.*

Нам не известно, выполняется ли условие (9.31) автоматически, если метрика ds^2_V полна.

[1]) Это условие называется гиперболической вложенностью многообразия V в $\overline{V}$. — *Прим. ред.*

ПРИЛОЖЕНИЕ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО БОЛЬШИХ ТЕОРЕМ ПИКАРА В ЛОКАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Пусть M — связное комплексное многообразие, $S \subset M$ — аналитическое подмножество и

(П.1) $$f\colon M \setminus S \to W$$

— голоморфное отображение в квазипроективное многообразие W. Мы говорим, что f продолжается до *мероморфного отображения* $M \xrightarrow{\bar{f}} W$, если прообраз $f^*\varphi$ всякой рациональной функции φ на W мероморфно продолжается на S.

(П.2) Предложение. *Предположим, что* (i) $W = V \setminus D$, *где* V *— гладкое проективное многообразие и* D *— дивизор с простыми нормальными самопересечениями, такой, что* $c(K^*_V) + c(D) > 0$; (ii) *образ* $f(M \setminus S)$ *содержит некоторое открытое подмножество* W. *Тогда отображение* f *мероморфно продолжается на* M.

Замечания. (i) Так как аффинное алгебраическое многообразие имеет вид

$$A = \bar{A} \setminus S,$$

где $\bar{A}$ — гладкое проективное многообразие и $S \subset \bar{A}$ — некоторый дивизор, и так как имеется эквивалентность: (мероморфная функция ζ на A мероморфно продолжается на S) $\Leftrightarrow$ (ζ рациональна относительно алгебраической структуры на A), то из предложения П.2 вытекает предложение (8.8). (ii) Наше доказательство предложения (П.2) будет в равной мере применимо к ситуации § 9 (b), и мы получим следующий результат:

(П.3) Предложение. *Пусть* V *— квазипроективное отрицательно искривленное комплексное многообразие, обладающее ограниченным обильным линейным расслоением* $L \to V$ (см. § 9 (b)). *Тогда любое голоморфное отображение* (П.1) *мероморфно продолжается на* S.

В частности, это даст теорему А. Бореля (9.22) в ее первоначальной формулировке.

Доказательство предложения (П.2). Для простоты будем считать, что $\dim_{\mathbf{C}} M = \dim_{\mathbf{C}} V$, и тогда якобиан f не равен тождественно нулю. Так как всякая мероморфная функция, определенная вне аналитического множества коразмерности не меньше двух, мероморфно продолжается на него (теорема Э. Леви), то мы можем считать, что S — гладкая комплексная гиперповерхность в M. Выбирая локальные координаты в окрестности точки $x \in S$,

мы можем, наконец, предположить, что $M=\{(z_1, \ldots, z_n)\colon |z_j|<1,\ j=1, \ldots, n\}$, $S=\{z_1=0\}$, так что $M\setminus S$ есть *проколотый поликруг*. Пусть $P \xrightarrow{\pi} M\setminus S$ — универсальное накрытие $M\setminus S$ обычным поликругом P. Обозначим через Θ форму объема на $M\setminus S$, индуцированную метрикой Пуанкаре на P (см. [11]). В явном виде она задается формулой

$$\Theta=\frac{c\,dz_1\wedge d\bar z_1}{|z_1|^2(\log|z_1|^2)^2}\left\{\prod_{j=2}^{n}\frac{dz_j\wedge d\bar z_j}{(1-|z_j|^2)^2}\right\} \tag{П.4}$$

[см. лемму (3.4) на стр. 447 статьи [11] (стр. 127 русского перевода)].

Пусть $L\to V$ — обильное линейное расслоение. Для каждого дивизора $E\in|L|$ мы полагаем $E_f=f^{-1}(E)$, рассматривая его как дивизор на $M\setminus S$. Достаточно показать, что всякий такой E_f продолжается до дивизора $\bar E_f$ на M ($\bar E_f$ — замыкание E_f в M). Этого на самом деле достаточно, так как мероморфная функция ψ на $M\setminus S$ продолжается до мероморфной функции на M тогда и только тогда, когда каждое множество уровня $\psi=a$ продолжается до дивизора на M (это легко следует из обычной *теоремы Римана о продолжении*).

Рассмотрим на $V\setminus D$ форму объема Ψ, определенную в (6.3). Выберем в $L\to V$ метрику и обозначим через $\sigma\in H^0(V, L)$ сечение, которому соответствует дивизор $E\in|L|$. Определим новую форму объема

$$\Psi_\varepsilon=|\sigma|^{2\varepsilon}\Psi \qquad (\varepsilon>0). \tag{П.5}$$

Из соотношения $\operatorname{Ric}\Psi_\varepsilon=\varepsilon c(L)+\operatorname{Ric}\Psi$ на $M\setminus D$ мы видим, что, выбирая ε достаточно малым и подбирая подходящие константы, можно считать, что

$$\operatorname{Ric}\Psi_\varepsilon>0, \qquad (\operatorname{Ric}\Psi_\varepsilon)^n\geqslant\Psi_\varepsilon. \tag{П.6}$$

Из *леммы Альфорса* (предложения (2.7) в [11]) следует, что

$$f^*\Psi_\varepsilon\leqslant\Theta. \tag{П.7}$$

Пусть теперь Φ — евклидова форма объема на $M\subset\mathbf{C}^n$, и пусть

$$f^*\Psi_\varepsilon=\zeta_\varepsilon\Phi. \tag{П.8}$$

На $M\setminus S$ имеет место равенство в потоках (см. (6.16))

$$R+\varepsilon E_f+f^*(\operatorname{Ric}\Psi_\varepsilon)=dd^c\log\zeta_\varepsilon. \tag{П.9}$$

Из него следует основное неравенство

$$E_f\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\,dd^c\log\zeta_\varepsilon \tag{П.10}$$

между положительными потоками E_f и $dd^c\log\zeta_\varepsilon$ на $M\setminus S$. Принимая во внимание лемму Альфорса (П.7) и явную формулу (П.4) для Θ, мы получаем

$$0\leqslant\zeta_\varepsilon\leqslant\frac{c}{|z_1|^2(\log|z_1|^2)^2}\left\{\prod_{j=2}^{n}\frac{1}{(1-|z_j|^2)^2}\right\}. \tag{П.11}$$

Из (П.11) следует, что для каждой точки $x\in S$ найдутся окрестность $U\ni x$ в M и число $\delta>0$, такие, что функция

$$\mu_{\delta,\varepsilon}=\log\zeta_\varepsilon+(1+\delta)\log|z_1|^2 \tag{П.12}$$

плюрисубгармонична всюду в U, включая $U\cap S$, где она равна $-\infty$. Используя результаты работы [4], можно решить неравенство

$$\int_D|u|^2e^{-N\log\mu_{\delta,\varepsilon}}\Phi<\infty$$

для голоморфной функции $u\in\mathcal{O}(U)$, $u\not\equiv0$, при достаточно большом N. Учитывая (П.5), (П.9) и (П.12), мы видим, что

$$R\cup E_f\cup S\subset\{u=0\},$$

а отсюда следует, что $\bar E_f\cap U$ есть аналитический дивизор в U. ■

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ahlfors L., The theory of meromorphic curves, Acta Soc. Sci. Fenn Ser. A, v. 3, № 4.

[2] Baily W., Borel A., Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains, *Ann. of Math.*, 84 (1966), 442—528.

[3] Bieberbach L., Beispiel zweier ganzer Funktionen zweier komplexer Variablen welche eine schlicht volumetreue Abbildung des R_4 auf einer Teil seiner selbst vermitteln, *Preuss. Akad. Wiss. Sitzungsber.* (1933), 476—479.

[4] Bombieri E., Algebraic values of meromorphic maps, *Invent. Math.*, 10 (1970), 267—287.

[5] Borel A., Some metric properties of arithmetic quotients of symmetric spaces and an extension theorem, *Jour. Diff. Geom.*, 6 (1972), 543—560.

[6] Carlson J., Griffiths P., A defect relation for equidimensional holomorphic mappings between algebraic varieties, *Ann. of Math.*, 95 (1972), 557—584.

[7] Cornalba M., Shiffman B., A counterexample to the „Transcendental Bezout problem", *Ann. of Math.*, 96 (1972), 402—406.

[8] Draper R., Intersection theory in analytic geometry, *Math. Ann.*, 180 (1969), 175—204.

[9] Federer H., Geometric measure theory, Springer, New York, 1969.

[10] Green M., Picard theorems for holomorphic mappings into algebraic varieties, Thesis at Princeton University, 1972.

[11] Griffiths P., Holomorphic mappings into canonical algebraic varieties, *Ann. of Math.*, 93 (1971), 439—458. [Русский перевод в сб. *Математика*, 18 : 1 (1974), 120—137.]

[12] Hironaka H., Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, I and II, *Ann. of Math.*, 79 (1964), 109—326.

[13] King J., The currents defined by analytic varieties, *Acta Math.*, 127 (1971), 185—220.

[14] Kodaira K., On holomorphic mappings of polydiscs into compact complex manifolds, *Jour. Diff. Geom.*, 6 (1971), 33—46.

[15] Lelong P., Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives, Gordon and Breach, Paris—London—New York, 1968.

[16] Nevanlinna R., Analytic Functions, Springer, New York, 1970. [Русский перевод более раннего издания: Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941.]

[17] Stoll W., The growth of the area of a transcendental analytic set, I and II, *Math. Ann.*, 156 (1964), 47—78 and 144—170.

[18] Stoll W., Value distribution of holomorphic maps into compact complex manifolds, Lecture notes № 135, Springer, Berlin—Heidelberg—New York, 1970.

[19] Stoll W., A Bezout estimate for complete intersections, *Ann. of Math.*, 96 (1972), 361—401.

[20] Thie P., The Lelong number of a point of a complex analytic set, *Math. Ann.*, 172 (1967), 269—312.

[21] Wu H., The equidistribution theory of holomorphic curves, Annals of Math. Studies, № 64, Princeton University Press, 1970. [Русский перевод: Ву Х., Теория равнораспределении для голоморфных кривых, «Мир», М., 1973.]

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

1*. Carlson J., A remark on the transcendental Bezout problem, In Value-Distribution theory, part A, Marcel Dekker, Inc., New York, 1974, pp. 133—143.

2*. Carlson J., Griffiths Ph., The order function for entire holomorphic mappings, ibid., pp. 225—248.

3*. Griffiths Ph., Some remarks on Nevanlinna theory, ibid., pp 1—11.

4*. King J., Refined residues, Chern forms, and intersections, ibid., pp. 169—190.

5*. Shiffman B., Applications of geometric measure theory to value distribution theory for meromorphic maps, ibid., pp. 63—95.

6*. Sakai F., Degeneracy of holomorphic maps with ramification, *Invent. math.*, 26 (1974), 213—231.

7*. Skoda H., Sous-ensembles analytiques d' ordre fini ou infini dans $\mathbf{C}^n$, *Bull. Soc. Math. France*, 100 (1972), 353—408.

8*. Griffiths Ph. A., On the Bezout problem for entire analytic sets, *Ann. Math.*, 100 (1974), 533—552

9*. Pan I., Analytic sets of finite order, *Math. Z.*, 116 (1970), 271—299.

10* Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, «Мир», М., 1969.

11*. Cornalba M., Griffiths Ph., Analytic cycles and vector bundles on noncompact algebraic varieties, *Invent. Math.*, 28 (1975), 1 — 106.

12*. Griffiths Ph., Function theory of finite order on algebraic varieties, *J. Diff. Geom.*, 6 (1972), 285 — 306; 7 (1972), 45 — 66.

13*. Carlson J., A moving lemma for the transcendental Bezout problem, *Ann. Math.*, 103 (1976), 305 — 330.

14*. Green M., Some examples and counterexamples in value distributions for several variables, *Compositio Math.*, 30:3 (1975), 317 — 332.

15*. Green M., Some Picard theorems for holomorphic mappings to aglebraic varieties, *Amer. J. Math.*, 97:1 (1975), 43 — 75.